UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
MESTRADO PROFISSIONAL

FLODOALDO MORENO JÚNIOR

MÉTODOS DE RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DO SEGUNDO E DO TERCEIRO GRAU

CAMPO GRANDE - MS
Abril de 2013

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
MESTRADO PROFISSIONAL

FLODOALDO MORENO JÚNIOR

MÉTODOS DE RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DO SEGUNDO E DO TERCEIRO GRAU

ORIENTADOR: Prof. Dr. CLAUDEMIR ANIZ

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional do Centro de Ciências Exatas e Tecnologia – CCET/UFMS, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre.

CAMPO GRANDE - MS
Abril de 2013

MÉTODOS DE RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DO SEGUNDO E DO TERCEIRO GRAU

FLODOALDO MORENO JÚNIOR

Trabalho de Conclusão de Curso submetido ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Centro de Ciências Exatas e Tecnologia, da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre.

Aprovado pela Banca Examinadora:

Prof. Dr. Claudemir Aniz – UFMS

Profa. Dra. Elisabete Sousa Freitas – UFMS

Prof. Dr. Vando Narciso - UEMS

CAMPO GRANDE – MS

ABRIL DE 2013

Aos meus pais Flodoaldo e Neuza,
A tia Laene
A minha irmã Cristiane,
Ao meu cunhado Luizinho,
A minha esposa Renata e filha Camila, as quais tanto amo.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus que sempre me guiou 700 km semanais nesses dois anos de Mestrado.

Aos professores e colegas do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, pelo companheirismo e amizade, em especial ao Renato que, entre todos, foi o que mais me motivou e animou nos momentos mais difíceis.

Ao Prof. Dr. Claudemir Aniz, pela paciência e disponibilidade que sempre demonstrou. Ao auxílio à pesquisa de material bibliográfico, pelas ótimas sugestões e conselhos sugeridos, os quais enriqueceram este trabalho.

Aos elaboradores do Profmat por ter disponibilizado um material rico de informações e detalhes que num futuro próximo com certeza será utilizado como material de apoio e pesquisa.

A CAPES pelo apoio financeiro.

E, em especial, a tia Nair e toda a família Barbosa, os quais me acolheram tão bem desde janeiro de 2012 a janeiro de 2013 em sua residência.

[...] suas aulas eram bem humoradas e cheias de entusiasmo pela Matemática. Eram também claras, bem organizadas, objetivas e eficientes. Sempre conseguia dar todo o programa oficial do ano. Explicava com bastante cuidado os pontos mais difíceis e requeria dos alunos apenas o que lhes ensinava. Assim, cumpria seu dever da melhor maneira possível...” LIMA, Elon Lages[1]

[1] Trecho retirado do livro *Meu Professor de Matemática* de Elon Lages Lima sobre o seu professor Benedito de Morais.

RESUMO

O presente estudo é tanto uma experiência realizada com os alunos da 3ª série do Ensino Médio quanto uma revisão bibliográfica. No primeiro momento, temos os relatos e as observações ocorridas através da experiência realizada em sala de aula a respeito das formas de serem demonstradas as resoluções algébricas da equação do segundo grau. Posteriormente, a revisão bibliográfica ocorre nas resoluções geométricas e nas curiosidades encontradas na Revista do Professor de Matemática sobre o tema a equação do segundo grau. E para finalizar, realizamos a demonstração da equação do terceiro grau, no caso a fórmula de Cardano, cabe ressaltar que para facilitar a compreensão foram propostos exemplos.

Palavras-chave: equação do segundo grau, métodos geométricos, equação do terceiro grau.

ABSTRACT

This present study is an experiment with students from the 3rd grade of an elementary school as well as a bibliographic review. At the beginning of this study we have some reports and remarks that accured in the experiment which was realized in the classroom and treats about the ways to demosntrate the algebraic resolutions equation of the second degree. Subsequently, the bibliographic review occurs in the geometric resolutions in the curiosities found in the Mathematic Teacher's Magazine about equation of the second degree. At the end, we realize the demonstration equation of the third degree, that's the Cardano's formula in order to understand the comprehension were proposed some examples.

Keywords: equation of the second degree; geometrical methods; equation of the third degree.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Na expectativa de auxiliar os alunos do Ensino Médio no aprofundamento do estudo das equações do segundo grau e função quadrática, melhorando os seus conceitos algébricos, não apenas na simples utilização da fórmula resolvente, além de ajudar os professores do Ensino Médio durante o estudo das funções quadráticas, que desejam rever em sala de aula as forma de resoluções de uma equação do segundo grau, demonstro neste trabalho as soluções algébricas e geométricas da equação do segundo grau. Embasado no que foi citado na Revista do Professor de Matemática nº 6:

> O ensino relativo à resolução de equação do 2º grau tem restringido praticamente à apresentação da fórmula e, algumas vezes, das relações entre os coeficientes e raízes. Poucos livros do 2º grau trazem uma explicação satisfatória para aqueles que querem entender melhor o assunto. Geralmente a curiosidade surge em relação à maneira de como apareceu a fórmula e não quanto ao seu uso. É conveniente que se mostre e justifique, durante sua reapresentação para os alunos do 2º grau, o surgimento da fórmula de resolução. PASTOS[2]

Faço uma revisão bibliográfica de algumas dissertações, livros e artigos, principalmente da Revista do Professor de Matemática (RPM), para dar início a este trabalho. Por esta razão, no primeiro capítulo realizo as demonstrações algébricas da fórmula resolvente da equação do segundo grau, retiradas de uma dissertação, relatando as dificuldades ocorridas durante uma experiência realizada em sala de aula com os alunos da 3ª série do Ensino Médio.

Para despertar o interesse dos alunos durante as aulas, uma alternativa é a manipulação de materiais concretos, então no segundo capítulo, reviso alguns métodos de resoluções geométricos da equação do segundo grau, pois para realiza-los é necessário o uso de materiais concretos na construção geométrica e deste modo melhorando a compreensão algébrica e geométrica do conteúdo pertinente à equação do segundo grau.

No terceiro capítulo faço uma pequena coletânea de curiosidades sobre as resoluções e métodos de se formular a solução de uma equação do segundo grau que é atribuída ao matemático hindu Bháskara. Considerando que devemos saber muito mais que nossos

[2] PASTOS, L P., **Equação do 2º grau: completando quadrados**. **A fórmula de Bháskara**. Revista do Professor de Matemática, nº 6, 1985, p. 36-38.

alunos para que assim possamos ensiná-los, o quarto e último capítulo destina-se a fórmula de Cardano, realizando a demonstração da resolução da equação do terceiro grau e apresentando alguns exemplos.

CAPÍTULO 1 – RESOLUÇÕES ALGÉBRICAS DA EQUAÇÃO DO 2º GRAU

Para oferecer uma motivação inicial aos alunos, antes de iniciar os conceitos sobre o tópico de função quadrática é interessante elaborar uma introdução não completamente algébrica da função quadrática, mas sim uma problematização mais voltada ao cotidiano do aluno como, por exemplo:

> Como captar o movimento de uma bola de futebol chutada pelo goleiro? O goleiro coloca a bola em jogo com um chute forte. A bola sobe até um ponto máximo e começa a descer descrevendo, assim, uma curva que recebeu o nome de parábola. O físico italiano Galileu Galilei, 1564 a 1642, estudou atentamente movimentos como o desta bola e concluiu que, se não fosse a resistência do ar, qualquer corpo solto no campo de gravidade da Terra se movimentaria do mesmo modo. Ou seja, ao fim de 1 segundo percorreria cerca de $5 \times 1^2 = 5$ metros; depois de 2 segundos, percorreria cerca de $5 \times 2^2 = 20$ metros; depois de 3 segundos, $5 \times 3^2 = 45$ metros; e assim sucessivamente. Desta forma, depois de x segundos, percorreria $5 \times x^2$ metros, onde 5 é aproximadamente a metade da aceleração da gravidade em metros por segundo, em cada segundo. Isto é o mesmo que escrever função $f(x) = 5x^2$. Galileu agrupou todos esses elementos em um importante conceito matemático: função quadrática. Toda função na qual a variável x aparece com o expoente máximo igual a 2 é chamada de função quadrática, ou polinomial de segundo grau, pois o expoente máximo da variável é o quadrado.[3]

O estudo das equações polinomiais do segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$, sendo $a, b\ e\ c\ \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, seja no final do Ensino Fundamental, como no início do Ensino Médio resume-se, muitas vezes, apenas na aplicação da fórmula de Bháskara por meio de mera substituição dos coeficientes $a, b\ e\ c$. No entanto, muitos outros aspectos envolvendo a equação do segundo grau podem ser explorados. Neste capítulo apresentarei alguns.

Primeiramente os alunos acreditam que seja muito instrutivo procurar resolver tais equações pelo mesmo procedimento utilizado nas equações do 1º grau, por meio do isolamento da incógnita x. O aluno, de imediato percebe a dificuldade nesta situação dada pelo termo ax^2, com $a \in \mathbb{R} - \{0\}$. Assim sendo, acabamos introduzindo a razão do desenvolvimento que originou a fórmula de Bháskara.

Neste momento cito a Dissertação de Mágno Luiz Ferreira[4], onde ele reuniu sete demonstrações, que desenvolviam a fórmula citada com passos algébricos diferentes. E, é

---

[3] Disponível em: < http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=25077 >

[4] FERREIRA, M. L., **Álgebra: como as crenças dos professores influenciam na aprendizagem dos alunos**. UFRJ, Instituto de Matemática – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, 2009.

com este material de auxílio, que inicio a minha Revisão Bibliográfica e, ao mesmo tempo, uma experiência com os meus alunos da 3ª série do ensino médio.

Durante o início do 4º Bimestre, trabalhei de forma diferente o conteúdo de polinômios, optei em desenvolver as demonstrações algébricas da fórmula de Bháskara na 3ª série do Ensino Médio. Ao invés de iniciar com o conteúdo propriamente dito sobre polinômio, comecei com uma revisão do conteúdo relativo à função quadrática e, pude perceber que nem todos os alunos realmente sabiam a fórmula de Bháskara, assim sendo dividi a sala em sete grupos, de tal forma que os alunos conhecessem a fundo pelo menos uma das demonstrações, que foram retiradas da dissertação de FERREIRA. Do material entregue aos grupos eu não fiz nenhuma alteração, da parte digitada que retirei da dissertação, o que fiz foram apenas algumas orientações (em cada grupo), após a entrega do material a fim de ajudá-los, de como as demonstrações poderiam ser apresentadas para o restante da sala, na semana seguinte. O intuito não foi escolher ou reconhecer a melhor ou a mais fácil das demonstrações, mas sim aumentar a compreensão algébrica dos alunos, pois antes das demonstrações em lousa, a serem realizadas pelos grupos de alunos, surgiram várias dificuldades, por exemplo, em produtos notáveis (completar os quadrados).

Sobre as demonstrações realizadas em sala de aula, elas foram feitas da mesma ordem apresentada na dissertação, preferi não alterar a sequência, pois percebi uma ordem cronológica da publicação dos livros de onde as demonstrações foram retiradas. Durante as demonstrações realizadas pelos alunos, foi possível perceber que, por mais que estivessem escritas com passos algébricos diferentes, algumas eram as mesmas, porém umas com mais e outras com menos detalhes, então agora faço a minha classificação das formas de se chegar à fórmula resolvente $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, com $\Delta = b^2 - 4ac$, que aqui no Brasil é mais conhecida como fórmula de Bháskara. Deste modo, ocorre que os comentários sobre as demonstrações realizadas pelos grupos não estão na mesma ordem em que foram realizados em sala de aulas.

Nas quatro próximas seções, após as demonstrações, temos os comentários sobre os grupos que as realizaram e nas demais seções inicia-se a revisão bibliográfica.

1.1 – RESOLUÇÃO POR COMPLETAMENTO DE QUADRADOS

Considere a equação $ax^2 + bx + c = 0$, sendo a, b e $c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. Dividem-se por a os termos da equação: $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \iff x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$.

Adiciona-se a cada membro $\frac{b^2}{4a^2}$ de modo a formar o quadrado de um binômio:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \iff \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2}\ .$$

Caso $b^2 - 4ac < 0$, torna-se impossível (em reais) continuar o cálculo, caso contrário, extraímos a raiz quadrada membro a membro: $x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$.

Simplificando a expressão: $x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \iff x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

Esta forma de se resolver apareceu em três grupos no 1º, 3º e 7º, as observações realizadas foram as seguintes.

Comentário sobre o 1º grupo: a equação entregue aos educandos apresentava a seguinte forma $x^2 + bx + c = 0$ sendo que a resolução demonstrada foi expressa assim: $x = -\frac{1}{2}\ b \pm \sqrt{\frac{1}{4}\ b^2 - c}$, e quando o grupo iniciou a experiência, eles já foram mencionando que o que eles estavam fazendo não era propriamente a fórmula de Bháskara e sim uma “derivada” (usaram a palavra derivada, no sentido dela ser um pouco parecida) dela, mas na verdade faltou a fórmula estar representada de uma forma mais simplificada, creio que o grupo deveria extrair a raiz quadrada do denominador e aí sim a fórmula final ficaria representada por $x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4c}}{2}$ que na visão dos alunos é bem mais parecida com a de Bháskara. Pelo fato de terem sido o 1º grupo tiveram uma dificuldade no desenvolvimento do binômio $\left(x + \frac{1}{2}b\right)^2$para poder ser comparado com $x^2 + bx + \frac{1}{4}b^2$, pois a não assimilação e dificuldade do assunto produto notável (quadrado da soma) explicado no Ensino Fundamental e utilizado durante todo o Ensino Médio são enormes.

Comentário sobre o 3º grupo: Nesta demonstração o grupo responsável ainda teve uma dificuldade para efetuar o completamento do quadrado perfeito, diferente dos demais grupos que as demonstrações possuíam detalhes dos passos efetuados, a explicação do grupo foi péssima, pois eles apenas escreveram o que eu havia passado para eles, sem acrescentar nada durante a execução em lousa, o que comprova que não dominavam os conceitos algébricos básicos, pelo fato deles terem sido o 3º grupo a se apresentarem tiveram a sorte de abancar conceitos já explicados anteriormente e a compreensão dos demais alunos foi bem melhor do que as apresentadas anteriormente. Esta é a demonstração da fórmula de Bháskara que faço em lousa, quando sou indagado por curiosos, pois na verdade foram raros os casos que demonstrei, normalmente apenas mostro a fórmula já pronta, ou seja, $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.

Comentário sobre o 7º grupo: Os estudantes não tiveram nenhuma dificuldade na demonstração, por ser também a última a ser exposta, detalhava muito os passos realizados e os alunos notaram semelhanças com o que já havia sido visto nas demonstrações anteriores.

1.2 – RESOLUÇÃO POR FATORAÇÃO

Considere a equação $ax^2 + bx + c = 0$, sendo $a, b\ e\ c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, chamaremos de (1). Para resolvermos esta equação comecemos por dividir ambos os seus membros por a. Obtendo então a equação equivalente $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ ou $x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$ que chamaremos de (2).

Adicionando a ambos os membros da equação a expressão $\frac{b^2}{4a^2}$ deste modo obtemos a equação $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$ ou ainda $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$ que chamaremos de (3), onde o 1º membro desta equação é o desenvolvimento do binômio $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ assim temos que a equação (3) pode ser escrita sob a forma $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$.

Se $b^2 - 4ac$ for positivo ou nulo, a equação anterior é equivalente a equação $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}\right)^2 = 0$ ou $\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right) = 0$ que chamaremos de (4), donde resulta em $x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = 0$ e portanto $x = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

Percebendo assim que a equação (1) admite duas raízes dadas pelas fórmulas $x' = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ e $x" = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ que podem ser reunidas em uma única fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Esta forma de se resolver apareceu em dois grupos no 4º e no 5º, as observações realizadas foram as seguintes.

Comentário do 4º grupo: O grupo responsável por esta demonstração teve mais facilidade, pois até a metade dela pode ser usada conceitos que haviam sido utilizados na demonstração anterior, mas agora com detalhes mais minuciosos, porém na metade da demonstração, para ser mais exato na passagem da equação (3) para a equação (4) o grupo responsável apresentou uma dificuldade na elaboração da fatoração diferença de quadrados para o produto notável (soma e diferença de dois termos que é um assunto visto no Ensino Fundamental).

Comentário do 5º grupo: A apresentação desta demonstração teve uma maior compreensão pelos alunos, pois esta demonstração utilizou de conceitos já utilizados em outras e as dúvidas dos alunos que assistiram e fizeram a apresentação foram mínimas, até mesmo nas justificativas relativas aos "porquês". Na primeira justificativa os alunos comentaram que é possível dividir por a, pois em toda equação quadrática o coeficiente do termo quadrado é sempre diferente de zero (que já foi dito em outra demonstração anterior) e sobre a segunda indagação de que é necessário que o radicando seja sempre positivo ou nulo (maior ou igual a zero e não apenas maior) para que as raízes encontradas sejam sempre um número real.

1.3 – RESOLUÇÃO ESCRITA

Para esta demonstração alguns passos foram omitidos, pelo fato de que o intuito era a resolução na forma escrita, e se esta demonstração fosse realizada no início das aulas nenhum aluno entenderia realmente o que foi feito. Segue-se a forma como foi apresentada a demonstração na dissertação:

$$ax^2 + bx + c = 0 \iff x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$\iff x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}} \iff x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$\iff x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

E ao final foi dada a fórmula escrita não apenas de forma algébrica e também por extenso, ou seja:

$$x = \frac{-\, o\ coeficiente\ de\ x \pm \sqrt{o\ quadrodo\ do\ coeficiente\ de\ x - 4\ vezes\ o\ produto\ do\ coeficiente\ de\ x^2 pelo\ termo\ independente}}{2\ vezes\ o\ coeficiente\ de\ x^2}$$

Esta forma de se resolver apareceu em um único grupo, as observações realizadas foram as seguintes.

Comentário sobre o 6º grupo: Na apresentação desta demonstração, mesmo sendo omitidos vários passos a participação dos alunos foi enorme, pois eles já sabiam alguns passos que foram omitidos e eles próprios terminaram de completar na demonstração e assim pude perceber que a compreensão estava ocorrendo com a grande maioria dos alunos, outro fato interessante foi a comparação que os alunos fizeram da fórmula na forma algébrica com a forma por extenso, chegando a ser elaboradas piadas sobre como seriam outras fórmulas, inclusive de outras disciplinas, mas a conclusão que é as duas são a mesma coisa, porém escrever algebricamente é bem melhor.

Curiosidade: A forma escrita é como se fosse uma espécie de receita, conforme os babilônios já faziam em relação a um problema antigo que era para calcular quais eram os dois números, sendo dado o valor da soma e do produto.

> Eleve ao quadrado a metade da soma, subtraia o produto e extraia a raiz quadrada da diferença. Some ao resultado a metade da soma. Isso dará o maior dos números procurados. Subtraia da soma para obter o outro número LIMA[5]

---

[5] LIMA, E. L., **A equação do segundo grau**. Revista do Professor de Matemática, n°13, IMPA: Rio de Janeiro, 1988, p. 21-25.

Transcrevendo o que foi dito na receita temos:

$$x = \frac{S}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{S}{2}\right)^2 - P}$$

1.4 – RESOLUÇÃO PELO MÉTODO DE VIÈTE[6]

Considere a equação $x^2 + bx + c = 0$, sendo $a, b\ e\ c\ \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. Fazendo-se $x = u + v$, onde u e v são incógnitas auxiliares, e substituindo na equação, temos:

$$a(u + v)^2 + b(u + v) + c = 0 \iff a(u^2 + 2uv + v^2) + bu + bv + c = 0$$

$$\iff au^2 + 2auv + av^2 + bu + bv + c = 0$$

Manipulando a equação ficaremos com:

$$av^2 + 2auv + bv + au^2 + bu + c = 0 \iff av^2 + (2au + b)v + au^2 + bu + c = 0$$

Para facilitar os cálculos Viète anulou o coeficiente de grau 1, transformando numa equação incompleta de grau 2 na incógnita v, para isso escolheu $2au + b = 0 \Rightarrow u = \frac{-b}{2a}$.

Obteve assim a equação:

$$av^2 + a\left(\frac{-b}{2a}\right)^2 + b\left(\frac{-b}{2a}\right) + c = 0 \iff av^2 + \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c = 0$$

$$\iff av^2 + \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c = 0 \iff av^2 + \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a} = 0$$

$$\iff v^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Como $4a^2$ é sempre positivo, então se $b^2 - 4ac \geq 0$ temos $v = \pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Assim $x = u + v \Rightarrow x = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

---

[6] AMARAL, J. T., **Método de Viète para resolução de equação do segundo grau**. Revista do Professor de Matemática, n° 13, 1988, p. 18-20.

Esta forma de se resolver apareceu em apenas um grupo, as observações realizadas foram as seguintes.

Comentário sobre o 2º grupo: Pelo fato desta demonstração ter sido a segunda a ser elaborada em lousa pelos alunos entre todas as outras demonstrações, esta é a que apresentou o maior grau de dificuldade. Sendo assim, durante a apresentação tive que auxiliá-los algumas vezes. O grupo responsável por esta demonstração, primeiramente se perdeu na elaboração da equação $x = u + v$, pelo fato de ser necessário após a substituição efetuar o quadrado da soma (Produtos Notáveis é um tópico do Ensino Fundamental), logo depois na justificativa do porque $u = -\frac{b}{2a}$, sendo com $a \neq 0$ (condição de domínio de uma função, denominador sempre diferente de zero), e finalmente na manipulação para se chegar em $v^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$. Esta demonstração da fórmula de resolução de uma equação do segundo grau, foi a menos produtiva tanto para o grupo que a reproduziu (mesmo sendo este grupo composto de alunos que apresentaram um bom desempenho e comportamento), quanto para a clientela que assistiu. A escolha do valor arbitrário $u = -\frac{b}{2a}$, para muitos foi como um passe de mágica e não como um artifício para facilitar e simplificar a equação, contrariando o que AMARAL comentou no seu artigo na RPM 13 que para se chegar à fórmula resolvente é de fácil compreensão e sem grandes artifícios.

Ressalvo ainda que Viète reconhecia apenas as raízes positivas, e como já foi citado por LIMA[7], que o artifício utilizado no método de Viète não foi tão mais proveitoso nas resoluções de equações do segundo grau quanto foi para as resoluções do terceiro grau, pois foi ele que sugeriu um novo modo de atacar a resolução das equações do terceiro grau, reduzindo-as de tal forma que o termo quadrático se anulasse.

Comentário geral: Apresentar formas diferentes de demonstrar resoluções da equação do segundo grau mesmo que similares foi bastante produtivo, ainda que pareça algo impossível de se acreditar, a quantidade de alunos que concluem o Ensino Médio e fazem confusão com a conhecida fórmula de Bháskara é enorme. Outro fato encontrado foi à dificuldade em se aplicar os produtos notáveis e a fatoração em algumas demonstrações.

[7] LIMA, E. L., **A Equação do Terceiro Grau**. Matemática Universitária, nº 5, 1987, p. 9-23.

Talvez, o momento de se efetuar tal atividade não tenha sido o mais propício, pois o correto e melhor seria apresentar tais demonstrações durante o 2º Bimestre do 1º ano do Ensino Médio, que é o momento no qual o Referencial Curricular do Mato Grosso do Sul, nos orienta para ser lecionado o assunto função quadrática, para que os problemas algébricos relativos a tal função tenham uma melhor compreensão, ainda mais quando em alguns exercícios retirados de vestibulares, não seja apenas o cálculo das raízes de uma função quadrática, mas sim envolva conceitos teóricos e que os coeficientes $a, b\ e\ c$ não são apenas números ou o cálculo envolvido é para determinar algum intervalo de variação que envolva não apenas a incógnita x e sim algum outro parâmetro relacionado a um dos coeficientes $a, b\ ou\ c$.

Pelo fato de realizar várias demonstrações de se resultar na fórmula resolvente da equação do segundo grau em sala de aula, certamente houve um amadurecimento e uma melhor compreensão algébrica dos alunos da 3º série, e espera-se ainda que nos próximos anos quando os alunos dessa sala específica forem fazer algum curso superior ou técnico que exija o conhecimento sobre a resolução de uma equação do segundo grau tenham o mínimo possível de dúvidas ou dificuldades.

1.5 – RESOLUÇÃO PELA FORMA CANÔNICA

No estudo da álgebra nos deparamos com inúmeras circunstâncias em que com algumas manipulações algébricas podemos obter novas formas de escrever expressões já conhecidas. Nesta seção apresentarei a função quadrática não mais na sua forma algébrica tradicional é sim na forma canônica.

A função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, sendo $a, b\ e\ c\ \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$ pode ser escrita na forma $f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$. Os dois primeiros termos dos parênteses são correspondentes do quadrado de $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}$, completando o quadrado temos $f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right)$, ou seja, $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a}$, que é chamada de forma canônica.

Sendo $m = -\frac{b}{2a}$ e $k = \frac{4ac-b^2}{4a}$, a forma canônica fica $f(x) = a(x-m)^2 + k$. Deste modo é fácil de obter a fórmula das raízes.

$$a(x-\ m)^2 + k = 0 \ \Leftrightarrow \ a(x-m)^2 = -k$$

$$\Leftrightarrow (x-m)^2 = -\frac{k}{a} \ \Leftrightarrow \ (x-m)^2 = -\frac{4ac-b^2}{4a^2}$$

$$\Leftrightarrow x - m = \pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} \ \Leftrightarrow \ x = +m \pm \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Comentário: De novidade em como se resultar na fórmula resolvente não teve, pois fizemos apenas uma substituição de coeficientes, a vantagem existente é que a partir da forma canônica é mais fácil calcular o ponto de vértice $\big(V = (m,k)\big)$, as raízes, o ponto de foco $\left(F = \left(m, k + \frac{1}{4a}\right)\right)$ e a reta diretriz $\left(y = k - \frac{1}{4a}\right)$. O fato de maior importância aqui percebido é que quando “treinamos” os alunos a transformarem uma função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ (algébrica usual) para a forma canônica $f(x) = a(x-m)^2 + k$, automaticamente eles estarão aplicando conceitos vistos no Ensino Fundamental, no caso, fatoração e produtos notáveis, pois esses tópicos quando não são bem assimilados pelos alunos implicará uma grande complicação futura seja no Ensino Médio ou no Superior. Como exemplo, imagine um aluno que esteja estudando limites e tenha dificuldade em fatorar, todas as formas de se resolver serão encaradas como “mágica”.

1.6 – SOMA E PRODUTO

A equação $x^2 - Sx + P = 0$ possui raízes x_1 e x_2 se, e somente se, $x_1 + \ x_2 = S$ e $x_1 . x_2 = P$. Ou seja, resolver a equação é equivalente a encontrar números x_1 e x_2 tal que a sua soma seja S e o seu produto igual a P.

De fato, se x_1 e x_2 são as raízes da equação, então:

$$x^2 - Sx + P = (x - x_1)(x - x_2)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - Sx + P = x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - Sx + P = x^2 - (x_1 + \ x_2)x + x_1x_2$$

Logo $S = x_1 + \ x_2$ e $P = x_1.x_2$

Reciprocamente, se $x_1 + \ x_2 = S$ e $x_1.x_2 = P$, então substituindo $x_2 = S - x_1$ em $x_1.x_2 = P$ ficamos com $x_1.(S - x_1) = P \Leftrightarrow -{x_1}^2 + Sx_1 = P \Leftrightarrow {x_1}^2 - Sx_1 + P = 0$, o que comprova que x_1 é raiz da equação. Analogamente se substituirmos $x_1 = S - x_2$ em $x_1.x_2 = P$, constataremos que x_2 também é raiz da equação.

Esta forma equivalente de enxergar as soluções de uma equação do segundo grau será utilizada nos próximos capítulos.

CAPÍTULO 2 – RESOLUÇÃO GEOMÉTRICA DA EQUAÇÃO DO 2º GRAU

Neste capítulo apresentaremos métodos geométricos de encontrar as soluções de uma equação do segundo grau.

2.1 – RESULTADOS DA GEOMETRIA PLANA

Nesta seção são apresentados alguns resultados da geometria plana que nos auxiliaram nas demais seções deste capítulo.

O arco capaz: considere dois pontos A e B sobre uma circunferência. Para todo ponto M sobre um dos arcos, o ângulo $AMB = \theta$ é constante.

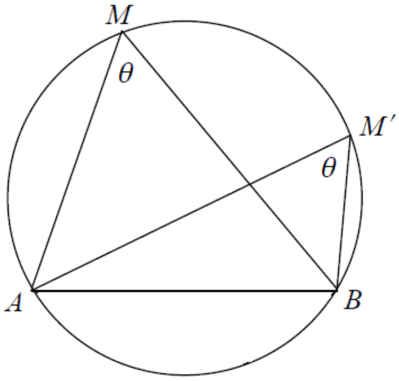

Figura 1

E ainda é interessante notar que se M é qualquer ponto da circunferência de diâmetro AB o ângulo AMB é reto. Por isso, cada semicircunferência de diâmetro AB é chamado de arco capaz de 90º sobre AB.

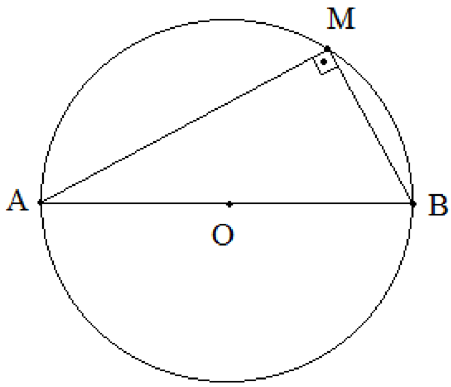

Figura 2

Nos casos a seguir usaremos a seguinte relação métrica do triângulo retângulo.

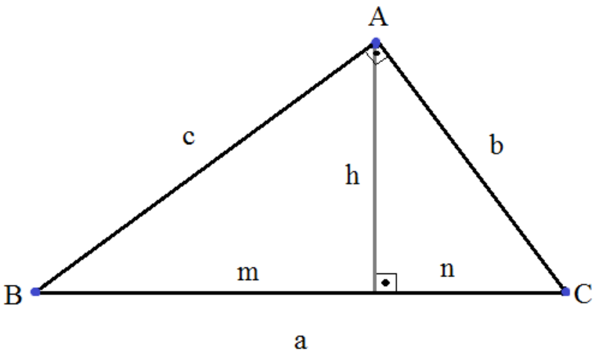

Figura 3

$$h^2 = m \,.\, n$$

Usaremos ainda que as potências de um ponto externo em relação a uma circunferência têm a seguinte relação $\overline{PT}^2 = \overline{PA}.\overline{PB}$.

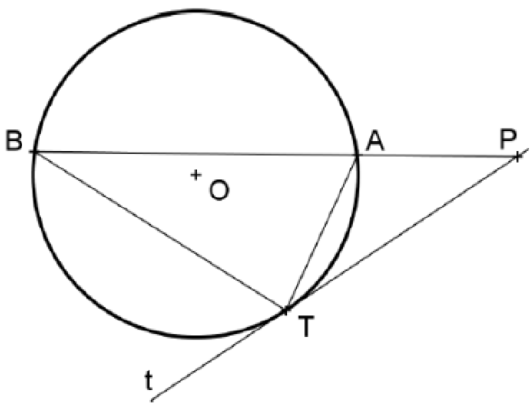

Figura 4

2.2 – RÉGUA E COMPASSO

Com o auxílio do artigo de TUNALA[8] iremos determinar por meio do uso de régua e compasso as raízes da equação $x^2 + bx + c = 0$, para isso faremos ainda mais uma suposição $c \neq 0$, caso contrário as raízes da equação sempre seriam 0 e $-b$. Com esta suposição temos dois casos a considerar:

[8] TUNALA, N., **Resolução geométrica da equação do 2º grau.** Revista do Professor de Matemática, nº 12, 1988, p. 33-35.

1º caso: $c > 0$

Neste caso, as raízes x_1 e x_2 da equação têm o mesmo sinal, dado que $x_1 . x_2 = c$. Além disso, $\begin{cases} |x_1| + |x_2| = |b| \\ |x_1| . |x_2| = |c| \end{cases}$. De fato,

i) Se $x_1 < 0$ e $x_2 < 0$ então $x_1 + x_2 = -b < 0$, ou seja, $b > 0$.
Assim $|x_1| + |x_2| = -x_1 - x_2 = -(x_1 + x_2) = -(-b) = |b|$.

ii) Se $x_1 > 0$ e $x_2 > 0$ então $x_1 + x_2 = -b > 0$, ou seja, $b < 0$.
Assim $|x_1| + |x_2| = x_1 + x_2 = -b = |b|$.

O problema consiste em determinar dois segmentos de reta cuja soma seja $|b|$ e que o produto deles seja $|c|$ ou simplesmente c, já que $c > 0$.

Construção

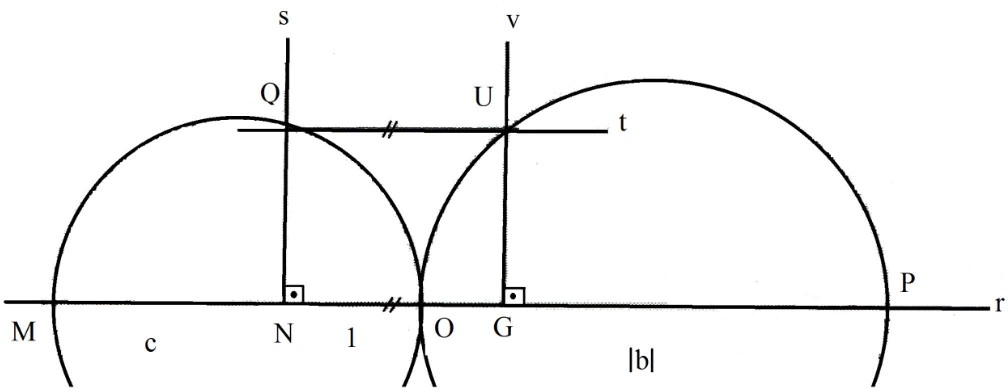

Figura 5

Procedimentos Geométricos

1. Tracemos uma reta r e, sobre ela marquemos os segmentos $\overline{MN} = |c|$, $\overline{NO} = 1$ e $\overline{OP} = |b|$
2. A seguir, tracemos duas semicircunferências tendo $\overline{MO}$ e $\overline{OP}$ como diâmetro.
3. Por N levantamos a perpendicular s à reta r, determinando Q na semicircunferência de diâmetro $\overline{MO}$. Assim pela relação métrica do triangulo retângulo

$$\overline{NQ}^2 = \overline{MN}.\overline{NO} = c\,.1 = c \;\Leftrightarrow\; \overline{NQ} = \sqrt{c}\,.$$

4. Por Q tracemos a reta t, paralela a r, determinando U na semicircunferência de diâmetro $\overline{OP}$. Por U tracemos a reta v, perpendicular a r, determinando G em r.
5. Os segmentos $\overline{OG}$ e $\overline{GP}$ representam os valores absolutos das raízes da equação. De fato: $\overline{GU} = \overline{NQ} = \sqrt{c}$, usando o conceito de arco capaz $\overline{GU}^2 = \overline{OG}\,.\overline{GP} \;\Rightarrow c = \overline{OG}\,.\overline{GP}$

Além disto, por construção, $|b| = \overline{OG} + \overline{GP}$, então $\overline{OG}$ e $\overline{GP}$ são dois segmentos cuja soma é $|b|$ e o produto é c. Lembrando as seguintes considerações:

- Se $b < 0$, então as raízes são positivas, ou seja, $x_1 = \overline{OG}$ e $x_2 = \overline{GP}$.
- Se $b > 0$, então as raízes são negativas, ou seja, $x_1 = -\overline{OG}$ e $x_2 = -\overline{GP}$.

OBS: Se a reta t, suporte, não interceptar a semicircunferência de diâmetro $\overline{OP}$, isto é, se $\sqrt{c} < \frac{|b|}{2}$, as raízes são imaginárias e a construção não permite determiná-las. O mesmo corre, em particular, no caso degenerado $b = 0$ (com $c > 0$)

2º caso: $c < 0$

Neste caso, as raízes x_1 e x_2 da equação têm sinais contrários e supondo que $|x_1| > |x_2|$ devemos ter $\begin{cases} |x_1| - |x_2| = |b| \\ |x_1|.|x_2| = |c| \end{cases}$. De fato,

i) Se $x_1 < 0$ e $x_2 > 0$ então $x_1 + x_2 = -b < 0$, ou seja, $b > 0$.
   Assim $|x_1| - |x_2| = -x_1 - x_2 = -(x_1 + x_2) = -(-b) = |b|$.
ii) Se $x_1 > 0$ e $x_2 < 0$ então $x_1 + x_2 = -b > 0$, ou seja, $b < 0$.
   Assim $|x_1| - |x_2| = x_1 + x_2 = -b = |b|$.

O problema consiste em determinar dois segmentos de reta cuja diferença seja $|b|$ e que o produto deles seja $|c|$.

Construção

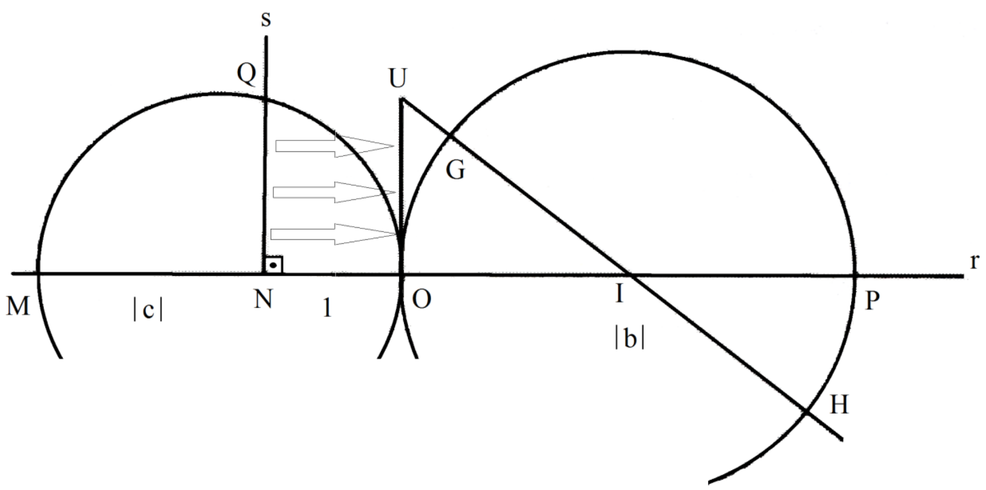

Figura 6

Procedimentos Geométricos

Da mesma forma seguem-se os passos (1), (2) e (3) do caso anterior.

1. Translademos $\overline{NQ}$ numa direção paralela a s, obtendo o segmento $\overline{OU}$.
2. Liguemos U ao centro I da circunferência, determinando o diâmetro $\overline{GH}$.
3. Os segmentos $\overline{UH}$ e $\overline{UG}$ representam os valores absolutos das raízes da equação. De fato: $\overline{UH} - \overline{UG} = \overline{GH} = |b|$ (diâmetro), e também pelo fato de tanto $\overline{OU}$ ser tangente quanto de $\overline{UH}$ ser secante a circunferência de diâmetro $\overline{OP}$, temos:

$$\overline{OU} = \overline{NQ} = \sqrt{c}$$

$$\overline{OU}^2 = \overline{NQ}^2 = |c|$$

$$\overline{OU}^2 = \overline{UH}.\overline{UG}$$

$$|c| = \overline{UH}.\overline{UG}$$

Então $\overline{UH}$ e $\overline{UG}$ são dois segmentos cuja diferença é $|b|$ e o produto é $|c|$. Lembrando as seguintes considerações:

- Se $b < 0$, então as raízes são: $x_1 = \overline{UH}$ e $x_2 = -\overline{UG}$.
- Se $b > 0$, então as raízes são: $x_1 = -\overline{UH}$ e $x_2 = \overline{UG}$.

OBS: Neste caso, o problema sempre tem solução. Se $b = 0$, temos o caso degenerado em que $I = O = G = H$ (o raio da circunferência de centro I é zero, ou seja, não existe a circunferência) e as raízes serão $\overline{UO}$ e $-\overline{UO}$.

É conveniente ressaltar que a aplicação por este método de resolução geométrica da equação do segundo grau tenha, de preferência, que as raízes reais sejam números inteiros e que os coeficientes b e c sejam também inteiros e pequenos, para facilitar, pois os alunos acabam não possuindo materiais que seja de boa precisão e assim por aproximação encontrem o resultado esperado. Resolvendo um exemplo numérico de cada caso discriminado temos:

$$\begin{cases} 1^{\underline{o}}\ caso\text{: } x^2 - 6x + 8 = 0 \\ 2^{\underline{o}}\ caso\text{: } x^2 + 2x - 8 = 0 \end{cases}$$

Solução da equação $\boldsymbol{x^2 - 6x + 8 = 0}$

Devemos determinar dois números sabendo que a soma é 6 e o produto é 8, considerando esses valores já em módulos, por essas condições, $c > 0$ e $b < 0$, já se espera duas raízes positivas.

Procedimentos Geométricos

- ✓ Tracemos uma reta r e, sobre ela marquemos os segmentos $\overline{MN} = 8$, $\overline{NO} = 1$ e $\overline{OP} = 6$.
- ✓ A seguir, tracemos duas semicircunferências tendo $\overline{MO}$ e $\overline{OP}$ como diâmetro.
- ✓ Por N levantamos a perpendicular s à reta r, determinando Q na semicircunferência de diâmetro $\overline{MO}$. Assim $\overline{NQ}^2 = \overline{MN}\,.\overline{NO} = 8$ e $\overline{NQ} = \sqrt{8}$.
- ✓ Por Q tracemos a reta t, paralela a r, determinando U na semicircunferência de diâmetro $\overline{OP}$. Por U tracemos a reta v, perpendicular a r, determinando G em r.
- ✓ $\overline{OG}$ e $\overline{GP}$ representam os valores absolutos das raízes da equação. Como $b > 0$ então as raízes são positivas, ou seja, $x_1 = \overline{OG} = 2$ e $x_2 = \overline{GP} = 4$,

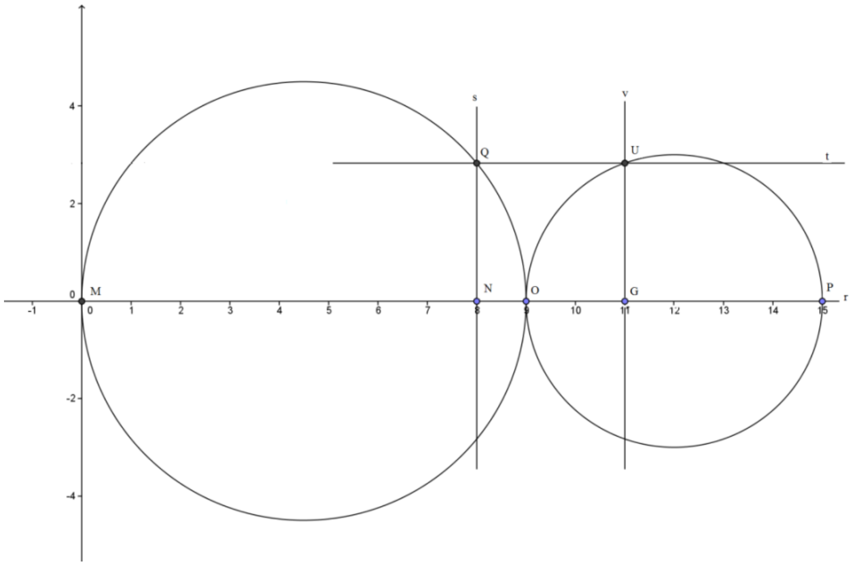

Figura 7

Solução da equação $\boldsymbol{x^2 + 2x - 8 = 0}$

Devemos determinar dois números sabendo que a diferença 2 e o produto é 8, considerando esses valores já em módulos, por essas condições, $c < 0$ e $b > 0$ já se espera raízes de sinais contrários e a raiz de maior módulo ser negativa.

Procedimentos Geométricos

Da mesma forma, seguem-se os passos (1), (2) e (3) do caso anterior.

- ✓ Translademos $\overline{NQ}$ numa direção paralela a s, obtendo o segmento $\overline{OU}$.
- ✓ Liguemos U ao centro I da circunferência, determinando o diâmetro $\overline{GH}$.
- ✓ Os segmentos $\overline{UH}$ e $\overline{UG}$ representam as os valores absolutos das raízes da equação. De fato: $\overline{UH} - \overline{UG} = \overline{GH} = |b| = 2$ (diâmetro), e também pelo fato de tanto $\overline{OU}$ ser tangente quanto de $\overline{UH}$ secante a circunferência de diâmetro $\overline{OP}$, temos:

$$\overline{OU} = \overline{NQ} = \sqrt{|c|} = \sqrt{8}$$

$$\overline{OU}^2 = \overline{NQ}^2 = 8$$

$$|c| = \overline{UH}.\overline{UG} = 8$$

Então $\overline{UH}$ e $\overline{UG}$ são dois segmentos cuja diferença é $|b|$ e o produto é $|c|$ Como $b > 0$, então as raízes são: $x_1 = -\overline{UH} = -4$ e $x_2 = \overline{UG} = 2$, duas raízes de sinais contrários e a raiz negativa possuindo o maior módulo.

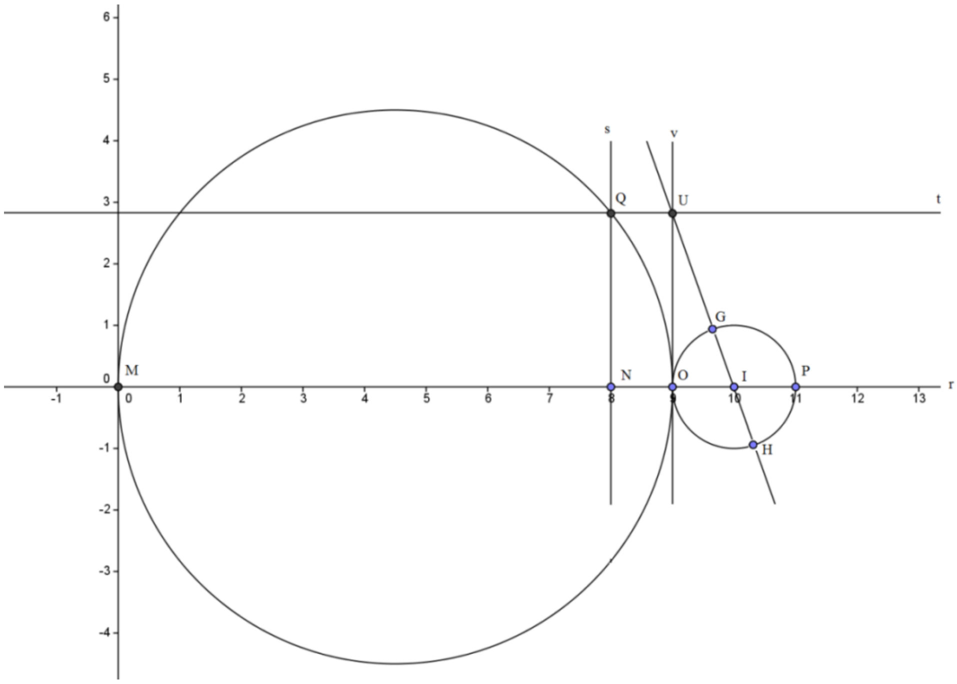

Figura 8

2.3 – MÉTODO DE DESCARTES

Existe ainda outra forma de se fazer a resolução geométrica da equação do segundo grau. Numa abordagem histórica ANDRADE[9], FRAGOSO[10] e WAGNER[11] discriminam os casos $x^2 = bx + c^2$, $x^2 = bx - c^2$ e $x^2 = c^2 - bx$ (sempre com b e c positivos), estudados e demostrados pelo francês René Descartes no apêndice *"La Giomitrie"* da obra *"Discours de la Méthode"*. Descartes desenvolveu um método que tem por objetivo:

1. Por processos algébricos libertar a geometria de diagrama;
2. Dar significado às operações da Álgebra por meio de interpretações geométricas.

---

[9] ANDRADE, B. C., **A evolução histórica da resolução das equações do 2º grau.** Departamento de Matemática-Pura da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, 2000.
[10] FRAGOSO, W. C., **Uma Abordagem Histórica da Equação do 2° grau**. Revista do Professor de Matemática, n° 43, 2000, p. 20-25.
[11] WAGNER, E., **Um pouco sobre Descartes**. Revista do Professor de Matemática nº 19, 1991, p. 9-14.

Vejamos com mais detalhes o método de Descartes, considerando os casos acima citados:

- Para a equação: $x^2 = bx + c^2$

Construção Geométrica

1. Traça-se um segmento $\overline{ML}$ de comprimento c.

2. Em L levanta-se um segmento $\overline{NL}$ igual $\frac{b}{2}$ e perpendicular a $\overline{LM}$.

3. Com centro em N, construímos um círculo de raio $\frac{b}{2}$.

4. Prolongando a reta que passa por M e N, acham-se os pontos O e $P;$ que são as interseções com o círculo.

5. A raiz procurada é o segmento $\overline{OM}$. Temos que $\overline{OM} = x$, é a solução da equação e $\overline{OM} = \overline{ON} + \overline{NM}$.

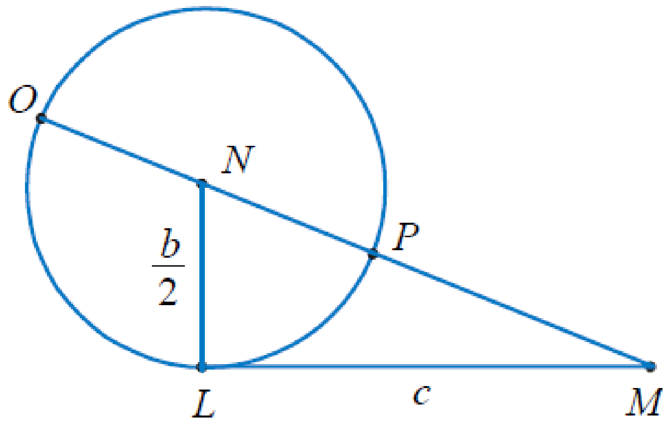

Figura 9

Como pode ser visto na RPM 19, pela transcrição dada, Descartes explicou a forma de obter a solução, embora sem apresentar qualquer cálculo algébrico. Essa justificativa deduz-se facilmente se abrangermos a teoria da potência de um ponto externo a uma circunferência, assim temos:

$$\overline{OM}.\overline{PM} = (\overline{LM})^2$$

$$\Leftrightarrow x.(x-b) = c^2 \;\Leftrightarrow\; x^2 - xb = c^2$$

Para se deduzir a expressão algébrica da solução $x = \frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + c^2}$ é suficiente aplicar o teorema de Pitágoras ao triângulo MNL. A solução obtém-se acrescentando à hipotenusa do triângulo MNL o raio da circunferência.

A outra solução da equação não é apresentada, uma vez que é negativa.

Agora demonstrarei o cálculo não demonstrado, apenas citado por Descartes, notemos que $\overline{OM}$ é realmente a solução. Considerando o triângulo NLM, retângulo em L por construção e pelo Teorema de Pitágoras, temos:

$$(\overline{NM})^2 = (\overline{NL})^2 + (\overline{LM})^2$$

Como $\overline{NL} = \frac{b}{2}$, então $\overline{NL}^{\ 2} = \frac{b^2}{4}$ e $\overline{LM} = c$, então $\overline{LM}^{\ 2} = c^2$, logo

$$(\overline{NM})^2 = (\overline{NL})^2 + (\overline{LM})^2 \Rightarrow (\overline{NM})^2 = \frac{b^2}{4} + c^2 \Rightarrow \overline{NM} = \sqrt{\frac{b^2}{4} + c^2}$$

Sabemos também que $\overline{ON} = \overline{NL}$, então $\overline{ON} = \frac{b}{2}$ e que $\overline{OM} = \overline{ON} + \overline{NM}$, assim temos:

$$\overline{OM} = \frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + c^2} \Leftrightarrow x = \frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + c^2}$$

- Para a equação: $x^2 = c^2 - bx$

Novamente considerando a figura 9, temos que a raiz procurada agora é o segmento $\overline{PM}$. Considerando que $\overline{PM} = x$, é a solução da equação, percebe-se que $\overline{PM} = \overline{MN} - \overline{NP}$, e como na equação anterior temos:

$$\overline{OM}.\overline{PM} = (\overline{LM})^2$$

$$\Leftrightarrow (x + b).x = c^2 \Leftrightarrow x^2 + xb = c^2$$

Como na equação anterior temos $\overline{NM} = \sqrt{\frac{b^2}{4} + c^2}$ e $\overline{LN} = \overline{NP} = \frac{b}{2}$. Logo $\overline{PM} = \sqrt{\frac{b^2}{4} + c^2} - \frac{b}{2}$, assim $x = -\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + c^2}$.

Obs: Descartes só considerava a raiz positiva, ou seja, $x = \frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + c^2}$ para primeira a equação e $x = -\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + c^2}$ para a segunda equação.

- Para a equação: $x^2 = bx - c^2$

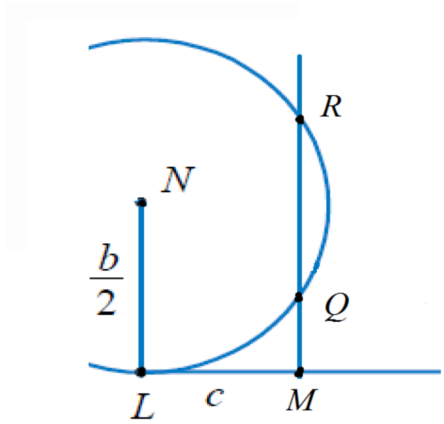

Figura 10

Construção geométrica

1. Traga-se um segmento $\overline{LM}$, de comprimento c;

2. Em L levanta-se um segmento $\overline{LN}$ igual a $\frac{b}{2}$;

3. Em M levanta-se uma paralela a $\overline{LN}$;

4. Com centro em N e raio $\overline{LN}$ constrói-se um circulo;

5. Nas interseções do circulo com a reta que passa por M que é paralela à $\overline{LN}$ marcam-se os pontos Q e R.

O x procurado, neste caso, pode ser $\overline{MQ}$ ou $\overline{MR}$. Vejamos:

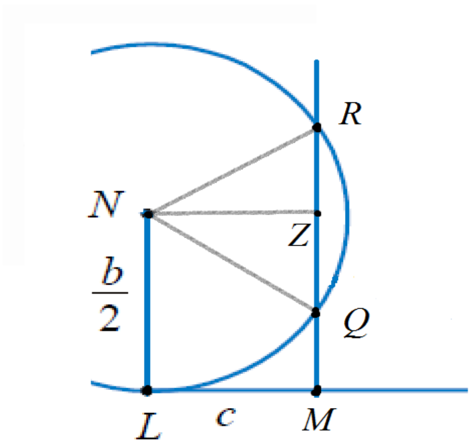

Figura 11

Temos que, $\overline{MR} = \overline{MZ} + \overline{ZR}$, conforme a figura 11. Por construção temos $\overline{MZ} = \overline{LN} = \frac{b}{2}$ e $\overline{ZR} = \sqrt{(\overline{NR})^2 - (\overline{NZ})^2}$, pois RZN é um triangulo retângulo em Z. Temos que $\overline{NR}$ é o raio da circunferência, portanto $\overline{NR} = \overline{LN} = \frac{b}{2}$ e também que $\overline{NZ} = \overline{LM} = c$.

Então $\overline{ZR} = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c^2}$, logo $\overline{MR} = \frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - c^2}$ ou seja, $x = \frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - c^2}$

Para a outra raiz $\overline{MQ}$, temos: $\overline{MQ} = \overline{MZ} - \overline{ZQ}$, como vimos anteriormente $\overline{MZ} = \frac{b}{2}$ e $\overline{NZ} = c$. Temos então que $\overline{ZQ} = \sqrt{(\overline{NQ})^2 - (\overline{NZ})^2}$, pois o triângulo NZQ é retângulo em Z.

Por construção, sabe-se que $\overline{NQ}$ é o raio da circunferência, então $\overline{NQ} = \frac{b}{2}$. Temos então que $\overline{ZQ} = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c^2}$, logo $\overline{MQ} = \frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - c^2}$, ou seja, $x = \frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - c^2}$

Descartes fornece as duas raízes porque são ambas positivas, e se o círculo com centro no ponto N e passando pelo ponto L não corta nem toca a paralela a $\overline{LN}$ que passa por M, não há raiz alguma para a equação.

2.4 – MÉTODO DE JOHN LESLIE

Sobre resoluções gráficas da equação do segundo grau, comentado por FRAGOSO, temos ainda o método John Leslie, que em sua obra *Elements of Geometry*, apresenta o seguinte procedimento.

Seja uma equação do segundo grau representada da seguinte forma $x^2 - bx + c = 0$ (considere b e c positivos), em um plano cartesiano marque os seguintes pontos: $A = (0, 1)$ e $B = (b, c)$. Trace o círculo de diâmetro AB. As abscissas dos pontos em que esse círculo cortar o eixo x, se cortar, são as raízes da equação do segundo grau dada.

$M = (x_1, 0)$ e $N = (x_2, 0)$

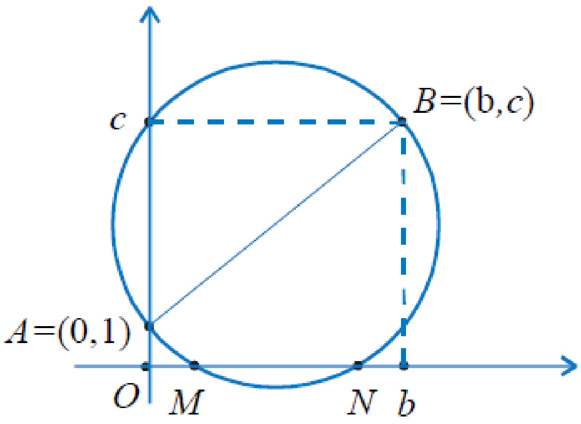

Figura 12

Como $d_{AB} = 2R \Leftrightarrow \sqrt{b^2 + (c-1)^2} = 2R$

$$\Leftrightarrow 4R^2 = b^2 + (c-1)^2 \Leftrightarrow R^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c-1}{2}\right)^2$$

As coordenadas do centro são dadas como sendo o ponto médio do diâmetro, logo $C = \left(\frac{b}{2}, \frac{c+1}{2}\right)$ e desta forma, então a equação do círculo traçado é:

$$\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{c+1}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c-1}{2}\right)^2$$

Fazendo $y = 0$ temos:

$$\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 = -\left(\frac{c+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c-1}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{-c^2 - 2c - 1 + b^2 + c^2 - 2c + 1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{b^2 - 4c}{4} \Leftrightarrow x - \frac{b}{2} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4c}{4}}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{b}{2} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4c}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$$

Que são as raízes da equação dada inicialmente, ou seja, $x^2 - bx + c = 0$

2.5 – NOVAMENTE RÉGUA E COMPASSO

Na tentativa de encontrar métodos de resolução geométrica da equação do segundo grau, temos no livro do WAGNER[12] mais uma demonstração geométrica, que entre todas é a mais simples.

1ª solução: Resolver graficamente a equação $x^2 - bx + c^2 = 0$, onde b e c são números positivos dados. Sem dificuldades, é fácil aplicar a fórmula resolvente e obter a seguinte resposta $x = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4c^2}}{2}$, mas o radical $r = \sqrt{b^2 - (2c)^2}$ é um cateto de um triângulo retângulo cuja hipotenusa é b e o outro cateto é $2c$, se $b > 2c$ a construção pode ser feita e em seguida, as raízes $x_1 = \frac{b}{2} - \frac{r}{2}$ e $x_2 = \frac{b}{2} + \frac{r}{2}$ são facilmente obtidas.

Seja o triângulo ABC, retângulo em A foi construído com $\overline{AB} = 2c$ e $\overline{BC} = b$, obtendo-se $\overline{AC} = r$. Pelo ponto P, médio de $\overline{BC}$ traçou-se $\overline{PQ}$ paralela a $\overline{AB}$ para obter $\overline{CQ} = \frac{r}{2}$. O círculo de centro C e raio $\overline{CQ}$ determinou M e N na reta $\overline{BC}$ tais que $\overline{PM} = x_1$ e $\overline{PN} = x_2$, as raízes da equação dada, conforme a figura 13.

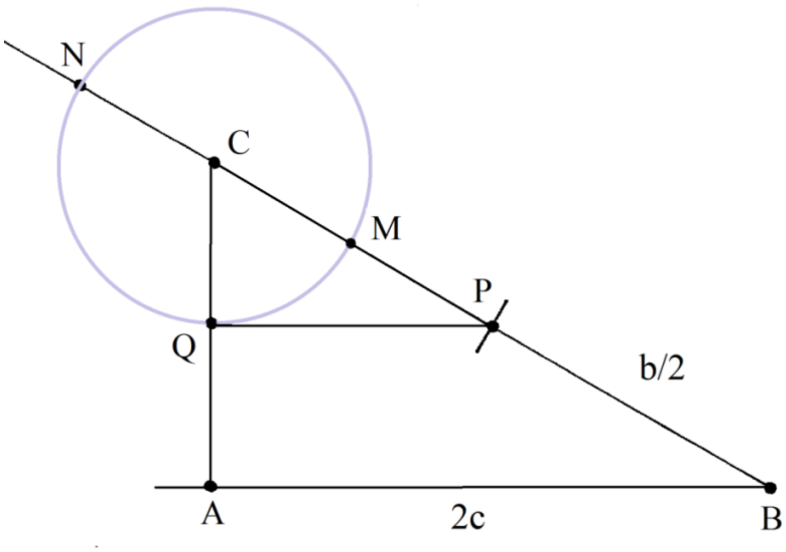

Figura 13

[12] WAGNER, E., **Construções Geométricas**. 6ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2007.

2ª solução: Resolver graficamente a equação $x^2 - bx + c^2 = 0$, onde é dada sua soma e a sua média geométrica. Assim sendo considere x_1 e x_2 as raízes, então $x_1 + x_2 = b$ e $x_1 . x_2 = c^2$. Para demonstrar graficamente podemos desenhar um semicírculo de diâmetro $\overline{AB} = b$ e uma paralela a $\overline{AB}$ distando c de $\overline{AB}$.

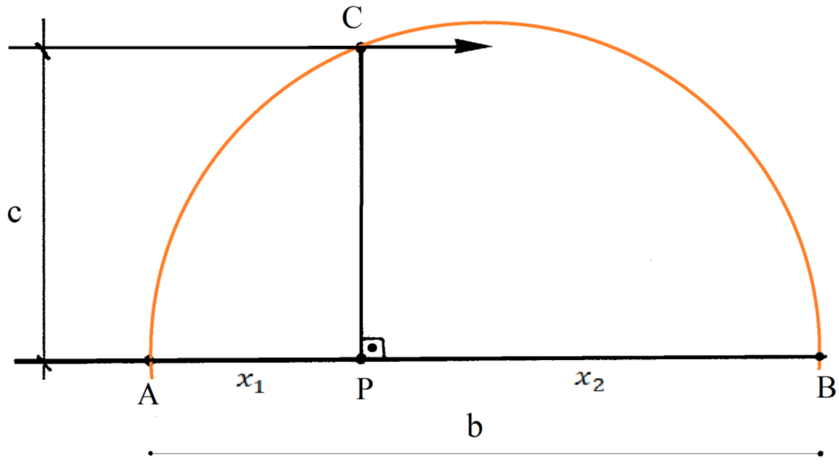

Figura 14

Esta paralela $\left(\text{se } c < \frac{b}{2}\right)$ determinará um ponto C sobre o semicírculo e a projeção de se $C\ sobre\ \overline{AB}$ é o ponto P tal que $\overline{PA} = x_1$ e $\overline{PB} = x_2$.

CAPÍTULO 3 – CURIOSIDADES RELATIVAS À EQUAÇÃO DO 2º GRAU

Neste capítulo serão abordados tópicos algébricos diversos, sobre a equação do segundo grau, e outros que são pertinentes a sua história.

3.1 – UM PROBLEMA PALEONTOLÓGICO[13]

Por meio de textos cuneiformes (escritas em tabuletas de argilas que eram feitas com o auxílio de objetos em forma de cunha), escritos pelos babilônios a mais de setecentos anos antes de Cristo, o problema de se calcular dois números conhecendo apenas a sua soma e o seu produto na qual se resulta em uma equação do segundo grau pode sofrer algumas variações.

Assim temos a seguinte demonstração algébrica da fórmula das raízes, de forma que não se desenvolva na forma tradicional de completamento dos quadrados para se chegar à fórmula resolvente.

Seja x_1 e x_2 as raízes da equação $x^2 - Sx + P = 0$, sendo que S é a soma das raízes e P o produto das raízes, supondo $x_1 \geq x_2$.

Chamando de $m = \frac{S}{2} = \frac{x_1+x_2}{2}$ a média aritmética das raízes, e sabendo da igualdade $x_1 - m = m - x_2$ e em relação a esta equação, multiplicando por $x_1 - m$, vamos obter:

$$(x_1 - m)^2 = (x_1 - m)(m - x_2) \iff (x_1 - m)^2 = x_1 m - x_1 x_2 - m^2 + x_2 m$$

$$\iff (x_1 - m)^2 = (x_1 + x_2)m - m^2 - x_1 x_2 \iff (x_1 - m)^2 = 2m^2 - m^2 - P$$

$$\iff (x_1 - m)^2 = m^2 - P$$

Como x_1 é a maior raiz então $x_1 - m \geq 0$, assim $x_1 - m = \sqrt{m^2 - P}$, daí:

$$x_1 = m + \sqrt{m^2 - P} \iff x_1 = \frac{S}{2} + \sqrt{\left(\frac{S}{2}\right)^2 - P}$$

---

13 LIMA, E. L., **A Equação do Segundo Grau**. Revista do Professor de Matemática, n° 13, IMPA: Rio de Janeiro, 1988, p. 21-25.

$$\Leftrightarrow\ x_1 = \frac{S}{2} + \sqrt{\frac{S^2 - 4P}{4}}\ \Leftrightarrow\ x_1 = \frac{S + \sqrt{S^2 - 4P}}{2}$$

Analogamente, para x_2 a menor raiz teremos $m - x_2 = \sqrt{m^2 - P}$, e efetuando todos os passos teremos:

$$x_2 = \frac{S - \sqrt{S^2 - 4P}}{2}$$

Ainda neste mesmo artigo, LIMA sugere outra maneira de se chegar à forma resolvente em relação ao mesmo enunciado.

Seja x_1 e x_2 as raízes da equação $x^2 - Sx + P = 0$, sendo que S é a soma das raízes e P o produto das raízes, supondo $x_1 \geq x_2$, temos $x_1 - x_2 \geq 0$, logo

$$x_1 - x_2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2}.$$

Usando a identidade $(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = S^2 - 4P$, resulta então que $x_1 - x_2 = \sqrt{S^2 - 4P}$. Portanto:

A maior raiz é igual a $x_1 = \frac{1}{2}[(x_1 + x_2) + (x_1 - x_2)]$

$$\Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{2}\left[S + \sqrt{S^2 - 4P}\,\right]\ \Leftrightarrow\ x_1 = \frac{S + \sqrt{S^2 - 4P}}{2}$$

E a menor raiz igual a $x_2 = \frac{1}{2}[(x_1 + x_2) - (x_1 - x_2)]$

$$\Leftrightarrow\ x_2 = \frac{1}{2}\left[S - \sqrt{S^2 - 4P}\,\right]\ \Leftrightarrow\ x_2 = \frac{S - \sqrt{S^2 - 4P}}{2}$$

É interessante lembrar que este problema algébrico pode sofrer várias alterações na sua forma de se efetuar e demonstrar a fórmula resolvente da equação do segundo grau, inclusive uma reformulação geométrica da situação, como por exemplo, determinar os lados de um retângulo, conhecendo-se apenas o seu semiperímetro S e a sua área P.

3.2 – QUEM NÃO TEM CÃO, CAÇA COM O GATO.

Na RPM 61 o professor Edilson de Moura nos relata uma curiosidade ocorrida em uma de suas aulas sobre o processo mental de se calcular as raízes de uma equação do segundo grau, a qual os exercícios eram semelhantes ao problema babilônico já citado que envolvia soma e produto de dois números.

Foi dito pelo professor que o cálculo mental torna-se bem mais fácil quando o coeficiente de x^2 for igual a 1, e assim ele pediu para que a turma resolvesse a seguinte equação $6x^2 - x - 1 = 0$ e como primeiro passo seria melhor dividir toda a equação por 6, a fim de transformar o coeficiente do termo quadrático igual a 1, obtendo a seguinte equação $x^2 - \frac{x}{6} - \frac{1}{6} = 0$ e que agora nesta forma que envolve frações o cálculo seria mais difícil.

A surpresa e a felicidade para o professor foi a fala de um aluno: "Eu fiz de outro jeito. Tirei o 6 do x^2 e multipliquei o último –1 por 6. Obtive a equação $x^2 - x - 6 = 0$. Foi possível prenunciar as raízes dessa equação: –2 e 3. Daí as raízes da equação inicial são: $\frac{-2}{6} = \frac{-1}{3}$ e $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$"

E este é um dos motivos que ensinando aprendemos cada vez mais, pois o aluno no seu "jeito" de resolver usou o artifício da substituição. Em vez de trabalhar com a equação na forma algébrica usual $ax^2 + bx + c = 0$ ele transformou na seguinte $y^2 + by + ac = 0$, pelo simples fato do valor do discriminante não alterar, apenas no cálculo final das raízes sendo que na primeira forma é a fórmula resolvente usual $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ e a segunda $y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2}$ só que $x = \frac{y}{a}$.

3.3 – SOMA E PRODUTO QUANDO a NÃO É 1

Já na RPM 70 o professor Miguel V. S. Frasson demonstra o cálculo das raízes de uma equação do segundo grau equação, $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$, com o discriminante maior que zero e, sendo que pelo menos um entre a soma das raízes $\left(-\frac{b}{a}\right)$ ou o produto das raízes $\left(\frac{c}{a}\right)$ seja um número não inteiro, assim:

Se r_1 e r_2 são dois números racionais, escritos de forma que tenham o mesmo denominador d, então:

$$\begin{cases} r_1 = \dfrac{m}{d} \\ r_2 = \dfrac{n}{d} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_1 + r_2 = \dfrac{m+n}{d} \\ r_1 . r_2 = \dfrac{m.n}{d^2} \end{cases}$$

Com isso é possível fornecer um método de se reduzir a soma e o produto de frações em soma e produto de inteiros. Basta escrever a soma e o produto como frações de forma que o denominador do produto seja o quadrado do denominador da soma, digamos $S = \frac{S_1}{d}$ e $P = \frac{P_1}{d^2}$. Agora encontremos números inteiros m e n com soma S_1 e produto P_1. Então $\frac{m}{d}$ e $\frac{n}{d}$ tem soma S e produto P.

Para facilitar o entendimento algébrico veja os exemplos numéricos a seguir:

Exemplo 1: $13x^2 - 170x + 13 = 0$, calculando $S = \frac{S_1}{d} = \frac{170}{13}$ e $P = \frac{P_1}{d^2} = \frac{13}{13} = \frac{169}{13^2}$, então $S_1 = 170$ e $P_1 = 169$, que leva a $m = 1$ e $n = 169$.

Assim, as raízes da equação são $r_1 = \frac{m}{d} = \frac{1}{13}$ e $r_2 = \frac{n}{d} = \frac{169}{13} = 13$.

Exemplo 2: $6x^2 - 5x - 4 = 0$, calculando $S = \frac{S_1}{d} = \frac{5}{6}$ e $P = \frac{P_1}{d^2} = \frac{-4}{6} = \frac{-24}{6^2}$, então $S_1 = 5$ e $P_1 = -24$, que leva a $m = -3$ e $n = 8$.

Assim, as raízes da equação são $r_1 = \frac{m}{d} = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}$ e $r_2 = \frac{n}{d} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$.

É necessário comentar que este método é conveniente ser aplicado quando os coeficientes da equação do segundo grau são consideravelmente grandes dificultando o cálculo pela fórmula resolvente e quando os alunos já possuem certa facilidade no cálculo mental da soma e do produto.

3.4 – UMA APLICAÇÃO DO MÉTODO USADO POR VIÈTE

Na RPM 13 é sugerido que o método de Viète seja utilizado como acessório do conteúdo normalmente dado na abordagem de equações do segundo grau. Assim efetuarei o cálculo na equação $x^2 - 8x + 7 = 0$. Fazendo $x = u + v$ e substituindo na equação acima, temos:

$$(u+v)^2 - 8(u+v) + 7 = 0 \iff u^2 + 2uv + v^2 - 8u - 8v + 7 = 0$$

Manipulando e escrevendo a equação em função de u, temos:

$$u^2 + (2v - 8)u + v^2 - 8v + 7 = 0$$

Fazendo $v = 4$ (para anular o coeficiente de u) ficamos:

$$u^2 + 16 - 32 + 7 = 0 \Leftrightarrow u^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow u = \pm 3$$

Substituindo u e v em x: $x = 3 + 4 = 7$ ou $x = -3 + 4 = 1$

Assim, por meio da utilização do método de Viète, podemos chegar à solução de uma equação do segundo grau sem que seja necessário utilizar a fórmula resolvente, que muitas vezes é apenas decorada.

CAPÍTULO 4 – RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DO 3° GRAU

Dentro do princípio de que é necessário sempre saber um pouco mais do que se ensina, apresento neste capítulo a resolução da equação do terceiro grau.

4.1 – UM POUCO DE NÚMEROS COMPLEXOS

Como nem todas as raízes de uma equação do terceiro grau serão reais é imprescindível um breve comentário sobre números complexos. Em geral, o estudante se depara com eles, pela primeira vez, ainda no curso secundário e sua introdução é justificada pela necessidade de resolver equações de segundo grau com discriminante negativo. Isso cria uma falsa impressão já que, historicamente não foram as equações do segundo grau que levaram à introdução dos números complexos, foram apenas as equações do terceiro grau que impuseram a necessidade de trabalhar com esses números.

A. Uma Introdução Histórica[14]

Gerônimo Cardano, médico e matemático italiano, publicou em 1545, em sua obra *Ars Magna*, a resolução de equações do tipo $x^3 + px + q = 0$. Essa resolução relata Cardano, foi apresentada a ele por Nicolo Tartaglia.

O método proposto por Tartaglia consiste em substituir o valor da variável x por $u - v$ tal que o produto uv seja um terço do coeficiente de x da equação. Cardano, resolvendo equações cúbicas através deste método, deparou-se com raízes quadradas de números negativos, que até então não eram aceitas pelos matemáticos, esta constatação levou-o a considerar a existência de novos números.

Nesta época, outro grande matemático italiano Rafael Bombelli (1526–1573), teve o que chamou de "ideia louca", operando com expressões que envolviam raízes quadradas de números negativos. Bombelli admitiu, por exemplo, a identidade:

$$2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4$$

[14] PAIVA, M., Coleção base: **Matemática**. Volume único, 1ª ed. São Paulo: Moderna, 1999, p 386.

Dando assim subsídios para o início da construção de um novo conjunto: o conjunto dos números complexos.

B. Forma Algébrica

Um número complexo é um número da forma $a + bi$ com a e b reais e $i^2 = -1$.

Considere os números complexos $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$.

1. Os números complexos z_1 e z_2 são iguais, se e somente se, $a = c$ e $b = d$.
2. A soma dos números complexos z_1 e z_2 é o número complexo $z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$
3. O produto dos números complexos z_1 e z_2 é o número complexo $z_1 . z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$

O conjunto formado pelos números complexos com a adição e multiplicação definidas acima é denotada por $\mathbb{C}$.

O número complexo $\bar{z} = a - bi$ chama-se conjugado do número complexo $z = a + bi$. Note que, $z.\bar{z} = a^2 + b^2$, e para dividir números complexos multiplica-se o numerador e o denominador pelo conjugado do denominador.

O número $\sqrt{a^2 + b^2}$ é chamado de módulo do número complexo $z = a + bi$ e denota-se por $|z|$.

C. Forma Trigonométrica

Suponhamos que em um plano esteja definido um sistema ortogonal de coordenadas, o número complexo $z = a + bi$ representa-se como um ponto do plano com coordenadas $(a;\ b)$.

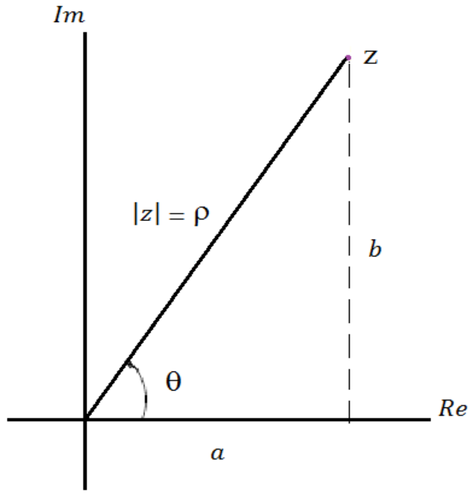

Figura 15

Os números complexos além de serem definido pelas coordenadas a e b, também pode ser definido pelas coordenadas ρ e θ, onde $\rho = |z|$ é a distância da origem (0,0) até o ponto z e θ é o ângulo entre o eixo real e o vetor z considerado no sentido anti-horário a partir do eixo real. Este ângulo chama-se argumento do número complexo $z\,(z \neq 0)$ e denota-se por $\theta = \arg z$.

Conforme a figura 15, utilizando razões trigonométricas temos que $cos\,\theta = \frac{a}{\rho}$ e $sen\,\theta = \frac{b}{\rho}$, ou seja, $a = \rho\, cos\,\theta$ e $b = \rho\, sen\,\theta$. Assim qualquer número complexo pode ser escrito na seguinte forma $z = \rho(cos\,\theta\ +\ i.sen\,\theta)$, chamado de forma trigonométrica ou polar do número complexo z. A potência de z^n, com $n \in \mathbb{Z}$ é $z^n = \rho^n(cos\,n\theta\ +\ i.sen\,n\theta)$.

As raízes n-ésimas de um número complexo z, denotado por $\sqrt[n]{z}$, com $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, são as soluções da equação ${z_k}^n = z$. As raízes n-ésimas de z são obtidas pela seguinte fórmula:

$$z_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho}\left(cos\,\frac{\theta + k2\pi}{n}\ +\ i.sen\,\frac{\theta + k2\pi}{n}\right), k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

Desta forma, se $z \neq 0$, então obteremos n diferentes raízes.

4.2 – FÓRMULA DE CARDANO

A resolução da equação do terceiro grau era guardada secretamente, pois conforme um trecho do livro “Meu Professor de Matemática” temos:

> [...] esses duelos intelectuais não eram infrequentes. Eram cercados de ritual, presididos por alguma autoridade e muitas vezes assistido por numerosa audiência. Alguns contratos de professores universitários eram temporários e muitas vezes a permanência na cátedra dependia de um bom desempenho nessas disputas. Isto talvez explique a atitude sigilosa de Ferro; era bom ter uma bala na agulha para o caso da necessidade. Divulgar sua descoberta seria gastar munição à toa. [...] LIMA[15]

[15] LIMA, E. L., **Meu Professor de Matemática**. Rio de Janeiro: SBM, 1991.

A seguir faço a demonstração da fórmula de resolução da equação do terceiro grau, retirada do artigo de LIMA[16].

A equação geral do terceiro grau é $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, que dividido por a, equivale a $x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0$.

Vamos considerar o caso em que o coeficiente de x^3 é igual a 1, ou seja, $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$. Substituindo $x = y - \frac{b}{3}$, obtemos:

$$\left(y - \frac{b}{3}\right)^3 + b\left(y - \frac{b}{3}\right)^2 + c\left(y - \frac{b}{3}\right) + d = 0$$

$$\Leftrightarrow\ y^3 - by^2 + \frac{b^2y}{3} - \frac{b^3}{27} + by^2 - \frac{2b^2y}{3} + \frac{b^3}{9} + cy - \frac{bc}{3} + d = 0$$

$$\Leftrightarrow\ y^3 + \left(c - \frac{b^2}{3}\right)y + \frac{2b^3}{27} - \frac{bc}{3} + d = 0$$

Essa equação é desprovida do termo de segundo grau. Portanto, podemos simplificar nosso estudo nos limitando a estudar apenas as equações do tipo $x^3 + px + q = 0$. Para resolver esta equação, escrevemos $x = u + v$.

Como $(u + v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u + v)$, substituindo na equação temos.

$$u^3 + v^3 + 3uv(u + v) + p(u + v) + q = 0$$
$$\Leftrightarrow\ u^3 + v^3 + (3uv + p).(u + v) + q = 0$$

Assim se conseguirmos encontrar u e v tais que $u^3 + v^3 = -q$ e $u.v = -\frac{p}{3}$, ou seja, $u^3 + v^3 = -q$ e $u^3.v^3 = -\left(\frac{p}{3}\right)^3$, então $x = u + v$ será uma raiz da equação $x^3 + px + q = 0$.

Devemos encontrar u^3 e v^3 sabendo a sua soma e seu produto, isto é, u^3 e v^3 são as raízes da equação do segundo grau $X^2 + qX + \left(-\frac{p}{3}\right)^3 = 0$.

Utilizando a fórmula resolvente da equação do segundo grau.

[16] LIMA, E. L., **A Equação do Terceiro Grau.** Matemática Universitária, n°5, junho de 1987, 9-23.

$$u^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \Leftrightarrow u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

$$v^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \Leftrightarrow v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Como $x = u + v$, então

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

E esta é a fórmula de Cardano

É preciso interpretar corretamente a fórmula acima. Ela diz que as três raízes da equação $x^3 + px + q = 0$ são obtidas somando cada uma das raízes cúbicas, u_1, u_2, u_3 do primeiro radical com uma das raízes cúbicas dadas pelo segundo radical, respectivamente $-\frac{p}{3u_1}, -\frac{p}{3u_2}, -\frac{p}{3u_3}$.

Sobre o radicando $D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ temos 3 casos a considerar:

i) Se $D > 0$ a equação tem uma raiz real e duas complexas conjugadas;

ii) Se $D = 0$ temos três raízes reais e uma delas com multiplicidade 2;

iii) Se $D < 0$ teremos três raízes reais e distintas.

Exemplo 1: Determine o conjunto solução da equação $x^3 - 3x - 2 = 0$.

Resolução: Aplicando a fórmula de Cardano.

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{2}{2} + \sqrt{\frac{2^2}{4} - \frac{3^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{2}{2} - \sqrt{\frac{2^2}{4} - \frac{3^3}{27}}} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{1 + \sqrt{0}} + \sqrt[3]{1 - \sqrt{0}}$$

O radicando é igual à zero, logo teremos três raízes reais e uma delas com multiplicidade, ou seja, raízes não distintas.

$$u^3 = 1 \Leftrightarrow u^3 = cos\,0 + i.sen\,0 \Leftrightarrow u = \sqrt[3]{cos\,0 + i.sen\,0}$$
$$\Leftrightarrow u = cos\,\frac{0 + k2\pi}{3} + i.sen\,\frac{0 + k2\pi}{3}$$

- Para $k = 0$ temos:

$$u_1 = cos\,0 + i.sen\,0 \Rightarrow u_1 = 1 + 0 \Rightarrow u_1 = 1$$

Relembrando que $v_1 = -\frac{p}{3u_1}$, temos $v_1 = 1$, e daí

$$x_1 = u_1 + v_1 \Rightarrow x_1 = 1 + 1 \Rightarrow x_1 = 2$$

- Para $k = 1$ temos:

$$u_2 = cos\frac{2\pi}{3} + i.sen\,\frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow u_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Relembrando que $v_2 = -\frac{p}{3u_2}$, temos:

$$v_2 = \frac{3}{3\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)} \Leftrightarrow v_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

e assim

$$x_2 = u_2 + v_2 \Rightarrow x_2 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \Rightarrow x_2 = -1$$

- Para $k = 2$ temos:

$$u_3 = cos\frac{4\pi}{3} + i.sen\,\frac{4\pi}{3} \Leftrightarrow u_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Relembrando que $v_3 = -\frac{p}{3u_3}$, temos:

$$v_3 = \frac{3}{3\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)} \Leftrightarrow v_3 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

e assim

$$x_3 = u_3 + v_3 \Rightarrow x_3 = \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \Rightarrow x_3 = -1$$

O conjunto solução da equação é $S = \{2; -1\}$

Exemplo 2: Determine o conjunto solução da equação $x^3 - 6x - 4 = 0$.

Resolução: Aplicando a fórmula de Cardano.

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p}{27}^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p}{27}^3}}$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{4}{2} + \sqrt{\frac{(-4)^2}{4} + \frac{(-6)^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{4}{2} - \sqrt{\frac{(-4)^2}{4} + \frac{(-6)^3}{27}}}$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{4-8}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{4-8}}$$

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-4}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-4}} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{2+2i} + \sqrt[3]{2-2i}$$

O radicando é negativo, logo teremos três raízes reais distintas.

$$u^3 = 2 + 2i \Leftrightarrow u^3 = \sqrt{8}\left(cos\,\frac{\pi}{4} + i.sen\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow u = \sqrt[3]{\sqrt{8}\left(cos\,\frac{\pi}{4} + i.sen\frac{\pi}{4}\right)} \Leftrightarrow u = \sqrt[6]{8}\left(cos\,\frac{\frac{\pi}{4} + k2\pi}{3} + i.sen\frac{\frac{\pi}{4} + k2\pi}{3}\right)$$

- Para $k = 0$ temos:

$$u_1 = \sqrt{2}\left(cos\frac{\pi}{12} + i.sen\,\frac{\pi}{12}\right)$$

Sabendo que:

$$cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \quad \text{e} \quad sen\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

Logo,

$$u_1 = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i.\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right) \Leftrightarrow u_1 = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i.\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow\ u_1 = \frac{\sqrt{3}+1}{2} + \ i.\frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

Relembrando que $v_1 = -\frac{p}{3u_1}$, temos:

$$v_1 = \frac{6}{3\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2} - \ i.\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)} \ \Leftrightarrow\ v_1 = \frac{2\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2} + \ i.\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)}{\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2} + \ i.\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2} - \ i.\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)}$$

$$\Leftrightarrow v_1 = \frac{\left(\sqrt{3}+1\right) - \ \left(\sqrt{3}-1\right)i}{2}$$

e assim

$$x_1 = u_1 + v_1 \Rightarrow x_1 = \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2} + \ i.\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2} - \ i.\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right) \Rightarrow x_1 = \sqrt{3}+1$$

- Para $k = 1$ temos:

$$u_2 = \ \sqrt[6]{8}\left(cos\ \frac{\frac{\pi}{4}+2\pi}{3} \ + \ i.sen\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi}{3}\right) \Leftrightarrow\ u_2 = \sqrt{2}\left(cos\frac{3\pi}{4} + \ i.sen\ \frac{3\pi}{4}\right)$$

Sabendo que:

$$\text{sen}\frac{3\pi}{4} = sen\ \frac{\pi}{4} \quad \text{e} \quad cos\frac{3\pi}{4} = -\,cos\frac{\pi}{4}$$

Logo,

$$u_2 = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \ i.\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Leftrightarrow\ u_2 = -1 + i$$

Relembrando que $v_2 = -\frac{p}{3u_2}$, temos:

$$v_2 = \frac{6}{3(-1+i)} \Leftrightarrow\ v_2 = \frac{2(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)} \ \Leftrightarrow\ v_2 = \frac{2(-1-i)}{2} \Leftrightarrow v_2 = -1 - i$$

e assim

$$x_2 = u_2 + v_2 \ \Rightarrow\ x_2 = (-1+i) + (-1-i) \ \Rightarrow\ x_2 = -2$$

- Para $k = 2$ temos:

$$u_3 = \sqrt[6]{8}\left(cos\,\frac{\frac{\pi}{4}+4\pi}{3} + \,i.sen\frac{\frac{\pi}{4}+4\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \; u_3 = \sqrt{2}\left(cos\frac{17\pi}{12} + \,i.sen\,\frac{17\pi}{12}\right)$$

Sabendo que:

$$cos\frac{17\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \quad \text{e} \quad \text{sen}\frac{17\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

Logo,

$$u_3 = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} + i.\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right) \Leftrightarrow \; u_3 = \frac{1-\sqrt{3}}{2} + \,i.\frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

Relembrando que $v_3 = -\frac{p}{3u_3}$, temos:

$$v_3 = \frac{6}{3\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2} + \,i.\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)} \Leftrightarrow \; v_3 = \frac{2\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2} - \,i.\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)}{\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2} + \,i.\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2} - \,i.\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)}$$

$$\Leftrightarrow v_3 = \frac{\left(1-\sqrt{3}\right) - \,\left(1+\sqrt{3}\right)i}{2}$$

e assim

$$x_3 = u_3 + v_3 \;\Rightarrow\; x_3 = \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2} + \,i.\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2} - \,i.\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right) \;\Rightarrow\; x_3 = 1-\sqrt{3}$$

O conjunto solução da equação é $S = \left\{\sqrt{3}+1;\; -2;\; 1-\sqrt{3}\right\}$

Exemplo 3: Determine o conjunto solução da equação $x^3 - 6x - 9 = 0$.

Resolução: Aplicando a fórmula de Cardano.

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p}{27}^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p}{27}^3}}$$

$$\Leftrightarrow \; x = \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \sqrt{\frac{(-9)^2}{4} + \frac{(-6)^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \sqrt{\frac{(-9)^2}{4} + \frac{(-6)^3}{27}}}$$

$$\Leftrightarrow\ x = \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \sqrt{\frac{49}{4}}} + \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \sqrt{\frac{49}{4}}}$$

O radicando é positivo, logo teremos uma raiz real e as outras duas complexas e conjugadas.

$$u^3 = \frac{9}{2} + \sqrt{\frac{49}{4}} = \frac{9}{2} + \frac{7}{2} = 8 \ \Leftrightarrow\ u^3 = 8(cos\ 0 + i.sen\ 0)$$

$$\Leftrightarrow u = \sqrt[3]{8(cos\ 0 + i.sen\ 0)} \ \Leftrightarrow\ u = 2\left(cos\ \frac{0 + k2\pi}{3} + i.sen\ \frac{0 + k2\pi}{3}\right)$$

- Para $k = 0$ temos:

$$u_1 = 2(cos\,0 + i.sen\,0) \ \Rightarrow\ u_1 = 2(1 + 0) \ \Rightarrow u_1 = 2$$

Relembrando que $v_1 = -\frac{p}{3u_1}$, temos:

$$v_1 = \frac{6}{3.2} = 1$$

e assim

$$x_1 = u_1 + v_1 \ \Rightarrow\ x_1 = 2 + 1 \ \Rightarrow\ x_1 = 3$$

- Para $k = 1$ temos:

$$u_2 = 2\left(cos\frac{2\pi}{3} + i.sen\ \frac{2\pi}{3}\right) \ \Leftrightarrow\ u_2 = 2\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \ \Leftrightarrow\ u_2 = -1 + \sqrt{3}i$$

Relembrando que $v_2 = -\frac{p}{3u_2}$, temos:

$$v_2 = \frac{6}{3(-1 + \sqrt{3}i)} \ \Leftrightarrow\ v_2 = \frac{2(-1 - \sqrt{3}i)}{(-1 + \sqrt{3}i)(-1 - \sqrt{3}i)}$$

$$\Leftrightarrow v_2 = \frac{2(-1 - \sqrt{3}i)}{4} \ \Leftrightarrow\ v_2 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$$

e assim

$$x_2 = u_2 + v_2 \ \Rightarrow\ x_2 = (-1 + \sqrt{3}i) + \left(\frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}\right) \ \Rightarrow\ x_2 = \frac{-3 + \sqrt{3}i}{2}$$

- Em todo polinômio com coeficientes reais, se um número complexo z é raiz, então o seu conjugado $\bar{z}$ também é, assim

$$x_3 = \frac{-3 - \sqrt{3}i}{2}$$

O conjunto solução da equação é $S = \left\{3;\ \frac{-3+\sqrt{3}i}{2};\ \frac{-3-\sqrt{3}i}{2}\right\}$

4.3 – RESOLUÇÃO DE MOREIRA

Sobre a fórmula da resolução da equação do terceiro grau não existe outra forma como a que foi elaborada por Scipione Ferro, então num relato de LIMA na RPM 25, onde um de seus alunos (Carlos Gustavo Tamn de Araújo Moreira) elaborou um trabalho sobre a resolução da equação do terceiro grau e que ele não havia dado a devida atenção, pois este problema possui cerca de três mil anos e não há formas distintas de se elaborar a sua demonstração, mas a título de curiosidade trago aqui agora a resolução feita pelo aluno, pois sobre esta demonstração temos o seguinte comentário:

> Mais tarde, concordei em ouvi-lo e percebi logo que se trata da mais simples e menos artificial das deduções das fórmulas para as equações do terceiro e do quarto grau que conheço. LIMA[17]

Pelo fato de MOREIRA estar empolgado pelos cálculos de expressões simétricas nas raízes de uma equação do segundo grau, em função dos coeficientes da equação, resolveu calcular a seguinte expressão:

$$y = \sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2}$$

Onde x_1 e x_2 são as raízes da equação $x^2 - Sx + P = 0$, ou seja, $x_1 + x_2 = S$ e $x_1.x_2 = P$. O que nos leva aos seguintes cálculos:

$$y = \sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2}$$

$$\Rightarrow\ y^3 = x_1 + x_2 + 3\sqrt[3]{x_1.x_2}\left(\sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2}\right)$$

$$\Rightarrow\ y^3 = S + 3\sqrt[3]{P}.y$$

[17] MOREIRA, C. G. T. de A., **Uma Solução das Equações do 3º e do 4º graus**. Revista do Professor de Matemática, nº 25, 1994, p. 23-25.

$$\Rightarrow\ y^3 - 3\sqrt[3]{P}.y - S = 0 \qquad (*)$$

Assim, para determinar y há que se resolver uma equação do terceiro grau. Conforme MOREIRA, em uma equação do terceiro grau é possível escrever suas raízes como soma de raízes cúbicas de raízes de uma equação do 2º grau. Isso pode ser feito do seguinte modo:

Seja a equação $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$, fazendo uma substituição $x = u + v$ temos:

$$(u+v)^3 + b(u+v)^2 + c(u+v) + d = 0$$

$$\Leftrightarrow u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 + bu^2 + 2buv + bv^2 + cu + cv + d = 0$$

$$\Leftrightarrow u^3 + (3v+b)u^2 + (3v^2 + 2bv + c)u + v^3 + bv^2 + cv + d = 0$$

Para anular o coeficiente em u^2, fazemos $v = -\frac{b}{3}$ resultando numa equação do tipo $y^3 + py + q = 0$. Para determinarmos o valor de p e de q, basta comparar com $(*)$ assim:

$$\begin{cases} p = -3\sqrt[3]{P} \\ q = -S \end{cases}$$

Relembrando que x_1 e x_2 são as raízes da equação $x^2 - Sx + P = 0$, então $\sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2}$ satisfaz a equação $y^3 + py + q = 0$. Feito isso, obtemos:

$$\begin{cases} p = -3\sqrt[3]{P} \ \Rightarrow\ p^3 = -27P \ \Rightarrow P = -\dfrac{p^3}{27} \\ S = -q \end{cases}$$

Para calcular x_1 e x_2 basta substituir esses valores na equação do segundo grau, ficando com $x^2 + qx - \frac{p^3}{27} = 0$, aplicando a fórmula resolvente pra equação do segundo grau, calculamos as seguintes raízes:

$$x_1 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p}{27}^3} \ \ e\ x_2 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p}{27}^3}$$

Donde:

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p}{27}^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p}{27}^3}}$$

Cada raiz cúbica pode-se assumir três valores complexos, mas a equação $\sqrt[3]{P} = -\frac{p}{3}$ nos diz que o produto das duas raízes deve ser $-\frac{p}{3}$. Essa fórmula dá as três raízes de $y^3 + py + q = 0$, que somadas a $v = -\frac{b}{3}$ nos dão as três raízes de $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$.

CONCLUSÃO

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) a equação do segundo grau é vista apenas como uma ferramenta na resolução de problemas, e no Referencial Curricular, nenhuma demonstração é proposta, ficando a critério do professor fazer ou não, pois apenas a fórmula de Bháskara é dada como técnica de resolução. Por este motivo foi elaborado no primeiro capítulo deste trabalho, uma classificação algébrica da fórmula resolvente da equação do segundo grau, que poderá auxiliar os professores do Ensino Médio a melhorar o conhecimento algébrico dos alunos.

As demonstrações geométricas apresentadas no segundo capítulo são todas relacionadas a equações particulares, já que não foi possível encontrar nenhuma na forma geral, ainda assim, trata-se de uma forma alternativa de oferecer ao aluno, com um pouco de vontade e criatividade, uma oportunidade de se utilizar materiais concretos como régua e compasso, resultando na fórmula resolvente da equação do segundo grau, que, normalmente, só se desenvolve aplicando a fórmula de Bháskara.

Em relação ao quarto capítulo, mesmo não sendo um conteúdo abordado no Ensino Médio, acabei ficando mais conhecedor das histórias da Matemática, pois durante a sua elaboração pude concluir que o surgimento dos números complexos é oriundo das equações do terceiro grau e não do segundo grau, como normalmente é ensinado nos livros do Ensino Médio, e que com certeza tal conhecimento será um novo incentivo na elaboração de aulas futuras.

Numa visão pedagógica relativa à minha rotina de trabalho como professor do Ensino Médio, penso que com esta pesquisa consegui aprimorar o meu conhecimento algébrico e geométrico, pois não é possível escrever tudo o que é absorvido pelas pesquisas realizadas, porém as dificuldades até então encontradas, foram sanadas vindo de encontro ao prazer dos conhecimentos adquiridos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AMARAL, J. T., **Método de Viète para resolução de equação do segundo grau**. Revista do Professor de Matemática, n° 13, 1988, p. 18-20.

ANDRADE, B. C., **A evolução histórica da resolução das equações do 2º grau.** Departamento de Matemática-Pura da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, 2000.

BRANCO, E. S. & MENTA, E., **A matemática no esporte: aprendendo funções quadráticas**. Curitiba, PR. 2010. [Acessado em novembro de 2012] Disponível em: <http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=25077>.

DANTE, L. R., **Matemática: Conceito e Aplicações**. volume 1. São Paulo: Ática, 2010.

FERREIRA, M. L., **Álgebra: como as crenças dos professores influenciam na aprendizagem dos alunos**. UFRJ, Instituto de Matemática – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, 2009.

FRAGOSO, W. C., **Uma Abordagem Histórica da Equação do 2° grau**. Revista do Professor de Matemática, n°43, 2000, p. 20-25.

FRASSON, M. V. S., **Como obter raízes por soma e produto quando a não é 1.** Revista do Professor de Matemática. nº 70, IMPA, Rio de Janeiro, 2009, p. 26-27 .

LIMA, E. L., **A Equação do Terceiro Grau**. Matemática Universitária, nº 5, 1987, p. 9-23.

LIMA, E. L., **A Equação do Segundo Grau**. Revista do Professor de Matemática, n° 13, IMPA: Rio de Janeiro, 1988, p. 21-25.

LIMA, E. L., CARVALHO, P. C. P., WAGNER, E., MORGADO, A. C. **A matemática do ensino médio** – volume 1, 9ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

LIMA, E. L., CARVALHO, P. C. P., WAGNER, E., MORGADO, A. C. **A matemática do ensino médio** – volume 3, 6ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

LIMA, E. L., **Meu Professor de Matemática**. Rio de Janeiro: SBM, 1991.

MILIES, C. P., **A Emergência dos Números Complexos.** Revista do Professor de Matemática, nº 24, 1993, p. 5-15.

MILIES, C. P., **Uma solução de Tartaglia para a equação do terceiro grau.** Revista do Professor de Matemática, nº 25, 1994, p. 15-22.

MIRANDA, C. B. de., **Equações do 2º grau e Técnicas de Resolução** - *Um estudo didático da classe 8ªsérie.* UFSC – Centro de Ciências Físicas e Matemática: Florianópolis, 2003.

MOREIRA, C. G. T. de A., **Uma Solução das Equações do 3º e do 4º graus**. Revista do Professor de Matemática, nº 25, 1994, p. 23-25.

MOURA, E., **De nossos alunos.** Revista do Professor de Matemática, nº 61, 2006, p. 9.

PAIVA, M., Coleção base: **Matemática. Volume Único**, 1ª ed. São Paulo: Moderna, 1999.

PASTOS, A. L., **Equação do 2º grau: completando quadrados. A fórmula de Bháskara**. Revista do Professor de Matemática, nº 6, 1985, p. 36-38.

POSSANI, C., **Uma equação interessante.** Revista do Professor de Matemática, nº 19, 1991, p. 15-18.

SOUZA, A. S., **Teoria do Desenvolvimento Cognitivo.** "Apontamentos de Didática da Física I" (Física, FCUP), Porto, 2000. [Acessado em 10 de setembro de 2012] Disponível em: < http://www.prof2000.pt/users/aplima/piaget_sessao1.htm>.

TUNALA, N., **Resolução geométrica da equação do 2º grau.** Revista do Professor de Matemática, nº 12, 1988, p. 33-35.

VÁRHIDY, C. G. J. L., **Desenho Geométrico: uma ponte entre a álgebra e a geometria** - *Resolução de Equações pelo Processo Euclidiano.* Universidade Federal de Ouro Preto, 2010.

WAGNER, E., **Um pouco sobre Descartes**. Revista do Professor de Matemática nº 19, 1991, p. 9-14.

WAGNER, E., **Construções Geométricas**. 6ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2007.