Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Campus de Rio Claro

Lineamentos de Análise Combinatória

Maurizio Marchetti

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre

Orientadora
Profa. Dra. Carina Alves

2016

512.925
M317L

Marchetti, Maurizio
Lineamentos de análise combinatória / Maurizio
Marchetti. - Rio Claro, 2016
110 f. : il., figs.
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista,
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Orientadora: Carina Alves
1. Análise combinatória. 2. Álgebra. 3. Binômios. 4.
Matemática discreta. 5. Funções geradoras. I. Título.

Ficha Catalográfica elaborada pela STATI - Biblioteca da UNESP Campus de Rio Claro/SP

TERMO DE APROVAÇÃO

Maurizio Marchetti
Lineamentos de Análise Combinatória

Dissertação aprovada como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", pela seguinte banca examinadora:

Profa. Dra. Carina Alves
Orientadora

Profa. Dra. Cintya Wink de Oliveira Benedito
Universidade Estadual de Campinas - IMECC- UNICAMP - Campinas

Prof. Dr. Fernando Eduardo Torres Orihuela
Universidade Estadual de Campinas - IMECC- UNICAMP - Campinas

Rio Claro, 29 de Fevereiro de 2016

Dedico este trabalho para Claudia, Bruno, Thais e Gabriel,
que são a razão de minha vida.

Agradecimentos

Agradeço à Professora Doutora Carina Alves, do Departamento de Matemática do Instituto de Geociências e Ciências Exatas, da Universidade Estadual Paulista *Júlio de Mesquita Filho* (UNESP), *Campus* de Rio Claro, pela orientação e pelas disciplinas ministradas. Ao Professor Doutor Fernando Eduardo Torres Orihuela, do Departamento de Matemática do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas (IMECC-Unicamp), minha gratidão pelo constante apoio ao longo da redação deste trabalho e pela participação na banca examinadora. Agradeço ainda à Professora Doutora Cintya Wink de Oliveira Benedito pela participação na banca examinadora. Pelas contribuições pontuais, também agradeço aos Professores Doutores Stefano de Leo e José Plínio de Oliveira Santos, da Universidade Estadual de Campinas, e ao Professor Doutor Gabriele Lolli, da *Scuola Normale Superiore* da *Università degli Studi di Pisa*, Itália.

Resumo

Com os avanços da computação, a matemática discreta passou a ser objeto de novas e mais complexas pesquisas. Uma das razões é que os fundamentos da computação encontram-se nos princípios da matemática discreta. No que se refere aos centros de pesquisa, cada vez são mais numerosos e avançados os trabalhos que visam dar sistematicidade e rigor aos princípios da matemática discreta como aqueles já conquistados pela matemática contínua. Nesse contexto, nossa proposta no presente trabalho, é apresentar um texto que ao mesmo tempo compile tópicos que já existem a respeito da matemática discreta e também, introduza novas questões e teorias que coloquem em compasso o ensino médio com os significativos avanços da matemática discreta produzida nos grandes centros mundiais. Dentro dessas novas questões e teorias, privilegiamos a introdução das funções geradoras como assunto a ser abordado no ensino médio, como aprendizado para eventuais desenvolvimentos posteriores no ensino superior, tanto das faculdades de matemática quanto das faculdades de computação. O presente trabalho apresenta-se como obra de base, redigida em linguagem acessível a professores e alunos do ensino médio, sem abrir mão do rigor necessário próprio dos estudos matemáticos.

Palavras-chave: Álgebra, Binômios, Matemática Discreta, Funções Geradoras.

Abstract

With the advances in computing, discrete mathematics has become the subject of new and more complex searches. One of the reasons is that fundamentals of computing are the principles of discrete mathematics. In respect to research centers, there has benn a growing number of advanced studies aimed at providing systematics and rigor to the principles of discrete mathematics, such as those in continuous mathematics. Within this context, this work presents topics about discrete mathematics and introduces new issues and theories deal with high school with the significant advances in discrete mathematics produced in large centers worldwide. Within these new questions and theories, we have highlighted the introduction of generating functions to be introduced as a subject to be taught in high school as an important topic for subsequent developments in higher education, both in mathematics and computing sciences colleges. This is presented as an introduction, written in language accessible to teachers and high school students, without giving up the very necessary rigor of academic studies.

Keywords: Algebra, Binomials, Discrete Mathematics, Generating Functions.

Sumário

1 Introdução

Combinatória é a parte da matemática que estuda os problemas relativos aos conjuntos finitos, abrangendo a contagem de subconjuntos que satisfazem certas condições e também aqueles que se referem a construção de bijeções de conjuntos.

A combinatória assumiu as questões de contagem que antes eram estudadas pela análise algébrica, pela séries formais, pela teoria aditiva dos números, pela geometria finita, pela teoria dos grafos e dos matroids. Com a expansão da combinatória esses anteriores estudos tiveram uma mudança de perspectiva, na medida em que mudou seu enfoque dos números para os conjuntos. Assim sendo, por exemplo, a demonstração das propriedades dos coeficientes binomiais não mais se faz com base nas relações numéricas, mas sim com base nas bijeções de conjuntos. De modo análogo, no estudo das funções geradoras não mais se limita à manipulação de coeficientes, mas avançou-se para associar a série a entidades geométricas, de onde surgiu, por exemplo, a teoria geométrica dos polinômios eulerianos.

É verdade que a combinatória não atingiu ainda uma homogeneidade disciplinar e, segundo nosso entendimento, muito trabalho ainda deve ser feito, o que talvez se explique porque ainda não se sabe ao certo suas reais potencialidades para fins de aplicação, tanto que muitos matemáticos ainda preferem usar os procedimentos clássicos da matemática do contínuo ao invés de desenvolver novos métodos próprios da matemática discreta, como tem sido a postura, por exemplo, do destacado Professor Herbert Wilf, da Universidade da Pennsylvania, através daquilo que denominou como sendo uma "ponte entre a matemática discreta, de um lado, e a análise do contínuo, de outro"[1], assim como, no Brasil, o também destacado Professor José Plínio de Oliveira Santos, da Universidade Estadual de Campinas, dentre outros. Isso, porém, significa uma certa dependência da matemática discreta em relação à matemática do contínuo, algo que, talvez, num futuro desconhecido poderá ser modificado com a absoluta independência da matemática discreta. No momento, essa discussão está restrita ao território das conjecturas.

Segundo a nossa perspectiva, a combinatória somente atingirá sua maturidade quando suas poderosas aplicações, sobretudo aquelas relativas à computação e à crip-

[1]WILF, H.S. *Generatingfunctionology*, Pennsylvania :Academic Press, 1994. <https://www.math.upenn.edu/~wilf/gfology2.pdf, acessado em 21.12.2015, às 9h42>

tografia, forem explicadas por uma teoria própria, obra ainda a se completar.

O presente trabalho não pretendeu atuar nos fundamentos, mas sim no ensino, introduzindo algumas inovações de conteúdo da análise combinatória, parte da matemática discreta presente no ensino médio, tais como novos problemas e a introdução do método das funções geradoras para resolução de problemas de contagem. Para elaborar as figuras que ilustram o presente trabalho, usamos o *software* livre *Geogebra*.

A estrutura da dissertação é apresentada pela presente introdução, que corresponde ao Capítulo 1, e mais cinco capítulos assim distribuídos:

No Capítulo 2 apresentamos a teoria do matemático Giuseppe Peano que axiomatizou o conjunto dos números naturais e possibilitou a fundamentação do princípio da indução finita.

No Capítulo 3 apresentamos os números binomiais, dividindo o capítulo em duas partes. Na primeira parte, começamos com o conceito de fatorial para em seguida definir número binomial e alguns teoremas característicos. Na segunda parte, procuramos mostrar que as teorias das combinações, dos arranjos e das permutações derivam diretamente da noção de número binomial.

No Capítulo 4 foram expostos alguns princípios relevantes para a resolução de problemas de contagem, particularmente, o princípio multiplicativo, o princípio aditivo e o princípio da inclusão e exclusão.

No Capítulo 5 apresentamos a teoria das funções geradoras e sua potencialidade para resolver problemas de contagem, mostrando que em algumas situações somente o método das funções geradoras possibilita uma solução.

No Capítulo 6 são apresentadas algumas propostas de ensino de análise combinatória para o ensino médio bem como algumas questões interessantes sobre o assunto extraídas de vestibulares e outros exames nacionais.

2 Números Naturais e Princípio da Indução Finita

Neste capítulo, elaborado com base em [7] e [9], vamos estudar o conjunto dos números naturais que são os mais adequados para a contagem, lembrando que o objeto de estudo da análise combinatória são os problemas de contagem, desde sua axiomatização pelo matemático italiano Giuseppe Peano. Os números naturais já eram conhecidos bem antes de Giuseppe Peano, porém foi esse matemático quem atribuiu coerência a esse conjunto numérico a partir de cinco axiomas que veremos a seguir.

Outro dado histórico que é relevante mencionar é que no texto original de Giuseppe Peano foram apresentados nove axiomas, porém, os estudos posteriores de aritmética o reduziram a cinco axiomas por terem chegado à conclusão que quatro daqueles axiomas seriam redundantes. Por isso na atualidade afirma-se que são cinco os axiomas de Peano [9].

Vejamos esses axiomas e sua relação com a construção do conjunto dos números naturais.

O conjunto $\mathbb{N}$, dos números naturais, tem como elementos os números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, $\cdots$ Há quem também coloque o número 0 como elemento de $\mathbb{N}$, o que não tem qualquer problema desde que se deixe isso bem claro. Historicamente, Giuseppe Peano (1858-1931), que formulou os axiomas que fundamentam o conjunto dos números naturais, não incluía o 0 no conjunto $\mathbb{N}$, o que nos parece correto, pois ninguém começa contando com 0. Para nós, seguindo a formulação feita por Giuseppe Peano, o conjunto $\mathbb{N}$ começa com o número 1.

Definição 2.1. *O conjunto dos números naturais, $\mathbb{N}$, é aquele que observa os seguintes cinco axiomas, denominados* ***axiomas de Peano****:*

I) 1 é um número natural

II) Cada número natural tem um outro número natural chamado sucessor;

III) Dois números naturais distintos têm sucessores distintos;

IV) O número 1 não é sucessor de nenhum número natural;

V) Se um subconjunto $\mathcal{A}$ de $\mathbb{N}$ é tal que:

i) $1 \in \mathcal{A}$,

ii) $n \in \mathbb{N}, n \in \mathcal{A} \Rightarrow$ *o sucessor de* $n \in \mathcal{A}$.

então $\mathcal{A}$ contém todos os números naturais.

2.1 Princípio de Indução Finita

A partir do **quinto axioma** de Peano construiu-se um importante instrumento para demonstrações de propriedades envolvendo os números naturais denominado **princípio de indução finita**.

Esse método de demonstração é de importância fundamental para verificar a validade, ou não, das fórmulas da análise combinatória que vamos estudar neste trabalho.

Apesar de o princípio de indução finita ter surgido a partir do conjunto dos números naturais, também é válido para o conjunto dos números inteiros, de maneira que as propriedades envolvendo tanto os números naturais, quanto os números inteiros, são demonstradas através do princípio de indução finita. Com isso, o princípio de indução finita não é o método adequado para a demonstração de propriedades relativas a números racionais, números reais ou números complexos, porque não são conjuntos discretos, mas conjuntos contínuos, motivo pelo qual suas demonstrações são feitas através de outras técnicas.

O princípio de indução finita é um método de demonstração e não um método de descoberta. Muitas das proposições matemáticas foram descobertas, não demonstradas, a partir da intuição. Depois da descoberta foi que entraram em ação os métodos de demonstração de sua validade, para que tivessem vigência universal.

Vamos ilustrar esse método de demonstração provando a fórmula que nos fornece a soma dos n primeiros números naturais ímpares.

Antes, porém, cabe registrar que o princípio de indução finita pode garantir que essa fórmula é válida, mas se não soubéssemos dessa fórmula, o princípio de indução finita não seria suficiente para descobri-la. Na descoberta entram outros fatores que não são matemáticos, como o mero acaso, a criatividade, a habilidade, etc. O princípio de indução finita só entra em ação para verificar se uma fórmula já descoberta, relativa a números naturais ou inteiros, é matematicamente válida.

O raciocínio relativo ao princípio de indução finita é composto de duas partes, a base indutiva e o passo indutivo.

A base indutiva consiste em mostrar que a propriedade é válida para um primeiro número natural n_1, que não necessariamente precisa ser 1, o primeiro número natural, pois basta que seja válida para qualquer número natural inicial, podendo ser $n_1 = 2$ ou

$n_1 = 3$ e assim por diante. Já o passo indutivo é uma afirmação condicional *se...então*, ou seja, *se* vale para $n = k$, *então* deve valer para $n = k + 1$.

Feitas essas considerações, vejamos o mencionado exemplo da fórmula da soma dos n primeiros números naturais ímpares.

Exemplo 2.1. A soma dos n primeiros números naturais ímpares é dada pela fórmula:

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2.$$

Base indutiva: Vamos a validade desta igualdade, vamos verificar se a fórmula é válida para $n = 1$, pois é o primeiro elemento do conjunto de validade da fórmula:

$$n = 1 \Longrightarrow 1^2 = 1.$$

Assim, verificamos que a fórmula é válida para $n = 1$.

Passo indutivo: Por sua vez, vejamos o passo indutivo supondo que a fórmula é válida para $n = k$, cujo *n-ésimo* termo será $(2k - 1)$, para verificar se também vale para $n = k + 1$, cujo *(n+1)-ésimo* termo será $[2(k + 1) - 1] = (2k + 1)$. Em linguagem simbólica escreve-se assim:

$$p(k) \Longrightarrow p(k+1)$$

O que significa que se a propriedade p vale para $n = k$, então deve valer para $n = k + 1$. Ou seja, $p(k)$ é a hipótese, enquanto $p(k + 1)$ é a tese que devemos demonstrar.

$$\textit{hipótese} \ \rightarrow p(k) : \sum_{i=1}^{k}(2i-1) = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2k-1) = k^2.$$

A partir de agora é que demonstraremos a tese:

$$\textit{tese} \ \rightarrow p(k+1) : \sum_{i=1}^{k+1}(2i-1) = [1 + 3 + 5 + \ldots + (2k-1)] + (2k+1) =$$

$$= k^2 + 2k + 1 = (2k+1)^2.$$

Exemplo 2.2. Para todo número natural $n \geq 3$, é válida a desigualdade $2^n > 2n + 1$.

Devemos demonstrar que é válida a proposição $2^n > 2n+1$ para $\forall n \geq 3$, com $n \in \mathbb{N}$. Para isso, mostramos a validade da base indutiva e a validade do passo indutivo, da seguinte maneira:

Base indutiva: Para $n = 3$ temos $2^3 > (2 \cdot (3) + 1) \Rightarrow 8 > 7$, afirmação válida.

Passo indutivo: Para $n = k$, $2^k > 2k+1 \Rightarrow 2^{k+1} > 2(k+1)+1$, ou seja, supondo válida a hipótese indutiva $2^k > 2k+1$, então devemos mostrar que a tese indutiva $2^{k+1} > 2(k+1)+1$ também é válida.

De fato,

$$2^{k+1} > 2(k+1)+1 \Leftrightarrow 2 \cdot 2^k > 2k+2+1 \Leftrightarrow 2^k + \underbrace{2^k > (2k+1)}_{\text{hipótese} \quad \text{indutiva}} +2$$

Pela hipótese indutiva temos que $2^k > (2k+1)$, porém, falta ainda mostrar que $2^k > 2$, Como o valor mínimo de n é 3, basta fazermos $2^3 > 2 \Rightarrow 8 > 2$, que é verdadeiro. Com isso, temos:

$$\left.\begin{array}{ll} 2^k > (2k+1) & ,\forall k \geq 3 \\ 2^k > 2 & ,\forall k \geq 3 \end{array}\right\} \Rightarrow 2^k + 2^k > (2k+1)+2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot 2^k > 2k+3 \Leftrightarrow 2^{k+1} > 2k+3 \Leftrightarrow 2^{k+1} > 2(k+1)+1, \text{isto é,}$$

isto é,

$$2^{k+1} > 2(k+1)+1.$$

Portanto $2^n > 2n+1$, $\forall n \geq 3$.

2.2 Variações do princípio de indução finita.

O princípio da indução finita admite uma invariante chamada de princípio da indução finita forte que enunciamos a seguir.

Teorema 2.1. *[9, 10]. (Princípio da Indução Finita Forte). Seja $P(n)$ uma propriedade relativa aos inteiros. Se*

- *$P(n)$ é verdadeira para $n = 1$ e;*
- *$P(n)$ é verdadeira para $1 \leq n \leq k$ implica que $P(k+1)$ é verdadeira,*

então $P(n)$ é verdadeira para todo inteiro $n \geq 1$.

Note que na indução forte no passo indutivo deve-se supor que vale não apenas para $n = k$, mas para todos os primeiros k elementos de um dado conjunto para em seguida mostrar que também vale para $k+1$.

Vejamos um caso de relação de recorrência que são aqueles casos em que as funções são definidas por mais de um conjunto de valores iniciais, que constituem o conjunto base, e por uma regra que permite calcular os valores posteriores em termos dos valores anteriores[1].

[1] TOWNSEND, Michael. *Discrete Mathematics: Applied Combinatorics and Graph Theory*, Menlo Park: The Benjamin/Cummings Publishing Company, 1987, p.132

Exemplo 2.3. Dada a relação de recorrência assim definida:

$$a_0 = 8;$$

$$a_1 = 10;$$

$$a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-2}, \forall n \geq 2,$$

mostre que $a_n = 7 + 3^n, \forall n \in \mathbb{N}$.

De início, devemos perceber que a partir de a_2 todos os termos dessa recorrência dependem de dois antecedentes, o que significa que teremos que usar o princípio da indução finita forte para a demonstração.

Uma questão que pode suscitar dúvidas é saber se o primeiro elemento será a_0 ou a_1. Isso tanto faz, desde que se tome cuidado em notar que se o primeiro elemento da validade for a_0, então o $a_{k-1} = k$ e o $a_k = k + 1$, enquanto se o primeiro elemento da validade for a_1, então o $a_k = k$ e o $a_{k+1} = k + 1$, ou seja, deve-se tomar cuidado com a contagem dos elementos, pois o conjunto $0, 1, 2, \cdots, n$ tem $n + 1$ elementos, enquanto o conjunto $1, 2, \cdots, n$ tem n elementos. Tomando-se esse cuidado, tanto faz começar com a_0 ou a_1. Em nosso exemplo, tendo o próprio enunciado da questão adotado a_0, vamos adotar o mesmo critério, apenas tomando cuidado com a indexação dos elementos.

Feitas essas considerações, a demonstração pode ser feita da seguinte maneira:

Base indutiva - Já nos foi dada pelo enunciado, ou seja, $a_0 = 8$ e $a_1 = 10$.

Passo indutivo - Sendo válida a suposição para qualquer n entre 1 e k, basta mostrar que também é válida para $n = k + 1$, o que é representado da seguinte maneira:

$$a_k = 7 + 3^k, 1 \leq k \leq n \Rightarrow a_{k+1} = 7 + 3^{k+1}.$$

De fato,

$$\begin{aligned}
a_{k+1} &= 4a_k - 3a_{k-1} \\
&= 4(7 + 3^k) - 3(7 + 3^{k-1}) \\
&= 28 + 4 \cdot 3^k - 21 - 3 \cdot 3^{k-1} \\
&= 28 - 21 + 3^{k-1} \cdot (4 \cdot 3 - 3) \\
&= 7 + 3^{k-1} \cdot (12 - 3) \\
&= 7 + 3^{k-1} \cdot 9 \\
&= 7 + 3^{k-1} \cdot 3^2 \\
&= 7 + 3^{k+1}.
\end{aligned}$$

Portanto, $a_n = 7 + 3^n, \forall n \in \mathbb{N}$.

3 Números Binomiais

Neste capítulo, vamos estudar os números binomiais que são essenciais para os cálculos de análise combinatória relativos às combinações, arranjos e permutações, ou mesmo o cálculo dos coeficientes das funções geradoras. Por isso, trata-se de requisito indispensável para se iniciar o estudo da análise combinatória. As principais referências para o desenvolvimento do presente capítulo foram [9, 4, 3].

Para conceituarmos os números binomiais será necessário esclarecer o significado de fatorial de um número natural.

Em seguida, mostraremos como a noção de fatorial pode ser estendida para os números inteiros negativos e racionais, algo que não será mais pensado em termos de subconjuntos mas através de uma teoria desenvolvida por Isaac Newton, que será de grande utilidade para os estudos de análise combinatória.

Por fim, cabe esclarecer que é possível até mesmo falar de binomial de números reais e complexos através da função gama , que também não se refere à ideia de subconjuntos, mas que não será abordado no presente trabalho porque o fatorial de números reais ou complexos não tem utilidade para os problemas de contagem.

3.1 Fatorial

Definição 3.1. *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $k \in \mathbb{N}$. Denomina-se fatorial, representado por $n!$, o seguinte produtório:*

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k; \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Exemplo 3.1. O fatorial de 5, será:

$$5! = \prod_{k=1}^{5} k = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60.$$

Uma importante propriedade do fatorial é a seguinte:

$$n! = n.(n-1)!$$

Como consequência, $(n+2)! = (n+2)\cdot(n+1)!$ e da mesma maneira, temos

$$(n+2)! = (n+2)\cdot(n+1)! \text{ e } (n+1)! = (n+1)\cdot n!\,.$$

Logo, $(n+2)! = (n+2)\cdot(n+1)\cdot n!$.

Exemplo 3.2. Um caso que merece particular atenção é o cálculo do fatorial de 0 usando essa propriedade:

$$1 = 1! = 1\cdot(1-1)! = 1\cdot 0!$$

Portanto, $0! = 1$.

Com essas noções de fatorial, podemos definir os números binomiais nos seguintes termos:

Definição 3.2. *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $k \in \mathbb{N}$. Denomina-se coeficiente binomial, representado por $\binom{n}{k}$, o número definido por*

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}, n \geq k \\ 0, n < k \end{cases} \tag{3.1}$$

O coeficiente binomial também pode ser chamado de número binomial ou combinação, de um número n na classe k.

O número binomial nada mais é do que a quantidade de conjuntos não-ordenados, pois é irrelevante a ordem dos elementos do conjunto. Por exemplo, nas combinações o conjunto $\{a,b,c\}$ é igual a $\{a,c,b\}$, $\{b,a,c\}$, $\{b,c,a\}$, $\{c,a,b\}$ ou $\{c,b,a\}$.

Note que aqui estamos falando apenas de números naturais, o que significa que essa definição não se aplica nem aos números inteiros e nem aos números racionais. Isso significa que de um conjunto com n elementos, podemos extrair $\binom{n}{k}$ subconjuntos com k elementos. Note que essa ideia de subconjuntos somente faz sentido em relação aos números naturais.

Exemplo 3.3. Quantos grupos com 3 alunos podemos formar em uma classe com 20 alunos?

Basta fazermos $\binom{20}{3}$, sendo que o número binomial é calculado da seguinte maneira:

$$\binom{20}{3} = \frac{20!}{3!\cdot(20-3)!}.$$

Outra maneira de fazer essa mesma conta seria:

$$\binom{n}{k} = \frac{\overbrace{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots(n-k+1)}^{k \text{ elementos}}}{k!} \Rightarrow$$

$$\binom{20}{3} = \frac{\overbrace{20\cdot(20-1)\cdot(20-2)}^{3 \text{ elementos}}}{3!}.$$

Ainda nessa ideia de subconjuntos, a definição também diz que se $k > n$, então o número binomial será 0. De fato, basta pensarmos que não seria possível, por exemplo, extraírmos subconjuntos de 5 elementos a partir de um conjunto com 2 elementos, por isso o resultado seria:

$$\binom{2}{5} = 0, \text{ pois } 5>2.$$

No que se refere aos números naturais, a definição parece ser confirmada pela intuição.

Vejamos outros exemplos de cálculo de números binomiais:

Exemplo 3.4. Para calcular o valor de $\binom{5}{2}$ fazemos:

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2! \cdot (5-2)!} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = 10,$$

ou também podemos calcular assim:

$$\binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10.$$

Note que o denominador será o produto de 2 elementos em ordem decrescente, pois o denominador binomial é 2.

Exemplo 3.5. Para calcular o valor de $\binom{10}{4}$ fazemos:

$$\binom{10}{4} = \frac{10!}{4! \cdot (10-4)!} = \frac{10!}{2! \cdot 6!} = 210$$

ou também podemos calcular assim:

$$\binom{10}{4} = \frac{\overbrace{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}^{\text{4 elementos}}}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 210.$$

Note que o denominador será o produto de 4 elementos em ordem decrescente, pois o denominador binomial é 4.

3.2 Expoentes binomiais

Além de nos possibilitar o cálculo do número de combinações, os números binomiais também são importantes por permitirem também o cálculo dos coeficientes de binômios.

Definição 3.3. *Um binômio é uma expressão do tipo $(x+y)^n$, ou seja, é a potência de uma soma de dois termos.*

São conhecidos os binômios mais simples, por exemplo, $(x+y)^1 = x+y$, $(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$, ou ainda $(x+y)^3 = x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$, dentre outros. Porém, se quisermos obter a expansão do binômio $(x+y)^7$, já não é mais tão simples obter o resultado.

Com o desenvolvimento de mais potências binomiais, foi possível observar uma relação entre esses binômios e os coeficientes binomiais, pois:

$$x+y = \binom{1}{0}x + \binom{1}{1}y$$

$$x^2+2xy+y^2 = \binom{2}{0}x^2 + \binom{2}{1}xy + \binom{2}{2}y^2$$

$$x^3+3x^2y+3xy^2+y^3 = \binom{3}{0}x^3 + \binom{3}{1}x^2y + \binom{3}{2}xy^2 + \binom{3}{3}y^3$$

A partir dessa observação, deduziu-se uma equação geral para o desenvolvimento de números binomiais da forma $(x+y)^n$, que é dada pelo seguinte teorema:

Teorema 3.1. *[9]. **(Teorema do binômio com expoente natural)** Sejam n, $k \in \mathbb{N}$, com $k \leq n$, então:*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

É importante destacar que neste exemplo o expoente n do binômio $(x+y)^n$ é um número natural. Assim sendo, temos:

Exemplo 3.6.

$$(x+y)^7 =$$

$$= \binom{7}{0}x^7y^0 + \binom{7}{1}x^6y^1 + \binom{7}{2}x^5y^2 + \binom{7}{3}x^4y^3 + \binom{7}{4}x^3y^4 + \binom{7}{5}x^2y^5 + \binom{7}{6}x^1y^6 + \binom{7}{7}x^0y^7 =$$

$$= x^7 + 7x^6y + 21x^5y^2 + 35x^4y^3 + 35x^3y^4 + 21x^2y^5 + 7x^1y^6 + y^7.$$

Em relação às variáveis x e y cabe esclarecer que para as finalidades da matemática discreta interessam apenas os seus expoentes, motivo pelo qual não há qualquer restrição a tais variáveis, podendo ser números reais ou complexos e, na realidade, nem precisam ser números, de maneira que não passam de meros símbolos do binômio.

3.2.1 Expoentes binomiais generalizados

Vimos o cálculo dos coeficientes binomiais do tipo $\binom{n}{k}$, com $n, k \in \mathbb{N}$, incluindo o 0. Porém, é possível calcular coeficientes binomiais não apenas para $n \in \mathbb{N}$, mas também para qualquer número real, ou seja, há uma generalização que possibilita o cálculo de coeficientes binomais sendo n um número real qualquer. É bom lembrar que em qualquer caso k sempre será um número natural, incluindo o 0. Atribui-se a Isaac Newton a generalização dos expoentes naturais para os expoentes reais.

Neste trabalho nos interessa apenas os casos em que n for um número racional ou um número inteiro negativo, que serão de grande utilidade para o estudo das funções geradoras. Não avançaremos para outros números reais, porém, deixamos registrado que isso é possível.

A utilidade da generalização do teorema binomial encontra-se na possibilidade de se obter os coeficientes de binômios do tipo $(1+x)^{\frac{1}{2}}$ ou $(1+x)^{-3}$, dentre outros, através de uma série, que é uma soma infinita [1], em torno de 0, da função $f(x) = (1 + x)^u$, sendo u um número real qualquer e com $|x|< 1$, cujo resultado encontramos no seguinte teorema:

Teorema 3.2. *[9]. **(Teorema binomial generalizado)** Seja u um número real qualquer, temos:*

$$(1+x)^u = \binom{u}{0} + \binom{u}{1}x + \binom{u}{2}x^2 + \binom{u}{3}x^3 + \cdots + \binom{u}{k}x^k + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{u}{k} x^k$$

onde

$$\binom{u}{k} = \begin{cases} \frac{u(u-1)(u-2)\cdots(u-k+1)}{k!}, & se \;\; k > 0 \\ 1, \; se \;\; k = 0 \end{cases}$$

O número $\binom{u}{k}$ definido acima é chamado de coeficiente binomial generalizado. Se u for um número natural, o número $\binom{u}{k}$ será o coeficiente binomial usual e o desenvolvimento acima se reduzirá ao caso do teorema do binômio com expoente natural. Porém, se u for um número inteiro negativo ou um racional, insere-se na regra geral do expoente real, ou seja, o desenvolvimento acima se reduzirá a uma série, quer dizer, uma soma infinita.

Exemplo 3.7. Calcular $\binom{\frac{1}{2}}{3}$.

[1]Essa soma infinita denominada série é obtida pela expansão polinomial de Taylor. Sobre o assunto, poderá ser consultado o livro *Cálculo de uma Variável*, volume I, de Hughes-Hallet, Gleason, McCallum, cuja 3ª edição tem tradução brasileira pela LTC, 2011, a partir da página 362, dentre outros livros de cálculo ou de análise real.

Note que no numerador fazemos o produto de 3 termos diminuindo cada um de uma unidade e dividimos por 3!.

$$\binom{\frac{1}{2}}{3} = \frac{\overbrace{(\frac{1}{2}-0)\cdot(\frac{1}{2}-1)\cdot(\frac{1}{2}-2)}^{3\ \ termos}}{3!} = \frac{\frac{1}{2}\cdot(-\frac{1}{2})\cdot(-\frac{3}{2})}{3\cdot 2\cdot 1} = \frac{\frac{3}{8}}{6} = \frac{3}{48} = \frac{1}{16}.$$

Exemplo 3.8. Calcular $\binom{-5}{3}$.

Note que no numerador colocamos em evidência (-1), de maneira que a subtração transforma-se em uma soma, conforme verifica-se a seguir:

$$\binom{-5}{3} = \frac{\overbrace{(-5-0)\cdot(-5-1)\cdot(-5-2)}^{3\ \ termos}}{3!} = \frac{(-1)\cdot(5+0)\cdot(-1)\cdot(5+1)\cdot(-1)\cdot(5+2)}{3!} =$$

$$= \frac{(-1)^3\cdot(5+0)\cdot(5+1)(5+2)}{3!} = \frac{(-1)^3\cdot(5)\cdot(6)\cdot(7)}{3!} = -\frac{5\cdot 6\cdot 7}{3\cdot 2\cdot 1} = -35.$$

Exemplo 3.9. Calcule o coeficiente de x^3 na expansão do binômio $(1+x)^{\frac{1}{2}}$.

Pelo teorema do binômio com expoente real,

$$\binom{\frac{1}{2}}{3} = \frac{(\frac{1}{2})\cdot(\frac{1}{2}-1)\cdot(\frac{1}{2}-2)}{3!} = \frac{(\frac{1}{2})\cdot(-\frac{1}{2})\cdot(-\frac{3}{2})}{3\cdot 2\cdot 1} = -\frac{\frac{3}{8}}{6} = \frac{1}{16}.$$

Isso significa que na expansão do binômio teremos $\frac{1}{16}x^3$, ou seja, o coeficiente de x^3 será $\frac{1}{16}$.

Exemplo 3.10. Calcule o coeficiente de x^3 na expansão do binômio $(1+x)^{-\frac{1}{2}}$.

Pelo teorema do binômio com expoente real,

$$\binom{-\frac{1}{2}}{3} = \frac{(-\frac{1}{2})\cdot(-\frac{1}{2}-1)\cdot(-\frac{1}{2}-2)}{3!} = \frac{(-\frac{1}{2})\cdot(-\frac{3}{2})\cdot(-\frac{5}{2})}{3\cdot 2\cdot 1} = -\frac{\frac{15}{8}}{6} = -\frac{5}{16}.$$

Isso significa que na expansão do binômio teremos $-\frac{5}{16}x^3$, ou seja, o coeficiente de x^3 será $-\frac{5}{16}$.

3.3 Triângulo de Pascal

O *Triângulo de Pascal*, também chamado de triângulo de Tartaglia, é uma disposição geométrica de forma triangular dos coeficientes binomiais, ou seja, dos coeficientes obtidos pela expansão do binômio $(x+y)^k$.

O matemático italiano Tartaglia (Niccolo Fontana 1499-1557) o teria estudado em 1556, motivo pelo qual alguns o denominam por **Triângulo de Tartaglia**. Cerca de um século depois, o matemático francês Blaise Pascal (1623-1662) o usou em seus estudos sobre probabilidade e que teve grande divulgação sobretudo na França e na Grã-Bretanha, razão pela qual nessas regiões é mais conhecido como **Triângulo de Pascal**. Já na Alemanha o triângulo é atribuído ao matemático Michael Stifel (1487-1567) por tê-lo mencionado em uma publicação de 1544. No Brasil, costuma-se denomina-lo por *Triângulo de Pascal*, em referência ao francês, porém pode-se encontrar quem o chame apenas de *Triângulo de Tartaglia*, em referência ao italiano, ou, ainda, *Triângulo de Pascal-Tartaglia*, em referência a ambos, e ainda *Triângulo de Stifel*, em referência ao alemão, mas qualquer uma dessas denominações significa matematicamente a mesma coisa, [9].

Nos cálculos combinatórios o que nos interessa são os coeficientes da expansão da potência de um binômio. Se tivéssemos um conjunto com duas bolas, uma amarela, que poderíamos representar pela letra x, e outra branca, que poderíamos representar pela letra y, o polinômio expandido $x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$, nos revelaria que de um total de quatro possibilidades, que corresponde à soma dos coeficientes do polinômio expandido $(1 + 2 + 1)$, teríamos uma única possibilidade de tirar duas bolas brancas, duas possibilidades de tirar uma bola branca e outra amarela e uma única possibilidade de tirar duas bolas amarelas. Se fossemos tirar três bolas, bastaria expandir o binômio $(x+y)^3$ que resulta em $x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$ para concluirmos que de um total de oito combinações possíveis, teríamos uma única possibilidade de extrair três bolas amarelas, três possibilidades de extrair duas bolas amarelas e uma branca, três possibilidades de extrair uma bola amarela e duas brancas e uma única possibilidade de extrair três bolas brancas. Tudo isso nos é revelado pela leitura dos coeficientes do binômio expandido.

A partir da expansão do binômio $(x + y)^k$, extrai-se uma característica importante em relação aos coeficientes dessa expansão. Se fizermos a expansão atribuindo a k os valores $0, 1, 2, \cdots, n$, teremos o seguinte:

$$(x + y)^0 = 1$$

$$(x + y)^1 = x + y$$

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$(x + y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

$$(x+y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$$

$$(x+y)^6 = x^6 + 6x^5y + 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^4 + 6xy^5 + y^6$$

$$\vdots$$

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + \binom{n}{n}y^n$$

Se usarmos a mesma disposição em forma de triângulo apenas com os coeficientes da expansão, teremos a seguinte disposição triangular desses números conhecida por Triângulo de Pascal:

$$\begin{array}{c}
\binom{0}{0} \\
\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1} \\
\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2} \\
\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3} \\
\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4} \\
\binom{5}{0} \quad \binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad \binom{5}{5} \\
\vdots \\
\binom{n}{0} \quad \binom{n}{1} \quad \binom{n}{2} \quad \binom{n}{3} \quad \cdots \quad \binom{n}{n-2} \quad \binom{n}{n-1} \quad \binom{n}{n}
\end{array}$$

Note que o numerador binomial em cada linha, corresponde ao expoente do binômio $(x+y)^k$, $k = 0, 1 \cdots n$.

Assim, se quisermos expandir o binômio $(x+y)^6$, para encontrarmos os coeficientes basta seguir a linha para $k = 6$:

$$(x+y)^6 = x^6 + 6x^5y + 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^4 + 6xy^5 + y^6.$$

A partir do triângulo de Pascal, vários outros teoremas podem ser extraídos, alguns dos quais apresentamos a seguir.

3.3.1 Teorema das Linhas

Teorema 3.3. *[4] Seja n um número inteiro não-negativo, então:*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

Demonstração.

Como $2^n = (1+1)^n$, podemos usar o Teorema 3.1 para obter sua expansão.

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} 1^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.$$

□

Este teorema nos diz que a soma de todos os números de uma linha é igual a 2 elevado àquele número que associamos à linha.

Exemplo 3.11. Vamos calcular

$$\binom{5}{0} + \binom{5}{1} + \binom{5}{2} + \binom{5}{3} + \binom{5}{4} + \binom{5}{5}.$$

Pelo teorema das linhas trata-se da soma dos números binomiais para a linha $n = 5$, cuja soma corresponde a $2^5 = 32$.

3.3.2 Teorema das Colunas

Teorema 3.4. *[4] A soma dos coeficientes binomiais de uma mesma coluna, desde o primeiro elemento até um qualquer, é igual ao coeficiente binomial que fica imediatamente abaixo e na coluna à direita da somada. Esse teorema pode ser algebricamente expresso da seguinte maneira:*

$$\sum_{i=0}^{p} \binom{n+i}{n} = \binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \binom{n+2}{n} + \cdots + \binom{n+p}{n} = \binom{n+p+1}{n+1}$$

Esse teorema pode ser assim apresentado para o caso de $n = 0$ e $p = 3$:

$$\binom{0}{0} + \binom{1}{0} + \binom{2}{0} + \binom{3}{0} = \binom{4}{1}$$

O que graficamente no triângulo de Pascal corresponde ao seguinte:

$$
\begin{array}{ccccc}
1 & & & & \\
\downarrow & & & & \\
1 & 1 & & & \\
\downarrow & & & & \\
1 & 2 & 1 & & \\
\downarrow & & & & \\
1 & 3 & 3 & 1 & \\
 & \searrow & & & \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1
\end{array}
$$

3.3.3 Teorema dos Binomiais Complementares

Teorema 3.5. *[4] Sejam n e k números inteiros não-negativos, tal que $n \geq k$, então:*

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Exemplo 3.12. Vamos calcular

$$\binom{13}{5} - \binom{13}{8}.$$

Pelo Teorema 3.5:

$$\binom{13}{5} = \binom{13}{8}$$

pois

$$\binom{13}{5} = \binom{13}{13-5} = \binom{13}{8}$$

no que resulta

$$\binom{13}{5} - \binom{13}{8} = 0.$$

3.3.4 Teorema das Diagonais

Teorema 3.6. *[4] A soma dos números binomiais situados numa mesma diagonal em um triângulo retângulo de Pascal, desde a primeira coluna até outra qualquer, é igual ao número imediatamente abaixo da mesma coluna do último a ser somado.*

Algebricamente, essa propriedade pode ser assim expressa:

$$\sum_{k=0}^{p} \binom{n+k}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \binom{n+3}{3} + \cdots + \binom{n+p}{p} = \binom{n+p+1}{p}.$$

Demonstração. Pelo Teorema 3.5,

$$\binom{n+p+1}{n+1} = \binom{n+p+1}{n+p+1-(n+1)} = \binom{n+p+1}{p}$$

Logo,

$$\sum_{k=0}^{p} \binom{n+k}{k} = \binom{n+p+1}{p}.$$

$\square$

Para $n = 1$ e $p = 2$ temos

$$\sum_{k=0}^{2} \binom{1+k}{k} =$$

$$= \binom{1+2+1}{2} = \binom{4}{2} = 6$$

.

Podemos ainda obter uma visualização gráfica dessa propriedade dispondo o triângulo de Pascal em forma de triângulo retângulo da seguinte maneira:

$$\begin{array}{ccccc}
1 & & & & \\
1 & 1 & & & \\
 & \searrow & & & \\
1 & 2 & 1 & & \\
 & & \searrow & & \\
1 & 3 & 3 & 1 & \\
 & & \downarrow & & \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1
\end{array}$$

Note que a soma dos números da diagonal 1+2+3 é igual a 6, número imediatamente abaixo de 3 da mesma coluna.

Vejamos um exemplo.

Exemplo 3.13. Calcule

$$S = \sum_{k=0}^{7} \binom{k+5}{k}.$$

Expandindo o somatório, temos:

$$S = \binom{5}{0} + \binom{6}{1} + \binom{7}{2} + \binom{8}{3} + \binom{9}{4} + \binom{10}{5} + \binom{11}{6} + \binom{12}{7}.$$

Pelo teorema das diagonais temos:

$$S = \binom{5+7+1}{7} = \binom{13}{7} = 1.716.$$

É importante destacar que o teorema das diagonais vale desde que a soma comece com o o primeiro elemento da diagonal. Porém, se quisermos uma soma que não começa pelo primeiro elemento da diagonal, é possível o uso desse teorema desde que se subtraia os elementos ausentes da diagonal.

Aproveitando o exemplo anterior, vejamos alguns casos:

Exemplo 3.14. Calcule $\binom{8}{3} + \binom{9}{4} + \binom{10}{5} + \binom{11}{6} + \binom{12}{7}$.

Note que não podemos usar diretamente o teorema das diagonais porque a soma não começa com o primeiro elemento da diagonal que corresponde ao coeficiente binomial $\binom{5}{0}$. Aliás, também faltam os coeficientem binomiais $\binom{6}{1}$ e $\binom{7}{2}$. Por outro lado, em algumas situações não será tão simples calcular um por um todos os binomiais a serem somados. Por isso, em certas situações pode ser interessante usar o teorema das diagonais fazendo as devidas subtrações. No presente caso, faremos:

$$\begin{aligned} \binom{8}{3} + \binom{9}{4} + \binom{10}{5} + \binom{11}{6} + \binom{12}{7} &= \sum_{k=0}^{7} \binom{5+k}{k} - \binom{5}{0} - \binom{6}{1} - \binom{7}{2} = \\ &= 1.716 - 1 - 6 - 21 = 1.588, \end{aligned}$$

ou seja, primeiro calculamos a soma da diagonal através do Teorema 3.6 para depois excluir apenas os elementos que faltam.

Exemplo 3.15. Calcule $\binom{5}{0} + \binom{6}{1} + \binom{7}{2} + \binom{10}{5} + \binom{11}{6} + \binom{12}{7}$.

Também aqui não podemos usar diretamente o teorema das diagonais porque ainda que comece desde o primeiro elemento da diagonal, faltam os coeficientes binomiais $\binom{8}{3}$ e $\binom{9}{4}$. Para resolver esse problema, podemos usar o teorema como se a diagonal estivesse completa e depois subtraímos os coeficientes binomiais que faltam:

$$\begin{aligned} \binom{5}{0} + \binom{6}{1} + \binom{7}{2} + \binom{10}{5} + \binom{11}{6} + \binom{12}{7} &= \sum_{k=0}^{7} \binom{5+k}{k} - \binom{8}{3} - \binom{9}{4} = \\ &= 1.716 - 56 - 126 = 1.534, \end{aligned}$$

ou seja, em certas situações o teorema das diagonais pode auxiliar na solução de problemas desse gênero.

3.3.5 Teorema de Lallo ou Teorema da Soma Zero

Teorema 3.7. *[4] Seja n um número inteiro não-negativo, então:*

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0.$$

Demonstração.

$$0 = 0^n = (1-1)^n = [1+(-1)]^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{(n-k)}(-1)^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k.$$

□

Exemplo 3.16. Vamos calcular

$$\binom{5}{0} - \binom{5}{1} + \binom{5}{2} - \binom{5}{3} + \binom{5}{4} - \binom{5}{5}$$

Pelo Teorema de Lallo trata-se das somas e diferenças alternadas dos números binomiais da linha $n = 5$ do triângulo de Pascal, cuja soma é 0.

Note que neste teorema temos somas de coeficientes binomiais complementares com sinais invertidos. No exemplo dado, temos:

$$+\binom{5}{0} - \binom{5}{5} = 0,$$

$$-\binom{5}{1} + \binom{5}{4} = 0,$$

$$+\binom{5}{2} - \binom{5}{3} = 0.$$

Por isso a soma é 0.

3.3.6 Teorema de Stifel ou Relação de Stifel

Teorema 3.8. *[4] Sejam n e k números inteiros não-negativos, tais que $1 \leq k \leq n$, então:*

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}.$$

Demonstração.

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{(n-k)!\,(k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!\,k!} =$$

$$\frac{(n-1)!\,k}{(n-k)!\,(k-1)!\,k} + \frac{(n-k)(n-1)!}{(n-k)(n-k-1)!\,k!} = \frac{(n-1)!\,[k+(n-k)]}{(n-k)!\,k!} =$$

$$\frac{n(n-1)!}{(n-k)!\,k!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \binom{n}{k}.$$

□

Exemplo 3.17. Calcule $\binom{1}{0} + \binom{1}{1}$.

Pela relação de Stifel, temos:

$$\binom{1}{0} + \binom{1}{1} = \binom{2}{1} = 2.$$

Graficamente, poderíamos representar no triângulo de Pascal do seguinte modo:

$$\begin{array}{ccc}
1 & & \\
1 \longrightarrow & \mathbf{1} & \\
 & \downarrow & \\
1 & 2 & 1
\end{array}$$

Exemplo 3.18. Calcule $\binom{3}{1} + \binom{3}{2}$. Pela relação de Stifel, temos:

$$\binom{3}{1} + \binom{3}{2} = \binom{4}{2} = 6.$$

Graficamente, poderíamos representar no triângulo de Pascal do seguinte modo:

$$\begin{array}{ccccc}
1 & & & & \\
1 & 1 & & & \\
1 & 2 & 1 & & \\
1 & 3 \longrightarrow & \mathbf{3} & 1 & \\
 & & \downarrow & & \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1
\end{array}$$

3.4 Operações Fundamentais da Contagem

Todas as operações de contagem parte de um ponto em comum, o *princípio fundamental da contagem*, também denominado por *princípio multiplicativo.*

Por isso, apresentaremos o mencionado princípio fundamental da contagem para, em seguida, mostrarmos o que estamos denominando como operações fundamentais da contagem, que são o *arranjo* e a *combinação.* Também abordaremos a *permutação*, porém, como um caso particular de arranjo, razão pela qual não a apresentaremos como uma terceira operação fundamental, mas uma variante da operação de arranjo.

Essas duas operações fundamentais, arranjo e combinação, se distinguem pela ordem, ou seja, na combinação a ordem dos elementos do agrupamento não altera o resultado, enquanto no arranjo a mudança de ordem corresponde a uma nova solução.

Adotaremos a notação $\{a, b, c\}$ para o conjunto não ordenado correspondente a uma combinação, e (a, b, c) para o conjunto ordenado correspondente a um arranjo.

No primeiro caso, combinação, temos um conjunto e isso significa que a ordem dos elementos é irrelevante, de maneira que tanto faz escrevermos $\{a, b, c\}$ ou $\{c, b, a\}$, pois ambos são absolutamente iguais. Já no segundo caso, arranjo, não temos um conjunto, mas uma tripla ordenada, o que significa que (a, b, c) não é a mesma coisa que (c, b, a), pois ainda que os elementos permaneçam os mesmos, a ordem desses elementos mudou e por isso são diferentes.

Dentro da cada uma dessas operações fundamentais da contagem, devemos ainda distinguir em cada uma delas os casos em que há repetição de elementos daquelas onde não há repetição de elementos.

3.4.1 Princípio Fundamental da Contagem

O Princípio Fundamental da Contagem é o princípio básico de toda a teoria da contagem.

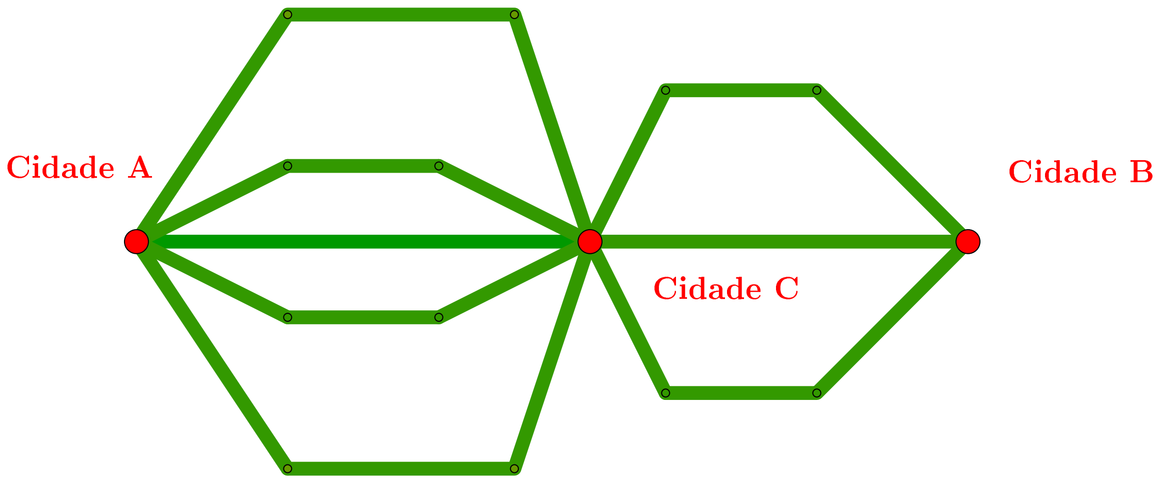
Sejam dois conjuntos, $A = \{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_m\}$ e $B = \{b_1, b_2, b_3, \cdots, b_n\}$, com $m, n \in \mathbb{N}$. Isso significa que o conjunto A tem m elementos, enquanto o conjunto B tem n elementos. O princípio fundamental da contagem nada mais significa que o número de pares ordenados (a_i, b_j) nos quais $a_i \in A$ e $b_j \in B$. Podemos elencar todos os pares ordenados possíveis da seguinte maneira:

$$\begin{gathered}
(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_1, b_3), \cdots, (a_1, b_n) \to n \text{ pares ordenados} \\
(a_2, b_1), (a_2, b_2), (a_2, b_3), \cdots, (a_2, b_n) \to n \text{ pares ordenados} \\
(a_3, b_1), (a_3, b_2), (a_3, b_3), \cdots, (a_3, b_n) \to n \text{ pares ordenados} \\
\vdots \\
(a_m, b_1), (a_m, b_2), (a_m, b_3), \cdots, (a_m, b_n) \to n \text{ pares ordenados}
\end{gathered}$$

Note que se trata de uma tabela com m linhas e n colunas, ou seja, um total de $m \cdot n$ pares ordenados.

Esse princípio é fundamental para a contagem. Vejamos alguns exemplos de sua aplicação:

Exemplo 3.19. Sabendo-se que entre as cidades A e C existem 5 caminhos e entre as cidades C e B existem 3 caminhos, conforme ilustra a figura abaixo, de quantas maneiras podemos ir da cidade A até a cidade B passando pela cidade C?



Vamos chamar cada uma das estradas entre A e C de estrada a_1, estrada a_2, estrada a_3, estrada a_4 e estrada a_5. Da mesma maneira, vamos chamar cada uma das estradas entre C e B de estrada b_1, estrada b_2 e estrada b_3. Desta maneira, usando uma tabela podemos montar todos os pares ordenados possíveis, considerando que estamos interessados nos pares ordenados entre os conjuntos $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ e o conjunto $\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$, ou seja:

$$(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_1, b_3) \rightarrow 3 \text{ pares ordenados}$$

$$(a_2, b_1), (a_2, b_2), (a_2, b_3) \rightarrow 3 \text{ pares ordenados}$$

$$(a_3, b_1), (a_3, b_2), (a_3, b_3) \rightarrow 3 \text{ pares ordenados}$$

$$(a_4, b_1), (a_4, b_2), (a_4, b_3) \rightarrow 3 \text{ pares ordenados}$$

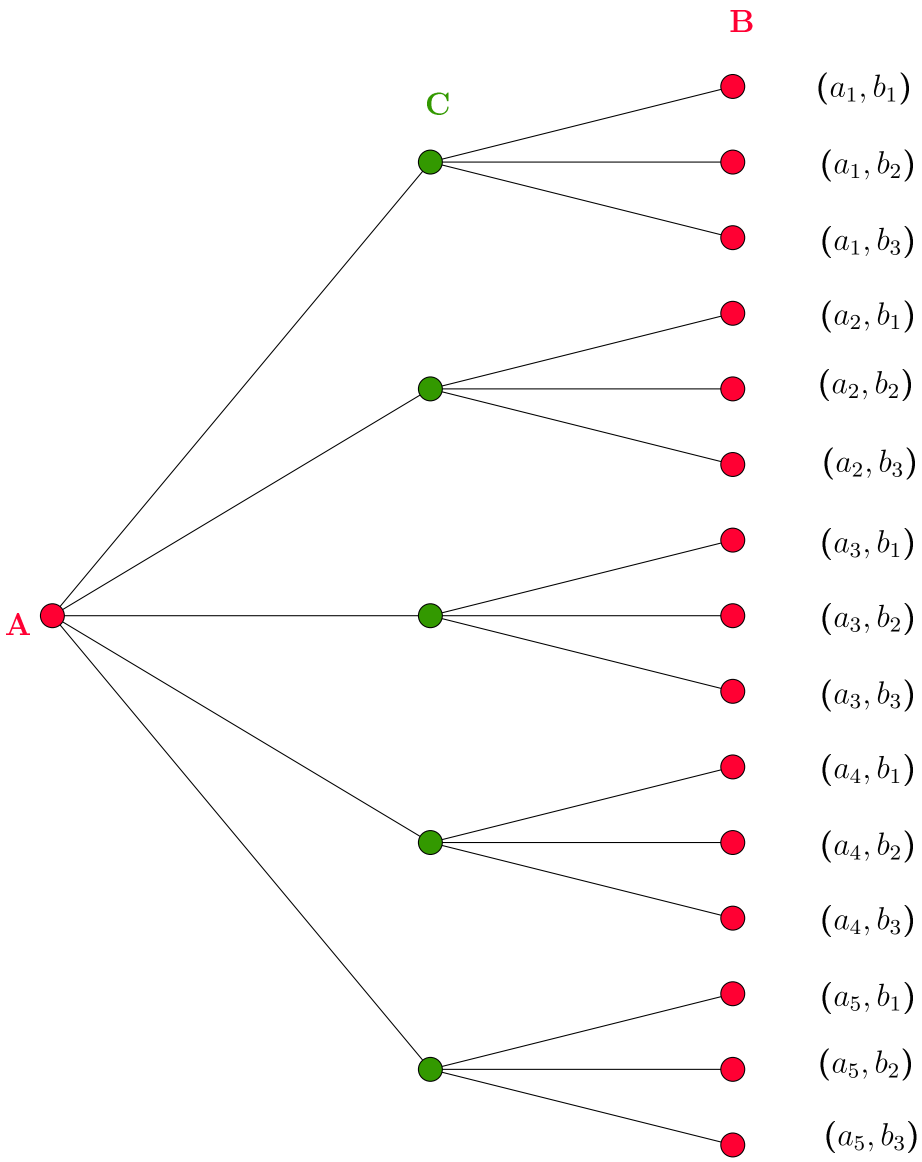
$$(a_5, b_1), (a_5, b_2), (a_5, b_3) \rightarrow 3 \text{ pares ordenados},$$

que totalizam 15 pares ordenados.

Uma maneira mais direta de obter esse resultado é pela multiplicação do número de elementos do conjunto $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ pelo número de elementos do conjunto $\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$. Assim, se entre as cidades A e C existem 5 estradas, enquanto entre as cidades C e B existem 3 estradas, então teremos pelo princípio multiplicativo que o total de caminhos possíveis entre as cidades A e B, passando pela cidade C será:

$$5 \cdot 3 = 15.$$

Uma outra maneira de ilustrar esse raciocínio é o uso do diagrama de árvores:



3.4.2 Arranjo com Repetição

Os *arranjos com repetição* também são chamados de *arranjos completos*. Usaremos a notação AR para representar arranjo com repetição.

Seja A um conjunto com m elementos, ou seja, $A = \{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_m\}$. Chamamos de arranjo com repetição dos m elementos, tomados n a n, $n < m$, toda $n - upla$ ordenada formadas pelos elementos do conjunto A não necessariamente distintos, ou seja, os elementos podem aparecer repetidos nas $n - uplas$ ordenadas. Usaremos a notação $AR_{m,n}$ para representar os arranjos com repetição de m elementos, tomados n a n.

Note que cada arranjo com repetição é uma sequência de n elementos do conjunto

A:

$$\overbrace{(-,-,-,\cdots,-)}^{n \text{ elementos}}$$

Assim sendo, na primeira posição teremos m escolhas. Também na segunda posição teremos m escolhas, pois os elementos a serem escolhidos podem se repetir. Da mesma maneira, na terceira posição teremos m escolhas e assim sucessivamente até a n-ésima posição, quando novamente teremos m escolhas. Usando o princípio fundamental da contagem, podemos calcular o arranjo com repetição da seguinte maneira:

$$AR_{m,n} = \overbrace{m \cdot m \cdot m \cdots m}^{n \text{ elementos}} = m^n, n < m.$$

Vejamos alguns exemplos para ilustrar o que estamos dizendo:

Exemplo 3.20. Quantas senhas de três dígitos podemos ter escolhendo os números do conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$?

Trata-se de arranjo com repetição pois com os mesmos três números podemos obter senhas diferentes, ou seja, as senhas são triplas ordenadas. Por exemplo, a senha 123 é diferente da senha 321, portanto, trata-se de um caso de arranjo. Além disso, os números escolhidos podem se repetir, por exemplo, a senha por ser 112 ou 121, dentre outras. Assim sendo, teremos:

$$AR_{10,3} = \overbrace{10 \cdot 10 \cdot 10}^{3 \text{ elementos}} = 10^3 = 1.000 \text{ senhas}.$$

Exemplo 3.21. Quantos números de três dígitos podemos ter escolhendo os números do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$?

Devemos escolher 3 dígitos de um conjunto com 6 dígitos. Além disso, os mesmos 3 dígitos escolhidos podem dar origem a números distintos pela diferença de ordem, por exemplo, 123 é diferente de 321. Por fim, os dígitos podem ser repetidos, de maneira que são válidos números tais como 111 ou 223, dentre outros. Para o dígito da centena, temos 6 escolhas. Para a dezena, também temos 6 escolhas. Por fim, para a unidade, temos novamente 6 escolhas. Portanto, trata-se de um caso de arranjo com repetição, que resolvemos da seguinte maneira:

$$AR_{6,3} = \overbrace{6 \cdot 6 \cdot 6}^{3 \text{ elementos}} = 6^3 = 216 \text{ números}.$$

3.4.3 Arranjo sem Repetição.

Seja A um conjunto com m elementos, ou seja, $A = \{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_m\}$. Chamamos de arranjo sem repetição dos m elementos, tomados n a n, $n < m$, toda n-upla ordenada formadas pelos elementos do conjunto A distintos entre si, ou seja, os elementos não podem aparecer repetidos nas $n - uplas$ ordenadas. Usaremos a notação $A_{m,n}$ para representar os arranjos sem repetição de m elementos, tomados n a n, $n < M$. Note que cada arranjo sem repetição, ou simplesmente arranjo, é uma sequência de n elementos do conjunto A:

$$\overbrace{(-,-,-,\cdots,-)}^{n \text{ elementos}}$$

Porém, como os elementos não se repetem, na primeira posição teremos m escolhas, mas na segunda escolha teremos $(m-1)$ escolhas porque o elemento da primeira escolha foi retirado, enquanto na terceira escolha teremos $(m-2)$ escolhas, porque os dois elementos das duas escolhas anteriores foram retiradas, e assim sucessivamente. Usando o princípio fundamental da contagem, podemos calcular o arranjo sem repetição da seguinte maneira:

$$A_{m,n} = \overbrace{m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdots (m-n+1)}^{n \text{ elementos}}$$

Vejamos alguns exemplos para ilustrar o que estamos dizendo:

Exemplo 3.22. Quantas sequências de 3 cartas, extraídas sucessivamente, podemos ter de um baralho com 52 cartas diferentes?

Note que a ordem das cartas dão origem a sequências diferentes, o que significa que estamos calculando o número de triplas ordenadas. Por exemplo, a tripla (valete, dama, rei) é uma sequência diferente da tripla (rei, dama, valete), apesar das cartas serem as mesmas. Isso significa que se trata de arranjo. Além disso, cabe notar que não há possibilidade de repetição pois além das 52 cartas serem diferentes entre si a retirada sucessiva impede que uma carta extraída seja devolvida para eventual nova extração, o que significa que é sem repetição. Assim sendo, teremos:

$$A_{52,3} = \overbrace{52 \cdot (51-1) \cdot (52-2)}^{3 \text{ elementos}} = 52 \cdot 51 \cdot 50 = 132.600 \text{ sequências.}$$

Exemplo 3.23. Quantos números com 3 algarismos distintos podemos ter do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$?

Note que a ordem dos dígitos dão origem a números diferentes, o que significa que estamos calculando o número de triplas ordenadas. Por exemplo, a tripla (1, 2, 3) dá origem ao número 123, que é diferente do número 321 que se extrai da tripla (3,2,1), apesar dos dígitos serem os mesmos. Isso significa que se trata de arranjo. Além disso, cabe notar que não há possibilidade de repetição pois os dígitos devem ser distintos entre si, o que significa que é sem repetição e não estaria valendo por exemplo o número 232, pois o dígito 2 foi repetido. Assim teremos 6 opções para a centena, 5 opções para a dezena e 4 opções para a unidade, ou seja:

$$A_{6,3} = \overbrace{6 \cdot 5 \cdot 4}^{3 \text{ elementos}} = 120 \text{ números.}$$

Exemplo 3.24. Quantas funções injetoras $f : A \to B$ podem ser definidas entre dois conjuntos finitos sendo o domínio o conjunto $A = \{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_m\}$ e contradomínio o conjunto $B = \{b_1, b_2, b_3, \cdots, b_n\}$?

Para termos funções injetoras do tipo $f : A \to B$, o número de elementos do conjunto domínio A tem que ser menor ou igual ao número de elementos do conjunto contradomínio B, ou seja, $m \leq n$. Trata-se de uma clássica questão de arranjo simples, pois o primeiro elemento do domínio pode se relacionar com quaisquer dos n elementos do contradomínio, o segundo elemento pode se relacionar com quaisquer dos demais $(n-1)$ elementos do contradomínio, o terceiro elemento do domínio pode se relacionar com quaisquer dos demais $(n-2)$ elementos do contradomínio e assim sucessivamente até chegarmos no *m-ésimo* elemento do domínio que poderá relacionar-se com quaisquer dos $(n-m+1)$ elementos do contradomínio. Assim sendo, o número de funções injetoras é dado pelo seguinte arranjo simples:

$$A_{m,n} = \overbrace{m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdots (m-n+1)}^{n \text{ elementos}} = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

No caso de $m = n$, teremos o caso particular de funções injetoras que também são sobrejetoras, denominadas bijetoras, que será simplesmente $n!$.

No caso em que $m \leq n$, obtemos o número de funções que são apenas injetoras, pois neste caso não podem ser sobrejetoras. Já para calcular o número de funções sobrejetoras, será necessário o princípio da inclusão e exclusão, conforme veremos.

3.4.4 Permutação sem repetição

Uma *permutação* nada mais é do que um caso particular de arranjo.

Se nos arranjos tínhamos $m \neq n$, as permutações seriam os casos de arranjos nos quais $m = n$, ou seja:

$$A_{m,n} = A_{m,m} = \overbrace{m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \cdots \cdot (m-m+1)}^{n \text{ elementos}} =$$
$$= \overbrace{m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdots 1}^{n \text{ elementos}} = m! = P_m.$$

Assim sendo, podemos concluir que a permutação de m elementos, será:

$$P_m = m!$$

A notação para permutação de m elementos será P_m. Vejamos alguns exemplos para ilustrar o que estamos dizendo.

Exemplo 3.25. Calcular o número de *permutações sem repetição* dos elementos do conjunto $A = \{a, b, c\}$.

Trata-se de uma permutações sem repetição de 3 elementos, assim:

$$P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6,$$

ou seja, podemos ter 6 permutações.

Exemplo 3.26. De quantas maneiras diferentes 6 pessoas podem estar numa fila?

Cada fila corresponde a uma sequência ordenada de pessoas, ou seja, mudando a posição de uma pessoa na fila, esta se altera. Além disso, todas as pessoas do grupo participam de todas sequências ordenadas possíveis. Em suma, trata-se de uma permutações sem repetição de 6 pessoas:

$$P_6 = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720,$$

ou seja, podemos ter 720 filas diferentes a partir de um grupo com 6 pessoas.

Exemplo 3.27. Quantos anagramas podemos obter com as letras da palavra FUTEBOL?

É importante destacar que todas as letras da palavra FUTEBOL são diferentes entre si, ou seja, não há repetição de letras. Além disso, trata-se de uma sequência ordenada com todas as 7 letras da palavra. Em suma, trata-se de uma permutação sem repetição de 7 letras:

$$P_7 = 7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5.040.$$

ou seja, é possível ter 5.040 anagramas com as 7 letras da palavra FUTEBOL.

3.4.5 Permutação com Repetição.

Comparando as permutações sem repetição com as permutações com repetição há repetição dos elementos a serem permutados. Por exemplo, ao calcularmos os anagramas da palavra FUTEBOL não havia nenhuma letra repetida. Porém, se quiséssemos calcular os anagramas da palavra PAPA, há repetição de letras a serem permutadas, pois temos duas letras A e mais duas letras P. Em tais situações, temos que tomar cuidado para não contar mais de uma vez um mesmo anagrama.

A palavra PAPA tem quatro letras. Se fossem quatro letras diferentes entre si, o cálculo do número de anagramas seria um caso de permutação sem repetição, ou seja, $4! = 24$. Porém, como há letras repetidas, nesse total de 24 anagramas contamos um mesmo anagrama mais de uma vez. Vamos utilizar sub-índices para ilustrar o que estamos dizendo. Colocando sub-índices nas letras repetidas, temos:

$$P_1 A_1 P_2 A_2$$

Os 24 anagramas são os seguintes:

$$P_1A_1P_2A_2$$

$$P_2A_1P_1A_2$$

$$P_1A_2P_2A_1$$

$$P_2A_2P_1A_1$$

$$A_1P_1A_2P_2$$

$$A_2P_1A_1P_2$$

$$A_1P_2A_2P_2$$

$$A_2P_2A_1P_1$$

$$P_1P_2A_1A_2$$

$$P_2P_1A_1A_2$$

$$P_1P_2A_2A_1$$

$$P_2P_1A_2A_1$$

$$A_1A_2P_1P_2$$

$$A_2A_1P_1P_2$$

$$A_1A_2P_2P_1$$

$$A_2A_1P_2P_1$$

$$A_1P_1A_2P_2$$

$$A_2P_1A_1P_2$$

$$A_1P_2A_2P_1$$

$$A_2P_2A_1P_1$$

$$P_1A_1A_2P_2$$

$$P_2A_1A_1P_2$$

$$P_1A_2A_1P_2$$

$$P_2A_2A_1P_1.$$

Porém, desse total de 24 anagramas, temos apenas 6 anagramas distintos:

$$PAPA$$
$$APAP$$
$$PPAA$$
$$AAPP$$
$$APAP$$
$$PAAP.$$

ou seja, cada um desses anagramas distintos é repetido 4 vezes por conta da repetição de duas letras A e duas letras P, ou seja, dos 24 anagramas restam apenas 6 anagramas distintos.

Em termos gerais, podemos definir a permutação com repetição da seguinte maneira:

Definição 3.4. *Consideremos n elementos, dos quais temos n_1 elementos iguais a a_1, n_2 elementos iguais a a_2, n_3 elementos iguais a a_3, e assim por diante, até n_r elementos iguais a a_r, ou seja, $n = n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_r$. O número de permutações distintas, ou seja, sem repetição, será representado por:*

$$PR_{n,n_1,n_2,\cdots,n_r} = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \cdots n_r!}.$$

Na notação que estamos usando, PR significa permutação com repetição, sendo o primeiro sub-índice representa o fatorial do numerador, ou seja, o total dos elementos a serem permutados, seguido dos fatoriais que vão para o denominador e representam o número de repetição de cada elemento.

Voltando ao exemplo dos anagramas da palavra PAPA e usando a definição dada, temos um total de 4 letras e duas repetições com 2 letras A e mais 2 letras B, de maneira que:

$$PR_{4,2,2} = \frac{4!}{2!\, 2!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(2 \cdot 1) \cdot (2 \cdot 1)}.$$

Exemplo 3.28. Quantas permutações distintas, sem repetição, temos com a palavra BATATA?

A palavra BATATA tem 6 letras, sendo que repetidas temos 3 letras A e 2 letras B, de maneira que:

$$PR_{6,3,2} = \frac{6!}{3!\, 2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot (2 \cdot 1)}.$$

Exemplo 3.29. De quantas maneiras podemos dividir 9 objetos em dois grupos, um com 5 objetos e outro com 4 objetos?

Para resolver este problema sugerimos pensar em uma fila com os 9 objetos e calcular todas as permutações simples possíveis, sem restrições, ou seja, 9!. Em seguida deve-se ter o cuidado de perceber que estamos perante um caso de permutação com repetição, pois note que a fila $abcde - fghi$ apesar de ser diferente da fila $edcba - ihgf$, por exemplo, ambas representam um único grupo de 5 objetos do conjunto $\{a, b, c, d, e\}$, e outro único grupo de 4 objetos do conjunto $\{f, g, h, i\}$.

Portanto, teremos que eliminar os casos de repetição que será dado pela divisão por 5! em relação ao grupo com 5 objetos e também pela divisão por 4! em relação ao grupo com 4 objetos. Assim, teremos:

$$PR_{9,5,4} = \frac{9!}{5!\,4!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot (4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)} = 126.$$

Note que este problema tem a mesma estrutura do problema dos anagramas, ou seja, poderíamos compara-lo com os anagramas distintos da palavra ABABABABA, que tem 9 letras, sendo repetidas 5 letras A e mais 4 letras B, cuja solução já vimos que seria o mesmo, $PR_{9,5,4}$.

Outras variações desse problema dos anagramas com repetição podem aparecer de diversas formas. Vejamos mais um exemplo:

Exemplo 3.30. De quantas maneiras podemos distribuir 5 livros para as estudantes Alice e Beatriz, de maneira que Alice receba 3 livros e Beatriz 2 livros?

Novamente sugerimos pensar em uma fila dos 5 livros, dos quais 3 são para Alice e 2 são para Beatriz.

Se representarmos Alice pela letra A e Beatriz pela letra B, teremos as seguintes 10 possibilidades:

$$AAABB$$

$$AABAB$$

$$AABBA$$

$$ABAAB$$

$$ABABA$$

$$ABBAA$$

$$BAAAB$$

$$BAABA$$

$$BABAA$$

$$BBAAA.$$

Note que este problema equivale ao cálculo dos anagramas distintos da palavra ABABA, cujo resultado é:

$$PR_{5,3,2} = \frac{5!}{3!\,2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot (2 \cdot 1)} = 10.$$

O que significa que esta também é a solução do problemas dos livros de Alice e Beatriz, ou seja, há 10 maneiras de distribuir 5 livros, sendo 3 livros para Alice e 2 livros para Beatriz.

Exemplo 3.31. Quantas sequências distintas podemos fazer com os seguintes 9 símbolos?

$$\blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle\bigstar\bigstar\bigstar\blacklozenge\blacklozenge$$

$$PR_{9,4,3,2} = \frac{9!}{4!\,3!\,2!} = 1.260.$$

Exemplo 3.32. (Problema da Soma dos Inteiros). Quantas são as soluções inteiras e não negativas da equação $x_1 + x_2 + x_3 = 6$?

Trata-se de uma questão clássica de contagem e que pode não parecer, mas se reduz ao problema do exemplo anterior relativo às sequências distintas de símbolos. Esse problema seria equivalente à questão de saber de quantas maneiras podemos distribuir 6 bolas entre 3 caixas distintas. Tudo isso são variações de um mesmo raciocínio de contagem. A seguinte ilustração pode nos ajudar a visualizar o que estamos dizendo:

$$\circ\circ\circ\circ\circ\circ++$$

Nessa ilustração temos as 6 bolas e 2 sinais $+$ que separam as 3 variáveis (ou 3 caixas). Assim, uma das soluções possíveis seria colocar 3 bolas na primeira caixa, 2 bolas na segunda caixa e 1 bola na terceira caixa, o que na ilustração assim seria representado $\circ\circ\circ + \circ\circ + \circ$.

Outra possibilidade seria colocar 4 bolas na primeira caixa, duas bolas na segunda caixa e nenhuma bola na terceira caixa, o que na ilustração corresponderia a $\circ\circ\circ\circ+\circ\circ+$, e assim por diante. Com isso, estamos querendo dizer que o problema da soma de inteiros pode ser reduzido ao problema das sequências distintas de 8 símbolos, dos quais há repetição de 6 $\circ$ e 2 $+$, que nada mais é do que a seguinte permutação com repetição:

$$PR_{8,6,2} = \frac{8!}{6!\,2!} = 28.$$

Cabe registrar sobre o assunto que também é possível resolver este problema usando as combinações com repetição, conforme veremos posteriormente, mostrando que apesar de na matemática a resposta ser única, os métodos de resolução válidos nem sempre são únicos.

Exemplo 3.33. (Problema da Soma dos Inteiros Generalizado). Quantas são as soluções inteiras e não negativas da equação $x_1 + x_2 + \cdots x_n = p$?

Generalizando o raciocínio anterior, podemos estender para o caso do número de soluções inteiras e não negativas de n números cuja soma seja igual a p. Na soma de n números inteiros temos $(n-1)$ símbolos $+$. Assim, temos $(n-1)$ símbolos $+$ e mais p símbolos $\circ$, e o problema pode ser resolvido pela permutação com repetição de um total de $(n+p-1)$ símbolos, dos quais há repetição de $(n-1)$ símbolos $+$ e p símbolos $\circ$, assim:

$$PR_{(n+p-1),(n-1),p} = \frac{(n+p-1)!}{p!\,(n-1)!} = \binom{n+p-1}{p}.$$

Exemplo 3.34. Quantas são as soluções inteiras e positivas da equação $x_1+x_2+x_3 = 6$?

Diferentemente do Exemplo 3.32, aqui nenhuma das variáveis pode ser igual a 0, pois as soluções inteiras devem ser *positivas*. Uma maneira de resolver esse problema é fazer uma mudança de variável transformando a equação no caso anterior já conhecido. Para isso, realizamos uma troca de variáveis de maneira que possam admitir 0 nas variáveis. No caso, o menor valor que as variáveis podem assumir seria 1, o menor número inteiro permitido pelo problema. Assim sendo, subtraímos 1 de cada uma das 3 variáveis e para manter a igualdade, também subtraímos de 6 o total de 3 unidades subtraídas do lado das variáveis:

$$x_1 - 1 = y_1 \Rightarrow x_1 = y_1 + 1$$

$$x_2 - 1 = y_2 \Rightarrow x_2 = y_2 + 1$$

$$x_3 - 1 = y_3 \Rightarrow x_3 = y_3 + 1.$$

Em seguida, reescrevemos a equação original com as novas variáveis:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 6$$

$$(y_1 + 1) + (y_2 + 1) + (y_3 + 1) = 6$$

$$y_1 + y_2 + y_3 + 3 = 6$$

$$y_1 + y_2 + y_3 = 6 - 3$$

$$y_1 + y_2 + y_3 = 3.$$

Neste momento, poderemos resolver o problema assim reformulado pelo método conhecido, pois agora as novas variáveis y_1, y_2 e y_3 podem assumir o valor 0. Portanto, a solução será encontrada pela permutação com repetição de um total de 5 símbolos $(\circ \circ \circ + +)$, dos quais há repetição de 3 $\circ$ e 2 $+$:

$$PR_{5,3,2} = \frac{5!}{3!\,2!} = 10.$$

Exemplo 3.35. Quantas são as soluções inteiras da equação $x_1 + x_2 + x_3 = 12$, sendo que $x_1 \geq 2$, $x_2 > 2$ e x_3 tem que ser inteiro e não negativo?

Aqui também transformaremos o problema para que seja reduzido a um caso que possa ser resolvido pelo método dos exemplos anteriores. No caso, teremos que mudar as variáveis de x_1 e de x_2, não sendo necessário em relação a x_3 pois pode assumir qualquer valor inteiro não negativo, o que inclui o 0. O menor valor possível para x_1 é 3, enquanto o menor valor possível para x_2 é 5.

Assim, fazemos as seguintes mudanças de variáveis:

$$x_1 - 2 = y_1 \Rightarrow x_1 = y_1 + 2$$

$$x_2 - 3 = y_2 \Rightarrow x_2 = y_2 + 3.$$

Retornamos à equação reescrevendo-a com as novas variáveis:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 12$$

$$(y_1 + 2) + (y_2 + 3) + x_3 = 12$$

$$y_1 + y_2 + x_3 + 5 = 12$$

$$y_1 + y_2 + x_3 = 12 - 5$$

$$y_1 + y_2 + x_3 = 7.$$

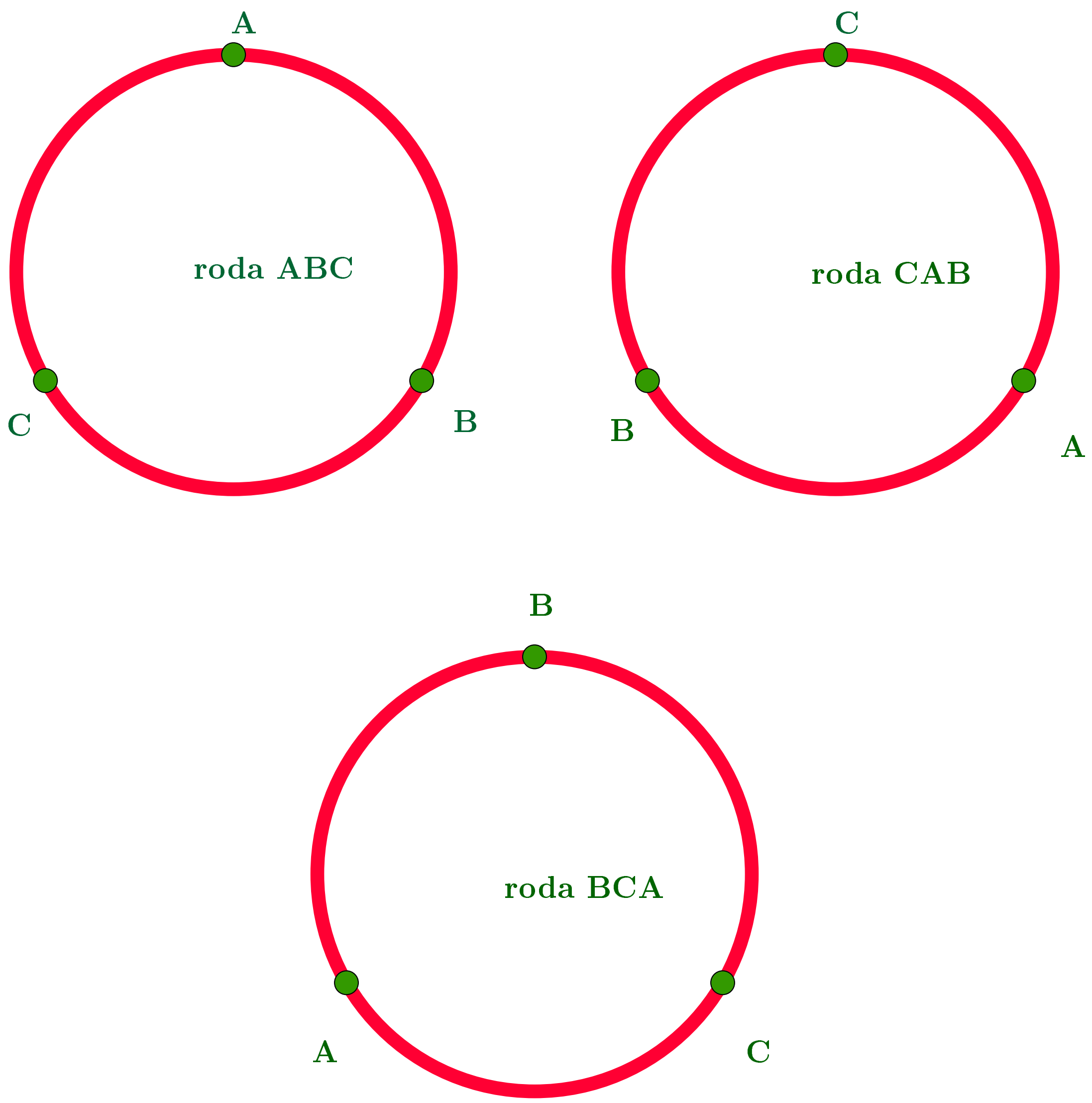
Neste momento, o problema foi reduzido ao caso cujo método já sabemos, ou seja, sequências distintas de 9 símbolos $(\circ \circ \circ \circ \circ \circ \circ + +)$, com repetição de 7 símbolos $\circ$ e de 2 símbolos $+$. Assim, teremos:

$$PR_{9,7,2} = \frac{9!}{7!\,2!} = 36.$$

3.4.6 Permutação Circular.

Outro caso interessante de permutação são as *permutações circulares*, que não podem ser confundidos com os casos anteriores de permutação. Usaremos a notação PC para indicar permutação circular.

Enquanto nos casos anteriores usamos a ideia de fila, no caso das permutações circulares usaremos a ideia de roda. Com isso estamos querendo dizer, por exemplo, que a fila ABC é diferente da fila BCA, mas a roda ABC é igual à roda BCA. O mesmo ocorre na fila CAB que é diferente da fila ABC, mas a roda CAB é a mesma coisa que a roda ABC, pois sendo circular não muda se o começo for em quaisquer das letras A, B ou C, diferentemente do que ocorreria se fosse uma fila. As figuras seguintes ilustram o que estamos dizendo, pois basta ir girando o disco ABC para notar que sempre teremos a mesma roda:



Essa é uma característica importante das permutações circulares em relação às permutações simples e que justificam o seu estudo em particular, ou seja, com um mesmo número de elementos, a quantidade de permutações circulares é sempre menor que o número de permutações simples porque cada uma das rodas possíveis de uma permutação circular de n elementos repete aquilo que nas permutações simples corresponderiam a n filas diferentes.

Aquilo que estamos aqui chamando de roda alguns livros denominam por classes. Assim, diz-se que as permutações circulares calculam o número de rodas ou classes diferentes que podemos ter com n elementos, enquanto as permutações simples calculam o número de filas. Tendo em vista que de um conjunto com n elementos, uma roda equivale a n filas e sabendo que o número de filas corresponde à permutação simples de n elementos, ou seja, $P_n = n!$, podemos calcular o número de permutações circulares,

PC_n, da seguinte maneira:

$$n \cdot n^{\circ} \; de \; rodas = n^{\circ} \; de \; filas$$

$$n \cdot PC_n = P_n$$

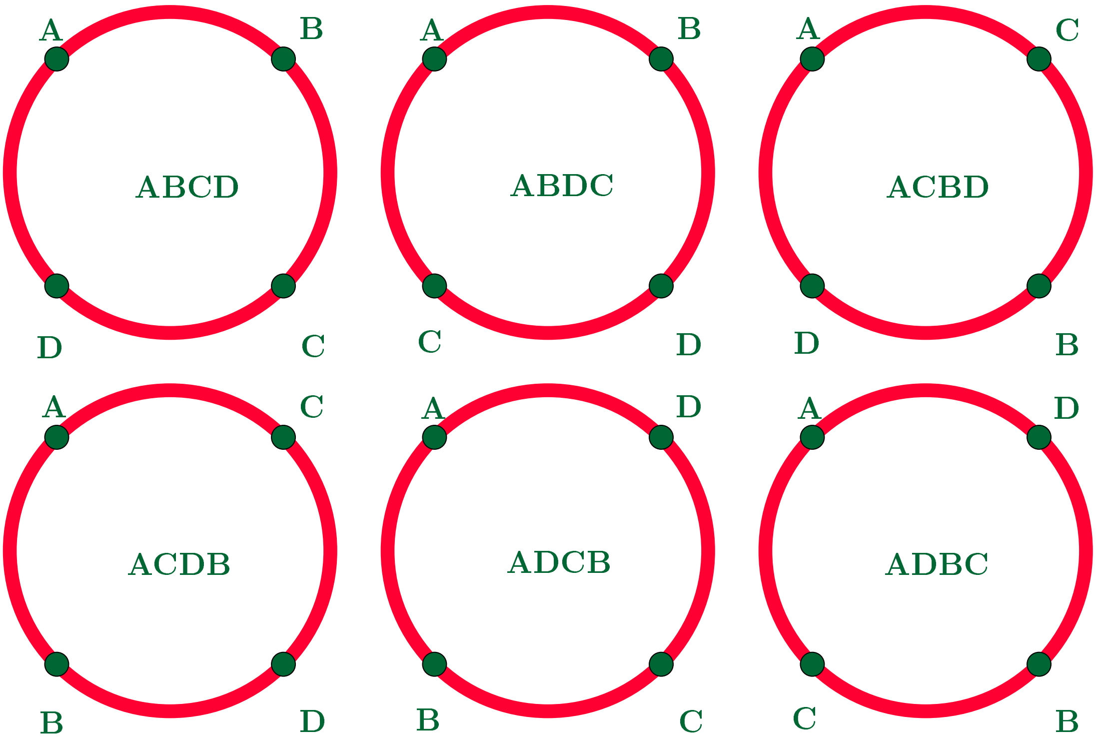
$$PC_n = \frac{P_n}{n}$$

$$PC_n = \frac{n!}{n}$$

$$PC_n = \frac{n \cdot (n-1)!}{n}$$
$$PC_n = (n-1)!$$

Exemplo 3.36. Quantas permutações circulares teremos de uma ciranda de roda com 4 crianças, Alice, Beatriz, Cláudia e Débora?

Cada uma dessas crianças representaremos pelas iniciais de seus nomes, ou seja, pelas letras A, B e C, e teremos os seguintes casos de permutações circulares:



Com 4 elementos, temos (4-1)! $=$ 3! $=$ 6 permutações circulares. Neste exemplo de permutação circular com 4 elementos, note, por exemplo, que os casos ABCD, BCDA, CDAB e DABC são os mesmos em uma disposição circular. Da mesma forma, são os mesmos os casos ABDC, BDCA, DCAB e CABD. Os casos ADBC, DBCA, BCAD e CADB, também se reduzem a um único caso. Ainda temos os casos ACDB, CDBA, DBAC e BACD, que são apenas um único. Também os casos BACD, ACDB, CDBA e DBAC, reduzem a um único. Por fim, teremos os casos BADC, ADCB, DCBA e CBAD, também um único, ou seja, excluindo as repetições teremos 6 permutações circulares distintas, sendo que cada uma delas é repetida 4 vezes no caso circular, confirmando o que dissemos que $4 \cdot PC_4 = P_4$, ou seja, que $PC_4 = \frac{P_4}{4} = \frac{4!}{4} = \frac{4 \cdot 3!}{4} = 3! = 6$.

Exemplo 3.37. De quantas maneiras podemos colocar três pessoas sentadas em torno de uma mesa circular?

Trata-se de um caso clássico de permutação circular de 3 elementos, cuja solução será:

$$(3-1)! = 2! = 2.$$

Porém, deve-se estar atento para situações inesperadas, conforme mostraremos no seguinte exemplo.

Exemplo 3.38. Quantos colares podemos montar com 3 pérolas de cores diferentes?

Não há dúvidas que se trata de um problema de permutação circular, porém é um caso diferente do exemplo anterior.

Diferentemente do caso dos 3 alunos sentados em torno de uma mesa circular, no caso do colar de pérolas é possível ainda virá-lo do avesso, o que significa que uma única permutação circular é repetida duas vezes. Assim, para resolver este problema faremos o seguinte:

$$\frac{PC_3}{2} = \frac{(3-1)!}{2} = \frac{2!}{2} = \frac{2}{2} = 1.$$

Note que se no exemplo anterior havia duas possibilidades porque não era possível virar a mesa do avesso, aqui essa possibilidade de virar o colar do avesso apenas repete a mesma possibilidade antes de virar do avesso, ou seja, só há uma única possibilidade de montarmos um colar com 3 pérolas diferentes.

Exemplo 3.39. De quantas maneiras podemos colocar 7 pessoas sentadas em uma mesa circular, de maneira que duas delas permaneçam juntas?

A estratégia para resolver este problema será considerar as duas pessoas que permanecem juntas como um único elemento, de maneira que teríamos uma permutação circular de 6 elementos, e não os 7 elementos iniciais, ou seja:

$$(6-1)! = 5! = 120.$$

Porém, isso não encerra o problema, pois há 2 maneiras das duas pessoas que permanecem juntas serem dispostas, ou estará sentada à direita ou à esquerda da outra. Por isso, a contagem somente se encerra quando levarmos em conta essa situação, o que significa que devemos multiplicar por 2 o resultado da permutação circular de 6 elementos:

$$2 \cdot PC_6 = 2 \cdot (6-1)! = 2 \cdot 5! = 2 \cdot 120 = 240.$$

3.4.7 Combinação sem Repetição

Nos casos de combinação, com ou sem repetição, a ordem é irrelevante.

No caso específico de combinação sem repetição, também denominada de combinação simples, calcular o número de combinações sem repetição nada mais é do que calcular o número de subconjuntos com k elementos que podemos formar a partir de um conjunto com n elementos. Usaremos a notação $C_{n,k}$ para indicar combinação sem repetição de n elementos tomados k a k.

Cada subconjunto com k elementos é uma combinação simples de classe k dos n elementos do conjunto inicial. Do conjunto com cinco elementos $\{a, b, c, d, e\}$ temos combinações simples de classe 3 que são $\{a, b, c\}$,$\{a, b, d\}$,$\{a, b, e\}$,$\{a, c, d\}$,$\{a, c, e\}$, $\{a, d, e\}$,$\{b, c, d\}$,$\{b, c, e\}$,$\{b, d, e\}$ e $\{c, d, e\}$.

O cálculo da combinação simples de classe k de n elementos é o coeficiente binomial $\binom{n}{k}$.

Pode-se representar a combinação simples de classe k de n elementos pela seguinte notação:

$$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 3.40. Numa classe com 30 alunos, quantos grupos de 4 alunos podemos formar?

Note que temos um conjunto com 30 elementos e queremos formar subconjuntos com 4 elementos. É também importante registrar que cada elemento desses conjuntos é uma individualidade, ou seja, se mudar um único desses elementos, o conjunto ou o subconjunto muda. Nesta caso, a resposta é dada pelo *coeficiente binomial*:

$$\binom{30}{4} = \frac{30!}{4!\,(30-4)!} = \frac{30!}{4!\,26!} = \frac{30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \quad 27.405 \quad \text{grupos.}$$

Exemplo 3.41. Quantos times de basquete podemos formar com 20 atletas?

Cabe esclarecer que um time de basquete é composto por 5 atletas. Assim, temos que escolher 5 atletas dentre os 20 atletas disponíveis.

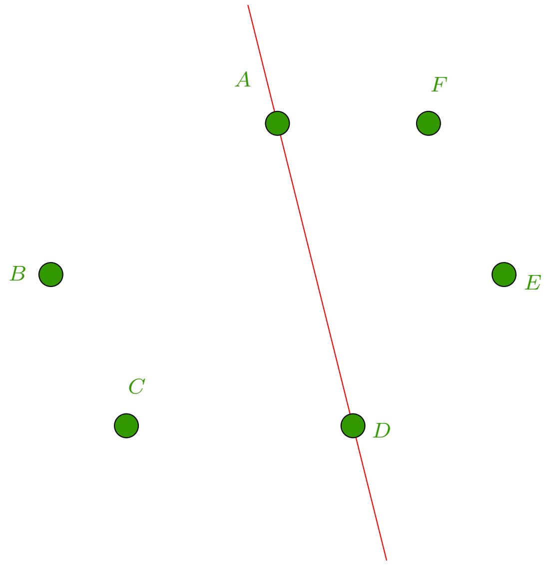
Note ainda que é irrelevante a ordem que o atleta foi escolhido, o que mostra ser um problema de combinação. Além disso, não é possível que um mesmo atleta seja escolhido duas vezes, o que significa que não há repetição de elementos. Portanto, trata-se de um problema de combinação sem repetição, cuja solução será:

$$C_{20,5} = \binom{20}{5} = \frac{20!}{5! \cdot (20-5)!} = \frac{20!}{5! \cdot 15!} = 15.504.$$

Portanto, podemos montar 15.504 times de basquete escolhendo 5 dentre 20 atletas disponíveis.

Exemplo 3.42. (Problema das Retas). Quantas retas distintas podemos traçar por 2 pontos dentre 6 pontos distintos de um plano, dos quais 3 nunca estão alinhados?

Sejam os pontos A, B, C, D, E e F de um plano, não alinhados três-a-três, conforme mostra a figura a seguir:



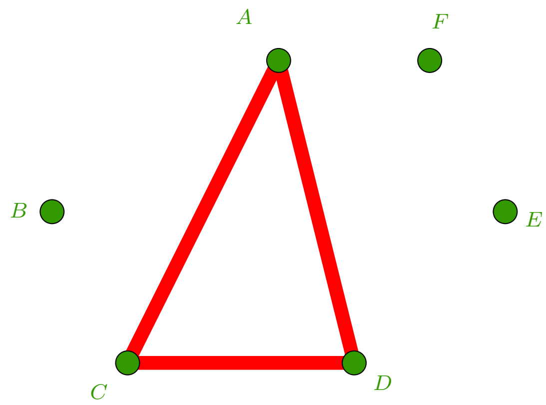
Para termos uma reta precisamos de 2 pontos distintos. Isso significa que um determinado ponto não pode ser escolhido mais do que uma única vez. Além disso, é irrelevante a ordem da escolha, ou seja, se escolhermos primeiro o ponto A e depois o ponto C teremos a mesma reta ao escolhermos primeiro o ponto C e depois o ponto A, dentre outros casos possíveis, ou seja, trata-se de um problema de combinação sem repetição. Assim, teremos:

$$C_{6,2} = \binom{6}{2} = 15,$$

ou seja, nas condições dadas podemos ter 15 retas distintas.

Exemplo 3.43. (Problema dos Triângulos). Quantos triângulos distintos podemos traçar por 3 pontos dentre 6 pontos distintos de um plano, dos quais 3 nunca estão alinhados?

Sejam os pontos A, B, C, D, E e F de um plano, não alinhados três-a-três, conforme mostra a figura a seguir:



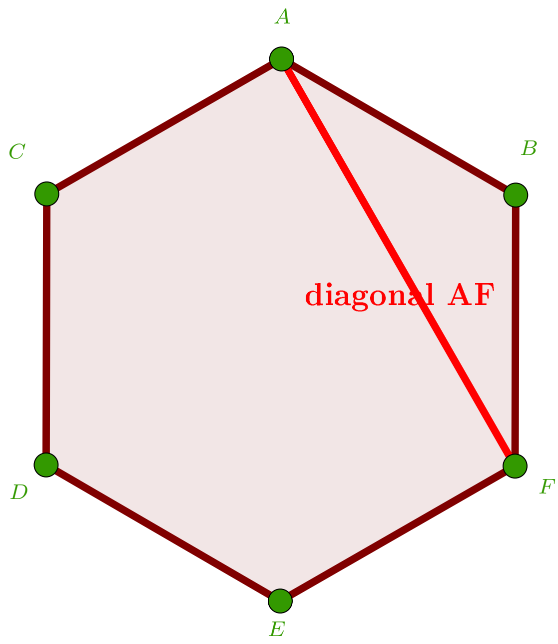
Para termos um triângulo precisamos de 3 pontos distintos. Isso significa que um determinado ponto não pode ser escolhido mais do que uma única vez. Além disso, é irrelevante a ordem da escolha, ou seja, se escolhermos primeiro o ponto A, depois o ponto C e, por fim, o ponto D teremos a mesma reta se escolhermos primeiro o ponto C, depois o ponto A e, por fim, o ponto D, dentre outros casos possíveis, isto é, trata-se também de um problema de combinação sem repetição. Assim, teremos:

$$C_{6,3} = \binom{6}{3} = 20,$$

ou seja, nas condições dadas podemos ter 20 triângulos distintos.

Exemplo 3.44. (Problema das Diagonais). Quantas diagonais distintas podemos traçar num hexágono regular?

Este problema é quase igual ao problema das retas, sendo que a diferença está no fato de termos que excluir os segmentos de retas que são os lados do hexágono. As diagonais são os segmentos que ligam dois vértices do hexágono e que não sejam um de seus lados, conforme ilustra a seguinte figura:



Portanto, resolvemos como se fosse o problema das retas, tomando o cuidado de excluir os segmentos que são lados. No caso, deveremos excluir os 6 lados do hexágono. Assim, teremos:

$$C_{6,2} - 6 = \binom{6}{2} - 6 = 15 - 6 = 9,$$

ou seja, em um hexágono podemos traçar 9 diagonais.

Exemplo 3.45. (Fórmula do Número de Diagonais de um Polígono Convexo). Quantas diagonais podemos traçar em um polígono convexo de n lados?

Generalizando o problema das diagonais podemos obter a fórmula do número de diagonais de um polígono convexo estudada na geometria. Para tanto, basta considerarmos um polígono de n lados, calcular a respectiva combinação simples, $C_{n,2}$, e subtrair os n lados. Assim, teremos:

$$C_{n,2} - n = \binom{n}{2} - n = \frac{n \cdot (n-1)}{2} - n = \frac{n \cdot (n-3)}{2}.$$

Esse resultado é a conhecida fórmula do número de diagonais de um polígono convexo estudada na geometria.

3.4.8 Combinação com Repetição.

No caso das *combinações com repetição* os elementos dos subconjuntos podem ser repetidos.

De um conjunto com cinco elementos $\{a, b, c, d, e\}$, além das combinações simples $\{a, b, c\}$, $\{a, b, d\}$,$\{a, b, e\}$,$\{a, c, d\}$,$\{a, c, e\}$,$\{a, d, e\}$,$\{b, c, d\}$,$\{b, c, e\}$,$\{b, d, e\}$ e $\{c, d, e\}$, devem ser acrescidos subconjuntos tais como $\{a, a, a\}$, $\{a, b, a\}$, $\{b, b, e\}$, dentre outros. A ordem dos elementos continua sendo irrelevante.

A notação para combinação com repetição de n elementos tomados p a p, será $CR_{n,p}$. Porém, no caso de combinação com repetição não podemos simplesmente calcular o número binomial $\binom{n}{p}$, pois nos casos de repetição é possível $p > n$, o que pela Definição 3.2 é igual a zero, algo que obviamente está errado. Por isso, perante um problema de combinação com repetição temos que converter $CR_{n,p}$ em um número binomial que possibilita o cálculo nos termos da Definição 3.2, o que é dado pelo seguinte teorema.

Teorema 3.9. ***(Teorema das Combinações com Repetição).*** *[9] O número de combinações com repetição de n elementos do conjunto $\{a_1, a_2, a_3, \cdots a_n\}$, tomados p a p, será:*

$$CR_{n,p} = C_{n+p+1,p} = \binom{n+p-1}{p}.$$

Demonstração. A demonstração será feita transformando a combinação com repetição em um caso de combinação sem repetição.

$CR_{n,p}$ é o número total de maneiras de escolhermos p objetos dentre n objetos distintos onde cada objeto pode ser tomado até p vezes, o que equivale ao número de soluções inteiras não negativas da equação:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = p,$$

o que corresponde à combinação sem repetição:

$$C_{n+p-1,p} = \binom{n+p-1}{p}.$$

Assim sendo, podemos concluir que

$$CR_{n,p} = C_{n+p+1,p} = \binom{n+p-1}{p}.$$

□

Note que esse resultado já vimos no Exemplo 3.33, ao estudar as permutações com repetição, onde já tínhamos alertado que esse problema também poderia ser resolvido através de uma combinação com repetição. Porém, entendemos que neste método há a desvantagem de ser necessário conhecer o teorema das combinações com repetição para soluciona-lo, sendo que através da permutação com repetição não havia necessidade de saber esse teorema.

Vejamos alguns exemplos de resolução de problemas de combinação com repetição utilizando o mencionado teorema.

Exemplo 3.46. De quantas maneiras podemos comprar 3 sorvetes em uma sorveteria que oferece 5 sabores?

Desde logo é bom deixar claro que está errado pensar que a resposta seja $C_{5,3} = \binom{5}{3}$, pois não se trata de um caso de combinação sem repetição, até porque podemos comprar todos os 3 sorvetes do mesmo sabor. A resposta $\binom{5}{3}$ somente estaria correta se tivéssemos que escolher 3 sabores diferentes, mas não é esse o caso.

De fato, estamos perante um caso de combinação, pois a ordem das 3 escolhas é irrelevante, o que exclui a possibilidade de ser arranjo ou permutação, pois nestes a ordem é relevante.

Como as escolhas podem ser repetidas, então estamos perante um caso de combinação com repetição que deverá ser convertida em uma combinação sem repetição através do Teorema 3.9.

Vamos representar os 5 sabores pelas letras $\{a,\ b,\ c,\ d,\ e\}$. Sabemos ainda que o total de sorvetes a serem escolhidos são 3. Assim sendo, teremos:

$$a + b + c + d + e = 3.$$

Se escolhermos 1 sorvete de sabor a, 1 sorvete de sabor c e 1 sorvete de sabor e, a solução deste caso particular seria:

$$1 + 0 + 1 + 0 + 1 = 3.$$

Uma outra escolha possível seriam, 2 sorvetes de sabor b e 1 sorvete de sabor d, de maneira que esta outra solução particular seria:

$$0 + 2 + 0 + 1 + 0 = 3.$$

E assim podemos ir elencando outras soluções particulares. É importante notar que o valor máximo que cada uma das variáveis pode atingir é 3.

Para sabermos a quantidade de possibilidades de escolha, devemos raciocinar que dentre os 5 sabores disponíveis podemos escolher um desses sabores em até 3 vezes. Isso indica que temos um problema de combinação com repetição de 5 sabores que podem ser escolhidos até 3 vezes. Assim sendo, temos $CR_{5,3}$.

Usando o Teorema 3.9:

$$CR_{5,3} = \binom{5+3-1}{3} = \binom{7}{3} = 35.$$

Exemplo 3.47. Quantas são as soluções inteiras e não negativas da equação $x_1 + x_2 + x_3 = 6$?

Este problema já resolvemos no Exemplo 3.32, porém, conforme já havíamos alertado, uma outra maneira de resolve-lo seria através das combinações com repetição. Vejamos essa outra maneira.

Se ao invés das variáveis x_1, x_2 e x_3, fossem 3 sabores de sorvetes, cada um desses sabores poderia ser repetido até 6 vezes, logo teríamos uma combinação com repetição de 3 elementos tomados 6 a 6 e usando o *Teorema 3.9*, o cálculo seria da seguinte maneira:

$$CR_{3,6} = \binom{3+6-1}{6} = C_{8,6} = \binom{8}{6} = \quad 28 \quad \text{soluções inteiras,}$$

cujo resultado é o mesmo do Exemplo 3.32, como tinha que ser.

4 Princípios da Contagem

Neste capítulo, elaborado a partir de [9, 4, 3], estudamos alguns princípios fundamentais da contagem que muito nos podem ajudar a resolver problemas de contagem. Estamos nos referindo a três princípios que são fundamentais para a contagem, o **princípio multiplicativo**, o **princípio aditivo** e o **princípio da inclusão e da exclusão**.

A ideia de contagem tem implícita a ideia de uma correspondência um-a-um, sendo de um lado os objetos a serem contados e do outro o conjunto dos números naturais. Se o número de objetos a serem contados for relativamente pequeno, a contagem é relativamente fácil, pois associamos a cada objeto um número natural, começando com 1 e seguindo com 2, 3, 4, $\cdots$ e assim por diante. Porém, há situações em que esse método básico de contagem é inviável. Imagine, por exemplo, contar quantos números de telefone com oito dígitos podemos obter com os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0. Nesse caso são possíveis 1.073.741.824 (um bilhão setenta e três milhões setecentos e quarenta e um mil e oitocentos e vinte e quatro) números telefônicos, algo difícil de contar. Apenas para se ter uma ideia da dificuldade dessa contagem, se cada um desses números telefônicos fosse pronunciado em um segundo, seriam necessários mais do que trinta e quatro anos para ler todos. Por isso, existe a teoria da contagem para possibilitar obter os resultados da contagem sem a necessidade de fazer contagem um-a-um dos elementos.

Vamos apresentar essa teoria mediante uma série de exemplos que representam modelos de diversos problemas de contagem e que podem ser estendidos para diversas outras situações.

Exemplo 4.1. De quantas maneiras podemos obter a soma menor do que 5 lançando dois dados?

Cada um dos dados são numerados de 1 até 6. Assim, o conjunto das possíveis somas pelo lançamento de dois dados seria 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, que totaliza 11 elementos. A soma menor do que 5 seria o conjunto 2, 3, 4, que totaliza 3 elementos. Um jeito errado de resolver esse problema seria responder $\frac{3}{11}$, pois conforme veremos, alguns resultados são mais comuns que outros. Enumerando exaustivamente todas as possíveis somas com o lançamento de dois dados, teríamos o seguinte conjunto formado pelos 36 seguintes pares ordenados:

$$(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),$$
$$(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),$$
$$(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),$$
$$(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),$$
$$(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),$$
$$(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6).$$

Desses eventos a soma menor do que 5 seria o seguinte subconjunto dos 6 pares ordenados a seguir:

$$(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(3,1),$$

ou seja, lançando dois dados, há um total de 6 possibilidades de obter soma menor do que 5, dentre o total de 36 somas possíveis.

Exemplo 4.2. Quantas comissões com 3 alunos podemos formar em uma classe com 25 estudantes?

Note que neste caso a ordem não é importante e a resposta é dada pelo coeficiente binomial

$$\binom{25}{3} = 13.800.$$

Generalizando, se quisermos saber quantos subconjuntos com k objetos podemos formar de um conjunto com n elementos, nos quais a ordem não é importante e a repetição não é permitida, já vimos que a solução será o coeficiente binomial

$$\binom{n}{k}.$$

Porém, em muito problemas podemos ter que relacionar diversos subconjuntos, de maneira que em algumas vezes a solução será dada pela multiplicação e outras pela adição. Vejamos isso por etapas, através de exemplos.

Exemplo 4.3. Considerando o conjunto $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, quantas senhas de três dígitos podemos formar com esses algarismos?

Diferentemente do exemplo anterior, aqui a ordem é relevante. Por exemplo, a senha 123 é diferente da senha 321. Talvez seja intuitivo supor que o número de elementos nessas situações em que a ordem é relevante seja maior que naquelas situações nas quais a ordem não é importante.

Outro dado relevante neste problema é que pode haver repetição de dígitos. Por exemplo, a senha pode ser 122, 222, 010, 221 e assim por diante.

Para resolver este problema escolhemos sucessivamente três dígitos. Em cada uma das três etapas, temos 10 opções para escolher. Assim sendo, temos:

$$10 \cdot 10 \cdot 10 = 1.000.$$

Exemplo 4.4. Considerando o conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, quantas senhas de três dígitos diferentes podemos formar com esses algarismos?

Aqui, diferentemente do exemplo anterior, os dígitos não se repetem na senha. Por exemplo, não é válida a senha 122 ou 777, dentre outras. Porém a ordem continua sendo relevante, pois a senha 123 é diferente da senha 321, ainda que sejam utilizados os mesmos algarismos. Neste caso, o problema é resolvido em três etapas, mas à medida que vai se avançando em cada uma das três etapas, o número de opções de escolha vai diminuindo.

Na primeira escolha temos a disposição os 10 dígitos iniciais. Porém, já para a segunda escolha teremos 9 dígitos disponíveis, pois não podendo haver repetição, está excluído o dígito selecionado na primeira escolha. Por fim, na terceira escolha teremos a disposição 8 dígitos, pois estão excluídos os dois dígitos escolhidos nas duas escolhas anteriores. Assim sendo, temos:

$$10 \cdot 9 \cdot 8 = 720.$$

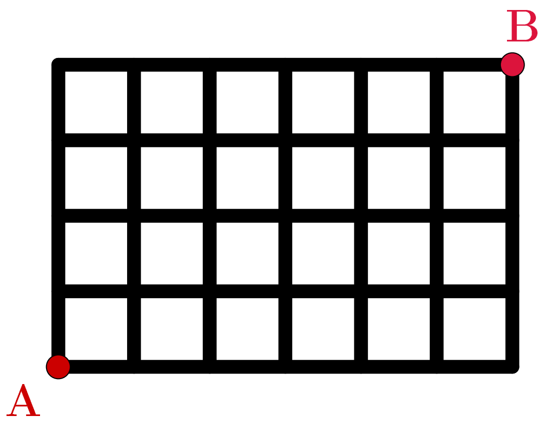
Exemplo 4.5. Quantas comissões podemos formar em uma classe com 25 estudantes, composta de um presidente, um vice-presidente e um tesoureiro?

Note que neste caso a ordem é importante. Os mesmos 3 estudantes de um subconjunto dá origem a 3 soluções diferentes. Se os 3 estudantes escolhidos forem $\{A, B, C\}$, a comissão em que A é presidente, B vice-presidente e C tesoureiro é diferente da comissão em que B é presidente, C vice-presidente e A tesoureiro, ou da comissão em que C é presidente, A vice-presidente e B tesoureiro. Se fosse caso de combinação, na qual a ordem não é relevante, bastaria calcularmos o coeficiente binomial $\binom{25}{3}$, mas sendo arranjo, no qual a ordem é relevante, temos que multiplicar o coeficiente binomial pelo fatorial correspondente ao número de elementos do subconjunto, para incluirmos todos os casos que se diferenciam apenas pela ordem dos elementos dos subconjuntos. No caso, os subconjuntos a serem ordenados têm 3 elementos, o que significa que o número binomial será multiplicado por 3!:

$$\binom{25}{3} \cdot 3! = 13.800 \cdot 3! = 13.800 \cdot 6 = 82.800.$$

Exemplo 4.6. Considerando que a figura abaixo representa as quadras de uma cidade, de quantas maneiras podemos sair do ponto A e chegar no ponto B, podendo apenas percorrer as ruas para cima ou para a direita?

Estamos aplicando a teoria das combinações do capítulo anterior para acrescentar os princípios que vamos expor neste capítulo passo a passo.



Note que para se deslocar da cidade A até a cidade B percorrendo as ruas ou para cima ou para a direita, deve-se percorrer um total de 10 quadras, sendo 6 na horizontal e 4 na vertical. Podemos identificar cada uma das 6 possibilidades horizontais como H_1, H_2, H_3, H_4, H_5 e H_6, enquanto as 4 possibilidades verticais como V_1, V_2, V_3 e V_4. Um dos casos possíveis será subir as 4 verticais e depois virar à direita para percorrer as 6 horizontais, ou seja, $V_1V_2V_3V_4H_1H_2H_3H_4H_5H_6$. Outra possibilidade será subir 2 verticais, virar à direita percorrendo 2 horizontais, virar à esquerda e subir mais 2 verticais e finalizar virando à direita percorrendo as 4 horizontais restantes, ou seja, $V_1V_2H_1H_2V_3V_4H_3H_4H_5H_6$. Observe que o problema pode ser reduzido em uma combinação de um total a ser percorrido de 10 quadras, sendo que destas 6 são horizontais:

$$\binom{10}{6} = 210.$$

Também poderia ser a combinação de um total a ser percorrido de 10 quadras, sendo que destas 4 são verticais:

$$\binom{10}{4} = 210.$$

Aqui nada mais é do que o caso de igualdade de números binomiais complementares, que já mencionamos, porém, recordando:

$$\binom{10}{6} = \binom{10}{4}.$$

Agora, vejamos algumas situações em que tais resultados são parciais e temos que relaciona-los entre si. Em tais situações, serão importantes os princípios multiplicativo e aditivo.

4.1 Princípio Multiplicativo

O *Princípio Multiplicativo* também é conhecido como *princípio fundamental da contagem.*

Princípio Multiplicativo da Contagem. Dados os conjuntos finitos $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_k$, disjuntos ou não, o número de combinações possíveis e sem repetição será:

$$|A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \cdots A_k| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot |A_3| \cdot \cdots \cdot |A_k| = \prod_{i=1}^{k} |A_i|.$$

Os próximos exemplos ilustram o princípio multiplicativo.

Exemplo 4.7. Por ocasião das festas de final de ano, uma livraria resolveu presentear o cliente que mais gastou com livros naquele ano permitindo-lhe que escolhesse dois livros de brinde, sendo que um deveria ser dentre 10 títulos de literatura e o outro dentre 15 títulos de matemática. De quantas maneiras o cliente premiado pode escolher os dois livros de brinde?

Pelo princípio multiplicativo basta multiplicar $10 \cdots 15 = 150$ maneiras.

Exemplo 4.8. Um restaurante serve 3 tipos de entradas, 6 tipos de pratos e 5 tipos de sobremesa. De quantas maneiras pode-se escolher uma refeição composta por uma entrada, um prato e uma sobremesa?

Pelo princípio multiplicativo basta multiplicarmos $3 \cdot 6 \cdot 5 = 90$ maneiras.

Exemplo 4.9. Um estudante está programando de que maneira irá desfrutar um feriado após longos meses de estudo. Através da internet verificou que no cinema próximo de sua residência está em cartaz 5 filmes, no teatro terá a apresentação 3 peças, no estádio haverá 2 jogos e foi convidado para 15 festas que seus colegas de classe estão organizando. O estudante decidiu que irá em apenas um único desses eventos. Quantas opções tem o estudante para passar o feriado?

Pelo princípio multiplicativo basta multiplicarmos $5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 15 = 450$ opções.

4.2 Princípio Aditivo

Estudaremos agora o *princípio aditivo* que corresponde na teoria dos conjuntos à operação de união e de grande utilidade para resolver diversos problemas combinatórios. Poderíamos dizer que semelhante ao princípio multiplicativo, o princípio aditivo também aumenta o número de casos, porém, a diferença em relação ao princípio multiplicativo é que esse aumento não é, geralmente, tão amplo.

Princípio Aditivo da Contagem. Dados os conjuntos disjuntos $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_k$, então o número de elementos da união de todos esses conjuntos será:

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_k| = |A_1| + |A_2| + |A_3| + \cdots + |A_k| = \sum_{i=1}^{k} |A_i|.$$

Vejamos alguns exemplos para ilustrar esse princípio.

Exemplo 4.10. Um restaurante serve 3 tipos de entradas, 6 tipos de pratos e 5 tipos de sobremesa. De quantas maneiras pode-se escolher uma refeição composta por uma entrada e um prato ou por um prato e uma sobremesa?

Há duas opções no restaurante, quais seja, ou se escolhe entrada-prato, que denotaremos por A_1, ou se escolhe prato-sobremesa, que denotaremos por A_2. Note que A_1 e A_2 são conjuntos disjuntos, pois $A_1 \cap A_2 = \phi$. Pelo princípio aditivo temos:

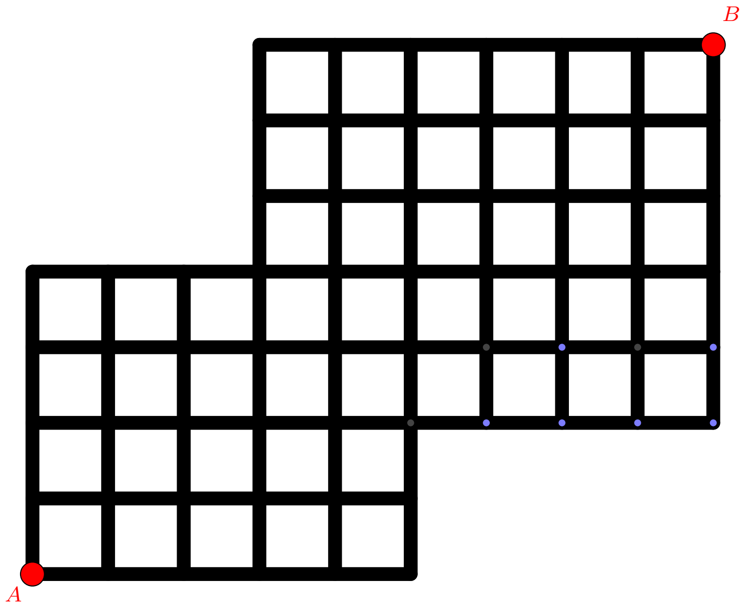
$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| \cup |A_2|.$$

Por sua vez, usando o princípio multiplicativo dentro de cada uma das duas opções, temos ainda:

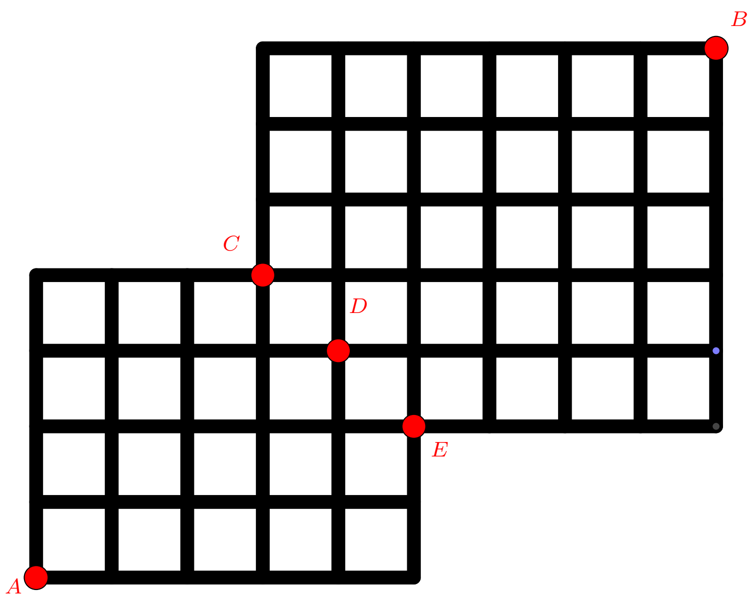
$$(3 \cdot 6) + (6 \cdot 5) = 48,$$

ou seja, nesse caso haverá 48 opções.

Exemplo 4.11. Considerando que a figura abaixo representa as quadras de uma cidade, de quantas maneiras podemos sair do ponto A e chegar no ponto B, podendo apenas andar para cima ou para a direita?

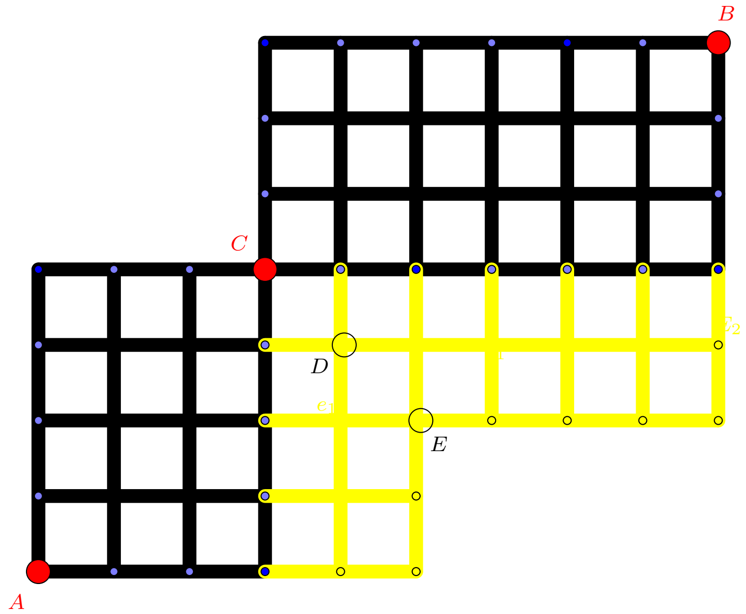


Para resolver este problema, vamos reduzi-lo a três casos do Exemplo 4.6 introduzindo três pontos auxiliares C, D e E, adequadamente escolhidos, conforme mostra a figura a seguir:



Em seguida, decompomos o trajeto em três trajetos que passam respetivamente pelos pontos C, D e E, resolvendo cada um destes através do princípio multiplicativo, conforme ilustram as figuras que mostraremos em seguida.

A primeira decomposição dos trajetos é aquela que passa pelo ponto C, assim ilustrada:



Em seguida, resolvemos essa decomposição passando pelo ponto C através do princípio multiplicativo. Inicialmente, resolvemos o percurso do ponto A até o ponto C e depois o percurso do ponto C até o ponto D, para em seguida multiplicarmos.

O percurso do ponto A até o ponto C significa percorrer um total de 7 quadras, sendo 3 horizontais e 4 verticais.

Se escolhermos os 4 trajetos verticais, teremos:

$$\binom{7}{3}.$$

Porém, se escolhermos os 3 trajetos horizontais, teremos:

$$\binom{7}{4}.$$

Apenas lembrando que tanto faz escolher os trajetos verticais ou horizontais, pois sendo binomiais complementares, o resultado será o mesmo:

$$\binom{7}{3} = \binom{7}{4} = 30.$$

Em seguida, calculamos o total de trajetos entre o ponto C e o ponto B. Esse percurso envolve um total de 9 quadras, sendo 6 horizontais e 3 verticais. Da mesma maneira que o caso anterior, tanto faz escolhermos os 6 horizontais ou os 3 verticais, teremos:

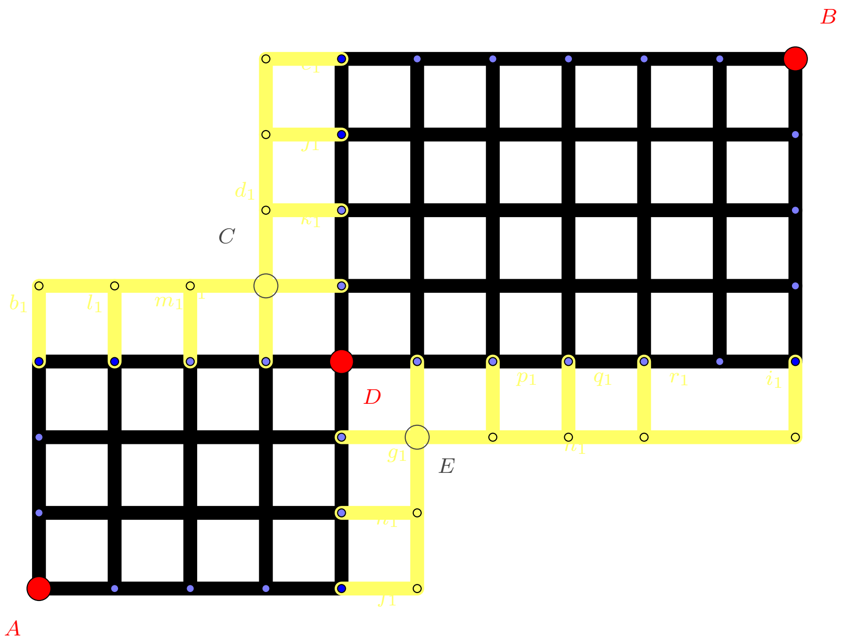
$$\binom{9}{3} = \binom{9}{6} = 84.$$

Agora, usamos o princípio multiplicativo, pois deve-se percorrer o trajeto do ponto A ao ponto C e também o trajeto do ponto C ao ponto B, ou seja:

$$30 \cdot 84 = 2.520.$$

Essa é a resposta da primeira decomposição dos trajetos passando pelo ponto C. Em seguida, fazemos a mesma coisa em relação ao ponto D.

A segunda decomposição dos trajetos passando pelo ponto D, pode ser assim ilustrada:



O percurso do ponto A até o ponto D significa percorrer um total de 7 quadras, sendo 4 horizontais e 3 verticais.

Se escolhermos os 3 trajetos verticais, teremos:

$$\binom{7}{3} = 35.$$

Porém, se escolhermos os 4 trajetos horizontais, teremos:

$$\binom{7}{4} = 35.$$

Apenas lembrando que tanto faz escolher os trajetos verticais ou horizontais, pois sendo binomiais complementares, o resultado será o mesmo:

$$\binom{7}{3} = \binom{7}{4} = 35.$$

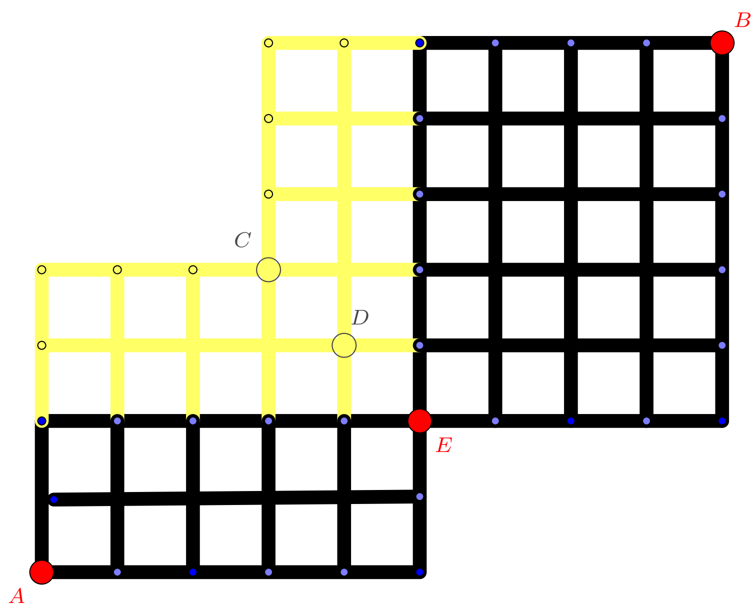
Em seguida, calculamos o total de trajetos entre o ponto D e o ponto B. Esse percurso envolve um total de 10 quadras, sendo 6 horizontais e 4 verticais. Da mesma maneira do anterior, tanto faz escolhermos os 6 horizontais ou as 4 verticais, teremos:

$$\binom{10}{4} = \binom{10}{6} = 210.$$

Agora, usamos mais uma vez o princípio multiplicativo, pois deve-se percorrer o trajeto do ponto A ao ponto D e também o trajeto do ponto D ao ponto B, ou seja:

$$30 \cdot 210 = 6.300.$$

A terceira e última decomposição dos trajetos é aquela que passa pelo ponto E, que pode ser assim ilustrada:



O percurso do ponto A até o ponto E significa percorrer um total de 7 quadras, sendo 5 horizontais e 2 verticais.

Se escolhermos os 2 trajetos verticais, teremos:

$$\binom{7}{2} = 21.$$

Porém, se escolhermos os 5 trajetos horizontais, teremos:

$$\binom{7}{5} = 21.$$

Apenas lembrando que tanto faz escolher os trajetos verticais ou horizontais, pois sendo binomiais complementares, o resultado será o mesmo:

$$\binom{7}{2} = \binom{7}{5} = 21.$$

Em seguida, calculamos o total de trajetos entre o ponto E e o ponto B. Esse percurso envolve um total de 9 quadras, sendo 5 horizontais e 4 verticais. Da mesma maneira do anterior, tanto faz escolhermos os 5 horizontais ou os 4 verticais, teremos:

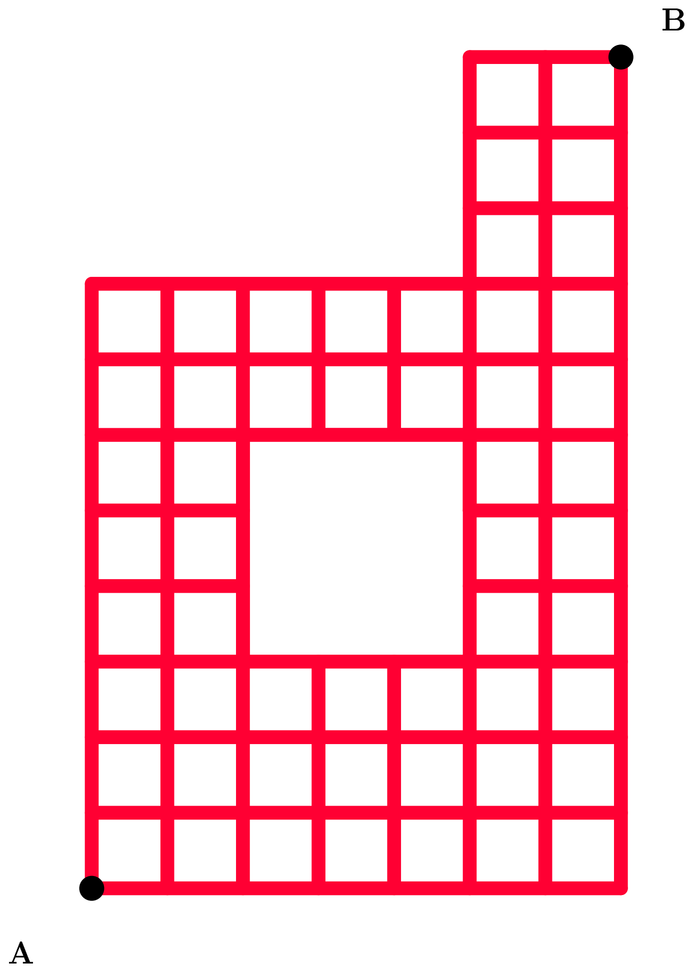
$$\binom{9}{5} = \binom{9}{4} = 126.$$

Agora, usamos mais uma vez o princípio multiplicativo, pois deve-se percorrer o trajeto do ponto A ao ponto E e também o trajeto do ponto E ao ponto B, ou seja:

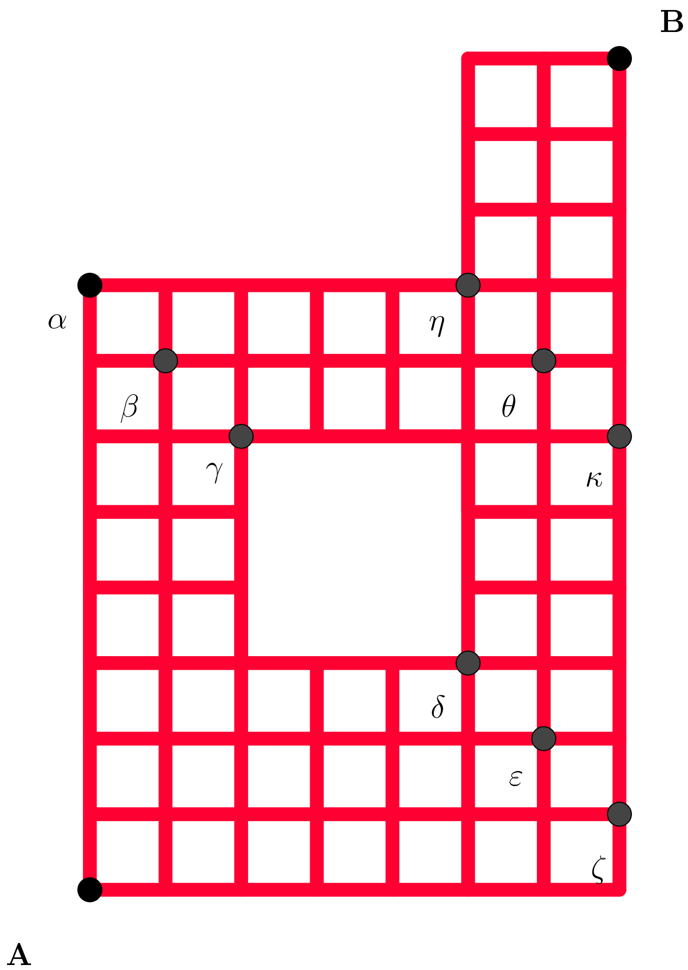
$$21 \cdot 126 = 2.646.$$

Com esses três resultados parciais, finalizaremos o exercício usando o princípio aditivo, pois podemos realizar o trajeto do ponto A até B passando pelo ponto auxiliar C ou D ou E. Note que no princípio aditivo há uma alternativa, **ou** passamos pelo ponto C, **ou** passamos pelo ponto D, **ou** passamos pelo ponto E, enquanto no princípio multiplicativo percorremos o trajeto do ponto A até C **e** (e não ou) o trajeto do ponto C até B. Por isso, geralmente se vincula o conectivo **ou** com o princípio aditivo, enquanto o conectivo **e** com o princípio multiplicativo.

Exemplo 4.12. Considerando que a figura abaixo representa as quadras de uma cidade, de quantas maneiras podemos sair do ponto A e chegar no ponto B, podendo apenas andar para cima ou para a direita?



Para resolver este problema, devemos marcar nove pontos auxiliares α, β, γ; δ, ϵ, ζ, η, θ, κ, decompondo em vários caminhos, conforme a figura abaixo:



Em seguida efetuamos a decomposição nos seguintes trajetos, onde $(i \to j)$, significa que saiu do ponto i e foi para o ponto j. Usando essa notação, fazemos:

$$(A \longrightarrow \alpha) \cdot (\alpha \longrightarrow \eta) \cdot (\eta \longrightarrow B)$$

$$+$$

$$(A \longrightarrow \beta) \cdot (\beta \longrightarrow \eta) \cdot (\eta \longrightarrow B)$$

$$+$$

$$(A \longrightarrow \gamma) \cdot (\gamma \longrightarrow \eta) \cdot (\eta \longrightarrow B)$$

$$+$$

$$(A \longrightarrow \delta) \cdot (\delta \longrightarrow B)$$

$$+$$

$$(A \longrightarrow \varepsilon) \cdot (\varepsilon \longrightarrow B)$$

$$+$$

$$(A \longrightarrow \zeta) \cdot (\zeta \longrightarrow B)$$

Usando o mesmo raciocínio dos exemplos anteriores, passamos aos seguintes cálculos, multiplicando o número de possibilidades de realizar o primeiro trajeto, do ponto A até o ponto auxiliar, pelo número de possibilidades de realizar o segundo trajeto, do ponto auxiliar até o ponto B:

$$(A \longrightarrow \alpha) = 1 \cdot (\alpha \longrightarrow \eta) = 1 \cdot (\eta \longrightarrow B) = \binom{5}{2}$$

$$+$$

$$(A \longrightarrow \beta) = \binom{7}{1} \cdot (\beta \longrightarrow \eta) = \binom{5}{1} \cdot (\eta \longrightarrow B) = \binom{5}{2}$$

$$+$$

$$(A \longrightarrow \gamma) = \binom{8}{2} \cdot (\gamma \longrightarrow \eta) = \binom{5}{3} \cdot (\eta \longrightarrow B) = \binom{5}{2}$$

$$+$$

$$(A \longrightarrow \delta) = \binom{8}{5} \cdot (\delta \longrightarrow B) = \binom{10}{2}$$

$$+$$

$$(A \longrightarrow \varepsilon) = \binom{8}{6} \cdot (\varepsilon \longrightarrow B) = \binom{10}{1}$$

$$+$$

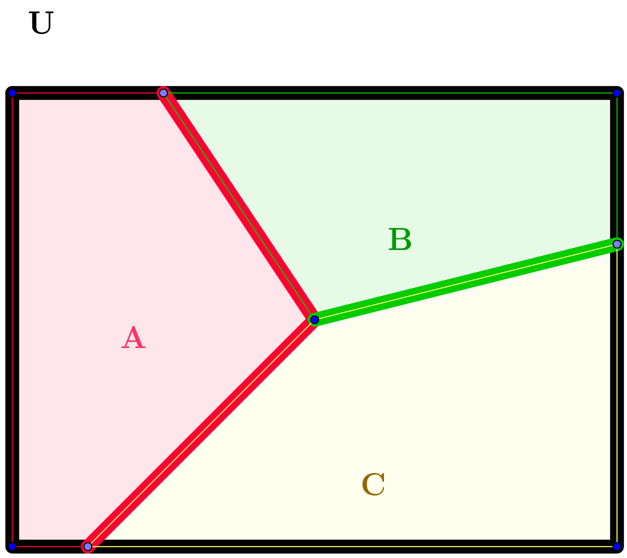
$$(A \longrightarrow \zeta) = \binom{8}{7} \cdot (\zeta \longrightarrow B) = 1,$$

ou seja:

$$\begin{aligned}
\left[1 \cdot 1 \cdot \binom{5}{2}\right] &+ \left[\binom{7}{1} \cdot \binom{5}{1} \cdot \binom{5}{2}\right] \\
&+ \left[\binom{8}{2} \cdot \binom{5}{3} \cdot \binom{5}{2}\right] + \left[\binom{8}{5} \cdot \binom{10}{2}\right] \\
&+ \left[\binom{8}{6} \cdot \binom{10}{1}\right] + \left[\binom{8}{7} \cdot 1\right] \\
&= 10 + (7 \cdot 5 \cdot 10) + (28 \cdot 10 \cdot 10) + (56 \cdot 45) + (28 \cdot 10) + 8 \\
&= 10 + 350 + 2.800 + 2.520 + 280 + 8 \\
&= 5.968 \text{ caminhos.}
\end{aligned}$$

4.3 Teoria das Partições

Um caso particularmente importante dentro do princípio aditivo é da *teoria das partições*. Partições são casos especiais de subconjuntos que têm características próprias que as diferenciam dos demais tipos de subconjuntos. Essa característica consiste no fato de que as partições são subconjuntos de um dado conjunto universo que não tem elementos em comum com outros subconjuntos desse mesmo conjunto universo e cuja união é o próprio conjunto universo. A seguinte ilustração pode nos ajudar a compreender o conceito de partição:



Sendo U o conjunto universo, todos os subconjuntos A, B e C são partições porque nenhum desses subconjuntos têm elementos em comum com os demais e todos reunidos formam o conjunto universo:

$$A \cap B = \emptyset$$

$$A \cap C = \emptyset$$

$$B \cap C = \emptyset$$

$$A \cap B \cap C = \emptyset$$

$$A \cup B \cup C = U.$$

Por causa dessas características, cada um dos subconjuntos A, B e C são partições.

Vejamos alguns exemplos para ilustrar o que estamos dizendo:

Exemplo 4.13. Numa classe há 30 alunos, sendo 15 meninos e 15 meninas. Sendo a classe o conjunto universo U, temos o subconjunto A composto pelos meninos e o subconjunto B composto pelas meninas. Esses subconjuntos são partições, pois $A \cap B = \emptyset$ e $A \cup B = U$.

Exemplo 4.14. Seja o conjunto universo $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Seja A o subconjunto de U composto pelos números pares e B o subconjunto de U composto pelos números ímpares. Assim sendo, teremos $A = \{2, 4, 6\}$ e $B = \{1, 3, 5\}$. Esses subconjuntos são partições, pois $A \cap B = \emptyset$ e $A \cup B = U$.

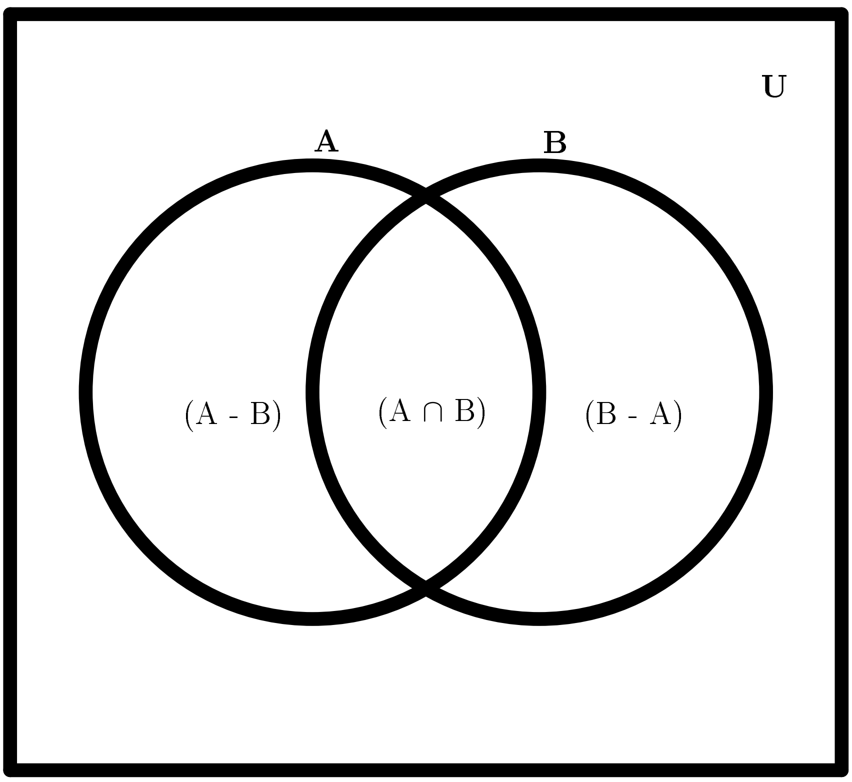
Uma característica importante das partições é que o número de elementos da união de duas partições é dada pela simples soma dos números de elementos de cada um dos subconjuntos, pois não tendo elementos em comum, não há risco que os elementos dos conjuntos sejam contados mais de uma única vez. Assim sendo:

$$|A \cup B| = |A| + |B|.$$

4.3.1 Princípio da Inclusão e da Exclusão

Podemos dizer que o *princípio da inclusão e da exclusão* é um caso mais geral do princípio aditivo. Lembre-se que no caso do princípio aditivo, os conjuntos tinham que ser disjuntos. No caso do princípio da inclusão e da exclusão os conjuntos não precisam ser disjuntos. Por isso o princípio da inclusão e da exclusão seria um caso mais geral que o princípio aditivo. O essencial está no fato de que não sendo os conjuntos disjuntos, então a intersecção entre os conjuntos não é vazia, o que significa que os elementos da intersecção acabam sendo contados mais de uma vez. Através do princípio da inclusão e da exclusão evita-se que um mesmo elemento seja contado mais de uma vez.

Se A e B forem conjuntos de um conjunto universo U, conforme ilustra a figura abaixo, então podemos representar $A \cup B$ como a união dos seguintes três conjuntos mutuamente disjuntos $A - B$, $B - A$ e $A \cap B$:



Portanto, a união dos conjuntos A e B seria igual à união dos conjuntos $(A - B)$, $(B - A)$ e $(A \cap B)$:

$$A \cup B = (A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B).$$

Assim, o número de elementos da união dos conjuntos A e B corresponde ao número de elementos da união de três conjuntos mutuamente disjuntos, sendo que neste caso basta somar o número de elementos de cada um dos conjuntos disjuntos, não havendo nada a ser eliminado porque sendo disjuntos a intersecção é vazia, o que nos dá o seguinte teorema:

Teorema 4.1. ***(Teorema da Inclusão e Exclusão de Dois Conjuntos).*** *Sejam A e B dois conjuntos quaisquer de um mesmo conjunto universo U. O número de elementos do conjunto $A \cup B$ é dado por:*

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Demonstração.

$$|A \cup B| = |(A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B)|.$$

$$|(A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B)| = |A - B| + |B - A| + |A \cap B|.$$

Deve-se ainda saber que:

$$|A - B| = |A| - |A \cap B|$$

e

$$|B - A| = |B| - |A \cap B|.$$

Assim, teremos:

$$|A \cup B| = |(A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B)|.$$

Consequentemente:

$$|(A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B)| = |(A - B)| + |(B - A)| + |(A \cap B)|.$$

Efetuando as substituições adequadas, obtemos:

$$|(A - B)| + |(B - A)| + |(A \cap B)| = |A| - |A \cap B| + |B| - |A \cap B| + |A \cap B|.$$

O que equivale a:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

□

O exemplo a seguir mostra a aplicabilidade do Teorema 4.1:

Exemplo 4.15. Em um grupo de turistas, 8 falam inglês, 10 falam francês e 3 falam inglês e francês. Qual o total de turistas desse grupo e quantos falam apenas inglês ou apenas francês?

Neste caso não podemos simplesmente usar o princípio aditivo, pois os conjuntos não são disjuntos, pois há 3 turistas que falam ambas as línguas. Assim, estaria errado dizer que o total de turistas seria 18, ou seja, a soma dos 8 turistas que falam inglês e dos 10 turistas que falam francês.

Note que dos 8 turistas que falam inglês, 3 falam também francês. Ainda cabe notar também que dos 10 turistas que falam francês, 3 também falam inglês, ou seja, o erro de usar diretamente o princípio aditivo está no fato de que os 3 turistas que falam ambas as línguas foram contados duas vezes.

Dessa maneira, a solução correta seria a seguinte:

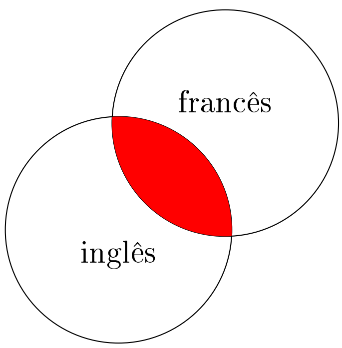
Somamos os 8 turistas que falam inglês, inclusive os 3 que também falam francês, mais os 10 turistas que falam francês, inclusive os 3 que também falam inglês. Note que nesse momento, os 3 turistas que falam ambas as línguas foram contados duas vezes. Por isso, subtraímos 3, que nada mais é do que eliminar a contagem repetida.

Usando a linguagem dos conjuntos, sendo A o conjunto dos turistas que falam inglês e B o conjunto dos turistas que falam francês, teríamos:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 8 + 10 - 3 = 15.$$

Com isso, também podemos saber quantos desses turistas falam apenas inglês ou apenas francês. Dos 8 turistas que falam inglês, 3 também falam francês, o que significa que 5 turistas falam apenas inglês. Analogamente, dos 10 turistas que falam francês, 3 falam também inglês, o que significa que 7 falam apenas francês.

Vejamos a seguinte ilustração:

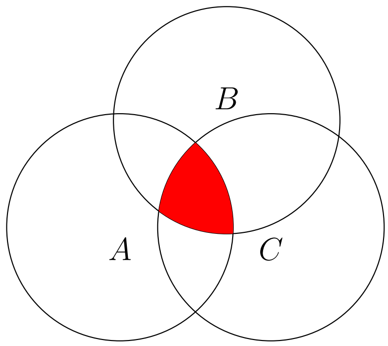


Note que não podemos simplesmente somar o número de elementos de cada conjunto, pois na intersecção (cor vermelha) foram contadas duas vezes os turistas bilingues. Por isso, corrigimos a dupla contagem pela exclusão da contagem repetida.

Usando a linguagem dos conjuntos, sendo $|A|$ o número de elementos do conjunto A, $|B|$ o número de elementos do conjunto B e $|A \cap B|$ o número de elementos da intersecção $(A \cap B)$, teríamos:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Se fossem três conjuntos, o número de elementos da intersecção dos três conjuntos teria sido contado três vezes sendo que para corrigir esse excesso de contagem excluiríamos as três intersecções, dois a dois, para no final somarmos a intersecção dos três conjuntos.



$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|,$$

e assim sucessivamente.

Com essas noções, podemos generalizar o que vimos para dois conjuntos para um número qualquer de conjuntos, através do seguinte teorema:

Teorema 4.2. ***(Princípio da Inclusão e da Exclusão Generalizado).*** *O número de elementos da união de n conjuntos finitos $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n$, com $n \geqslant 2$, será:*

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} n(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| +$$

$$+ \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| \cdots$$

$$\cdots (-1)^{n-1} |A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l \cdots \cap A_n|$$

Demonstração. A demonstração será feita através do princípio da indução finita.

Base indutiva: Para $n = 2$, já demonstramos ao provar o teorema da inclusão e exclusão de dois conjuntos.

Passo indutivo: Supondo que o teorema seja válido para $n = k$, devemos mostrar que também é válido para $n = k+1$, o que faremos aplicando sucessivamente o teorema da inclusão e exclusão de dois conjuntos, tomando-os dois a dois da seguinte maneira:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{k+1}|. =$$

$$|(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k) \cup A_{k+1}| =$$

$$= |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k| + |A_{k+1}| - |(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k) \cap A_{k+1}| =$$

$$= \sum_{1 \leq i \leq k} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq k} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i < j < m \leq k} |A_i \cap A_j \cap A_m| - \cdots + (-1)^{k+1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots A_k| -$$

$$-(\sum_{i \leq i \leq k} |A_i \cap A_{k+1}| - \sum_{1 \leq i < j \leq k} |A_i \cap A_j \cap A_{k+1}| + \cdots$$

$$\cdots + \ (-1)^k \sum_{1 \leq < j < \cdots < m \leq k} |(A_1 \cap A_{k+1}) \cap (A_j \cap A_{k+1}) \cap \cdots \cap (A_m \cap A_{k+1})| +$$

$$+ \ (-1)^{k+1} |A_1 \cap \cdots \cap A_{k+1}|).$$

Usando a hipótese da indução, temos que $A_1 \cap A_{k+1}$, $A_2 \cap A_{k+1}, \cdots, A_k \cap A_{k+1}$ será:

$$\sum_{1 \leq i \leq k+1} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq k+1} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i < j < m \leq k+1} |A_i \cap A_j \cap A_m| - \cdots + (-1)^{k+2} |A_1 \cap \cdots \cap A_{k+1}|$$

encerrando a demonstração.

□

Vejamos outros exemplos que ilustram outras situações que são resolvidas pelo princípio da inclusão e da exclusão generalizado:

Exemplo 4.16. (Problema dos Idiomas). Numa classe de 30 alunos brasileiros a diretora quis organizar uma viagem cultural para o exterior e apenas a acompanhariam os alunos que soubessem pelo menos uma língua estrangeira. A diretora verificou que 12 falavam inglês, 6 falavam francês e 5 falavam espanhol. Sabendo-se que 3 falam inglês e francês, 3 falam inglês e espanhol, 2 falam francês e espanhol e 3 falam as três línguas, calcule o número de alunos que não iriam viajar porque não falavam nenhuma língua estrangeira.

Seja A o conjuntos dos alunos que falam inglês, B o conjuntos dos alunos que falam francês e C o conjuntos dos alunos que falam espanhol. Dessa maneira, teríamos

$|A|= 12$, $|B|= 6$, $|C|= 5$, $|A\cup B|= 3$, $|A\cup C|= 3$, $|B\cup C|= 2$ e $|A\cup B\cup C|= 3$. Usando o teorema do princípio da inclusão e da exclusão podemos saber quantos alunos dessa classe falam pelo menos uma língua estrangeira:

$$|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|=$$

$$= 12 + 6 + 5 - 3 - 3 - 2 + 3 = 18,$$

ou seja, dos 30 alunos daquela classe, 18 falam pelo menos uma língua estrangeira, enquanto os demais 12 alunos não falam nenhuma língua estrangeira.

Portanto, 12 alunos daquela classe não irão viajar porque não sabem nenhuma língua estrangeira.

Exemplo 4.17. (Problema dos Divisores). Quantos são os números inteiros entre 1 e 3.600, inclusive, são divisíveis por 3, 5 ou 7?

Note que os conjuntos não são disjuntos, pois há múltiplos comuns a 3 e 5, 3 e 7, 5 e 7 e aos três simultaneamente, motivo pelo qual usaremos o princípio da inclusão e da exclusão.

Sejam A o conjunto dos múltiplos de 3, B o conjunto dos múltiplos de 5 e C o conjunto dos múltiplos de 7. Considerando que os possíveis múltiplos começam com 1 e vão até 3.600, para sabermos o número de múltiplos em cada um dos casos em questão basta dividirmos da seguinte maneira:

$|A|= 3.600 \div 3 = 1.200$ múltiplos de 3;

$|B|= 3.600 \div 5 = 720$ múltiplos de 5;

$|C|= 3.600 \div 7 = 514$ múltiplos de 7.

Em seguida, calculamos o números de múltiplos de dois em dois. Assim, os múltiplos de 3 e 5 são os múltiplos de $3\cdot 5 = 15$; os múltiplos de 3 e 7 são os múltiplos de $3\cdot 7 = 21$ e os múltiplos de 5 e 7 são os múltiplos de $5 \cdot 7 = 35$. Assim sendo, teremos:

$|A\cap B|= 3.600 \div 15 = 240$ múltiplos de 3 e 5;

$|A\cap C|= 3.600 \div 21 = 171$ múltiplos de 3 e 7;

$|B\cap C|= 3.600 \div 35 = 102$ múltiplos de 5 e 7.

Por fim, calculamos o número de múltiplos dos três números simultaneamente, ou seja, múltiplos de $3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$, obtendo:

$|A\cap B\cap C|= 3.600 \div 105 = 344$ múltiplos de 3 e 5 e 7.

Em seguida, pelo princípio da inclusão e da exclusão podemos obter a resposta da seguinte maneira:

$$|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|=$$

$$= 1.200 + 720 + 514 - 240 - 171 - 102 + 34 = 1.955,$$

ou seja, entre os números inteiros 1 até 3.600 há 1.955 números que são divisíveis simultaneamente por 3, 5 ou 7.

Exemplo 4.18. Problema dos Anagramas Condicionados sem Letras Repetidas. Quantos são os anagramas da palavra EQUADOR nas quais E ocupa o primeiro lugar ou Q em segundo lugar ou D em terceiro lugar?

Esses anagramas são denominados condicionados porque há condições a serem obedecidas na formação dos anagramas. Observe também que todas as letras da palavra aparecem uma única vez, ou seja, não há repetição de letras. Sejam A o conjunto dos anagramas em que a letra E ocupa o primeiro lugar; B o conjunto dos anagramas em que a letra Q ocupa o primeiro lugar e C o conjunto dos anagramas em que a letra D ocupa o terceiro lugar. Note que os conjuntos não são disjuntos, motivo pelo qual deverão ser excluídas as contagens repetidas. Outro dado importante a se notar é que não há letras repetidas, pois todas as sete letras são diferentes entre si.

Inicialmente, vamos calcular o número de anagramas de $n(A)$, $n(B)$ e $n(C)$, lembrando que fixada uma das letras sobram outras seis letras a serem permutadas:

$|A|= 6! = 720$ anagramas com a primeira letra E;
$|B|= 6! = 720$ anagramas com a segunda letra Q;
$|C|= 6! = 720$ anagramas com a terceira letra D.

Em seguida, calculamos o números de múltiplos de dois em dois. Assim, $n(A \cup B)$ é o conjunto dos anagramas com a primeira letra E e também a segunda letra Q; $n(A \cup C)$ é o conjunto dos anagramas com a primeira letra E e também a terceira letra D; $n(B \cup C)$ é o conjunto dos anagramas com a segunda letra Q e também a terceira letra D. Em todas essas situações, são fixadas duas letras e sobram outras cinco letras a serem permutadas:

$|A \cap B|= 5! = 120$ anagramas com a primeira letra E e a segunda letra Q;
$|A \cap C|= 5! = 120$ anagramas com a primeira letra E e a terceira letra D;
$|B \cap B|= 5! = 120$ anagramas com a segunda letra Q e a terceira letra D.

Por fim, calculamos o número dos anagramas que simultaneamente têm a primeira letra E, a segunda letra Q e a terceira letra D, ou seja, são fixadas três letras e sobram outras quatro letras a serem permutadas:

$|A \cap B \cap C|= 4! = 24$ anagramas com primeira letra E, segunda letra Q e terceira letra D.

Em seguida, pelo princípio da inclusão e da exclusão, podemos obter a seguinte resposta:

$$|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|=$$

$$= 720+720+720-120-120-120+24 = 1.824,$$

ou seja, há 1.824 anagramas com as letras de EQUADOR com primeira letra E ou segunda letra Q ou terceira letra D.

Exemplo 4.19. (Problema dos Anagramas Condicionados com Letras Repetidas). Quantos são os anagramas da palavra ITALIA nas quais a letra I ocupa o primeiro lugar, ou a letra T ocupa o segundo lugar, ou a letra A ocupa o sexto lugar ou que começam ou terminam por vogal?

Aqui é diferente do exemplo anterior porque há letras repetidas, pois temos duas letras I e duas letras A.

Sejam A o conjunto dos anagramas em que a letra I ocupa o primeiro lugar; B o conjunto dos anagramas em que a letra T ocupa o segundo lugar; C o conjunto dos anagramas em que a letra A ocupa o sexto lugar; D o conjunto dos anagramas que começam ou terminam por vogal. Note que há diversas situações de intersecção o que significa que será necessário o uso do princípio da inclusão e da exclusão.

Vamos começar contando o número de elementos do conjunto A, os anagramas em que a letra I ocupa o primeiro lugar:

$$n(A) = \frac{5!}{2!} = 60.$$

Vejamos agora o conjunto B, que corresponde ao número de casos em que a letra T ocupa o segundo lugar:

$$n(B) = \frac{5!}{2!\,2!} = 30.$$

Vejamos agora o conjunto C, que corresponde ao número de casos em que a letra A ocupa o sexto lugar:

$$n(C) = \frac{5!}{2!} = 60.$$

Em seguida, vejamos o conjunto D, que corresponde ao número de casos em que os anagramas terminam por vogal. Aqui note que há quatro casos. No primeiro caso, o anagrama começa com a vogal I e termina com a vogal A. No segundo caso, o anagrama começa com a vogal I e termina com letra I. No terceiro caso, o anagrama começa com a letra A e termina com a letra A. No quarto e último caso, o anagrama começa com a letra A e termina com a letra I. Assim sendo, temos:

$$n(D) = 4! + \frac{4!}{2!} + \frac{4!}{2!} + 4! = 24 + 12 + 12 + 24 = 72.$$

Agora, vejamos as intersecções dois a dois que são seis casos. O primeiro desses casos será $n(A \cap B)$, que corresponde aos anagramas em que primeira letra é I e a segunda letra é T. O segundo caso será $n(A \cap C)$, correspondente aos anagramas em que a primeira letra é I e a última letra é A. O terceiro caso será $n(A \cap D)$, correspondente aos casos em que a primeira letra é I e a primeira ou a última letra será vogal. O quarto caso será $n(B \cap C)$, correspondente aos casos em que a segunda letra é T e a última letra é A. O quinto caso será $n(B \cap D)$, correspondente aos casos em que a segunda letra é T e começam ou terminam por vogal. O sexto e último caso será $n(C \cap D)$, correspondente aos casos que terminam com a vogal A e começam ou terminam por vogal. Assim, teremos:

$$n(A \cap B) = \frac{4!}{2!} = 12,$$
$$n(A \cap C) = 4! = 24,$$
$$n(A \cap D) = \frac{4!}{2!} + 4! = 12 + 24 = 36,$$
$$n(B \cap C) = \frac{4!}{2!} = 12,$$
$$n(B \cap D) = 3! + \frac{3!}{2!} + \frac{3!}{2!} + 3! = 6 + 3 + 3 + 6 = 18,$$
$$n(C \cap D) = 4! + \frac{4!}{2!} = 24 + 12 = 36.$$

Vejamos agora os casos de intersecção de três conjuntos, que são quatro casos. O primeiro desses casos será $n(A \cap B \cap C)$, que corresponde ao caso em que a letra I ocupa o primeiro lugar, a letra T ocupa o segundo lugar e a letra A ocupa o sexto, ou último, lugar. O segundo será $n(A \cap B \cap D)$, que corresponde ao caso em que a letra I ocupa o primeiro lugar, a letra T ocupa o segundo lugar e começam e terminam por vogal. O terceiro será $n(A \cap C \cap D)$, que corresponde ao caso em que a letra I ocupa o primeiro lugar, termina com a letra A e terminam e começa por vogal. Por fim, o quarto será $n(B \cap C \cap D)$, que corresponde ao caso em que a letra T ocupa o segundo lugar, a letra A ocupa o sexto, ou último lugar, e começam ou terminam por vogal. Assim, teremos:

$$n(A \cap B \cap C) = 3! = 6,$$
$$n(A \cap B \cap D) = \frac{3!}{2!} + 3! = 3 + 6 = 9,$$
$$n(A \cap C \cap D) = 4! = 24,$$
$$n(B \cap C \cap D) = 3! + \frac{3!}{2!} = 6 + 3 = 9.$$

Por fim, temos um único caso de intersecção dos quatro conjuntos, $n(A \cap B \cap C \cap D)$, que simultaneamente ocorrem todas as situações possíveis:

$$n(A \cap B \cap C \cap D) = 3! = 6.$$

Em seguida, pelo princípio da inclusão e exclusão faremos:

$$\begin{aligned}
n(A \cup B \cup C \cup D) &= n(A) + n(B) + n(C) + n(D) - n(A \cap B) - n(A \cap C) \\
&- n(A \cap D) - n(B \cap C) - n(B \cap D) - n(C \cap D) \\
&+ n(A \cap B \cap C) + n(A \cap B \cap D) + n(A \cap (A \cap C \cap D) \\
&+ n(B \cap C \cap D) - n(A \cap B \cap C \cap D) = \\
&= 60 + 30 + 60 + 72 - 12 - 24 - 36 - 12 \\
&- 18 - 36 + 6 + 9 + 9 + 24 - 6 \\
&= 126.
\end{aligned}$$

Exemplo 4.20. (Número de Funções Sobrejetoras). Quantas funções sobrejetoras $f : A \to B$ podem ser definidas entre dois conjuntos finitos sendo domínio o conjunto $A = \{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_m\}$ e contradomínio o conjunto $B = \{b_1, b_2, b_3, \cdots, b_n\}$?

Trata-se da clássica questão do número de funções sobrejetoras entre dois conjuntos finitos. Além disso, cabe registrar que funções sobrejetoras entre um conjunto domínio A, com m elementos, e um conjunto B, com n elementos, podem ocorrer tanto para $m < n$, $m = n$ ou $m > n$. Porém, aqui o problema é mais complexo que o cálculo do número de funções injetoras ou bijetoras entre dois conjuntos finitos, que já vimos ao tratar do arranjo simples, pois no cálculo do número de funções sobrejetoras será necessário o princípio da inclusão e da exclusão. Vamos começar analisando alguns casos particulares para encontrar a solução geral desse problema.

Se o conjunto domínio A tivesse apenas três elementos e o conjunto contradomínio B tivesse apenas dois elementos, teríamos $A = \{a_1, a_2, a_3\} \to B = \{b_1, b_2\}$, que totalizaria um total de 2^3 funções quaisquer, das quais apenas as funções constantes, $f = \{(a_1, b_1), (a_2, b_1), (a_3, b_1)\}$ ou $f = \{(a_1, b_2), (a_2, b_2), (a_3, b_2)\}$, não seriam sobrejetoras, ou seja, o número de funções sobrejetoras neste caso particular seria $2^3 - 2$.

Prosseguindo na análise de casos particulares, vejamos o número de funções sobrejetoras caso o conjunto domínio A tivesse quatro elementos e o conjunto contradomínio B tivesse três elementos, ou seja, $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\} \to B = \{b_1, b_2, b_3\}$, que totalizaria um total de 3^4 funções quaisquer. Agora, porém, teríamos que considerar o número de subconjuntos do conjunto contradomínio B, que corresponde a $\binom{3}{2}$, de maneira que não seriam sobrejetoras as funções nas quais os quatro elementos do conjunto domínio A se relacionassem apenas com dois elementos do total de três elementos do conjunto contradomínio B, ou seja, deveríamos em princípio excluir $2^4\binom{3}{2}$ funções que não são sobrejetoras, porém, nesse caso em que os subconjuntos do contradomínio tem apenas dois elementos, estamos excluindo duas vezes essas funções não sobrejetoras. Por exemplo, em relação aos subconjuntos do conjunto contradomínio B que fossem $\{b_1, b_2\}$ e $\{b_2, b_3\}$, estaríamos excluindo por duas vezes as funções que tivessem como elemento do conjunto imagem b_2.

Por isso é que através do princípio da inclusão e da exclusão reincluímos os casos excluídos duplamente, acrescentando os subconjuntos do conjunto contradomínio B com um único elemento, de maneira que neste caso, o número de funções sobrejetoras seria $3^4 - 2^4\binom{3}{2} + 1^4\binom{3}{2}$, que totalizaria 36 funções sobrejetoras.

Generalizando esse raciocínio para o caso em que o conjunto domínio A tem m elementos e o conjunto B tem n elementos, o número de funções sobrejetoras seria dado por:

$$\binom{n}{n}n^m - \binom{n}{n-1}(n-1)^m + \binom{n}{n-2}(n-2)^m - \cdots + (-1)^{(n-1)}\binom{n}{1}1^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{(n-1)} (-1)^k \binom{n}{n-k}(n-k)^m.$$

5 Funções Geradoras

As funções geradoras constituem um outro método de se resolver problemas combinatórios através da análise dos coeficientes e dos expoentes de funções adequadas a cada um dos problemas em questão.

Conforme veremos, em algumas situações podem facilitar a resolução dos problemas e noutros podem se revelar a única maneira de solucioná-los. Para o desenvolvimento deste capítulo, as principais referências foram [9, 10, 11, 2].

5.1 Funções Geradoras

Definição 5.1. *A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \to f(x)$, será função geradora, de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, da sequência de coeficientes $(a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots)$, com $a_n \in \mathbb{R}$, em relação à sequência de funções $(f_0(x), f_1(x), f_2(x), f_3(x), \cdots)$ se:*

$$f(x) = a_0 f_0(x) + a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + a_3 f_3(x) + \cdots$$

Vejamos alguns exemplos de conjuntos ordenados e as respectivas funções geradoras:

Exemplo 5.1. Encontre a função geradora da sequência de coeficientes $a_i = (1, 1, 1, 1, 1)$ em relação à sequência de funções $x^i = (1, x, x^2, x^3, x^4)$.
Basta efetuarmos a seguinte operação entre essas duas sequências, conforme a seguir:

$$p(x) = (1, 1, 1, 1, 1) \cdot (1, x, x^2, x^3, x^4) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4.$$

Exemplo 5.2. Encontre a função geradora entre a sequência de coeficientes $(1, 1, 1, \cdots, 1)$ e a sequência de funções $(1, x, x^2, \cdots, x^n)$.

Da mesma maneira que o exemplo anterior, fazemos:

$$p(x) = (1, 1, 1, \cdots, 1) \cdot (1, x, x^2, \cdots, x^n) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \sum_{i=0}^{n} x^i.$$

Exemplo 5.3. Encontre a função geradora entre a sequência de coeficientes $(2, 3, 1, 0, 7)$ e a sequência de funções $(1, x, x^2, x^3, x^4)$.

Seguindo o método dos exemplos anteriores, fazemos:

$$p(x) = (2, 3, 1, 0, 7) \cdot (1, x, x^2, x^3, x^4) = 2 + 3x + x^2 + 7x^3.$$

Exemplo 5.4. Encontre a função geradora entre a sequência de coeficientes $(1, 0, 0, 0, 1)$ e a sequência de funções $(1, x, x^2, x^3, x^4)$.

Seguindo o método dos exemplos anteriores, fazemos:

$$p(x) = (1, 0, 0, 0, 1) \cdot (1, x, x^2, x^3, x^4) = 1 + x^4.$$

Cabe esclarecer por qual motivos interessam apenas os coeficientes e as potências. As potências representam as combinações possíveis enquanto os coeficientes representam a quantidade de cada uma dessas combinações.

5.2 Série geométrica e função correspondente

No estudo de funções geradoras aplicada a problemas combinatórios, de particular relevância encontra-se a função geradora, que será útil em diversos problemas a serem resolvidos pelo método das funções geradoras.

De particular importância será o conceito de *série geométrica*, que é dada por uma sequência na qual cada a partir de um termo inicial, todos os demais termos são um múltiplo constante do termo que o antecede [5]. Uma série geométrica pode ser finita ou infinita. A série geométrica finita é aquela que tem a forma $ax+ax^2+ax^3+\cdots+ax^n$. Já a série geométrica infinita é aquela que tem a forma $ax + ax^2 + ax^3 + ax^n + \cdots$. Em ambos os casos a razão entre um termo e seu antecessor é x. Interessa-nos apenas uma particular série geométrica infinita, dada por:

$$f(x) = \frac{1}{1-x}.$$

Se o valor de x estiver dentro do intervalo aberto $(-1, 1)$, isto é, $|x| < 1$, essa soma infinita terá um resultado certo. O que nos interessa é a função geradora correspondente a essa série geométrica infinita, dada a seguir:

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \cdots. \tag{5.1}$$

Esse resultado será muito utilizado na resolução de problemas combinatórios através do método das funções geradoras. Cabe ressaltar que em análise combinatória, não será necessário averiguar se $|x| < 1$, pois aqui interessa apenas o aspecto formal da séria geométrica, ou seja, os coeficientes e os expoentes, sendo irrelevante a variável x. Por isso, são denominadas séries *formais* de potências.

Mediante uma simples manipulação algébrica, temos que

$$(1 - x) \cdot (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \cdots) = 1.$$

Esse resultado pode ser ampliado, conforme podemos verificar nos seguintes exemplos:

Exemplo 5.5. Obtenha a série de potências da função $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$ dentro de um intervalo de convergência válido.

A série de potências correspondente à função dada será:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{1-x^2} \\ &= (x^2)^0 + (x^2) + (x^2)^2 + (x^2)^3 + (x^2)^4 + (x^2)^5 + \cdots \\ &= 1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + x^{10} + \cdots . \end{aligned}$$

Essa é a série formal de potências correspondente à função dada.

Exemplo 5.6. Obtenha a série formal de potências da função $f(x) = \frac{1}{1-x^5}$ dentro de um intervalo de convergência válido.

A série de potências correspondente à função dada será:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{1-x^5} \\ &= (x^5)^0 + (x^5) + (x^5)^2 + (x^5)^3 + (x^5)^4 + (x^5)^5 + \cdots \\ &= 1 + x^5 + x^{10} + x^{15} + x^{20} + x^{25} + \cdots . \end{aligned}$$

Essa é a série formal de potências correspondente à função dada.

5.3 Classificação das Funções Geradoras e sua Relação com a Contagem

Para finalidades combinatórias, podemos classificar as *funções geradoras* em *ordinárias* e *exponenciais*, distinção que é relevante para fins de contagem.

5.3.1 Funções Geradoras Ordinárias

Definição 5.2. *A função geradora será* ***ordinária*** *da sequência de coeficientes* $(a_0, a_1, a_2, a_3, \cdots)$ *se a sequência de funções for* $(1, x, x^2, x^3, \cdots)$*. Assim, teremos:*

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots .$$

Exemplo 5.7. Para encontrar a função geradora entre a sequência de coeficientes $(1, 1, 1, 0, 0, 0 \cdots)$ e a sequência de funções $(1, x, x^2, x^3, \ldots)$, basta fazermos:

$$p(x) = (1, 1, 1, 0, 0, 0 \cdots) \cdot (1, x, x^2, x^3, \cdots) = 1 + x + x^2 + 0x^3 + 0x^4 + 0x^5 \cdots = 1 + x + x^2.$$

Exemplo 5.8. Para encontrar a função geradora entre a sequência de coeficientes $(1, 1, 3, 0, 0, 0 \cdots)$ e a sequência de funções $(1, x, x^2, x^3, ...)$, basta fazermos:

$$p(x) = (1, 1, 3, 0, 0, 0 \cdots) \cdot (1, x, x^2, x^3, \cdots) = 1+x+3x^2+0x^3+0x^4+0x^5 \cdots = 1+x+3x^2.$$

Exemplo 5.9. Para encontrar a função geradora entre a sequência de coeficientes $(1, 1, 3, 1, 1, ...)$ e a sequência de funções $(1, x, x^2, x^3, ...)$, basta fazermos:

$$\begin{aligned} p(x) = (1, 1, 3, 1, 1, \cdots) \cdot (1, x, x^2, x^3, x^4, x^5, \cdots) = \\ = 1 + x + 3x^2 + x^3 + \cdots = 1 + x + (x^2 + 2x^2) + x^3 + x^4 + \cdots = \\ = 2x^2 + (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots) = \\ = 2x^2 + \frac{1}{1-x}. \end{aligned}$$

5.3.2 Função Geradora Exponencial

Outra série geométrica importante e de relevância para a solução de problemas de contagem através do método das funções geradoras é $f(x) = e^x$, que é dada por

$$e^x = \sum_0^\infty \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots.$$

Com isso, apresentaremos a seguinte definição.

Definição 5.3. *A função geradora será **exponencial** da sequência de coeficientes* $(a_0, a_1, a_2, a_3, \cdots)$ *se a sequência de funções for* $\left(1, x, \frac{x^2}{2!}, \frac{x^3}{3!}, \cdots\right)$. *Assim, teremos:*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 \frac{x^2}{2!} + a_3 \frac{x^3}{3!} + \cdots.$$

Exemplo 5.10. A função geradora exponencial da sequência $(1, 1, 1, \cdots)$ é dada por:

$$1\left(\frac{x^0}{0!}\right) + 1\left(\frac{x^1}{1!}\right) + 1\left(\frac{x^2}{2!}\right) + 1\left(\frac{x^3}{3!}\right) + \cdots + 1\left(\frac{x^k}{k!}\right) + \cdots =$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^k}{k!} + \cdots =$$

$$= e^x.$$

Note que todos os coeficientes de quaisquer dos termos $\frac{x^k}{k!}$ são iguais a 1.

Exemplo 5.11. A função geradora exponencial da sequência $(1, 0, 1, 0, 1, 0, \cdots)$ é dada por:

$$1\left(\frac{x^0}{0!}\right)+0\left(\frac{x^1}{1!}\right)+1\left(\frac{x^2}{2!}\right)+0\left(\frac{x^3}{3!}\right)+\cdots+1\left(\frac{x^{2k}}{(2k)!}\right)+\cdots=$$

$$=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{x^{2k}}{(2k)!}+\cdots=$$

$$=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=senh(x).$$

Essa função geradora exponencial é o seno hiperbólico. Note que todos os coeficientes de quaisquer dos termos de expoentes pares são iguais a 1 enquanto os termos de expoentes ímpares são iguais a 0.

Exemplo 5.12. A função geradora exponencial da sequência $(0,1,0,1,0,1,\cdots)$ é dada por:

$$0\left(\frac{x^0}{0!}\right)+1\left(\frac{x^1}{1!}\right)+0\left(\frac{x^2}{2!}\right)+1\left(\frac{x^3}{3!}\right)+\cdots+1\left(\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right)+\cdots=$$

$$=\frac{x^1}{1!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+\cdots=$$

$$=\frac{e^x-e^{-x}}{2}=cosh(x).$$

Essa função geradora exponencial é o cosseno hiperbólico. Note que todos os coeficientes de quaisquer dos termos de expoentes ímpares são iguais a 1 enquanto os termos de expoentes pares são iguais a 0.

Exemplo 5.13. Usando o Exemplo (3.12) segue que a função geradora exponencial da sequência $(2,2,2,\cdots)$ é dada por:

$$1+2x+\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^3}{3!}+\cdots+\frac{(2x)^k}{k!}+\cdots=$$

$$=1+\frac{(2x)^1}{1!}+\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^3}{3!}+\cdots+\frac{(2x)^k}{k!}+\cdots=$$

$$=1+2^1\left(\frac{x^1}{1!}\right)+2^2\left(\frac{x^2}{2!}\right)+2^3\left(\frac{x^3}{3!}\right)+\cdots+2^k\left(\frac{x^k}{k!}\right)+\cdots=$$

$$=1+2\left(\frac{x^1}{1!}\right)+4\left(\frac{x^2}{2!}\right)+8\left(\frac{x^3}{3!}\right)+\cdots+2^k\left(\frac{x^k}{k!}\right)+\cdots=$$

$$=e^{2x}.$$

Exemplo 5.14. A função geradora exponencial da sequência $(1, 1, 1, 0, 1, 1, \cdots)$ pode ser obtida considerando primeiramente a função geradora de e^x:

$$e^x = \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^k}{k!} + \cdots$$

Como na série de potências o coeficiente de $\frac{x^4}{4!}$ é 0, subtraímos de ambos os lados $\frac{x^4}{4!}$, de modo que do lado direito tenhamos o coeficiente 0 para a expressão $\frac{x^4}{4!}$:

$$e^x - \frac{x^4}{4!} = \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \left(\frac{x^4}{4!} - \frac{x^4}{4!}\right) + \cdots + \frac{x^k}{k!} + \cdots$$

O que significa que a função geradora exponencial será:

$$e^x - \frac{x^4}{24}.$$

Essa classificação é muito importante para usar a função geradora adequada ao problema combinatório a ser solucionado.

5.3.3 Função Geradora Ordinária e Combinações.

A função geradora ordinária é própria para a contagem do número de elementos de um conjunto na qual a ordem é irrelevante, ou seja, corresponde àquilo que na análise combinatória tradicional é chamado de combinação.

Isso significa que as questões que anteriormente resolvemos usando a combinação, com ou sem repetição, podem todas serem resolvidas pelo método das funções geradoras. Porém, há questões que os métodos da tradicional análise combinatória não conseguem solucionar e nas quais ainda mostra-se inviável a enumeração de todos os casos possíveis. Será sobretudo nessas situações que o método das funções geradoras mostra sua grande potencialidade de resolver problemas de contagem que pelos métodos tradicionais seria inviável.

Seguem alguns exemplos.

Exemplo 5.15. Em uma classe com 6 alunos, quantos grupos podemos formar com 3 membros dessa classe, usando o método das funções geradoras?

Cada um dos 6 alunos pode estar ou não no grupo a ser formado. Se um determinado aluno não fizer parte do grupo, isso será expressado como x^0, no qual o expoente 0 significa que esse determinado aluno não faz parte do grupo. Porém, se esse aluno fizer parte do grupo isso será expressado como x^1, no qual o expoente 1 significa que aquele aluno faz parte do grupo. Assim, cada aluno será representado pelo seguinte binômio, que representa as duas situações possíveis, ausente ou presente:

$$(x^0 + x^1) = (1 + x).$$

Vamos supor que os 6 alunos sejam Ana, Beatriz, Carlos, Diego, Edson e Fernanda, de maneira que representamos cada um desses alunos pela letra x com sub-índice correspondente à primeira letra do nome. Assim, x_A será Ana, x_B será Beatriz, x_C será Carlos, x_D será Diego, x_E será Edson e x_F será Fernanda. Todos os grupos com 3 alunos pode ser representado por $x_A^a x_B^b x_C^c x_D^d x_E^e x_F^f$, de maneira que cada um dos expoentes a, b, c, d, e, f é o número de vezes que cada um desses alunos comparece no grupo de 3 pessoas.

Perceba que qualquer grupo de 3 pessoas será representado por 3 expoentes iguais a 1 e os outros 3 expoentes iguais a 0. Por exemplo, o grupo $x_A^0 x_B^1 x_C^1 x_D^0 x_E^0 x_F^1$ mostra que estão no grupo Beatriz, Carlos e Fernanda, pois o expoente é 1, bem como estão fora do grupo Ana, Diego e Edson, pois o expoente é 0. Já o grupo $x_A^1 x_B^1 x_C^1 x_D^0 x_E^0 x_F^0$ mostra que estão no grupo Ana, Beatriz, Carlos e Fernanda, pois o expoente é 1, bem como estão fora do grupo Diego, Edson e Fernanda, pois o expoente é 0. Com isso, o binômio $(1 + x)$ representa todas as situações possíveis de cada um dos 6 alunos da classe.

Por sua vez, como a classe tem 6 alunos, o total de situações possíveis em termos de contagem será expressado pelo mencionado binômio elevado à potência 6 e fazendo a seguinte expansão:

$$(1 + x)^6 = x^6 + 6x^5 + 15x^4 + 20x^3 + 15x^2 + 6x + 1.$$

A expansão do binômio nos exibe a resposta da seguinte maneira:

Considerando que o grupo deve ter 3 alunos, verificamos o coeficiente com expoente 3, que no caso corresponde à expressão $20x^3$.

Isso significa que podemos formar 20 grupos (coeficiente 20) com 3 alunos (expoente 3), ou seja, em uma classe com 6 alunos podemos formar 20 grupos com 3 alunos.

Esse resultado pode ser comparado pelo método usado anteriormente relativo à combinação sem repetição de 6 elementos tomados 3 a 3, isto é,

$$C_{6,3} = \binom{6}{3} = \frac{6!}{3!\,3!} = 20.$$

Esse é o resultado esperado, pois o método da combinação sem repetição e o método das funções geradoras devem resultar na mesma resposta.

Exemplo 5.16. Quantas são as soluções inteiras e positivas da equação $x_1 + x_2 + x_3 = 6$?

Note a semelhança com a soma dos expoentes do exemplo anterior, sendo que aqui a soma será igual a 6 e cada um dos valores a serem somados variam de 1 até 6, ou seja, cada uma das variáveis podem assumir algum dos valores do seguinte conjunto de inteiros positivos $1, 2, 3, 4, 5, 6$. Cada uma das variáveis será representada pelo seguinte polinômio:

$$(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6).$$

Como são três variáveis, x_1, x_2 e x_3, elevamos o polinômio anterior à potência 3 e o expandimos para obter:

$$(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^3 = x^{18} + 3x^{17} + 6x^{16} + 10x^{15} + 15x^{14} + 21x^{13} + 25x^{12} + 27x^{11} + 27x^{10} + 25x^9 + 21x^8 + 15x^7 + 10x^6 + 3x^4 + x^3.$$

A soma igual a 6 buscamos no expoente de x^6, que no caso corresponde à expressão $10x^6$, o que significa que há 10 soluções possíveis.

Note que esse polinômio expandido já mostra diversas soluções. Se o problema fosse $x_1 + x_2 + x_3 = 10$, bastaria verificar que para o expoente 10 temos $27x^{10}$, ou seja, há 27 soluções possíveis para variáveis inteiras e positivas.

A validade desse método pode também ser verificada se o problema fosse $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, cujo coeficiente é 1, pois se refere ao termo x^3, o que está correto, pois há apenas uma única solução que seria $(1, 1, 1)$, pois $x_1 = x_2 = x_3 = 1$.

Exemplo 5.17. Quantas são as soluções inteiras e não negativas da equação $x_1 + x_2 + x_3 = 6$?

Note que diferentemente do exemplo anterior, aqui os coeficientes podem ter valor 0 (zero).

Assim, os valores possíveis de cada uma das variáveis varia de 0 até 6, ou seja, cada uma das variáveis pode assumir algum dos valores do seguinte conjunto de inteiros positivos $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Cada uma das variáveis será representada pelo seguinte polinômio:

$$(x^0 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6) = (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6).$$

Como são três variáveis, x_1, x_2 e x_3, elevamos o polinômio anterior à potência 3 e o expandimos para obter:

$$\begin{aligned} &(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^3 = \\ &= x^{18} + 3x^{17} + 6x^{16} + 10x^{15} + 15x^{14} + 21x^{13} + 28x^{12} + 33x^{11} + 36x^{10} + 37x^9 + \\ &\quad + 36x^8 + 33x^7 + 28x^6 + 15x^4 + 10x^3 + 6x^2 + 3x + 1. \end{aligned}$$

A soma igual a 6 buscamos no expoente de x^6, que no caso corresponde a $28x^6$, o que significa que há 28 soluções possíveis.

A validade desse método pode também ser verificada se o problema fosse $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, cujo coeficiente é 0, pois se refere ao termo $1 = x^0$, o que está correto, pois há apenas uma única solução que seria $(0, 0, 0)$, pois $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

Além do método das funções geradoras, estas questões podem ser também resolvidas pelos métodos tradicionais da análise combinatória usando arranjo, permutação ou combinação, com ou sem repetição.

Porém, como já mencionamos, tais problemas podem ser resolvidos com maior segurança através do método das funções geradoras.

Alguns desses casos veremos nos próximos exemplos:

Exemplo 5.18. Quantas são as soluções inteiras e positivas da equação $x_1+x_2+x_3 = 10$, sendo que $x_1 > 3$, $x_2 \geq 3$ e $x_3 \geq 0$?

Os valores possíveis de x_1 são $\{4,5,6\}$ e de x_3 são $\{0,1,2,3,4,5,6\}$. Esses valores possíveis vão para o expoente, pois temos que calcular os coeficientes das respectivas funções geradoras, o que faremos da seguinte maneira:

$$\overbrace{(x^4+x^5+x^6)}^{x_1}\cdot\overbrace{(x^3+x^4+x^5+x^6)}^{x_2}\cdot\overbrace{(x^0+x^1+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)}^{x_3}$$
$$= x^{18}+3x^{17}+6x^{16}+9x^{15}+11x^{14}+12x^{13}+12x^{12}+11x^{11}+9x^{10}+6x^9+3x^8+x^7.$$

Buscamos o coeficiente de x^{10}, que é 9, o que significa que há 9 soluções possíveis ao problema dado.

Exemplo 5.19. Quantas são as soluções inteiras e positivas da equação $x_1+2x_2+3x_3 = 12$?

Note que x_1 pode assumir os valores $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$. Já x_2 pode assumir os valores $\{2,4,6,8,10,12\}$. Por fim, x_3 pode assumir os valores $\{3,6,9,12\}$.

Conforme já dissemos, no método das funções geradoras os valores possíveis das variáveis são manipuladas nos expoentes da seguinte maneira:

$$\overbrace{(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+x^8+x^9+x^{10}+x^{11}+x^{12})}^{x_1}$$
$$\cdot\overbrace{(x^2+x^4+x^6+x^8+x^{10}+x^{12})}^{x_2}\cdot\overbrace{(x^3+x^6+x^9+x^{12})}^{x_3} =$$
$$= x^{36}+x^{35}+2x^{34}+3x^{33}+4x^{32}+5x^{31}+7x^{30}+8x^{29}+10x^{28}+12x^{27}+14x^{26}+16x^{25}+$$
$$+16x^{24}+18x^{23}+18x^{22}+18x^{21}+18x^{20}+18x^{19}+16x^{18}+16x^{17}+14x^{16}+12x^{15}+$$
$$+10x^{14}+8x^{13}+7x^{12}+5x^{11}+4x^{10}+3x^9+2x^8+x^7+x^6.$$

O resultado encontra-se no coeficiente de x^{12}, que é 7, ou seja, há 7 soluções possíveis.

Esse é um caso em que é perfeitamente possível enumerar os casos possíveis, que são $(7+2+3)$, $(5+4+3)$, $(3+6+3)$, $(1+8+3)$, $(4+2+6)$, $(2+4+6)$ e $(2+2+8)$, porém a solução por enumeração tem o inconveniente de não se ter certeza se algum caso não foi percebido, algo que o método das funções geradoras possibilita uma certeza quanto ao número de casos enumeráveis.

Exemplo 5.20. Quantas são as soluções inteiras e não negativas da equação $x_1+2x_2+3x_3=12$?

Diferentemente do exemplo anterior, aqui todas as três variáveis podem assumir o valor 0. Por isso, a variável x_1 pode assumir os valores $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$. Já x_2 pode assumir os valores $\{0,2,4,6,8,10,12\}$. Por fim, x_3 pode assumir os valores $\{0,3,6,9,12\}$. Nos três casos, o caso correspondente a x^0 será registrado como 1, pois $x^0=1$. Temos:

$$\overbrace{(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+x^8+x^9+x^{10}+x^{11}+x^{12})}^{x_1}$$
$$\cdot\overbrace{(1+x^2+x^4+x^6+x^8+x^{10}+x^{12})}^{x_2}\cdot\overbrace{(1+x^3+x^6+x^9+x^{12})}^{x_3}=$$

$$\begin{gathered}=1x^{36}+1x^{35}+2x^{34}+3x^{33}+4x^{32}+5x^{31}+\\+7x^{30}+8x^{29}+10x^{28}+12x^{27}+14x^{26}+16x^{25}+\\+19x^{24}+20x^{23}+22x^{22}+23x^{21}+24x^{20}+24x^{19}+\\+25x^{18}+24x^{17}+24x^{16}+23x^{15}+22x^{14}+20x^{13}+\\+19x^{12}+16x^{11}+14x^{10}+12x^{9}+10x^{8}+8x^{7}+\\+7x^{6}+5x^{5}+4x^{4}+3x^{3}+2x^{2}+1x+1.\end{gathered}$$

O resultado encontra-se no coeficiente de x^{12}, que é 19, ou seja, há 19 soluções possíveis.

Um clássico exemplo de uso das funções geradoras ordinárias encontramos no denominado *jogo de dados de Galileo Galilei*, pois se atribui ao notável físico a formulação e resolução desse problema.

Todos sabemos que o dado tem seis faces numeradas com $1,2,3,4,5$ e 6, conforme ilustra a Figura 5.1.

Ao lançarmos um dado, os resultados possíveis estarão representados na função geradora como expoentes de x da seguinte maneira:

$$f(x)=x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6.$$

Figura 5.1: Dado de jogo

Como não existe a face com o número zero, então não existe a potência $x^0 = 1$. É por isso que a função geradora começa com x e não com 1, como cada resultado possível aparece uma única vez, segue que os coeficientes são todos iguais a 1.

Apenas para ilustrar, se fosse um dado de dez faces com dois lados com número 1, dois lados com número 2, dois lados com número 3, dois lados com número 4, dois lados com número 5 e dois lados com número 6, então a função geradora seria escrita assim:

$$p(x) = 2x + 2x^2 + 2x^3 + 2x^4 + 2x^5 + 2x^6.$$

Note que o coeficiente seria 2 porque cada um dos resultados aparece duplicado.

Ainda, se tivéssemos um dado de seis faces com dois lados com número 1, três lados com número 2 e um lado com número 3, então a função geradora seria escrita assim:

$$f(x) = 2x + 3x^2 + x^3.$$

Note que é o expoente que registra os resultados possíveis e os coeficientes registram quantas vezes esse resultado aparece.

Voltando ao tradicional dado de seis faces numerados de 1 até 6, a possibilidade de obtermos o resultado 3 lançando um único dado todos sabemos que será 1. Em termos de função geradora, bastaria ver o coeficiente da potência 3, que é 1.

$$p(x) = x^1 + x^2 + 1.x^3 + x^4 + x^5 + x^6.$$

A vantagem do método das funções geradoras começa a ser notado quando estamos perante um problema envolvendo, por exemplo, o lançamento de dois dados.

Se quisermos saber quantas possibilidades de obter a soma 7 lançando simultaneamente dois dados, basta expandir o polinômio correspondente à função geradora composta pelo produto:

$$\begin{aligned} p(x) &= (x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^2 \\ &= x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 4x^5 + 5x^6 + 6x^7 + 5x^8 + 4x^9 + 3x^{10} + 2x^{11} + x^{12}. \end{aligned}$$

O coeficiente da potência 7 é 6, o que significa que jogando dois dados simultaneamente há 36 resultados possíveis dos quais 6 somam 7.

Tudo parece resumir-se a uma expansão de polinômios para verificar a potência e o coeficiente, o que não deixa de ser verdade. Porém, o problema pode encontrar-se exatamente na expansão de polinômios. Os seguintes casos já nos darão uma mostra de como a obtenção da expansão do polinômio pode ser um problema tormentoso.

Se quisermos obter a função geradora relativa ao lançamento de três dados, bastará realizar a seguinte multiplicação:

$$\begin{aligned}p(x) &= (x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^3\\ &= x^3 + 3x^4 + 6x^5 + 10x^6 + 15x^7 + 21x^8 + 25x^9 + 27x^{10} + 27x^{11} + 25x^{12}+\\ &+ 21x^{13} + 15x^{14} + 10x^{15} + 6x^{16} + 3x^{17} + x^{18}.\end{aligned}$$

Vejamos a função geradora relativa ao lançamento de cinco dados:

$$\begin{aligned}p(x) &= (x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^5\\ &= x^{30} + 5x^{29} + 15x^{28} + 35x^{27} + 70x^{26} + 126x^{25} + 205x^{24} + 305x^{23} + 420x^{22}+\\ &+ 540x^{21} + 651x^{20} + 735x^{19} + 780x^{18} + 780x^{17} + 735x^{16} + 651x^{15} + 540x^{14}+\\ &+ 420x^{13} + 305x^{12} + 20511 + 126x^{10} + 70x^9 + 35x^8 + 15x^7 + 5x^6 + x^5.\end{aligned}$$

Por fim, vejamos a função geradora relativa ao lançamento de dez dados:

$$\begin{aligned}p(x) &= (x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^{10}\\ &= x^{60} + 10x^{59} + 55x^{58} + 220x^{57} + 715x^{56} + 2002x^{55} + 4995x^{54} + 11340x^{53}+\\ &+ 23760x^{52} + 46420x^{51} + 85228x^{50} + 147940x^{49} + 243925x^{48} + 383470x^{47}+\\ &+ 576565x^{46} + 831204x^{45} + 1151370x^{44} + 1535040x^{43} + 1972630x^{42}+\\ &+ 2446300x^{41} + 2930455x^{40} + 3393610x^{39} + 3801535x^{38} + 4121260x^{37}+\\ &+ 4325310x^{36} + 4395456x^{35} + 4325310x^{34} + 4121260x^{33} + 3801535x^{32}+\\ &+ 3393610x^{31} + 2930455x^{30} + 2446300x^{29} + 1972630x^{28} + 1535040^{27}+\\ &+ 1151370x^{26} + 831204x^{25} + 576565x^{24} + 383470x^{23} + 243925x^{22}+\\ &+ 147940x^{21} + 85228x^{20} + 46420x^{19} + 23760x^{18} + 11340x^{17} + 4995x^{16}+\\ &+ 2002x^{15} + 715x^{14} + 220x^{13} + 55x^{12} + 10x^{11} + x^{10}.\end{aligned}$$

Note que a expansão da multiplicação polinomial pode significar um tormentoso problema.

5.3.4 Encontrando coeficientes de funções geradoras ordinárias.

Os exemplos anteriores mostram que encontrando a expansão polinomial das funções geradoras ordinárias, a solução dos problemas de contagem encontra-se nos coeficientes correspondentes à potência desejada. Porém, nota-se também que a expansão da série formal correspondente à função geradora ordinária adequada nem sempre é algo fácil de obter, pois nos últimos exemplos os resultados dessas expansões chegaram a algumas dezenas de termos e não é difícil imaginar que isso pode ir bem mais longe. Em algumas situações, será possível encontrar o coeficiente de uma função geradora sem a necessidade de ter que expandir todos os termos.

A partir do teorema binomial generalizado é possível extrair o teorema a seguir que será de grande utilidade para encontrar os coeficientes de funções geradoras ordinárias.

Teorema 5.1. ***(Teorema do Coeficiente Binomial Ordinário)*** *O coeficiente de x^p na expansão de $(1+x+x^2+x^3+\cdots)^n$, com $n \in \mathbb{Z}$, é igual a*

$$\binom{n+p-1}{p}. \tag{5.2}$$

Demonstração. Pelo Teorema 3.2 e substituindo x por $-x$ e u por $-n$, temos:

$$(1-x)^{-n} = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{-n}{r} (-x)^r. \tag{5.3}$$

Por sua vez,

$$(1+x+x^2+x^3+\cdots)^n = \left(\frac{1}{1-x}\right)^n = (1-x)^{-n}$$

Substituindo em 5.3, obtemos:

$$(1-x)^{-n} = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{-n}{r} (-x)^r = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{-n}{r} (-1)^r x^r.$$

Usando a definição de coeficiente binomial generalizado, fazemos:

$$\begin{aligned}
\binom{-n}{p}(-1)^p &= \frac{(-n)(-n-1)(-n-2)\cdots(-n-p+1)(-1)^p}{p!} \\
&= \frac{(-1)^p(n)(n+1)(n+2)\cdots(n+p-1)(-1)^p}{p!} \\
&= \frac{(-1)^{2p}(n)(n+1)(n+2)\cdots(n+p-1)}{p!} \\
&= \frac{[(-1)^p]^2(n)(n+1)(n+2)\cdots(n+p-1)}{p!} \\
&= \frac{(n)(n+1)(n+2)\cdots(n+p-1)}{p!} = \\
&= \binom{n+p-1}{p}.
\end{aligned}$$

□

Vejamos alguns exemplos de como calcular coeficientes através do teorema do coeficiente binomial.

Exemplo 5.21. Calcule o coeficiente de x^3 da expansão de $(1+x)^{\frac{1}{2}}$.

Pelo Teorema 5.1, o coeficiente será:

$$\binom{\frac{1}{2}-3-1}{3} = \binom{-\frac{7}{2}}{3} = \frac{\left(\frac{1}{2}-0+1\right)\cdot\left(\frac{1}{2}-1+1\right)\cdot\left(\frac{1}{2}-2+1\right)\left(\frac{1}{2}-3+1\right)}{3!} = \frac{3}{32}.$$

Exemplo 5.22. Calcule o coeficiente de x^3 da expansão de $(1-x)^{-5}$.

Pelo Teorema 5.1, o coeficiente será:

$$\binom{-5+3-1}{3}(-1)^3 = \binom{-3}{3}(-1)^3 = \frac{-3(-3-1)(-3-2)}{3!} = -\frac{3\cdot 4\cdot 5}{3!} = -10.$$

Mostraremos através de exemplos como podemos calcular os coeficientes sem necessidade de expandir a série formal correspondente à função geradora ordinária em dezenas de termos.

Exemplo 5.23. De quantas maneiras podemos extrair 3 bolas de um conjunto com 2 bolas amarelas, 3 bolas pretas e 3 bolas vermelhas?

Note que a ordem dessa extração é irrelevante. Por exemplo, se primeiro for extraída uma bola preta, depois uma amarela e por fim uma vermelha, esse conjunto será o mesmo se primeiro for extraída a bola vermelha, depois a preta e por fim a amarela, ou seja, a ordem é irrelevante. Portanto, estamos perante um caso de combinação, o que significa que poderá ser resolvido mediante uma função geradora ordinária. Por isso, formulamos a função geradora ordinária correspondente. No caso das bolas amarelas podemos retirar 0, 1 ou 2 vezes. Já as bolas pretas e vermelhas podemos retira-las 0, 1, 2 ou 3 vezes. Em termos de função geradora ordinária teremos:

$$\overbrace{(x^0+x^1+x^2)}^{amarelas}.\overbrace{(x^0+x^1+x^2+x^3)}^{pretas}.\overbrace{(x^0+x^1+x^2+x^3)}^{vermelhas}.$$

O que equivale a:

$$\overbrace{(1+x+x^2)}^{amarelas}\cdot\overbrace{(1+x+x^2+x^3)}^{pretas}\cdot\overbrace{(1+x+x^2+x^3)}^{vermelhas},$$

isto é,

$$(1+x+x^2)\cdot(1+x+x^2+x^3)^2.$$

Como $(1+x+x^2) = \frac{1-x^3}{1-x}$ e $(1+x+x^2+x^3) = \frac{1-x^4}{1-x}$, a multiplicação das funções geradoras podem ser escritas como:

$$\frac{1-x^3}{1-x} \cdot (\frac{1-x^4}{1-x})^2 = \frac{(1-x^3)\cdot(1-x^4)^2}{(1-x)^2}.$$

Neste caso, podemos desconsiderar $(1-x^4)^2$, pois sendo seu resultado igual a $(1+2x^4+x^8)$, não influenciará no expoente 3, que nos fornecerá a solução do problema. Assim sendo, fazemos:

$$\frac{(1-x^3)}{(1-x)^2} = (1-x^3)\cdot\frac{1}{(1-x)^2} = (1-x^3)\sum_{k=0}^{\infty}\binom{2+k}{k}x^k =$$

$$= (1-x^3)\cdot\left[\binom{2}{0}x^0 + \binom{3}{1}x^1 + \binom{4}{2}x^2 + \binom{5}{3}x^4 + \cdots\right] =$$

$$= (1-x^3)\cdot\left(1+3x+6x^2+10x^3+\cdots\right).$$

Aqui também não será necessário multiplicar todos os termos, apenas aqueles que resultam no expoente 3. Manipulando apenas os termos que fornecerão a resposta, temos:

$$10x^3 - x^3 = 9x^3,$$

ou seja, são possíveis 9 grupos com 3 bolas extraindo de um conjunto com 8 bolas, sendo 2 amarelas, 3 pretas e 3 vermelhas.

Exemplo 5.24. Quantas soluções existem na equação $4x_1+2x_2+x_3=16$, sendo que $x_1 \geq 1$, $x_2 \geq 1$ e $x_3 = \{0,2\}$?

Note que para $4x_1$ temos o conjunto de possibilidades $\{4,8,12,\cdots\}$, o que corresponde à seguinte série formal de potências $(x^4+x^8+x^{12}+\cdots)$. Porém, vimos que:

$$1+x^4+x^8+x^{12}+\cdots = \frac{1}{(1-x^4)}.$$

Fazendo uma pequena manipulação algébrica, obtemos:

$$x^4+x^8+x^{12}+\cdots = \frac{1}{(1-x^4)} - 1 = \frac{1-(1-x^4)}{1-x^4} = \frac{x^4}{1-x^4}. \tag{5.4}$$

Para $2x_2$ temos o conjunto de possibilidades $\{2,4,6,\cdots\}$ que corresponde à série formal $(x^2+x^4+x^6+\cdots)$, que resulta em:

$$1+x^2+x^4+x^6+\cdots = \frac{1}{(1-x^2)} \Longrightarrow x^2+x^4+x^6+\cdots = \frac{1}{(1-x^2)} - 1 = \frac{x^2}{(1-x^2)}. \tag{5.5}$$

Por fim, para x_3 temos o conjunto de possibilidades$\{0,2\}$, que corresponde a $(1+x^2)$.

Multiplicando (5.4), (5.5) e $(1+x)^2$, temos:

$$\left(\frac{x^4}{1-x^4}\right)\cdot\left(\frac{x^2}{1-x^2}\right)\cdot\left(1+x^2\right)=\frac{x^6}{(1-x^2)^2}.$$

Manipulando algebricamente essa última expressão e fazendo uso do Teorema 3.2, obtemos o seguinte:

$$\frac{x^6}{(1-x^2)^2}=x^6\cdot\frac{1}{(1-x^2)^2}=x^6\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\binom{2+k-1}{k}x^{2k}=$$

$$=x^6\cdot\left[\binom{1}{0}x^0+\binom{2}{1}x^2+\binom{3}{2}x^4+\binom{4}{3}x^6+\binom{5}{4}x^8+\binom{6}{5}x^{10}\cdots\right]=$$

$$=x^6\cdot\left(1+2x^2+3x^4+4x^6+5x^8+6x^{10}\cdots\right)=x^6+2x^8+3x^{10}+4x^{12}+5x^{14}+6x^{16}+\cdots.$$

Podemos parar a série em $6x^{16}$ pois como os coeficientes que representam o resultado da soma e os números a serem somados são inteiros e não negativos, nenhuma das variáveis pode assumir valor superior a 16. Assim, a expressão interrompida no expoente 16 já nos fornece a resposta procurada, qual seja, são possíveis 6 soluções.

A título de curiosidade, vejamos um caso no qual o uso sem critérios do Teorema 3.2 pode levar a equívocos, algo que podemos verificar no seguinte exemplo:

Exemplo 5.25. Quantas são as soluções inteiras e não negativas da equação $x+2y+3z=12$?

Usando o Teorema 3.2, temos que a variável x pode assumir os valores do conjunto $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$. Aqui a razão da progressão geométrica é x.

Já y pode assumir os valores do conjunto $\{0,2,4,6,8,10,12\}$. Se ao invés de y, a variável fosse x, a razão da progressão geométrica seria x^2, ou seja, diferente razão do caso anterior.

Por fim, z pode assumir os valores do conjunto $\{0,3,6,9,12\}$. Se ao invés de z, a variável fosse x, a razão da progressão geométrica seria x^3, ou seja, diferente razão de ambos os casos anteriores.

Nos três casos, o caso correspondente a 0, x^0, y^0 e z^0 será registrado como 1, pois $x^0=y^0=z^0=1$, e assim temos:

$$\overbrace{(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+x^8+x^9+x^{10}+x^{11}+x^{12})}^{x}$$

$$\cdot\overbrace{(1+y^2+y^4+y^6+y^8+y^{10}+y^{12})}^{y}\cdot\overbrace{(1+z^3+z^6+z^9+z^{12})}^{z}=$$

$$=\left(\frac{1}{1-x}\right)\cdot\left(\frac{1}{1-y^2}\right)\cdot\left(\frac{1}{1-z^3}\right)=$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{1+k-1}{k} x^k \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \binom{2+m-1}{m} y^{2m} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \binom{3+n-1}{n} z^{3n} \cdot (x^k)(y^{2m})(z^{3n}).$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k}{k} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \binom{m+1}{k} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+2}{k} \cdot x^k y^{2m} z^{3n}$$

Note que para obtermos a potência 12, teríamos que resolver o problema $k+2m+3m=12$, ou seja, retornaríamos ao início do problema caindo num círculo vicioso. Além de não resolver o problema, haveria ainda o grande risco de se cair no seguinte erro.

Se ao invés de x, y e z, tivéssemos montado a função geradora como sendo a multiplicação de potências todas com base x, teríamos:

$$\overbrace{(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+x^8+x^9+x^{10}+x^{11}+x^{12})}^{x_1} \cdot$$
$$\cdot \overbrace{(1+x^2+x^4+x^6+x^8+x^{10}+x^{12})}^{x_2} \cdot$$
$$\cdot \overbrace{(1+x^3+x^6+x^9+x^{12})}^{x_3}.$$

Nesse caso, poderíamos considerar polinômios, ao invés de séries, pois como interrompemos na potência 12, não será possível a quaisquer das variáveis ter potência superior, uma vez que os resultados devem ser inteiros e não negativos.

Porém, se ao invés de multiplicar os polinômios (ou séries), usássemos o teorema binomial generalizado sem os devidos cuidados, poderíamos cometer o seguinte equívoco:

$$\left(\frac{x}{1-x}\right) \cdot \left(\frac{x^2}{1-x^2}\right) \cdot \left(\frac{x^3}{1-x^3}\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{1+k-1}{k} x^k \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \binom{2+m-1}{m} x^{2m} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \binom{3+n-1}{n} x^{3n} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k}{k} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+1}{k} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+2}{k} \cdot x^{6k}.$$

Como estamos procurando x^{12} faríamos:

$$x^{12} = x^{6k} \Rightarrow 12 = 6k \Rightarrow k = 2.$$

Logo,

$$\binom{1+k-1}{k}\binom{2+k-1}{k}\binom{3+k-1}{k}x^{6k} =$$
$$= \binom{1+2-1}{2}\binom{2+2-1}{2}\binom{3+2-1}{2}x^{6(2)} =$$
$$= \binom{2}{2}\binom{3}{2}\binom{4}{2}x^{12} = 18x^{12},$$

ou seja, poderíamos ser induzidos a pensar que haveria 18 possibilidades, o que está errado, pois vimos que a resposta correta é 19. Isso mostra a necessidade do teorema 5.1 ser usado de modo criterioso, com a cautela de usa-lo apenas nas situações ou partes da resolução que envolvem séries de potência de mesma razão. Quando as séries de potência não forem da mesma razão, o método mais seguro será a expansão da multiplicação das séries ou dos polinômios, algo também nem sempre fácil sem um recurso computacional, conforme o caso.

5.3.5 Função Geradora Exponencial e Arranjos.

A função geradora **exponencial** é própria para a contagem do número de casos nos quais a ordem é relevante, ou seja, corresponde àquilo que na análise combinatória tradicional é chamado de arranjo.

Isso significa que as questões que anteriormente resolvemos usando o arranjo, com ou sem repetição, podem ser todas resolvidas pelo método das funções geradoras exponenciais.

Novamente, cabe aqui ressaltar que podem surgir situações nas quais os métodos tradicionais podem ser bastante difíceis enquanto que o método das funções geradoras exponenciais pode ser mais fácil e seguro.

Vejamos um caso já resolvido pelo método tradicional sendo solucionado pelo método das funções geradoras.

Exemplo 5.26. Em uma classe com 6 alunos, quantas comissões podemos formar com 3 membros dessa classe, sendo que um dos membros será o presidente, outro será o vice-presidente e o terceiro será o tesoureiro, usando o método das funções geradoras?

Aqui também cada um dos 6 alunos pode estar ou não no grupo a ser formado. Se um determinado aluno não fizer parte da comissão, isso será expressado como x^0, no qual o expoente 0 significa que esse determinado aluno não faz parte da comissão. Porém, se esse aluno fizer parte da comissão isso será expressado como x^1, no qual o expoente 1 significa que aquele aluno faz parte da comissão. Sintetizando, ambas as situações são expressadas pelo seguinte binômio $(x^0 + x^1) = (1 + x)$.

Vamos supor que os 6 alunos sejam Ana, Beatriz, Carlos, Diego, Edson e Fernanda, de maneira que representamos cada um desses alunos pela letra x com sub-índice correspondente à primeira letra do nome. Assim, x_A será Ana, x_B será Beatriz, x_C será Carlos, x_D será Diego, x_E será Edson e x_F será Fernanda.

Porém, diferentemente do que ocorria no caso das funções geradoras ordinárias, aqui cada elemento da comissão representa uma posição. Por isso, ao invés de chaves, usaremos parênteses, ou seja, se no caso das funções geradoras ordinárias representávamos cada comissão como sendo (a, b, c), agora usaremos (a, b, c), pois a ordem é relevante. Lembre-se que quando usamos chaves, estamos representando conjuntos, de maneira que $\{a, b, c\} = \{a, c, b\} = \{b, a, c\} = \{b, c, a\} = \{c, a, b\} = \{c, b, a\}$, ou seja, essas seis representações indicam um único conjunto, motivo pelo qual em termos de combinação ou de funções geradoras ordinárias, representam um único caso. Porém, no caso de arranjo ou de função geradora exponencial a situação é completamente diferente, por isso passaremos a usar parênteses no lugar das chaves, ou seja $(a, b, c) \neq (a, c, b) \neq (b, a, c) \neq (b, c, a) \neq (c, a, b) \neq (c, b, a)$. Isso é fácil de compreender, pois podemos associar que a primeira posição é ocupada pelo presidente, a segunda posição é ocupada pelo vice-presidente e a terceira posição pelo tesoureiro. Assim, a comissão (a, b, c) significa que Ana será a presidente, Beatriz a vice-presidente e Carlos será o tesoureiro, enquanto a comissão (c, b, a) significa que Carlos será o presidente, Beatriz a vice-presidente e Ana será a tesoureira, ou ainda a comissão (b, c, a) significa que Beatriz será a presidente, Carlos o vice-presidente e Ana será a tesoureira, e assim sucessivamente, de maneira que com as mesmas 3 pessoas podemos formar 6 comissões distintas. Portanto, note que para cada uma das combinações temos que multiplicar pelo número de permutações que podem ocorrer dentro de cada grupo. No caso, já vimos que há 20 combinações possíveis de 6 alunos tomados 3 a 3, desconsiderando a ordem. Para introduzirmos a ordem dentro dessa contagem, que seriam os arranjos, temos que multiplicar por 3!, pois cada um dos grupos com 3 elementos podem ter 3! permutações. Essa mesma situação pode ser representada através de uma função geradora exponencial:

$$f(x) = \frac{a_0}{0!}x^0 + \frac{a_1}{1!}x^1 + \frac{a_2}{2!}x^2 + \frac{a_3}{3!}x^3.$$

Temos que construir uma função geradora exponencial com essa forma, de maneira que o coeficiente nos dará a resposta.

Cada um dos alunos a serem escolhidos será representado por:

$$(x^0 + x^1) = (1 + x).$$

No qual o 0 significa que não faz parte da comissão, enquanto 1 significa que faz parte da comissão. Como o total de alunos que podem ser escolhidos são 6, elevamos à potência 6, obtendo o seguinte:

$$(1 + x)^6 = x^6 + 6x^5 + 15x^4 + 20x^3 + 15x^2 + 6x + 1.$$

Estamos querendo calcular comissões com 3 elementos, logo tomamos o termo $20x^3$ e, em seguida, multiplicamos o numerador e o denominador por 3!, de maneira a surgir a expressão $\frac{x^3}{3!}$, ou seja:

$$20x^3 = 20x^3\left(\frac{3!}{3!}\right) = (20 \cdot 3!\,)\,\frac{x^3}{3!} = 120\left(\frac{x^3}{3!}\right).$$

Isso significa que podemos formar 120 comissões com 3 alunos escolhidos em um grupo de 6 alunos, sendo um presidente, um vice-presidente e um tesoureiro.

Apenas para confirmar, $A_{6,3} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$, mesmo resultado. Aliás, esse era o resultado esperado, pois tanto usando o método da combinação sem repetição como o método das funções geradoras deve-se resultar na mesma resposta.

Essa maneira de primeiro obter a função geradora ordinária para depois configura-la em uma função geradora exponencial será possível se todos os elementos envolvidos tiverem cada um a mesma função geradora ordinária. No caso, todos os elementos tinham a mesma função geradora $(1 + x)$, por isso pudemos proceder do modo que fizemos.

Porém, isso já não mais será válido se algum dos elementos tiver uma função geradora diferente das dos demais elementos, situação em que teremos que realizar a multiplicação de cada uma das funções geradoras envolvidas. Vejamos um exemplo em que isso acontece.

Exemplo 5.27. De quantas maneiras podemos formar uma comissão científica de 3 professores, na qual um será o presidente, outro será o vice-presidente e o terceiro será o secretário, escolhidos de uma instituição de pesquisa composta por 2 professores argentinos, 3 professores brasileiros e 3 professores colombianos?

Note que os 3 membros da comissão científica podem ou não ser da mesma nacionalidade. Assim sendo, será possível que a comissão seja composta por 3 professores colombianos, por exemplo, ou por 1 professor brasileiro e dois argentinos. Note também que as comissões serão distintas se um determinado professor for o presidente da comissão e em outra for o secretário, o que significa que a ordem é relevante. Portanto, será caso de função geradora exponencial, que podemos representar do seguinte modo:

$$\begin{gathered}\text{Argentinos: } (1 + x + x^2)\\ \text{Brasileiros: } (1 + x + x^2 + x^3)\\ \text{Colombianos: } (1 + x + x^2 + x^3)\end{gathered}$$

Lembrando que 1 está associado ao expoente x^0 e significa não fazer parte da comissão, enquanto o expoente x^1 significa que tem um único de certa nacionalidade, x^2

significa dois de certa nacionalidade integrando a comissão e x^3 todos os três membros da comissão têm a mesma nacionalidade. Assim sendo, multiplicamos os polinômios observando as seguintes etapas. Em relação aos professores argentinos, temos:

$$\left(1 + x + \frac{x^2}{2!}\right).$$

Em relação aos professores brasileiros e colombianos, temos:

$$\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}\right) \cdot \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}\right) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}\right)^2 =$$

$$= 1 + 2x + \left(\frac{1}{2!} + 1 + \frac{1}{2!}\right) x^2 + \left(\frac{1}{3!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!}\right) x^3 + \left(\frac{1}{3!} + \frac{1}{2!\,2!} + \frac{1}{3!}\right) x^4 +$$

$$+ \left(\frac{1}{2!\,3!} + \frac{1}{2!\,3!}\right) x^5 + \left(\frac{1}{3!\,3!}\right) x^6.$$

Como nos interessa apenas as expressões com o expoente 3, não vamos multiplicar toda a expressão, mas apenas aquelas que resultam no expoente 3, de maneira que podemos reduzir as contas aos seguintes termos:

$$\left(1 + x + \frac{x^2}{2!}\right) \cdot \left[2x + \left(\frac{1}{2!} + 1 + \frac{1}{2!}\right) x^2 + \left(\frac{1}{3!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!}\right) x^3\right].$$

E ainda, manipulando apenas os termos que resultam no expoente x^3, teremos:

$$(2x) \cdot \left(\frac{x^2}{2!}\right) + x \cdot \left(\frac{1}{2!} + 1 + \frac{1}{2!}\right) x^2 + 1 \cdot \left(\frac{1}{3!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!}\right) x^3 = x^3 + 2x^3 + \frac{4}{3}x^3 = \frac{13}{3}x^3. \tag{5.6}$$

Para aparecer 3! no denominador de 5.6, associamos a expressão na forma $\frac{a_3}{3!}x^3$. Fazemos:

$$\frac{13}{3}x^3 = \frac{13 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1}x^3 = 26 \cdot \left(\frac{x^3}{3!}\right). \tag{5.7}$$

E assim chegamos na expressão 5.7, cujo coeficiente nos fornece a resposta, ou seja, podemos formar 26 comissões.

6 Proposta de Ensino de Análise Combinatória para o Ensino Médio

Conforme dissemos na introdução, os estudos relativos aos problemas de contagem tiveram importantes transformações nas últimas décadas, sobretudo pela crescente importância da computação na vida das sociedades contemporâneas.

Por conta das transformações, entendemos relevante que o ensino desse conteúdo matemático deve ser adaptado aos avanços que a computação introduziu na vida cotidiana, sobretudo no ensino médio, onde os alunos, em geral, já tem familiaridade e destreza no uso de computadores e seu aplicativos.

O ensino de análise combinatória ainda vigente é aquele que encontramos há várias décadas desde quando nem se imaginava que seria possível obter resultados com relativa facilidade, através de computadores, algo que atualmente é uma realidade cada vez mais presente. Isso significa que o mundo real exige avanços no conteúdo do ensino da matemática discreta que no ensino médio está restrito à análise combinatória.

Por conta disso, estamos propondo que o conteúdo relativo aos estudos de análise combinatória podem avançar no sentido de introduzir novos problemas e novas ferramentas de resolução de problemas. Esses novos problemas significam a introdução de questões mais complexas que os assuntos tradicionais que encontramos nos livros didáticos disponíveis.

Nossa proposta é de introduzir Ensino Médio, na disciplina de matemática, um conjunto de 6 aulas a serem ministradas no segundo ano, pois é geralmente neste período que o ensino de análise combinatória é ministrado.

Esse conjunto de 6 aulas seriam assim divididas:

1ª aula - Apresentação do objeto de estudos da análise combinatória. Mostrar como foi construído o conjunto dos números naturais, a partir dos axiomas de Giuseppe Peano, e sua adequação para os problemas de contagem (Definição 2.1). Ainda nesta aula, mostrar que foi a partir do 5º axioma que surgiu o princípio da indução finita como método próprio de demonstração dos teoremas da matemática discreta.

2ª aula - A segunda aula seria dedicada completamente a desenvolver e aprofundar o princípio da indução finita através de exposição teórica e realização de exemplos. Por exemplo, poderíamos apresentar aos alunos os exemplos 2.1, 2.2 e 2.3.

3ª aula - Na terceira aula seriam apresentados os conceitos de fatorial e de números binomiais, bem como a construção do triângulo de Pascal e os diversos teoremas que dai decorrem. Nesse contexto, poderíamos apresentar as definições 3.1 e 3.2 e os exemplos 3.3, 3.7, 3.8, 3.9 e3.10.

4ª aula - Na quarta aula seriam apresentadas as operações fundamentais da contagem (subseção 3.4.1), para em seguida, expor individualmente as operações de arranjos, permutações e combinações, com ou sem repetição, dando destaque às diferenças entre as mesmas. Esse conteúdo pode ser encontrado na subseção 3.4.1, teorema 3.9 e exemplos 3.20, 3.21, 3.22, 3.23, 3.25, 3.26, 3.27, 3.28, 3.31, 3.32, 3.33, 3.34, 3.36, 3.38, 3.39, 3.42, 3.43, 3.45, 3.46, 4.1 e 4.5 e a sugestão é de apresenta-los aos alunos.

5ª aula - Na quinta aula seriam apresentados outros princípios de contagem que possibilitam a resolução de problemas combinatórios mais complexos, inclusive aqui apresentaríamos novos problemas, como o dos caminhos de uma cidade à outra, bem problemas mais complexos relativos às somas lineares de números naturais com coeficiente 1, problemas estes inéditos em livros didáticos. Nessa aula poderíamos apresentar os exemplos 4.6, 4.11 e 5.25.

6ª aula - Na sexta e última aula, seriam expostas noções de funções geradoras e como elas podem resolver problemas combinatórios. Os exemplos seriam apresentados comparando com outros exemplos já resolvidos nas 4^a e 5^a aulas, para mostrar que em diversas ocasiões o método das funções geradoras facilita a solução de problemas combinatórios, bem como finalizando com uma série de exemplos que somente são possíveis serem resolvidos pelo método das funções geradoras, como o caso de somas lineares com coeficientes maiores do que 1 e o jogo de dados. Nesta última aula, de acordo com a teoria apresentada neste trabalho, apresentaríamos aos alunos a definição 5.1, seção 5.2, subseção 5.3.3 e os exemplos 5.5, 5.6, 5.15, 5.23, 5.24, 5.26 e 5.27.

Com esse conjunto de aulas, entendemos que o aluno de ensino médio poderá adquirir um conhecimento panorâmico daquilo que tradicionalmente é ministrado no ensino médio e também terá um contato inicial com o assunto de funções geradoras.

Além dos exemplos apresentados, questões de análise combinatória são encontradas em diversos vestibulares e provas, dentre as quais escolhemos algumas a título de sugestão para eventual aprofundamento.

Exemplo 6.1. (OBMEP - 2014 - nível 3)[1] O símbolo $n!$ é usado para representar o

[1] OBMEP - Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas.

produto dos números naturais de 1 a n, isto é, $n! = n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1$. Por exemplo, $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$. Se $n! = 2^{15} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdots 13$, qual é o valor de n?

Como $n! = 2^{15} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdots 13$, temos que $n \geq 13$. Por outro lado, temos:

$$13! = 13 \cdot (2^2 \cdot 3) \cdot 11 \cdot (2 \cdot 5) \cdot 3^2 \cdot 2^3 \cdot 7 \cdot (2 \cdot 3) \cdot 5 \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot 2 = 13 \cdot 11 \cdot 7 \cdot 5^2 \cdot 3^5 \cdot 2^{10}$$

que corresponde ao seguinte:

$$\frac{n!}{13!} = \frac{2^{15} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13}{13 \cdot 11 \cdot 7 \cdot 5^2 \cdot 3^5 \cdot 2^{10}} = 2^5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 14 \cdot 15 \cdot 16.$$

Por fim, temos:

$$n! = (13!) \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16 = 16!$$

Assim, $n! = 16!$, portanto, $n = 16$.

Exemplo 6.2. (UNESP-2013) Quantos são os números naturais que podem ser decompostos em um produto de quatro fatores primos, positivos e distintos, considerando que os quatro sejam menores que 30?

Os números primos, positivos, distintos e menores que 30 são dados pelo seguinte conjunto P.

$$P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$$

Assim sendo, temos dez números primos menores do que 30.

Temos que escolher quatro desses dez números primos, observando que em se tratando de produto, a ordem dos fatores não altera o resultado, evidenciando tratar-se de caso de combinação simples, sem repetição:

$$\binom{10}{4} = \frac{10!}{4!\,6!} = 210.$$

Portanto, há 210 números naturais que podem ser decompostos em um produto de quatro fatores primos, positivos e distintos, menores do que 30.

Exemplo 6.3. (FUVEST-2001) Uma classe de Educação Física de um colégio é formada por dez estudantes, todos com alturas diferentes. As alturas dos estudantes em ordem crescente, serão designadas por $h_1, h_2, \cdots, h_{10} (h_1 < h_2 < \cdots < h_9 < h_{10})$. O professor vai escolher cinco desses estudantes para participar de uma demonstração na qual eles se apresentarão alinhados, em ordem crescente de suas alturas. Dos $\binom{10}{5} = 252$ grupos que podem ser escolhidos, em quantos, o estudante cuja altura é h_7, ocupará a posição central durante a demonstração?

O nível 3 corresponde ao ensino médio

Para que o estudante de altura h_7 ocupe a posição central na demonstração, devem ser escolhidos dois estudantes dentre os estudantes de altura menor do conjunto $\{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\}$ e outros dois estudantes de altura maior do conjunto $\{h_8, h_9, h_{10}\}$. Assim, o estudante de altura h_7 ocupará a posição central em

$$\binom{6}{2} \cdot \binom{3}{2} = 45 \text{ grupos.}$$

Exemplo 6.4. (ENEM-2014) Um cliente de uma videolocadora tem o hábito de alugar dois filmes por vez. Quando os devolve, sempre pega outros dois filmes e assim sucessivamente. Ele soube que a videolocadora recebeu alguns lançamentos, sendo 8 filmes de ação, 5 de comédia e 3 de drama e, por isso, estabeleceu uma estratégia para ver todos esses 16 lançamentos. Inicialmente alugará, em cada vez, um filme de ação e um de comédia. Quando se esgotarem as possibilidades de comédia, o cliente alugará um filme de ação e um de drama, até que todos os lançamentos sejam vistos e sem que nenhum filme seja repetido. De quantas formas distintas a estratégia desse cliente poderá ser posta em prática?

Para resolver este problemas, usamos o princípio multiplicativo.

Inicialmente, o cliente começa escolhendo filmes de ação e de comédia. A cada escolha vai diminuindo um filme de cada gênero, até terminar os 5 filmes de comédia. Assim, temos:

$$(8 \cdot 5) \cdot (7 \cdot 4) \cdot (6 \cdot 3) \cdot (5 \cdot 2) \cdot (4 \cdot 1).$$

Ainda restam 3 filmes de ação para serem vistos com os 3 filmes de drama. Analogamente, temos:

$$(3 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 2) \cdot (1 \cdot 1).$$

Por sua vez, usando novamente o princípio multiplicativo, temos:

$$(8 \cdot 5) \cdot (7 \cdot 4) \cdot (6 \cdot 3) \cdot (5 \cdot 2) \cdot (4 \cdot 1) \cdot (3 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 2) \cdot (1 \cdot 1) =$$

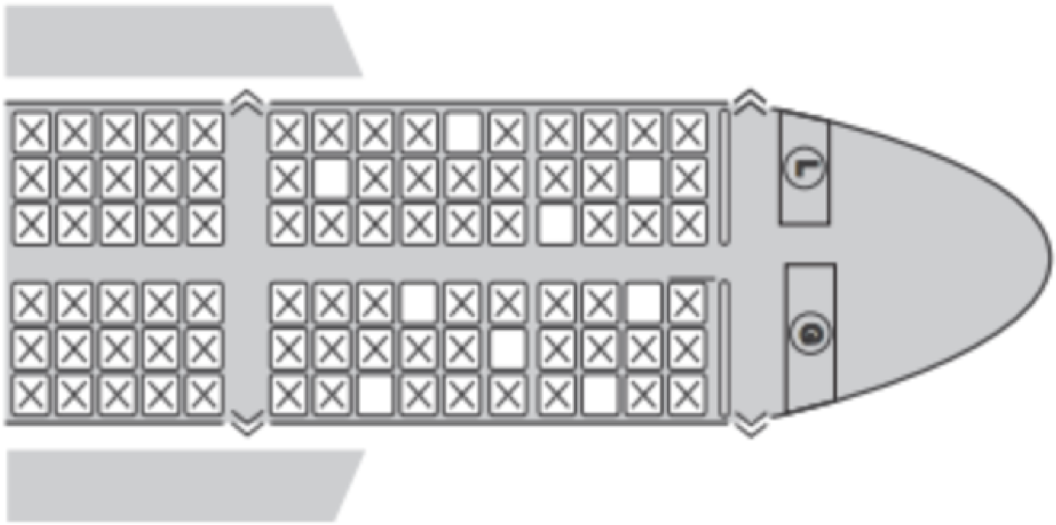
$$= (8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot (5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot (3 \cdot 2 \cdot 1) =$$

$$= 8!\, 5!\, 3!\,.$$

Exemplo 6.5. (ENEM-2015) Uma família composta por sete pessoas adultas, após decidir o itinerário de sua viagem, consultou o site de uma empresa aérea e constatou que o voo para a data escolhida estava quase lotado. Na figura, disponibilizada pelo site, as poltronas ocupadas estão marcadas com X e as únicas poltronas disponíveis são as mostradas em branco.

Calcule o número de formas distintas de se acomodar a família nesse voo.

Pela figura constata-se que há 9 lugares disponíveis a serem ocupados pelos 7 membros daquela família. Note ainda que escolhidos 7 lugares, a mudança entre os 7



membros daquela família significam novas possibilidades, o que significa um caso de arranjo simples.

$$A_{9,7} = \frac{9!}{(9-7)!} = \frac{9!}{2!} = 181.440.$$

Portanto, há 181.440 formas dessa família se acomodar no avião.

Exemplo 6.6. (PROFMAT - Exame Nacional de Qualificação - 2015) Será formada uma fila com h homens e m mulheres, onde $h \geq 2$ e $m \geq 1$.

(a) Quantas filas distintas poderão ser formadas, tendo um homem no final da fila?

(b) Qual a probabilidade de uma das filas do item (a) ter um homem na primeira posição da fila?

Em relação ao item (a), temos h possibilidades de escolher um homem para o final da fila. Em seguida, formamos uma fila com $(h+m-1)$ pessoas ($h-1$ homens e m mulheres), que pode ser feito por permutação simples $(h+m-1)!$. Assim, chegamos ao seguinte resultado:

$$h \cdot (h+m-1)!$$

Em relação ao item (b), para termos um homem no início da fila e outro no final da fila, temos h possibilidades para o homem no final da fila e $(h-1)$ homens para o começo da fila, restando a permutação simples de $(m+h-2)!$ maneiras de dispor as demais pessoas da fila ($h-2$ homens e m mulheres), resultando em

$$h \cdot (h-1) \cdot (h+m-2)!$$

Dividindo esse resultado pelo outro resultado obtido no item (a) teremos a seguinte probabilidade:

$$\frac{(h-1)\cdot(h+m-2)!}{h\cdot(h+m-1)!}=\frac{h-1}{h+m-1}.$$

Exemplo 6.7. (OBMEP - 2015 - Nível 3). Em uma Olimpíada de Matemática, foram distribuídas várias medalhas de ouro, várias de prata e várias de bronze. Cada participante premiado pôde receber uma única medalha. Aldo, Beto, Carlos, Diogo e Elvis participaram dessa olimpíada e apenas dois deles foram premiados. De quantas formas diferentes pode ter acontecido essa premiação?

Chamando cada participante pela primeira letra de seu nome, as possibilidades de escolha dos dois premiados são: AB , AC , AD , AE , BC , BD , BE , CD , CE , DE, ou seja, há 10 possibilidades. As possibilidades de escolha das duas premiações são: Ouro Ouro, Ouro Prata, Ouro Bronze, Prata Ouro, Prata Prata, Prata Bronze, Bronze Ouro, Bronze Prata e Bronze Bronze, ou seja, há 9 possibilidades. Pelo princípio multiplicativo, as diferentes formas de premiação são $10 \cdot 9 = 90$ formas diferentes.

Exemplo 6.8. (Problema dos dados de Galileo) Quantas são as possibilidades de jogando três dados obter a soma 10?[2]

Para resolver este problema, usaremos o método das funções geradoras.

Cada um dos dados tem como resultado o conjunto de números $\{1,2,3,4,5,6\}$, não importando em qual ordem os três dados estejam, o que significa a seguinte função geradora ordinária:

$$(x^1+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6).$$

Cada um dos expoentes representa um dos resultados possíveis de cada dado.

Como são três dados, elevamos ao cubo e expandimos da seguinte maneira:

$$(x^1+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^3 = x^3\cdot(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)^3.$$

Obtendo a correspondente série formal de potência, temos:

$$x^3\cdot(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)^3 = (1-x^6)\cdot(1+x+x^2+\cdots)^3 =$$

$$x^3\cdot\left[\binom{3}{0}-\binom{3}{1}x^6+\binom{3}{2}x^{12}-\binom{3}{3}x^{18}\right]\cdot\left[\binom{3-1+0}{0}+\binom{3-1+1}{1}x+\cdots\right].$$

Em seguida, para obter o coeficiente de x^7, fazemos:

$$\binom{3}{0}\cdot\binom{3-1+7}{7}-\binom{3}{1}\cdot\binom{3-1+1}{1}=36-9=27.$$

Portanto, jogando três dados, temos 27 possibilidades de obter a soma 10.

[2]Extraído do livro de Michael Townsend [10], página 110

Referências

[1] DANTE, L.R. *Matemática contexto & aplicações*, São Paulo: Ática, 2001 (1ª edição), volume 2.

[2] GARCIA, D.B. *Resolução de problemas combinatórios utilizando funções geradoras*, São Luís: Universidade Federal do Maranhão, 2013.

[3] GERSTING, J.L. *Fundamentos matemáticos para a ciência da computação*, Rio de Janeiro: LTC, 1995, tradução brasileira por Lúcio Leão Fialho e Manoel Martins Filho.

[4] IEZZI, Gelson. *Fundamentos de Matemática Elementar*, São Paulo: Atual, 1977 (3ª edição), volume 5.

[5] HUGHES-HALLET, GEASON, McCALLUM. *Cálculo de uma variável*, São Paulo, LTC, 2011 (3ª edição), tradução brasileira por Rafael José Iório Júnior.

[6] LIPSCHUTZ, S. e LIPSON, M. *Matemática discreta*, Porto Alegre: Bookman (Coleção Schaum), 2004 (2ª edição), tradução brasileira por Heloisa Brauzer Medeiros.

[7] PEANO, G. *Arithmetices principia*, Turim: Rocca, 1889.

[8] ROSEN, K.H. *Matemática discreta e suas aplicações*, São Paulo: McGraw-Hill, 2009 (6ª edição), tradução brasileira por Helena Castro e João Guilherme Giudice.

[9] SANTOS, J.P.O.; MELLO, M.; MURARI, I. *Introdução à análise combinatória*, São Paulo: Ciência Moderna, 2007 (4ª edição revista).

[10] TOWNSEND, M. *Discrete Mathematics: Applied Combinatorics and Graph Theory*, Menlo Park: The Benjamin/Cummings Publishing Company, 1987.

[11] WILF, H.S. *Generatingfunctionology*, Pennsylvania :Academic Press, 1994. <https://www.math.upenn.edu/ wilf/gfology2.pdf, acessado em 21.12.2015, às 9h42.