**Universidade Federal de São João del-Rei - UFSJ**

Campus Alto Paraopeba - CAP

**Wálmisson Régis de Almeida**

# Derivações em Anéis Polinomiais e Polinômios de Darboux

Dissertação apresentada ao Departamento de Física e Matemática da Universidade Federal de São João del-Rei como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre pelo Programa de Mestrado Profissional em rede Nacional, PROFMAT.

**Orientador: Dr. Marcelo Oliveira Veloso**

**Ouro Branco**
**2016**

Dissertação de Mestrado defendida em 15 de março de 2016 e aprovada

pela Banca Examinadora composta pelos Professores.

Prof. Dr. Marcelo Oliveira Veloso
Universidade Federal de São João del-Rei

Prof. Dr. Josué Geraldo Damasceno
Universidade Federal de Ouro Preto

Profª Dr(a) Mariana Garabini Cornelissen
Universidade Federal de São João del-Rei

**Resumo**

Este trabalho é um breve estudo sobre as derivações em anéis polinomiais e os polinômios de Darboux. Os dois resultados mais relevantes são a caracterização dos polinômios de Darboux lineares de qualquer derivação linear em $n$ variáveis e o resultado de que toda derivação homogênea em duas variáveis tem polinômio de Darboux.

**Palavras-chave:** Derivações, Derivações Homogêneas, Polinômio de Darboux.

# 1 Introdução

Ao ouvir a palavra derivação somos imediatamente remetidos às ideias de Newton e Leibniz relativas ao estudo de tangentes e taxas de variação instantânea de funções. Porém, o conceito de derivação abordado neste texto é mais amplo, uma extensão do operador derivação para qualquer estrutura de anel. Contudo, coincide com a derivada ordinária sobre o anel de polinômios em uma variável.

Em um trabalho sobre Equações Diferenciais, em 1878, no artigo *"Mémoire sur les équations différentielles algébriques du premier ordre et du premier degré"*, o matemático Jean Gaston Darboux introduziu uma nova abordagem algorítmica para solução de algumas dessas ED's, na qual surgem os polinômios de Darboux. Esses polinômios apareceram como "pedaços" ou partes dos fatores integrantes para a solução de algumas ED's, como mostrado em [4]:

> *"Paralelamente, Darboux, em 1878, deu os primeiros passos para determinar algoritmicamente integrais primeiras, baseando o seu método em uma ligação entre a geometria algébrica e a busca dessas integrais. Ele mostrou como construir as integrais primeiras de um campo vetorial polinomial que possui um número suficiente de curvas algébricas invariantes. Essas curvas são definidas por polinômios: os assim chamados polinômios de Darboux. Em geral, a tarefa mais complexa envolvendo os métodos darbouxianos é a determinação dos próprios polinômios de Darboux."*

O principal objetivo desse trabalho é estudar as derivações polinomiais e os polinômios de Darboux, em especial as derivações homogêneas em duas variavéis e as lineares em várias variáveis. Além disso, servir como texto suplementar para estudantes que desejam dar os primeiros passos no estudo das derivações de um anel. As derivações de um anel estão relacionadas a vários problemas, como a Conjectura do Jacobiano e o Decimo Quarto Problema de Hilbert, em diversas áreas da Matemática, como Geométria Álgebrica e Equações Diferenciais (veja [3], [4], [7], [8] e [9]), o que justifica o nosso interesse pelo tema.

A referência principal deste texto é o livro de Andrzej Nowicki, *Polynomial derivations and their rings of constants*, [9], onde encontra-se a maioria dos resultados aqui enunciados.

Neste texto procuramos utilizar conceitos álgebricos elementares, e apresentar diversos exemplos com o propósito de facilitar a assimilação do conteúdo pelo leitor.

Na seção 2 listamos alguns dos resultados básicos sobre o anel polinomial em várias variáveis. Na seção 3, definimos a aplicação derivação sobre um anel comutativo com unidade e listamos os resultados básicos que são utilizados direta ou indiretamente ao longo do texto. Em especial, caracterizamos as derivações sobre um anel polinomial com coeficientes complexos, Teorema 3.1. Na subseção 3.1 explicitamos a relação entre derivações lineares e matrizes quadradas. Além disso, exibimos uma caracterização das derivações localmente nilpotentes e lineares, Teorema 3.4.

Na seção 4, é definido o polinômio de Darboux de uma derivação polinomial, os resultados básicos sobre polinômios de Darboux e alguns exemplos. Logo à seguir, iniciamos a procura por polinômios de Darboux em certas derivações. Na seção 5 estudamos os polinômios de Darboux lineares de uma derivação linear e um interessante resultado (Teorema 5.1) que relaciona derivações polinomiais e polinômios de Darboux aos autovetores de certa matriz. A discussão se encerra na seção 6, onde verificamos que toda derivação homogênea do anel polinomial com duas variáveis tem polinômio de Darboux, Teorema 6.1 .

# 2 Anéis Polinomiais

As derivações sobre anéis polinomiais são o objeto central desse trabalho. Então, nada mais conveniente iniciarmos com a formalização dos anéis polinomiais em várias variáveis e suas operações. Nessa seção, serão apresentadas as notações relativas ao estudo de monômios e polinômios, propriedades operatórias e algumas definições importantes no contexto geral do trabalho, como os conceitos de grau e fatoração nesses anéis.

Um ***monômio*** em $n$ variáveis $x_1, \dots, x_n$ é uma expressão algébrica

$$ax_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\dots x_n^{\alpha_n},$$

onde $a$ é um número complexo, chamado de coeficiente, e os inteiros não-negativos $\alpha_1, \dots \alpha_n$ são chamados de expoentes da respectiva variável.

Para facilitar a leitura, usamos a notação $m = ax^\alpha$ para denotar um monômio, onde $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$. O grau total de um monômio (denotado por $gr(m)$) é a soma de todos os expoentes, ou seja,

$$gr(x^\alpha) = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n.$$

Quando $\alpha = (0, 0, \dots, 0)$ temos o monômio constante $ax^\alpha = a$. Logo, todo número complexo é um monômio. E tem grau zero se for não nulo e grau $-\infty$ se for zero, o monômio nulo.

**Exemplo 2.1.** *Considere o monômio $m = 5x_1^2x_2x_3^4x_4^3$. Veja que $m$ tem coeficiente igual a cinco e grau*

$$gr(m) = 2 + 1 + 4 + 3 = 10.$$

A soma entre dois monômios $m = ax^\alpha = ax_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\dots x_n^{\alpha_n}$ e $n = bx^\beta = x_1^{\beta_1}x_2^{\beta_2}\dots x_n^{\beta_n}$ só é possível se $\alpha = \beta$, ou seja, $\alpha_1 = \beta_1$, $\alpha_2 = \beta_2$, ..., $\alpha_n = \beta_n$. A soma é o monômio com o mesmos expoentes cujo coeficente é a soma dos outros dois coeficientes

$$m + n = (a + b)\, x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}$$

**Exemplo 2.2.** *A soma entre* $m = (-2 + 5i)x_1^2x_2x_3^5$ *e* $n = (3 - 2i)x_1^2x_2x_3^5$ *é o monômio*

$$m + n = ((-2 + 3) + (5 - 2)i)x_1^2x_2x_3^5 = (1 + 3i)x_1^2x_2x_3^5$$

O produto entre dois monômios $m = ax^\alpha = ax_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\dots x_k^{\alpha_k}$ e $n = bx^\beta = bx_1^{\beta_1}x_2^{\beta_2}\dots x_p^{\beta_p}$ com $p > k$ é um monômio, cujo coeficiente é o produto de $a$ por $b$ com variáveis $x_1$, ..., $x_p$ e respectivos expoentes obtidos como soma dos expoentes das variáveis correspondentes

$$m \cdot n = ab\, x_1^{\alpha_1+\beta_1}x_2^{\alpha_2+\beta_2}\cdots x_p^{\alpha_p+\beta_p}$$

onde os expoentes das variáveis de $m$ para valores maiores que $k$ são considerados nulos.

**Exemplo 2.3.** *O produto entre* $m = (1 + 2i)x_1^3x_2^2x_3^5$ *e* $n = (-4 - i)x_1^2x_2x_3^4x_4^3$ *é o monômio*

$$m_1 \cdot m_2 = (1 + 2i) \cdot (-4 - i)x_1^{3+2}x_2^{2+1}x_3^{5+4}x_4^{0+3} = (-2 - 9i)x_1^5x_2^3x_3^9x_4^3$$

Um ***polinômio em $n$ variáveis com coeficientes complexos***, $p$, é uma combinação linear de monômios denotado por

$$p = \sum a_\alpha x^\alpha$$

onde $a_\alpha \quad (\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n))$ é o coeficiente do monômio $x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\dots x_n^{\alpha_n}$.

Neste texto utilizamos a notação $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ para representar o conjuntos dos polinômios em $n$ variáveis com coeficientes complexos. Quando o número de variáveis é pequeno, é comum denotar as variáveis por $x$, $y$, $z$, $t$ e $s$. Por exemplo, $\mathbb{C}[x,\, y]$ é o anel polinomial em duas variavéis, $\mathbb{C}[x,\, y,\, z]$ é o anel polinomial em três variavéis e $\mathbb{C}[x,\, y,\, z,\, t]$ é o anel polinomial em 4 variáveis.

**Exemplo 2.4.** *O polinômio*

$$p = (-1 + i)x^3y^4z^2t + (1 - \sqrt{2}i)x^2y^5z^3t^4 + (\pi + 2i)xz^2t^3$$

*é um polinômio em 4 variáveis cujos coeficientes são* $a_{(3,4,2,1)} = (-1+i)$, $a_{(2,5,3,4)} = (1-\sqrt{2}i)$ *e* $a_{(1,0,2,3)} = (\pi + 2i)$. *Enquanto o polinômio*

$$q = (2 + 3i)x^3y + 5xy^2 - ixy$$

*é um polinômio em duas variáveis* ($q \in \mathbb{C}[x, y]$) *com coeficientes* $\alpha_{(3,1)} = 2 + 3i$, $\alpha_{(1,2)} = 5$ *e* $\alpha_{(1,1)} = -i$.

O ***grau de um polinômio*** $p$, $(gr(p))$, é o maior grau de seus monômios. Ou seja,

$$gr(p) = max\{\alpha\} = max\{\alpha_1 + \alpha_2 \cdots + \alpha_n\}.$$

No exemplo anterior, temos $gr(p) = 14$ e $gr(q) = 4$. Um resultado importante envolve o grau do produto de dois polinômios, e será utilizado no texto:

**Teorema 2.1.** *Sejam* $f$, $g \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$. *Então*

1. $gr(fg) = gr(f) + gr(g)$;
2. $gr(f + g) \leq max\{gr(f), gr(g)\}$.

**Demonstração**. Uma demonstração desse resultado pode ser vista em [2]. □

No anel polinomial temos as seguintes operações:

- **Adição**: Dados dois polinômios $p = \sum_{\alpha} a_\alpha x^\alpha$ e $q = \sum_{\beta} b_\beta x^\beta$ em $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ temos

$$p + q = \sum_{\alpha=\beta}(a_\alpha + b_\beta)x^\alpha + \sum_{\alpha\neq\beta} a_\alpha x^\alpha + \sum_{\alpha\neq\beta} b_\beta x^\beta$$

o polinômio $p + q$ obtido ao somar os monômios que têm os expoentes iguais para as respectivas váriaveis, $\alpha = \beta$.

- **Multiplicação**: Dados dois polinômios $p = \sum_{\alpha} a_\alpha x^\alpha$ e $q = \sum_{\beta} b_\beta x^\beta$ em $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$

obtemos o polinômio

$$p \cdot q = \sum_{\alpha;\beta}(a_\alpha b_\beta)x^{\alpha+\beta}$$

onde $\alpha + \beta = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2 \ldots \alpha_n + \beta_n)$. Ou seja, multiplicamos cada monômio de $p$ por cada monômio de $q$. Assim $p \cdot q$ é a soma destes produtos de monômios. É usual suprimir o símbolo da multiplicação "$\cdot$", ou seja, geralmente usamos $pq$ em vez de $p \cdot q$ .

**Exemplo 2.5.** *Dado os polinômios*

$$p = ix^5 + (2+i)x^3y^2 + 2x^2y + (1-i)xy^2 - 2y^3 \text{ e } q = 2x^3y^2 + (-3+i)x^2y + 5y^3$$

*temos*

$$p + q = ix^5 + (4+i)x^3y^2 + (-1+i)x^2y + (1-i)xy^2 + 3y^3$$

*e*

$$\begin{aligned} pq \;=\; & 2ix^8y^2 + (-1-3i)x^7y + (4+2i)x^6y^4 + (-3+4i)x^5y^3 + (2-2i)x^4y^4 + (-6+2i)x^4y^2 + \\ & (6+5i)x^3y^5 + (-2+4i)x^3y^3 + (6-2i)x^2y^5 + 10x^2y^4 + (5-5i)xy^5 + -10y^6 \end{aligned}$$

As propriedades da adição e multiplicação de polinômios são listadas na Proposição 2.1, cuja verificação é bem imediata e por isso omitimos deste texto. Qualquer conjunto munido de uma "soma" e uma "multiplicação" que satisfaçam estas propriedades é conhecido como ***anel comutativo com unidade***. Ao longo deste texto a palavra ***anel*** significa anel comutativo com unidade.

**Proposição 2.1.** *A soma e multiplicação no anel polinomial $A = \mathbb{C}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ têm as seguintes propriedades*

1. $(f + g) + h = f + (g + h)$ *e* $(fg)h = f(gh)$*;*
2. $f + g = g + f$ *e* $fg = gf$*;*
3. *Para todo* $f \in A$ *existe* $0 \in A$ *tal que* $f + 0 = f$ *;*
4. *Para todo* $f \in A$ *existe* $-f \in A$ *tal que* $f + (-f) = 0$*;*
5. *para todo* $f \in A$ *existe* $1 \in A$ *tal que* $1 \cdot f = f \cdot 1 = f$*.*

$\square$

Um polinômio $f$ é dito ***invertível*** se existe um polinômio $g$ tal que $fg = 1$. Caso contrário, dizemos que $f$ é ***não invertível***.

**Exemplo 2.6.** *O polinômio* $f = 2 - 4i$ *é invertível. De fato, sendo* $g = \frac{1}{10} + \frac{1}{5}i$*, temos*

$$fg = (2 - 4i)\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{5}i\right) = 1$$

*Já o polinômio* $p = (2 + i)x^2y^2 + 3xy^2$ *é não invertível, pois se existisse* $q$ *tal que* $pq = 1$*, teríamos*

$$gr(pq) = gr(p) + gr(q) = gr(1) \Rightarrow 4 + gr(q) = 0 \Rightarrow gr(q) = -4,$$

*absurdo.*

É fácil ver que no anel polinomial $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ o conjunto dos elementos invertíveis é igual ao corpo dos números complexos exceto o zero, ou seja, $\mathbb{C}^*$.

No conjunto dos inteiros $\mathbb{Z}$, um elemento $p$ não nulo é chamado de primo se é não invertível ($p \neq 1$ e $p \neq -1$) e para quaisquer $a$, $b$ em $\mathbb{Z}$ tais que $p = ab$ temos que $a$ ou $b$ é invertível em $\mathbb{Z}$ ($a = 1$ e $b = -1$). De forma análoga ao conceito de número primo, dizemos que um polinômio não nulo $p$ em $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ é um ***polinômio irredutível*** se $p$ não é invertível e não tem fatoração trivial, ou seja, para quaisquer $q$, $r \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ tais que $p = q \cdot r$ temos $q$ ou $r$ invertível ($q \in \mathbb{C}^*$ ou $r \in \mathbb{C}^*$). Caso contrário dizemos que $p$ é ***composto*** ou ***redutível***.

**Exemplo 2.7.** *Todo polinômio linear* $p = ax + b$ *em* $\mathbb{C}[x]$ *e* $a \neq 0$ *é irredutível. De fato, sejam* $f$ *e* $g \in \mathbb{C}[x]$ *tais que*

$$p = f \cdot g.$$

*Neste caso temos*

$$1 = gr(p) = gr(f \cdot g) = gr(f) + gr(g).$$

*Então* $gr(f) = 0$ *e* $gr(g) = 1$ *ou* $gr(f) = 1$ *e* $gr(g) = 0$*. No primeiro caso* $f$ *é constante e no segundo caso* $g$ *é constante. Logo,* $p$ *é irredutível.*

**Exemplo 2.8.** *O polinômio* $p = (-1 + 2i)x^2y^2 + (1 + 2i)xy^2 + (2 + i)xy + (2 - 1)y$ *é um polinômio composto em* $\mathbb{C}[x, y]$*, pois*

$$p = (ixy + 1)[(2 + i)xy + (2 - i)y].$$

A irredutibilidade depende do corpo dos coeficientes. Um polinômio pode ser redutível em um dado corpo e ser irredutível em outro. Como vemos no exemplo a seguir.

**Exemplo 2.9.** *O polinômio* $p(x) = x^2 + 4$ *é um polinômio irredutível em* $\mathbb{R}[x]$*, mas é composto, em* $\mathbb{C}[x]$*, visto que* $p(x) = (x + 2i)(x - 2i)$*.*

Dois polinômios $f$ e $g$ em $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ são ***co-primos*** quando $f$ e $g$ não possuem fator comum em suas decomposições. É usual indicar que $f$ e $g$ são co-primos com a notação $mdc(f,\, g) = 1$.

**Exemplo 2.10.** *Os polinômios* $f, g \in \mathbb{C}[x]$*, com* $f = 5x^2 + 20$ *e* $g = 2x^3 - 6x^2 + 2x - 6$ *são co-primos, visto que suas fatorações resultam em*

$$f = 5(x - 2i)(x + 2i) \text{ e } g = 2(x - 3)(x + i)(x - i).$$

*Como não possuem fator comum,* $mdc(f, g) = 1$*.*

**Exemplo 2.11.** *Os polinômios* $f,\, g \in \mathbb{C}[x, y]$*, com* $f = 3x^3 + 2x^2y - 5xy^2 + 2xy - 2y^2$ *e* $g = 4x^4y - 4x^3y^2 - 5x^2y^2 + 5xy^3$ *não são co-primos. De fato, temos*

$$f = (3x^2 + 5xy + 2y)(x - y) \text{ e } g = (4x^3y - 5xy^2)(x - y).$$

*Como os dois polinômios têm pelo menos o fator* $x - y$ *em comum (*$x - y$ *divide* $f$ *e* $g$*), temos* $mdc(f, g) \neq 1$*.*

**Proposição 2.2.** *Sejam* $f,\, g$ *e* $h \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$*. Se* $f$ *divide* $gh$ *e* $mdc(f,\, g) = 1$*, então* $f$ *divide* $h$*.*

**Demonstração**. A demonstração pode ser vista em [2] para anéis polinomiais em duas variáveis. O resultado pode ser estendido, visto que $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ é um domínio de fatoração única. $\square$

# 3 Derivações

Nesta seção introduzimos o conceito de derivação sobre anéis, contudo o foco principal são as derivações em um anel polinomial de $n$-variavéis com coeficientes nos números complexos, $\mathbb{C}$. Em seguida, apresentamos alguns resultados sobre as derivações localmente nilpotentes (LND's) e sobre as derivações lineares. Dois teoremas finalizam a seção, relativos às derivações triangulares e as lineares.

Uma aplicação $D$ sobre um anel $A$, $D : A \to A$, é dita uma ***derivação*** em $A$ se

- D(a+b) = D(a)+ D(b)
- D(ab) = aD(b) + bD(a),

para todos $a$ e $b \in A$.

A regra referente ao produto de dois elementos do anel é conhecida como a ***Regra de Leibniz***. Portanto o operador derivação $D$ respeita a soma e satisfaz a Regra de Leibniz. Chamaremos $Der(A)$ o conjunto de todas as derivações no anel $A$. Denotamos por $D^n$ a $n$-ésima composição da derivação $D$, sendo $D^0(a) = a$ a aplicação identidade do anel.

**Exemplo 3.1.** *No anel das matrizes quadradas de ordem $n$, $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$, fixada uma matriz $M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$, definimos a aplicação em $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ por*

$$D(A) = MA - AM.$$

*Vejamos que $D$ é uma derivação. De fato, para quaisquer matrizes quadradas $A$ e $B$, temos*

$$\begin{aligned} D(A+B) &= M(A+B) - (A+B)M \\ &= MA + MB - AM - BM \\ &= (MA - AM) + (MB - BM) \\ &= D(A) + D(B) \end{aligned}$$

*E vale a regra de Leibniz*

$$\begin{aligned} D(AB) &= M(AB) - (AB)M \\ &= MAB - AMB + AMB - ABM \\ &= (MA - AM)B + A(MB - BM) \\ &= D(A)B + AD(B). \end{aligned}$$

Vejamos alguns resultados básicos para o operador $D$.

**Lema 3.1.** *Seja $A$ um anel e $D \in Der(A)$. Se $D(a) = 0$, então teremos $D(ab) = aD(b)$.*

**Demonstração**. De fato, pela regra de Leibniz temos

$$D(ab) = aD(b) + bD(a) = aD(b) + b(0) = aD(b).$$

$\square$

Seja $D \in Der(A)$. Se $D(B) = 0$ para um subanel $B$ do anel $A$ dizemos que $D$ é uma $B$-***derivação*** do anel $A$. O conjunto das $B$-derivações do anel $A$ é denotado por $Der_B(A)$. Neste texto, toda derivação sobre o anel polinomial $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ é uma $\mathbb{C}$-derivação.

**Lema 3.2.** *Seja $D_{\mathbb{Q}}$ uma derivação sobre o anel $A$. Dados $a$ e $b \in A$ temos que*

$$D^k(ab) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} D^{k-i}(a)D^i(b).$$

**Demonstração**. Vamos provar a afirmativa acima por indução em $k$. Para $k = 1$ temos

$$\begin{aligned} D^1(ab) &= \sum_{i=0}^{1} \binom{1}{i} D^{1-i}(a)D^i(b) \\ &= \binom{1}{0} D^{1-0}(a)D^0(b) + \binom{1}{1} D^{1-1}(a)D^1(b) \\ &= bD(a) + aD(b). \end{aligned}$$

Agora suponha a afirmação válida para todo $n < k$. Então

$$\begin{aligned} D^k(ab) &= D(D^{k-1}(ab)) \\ &= D\left(\sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} D^{k-1-i}(a)D^i(b)\right) \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} D\left(D^{k-1-i}(a)D^i(b)\right) \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} (D^{k-i}(a)D^i(b) + D^{k-1-i}(a)D^{i+1}(b)) \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} (D^{k-i}(a)D^i(b)) + \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} (D^{k-1-i}(a)D^{i+1}(b)) \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} (D^{k-i}(a)D^i(b)) + \sum_{i=1}^{k} \binom{k-1}{i-1} (D^{k-i}(a)D^i(b)) \\ &= D^k(a)b + \sum_{i=1}^{k-1} \binom{k-1}{i} (D^{k-i}(a)D^i(b)) + \sum_{i=1}^{k} \binom{k-1}{i-1} (D^{k-i}(a)D^i(b)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D^k(ab) &= D^k(a)b + \sum_{i=1}^{k-1} \left( \binom{k-1}{i-1} + \binom{k-1}{i} \right) (D^{k-i}(a)D^i(b)) + aD^k(b) \\ &= D^k(a)b + \sum_{i=1}^{k-1} \binom{k}{i} (D^{k-i}(a)D^i(b)) + aD^k(b) \\ &= \sum_{i=0}^{k} D^{k-i}(a)D^i(b). \end{aligned}$$

Na segunda igualdade utilizamos a hipótese de indução e na penúltima a Relação de Stiffel $\binom{k-1}{i-1} + \binom{k-1}{i} = \binom{k}{i}$.

□

**Lema 3.3.** *Seja $A$ um anel comutativo. Se $D$ e $E \in Der(A)$, então*

1. *$aD \in Der(A)$ para todo $a \in A$;*

2. *$D + E \in Der(A)$.*

**Demonstração**. Sejam $b, c \in A$. Observe que

$$aD(b + c) = a[D(b + c)] = a[D(b) + D(c)] = aD(b) + aD(c).$$

e

$$(aD)(bc) = a[D(bc)] = a[bD(c) + cD(b)] = baD(c) + caD(b) = b(aD)(c) + c(aD)(b).$$

Assim $aD$ preserva a soma e a regra de Leibniz. Portanto $aD$ é uma derivação em $A$. O item (2) é verificado de forma análoga.

□

O Lema 3.3 mostra que a soma de duas derivações e o múltiplo de uma derivação por um elemento do anel também são derivações.

**Lema 3.4.** *Seja $D$ uma derivação do anel $A$. Então para todo $a \in A$ e todo $n \in \mathbb{N}$ temos a igualdade*

$$D(a^n) = na^{n-1}D(a).$$

**Demonstração**. Vamos verificar a igualdade por indução em $n$. Para $n = 1$ note que

$$D(a^1) = D(a) = 1D(a) = 1.1D(a) = 1a^{1-1}D(a).$$

Agora suponha a igualdade válida para $n = k > 1$, ou seja, $D(a^k) = ka^{k-1}D(a)$. Assim

$$
\begin{aligned}
D(a^{k+1}) &= D(aa^k) \\
&= aD(a^k) + a^k D(a) \\
&= aka^{k-1}D(a) + a^k D(a) \\
&= ka^k D(a) + a^k D(a) \\
&= (k+1)a^k D(a).
\end{aligned}
$$

Portanto $D(a^{k+1}) = (k+1)a^k D(a)$ e a afirmação é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

$\square$

Com os resultados anteriores, temos todos elementos necessários para enunciar o teorema que caracteriza as derivações do anel $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$.

**Teorema 3.1.** *Se $D$ é uma $\mathbb{C}$-derivação em $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$, então $D$ é da forma*

$$
D = D(x_1)\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + D(x_n)\frac{\partial}{\partial x_n}
$$

*onde $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ é a derivada parcial em relação a variável $x_i$.*

**Demonstração**. Vamos verificar o resultado em duas variáveis. O caso com $n \geq 3$ variáveis é análogo. Seja $p \in \mathbb{C}[x, y]$, então $p = \sum\limits_{i,j} a_{ij}x^i y^j$, onde $a_{ij} \in \mathbb{C}$. Assim

$$
\begin{aligned}
D(p) &= D\left(\sum_{i,j} a_{ij}x^i y^j\right) \\
&= \sum_{i,j} a_{ij} D(x^i y^j) \\
&= \sum_{i,j} a_{ij}[D(x^i)y^j + x^i D(y^j)] \\
&= \sum_{i,j} a_{ij}[ix^{i-1}D(x)y^j + x^i jy^{j-1}D(y)] \\
&= D(x)\sum_{i} ia_{ij}x^{i-1}y^j + D(y)\sum_{j} ja_{ij}x^i y^{j-1} \\
&= D(x)\frac{\partial}{\partial x}(p) + D(y)\frac{\partial}{\partial y}(p).
\end{aligned}
$$

Na segunda igualdade usamos que $D$ é uma $\mathbb{C}$-derivação, na terceira a regra de Leibniz, e na quarta o Lema 3.4.

$\square$

**Corolário 3.1.** *Dados $f_1, \ldots, f_n$ polinômios em $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ existe uma única derivação tal que $D(x_i) = f_i$.*

**Demonstração**. Considere $D = f_1 \dfrac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + f_n \dfrac{\partial}{\partial x_n}$ e note que $D(x_i) = f_i$.

$\square$

É fácil notar que a definição de uma derivação em $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ envolve simplesmente a escolha de cada $D(x_i)$.

**Exemplo 3.2.** *Considere uma derivação $D \in \mathbb{C}[x, y, z]$. Tome $D(x) = 2x^3yz^2 + ix^2y^5$, $D(y) = x^4y^3z^3 - 2xy^2z^2$ e $D(z) = 2x^2yz + (3 + 2i)x^2z^3 + 5y^3z^4$. Teremos:*

$$D = (2x^3yz^2 + ix^2y^5)\frac{\partial}{\partial x} + (x^4y^3z^3 - 2xy^2z^2)\frac{\partial}{\partial y} + [2x^2yz + (3 + 2i)x^2z^3 + 5y^3z^4]\frac{\partial}{\partial z}.$$

## 3.1 Derivações Lineares

Uma derivação $D$ no anel polinomial $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ é dita ***linear*** se

$$D(x_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$$

para todo $i = 1, \ldots, n$, onde $a_{ij}$ são números complexos. A matriz $[\mathbf{D}] = [\mathbf{a_{ij}}]$ é dita ***matriz associada*** à derivação $D$.

Assim para obter uma derivação linear basta escolher para cada $D(x_i)$ uma combinação linear das variáveis $x_1, \ldots, x_n$.

**Exemplo 3.3.** *A derivação $D$ do anel polinomial $\mathbb{C}[x, y, z]$ definida por*

$$D(x) = x + y + z, D(y) = 2x - iz \text{ e } D(z) = 3iy.$$

*é linear. Utilizando a notação matricial temos*

$$\begin{bmatrix} D(x) \\ D(y) \\ D(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -i \\ 0 & 3i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

*Observe que*

$$[D] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -i \\ 0 & 3i & 0 \end{bmatrix}$$

*é a matriz associada à derivação linear $D$.*

**Lema 3.5.** *Seja $D$ uma derivação linear do anel polinomial $\mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]$. A $k$-ésima composição $D^k(x_i)$ pode ser dada, na forma matricial, por*

$$\begin{bmatrix} D^k(x_1) \\ D^k(x_2) \\ \vdots \\ D^k(x_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

*em que $[a_{ij}]$ é a matriz da derivação $D$.*

**Demonstração**. Provaremos a afirmativa por indução em $k$ no anel $\mathbb{C}[x, y]$. O caso $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ é idêntico. Seja

$$D = (ax + by)\frac{\partial}{\partial x} + (cx + dy)\frac{\partial}{\partial y}$$

onde $a, b, c, d \in \mathbb{C}$. Para $k = 1$, o resultado é trivial, já que $D(x) = ax + by$ e $D(y) = cx + dy$, que na forma matricial produz:

$$\begin{bmatrix} D(x) \\ D(y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^1 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Suponha a igualdade matricial válida $n = k > 1$. Ou seja, $\begin{bmatrix} D^k(x) \\ D^k(y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.
Para facilitar a notação considere $\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^k$. Vejamos o que ocorre para $n = k+1$.

$$\begin{aligned} D^{k+1}(x) &= D(D^k(x)) \\ &= D(px + qy) \\ &= (ax + by)\frac{\partial}{\partial x}(px + qy) + (cx + dy)\frac{\partial}{\partial y}(px + qy) \\ &= pax + pby + qcx + qdy \\ &= (pa + qc)x + (pb + qd)y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D^{k+1}(y) &= D(D^k(y)) \\ &= D(rx + sy) \\ &= (ax + by)\frac{\partial}{\partial x}(rx + sy) + (cx + dy)\frac{\partial}{\partial y}(rx + sy) \\ &= rax + rby + scx + sdy \\ &= (ra + sc)x + (rb + sd)y \end{aligned}$$

e assim

$$\begin{bmatrix} D^{k+1}(x) \\ D^{k+1}(y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} pa+qc & pb+qd \\ ra+sc & rb+sd \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Como

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}.$$

temos

$$\begin{bmatrix} D^{k+1}(x) \\ D^{k+1}(y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{k+1} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

□

## 3.2 Derivações Localmente Nilpotentes

Seja $A$ um anel. Uma derivação $D$ sobre $A$ é uma ***derivação localmente nilpotente*** ($LND$) se, para cada elemento $a$ do anel $A$, existe um número natural $n$ tal que $D^n(a) = 0$. O menor número natural $n$ tal que $D^n(a) = 0$ e $D^{n-1}(a) \neq 0$ é o ***índice de nilpotência de*** $a$ com relação a derivação $D$.

**Exemplo 3.4.** *Seja $D \in \mathbb{C}[x, y]$ a derivação definida por $D = 1\frac{\partial}{\partial x} + 0\frac{\partial}{\partial y}$. É fácil ver que $D$ é $LND$, pois $D(p) = 0$ para todo $p \in \mathbb{C}[y]$ e $D^n(q) = 0$ para todo $q = \sum_{i,j} a_{ij}x^iy^j$ e $n = max\{i\} + 1$. Veja que para $p = ix^2y + (2-i)xy + 5y^3$ temos*

$$D^1(p) = D(p) = \frac{\partial}{\partial x}(ix^2y + (2-i)xy + 5y^3) = 2ixy + (2-i)y + 0,$$

$$D^2(p) = \frac{\partial}{\partial x}(2ixy + (2-i)y) = 2iy + 0 \ \ e \ D^3(p) = \frac{\partial}{\partial x}(2iy) = 0.$$

*Como $D^3(p) = 0$ e $D^2(p) \neq 0$ o índice de nilpotência de $p$ é 3, em relação a derivação $D$.*

**Exemplo 3.5.** *Seja $D \in \mathbb{C}[x, y]$. A derivação $D = x^3\frac{\partial}{\partial x} + (x+y)\frac{\partial}{\partial y}$ não é $LND$. Observe que para $x$ temos*

$$D(x) = x^3\frac{\partial}{\partial x}(x) + (x+y)\frac{\partial}{\partial y}(x) = x^3 + 0 = x^3,$$

$$D^2(x) = D(D(x)) = D(x^3) = 3x^2D(x) = 3x^2(x^3) = 3x^5, \ \ e$$

$$D^3(x) = D(D^2(x)) = D(3x^5) = 15x^2D(x) = 15x^2x^3 = 15x^7.$$

*É fácil notar que o expoente de $x$ é crescente, que implica $D^n(x) \neq 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.*

**Lema 3.6.** *Seja $D$ uma derivação do anel $A$ tal que $D^k(a) = 0$ e $D^l(b) = 0$, onde $a$, $b \in A$ e $k$, $l \in \mathbb{N}$. Então*

1. *existe $r$ tal que $D^r(a+b)=0$.*

2. *existe $r$ tal que $D^r(ab)=0$.*

3. *para todo $n$ existe $r$ tal que $D^r(a^n)=0$.*

4. *para todos $n$ e $m$ existe $r$ tal que $D^r(a^n b^m)=0$.*

**Demonstração**.

1. Segue por linearidade que $D^r(a+b)=D^r(a)+D^r(b)$ para todo $r$. Então para $r=k+l$ temos $D^r(a+b)=D^r(a)+D^r(b)=0+0$.

2. Segue do Lema 3.2 que
$$D^r(ab)=\sum_{i=0}^{r}\binom{r}{i}D^{r-i}(a)D^i(b).$$
para qualquer inteiro positivo $r$. Tome $r=k+l$. Vamos provar que $r$ tem a propriedade desejada. De fato, se $i\le l$ temos $k\le r-i$, pois
$$k=k+l-l\le k+l-i=r-i,$$
e consequentemente $D^{r-i}(a)=0$. Caso $r-i<k$, teremos $i>l$ pois
$$l=r-k=r-k+i-i=(r-i)-k+i<k-k+i=i$$
e, então, $D^i(b)=0$, verificando a afirmação.

3. Vamos provar por indução em $n$. Para $n=1$, temos por hipótese que $D^k(a^1)=D^k(a)=0$ logo existe $r=k$ como desejado. Agora vamos supor que existe $r_1$ tal que $D^{r_1}(a^n)=0$, para $n>1$. Lembre que $a^{n+1}=a(a^n)$. Como $D^k(a)=0$, por hipótese, e $D^{r_1}(a^n)=0$ por hipótese de indução, segue do item (2) que existe $r$ tal que $D^r(a^{n+1})=D^r(aa^n)=0$, verificando a afirmação.

4. Segue do item (3) que existem $r_1$ e $r_2$ tais que $D^{r_1}(a^n)=0$ e $D^{r_2}(b^m)=0$. Portanto, pelo item (2), existe $r$ tal que $D^r(a^n b^m)=D^r((a^n)(b^m))=0$.

$\square$

**Lema 3.7.** *Seja $D$ uma derivação do anel $A$. Sejam $a_1,\dots,a_n$ elementos de $A$ tais que $D^{r_1}(a_1)=D^{r_n}(a_n)=0$. Então existe $r$ tal que $D^r(a_1^{m_1}\cdots a_n^{m_n})=0$ para quaisquer números naturais $m_1,\dots,m_n$.*

**Demonstração**. Prova por indução em $n$. Para $n=1$ o resultado segue do terceiro item do Lema 3.6. Para $n=k$ suponha que exista $t$ tal que $D^t(a_1^{m_1}\cdots a_k^{m_k})=0$. Para $n=k+1$ temos que $a_1^{m_1}\cdots a_k^{m_k}a_{k+1}^{m_{k+1}}=(a_1^{m_1}\cdots a_k^{m_k})a_{k+1}^{m_{k+1}}$. Logo temos, por hipótese de indução, $D^t(a_1^{m_1}\cdots a_k^{m_k})=0$ e pelo terceiro item do Lema 3.6 existe $s$ tal que $D^s(a_{k+1}^{m_{k+1}})=0$. Segue então do segundo item do Lema 3.6 que existe $r$ tal que $D^r(a_1^{m_1}\cdots a_k^{m_k}a_{k+1}^{m_{k+1}})=0$.

$\square$

**Teorema 3.2.** *Seja $D$ uma derivação sobre $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$. Então $D$ é $LND$ se, e somente se, existe $k$ tal que $D^k(x_i) = 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$.*

**Demonstração**. Provaremos para $\mathbb{C}[x, y]$. A demonstração para $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ é análoga. Suponha que $D$ é $LND$. Logo existem $k_1$, $k_2$ tais que $D^{k_1}(x) = 0$, $D^{k_2}(y) = 0$. Seja $k = max\{k_1, k_2\}$. É imediato que $D^k(x) = 0$ e $D^k(y) = 0$.

Agora suponha que exista $k$ tal que $D^k(x) = 0$ e $D^k(y) = 0$. Seja $f \in \mathbb{C}[x, y]$. Então $f = \sum_{i,j} a_{ij}x^iy^j$ onde $0 \leq i \leq l$ e $0 \leq j \leq m$. Segue do item (4) do Lema 3.6 que existem $r_{ij}$ tais que $D^{r_{ij}}(x^iy^j) = 0$ para todos $0 \leq i \leq l$ e $0 \leq j \leq m$.

Seja $r = max\{r_{ij} \mid 0 \leq i \leq l,\, 0 \leq j \leq m\}$, então

$$D^r(f) = \sum_{i,j} a_{ij}D^r(x^iy^j) = \sum_{i,j} a_{ij}(0) = 0.$$

Logo para todo $f \in \mathbb{C}[x, y]$ existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $D^r(f) = 0$. Portanto $D$ é $LND$.

□

Uma derivação, $D$, do anel polinomial $\mathbb{C}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ é dita ***triangular*** se

$$D(x_1) = \alpha \in \mathbb{C}, \text{ e } D(x_i) \in \mathbb{C}[x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}].$$

para $i = 2, 3, \ldots, n$.

**Exemplo 3.6.** *A derivação $D$ do anel $\mathbb{C}[x, y, z]$ dada por*

$$D = i\frac{\partial}{\partial x} + (2i + 3x)\frac{\partial}{\partial y} + (2x^2y)\frac{\partial}{\partial z}$$

*é triangular, pois*

$$D(x) = i \in \mathbb{C},\, D(y) = 2i + 3x \in \mathbb{C}[x],\, D(z) = (2x^2y) \in \mathbb{C}[x, y].$$

Agora observe que no exemplo anterior $D^6(x) = D^6(y) = D^6(z) = 0$. Assim, pelo Teorema 3.2, a derivação triangular $D$ é $LND$. Na verdade, toda derivação triangular é $LND$, como podemos verificar no resultado abaixo.

**Teorema 3.3.** *Seja $D$ uma derivação triangular do anel polinomial $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$. Então $D$ é $LND$.*

**Demonstração**. Sendo $D$ uma derivação triangular em $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ temos que

$$D(x_1) = \alpha \in \mathbb{C}, \text{ e } D(x_i) \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_{i-1}].$$

Vamos verificar por indução que existe $r$ tal que $D^r(x_i) = 0$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$. Para $n = 1$ temos que

$$D^2(x_1) = D(D(x_1)) = D(\alpha) = 0.$$

Suponha que exista $t$ tal que $D^t(x_i) = 0$ para $i = 1, 2, \ldots, k$ e $1 \leq k < n$. Temos então pela linearidade de $D$, pelo Lema 3.7 e pela hipótese de indução que para cada polinômio $f \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_{n-1}]$ existe um inteiro não negativo $s = s(f)$ tal que $D^s(f) = 0$. Em particular, para o polinômio $D(x_n)$. Lembre que $D(x_n) \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_{n-1}]$, pois $D$ é triangular. Logo existe $s$ tal que $D^s(D(x_n)) = 0$. É claro que $D^{s+1}(x_n) = 0$. Assim para $r = t + s + 1$ temos que $D^r(x_i) = 0$ para todo $i = 1, 2, \cdots, n$. Portanto, pelo Teorema 3.2, toda derivação triangular é $LND$.

□

**Teorema 3.4.** *Seja $D$ uma derivação linear do anel polinomial $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$. Então $D$ é $LND$ se, e somente se, a matriz associada $[D]$ é nilpotente.*

**Demonstração**. Suponha que $D$ é $LND$. Segue do Lema 3.5 que a $k$-ésima composição de $D$ na forma matricial é dada por

$$\begin{bmatrix} D^k(x_1) \\ D^k(x_2) \\ \vdots \\ D^k(x_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Visto que $D$ é $LND$, segue do Teorema 3.2 que existe $k$ tal que $D^k(x_i) = 0$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Logo

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D^k(x_1) \\ D^k(x_2) \\ \vdots \\ D^k(x_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Seja

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \cdots b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} \cdots b_{2n} \\ \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} \cdots b_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{bmatrix}^k = [D]^k$$

Assim temos a igualdade matricial

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \cdots b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} \cdots b_{2n} \\ \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} \cdots b_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

para todo $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$. Substituindo $(1, 0, \ldots, 0), (0, 1, 0 \ldots, 0) \ldots, (0, \ldots, 0, 1)$ nesta igualdade matricial é fácil verificar que $b_{ij} = 0$ para todo $i$, $j \in \{1, \ldots, n\}$. Logo $[D]^k = [0]$ e $[D]$ é nilpotente.

Agora suponha que $[D]$ é uma matriz nilpotente. Então existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $[D]^k = [0]$. Logo

$$\begin{bmatrix} D^k(x_1) \\ D^k(x_2) \\ \vdots \\ D^k(x_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = [D]^k \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = [0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

o que implica $D^k(x_i) = 0$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$. Segue do Teorema 3.2 que $D$ é $LND$.

$\square$

**Exemplo 3.7.** *A derivação $D$ do anel polinomial $\mathbb{C}[x, y, z]$ definida por*

$$D(x) = x + y + 3z, D(y) = 5x + 2y + 6z, D(z) = -2x - y - 3z.$$

*é linear. Utilizando a notação matricial, temos*

$$\begin{bmatrix} D(x) \\ D(y) \\ D(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

*A matriz*

$$[D] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

*é a matriz associada à derivação linear $D$. Observe que a matriz $[D]$ é nilpotente ($[D]^3 = 0$). Portanto, o Teorema 3.4 garante que $D$ é uma $LND$.*

# 4 Polinômios de Darboux

Nesta seção estudamos polinômios de Darboux de derivações em anéis polinomais. Listamos alguns resultados clássicos e mostramos a existência desses polinômios em alguns exemplos e no anel polinomial $\mathbb{C}[x]$.

Seja $D$ uma derivação do anel polinomial $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$. Dizemos que um polinômio $f$, não constante, é um ***polinômio de Darboux*** da derivação $D$ se $D(f) = hf$, para algum $h \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$. É fácil ver que se o polinômio $h$ existe ele é único. Neste caso o polinômio $h$ é dito um ***autovalor polinomial*** de $f$.

**Exemplo 4.1.** *Considere a derivação $D$ em $\mathbb{C}[x, y]$ dada por*

$$D = 2xy\frac{\partial}{\partial x} + 3x^2\frac{\partial}{\partial y}$$

*Seja $f = 3x^3 - 2xy^2$. Teremos*

$$
\begin{aligned}
D(f) &= D(3x^3 - 2xy^2) \\
&= 3D(x^3) - 2D(xy^2) \\
&= 9x^2D(x) - 2(D(x)y^2 + xD(y^2)) \\
&= 9x^2(2xy) - 2(2xy)y^2 + 4xy(3x^2) \\
&= 18x^3y - 4xy^3 - 12x^3y \\
&= 2y(3x^3 - 2xy^2) \\
&= hf
\end{aligned}
$$

*Assim $f$ é um polinômio de Darboux de $D$ e $h = 2y$ é um autovalor polinomial de $f$.*

Vejamos duas proposições básicas sobre os polinômios de Darboux.

**Proposição 4.1.** *Seja $D$ uma derivação do anel polinomial $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$. Se $f$ é um polinômio de Darboux de $D$ tal que $f = gh$, com $g, h \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ e $mdc(g, h) = 1$, então $g$ e $h$ também são polinômios de Darboux para $D$.*

**Demonstração**. Seja $p \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ tal que que $D(f) = pf$. Então

$$D(g)h + gD(h) = D(gh) = D(f) = pf = pgh,$$

pela regra de Leibniz. Assim $D(g)h + gD(h) = pgh$ e temos

$$D(g)h = pgh - gD(h) = g(ph - D(h)).$$

Logo $g$ divide $D(g)h$. Como $g$ e $h$ são co-primos, pela Proposição 2.2, $g$ divide $D(g)$, ou seja, $D(g) = pg$, com $p \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ e $g$ é um polinômio de Darboux de $D$. Analogamente prova-se que $h$ é um polinômio de Darboux de $D$.

□

**Proposição 4.2.** *Seja $f$ um polinômio de Darboux da derivação $D$ do anel polinomial $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$. Se $f = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_m^{\alpha_n}$, com $\alpha_i \in \mathbb{N}^*$ e $p_i$ é irredutível para todo $i = 1, 2, \ldots, m$, então cada $p_i^{\alpha_i}$ e cada $p_i$ também são polinômios de Darboux para $D$.*

**Demonstração**. Como vimos na proposição 4.1, se $f = gh$ com $mdc(g, h) = 1$, então $g$ e $h$ são polinômios de Darboux de $D$. Então, para a primeira prova, basta considerarmos $g = p_i^{\alpha_i}$ e $h = p_1^{\alpha_1} \cdots p_{i-1}^{\alpha_{i-1}} p_{i+1}^{\alpha_{i+1}} \cdots p_n^{\alpha_n}$. Como cada um dos $p_i$'s são coprimos, segue imediatamente.

Vejamos agora que cada $p_i$ também é um polinômio de Darboux. Como $p_i^{\alpha_i}$ é polinômio de Darboux de $D$, então existe $q \in \mathbb{C}[x, y]$ tal que $D(p_i^{\alpha_i}) = qp_i^{\alpha_i}$. Segue do Lema 3.4 que

$$qp_i^{\alpha_i} = D(p_i^{\alpha_i}) = \alpha_i p_i^{\alpha_i - 1} D(p_i).$$

Logo $qp_i = \alpha_i D(p_i)$ e portanto $D(p_i) = [(\alpha_i)^{-1}q]p_i$.

□

**Teorema 4.1.** *Seja $D = f\dfrac{\partial}{\partial x}$ uma derivação do anel polinomial $\mathbb{C}[x]$ e $m = gr(f)$. Então $D$ tem um polinômio de Darboux se, e somente se, $gr(f) \geq 1$.*

**Demonstração**. Suponha que $m = gr(f) \geq 1$. Segue do Teorema Fundamental da Álgebra, que

$$f = b_n(x - r_1)(x - r_2)\cdots(x - r_m)$$

onde $0 \neq b_n$ é o coeficiente do termo líder de $f$ (coeficiente do termo de maior grau) e $r_1, r_2, \ldots, r_m \in \mathbb{C}$ são as raízes de $f$. Seja $p = (x - r_{i_1})(x - r_{i_2})\cdots(x - r_{i_p})$ tal que $r_{i_j} \in \{r_1, \ldots, r_m\}$, onde $1 \leq j \leq m$ e $q = \dfrac{f}{p}$. Então:

$$\begin{aligned} D(p) &= f\frac{\partial}{\partial x}(p) \\ &= (pq)\frac{\partial}{\partial x}(p) \\ &= hp, \end{aligned}$$

e assim $p$ é um polinômio de Darboux de $D$ com autovalor $h = q\dfrac{\partial}{\partial x}(p)$.

Agora suponha que $gr(f) = 0$ e que a derivação $D$ tem um polinômio de Darboux $p = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, com $a_n \neq 0$ e $n \geq 1$. Assim $gr(p) \geq 1$ e $D(p) = hp$ para algum $h \in \mathbb{C}[x]$. Observe que $D(p) = f\dfrac{\partial}{\partial x}(p) = f(na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1)$, o que implica $gr(D(p)) = n - 1$, pois $f$ é constante. De outro modo

$$gr(D(p)) = gr(hp) = gr(h) + gr(p) \geq n.$$

Ou seja, $n - 1 = gr(D(p)) \geq n$, que é um absurdo. Portanto a derivação $D$ não tem polinômio de Darboux.

$\square$

**Exemplo 4.2.** *Seja $D = (2x^3 + 4x^2 + 2x + 4)\dfrac{\partial}{\partial x}$ uma derivação do anel polinomial $\mathbb{C}[x]$. Considere $g = x^2 + 1$. Teremos*

$$\begin{aligned} D(g) &= (2x^3 + 4x^2 + 2x + 4)\frac{\partial}{\partial_x}(x^2 + 1) \\ &= 2(x + i)(x - i)(x + 2)(2x) \\ &= (4x^2 + 8x)(x^2 + 1) \\ &= (4x^2 + 8x)g \end{aligned}$$

*Logo, $g$ é polinômio de Darboux de $D$. Observe que $g$ é o produto dos fatores $(x + i)$ e $(x - i)$ da decomposição de $(2x^3 + 4x^2 + 2x + 4)$.*

Uma derivação $D$ no anel polinomial $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ é dita ***monomial*** se $D(x_i)$ é um monômio para todo $i = 1, \ldots, n$. Sendo assim $D = f_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + f_n \frac{\partial}{\partial x_n}$ é uma derivação monomial se todo $f_i$ é um monômio em $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$.

**Exemplo 4.3.** *Seja $D$ uma derivação no anel $\mathbb{C}[x, y, z, t]$ da forma*

$$D = 2xt^2 \frac{\partial}{\partial x} + ix^2yz \frac{\partial}{\partial y} - 3zt \frac{\partial}{\partial z} + (2-i)yt^3 \frac{\partial}{\partial t}.$$

*$D$ é uma derivação monomial, pois*

$$D(x) = 2xt^2,\ D(y) = ix^2yz,\ D(z) = -3zt,\ D(t) = (2-i)yt^3$$

*são todos monômios em $\mathbb{C}[x, y, z, t]$.*

**Exemplo 4.4.** *Sejam $D = ax^iy^j \frac{\partial}{\partial x} + bx^ky^l \frac{\partial}{\partial y}$, $E = ax^i \frac{\partial}{\partial x} + bx^ky^l \frac{\partial}{\partial y}$, $F = ax^iy^j \frac{\partial}{\partial x} + by^l \frac{\partial}{\partial y}$ e $G = ax^i \frac{\partial}{\partial x} + by^l \frac{\partial}{\partial y}$ derivações monomiais em $\mathbb{C}[x,\ y]$, onde $i$, $j$, $k$ e $l$ são inteiros positivos e $a, b \in \mathbb{C}$. É fácil verificar que $xy$ é um polinômio de Darboux para $D$, $E$, $F$ e $G$. Vejamos a derivação $D$:*

*De fato,*

$$\begin{aligned} D(xy) &= ax^iy^j \frac{\partial}{\partial x}(xy) + bx^ky^l \frac{\partial}{\partial y}(xy) \\ &= ax^iy^j(y) + bx^ky^l(x) \\ &= (ax^{i-1}y^j + bx^ky^{l-1})(xy) \\ &= h(xy) \end{aligned}$$

*Logo $D(xy) = h(xy)$, onde $h = ax^{i-1}y^j + bx^ky^{l-1}$, e assim $xy$ é um polinômio de Darboux para $D$. A verificação para as derivações $E$, $F$ e $G$ são imediatas.*

# 5 Darboux e Derivações Lineares

Nessa seção estudamos os polinômios de Darboux das derivações lineares. Verificamos quando uma derivação $D$ linear no anel $\mathbb{C}[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ possui polinômio de Darboux linear utilizando os autoespaços da transposta da matriz $[D]$.

**Exemplo 5.1.** *Seja $D$ uma derivação linear em um anel polinomial $\mathbb{C}[x, y]$ dada por*

$$D = (2x + iy)\frac{\partial}{\partial x} + [(3-i)x + 2y]\frac{\partial}{\partial y}$$

*e seja $f = (3-i)x^2 - iy^2$. Vamos mostrar que $f$ é um polinômio de Darboux da derivação $D$.*

$$\begin{aligned} D(f) = D((3-i)x^2 - iy^2) &= (2x+iy)\frac{\partial}{\partial x}((3-i)x^2 - iy^2) + [(3-i)x+2y]\frac{\partial}{\partial y}((3-i)x^2 - iy^2) \\ &= (2x+iy)[(6-2i)x] + [(3-i)x+2y](-2iy) \\ &= (12-4i)x^2 - 4iy^2 \\ &= 4[(3-i)x^2 - iy^2] \\ &= 4f. \end{aligned}$$

Nesse caso, o autovalor polinomial de $D$ linear é o polinômio constante $h = 4$. Vejamos uma situação específica na qual isso sempre acontece.

**Lema 5.1.** *Seja $f$ um polinômio de Darboux linear da derivação linear $D$. Então o autovalor polinomial de $f$ é um polinômio constante.*

**Demonstração**.
Seja $f = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$ um polinômio de Darboux da derivação

$$D = f_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + f_n\frac{\partial}{\partial x_n}$$

onde $f_1, \ldots, f_n \in \mathbb{C}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ e $h$ o seu autovalor polinomial. Ou seja, $D(f) = hf$. Assim

$$\begin{aligned} hf &= D(f) \\ &= f_1\frac{\partial}{\partial x_1}f + \cdots + f_n\frac{\partial}{\partial x_n}f \\ &= f_1\frac{\partial}{\partial x_1}(a_1x_1 + \cdots + a_nx_n) + \cdots + f_n\frac{\partial}{\partial x_n}(a_1x_1 + \cdots + a_nx_n) \\ &= a_1f_1 + a_2f_2 + \cdots + a_nf_n \end{aligned}$$

Logo

$$hf = a_1f_1 + \cdots + a_nf_n.$$

Visto que $gr(a_1f_1 + \cdots + a_nf_n) = 1$ temos $gr(hf) = 1$. Como $1 = gr(hf) = gr(h) + gr(f)$ e $gr(f) = 1$, temos $gr(h) = 0$. Portanto $h$ é um polinômio constante.

$\square$

**Exemplo 5.2.** *Considere a derivação linear $D = (-7x-3y)\frac{\partial}{\partial x} + (6x+4y)\frac{\partial}{\partial y}$ e $f = 2x+3y$. Vamos verificar que $f$ é um polinômio de Darboux de $D$ com $h = 2$. De fato:*

$$\begin{aligned} D(f) = D(2x+3y) &= (-7x-3y)\frac{\partial}{\partial x}(2x+3y) + (6x+4y)\frac{\partial}{\partial y}(2x+3y) \\ &= 2(-7x-3y) + 3(6x+4y) \\ &= 4x+6y \\ &= 2(2x+3y) \end{aligned}$$

No exemplo acima, se representarmos a transposta da matriz da transformação D, teremos

$$[D]^T = \begin{bmatrix} -7 & 6 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Vamos determinar os autovalores da matriz acima. Sendo $h \in \mathbb{C}$ e $[I]$ a matriz identidade de ordem 2, basta determinarmos as raízes do polinômio característico.

$$\begin{aligned} det([D] - h[I]) &= det\left(\begin{bmatrix} -7 & 6 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} h & 0 \\ 0 & h \end{bmatrix}\right) \\ &= det\begin{bmatrix} -7-h & 6 \\ -3 & 4-h \end{bmatrix} \\ &= (-7-h)(4-h)+18 \\ &= h^2+3h-10 \end{aligned}$$

cujas raízes são -5 e 2. Observe que o valor de $h$ encontrado no exemplo coincide com um dos autovalores da matriz transposta do operador $D$, e representando $f = 2x+3y$ como a matriz de seus coeficientes, $[f] = [2,\ 3]^T$ é autovetor da matriz $[D]^T$. De fato, isso é sempre verdadeiro para as derivações lineares, como será demonstrado a seguir.

Antes, vamos introduzir a seguinte notação: dado $f = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$ um polinômio linear do anel polinomial $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$, denote por $[f]$ a matriz coluna formada pelos coeficiente de $f$. Ou seja,

$$[f] = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

Desse modo, é possível construir uma representação matricial para $D(f)$ linear. De fato, sendo

$$D = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n)\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + (a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n)\frac{\partial}{\partial x_n},$$

teremos

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21}\cdots a_{n1} \\ a_{12} & a_{22}\cdots a_{n2} \\ \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n}\cdots a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = [X][D]^T[f] = D(f)$$

em que $[X]$ é a matriz linha das variáveis $[x_1, \ldots, x_n]$.

Vamos mostrar o caso $2 \times 2$ e depois estendê-lo ao caso geral.

**Proposição 5.1.** *Seja $D$ a derivação linear em $\mathbb{C}[x, y]$ definida por*

$$D = (a_{11}x + a_{12}y)\frac{\partial}{\partial x} + (a_{21}x + a_{22}y)\frac{\partial}{\partial y}$$

*e $f = rx + sy$ um polinômio linear em $\mathbb{C}[x, y]$. Então $f$ é um polinômio de Darboux de $D$ se, e somente se, $[f]$ é um autovetor da matriz $[D]^T$ associado ao autovalor $h$.*

**Demonstração**. Seja $f$ é um polinômio de Darboux de $D$. Então $D(f) = hf$ e $h \in \mathbb{C}$, pelo Lema 5.1. Agora observe que

$$\begin{aligned}
D(f) = hf \;&\Leftrightarrow\; r(a_{11}x + a_{12}y) + s(a_{21}x + a_{22}y) = h(rx + sy)\\
&\Leftrightarrow\; (ra_{11} + sa_{21})x + (ra_{12} + sa_{22})y = rhx + shy\\
&\Leftrightarrow\; \begin{cases} ra_{11} + sa_{21} = rh\\ ra_{12} + sa_{22} = sh \end{cases}\\
&\Leftrightarrow\; \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21}\\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} r\\ s \end{bmatrix} = h\begin{bmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} r\\ s \end{bmatrix}\\
&\Leftrightarrow\; \left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21}\\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} - h\begin{bmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} r\\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\\ 0 \end{bmatrix}\\
&\Leftrightarrow\; \left([D]^T - h[I]\right)[f] = [0],
\end{aligned}$$

onde $[0]$ é a matriz coluna nula de ordem 2 e $[I]$ a matriz identidade de ordem 2. Portanto $f$ é um polinômio de Darboux de $D$ se, e somente se, $[f]$ é um autovetor da matriz $[D]^T$ associado ao autovalor $h$. $\square$

Agora, o caso geral.

**Teorema 5.1.** *Seja $D$ uma derivação linear no anel polinomial $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ e $f$ um polinômio linear do anel $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$. Então $f$ é um polinômio de Darboux da derivação $D$ se, e somente se, $[f]$ é um autovetor da matriz $[D]^T$.*

**Demonstração**. Seja $f$ é um polinômio de Darboux de $D$. Então $D(f) = hf$ e $h \in \mathbb{C}$ pelo Lema 5.1. Utilizando a representação matricial, observe que

$$\begin{aligned}
D(f) = hf \;&\Leftrightarrow\; [X][D]^T[f] = [X]h[I][f]\\
&\Leftrightarrow\; [D]^T[f] = h[I][f]\\
&\Leftrightarrow\; \left([D]^T - h[I]\right)[f] = [0],
\end{aligned}$$

onde $[X]$ é a matriz linha $[x_1, \ldots, x_n]$. Portanto $f$ é um polinômio de Darboux de $D$ se, e somente se, $[f]$ é um autovetor de $[D]^T$ associado ao autovalor $h$.

$\square$

**Exemplo 5.3.** *Seja a derivação $D = (x - 2y - 2z)\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + (2y + 3z)\frac{\partial}{\partial z}$ em $\mathbb{C}[x, y]$. Então a transposta da matriz associada à derivação $D$ é a matriz*

$$[D]^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

*Determinamos os seus autovalores e autovetores através equação matricial*

$$\begin{bmatrix} 1-h & 0 & 0 \\ -2 & 1-h & 2 \\ -2 & 0 & 3-h \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

*O polinômio característico da matriz* $[D]^T$ *é o polinômio* $p(h) = (1-h)^2(3-h)$. *Assim os autovalores da matriz* $[D]^T$ *são* $h = 1$ *e* $h = 3$. *Os autovetores associados ao autovalor* $h = 1$ *é o conjunto* $\{(z, y, z)^T \mid y,\, z \in \mathbb{C}$ *e* $yz \neq 0\}$ *e ao autovetor* $h = 3$ *é o conjunto* $\{(0, z, z)^T \mid z \in \mathbb{C}$ *e* $z \neq 0\}$.

*Considere o autovetor* $[f] = [2,\, 3,\, 2]^T$, *associado ao autovalor* $h = 1$. *Logo o polinômio* $f = 2x + 3y + 2z$ *associdado ao vetor* $[f]$ *é um polinômio de Darboux para* $D$. *De fato,*

$$\begin{aligned} D(f) &= (x-2y-2z)\frac{\partial}{\partial x}(2x+3y+2z) + y\frac{\partial}{\partial y}(2x+3y+2z) + (2y+3z)\frac{\partial}{\partial z}(2x+3y+2z) \\ &= 2(x-2y-2z) + 3y + 2(2y+3z) \\ &= 2x - 4y - 4z + 3y + 4y + 4z \\ &= 2x + 3y + 2z \\ &= 1f. \end{aligned}$$

*Agora associado ao autovalor* $h = 3$ *considere o autovetor* $[f] = [0, 1+i, 1+i]^T$. *Assim temos o polinômio* $f = (1+i)y + (1+i)z$. *Veja que*

$$\begin{aligned} D(f) &= (x-2y-2z)\frac{\partial}{\partial x}f + y\frac{\partial}{\partial y}f + (2y+3z)\frac{\partial}{\partial z}f \\ &= y(1+i) + (2y+3z)(1+i) \\ &= y + iy + 2y + 2iy + 3z + 3iz \\ &= 3y + 3iy + 3z + 3iz \\ &= 3((1+i)y + (1+i)z) \\ &= 3f. \end{aligned}$$

*Portanto* $f = (1+i)y + (1+i)z$ *também é um polinômio de Darboux para* $D$.

# 6 Darboux e Derivações Homogêneas

Nesta seção verificamos que toda derivação homogênea em $\mathbb{C}[x,\, y]$ possui polinômio de Darboux. A prova desta afirmação (Teorema 6.1) consiste em exibir um algoritmo para obtenção de um polinômio de Darboux cada derivação homogênea.

Uma derivação $D$ no anel polinomial $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ é dita **homogênea de grau** $m$ se $D(x_1), \ldots, D(x_n)$ são polinômios homogêneos de mesmo grau $m$.

**Exemplo 6.1.** *A derivação $D$ no anel $\mathbb{C}[x, y]$ da forma*

$$D = (2x^3y - 7x^2y^2)\frac{\partial}{\partial x} + (ix^2y^2 + 3xy^3)\frac{\partial}{\partial y}$$

*é uma derivação homogênea de grau 4, pois:*

$$D(x) = 2x^3y - 7x^2y^2 \text{ e } D(y) = ix^2y^2 + 3xy^3$$

*são ambos polinômios homogêneos em $\mathbb{C}[x, y]$ de grau 4.*

A igualdade do próximo lema é conhecida como ***igualdade de Euler***. A derivação

$$E = x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + x_n\frac{\partial}{\partial x_n},$$

do anel polinomial em $n$-variavéis, é conhecida como ***derivação de Euler*** . Observe que $f = x_1 + \cdots + x_n$ é um polinômio de Darboux para $E$, já que $E(f) = f$.

**Lema 6.1.** *Seja $f$ um polinômio homogêneo de grau $m$ no anel polinomial em duas variáveis $\mathbb{C}[x, y]$. Então*

$$x\frac{\partial}{\partial x}(f) + y\frac{\partial}{\partial y}(f) = mf.$$

**Demonstração**. Considere a derivação $D = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$. Seja $f$ um polinômio homogêneo de grau $m$, ou seja,

$$f = a_mx^m + a_{m-1}x^{m-1}y + a_{m-2}x^{m-2}y^2 + \cdots + a_1xy^{m-1} + a_0y^m.$$

com $a_m, a_{m-1}, \cdots, a_1, a_0 \in \mathbb{C}$, alguns possivelmente nulos. Dessa forma temos

$$\begin{aligned}
x\frac{\partial}{\partial x}(f) + y\frac{\partial}{\partial y}(f) &= D(f) \\
&= x(ma_mx^{m-1} + \cdots + a_1y^{m-1}) + y(a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + ma_0y^{m-1}) \\
&= ma_mx^m + \cdots + a_1xy^{m-1} + a_{m-1}x^{m-1}y + \cdots + (m-1)a_1xy^{m-1} + ma_0y^m \\
&= ma_mx^m + ma_{m-1}x^{m-1}y + \cdots + ma_1xy^{m-1} + ma_0y^m \\
&= mf
\end{aligned}$$

□

Observe que o lema anterior mostra que a derivação de Euler

$$E = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$$

possui polinômio de Darboux.

O próximo lema faz parte da demostração do Teorema 6.1, à respeito dos polinômios de Darboux das derivações homogêneas de grau $m$.

**Lema 6.2.** *Sejam $p$ e $q \in \mathbb{C}[x, y]$ polinômios homogêneos de grau $m$. Se $xq - yp = 0$, então $x - y$ divide $p - q$.*

**Demonstração**. Visto que $p$ e $q$ são polinômios homogêneos de grau $m$ temos que

$$q = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1}y + \cdots + a_1 xy^{m-1} + a_0 y^m$$

e

$$p = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1}y + \cdots + b_1 xy^{m-1} + b_0 y^m,$$

onde os $a_i$'s e $b_i$'s são números complexos. Logo

$$xq = a_m x^{m+1} + a_{m-1}x^m y + \cdots + a_1 x^2 y^{m-1} + a_0 xy^m,$$

$$yp = b_m x^m y + b_{m-1}x^{m-1}y^2 + \cdots + b_1 xy^m + b_0 y^{m+1}$$

e portanto

$$xq - yp = a_m x^{m+1} + (a_{m-1} - b_m)x^m y + \cdots + (a_0 - b_1)xy^m - b_0 y^{m+1}.$$

Segue desta última igualdade e da hipótese, $xq - yp = 0$, que

$$a_m = b_0 = 0,\ a_{m-1} = b_m,\ a_{m-2} = b_{m-1}, \ldots,\ a_0 = b_1.$$

Logo temos

$$q = b_m x^{m-1}y + b_{m-1}x^{m-2}y^2 + \cdots + b_2 xy^{m-1} + b_1 y^m$$

e

$$p = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1}y + \cdots + b_2 x^2 y^{m-2} + b_1 xy^{m-1}.$$

Agora observe que

$$\begin{aligned}
p - q &= b_m x^m + (b_{m-1} - b_m)x^{m-1}y + (b_{m-2} - b_{m-1})x^{m-2}y^2 \cdots + (b_1 - b_2)xy^{m-1} - b_1 y^m \\
&= b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1}y + \cdots + b_2 x^2 y^{m-2} + b_1 xy^{m-1} \\
&\quad - b_m x^{m-1}y - b_{m-1}x^{m-2}y^2 - \cdots - b_2 xy^{m-1} - b_1 y^m \\
&= (b_m x^{m-1} + b_{m-1}x^{m-2}y + \cdots + b_2 xy^{m-2} + b_1 y^{m-1})(x) + \\
&\quad (b_m x^{m-1} + b_{m-1}x^{m-2}y + \cdots + b_2 xy^{m-2} + b_1 y^{m-1})(-y) \\
&= (b_m x^{m-1} + b_{m-1}x^{m-2}y + \cdots + b_2 xy^{m-2} + b_1 y^{m-1})(x - y) \\
&= h(x - y)
\end{aligned}$$

onde $h = b_m x^{m-1} + b_{m-1}x^{m-2}y + \cdots + b_2 xy^{m-2} + b_1 y^{m-1}$. Assim $p - q = h(x - y)$ o que implica que $x - y$ divide $p - q$.

□

**Teorema 6.1.** *Seja $D$ uma derivação homogênea de grau $m$ do anel polinomial em duas variáveis $\mathbb{C}[x, y]$. Então $D$ tem um polinômio de Darboux.*

**Demonstração**. Seja $D = p\frac{\partial}{\partial x} + q\frac{\partial}{\partial y}$, com $p$ e $q$ homogêneos de grau $m$. Considere $f = xq - yp$. Se $f \neq 0$ vejamos que $D(f) = hf$.

$$\begin{aligned} D(f) &= p\frac{\partial}{\partial x}(f) + q\frac{\partial}{\partial y}(f) \\ &= p\frac{\partial}{\partial x}(xq - yp) + q\frac{\partial}{\partial y}(xq - yp) \\ &= p[q + x\frac{\partial}{\partial x}(q) - y\frac{\partial}{\partial x}(p)] + q[x\frac{\partial}{\partial y}(q) - p - y\frac{\partial}{\partial y}(p)] \\ &= px\frac{\partial}{\partial x}(q) - py\frac{\partial}{\partial x}(p) + qx\frac{\partial}{\partial y}(q) - qy\frac{\partial}{\partial y}(p) \end{aligned}$$

Somando e subtraindo $py\frac{\partial}{\partial y}(q)$ e $qx\frac{\partial}{\partial x}(p)$, obtemos

$$\begin{aligned} D(f) &= p\left(x\frac{\partial}{\partial x}(q) + y\frac{\partial}{\partial y}(q)\right) - q\left(x\frac{\partial}{\partial x}(p) + y\frac{\partial}{\partial y}(p)\right) + (xq - yp)\left(\frac{\partial}{\partial y}(q) + \frac{\partial}{\partial x}(p)\right) \\ &= p(mq) - q(mp) + f\left(\frac{\partial}{\partial y}(q) + \frac{\partial}{\partial x}(p)\right) \\ &= hf, \end{aligned}$$

Na terceira igualdade temos $h = \left(\frac{\partial}{\partial y}(q) + \frac{\partial}{\partial x}(p)\right)$. A segunda igualdade segue do Lema 6.1 (lembre que $p$ e $q$ são homogêneos de grau $m$). Portanto $f$ é um polinômio de Darboux de $D$, pois $D(f) = hf$.

Considere agora $f = 0$. Ou seja, $xq - yp = 0$. Segue do Lema 6.2 que $p - q = h(x - y)$ para algum $h \in \mathbb{C}[x, y]$. Agora observe que

$$\begin{aligned} D(x - y) &= p\frac{\partial}{\partial x}(x - y) + q\frac{\partial}{\partial y}(x - y) \\ &= p - q \\ &= h(x - y) \end{aligned}$$

E neste caso $x - y$ é um polinômio de Darboux da derivação $D$.

□

**Exemplo 6.2.** *Considere a derivação homogênea $D = (x^2 + 2xy)\frac{\partial}{\partial x} + (2xy + y^2)\frac{\partial}{\partial y}$ e seja $f = x^2y - xy^2$. Teremos:*

$$\begin{aligned}
D(f) &= (x^2+2xy)\frac{\partial}{\partial x}(x^2y-xy^2)+(2xy+y^2)\frac{\partial}{\partial y}(x^2y-xy^2)\\
&= (x^2+2xy)(2xy-y^2)+(2xy+y^2)(x^2-2xy)\\
&= 4x^3y-4xy^3\\
&= 4xy(x^2-y^2)\\
&= 4xy(x-y)(x+y)\\
&= (4x+4y)(x^2y-xy^2).
\end{aligned}$$

*Ou seja, $D(f) = (4x + 4y)f$ e assim $x^2y - xy^2$ é um polinômio de Darboux da derivação homogênea $D$. Segue da Proposição* 4.1 *que $xy$ e $x - y$ também serão polinômios de Darboux de $D$.*

**Exemplo 6.3.** *Considere a derivação homogênea $D = (x^2y+xy^2)\frac{\partial}{\partial x}+(xy^2+y^3)\frac{\partial}{\partial y}$. Observe que*

$$f = xq - yp = x^2y^2 + xy^3 - xy^2 - xy^3 = 0$$

*Logo, pelo Teorema* 6.1*, $x - y$ é um polinômio de Darboux de $D$. De fato,*

$$\begin{aligned}
D(x-y) &= (x^2y+xy^2)\frac{\partial}{\partial x}(x-y)+(xy^2+y^3)\frac{\partial}{\partial y}(x-y)\\
&= x^2y+xy^2-xy^2-y^3\\
&= x^2y-y^3\\
&= (xy-y^2)(x-y).
\end{aligned}$$

Observe que a derivação de Euler é uma derivação homogênea de grau 1 (linear) e tem polinômio de Darboux em $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$. Segue do Teorema 6.1 que toda derivação homogênea em $\mathbb{C}[x, y]$ tem polinômio de Darboux. Então é natural perguntar: toda derivação homogênea de grau $n \geq 2$ tem polinômio de Darboux em $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$? A resposta é negativa.

**Teorema 6.2.** *A derivação $y^s\frac{\partial}{\partial x}+z^s\frac{\partial}{\partial y}+x^s\frac{\partial}{\partial z}$, onde $s \geq 2$, não tem polinômio de Darboux.*

Uma prova deste teorema pode ser vista em [9]. A derivação deste teorema é conhecida como derivação de Jouanolou.

# Comentários Finais

As derivações em anéis polinomiais surgem em vários problemas interessantes e em diversas áreas da Matemática (ver [9], [6], [7],[3]). Contudo o assunto é praticamente desconhecido por qualquer aluno de graduação, visto que não é abordado na graduação, mesmo sendo um tema que abre portas a novas teorias e problemas na Matemática.

Com este trabalho, esperamos contribuir com a literatura na área de derivações, em especial, derivações sobre anéis polinomiais, destacando alguns de seus resultados básicos. As poucas referências bibliográficas disponíveis hoje dificultam o acesso a este assunto. E as disponíveis são textos mais elaborados que exigem um grau maior de maturidade do estudante e uma boa formação em álgebra (os principais resultados referentes ao assunto foram obtidos em [9]).

Justamente pela quase inexistência de textos básicos, optamos em restringir o assunto aos anéis polinomiais e por demonstrar de forma bem didática e detalhada os teoremas descritos no trabalho, mas com o devido rigor matemático, para que um estudante que queira alçar vôos maiores no assunto tenha uma escada de degraus mais "curtos" para galgar.

Da mesma forma, acreditamos que o texto será de grande valia aos professores do Ensino Fundamental e Médio que queiram ampliar seus conhecimentos em Matemática.

# Agradecimentos

Inicialmente, gostaria de agradecer aos meus pais, Celina e Waldívio, meus irmãos, Walcely, Walcelina e Waldívio Júnior, minha esposa, Fernanda e meus queridos filhos, Arthur e Sávio, que são os pilares de sustentação a todos os meus projetos de vida. Vocês têm participação em cada uma de minhas vitórias.

Agradeço a todos os professores e coordenadores da UFSJ, que nos receberam de braços abertos, e criaram uma relação muito boa para o desenvolvimento de nossas atividades acadêmicas.

Agradecimento especial ao meu orientador, Marcelo Oliveira Veloso, pela paciência e por se portar como mestre durante as aulas e orientação da monografia. Mestre não dá o peixe, ensina o aluno a pescar. Desenvolve no aluno o auto didatismo na busca de informações. Se todos professores de Matemática do nosso país tratassem o ensino da disciplina com mais responsabilidade, colheríamos resultados bem mais interessantes que os atuais

Jamais posso esquecer de meu antigo mestre, hoje colega de trabalho (mas eterno mestre), Frederico Reis Marques de Brito. Esse foi certamente o professor que me abriu as portas do conhecimento matemático, não na carne, mas na sua essência. Seus estímulos intelectuais durante a graduação me fizeram abdicar da profissão de Odontólogo pelo amor à Matemática, mudança positiva em minha vida (apesar dos que sempre discordaram). A beleza da Matemática mudou minha essência, minha forma de ver e interpretar o mundo.

Finalmente, agradeço também à CAPES, por possibilitar a realização de meu sonho. Na minha situação, jamais seria possível a realização de um mestrado acadêmico possibilitando ao mesmo tempo uma boa qualidade de vida à minha esposa e filhos. A idéia de criar um mestrado profissional em Matemática com estudos autônomos no aconchego do lar, próximo aos que te amam, certamente colherá bons frutos futuros na relação ensino/aprendizagem dessa disciplina, tão mal assimilada em níveis de graduação e educação básica.

# Referências


[1] Anton, H.; Rorres, C., *Álgebra Linear com Aplicações*, 8a edição. Porto Alegre: Bookman, 2001.

[2] Borin Júnior, A. M. S., *Divisão de polinômios com duas variáveis*, UFTM, 2013.

[3] Brumatti, P.R. e Veloso M., *On locally nilpotent derivations of Fermat Rings*, Algebra and Discrete Mathematics, Vol. 16, Number 1. pp. 20–32, 2013.

[4] Costa Filho, J. A., *Determinação de integrais primeiras liouvillianas em equações diferenciais ordinárias de segunda ordem*, UERJ, 2013.

[5] Garcia, A. e Lequain, Y., *Elementos de Álgebra*, 5a. Edição, Rio de Janeiro, IMPA, 2010.

[6] Oliveira, B. N., *Exemplos de derivações simples do anel de polinômios* $K[x, y]$, UFRGS, 2006.

[7] Merighe, L. C., *Uma introdução às derivações localmente nilpotentes com uma aplicação ao 14º problema de Hilbert*, USP, 2015.

[8] Noguera, M. C. D., *Sobre derivações localmente nilpotentes dos aneis* $K[x, y, z]$ *e* $K[x, y]$, UNICAMP, 2007.

[9] Nowicki, A., *Polynomial derivations and their rings of constants*, Uniwersytet Mikolaja Kopernika, Torun, 1994.