UNIVERSIDADE ESTADUAL DO SUDOESTE DA BAHIA – UESB

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE

NACIONAL - PROFMAT

MAGNO DE SOUZA ALMEIDA

UMA PROPOSTA DE ATIVIDADES PARA O ENSINO MÉDIO UTILIZANDO O SERIADO NUMB3RS

VITÓRIA DA CONQUISTA

2016

MAGNO DE SOUZA ALMEIDA

UMA PROPOSTA DE ATIVIDADES PARA O ENSINO MÉDIO UTILIZANDO O SERIADO NUMB3RS

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Júlio César dos Reis.

VITÓRIA DA CONQUISTA

2016

A449u Almeida, Magno de Souza.

Uma proposta de atividade para o ensino médio utilizando o seriado numb3rs / Magno de Souza Almeida, 2016.

106f. : Il.; col.

Orientador (a): Júlio César dos Reis.

Dissertação (mestrado), Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Vitória da Conquista, 2016.

Inclui referências.

1. Matemática – Ensino médio. 2. Sequência didática. 3. Matemática – Curiosidade investigativa. I. Reis, Júlio César dos. II. Universidade Estadual Sudoeste da Bahia, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. III. T.

CDD: 510

Elinei Carvalho Santana – CRB 5/1026
Bibliotecária – UESB – Campus de Vitória da Conquista-BA

MAGNO DE SOUZA ALMEIDA

UMA PROPOSTA DE ATIVIDADES PARA O ENSINO MÉDIO UTILIZANDO O SERIADO NUMB3RS

APROVADA POR:

Prof. Dr. Júlio César dos Reis

Presidente

Prof. Dr. Roque Mendes Prado Trindade

Examinador

Profa. Dr. Sandra Rego de Jesus

Examinador

Vitória da Conquista, 25 de fevereiro de 2016

Dedico este trabalho às pessoas que me apoiaram firmemente nesta caminhada. Minhas filhas Clara e Cecília pela alegria que preenche a cada dia minha vida, a Verônica minha esposa querida pelo amor, carinho e compreensão nos momentos difíceis. Aos meus pais, irmão e amigos pela confiança e todo incentivo de sempre.

AGRADECIMENTOS

Ao Senhor Jesus, amigo e protetor de todas as horas, a quem em minhas orações recorro em todos os momentos de minha vida, agradeço por mais essa conquista.

Aos meus pais Bispo e Neuza por todo ensinamento, amor, carinho. Aos meus irmãos Mateus e Nau pelo incentivo e amor.

A minha esposa Verônica e minhas filhas, Clara e Cecília pela paciência e por todo amor e carinho, bem como as minhas cunhadas e sobrinhos: Sandra, Ana, Fernando, Fausto e Rebeca minha eterna gratidão.

Aos colegas e professores do PROFMAT e, em especial meu orientador Prof. Júlio César dos Reis pela paciência, sugestões, ensinamentos e pela coragem de apostar em uma idéia que foge do tradicional.

Aos amigos e parceiros de que conquistei durante o curso Edson, Fernando, Juninho, Leo e Rogério.

Por fim, agradeço a todos aqueles que direta ou indiretamente contribuíram para esse trabalho e que Deus abençoe a cada um hoje e sempre. Meu muito obrigado por tudo!

“O poder de um ser humano não está na sua musculatura, mas na sua inteligência. Os fracos usam a força, os fortes usam a sabedoria.”

(Augusto Cury)

RESUMO

Este estudo teve como principal objetivo apresentar uma sequência didática de ensino a partir da elaboração de algumas propostas de atividades com conteúdos que compõe o currículo do ensino de matemática para o ensino médio, usando como principal procedimento metodológico a exibição de episódios da primeira temporada de Numb3rs, uma série de televisão americana, com abordagem científica-matemática. A escolha da Série Numb3rs se justifica pela forma como se dá abordagem dos conteúdos, levando o aluno a uma curiosidade investigativa pela resolução dos casos que são apresentados em cada episódio. Cada proposta didática de trabalho baseado no episódio selecionado consta de uma fundamentação teórica a cerca do conteúdo escolhido, o resumo do episódio, bem como as sugestões de atividades a serem utilizadas. Conteúdos como Probabilidade, Teoria dos números, Criptografia, Matriz, Progressão Geométrica, são apresentados nos episódios selecionados para elaboração das propostas didáticas que são abordadas no presente trabalho. Antes da elaboração das referidas propostas nos apoiamos em alguns autores para fundamentar a abordagem teórica do conteúdo selecionado. Nomes como Fernandez (2005), Coutinho (2014), Lemos (2010) e Boyer (1998) estarão presentes este trabalho. Pretende-se com neste trabalho colaborar com os professores de matemática para que a abordagem destes conteúdos possa incentivar o raciocínio e a curiosidade matemática, permitindo compreender o uso do conteúdo curricular para o cotidiano. Dessa forma, espera-se que as propostas aqui selecionadas sejam utilizadas como ponto de partida para o estudo desses conceitos no ensino médio.

Palavras–chave: sequência didática, propostas de atividades, curiosidade investigativa, raciocínio, currículo.

ABSTRACT

This study has aimed to present a didactic sequence of teaching from the elaboration of some proposals for activities with contents that make up the teaching of mathematics curriculum for high school, it was used as main methodological procedure the episodes of the first season of *Numb3rs*, an American's series, with scientific-mathematical approach. The choice of Numb3rs Series is justified by the form as the contents approach, leading the student to an investigative curiosity through the resolution of the cases which are presented in each episode. Each didactic work proposal based on the selected episode consists in a theoretical foundation about the chosen content, the summary of the episode as well as the suggestions of activities used. Content such as probability, the theory of the numbers, cryptography, Matrix, Geometric Progression, are presented on selected episodes for preparation of the didactic proposals that are discussed in this work. Before the elaboration of such proposals, some authors were analyzed to bring the theoretical approach about the selected content. Authors like Fernandez (2005), Coutinho (2014), Lemos (2010) and Boyer (1998) have been used to base this work. The aim of this work is to collaborate with mathematics teachers to use these contents to motivate reasoning and mathematical curiosity, allowing them to understand the use of the content of the curriculum. Thus, it is expected that the proposals selected here are used as the starting point for the study of these concepts in the grades of high school.

Keywords: didactic sequence, proposed activities, investigative curiosity, reasoning, curriculum.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Lista de Quadros

Sumário

Introdução

Nos tempos atuais em que vivemos, podemos perceber a velocidade com que as mudanças têm ocorrido nas diversas áreas da vida humana. Descobertas científicas e tecnológicas acontecem numa progressão cronológica que muitas vezes não nos damos conta de como o tempo tem avançado. O mundo encontra-se em contínua mudança, isto tem provocado expressivas alterações no modo de vida da sociedade. Novas tecnologias surgem a cada dia, antes mesmo que a anterior seja completamente compreendida e dominada. A educação neste contexto, precisa acompanhar estas transformações para conseguir atrair a atenção dos alunos criando nos mesmos a curiosidade e a busca inconstante pelo saber. É importante que a educação sem desprezar suas raízes, atue sobre o presente com os olhos voltados para o futuro; que sem desprezar as ferramentas tradicionais, adote também as modernas; que sem abandonar fórmulas aprovadas, tenha coragem de poder ultrapassar essa barreira levando-nos a aproveitar e a dar sua participação a essa revolução tecnológica.

Observam-se dificuldades no processo de ensino-aprendizagem de conteúdos em que o aluno não é capaz de visualizar o fenômeno da maneira em que ele ocorre. Desse modo, compete ao professor utilizar recursos que permitam ao aluno conhecer algo abstrato e perceber sua ligação com o real, facilitando a aprendizagem.

No campo das ciências exatas, temos um número significativo de alunos que levantam questionamentos quanto à aplicabilidade de conceitos ensinados no currículo que compõe a base de sua trajetória estudantil, sobretudo no ensino de matemática.

A Matemática sempre esteve presente na vida do homem. Desde os tempos mais remotos em que o homem vivia da caça e da pesca já utilizava a Matemática mesmo que de maneira intuitiva. A mesma vem sendo inclusa ao longo do caminho da humanidade, interagindo com as transformações que ocorreram e que continuam a ocorrer na sociedade e no próprio homem. Ela foi criada e vem sendo desenvolvida pelo homem em função das suas necessidades de sobrevivência no meio social.

Segundo D'Ambrosio (1989) a comunidade de Educação Matemática internacionalmente vem clamando por renovações na atual concepção do que é a matemática escolar e de como essa matemática pode ser abordada. Sabe-se que a típica aula de matemática em nível de primeiro, segundo ou terceiro graus ainda é uma aula expositiva, em que o professor passa para o quadro negro aquilo que ele julga importante. O aluno, por sua vez, copia da lousa para o seu caderno e em seguida procura fazer exercícios de aplicação, que nada mais são do que uma repetição na aplicação de um modelo de solução apresentado pelo professor. Essa prática revela a concepção de que é possível aprender matemática através de um processo de transmissão de conhecimento. Mais ainda, de que a resolução de problemas reduz-se a procedimentos determinados pelo professor.

Os professores em geral mostram a matemática como um corpo de conhecimentos acabado e polido. Ao aluno não é dado em nenhum momento a oportunidade ou gerada a necessidade de criar nada, nem mesmo uma solução mais interessante. O aluno assim passa a acreditar que na aula de matemática o seu papel é passivo e desinteressante.

A conseqüência desta prática resulta num grande número de alunos desmotivados a aprender, estigmatizando a disciplina matemática como desinteressante ou complexa demais e sem relação com o cotidiano.

O que se percebe atualmente é que a Matemática ainda não conseguiu se vencer do estigma de bicho de sete cabeças, por outro lado há quem queira perpetuar a Matemática acessível apenas a um seleto grupo chamados de crânios. Essa visão de Matemática se contrapõe aquela que considera o conhecimento em constante construção e os indivíduos, no processo de interação social com o mundo reelaboram, complementam, complexificam e sistematizam os seus conhecimentos. Essa aquisição de conhecimentos lhe permite transformar suas ações e, portanto alterar suas interações com esse mesmo mundo no nível de qualidade.

A interação entre os professores e os alunos na escola precisa partir de novas estruturas sociais, isto porque o ensino da Matemática requer a troca de idéias entre os membros da sala de aula, ou dividir tarefas do dia a dia, mas também enfrentar dificuldades e superar divergências existentes nessa relação.

Neste sentido, a busca de novas estratégias de ensino ou a apropriação de recursos para a promoção de uma aprendizagem que se torne mais significativa, faz-se necessária.

Neste contexto, o vídeo surge como um recurso de comunicação que possibilita a apresentação de conteúdos de maneira dinâmica, devendo, no entanto, ser analisado e escolhido de maneira consciente e criteriosa por parte dos professores (MACHADO, 2008). Diversos autores têm considerado que a presença do vídeo na escola guarda uma série de possibilidades como elemento de atração ou de reforço do interesse do aluno, despertando a sua curiosidade e motivando-o (FERRÉS, 1996). A quebra de ritmo que altera a rotina da sala de aula, a diversificação das atividades ali realizadas (ARROIO & GIORDAN, 2006) e a expectativa de que “alguma coisa diferente vai acontecer” (POWLIK & FORTENBERRY, 2001), são algumas delas.

O uso desta ferramenta audiovisual no ensino é bastante difundida, principalmente nos últimos anos, com o desenvolvimento tecnológico nas áreas de informática e engenharia. Porém, no ensino de disciplinas ligadas à área das ciências exatas ainda é restrito, talvez por uma tradição histórica da área, que se apóia quase que exclusivamente em alternativas didáticas voltadas para a prática continuada de exercícios, no desenvolvimento de conteúdos teóricos.

Por este motivo, surge o presente trabalho, cuja intenção é a elaboração de propostas de atividades matemáticas que abordem os conteúdos da disciplina para o ensino médio usando como recurso a exibição de Numb3rs, uma série de televisão americana, com abordagem científico-matemático, sem deixar de lado o entretenimento de ação policial do FBI. Um dos protagonistas da serie é um professor Doutor em matemática que juntamente com seu irmão agente do FBI conseguem solucionar casos complexos utilizando conceitos matemáticos.

Um levantamento bibliográfico de alguns trabalhos realizados como Serres; Mazzei; Becker e Bassos intitulado “Vídeo e ação: a Matemática na solução de mistérios”, Dantas & Machado cujo título é “O uso pedagógico do vídeo no ensino de engenharia – um estudo de caso no curso de engenharia química da PUCRS” e Neto & Siqueira com o título “A Química e o seriado Numb3rs: Uma abordagem multidisciplinar da radioatividade”, pode mostrar que a série em questão tem sido objeto de estudo nas diversas áreas das ciências exatas, podendo citar a divulgação de trabalhos aplicados na área de química e física, além da matemática.

Deste modo, a realização de leituras das pesquisas já publicadas, bem como o resumo de alguns textos que mostram a aplicação da série em salas de aula do ensino médio e superior, em instituições públicas e privadas, serviu como base para fundamentação da elaboração das propostas didáticas que serão expostas no presente trabalho. Para tanto, essa dissertação está organizada em três capítulos.

No primeiro capítulo, está a apresentação da série Numb3rs, onde se mostra o principal enredo no qual a mesma se desenvolve, o elenco que a compõe, sua divisão em episódios entre outros detalhes. Para realização deste trabalho selecionamos apenas alguns episódios da primeira temporada da série. Tal escolha justifica-se, sobretudo por conta dos conteúdos curriculares apresentados nos mesmos, onde se podem traçar as propostas a ser aplicada na sala de aula de uma maneira mais dinâmica, neste sentido a seleção de alguns episódios da série foram necessárias para a delimitação de um trabalho mais preciso.

O segundo capítulo apresenta alguns resumos selecionados de trabalhos já realizados nesta temática, onde poderiam se identificar quais assuntos seriam abordados ou readaptados para explicação do conteúdo em sala de aula, tendo como base o episódio selecionado.

O terceiro capítulo é composto pela apresentação das propostas didáticas que poderão ser utilizadas em sala de aula usando a Série Numb3rs como recurso pedagógico para a aprendizagem matemática. Cada proposta didática de trabalho baseado no episódio selecionado consta de uma fundamentação teórica a cerca do conteúdo escolhido, bem como a descrição das sugestões de atividades a serem utilizadas. Salientamos ainda que se tratam de propostas, ainda não aplicadas, cujo critério de seleção se deu pelo fato de que os conteúdos abordados em cada episodio estão diretamente ligados ao assuntos que compõe o currículo de matemática para o segmento escolar escolhido (ensino médio).

Por fim, apresenta-se a conclusão do trabalho esperando que as sugestões aqui apresentadas sejam de grande utilidade para as aulas de matemática. Fazendo com que as mesmas possam ganhar uma nova conotação, permitindo que os alunos sintam-se motivados a aprender, aguçando a curiosidade e o interesse pela disciplina desmistificando a imagem da matemática como uma matéria sem sentido ou difícil de aprender.

Capítulo 1

Neste capítulo apresentaremos alguns dados sobre a série **Numb3rs** que tem como diferencial o uso da matemática na elucidação de crimes.

1.1 Números de Numb3rs

Numb3rs é uma série de televisão americana com abordagem científico-matemático, sem deixar de lado o entretenimento de ação policial do FBI. Foi produzido pelos irmãos Ridley Scott e Tony Scott. Criada por Nicolas Falacci e Cheryl Heuton, foi produzida pela Rede de Televisão Paramount/CBS e levada ao ar pela rede CBS nos Estados Unidos. Também foi exibido pelo canal 5 na Grã-Bretanha, pelo Telecine Action e pela A&E no Brasil. Em Portugal foi transmitida pelo canal Fox Crime e Fox life.

O quadro 1, abaixo, lista o número de episódios de cada temporada juntamente com o ano de exibição.

Tabela 1. Temporadas de Numb3rs

Temporada	Ano de exibição	Número de episódios
1º	2005	13
2º	2005/2006	24
3º	2006/2007	24
4º	2007/2008	18
5º	2008/2009	23
6º	2009/2010	16

Numb3rs foi encerrado após seis temporadas que totalizaram 118 episódios. Sua estréia teve uma média de 25 milhões de telespectadores, caindo para 15 milhões em seu segundo episódio. Mesmo assim, a primeira temporada fechou com uma média de 12 milhões de telespectadores garantindo-lhe uma segunda temporada. Ao longo das temporadas seguintes a série se manteve entre 10 e 12 milhões, mas a partir da quarta caiu para 9 milhões, sendo que em sua sexta e última já registrava uma média de 8 milhões.

Ao todo participaram dessa série 367 atores, tendo como elenco principal da 1º temporada Judd Hirsch (Alan Eppes), David Krumholtz (Charlie Eppes), Peter MacNicol (Dr. Larry Fleinhardt), Alimi Ballard (David Sinclair), Sabrina Lloyd (Terry Lake (Season 1)), Rob Morrow (Don Eppes).

Os episódios da 1º temporada tiveram os seguintes títulos: **Episódio 101** - Piloto, **Episódio 102 -** Princípio da Incerteza , **Episódio 103** – Vetor, **Episódio 104** – A corrupção estrutural, **Episódio 105 - P**rincipal suspeito , **Episódio 106** – Sabotagem , **Episódio 107** - Realidade falsificada , **Episódio 108** – Crise de identidade, **Episódio 109** – Atirador Zero, **Episódio 110** – Bomba suja, **Episódio 111** – Sacrifício, **Episódio 112** – Borda Barulhenta e **Episódio 113** – Caça ao homem.

Os protagonista desta série são dois irmãos: Don Eppes (Rob Morrow), que é um agente do FBI e Charlie Eppes (David Krumholtz) Doutor em matemática e professor de uma universidade americana. Com a equipe de Don, Dr. Larry que é um amigo de Charlie formado em física, Amita que é uma aluna de doutorado que está sendo orientada por Charlie, e do pai deles, um engenheiro e projetista urbano, os irmãos Eppes solucionam diversos crimes, com a ajuda sempre eficiente da matemática e de outras áreas.

A matemática por trás dos episódios de numb3rs é real, as equações apresentadas nos quadros-negros são matematicamente válidas e aplicáveis nas situações apresentadas em cada episódio. A série recebeu assessoria de integrantes do corpo de pesquisa e desenvolvimento da Wolfram, a empresa que é criadora do software Mathematica.

Capítulo 2

Neste capítulo colocamos os resumos de alguns trabalhos de autores que de uma forma ou de outra enfocam o uso da série Numb3rs como um recurso para o ensino de matemática.

2.1 Resumos dos trabalhos

O primeiro trabalho analisado foi o texto de Serres; Mazzei; Becker e Bassos, intitulado "Vídeo e ação: a Matemática na solução de mistérios" foi um trabalho aplicado na Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS) e publicado em 2009 no XX simpósio Brasileiro de Informática na educação, aborda a realização de um trabalho que retrata uma experiência pedagógica aplicada a alunos do ensino médio de uma escola do Rio Grande do Sul. O principal objetivo do trabalho era desmistificar a impressão de que a matemática só tinha aplicabilidade nas escolas como componente curricular. Pretendia-se, portanto fazer com que os alunos relacionassem a matemática escolar com as vivencias cotidianas, deste modo por meio de uma abordagem diferente do que estavam acostumadas no ambiente escolar os alunos poderiam visualizar as aplicações desta disciplina em contextos variados. Para a realização das atividades de "Enriquecimento escolar" como denominavam esta proposta os pesquisadores utilizaram inicialmente uma série da TV americana "Numb3rs". Assim após apresentar os episódios da série aos alunos, eram oferecidas atividades que proporcionavam possibilidades de apropriação de conceitos matemáticos, desenvolvendo uma percepção e abertura para discussão, reflexão e reconstrução de idéias, estabelecendo relações para além do espaço da sala de aula e do conteúdo programático escolar. Os autores em questão retratam a experiência realizada com o episodio piloto da série, e a proposta utilizada com os alunos, além de outros episódios não retratados no texto. Nesta proposta eles trabalharam com o mapa da cidade tentando localizar o lugar mais provável para encontrar um suposto criminoso trabalhando com probabilidade. Além da serie americana, ainda outros recursos foram utilizados e registrados os resultados obtidos, puderam concluir que os vídeos apresentados serviram para motivar os alunos a participarem das aulas, passando de espectadores para atores e autores do processo de aprender, incentivando e ampliando a capacidade de argumentação, discussão e explicação do raciocínio tornando a aprendizagem da matemática mais prazerosa e com sentido real.

O segundo trabalho de Dantas & Machado cujo título é "O uso pedagógico do vídeo no ensino de engenharia – um estudo de caso no curso de engenharia química da PUCRS,", sob a orientação do Prof. Dr. Cláudio Luiz Frankenberg – FENG e Prof[a]. Dr. Helena Sporleder Côrtes – FACED realizado na Pontifícia Universidade Católica do Rio grande do Sul – PUCRS, publicado em 2009 no XX simpósio Brasileiro de Informática na educação. O principal objetivo do trabalho referido é o de mostrar quanto o uso de ferramentas audiovisuais pode enriquecer o trabalho realizado nas áreas das ciências exatas. O autor do trabalho utiliza como elemento norteador a série americana "Numb3rs" cuja trama policial tem como protagonista um professor de matemática que auxilia seu irmão agente do FBI na solução de casos complicados, sempre utilizando a matemática como elemento indispensavelmente e fundamental. Por meio da exibição da série é desenvolvida a aplicação de conceitos e princípios básicos que comprovam a matemática presente no cotidiano, o que vem desmistificar aquela imagem da matemática como uma disciplina exclusivamente curricular cuja utilidade é somente em sala de aula como parte de um programa específico para a formação acadêmica. Os autores citam alguns episódios e quais os conteúdos da área podem ser aplicados para resolução do enigma em questão, assim estatística, probabilidade, criptografia, teoria de números são assuntos que podem ser retratados nos mesmos. O principal interesse é o de mostrar como um seriado de TV pode ser um recurso poderoso na abordagem de conteúdos no ensino da área de matemática de forma a tornar o trabalho com esta disciplina algo mais prazeroso e real no uso cotidiano.

O texto de Neto & Siqueira, tem como título "A Química e o seriado Numb3rs: Uma abordagem multidisciplinar da radioatividade." Foi publicado em 2008 no XIV Encontro Nacional de Ensino de Química (XIV ENEQ). Neste trabalho, os autores apontam o resultado da aplicação de uma proposta didática com a utilização de um episódio da serie Numb3rs como elemento metodológico no desenvolvimento da construção do conhecimento escolar nas disciplinas de matemática e química em uma escola particular da região metropolitana de Recife. Os mesmos destacam que as séries de televisão conseguem atrair a atenção de públicos devido a sua capacidade de retratar situações ou fatos que identificam o dia a dia das pessoas, apontando o que a progressão da série leva a uma evolução do personagem dentro da temática abordada na mesma. A escolha da série Numb3rs se dá justamente por que a abordagem dela se centraliza na resolução de problemas investigativos do FBI onde dois irmãos, um agente e o outro professor, conseguem solucionar diversos crimes com ajuda da matemática e de outras ciências. Os autores apontam ainda que a escolha do trabalho com séries justifica-se dada ao fato de ser um elemento motivador já que em geral os estudantes não conseguem perceber a conexão existentes entre os conteúdos escolares e o cotidiano de cada um. A escolha do 10 episódio da primeira temporada segundo os autores do texto se dá por conta de que existe a possibilidade neste episódio em questão de se explorar mais de uma disciplina, trazendo assim o caráter multidisciplinar, pois pode explorar além da matemática, conceitos químicos e físicos. Neste sentido os autores abordam a possibilidade de desenvolver um trabalho multidisciplinar contextualizando com a realidade. Deste modo o episódio escolhido poderá levar aos alunos a ampliar o conhecimentos referentes a função exponencial (Matemática) e radioatividade (química) no ensino médio. Assim, eles descrevem algumas atividades desenvolvidas pelos estudantes organizados em duplas, onde o indicativo de variadas fontes de pesquisa para sistematização do trabalho proposto e a entrega de relatórios conseguem trazer à percepção do quanto e em que dimensão ocorre a aprendizagem. Os autores puderam concluir que o uso da série em questão tornou-se bastante significativo para a construção do conhecimento, reforçando assim a efetivação de um recurso positivo para a realização de um trabalho dinâmico na aprendizagem escolar da matemática e das demais ciências citadas no trabalho.

Vale salientar que a proposta de trabalho apresentada nesta dissertação se difere dos trabalhos já publicados, sobretudo por trazerem de forma clara e objetiva a o resumo do que acontece no episódio, um referencial teórico de cada conteúdo abordado nos episódios selecionados e propostas de atividades diversificadas que podem ser aplicadas. Temos também a descrição de como o professor poderá atuar em sala de aula utilizando o seriado de TV como recurso metodológico, o que irá propiciar uma aprendizagem diferenciada, levando a compreensão dos alunos do ensino médio para uma abordagem matemática mais presente no cotidiano, dando sentido a presença daquele determinado conteúdo no currículo do segmento escolar em questão.

Capítulo 3

Neste capítulo colocamos propostas de atividades utilizando episódios da série Numb3rs como um recurso para o ensino de matemática com resolução de problemas. Cada proposta didática de trabalho baseado no episódio selecionado consta de uma fundamentação teórica a cerca do conteúdo escolhido, bem como as sugestões de atividades a serem utilizadas.

3.1 Proposta para o 1º episódio de Numb3rs

No nosso cotidiano, lidamos com situações em que está presente a incerteza do resultado, embora, muitas vezes, os resultados possíveis sejam conhecidos. Por exemplo: No lançamento de um uma moeda honesta, podemos obter cara ou coroa, mais só saberemos o resultado exato quando o experimento se concretizar, ou seja, após a moeda ser lançada. Se estamos interessados na face voltada para cima quando jogamos um dado honesto, os resultados possíveis são 1, 2, 3, 4, 5, 6, mas só saberemos o resultado quando o experimento se completar, ou seja, quando o dado atingir a superfície sobre a qual foi lançado. Mesmo se esses experimentos forem repetidos várias vezes, nas mesmas condições, não podemos prever exatamente qual será o resultado.

Um experimento cujo resultado, embora único, é imprevisível, é denominado experimento aleatório.

Um experimento aleatório apresenta as seguintes características:

- Pode se repetir várias vezes nas mesmas condições;
- É conhecido o conjunto de todos os resultados possíveis;
- Não se pode prever o resultado antes da execução do experimento.

Como não podemos prever o resultado de um experimento aleatório, procuramos descobrir as possibilidades de ocorrência de cada um.

A teoria da probabilidade surgiu para tentar medir a “chance” de ocorrer um determinado resultado num experimento aleatório.

Segundo FARIAS (2010), a probabilidade é uma função definida no conjunto de todos os eventos de um espaço amostral.

3.1.1 O Espaço Amostral

O conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório é denominado espaço amostral, que podemos indicar por U.

Exemplo:

No lançamento de uma moeda: U = {cara, coroa}.

No lançamento de um dado: U = {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

No nascimento de uma criança: U = {menino, menina}

3.1.2 Eventos aleatórios

Os subconjuntos de U são chamados eventos aleatórios e os elementos de U são chamados eventos elementares.

Exemplo:

No lançamento de um dado, em relação á face voltada para cima, podemos ter os eventos:

- o número é par: {2, 4, 6}
- o número é menor que 5: {1, 2, 3, 4}
- o número múltiplo de 7: { }

Exemplo:

Três cartas são retiradas, sem reposição, de um baralho que tem três cartas de cada uma das cores azul, vermelha, preta e branca. Dê um espaço amostral para esse experimento e liste os eventos:

a) todas as cartas selecionadas são vermelhas;

b) uma carta vermelha, uma carta azul e uma carta preta são selecionadas;

c) três diferentes cores ocorrem;

d) todas as quatro cores ocorrem.

Solução:

Vamos denotar por A; V; P e B as cores azul, vermelha, preta e branca, respectivamente. Então

U = {(x_1; x_2; x_3) : x_i = A; V; P;B; i = 1; 2; 3}

Os eventos são:

a = {(V; V; V)}

b= {(V; A; P); (V; P; A); (A; V; P); (A; P; V); (P; V; A); (P; A; V)}

c= {(V; A; P); (V; P; A); (A; V; P); (A; P; V); (P; V;A); (P; A; V); (V; A; B); (V; B; A); (A; V; B); (A; B; V); (B; V; A); (B; A; V); (V; B; P); (V; P; B); (B; V; P); (B; P; V); (P; V;B); (P ; B; V); (B; A; P); (B; P; A); (A; B; P); (A; P; B); (P; B; A); (P; A; B)}

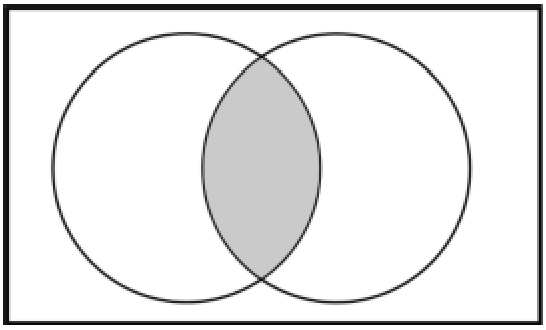
d = Ø

3.1.3 Operações com eventos aleatórios

3.1.3.1 Interseção

O evento interseção de dois eventos A e B é o evento que equivale à ocorrência simultânea de A e B . Seguindo a notação da teoria de conjuntos, a interseção de dois eventos será representada por $A \cap B$:

Figura 1. Interseção de dois eventos



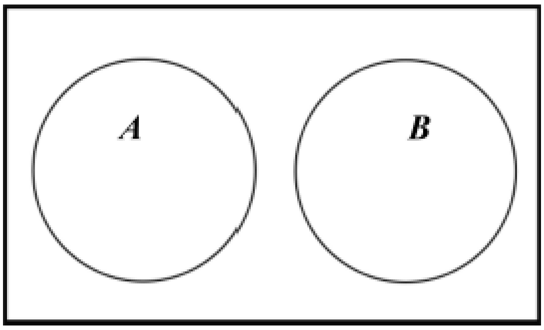
Note que

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \, e \, x \in B$$

3.1.3.2 Exclusão

Dois eventos A e B são mutuamente exclusivos quando eles não podem ocorrer simultaneamente, isto é, quando a ocorrência de um impossibilita a ocorrência do outro. Isto significa dizer que os eventos A e B não têm elementos em comum. Então, dois eventos A e B são mutuamente exclusivos quando sua interseção é o conjunto vazio, isto é, $A \cap B = \emptyset$

Figura 2. Eventos mutuamente exclusivos



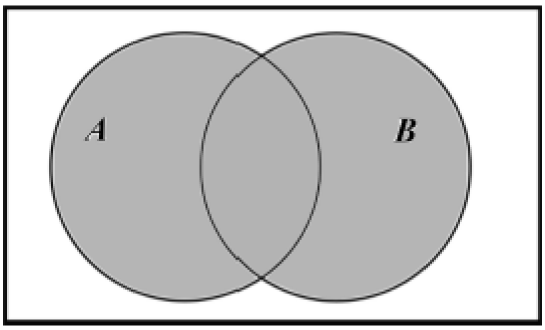
3.1.3.3 União

A união de dois eventos A e B é o evento que corresponde à ocorrência de pelo menos um deles.

Note que isso significa que pode ocorrer apenas A, ou apenas B ou A e B simultaneamente.

Esse evento será representado por $A \cup B$

Figura 3. União de dois eventos



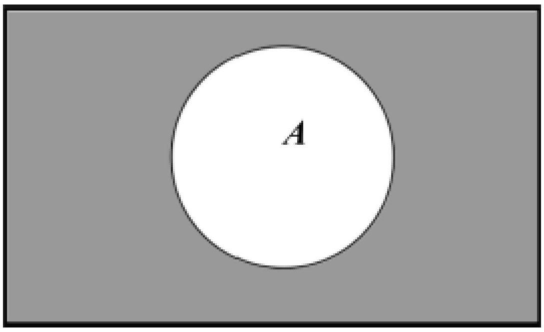
Note que

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \ \ ou \ \ x \in B$$

3.1.3.4 Complementação

O complementar de um evento A, denotado por $\overline{A}$ ou A^c, é a negação de A. Então, o complementar de A é formado pelos elementos que não pertencem a A.

Figura 4. Complementar



Complementar do evento $A = \overline{A}$

Note que

$$x \in \overline{A} \Leftrightarrow x \in A$$

e também que

$$A \cup \overline{A} = U$$

3.1.3.5 Diferença

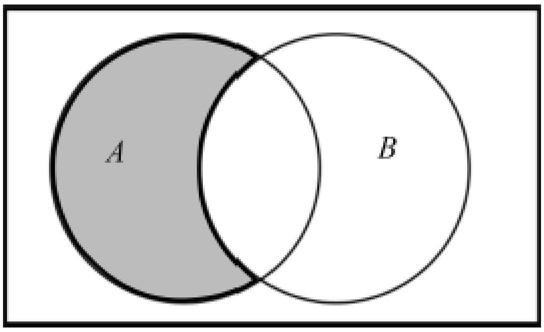
A diferença entre dois eventos A e B, representada por A – B; é o evento formado pelos elementos do espaço amostral que pertencem a A mas não pertencem a B. Note que podemos pensar em A – B como o complementar de B relativo ao evento A.

Note que

$$x \in A - B \Leftrightarrow x \in A \, e \, x \notin B \Leftrightarrow x \in A \cap \overline{B}$$

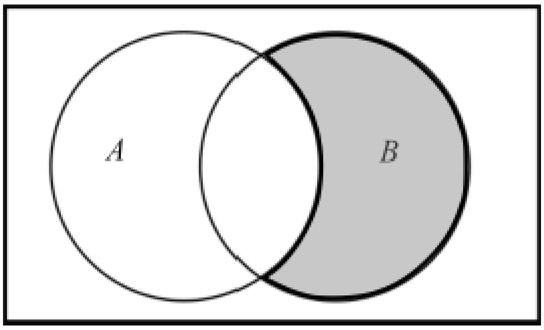
Além disso, A – B ≠ B - A; conforme ilustrado na Figura.

Figura 5. Diferença A – B



Diferença A – B

Figura 6. Diferença B – A



Diferença B - A

3.1.4 Probabilidade de um evento em um espaço amostral finito

Intuitivamente, a noção de probabilidade de um acontecimento é uma medida da possibilidade de ocorrência do acontecimento quando se realiza a experiência aleatória à qual o acontecimento está ligado.

A probabilidade de ocorrer determinado evento é dada pela razão entre o número de casos favoráveis à realização desse acontecimento e o número total de casos possíveis.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)}$$

Convém destacar que

$P(A) \geq 0$

$P(U) = 1$

$A \cap B = \phi \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Propriedades:

I- $0 \leq P(A) \leq 1$

II- P(Ø) = 0

III- P(U) = 1

Exemplo:

Uma caixa com bolas contém 5 vermelhas, 3 azuis e 2 pretas. Se uma pessoa escolhe aleatoriamente 1 destas bolas, ache a probabilidade de escolher:

a) 1 vermelha

n = 5 + 3 + 2 = 10 bolas (todas as bolas são igualmente prováveis)

P(V) = 5/10

b) 1 azul ou 1 preta

Solução: n = 5 + 3 + 2 = 10 bolas (todas as bolas são igualmente prováveis)

b) $P(A \cup P) = 5/10$

3.1.5 Análise combinatória

A análise combinatória lida essencialmente com problemas de contagem. Muitas vezes, contar diretamente os resultados possíveis é muito trabalhoso. Por isso foi desenvolvidos as técnicas de contagem indireta.

3.1.5.1 Princípio fundamental da contagem

Se um acontecimento é composto por duas etapas sucessivas, independentes uma da outra, e a etapa 1 pode ocorrer de *n* modos e a etapa 2 pode ocorrer de *m* modos, então, o número de possibilidades é;

$$n \, . \, m$$

Esse resultado é conhecido como princípio fundamental da contagem e serve de base para a resolução de problemas de contagem.

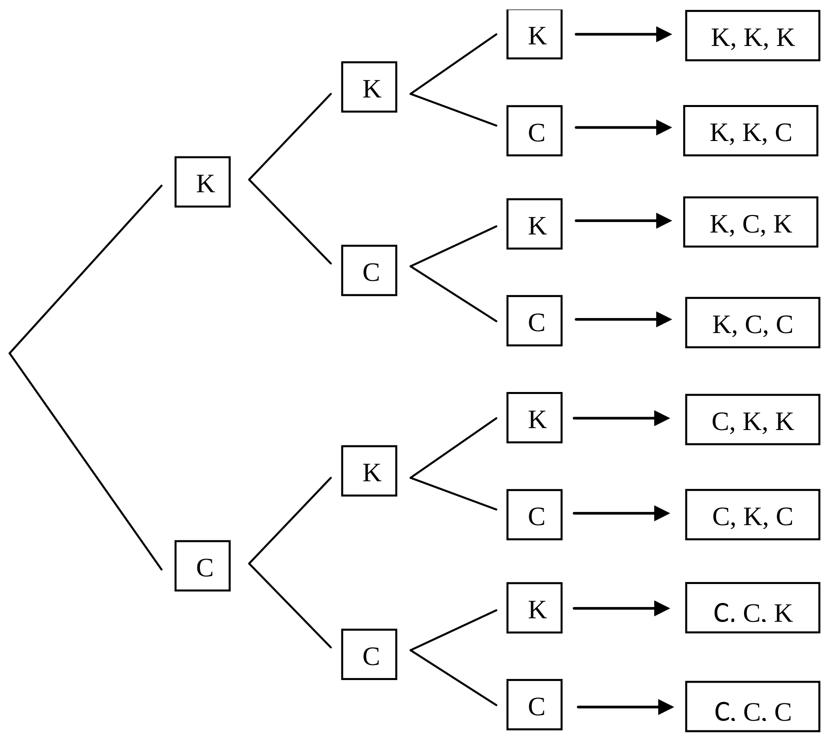
Exemplo:

Uma moeda não viciada é lançada três vezes sucessivamente. Quais são as sequências possíveis de faces obtidas nesses lançamentos?

Solução:

Vamos representar coroa por C e cara por K e representar a árvore de possibilidades.

Figura 7. Árvore de possibilidades



Cada sequência obtida é uma tripla ordenada de faces (f_1, f_2, f_3), em que $f_1 \in \{K, C\}$, $f_2 \in \{K, C\}$ e $f_3 \in \{K, C\}$.

Logo o número de possibilidades é 2. 2. 2 = 8.

Dentro da Análise Combinatória existem 3 tipos de agrupamentos que merecem atenção especial – os **ARRANJOS**, as **PERMUTAÇÕES** e as **COMBINAÇÕES.**

3.1.5.2 Arranjos

Dado um conjunto com n elementos distintos, chama-se de arranjo dos n elementos, tomados K a K, a qualquer sequência ordenada de K elementos distintos escolhidos entre os n existentes.

$$A_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

a ordem dos elementos é **importante**!

Exemplo:

$65 \neq 56$

Lembre-se:

$$\begin{cases} 0! = 1 \\ 1! = 1 \\ n! = n.(n-1).(n-2).... \end{cases}$$

Exemplo:

Quantos números de 3 dígitos distintos podem ser formados pelos números 1, 3, 5, 7 e 9?

Solução:

$$A_{5,3} = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5.4.\,3.2!}{2!} = 60$$

3.1.5.3 Permutação:

Quando a sequência ordenada (arranjo) é formado por todos os elementos disponíveis, dizemos que se trata de uma permutação.

$$P_n = A_{n,n} = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$$

$$P_n = n! \;\rightarrow \text{Caso particular de arranjo}$$

Exemplo:

Determine o número de anagramas formados a partir da palavra PATO.

$$P_4 = 4! = 24$$

3.1.5.4 Permutação com elementos repetidos

O número de permutações de *n* elementos, onde n_1 são de um tipo, n_2 de outro tipo... é:

$$P_n^{n_1, n_2, \ldots, n_r} = \frac{n!}{n_1!.n_2!\ldots n_r!}$$

Exemplo:

Qual o número de anagramas formados a partir de BANANA?

$$P_6^{(3,2)} = \frac{6!}{3!2!} = 60\ anagramas$$

3.1.5.5 Permutações circulares

O número de maneiras de distribuir *n* elementos distintos em forma de círculo é igual a:

$$PC_n = (n-1)!$$

3.1.5.6 Combinação

Dado um conjunto A com *n* elementos distintos, chama-se combinação dos **n** elementos de A, tomados K a K, qualquer subconjunto de A formado por K elementos.

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

A ordem não é importante.

Exemplo:

De quantos modos distintos Lucas pode escolher quatro entre as noves camisetas regata que possui para levar em uma viagem?

Solução:

$$C_{9,4} = \frac{9!}{4!(9-4)!} = \frac{9!}{4!5!} = 126$$

3.1.6 Probabilidade da União de dois eventos

Sejam A e B eventos de um mesmo espaço amostral ***U.*** Vamos encontrar uma expressão para a probabilidade de ocorrer o evento A ou o evento B, isto é, a probabilidade da ocorrência do evento $A \cup B$.

Consideremos dois casos:

$$A \cap B = \varnothing$$

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$$

Nesse caso, A e B são chamados eventos mutuamente exclusivos.

$$A \cap B \neq \varnothing$$

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

O evento $A \cap B$ representa a ocorrência simultânea dos eventos A e B.

Exemplo:

No lançamento de um dado, qual é a probabilidade de que o número obtido na face superior seja múltiplo de 3 ou de 4?

Solução:

A: ocorre múltiplo de 3 $\Rightarrow$A = {3, 6}

B: ocorre múltiplo de 4 $\Rightarrow$A = {4}

$p(A \cap B) = \varnothing$

Como $A \cap B = \varnothing$, $p(A \cup B) = p(A) + p(B) = \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$

Exemplo:

No lançamento de um dado, qual é a probabilidade de que o número obtido na face superior seja múltiplo de 2 ou de 3?

Solução:

A: ocorre múltiplo de 2 $\Rightarrow$A = {2, 4, 6}

B: ocorre múltiplo de 3 $\Rightarrow$A = {3, 6}

$A \cap B = 1$

$p(A \cap B) = \frac{1}{6}$

$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

3.1.7 Probabilidade Condicional

Dados dois eventos A e B, denota-se por P(A | B) a probabilidade condicional do evento A, dado que ocorreu B, por:

$$p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

Exemplo:

Um dado é lançado duas vezes sucessivamente. Sabendo-se que a soma dos pontos obtidos é menor que 6, qual é a probabilidade de que em ao menos um lançamento ocorra a face 2?

Solução:

n(U) = 6.6 = 36

A: Sair a face 2: (1,2), (2,1), (2,2), (2,3) e (3,2).

B: Soma menor que 6: (1,2), (2,1), (2,2), (2,3), (3,2), (1,4), (4,1), (1,1), (1,3) e (3,1)

$$p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{\frac{5}{36}}{\frac{10}{36}} = \frac{1}{2} = 50\%$$

3.1.8 Atividades Didáticas com o tema Probabilidade

Para realização desta atividade será utilizado o 1º episódio da 1º temporada de Numb3rs. Na seção seguinte consta o resumo deste episódio e em seguida as atividades didáticas propostas.

3.1.8.1 Resumo: Piloto

Durante as investigações para capturar um estuprador em série e assassino, os agentes do FBI marcaram em um mapa da cidade de Los Angeles os pontos onde aconteceram os crimes.

Don Eppes agente do FBI e irmão do professor universitário Charlie, brilhante gênio da matemática, vai a casa de seu pai e deixa o mapa sobre a mesa. Nesse momento seu irmão

Charlie aproveitou para ler as anotações. Ao ver no mapa 13 cenas de crimes espalhados por uma região contida Charlie questiona ao seu irmão “Seus caras estão analisando a significância desses lugares?” e Don responde “Sim, isso é chamado de análise previsiva e o FBI é pioneiro nisso. Charlie já tinha ajudado seu irmão em outros casos que envolviam diretamente números e estava disposto a tentar ajudar. Durante essa conversa Don Responde: “Este é diferente. Não é número”, e Charles responde “Tudo é número”.

Após dar essa resposta ele leva seu irmão até uma janela para o ver no jardim o regador que estava molhando as plantas e tentando provar que ali era matemática, e que no mapa construído pelo FBI também tinha matemática. Então ele começa a explicar aquele exemplo ao seu irmão.

Charlie pergunta “Você vê o regador, Certo?” e Don responde “ Sim, eu vejo o regador”, novamente ele faz uma outra pergunta “ Você vê as gotas?” e seu irmão diz “sim, vejo as gotas”.

Charlie acrescenta “Até usando matemática, não há maneira pratica de prever onde a próxima gota d`água vai cair. Há muitas variáveis. Entretanto, digamos que eu não possa ver o regador. Do padrão das gotas, eu posso calcular sua localização precisa.”

Neste momento ele tentava explicar a seu irmão que todas aquelas gotas tinham algo em comum e aqueles crimes também tinham, ou seja, o que chamamos de um ponto de origem. Então Don acrescenta “Você esta dizendo que pode dizer-nos onde o assassino vive?”

Charlie diz “sim” porque ele percebeu um padrão entre os locais que o assassino age.

Para tentar resolver esse crime com base nas evidencias apresentadas, o professor de matemática usa uma equação para identificar o ponto de origem do assassino. Desta forma ele acaba utilizando um pouco de Offender Profiling, que é um método de identificar o autor de um crime com base em uma análise da natureza do delito e da maneira em que foi cometida. Vários aspectos da personalidade do criminoso são determinados a partir de suas escolhas antes, durante e depois do crime.

Além disso, ele também utilizou algumas técnicas que os físicos usam para encontrar buraco negro e os efeitos que eles tenham com os objetos em sua volta. Ele fica obcecado pelo caso que acaba consultando Dr. Larry que é seu amigo e professor de física.

Ao chegar ao FBI, Charlie tenta explicar sua linha de raciocínio, então argumenta “Quando pegamos lugares para atacar as vitimas ou deixar o corpo, o estuprador irá escolher lugares que possam parecer ter sido escolhido aleatoriamente”, mas para obter uma sequência aleatória é muito difícil, logo ao tentar sair de um padrão o estuprador acabou caindo em outro.

Sendo assim, baseando-se nos dados e a localização de cada crime ele conseguiu nomear uma área no mapa onde pudesse vir a ser a residência do estuprador, e usando probabilidade, verificou o valor percentual correspondente a cada crime, sendo o crime praticado por um morador daquela região denominada de ponto de origem.

3.1.8.2 Atividades Didáticas

Após a exibição e os comentários, o professor pode utilizar as atividades abordando probabilidade para que o estudante desenvolva os conceitos básicos de probabilidade, conforme os exemplos a seguir.

Atividade 1: Determinando probabilidade

No lançamento de um dado honesto, determinar a probabilidade de se ter:

a) O número 2

b) Um número par

c) Um numero múltiplo de 3

Atividade 2: Probabilidade no baralho

De Um baralho com 52 cartas tiram-se, sucessivamente, sem reposição, duas cartas. Determinar a probabilidade dos eventos:

a) As duas cartas são damas

b) As duas cartas são de ouros

Atividade 3: Código de segurança

O código de acesso de um cartão de crédito é formado por seis dígitos decimais. Cada dígito é um número inteiro que pode assumir qualquer valor entre 0 e 9. Tendo extraviado seu cartão de crétido, Alexandre receia que um uma pessoa extranha o encontre e tente descobrir o código. Calcule a probabilidade aproximada de alguém acertar o código do cartão de Alexandre num total de 1000 tentativas aleatórias e distintas.

Atividade 4. Mega Sena

A vontade de ganhar na loteria e ficar milionário é o sonho de muitos apostadores, que procuram as casas lotéricas para apostar nas loterias da Caixa Econômica Federal. A mais desejada por todos é a Mega Sena, sua cartela é composta de 60 números, de 1 a 60. Neste jogo, a aposta mínima é constituída de seis números e a máxima de quinze, mas os valores das apostas variam de acordo com o aumento dos números apostados, pois quanto mais números marcados maior a chance de ganhar.

a) Qual a probabilidade de um ganhador fazendo a aposta mínima?

b) E se ele fizer a aposta máxima, qual será sua chance de ganhar?

Atividade 5. Operações com eventos aleatórios

Numa prova com três questões (A, B e C) verificou-se que:

- 5 alunos acertaram as três questões;
- 15 alunos acertaram as questões A e C;
- 17 alunos acertaram as questões B e C;
- 12 alunos acertaram as questões B e A;
- 55 alunos acertaram só a questão A;
- 55 alunos acertaram só a questão B;
- 64 alunos acertaram só a questão C;
- 13 alunos erraram as três questões.

Um aluno é escolhido ao acaso. Qual é a probabilidade de ele ter acertado:

a) Pelo menos duas questões?

b) Exatamente uma questão?

Atividade 6. Sede do mundial de natação

Pequim, Tóquio, Los Angeles, Nova York, Buenos Aires, Cidade do México, Rio de Janeiro, Montreal, Madri, Paris, Londres e Berlin são cidades que se candidataram a sede de um campeonato mundial de natação.

a) Se a cidade escolhida não fica na Europa, qual é a probabilidade de que seja o Rio de Janeiro?

b) Se nem Nova York e nem Buenos Aires foram escolhidas, qual é probabilidade de a nova cidade sede ser européia?

3.2 Proposta para o 5º episódio de Numb3rs

Os números primos são conhecidos pela humanidade há muito tempo. No papiro Rhindi, por exemplo, há indícios de que o antigo povo egípcio já possuía algum conhecimento sobre esse tipo de números. No entanto, os registros mais antigos de um estudo explícito sobre números primos é devido aos gregos.

Os Elementos de Euclides (cerca de 300 a.C), contém teoremas importantes sobre números primos, incluindo a demonstração de sua infinitude, o teorema fundamental da aritmética. Euclides também mostrou como construir um número perfeito a partir de um primo de Mersenne.

Ao grego Eratóstenes, atribui-se um método simples para o cálculo de números primos, conhecido atualmente como crivo de Eratóstenes. Por outro lado, nos tempos atuais, os grandes números primos são encontrados por computadores, através de testes de primalidade mais sofisticados, como por exemplo o teste de primalidade AKS.

3.2.1 Definição de número primo

Um número primo é um número natural que tem exatamente dois divisores positivos (distintos).

A propriedade de ser um primo é chamada "primalidade", se um número inteiro tem módulo maior que um e não é primo, diz-se que é composto. Como "dois" é o único número primo par, o termo "primo ímpar" refere-se a todo primo maior do que dois.

Um teste de primalidade é um algoritmo para determinar se um dado número inteiro é primo. Este tipo de teste é usado em áreas da Matemática como a criptografia. Diferentemente da fatoração de inteiros, os testes de primalidade geralmente não fornecem os fatores primos, ele indica apenas se o número fornecido é ou não primo.

Segundo Oliveira (2011) um dos primeiros testes de primalidade é do matemático grego Eratóstenes (285-194 a.C) e ficou conhecido como Crivo de Eratóstenes. O Crivo de Eratóstenes é um algoritmo que nos permite achar todos os números primos que são menores que são menores ou iguais que um natural N dado.

. Ele criou um sistema simples e objetivo para descobrir números primos. Para representar a forma de utilizar o crivo, vamos considerar uma figura com os números naturais de 1 a 100.

1º passo: localizar o primeiro número primo figura.

2º passo: marcar todos os múltiplos desse número.

3º passo: localizar o segundo número primo (3) e marcar todos os seus múltiplos.

4º passo: Repetir a operação até o último número.

Figura 8. Crivo de Eratóstenes

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Existem infinitos números primos, como demonstrado por Euclides por volta de 300 a.C. O conceito de número primo é muito importante na teoria dos números. Um dos resultados da teoria dos números é o Teorema Fundamental da Aritmética, que afirma que qualquer número natural diferente de 1 pode ser escrito de forma única, como um produto de números primos, chamados fatores primos, este processo se chama decomposição em fatores primos.

Através da decomposição dos números em fatores primos podemos representar os números de acordo com o Teorema Fundamental da Aritmética. Observe alguns exemplos onde os números são escritos na forma fatorada.

8 = 2 x 2 x 2
9 = 3 x 3
10 = 2 x 5
27 = 3 x 3 x 3
32 = 2 x 2 x 2 x 2 x 2
50 = 2 x 5 x 5
28 = 2 x 2 x 7
110 = 2 x 5 x 11

Desta forma onde estiver número natural envolvido provavelmente os números primos estarão presentes. Uma das formas de se utilizar o número primo na sociedade está na criptografia, que *é* um dos principais mecanismos de segurança que se pode usar para se proteger dos riscos associados ao uso da Internet.

3.2.2 Criptografia

A Criptografia é bastante antiga, pois já havia indícios, no sistema de escrita hieroglífica dos egípcios e dos romanos, da utilização de códigos secretos para transmitir seus planos de batalha (TAMAROZZI, 2001).

O termo criptografia surgiu da fusão das palavras gregas “kryptós” e “gráphein”, que significam “oculto” e “escrever”, respectivamente (SINGH, 2003) e é conhecida como arte ou ciência de escrever em códigos (TAMAROZZI, 2001) .

Trata-se de um conjunto de conceitos e técnicas que visa codificar uma informação de forma que somente o emissor e o receptor possam acessá-la, evitando que um intruso consiga interpretá-la.

Figura 9. Criptografia

(Fonte: http://www.infowester.com/criptografia.php)

Para Silva (2008 apud MENEZES e CARVALHO, 2010),

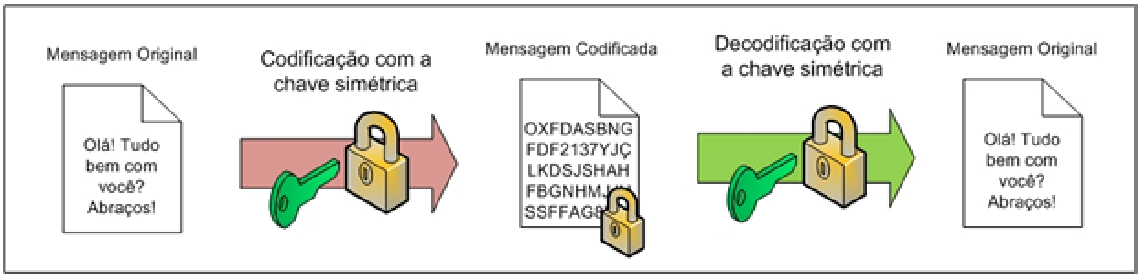
> A criptografia é tão antiga quanta a própria escrita, já estava presente no sistema de escrita hieroglífica dos egípcios. Os romanos utilizavam códigos secretos para comunicar planos de batalhas. O mais interessante é que a tecnologia de Criptografia não mudou muito até meados deste século. Depois da Segunda Guerra Mundial, com a invenção do computador, a área realmente floresceu incorporando complexos algoritmos matemáticos. Durante a guerra, os ingleses ficaram conhecidos por seus esforços para decifração de mensagens. Na verdade, esse trabalho criptográfico formou a base para a ciência da computação moderna. (SILVA, 2008 apud MENEZES e CARVALHO, 2010, p. 2).

Segundo Terada (1988), a “Criptografia consiste em codificar informações, usando-se uma chave, antes que estas sejam transmitidas, e em decodificá-las, após a recepção”.

De acordo com o tipo de chave usada, os métodos criptográficos podem ser subdivididos em duas grandes categorias: criptografia de chave simétrica e criptografia de chaves assimétricas.

A criptografia de chave simétrica**,** também chamada de criptografia de chave secreta ou única, utiliza uma mesma chave tanto para codificar como para decodificar informações, sendo usada principalmente para garantir a confidencialidade dos dados. Observe o esquema abaixo:

Figura 10. Esquema de funcionamento da criptografia simétrica



(Foto: Reprodução/GTA.UFRJ)

Entretanto, quando estas operações envolvem pessoas ou equipamentos diferentes, é necessário que a chave secreta seja previamente combinada por meio de um canal de comunicação seguro (para não comprometer a confidencialidade da chave).

A criptografia de chaves assimétricas, também conhecida como criptografia de chave pública, utiliza duas chaves distintas: uma pública, que pode ser livremente divulgada, e uma privada, que deve ser mantida em segredo por seu dono. Quando uma informação é codificada com uma das chaves, somente a outra chave do par pode decodificá-la.

Entre os algoritmos que usam chaves assimétricas, têm-se o RSA que é o mais conhecido e o Diffie-Hellman.

O algoritmo RSA (Rivest, Shamir and Adleman) foi criado em 1977 por Ron Rivest, Adi Shamir e Len Adleman nos laboratórios do MIT (**M**assachusetts **I**nstitute of **T**echnology), é um dos algoritmos de chave assimétrica mais usados.

Seu funcionamento consiste na multiplicação de 2 números primos muito grandes para a geração de um terceiro número. Para quebrar essa criptografia, seria necessário a fatoração desse número para encontrar os 2 números primos que o geraram, porém, para isso é necessário um poder muito alto de processamento, o que acaba inviabilizando a tarefa. A chave privada são os dois números primos e a pública é o terceiro número.

ElGamal foi criado por Taher ElGamal, esse algoritmo faz uso de um problema matemático conhecido por "logaritmo discreto" para se tornar seguro. Sua utilização é freqüente em assinaturas digitais.

A assinatura digital permite comprovar a autenticidade e a integridade de uma informação, ou seja, que ela foi realmente gerada por quem diz ter feito isto e que ela não foi alterada. Ela baseia-se no fato de que apenas o dono conhece a chave privada e que, se ela foi usada para codificar uma informação, então apenas seu dono poderia ter feito isto. A verificação da assinatura é feita com o uso da chave pública, pois se o texto foi codificado com a chave privada, somente a chave pública correspondente pode decodificá-lo.

Na sociedade atual, utilizamos diariamente senhas para muitas coisas, e isso está diretamente ligada a criptografia. Desta forma a abordagem desse tema no ensino de matemática para os alunos do ensino médio pode ser muito bem recebido e pode ser um motivador para os alunos.

Segundo a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (BRASIL, Lei 9394, 1996), o Ensino Médio apresenta as seguintes finalidades:

> - a consolidação e o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos no ensino fundamental, possibilitando o prosseguimento de estudos;
> - a preparação básica para o trabalho e a cidadania do educando, para continuar aprendendo, de modo a ser capaz de se adaptar com flexibilidade a novas condições de ocupação ou aperfeiçoamento posteriores;
> - o aprimoramento do educando como pessoa humana, incluindo a formação ética e o desenvolvimento da autonomia intelectual e do pensamento crítico;
> - a compreensão dos fundamentos científico-tecnológicos dos processos produtivos, relacionando a teoria com a prática, no ensino de cada disciplina.

Nessa etapa final da Educação Básica, espera-se que o estudante esteja preparado para atuar na sociedade, na qual está inserido, de forma efetiva, sabendo se comunicar claramente, resolver problemas do dia-a-dia e do trabalho, tomar decisões, trabalhar com eficiência e em cooperação.

Para Silva (2009), os temas para o Ensino Médio podem ser selecionados de acordo com quatro critérios: riqueza, reflexão, realidade e responsabilidade. Esses temas possibilitar o uso de conteúdos de Matemática, permitindo que o aluno aprofunde e exercite os conteúdos já trabalhados em séries anteriores, crie estratégias de resolução de problemas, tenha autonomia na resolução das atividades didáticas e trabalhe em grupo, buscando aprimorar a sua formação acadêmica e social.

Para Tamarozzi (2001), a Criptografia possibilita o desenvolvimento de atividades didáticas envolvendo o conteúdo de funções e matrizes, os quais se constituem em material útil para exercícios, atividades e jogos de codificação, em que o professor pode utilizá-los para fixação de conteúdos. Nesse contexto, pode-se perceber que a Criptografia possibilita o desenvolvimento de atividades didáticas, que podem ser desenvolvidas no Ensino Médio, levando os alunos a aprimorarem seus conhecimentos. Segundo Groenwald e Franke (2008), o tema Criptografia permite interligar os conteúdos matemáticos às situações do mundo real e ajuda a desenvolver habilidades e competências na resolução de problemas, a criar estratégias de resolução, a ter autonomia durante o processo de aprendizagem, com isso, tornando-os mais autoconfiantes e concentrados na realização das atividades.

Assim, a importância da Criptografia na sociedade e o seu contexto histórico tornam-se também fatores motivadores para que os alunos se interessem pela sua utilização, em especial, em atividades envolvendo esse assunto

3.2.3 Atividades Didáticas com o tema Criptografia

Para realização desta atividade será utilizado o 5º episódio da 1º temporada de Numb3rs. Na seção seguinte consta o resumo deste episódio e em seguida as atividades didáticas propostas.

3.2.3.1 Resumo: Suspeito Primário

Emily participava da festa em comemoração a seus cinco anos em sua casa quando foi raptada. O FBI foi acionado e os agentes Don e Terry que iniciam a investigação. Charlie que é consultor do FBI ao visitar o local percebe que Ethan pai da menina seqüestrada também era matemático. Após olhar o material em que Ethan trabalhava então ele comenta para Don “Isto é teoria de números abstratos e a maior parte lidando com números primos”, e continua, “isso é coisa séria, isso é trabalho muito avançado”.

Durante o período em que o FBI encontra-se na casa, Ethan recebe um telefonema e em seguida manda o FBI se retirar, mas antes de sair Charlie acaba conversando com ele “Você está fazendo progresso para provar a Hipotése de Riemann”.

A Hipotése de Riemann é um problema em aberto tão famoso e faz parte de uma lista dos problemas do milênio. O instituto Clay de Matemática oferece um prêmio de um milhão de dólares pela solução.

Charlie percebe que os seqüestradores não estão interessados no prêmio, e ao chegar ao departamento do FBI, começa explicar sobre números gigantes e que eles são usados na criptografia.

A criptografia, considerada como a ciência e a arte de escrever mensagens em forma cifrada ou em código, é um dos principais mecanismos de segurança que se pode usar para se proteger dos riscos associados ao uso da Internet. Seu objetivo é esconder o conteúdo, para que este não esteja acessível a terceiros.

Ele acrescenta "Mas para criptografia, não usamos apenas números grandes, usamos números grandes que são criados multiplicando-se números primos grandes, porque primos são os blocos básicos na construção da matemática."

Então quebrar esses números gigantes em componentes primos é incrivelmente difícil e é assim que funciona basicamente a segurança da internet e esse é um dos motivos pelos quais os Hackers não conseguem quebrar as criptografias facilmente. Por causa da complexidade da matemática.

Em 1997, três matemáticos desafiaram leitores da Scientific American a fatorar um número de 129 dígitos e esse desafio levou 17 anos com centenas de pessoas tentando.

Ethan estava prestes a resolver a Hipótese de Riemann e com a resolução também conseguiria decifrar o código de segurança da internet. Assim, percebendo o real motivo do sequestro. Charlie diz ao FBI " Uma vez que ele tenha isso, você pode encontrar a constante de decriptação e conseguir entrar em contas de bancos, transações de cartão de créditos, ou seja, praticamente qualquer site seguro."

Como o prazo dado pelo seqüestrador estava esgotando o professor se prontificou a trabalhar com Ethan e perceberam que não seria possível chegar a solução no tempo estipulado, foi quando Don teve a idéia de dar uma resposta falsa para os seqüestradores, pois enquanto eles tentavam rodar o algoritmo o FBI faria o rastreamento.

Charlie conversando com Ethan diz: "Reimann é uma chave mestre que abre todas as portas e eles tem um plano para abrir uma única porta. Não Podemos dar a chave mestre, mas podemos abrir a porta para eles, criando uma chave mestre falsa e desenhando a tranca que ela abre".

Eles criaram uma interface falsa na Reserva Federal e dessa forma ao tentar abrir a tranca que foi construída especialmente para ser aberta com chave falsa, os seqüestradores deixaram um registro virtual e foram rastreados pelo FBI.

3.2.3.2 Atividades Didáticas

Após a exibição o professor pode utilizar as atividades com o uso de códigos para que o estudante desenvolva os conceitos básicos de Criptografia, conforme o exemplo a seguir.

Atividade 1: Cifra de César:

a) Codifique a frase "Usando números, nós podemos resolver os maiores problemas que conhecemos" utilizando a Cifra de César.

Quadro 1- Quadro do método de substituição utilizado por Júlio César

Alfabeto Normal	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
Alfabeto Cifrado	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C

Fonte: adaptado de Singh(2003, p. 27)

b) Agora Decodifique a frase "r-f-d-p-l-q-k-r-s-d-u-d-d-i-h-o-l-f-l-g-d-g-h-h-v-w-d-h-p-y-l-y-h-u-p-r-v-r-s-u-h-v-h-q-w-h", utilizando a Cifra de César.

Em seguida desenvolva a atividade com criptogramas, com o objetivo de revisar e criar estratégias de resolução de problemas com os conceitos já estudados de Aritmética, do Ensino Fundamental, conforme a atividade 2.

Atividade 2 – Criptograma:

Qual é o número? Na adição apresentada a seguir, letras iguais representam o mesmo algarismo e letras diferentes algarismos diferentes. Encontre o número ABCDE.

$$\begin{array}{r} A\ B\ C\ D\ E \\ B\ C\ D\ E \\ +\quad C\ D\ E \\ D\ E \\ E \\ \hline A\ A\ A\ A\ A \end{array}$$

a) O aluno pode tentar resolver a atividade por tentativa e erro, onde se atribui para cada letra valores aleatórios.

b) O aluno pode resolver a questão sistematizando as informações relevantes, formulando hipóteses e elaborando estratégias para resolução.

Atividade 3 – Código com Função linear.

a) Considere o Quadro 2 abaixo que, para cada letra do alfabeto, associa um número inteiro de 1 a 26 e codifique a mensagem "A matemática rege o mundo.", utilizando o Código com Função Linear, sabendo que a função codificadora é $f(x) = 4x + 3$.

Quadro 2- Valor numérico de cada letra.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26

Fonte: adaptado de Singh(2003, p. 27)

b) agora decodifique a mensagem "34, - 2, 55, 10, 34, - 2, 55, 22, 4, - 2", utilizando o quadro 3, sabendo que a função codificadora é $f(x) = 3x – 5$.

O aluno pode resolver a questão sistematizando as informações relevantes e elaborando estratégias para resolução.

Informação relevante: A = 1, B = 2, C = 3, ... e $f(x) = 3x – 5$

Prevendo resultados: Espera-se que o aluno realize o cálculo da função inversa e calcule a imagem para cada valor da mensagem cifrada

Atividade 4 – Código com Função quadrática:

Considere Quadro 2 da atividade anterior e a função cifradora $f(x) = x^2 – 2x + 1$, codifique a mensagem "Tudo é matemática".

Atividade 5 – Código com Função exponencial

Considere Quadro 2 da atividade anterior e a função cifradora $f(x) = 2^x$, codifique a mensagem "Alice é linda".

Primeiramente relaciona-se para cada letra do alfabeto a um número, que corresponderá aos valores de x na função, conforme o quadro 3.

A seguir, escolhe-se uma função exponencial cifradora $f(x) = 2^x$.

A mensagem a ser transmitida ao receptor deve ser a seqüência numérica obtida pela imagem da função, para cada letra do texto criptografado.

3.3 Proposta para o 8º episódio de Numb3rs

Uma sequência ou sucessão é um conjunto ordenado. Assim, por exemplo, temos:

- A sequência dos dias da semana;
- A sequência dos meses do ano;
- A sequência dos números naturais;

Em todas essas situações observamos uma certa ordem nos elementos da sequência. Esses elementos são também chamados termos da sequência. Na sequência dos meses do ano, temos:

1º termo: Janeiro, 2º termo: fevereiro, ..., 12º termo: dezembro.

Sequências ou progressões são funções do tipo $f : A \to B$, onde A é domínio da função formado pelo conjunto dos números naturais. O contradomínio da função é o B, e é formado por um conjunto numérico e são indicados por a_1, a_2, a_3, ..., a_n.

Uma sequência finita de n termos é uma função cujo domínio é o conjunto numérico $N^* = \{1, 2, 3, ..., n\}$. Os números do contradomínio são indicados por $\{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$.

Uma sequência infinita é uma função f cujo domínio é $N^* = \{1, 2, 3, ..., n, ...\}$, e o contradomínio é indicado por $\{a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...\}$. Assim, $f(1) = a_1$, $f(2) = a_2$, ..., $f(n) = a_n$, ...

Exemplos:

1º) A sequência dos números ímpares positivos é infinita: (1, 3, 5, 7, 9, ...), na qual $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_3 = 5$, etc.

2º) A sequência dos números quadrados perfeitos é infinita: (1, 4, 9, 16, ...)

3º) A sequência dos quatro primeiros múltiplo de 3 é finita: (0, 3, 6, 9)

Algumas sequências são dadas por regras ou leis matemáticas chamadas leis de formação, que possibilitam explicar todos os seus termos.

A sequência $a_n = 2n - 1, n \in N*$ é dada por:

- para n = 1 $\Rightarrow$ $a_1 = 2 . 1 - 1 = 1$;

- para n = 2 $\Rightarrow$ a_2 = 2 . 2 – 1 = 3;
- para n = 3 $\Rightarrow$ a_3 = 2 . 3 – 1 = 5; etc

Portanto, a sequência é (1, 3, 5, 7, ...), ou seja, a dos números naturais ímpares.

Uma função também pode relacionar o elemento anterior (a_n) com o posterior (a_{n+1}) da seguinte maneira: $a_{n+1} = a_n + r$, sendo *r* uma razão fixa, e são conhecidas como razão de uma progressão.

Os dois tipos de sequências matemáticas mais comuns são a progressão aritmética, que contém números tais que o anterior somado a uma razão fixa resulta no posterior, e progressões geométricas, que contém números tais que o anterior multiplicado pela razão fixa resulta no posterior.

Exemplos:

- (1,5,9,13,...) é uma progressão aritmética infinita (o que se indica pela reticiências ...) de razão igual a 4;
- (1,3,9,27,81) é uma progressão geométrica finita de razão igual a 3.

3.3.1 Progressões Geométricas

A taxa de crescimento relativo de uma grandeza é dada pela razão entre o seu aumento e seu valor inicial. Assim, uma grandeza que passa do valor a para b tem taxa de crescimento relativo igual a $i = \frac{b - a}{a}$.

Isto significa que a razão entre o aumento da grandeza e o valor inicial e a expressão pode ser escrita como:

$$b - a = a.i \Rightarrow b = a + a.i \Rightarrow b = a.(1 + i).$$

Exemplo:

1º) A taxa de crescimento relativo da produtividade de uma usina de açúcar, cuja produção semanal passa de 5 toneladas para 8 toneladas, é de 60%, pois $\frac{8-5}{5} = \frac{3}{5} = 0,60 = 60\%$

2º) Um determinado produto que custava R$180,00 sofreu um aumento de 20%. Qual o novo preço?

Solução. $\begin{cases} \text{a (preço antigo)} = R\$180,00 \\ \text{i (taxa de aumento)} = 20\% = 0,2 \Rightarrow b = 180.(1+0,2) = 180(1,2) = R\$216,00 \\ \text{b (preço novo)} \end{cases}$

3º) Em 2011 uma usina produziu 200.000Kg de açúcar. Quantos quilogramas essa usina produziu no período de 2011 a 2013, se o aumento de produção anual for sempre de 10% em relação ao ano anterior?

Produção em 2011 = 200.000

Produção em 2012 = 220.000

$$\begin{cases} \text{a (produção antiga)} = 200.000 \\ \text{i (taxa de aumento)} = 10\% = 0,1 \Rightarrow b = 200.000(1+0,1) = 200.000(1,1) = 220.000 \\ \text{b (produção nova)} \end{cases}$$

Produção em 2013 = 242.000

$$\begin{cases} \text{a (produção antiga)} = 220.000 \\ \text{i (taxa de aumento)} = 10\% = 0,1 \Rightarrow b = 220.000(1+0,1) = 220.000\ (1,1) = 242.000 \\ \text{b (produção nova)} \end{cases}$$

Produção em 2012 = 266.200

$$\begin{cases} \text{a (produção antiga)} = 242.000 \\ \text{i (taxa de aumento)} = 10\% = 0,1 \Rightarrow b = 242.000\ (1+0,1) = 242.000(1,1) = 266.200 \\ \text{b (produção nova)} \end{cases}$$

Assim temos a seguinte sequência (200.000, 220.000, 242.000, 266.200)

Sequências com esse tipo de lei de formação são chamados progressões geométricas. No 3º exemplo, o valor 1,1 é chamado de razão da progressão geométrica e indicado por q (no exemplo, q = 1,1). Dizemos que os termos dessa sequência estão em progressão geométrica.

Progressão geométrica (PG) é toda sequência de números não nulos na qual é constante o quociente da divisão de cada termo, a partir do segundo, pelo antecedente. Esse quociente constante é chamado razão q da progressão.

Exemplos:

1º) PG: (1, 2, 4, 8, 16, ...) , cada termo vale o dobro do anterior. A razão é $q = \frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \ldots = 2$

.

Repare que a taxa de crescimento é constante: $i = \frac{2-1}{1} = \frac{4-2}{2} = \frac{8-4}{4} = \ldots = 1$ e que q = 1 + 1.

2º) $PG: \left(18, 6, 2, \frac{2}{3}, \ldots\right)$, cada termo vale a terça parte do anterior. Logo a razão é $q = \frac{6}{18} = \frac{2}{6} = \ldots = \frac{1}{3}$. Repare que a taxa de crescimento é constante: $i = \frac{6-18}{18} = \frac{2-6}{6} = \frac{2/3 - 2}{2} = \ldots = -\frac{2}{3}$ e que $q = 1 + \left(-\frac{2}{3}\right)$.

OBS: Quando a razão é menor que 1, a progressão geométrica é decrescente.

3º) $PG: (4, 4, 4, 4, \ldots)$ -> todos os termos são iguais. Logo a razão é $q = \frac{4}{4} = \ldots = 1$. Repare que a taxa de crescimento é constante e nula: $i = \frac{4-4}{4} = 0$ e que $q = 1 + 0$.

OBS: Quando a razão é igual 1, a progressão geométrica é constante.

3.3.1.1 Termo Geral de uma Progressão Geométrica

Considere a PG genérica da forma (a_1, a_2, a_3, ... , a_n, ...) cuja a razão é q.

Temos que: $$\begin{cases} a_1 \\ a_2 = a_1.q \\ a_3 = a_2.q = (a_1.q).q = a_1.q^2 \quad \Rightarrow a_n = a_1.q^{n-1} \\ a_4 = a_3.q = (a_1.q^2).q = a_1.q^3 \\ \ldots \end{cases}$$

Exemplo:

1º) Qual é o 7º termo da PG (2, 6, ...)?

$$Dados: a_1 = 2,\ q = 3,\ n = 7$$
$$a_7 = 2.3^{7-1} \Rightarrow 2.3^6 \Rightarrow a_7 = 1458$$

2º) Calcule o 1º termo de uma PG em que a_4 = 375 e q = 5.

$$Dados: a_4 = 375,\ q = 5,\ n = 4$$
$$a_4 = a_1.q^{4-1} \Rightarrow 375 = a_1.5^3 \Rightarrow 375 = 125\, a_1 \Rightarrow a_1 = \frac{375}{125} \Rightarrow a_1 = 3$$

3.3.1.2 Soma dos termos de uma Progressão Geométrica finita

Considerando os termos da PG finita com n elementos, temos: $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$. Escrevendo em função de a_1 e q, vem:

$$-\begin{cases} S_n = a_1 + a_1.q + a_1.q^2 + a_1.q^3 + \ldots + a_1.q^{n-2} + a_1.q^{n-1} \\ qS_n = a_1.q + a_1.q^2 + a_1.q^3 + \ldots + a_1.q^{n-1} + a_1.q^n \end{cases}.$$

$$S_n - q.S_n = a_1 + a_1.q - a_1.q + a_1.q^2 - a_1.q^2 + a_1.q^3 - a_1.q^3 + \ldots + a_1.q^{n-1} - a_1.q^{n-1} - a_1.q^n$$

Simplificando e colocando em evidência, temos: $S_n(1-q) = a_1 - a_1.q^n \Rightarrow S_n = \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}$.

Exemplo:

1º) Determine a soma dos dez primeiros termos da PG (3, 6, 12, ...)

$$Dados: a_1 = 3,\ q = 2,\ n = 10$$

$$S_n = a_1\frac{(1-q^n)}{1-q} \Rightarrow S_{10} = 3.\frac{(1-2^{10})}{1-2} \Rightarrow 3.\frac{1-1024}{-1} \Rightarrow 3.1023 \Rightarrow S_{10} = 3069$$

2º) A soma dos termos de uma PG finita é 728. Sabendo que a_n= 486 e q = 3, calcule o primeiro termo dessa sequência.

$$Dados: S_n = 728,\ a_n = 486,\ q = 3$$

$$S_n = a_1\frac{(1-q^n)}{1-q} \Rightarrow S_n = \frac{a_1 - a_1q^n}{1-q} \Rightarrow S_n = \frac{a_1 - a_1q^{n-1}.q}{1-q} \Rightarrow 728 = \frac{a_1 - 486.3}{1-3}$$

$$\Rightarrow 728.(-2) = a_1 - 1458 \Rightarrow a_1 = 1458 - 1456 \Rightarrow a_1 = 2$$

3.3.1.3 Soma dos termos de uma Progressão Geométrica infinita

Considere a PG infinita com $|q| < 1$.

Temos: $1 > |q| > |q|^2 > |q|^3 > |q| \ldots > |q|^{n-1} > |q|^n$. Como $|a_n| = |a_1|.|q|^{n-1}$, os valores de $|a_n|$ vão diminuindo e se tornando cada vez menores. Então quando o número de termos aumenta infinitamente, lim a_n = 0.

Temos: $S_\infty = \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \dfrac{a_1 - a_1.q^n}{1-q} = \dfrac{a_1 - (a_1.q^{n-1}).q}{1-q} = \dfrac{a_1 - a_n.q}{1-q} = \dfrac{a_1 - (0).q}{1-q} = \dfrac{a_1}{1-q}$.

Exemplo:

Determine o limite da soma da PG infinita $\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+\frac{4}{27}+\ldots$

$$Dados: a_1=\frac{1}{3},\ q=\frac{\frac{2}{9}}{\frac{1}{3}}=\frac{2}{3},$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\frac{a_1}{1-q}\Rightarrow\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{2}{3}}\Rightarrow\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}}=1$$

3.3.2 Atividades Didáticas com o tema Progressão Geométrica

Para realização desta atividade será utilizado o 8º episódio da 1º temporada de Numb3rs. Na seção seguinte consta o resumo deste episódio e em seguida as atividades didáticas propostas.

3.3.2.1 Resumo: Crise de Identidade

Trevor Riley, procurado por fraude é encontrado morto em seu apartamento, com características semelhantes a um crime ocorrido no passado no qual Don tinha colocado o suspeito atrás das grades. Após esse crime Don se questiona dizendo "Eu realmente coloquei o cara errado na prisão?" e passa a duvidar sobre o crime ocorrido a um ano atrás.

Don precisava investigar esse caso e procura Charlie para dar uma analisada nas tabelas encontradas no computador de Trevor. Após uma analise ele percebe que Riley estava envolvido em uma fraude e diz "Riley estava fazendo uma fraude, com um esquema clássico piramidal". Ele mandou emails para investidores da Smith-Waterson parecendo comunicação oficial. Nos emails diziam que Riley era conectado à Smith-Waterson, pedindo aos investidores para mandar informações. Com essas informações ele podia entra em suas contas.

Como Riley era um homem muito esperto, ao invés de retirar grandes quantias, o que seria notado pelos correntistas, então Charles diz "ele tinha um esquema de tirar grandes somas sem criar alarme. Ele começava tirando dois dólares de cada conta, depois recolocava o dinheiro em alguns dias e assim por diante. Ao recolocar o dinheiro subtraídos de volta ele registrava como erros nas contas, como era quantidades pequenas ninguém checava.

Desta forma ele obtém quantias na forma de uma progressão geométrica. Uma progressão geométrica é uma sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é igual ao produto do termo anterior por uma constante, chamada de razão da progressão geométrica e neste caso seria 2.

Após 19º progressão Riley tinha conseguido a quantia $524.288 dólares. Então Don diz: “Porque ele sempre precisava de duas vezes mais contas para repor o que ele tirou” e seu irmão acrescenta ”Você acaba seus recursos e a pirâmide entra em colapso e vai tudo abaixo”. Don começa a investigar como Riley consegue a lista com os nomes e logo chega a namorada dele.

Don também começa a analisar o caso de Lisa, de novo, para verificar se não colocou um homem inocente na prisão. Para isso pede a seu irmão que veja as provas encontradas, para ver se ele falhou no caso passado. Então ele pergunta a Charlie “qual é a probabilidade desses dois crimes terem sidos feitos por pessoas diferentes?” e ele responde “supondo que ele não copiou a idéia do primeiro assassinato, há uma chance de 4,9% de isto ser uma coincidência”.

Logo após Charlie começa a questionar seu irmão sobre a testemunha do caso de Lisa Bayle. Ele realiza um teste com Terry levando a mesma a escolher um número e ela escolhe um número que estava anotado num papel. Isso também acontece com uma testemunha porque ela supõe ter que escolher uma das seis pessoas entre aquelas que eles estavam vendo mostrando que o reconhecimento de suspeito feito pelo FBI tinha falha. Em seguida Terry muda a forma de apresentar os suspeitos para as testemunhas e faz novamente o teste com a testemunha do caso Lisa e o condenado não foi reconhecido.

Don volta ao perito para ver a comparação das digitais e seu irmão também participa da análise. Como o perito afirmou que era de Cliff Howard, o suspeito inocente acabou sendo condenado. Então ele questiona a perita “como podemos saber que todos possuem sua própria impressão digital?”. Como a digital não estava completa ele começa a interrogar a agente. E ele continua “Probabilidade de combinação aleatória é o único modo de saber as chances de duas digitais combinarem?” e Terry completa “Combinação aleatória é usada em analise de DNA” e Charlie acrescenta “Digitais não existe probabilidade, elas simplesmente combinam ou não combinam. E ele prova que a identificação da digital foi feita de forma incorreta porque ela afirmou que era de um polegar e Charlie mostra que ela poderia ter olhado a digital por um outro ângulo. Essa nova analise acaba descartando o Salazar do crime relacionado a Lisa.

Assim, essas evidências provaram que Don estava certo e errado ao mesmo tempo. Após uma conversa com Larry, Charlie vai conversar com Don levando ele a investigar se há uma ligação entre as vítimas. Assim, ele percebe que duas testemunhas colocam a mesma pessoa em lugares diferentes, colocando o vizinho de Riley em contradição. Isso coloca Mark que era vizinho na cena do crime. Então Don vai ao trabalho de Mark e identifica a ligação entre os crimes. Desta forma ele chega a conclusão das investigações e o suspeito dos dois crimes, liberando o suspeito que tinha sido condenado de forma errada.

3.3.2.2 Atividades Didáticas

Após a exibição o professor pode utilizar as atividades abordando sequência para que o estudante desenvolva os conceitos básicos de progressão geométrica, conforme o exemplo a seguir.

Atividade 1: Próximo termo da sequência :

Na sequência abaixo, cada número, do terceiro em diante, é obtido a partir dos dois anteriores de acordo com uma certa regra: 12, 20, 32, 52, 84, 136, ... O próximo número é o:

(A) 220; (B) 224; (C) 228; D) 232; (E) 236

Atividade 2: Identificando padrões numéricos:

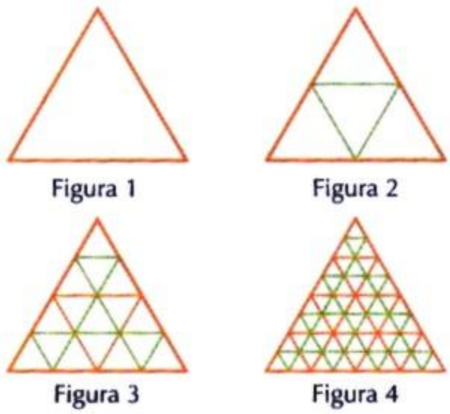
Descubra os dois termos seguintes das seqüências e determine qual o padrão de cada uma.

a) (2, 5, 8, 11, 14, 17, ...)
b) (3, 6, 12, 24. ....)
c) (1, 2, 4, 7, 11, ...)
d) (3, 6, 11, 18, 27, ...)
e) (2, 10, 12, 16, 17, 18, 19, ...)

Atividade 3: Observando as figuras:

Considere esta seqüência de figuras.

Figura 11. Sequência de triângulos



Na Figura 1, há 1 triângulo.

Na Figura 2, o número de triângulos menores é 4.

Na Figura 3, o número de triângulos menores é 16 e assim por diante.

Prosseguindo essa construção de figuras, teremos quantos triângulos menores na figura 7?

Atividade 4: Aumentando a produção:

Uma empresa produziu 10 000 unidades de certo produto em 2011. A cada ano seguinte produzirá 20% a mais desse produto em relação ao ano anterior. Quantas unidades desse produto a empresa produzirá no período de 2011 a 2015?

a) Utilizando uma calculadora, calcule o aumento de cada ano utilizando porcentagem apenas e preencha a tabela abaixo.

Tabela 2- Produção

Ano	Produção (em unidades)
2011	
2012	
2013	
2014	
2015	

b) Agora com uso da fórmula calcule a produção deste período.

Atividade 5: Equação e PG:

As raízes da equação do 2º grau $x^2 - 5x + 4 = 0$ são o 1º e o 2º termos de uma PG crescente. Determine o 6º termo dessa sequência.

Atividade 6: Xadrez

Conta a lenda que um rei solicitou a seus súditos que inventasse um novo jogo para diminuir o tédio que ele sentia. Um dos súditos inventou, então, o jogo de xadrez.

Figura 12. Xadrez

Fascinado pelo jogo, o rei chamou o inventor e prometeu-lhe como recompensa todas as riquezas que ele desejasse.

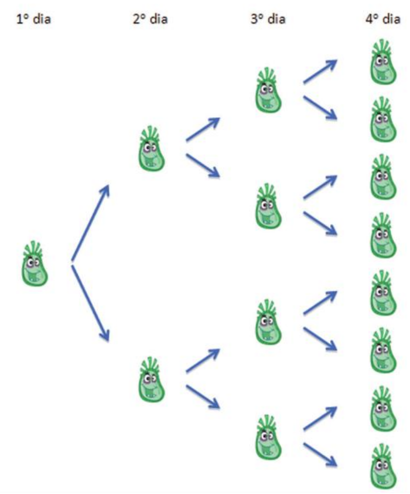
O astuto inventor pediu somente alguns grão de trigo, nas seguintes condições: um grão na primeira casa do tabuleiro de xadrez e, em cada casa seguinte, o dobro de grão que havia na casa anterior. Como o tabuleiro de xadrez tem 64 casas, determine a soma dos primeiros 64 termos da PG: 1,2, 4, 8, 16, 32, ... e descubra o valor pedido pelo inventor.

Atividade 7: Crescimento do número de protozoário:

A ameba é um protozoário e só pode ser vista ao microscópio. Após crescer até um certo tamanho, uma ameba se divide ao meio e produz outras duas. No dia seguinte, cada uma se divide ao meio novamente, formando quatro amebas no total. No terceiro dia o mesmo processo se repete e teremos oito amebas, e esse processo, teoricamente, pode continuar indefinidamente.

O desenho abaixo ilustra tal situação até o 4º dia.

Figura 13. Crescimento do número de protozoário



a) Quantas amebas existirão no 5º dia? Explique como encontrou este valor.

b) Utilizando uma sequência numérica, expresse o número de amebas que se reproduziram nos 6 primeiros dias.

c) Explique como podemos encontrar o número de amebas do 10º dia se conhecemos o número de amebas do 8º dia?

d) Explique como podemos encontrar o número de amebas do 22º dia se conhecemos o número de amebas do 23º dia?

e) Quantas amebas haverá no 11º dia?

3.4 Proposta para o 11º episódio de Numb3rs

3.4.1 Sistema de Numeração

No princípio o homem não precisava contar, pois retirava da natureza apenas o necessário para lhe satisfazer, não vivia em sociedade, não guardava mantimento, nem domesticava animais. Porém, já tinha noções de quantidades, fazia associações um a um para associar objetos concretos a outros objetos concretos. Portanto pouco progresso se fez no conhecimento de valores numérico e de relações entre grandezas até que se deu a transição do extrativismo, da caça e da pesca, para a produção de alimentos.

Com essa mudança fundamental, houve uma transformação, onde o homem muda de atitude perante a natureza deixando de ser um ser passivo tornando-se um ser ativo, dando inicio ao novo período, onde a necessidade de contar e de guardar essas informações tornou-se crescente, logo em todas as formas de culturas e sociedades, mesmo as mais rudimentares encontraram-se alguns conceitos de números e, a ele associado algum processo de contagem.

Desta forma, com a necessidade de contagem de uma quantidade maior de objeto, o homem sente a necessidade de sistematizar o processo de contagem e representar quantidades, e as civilizações de diversas partes do mundo desenvolveram vários tipos de sistema de contagem. Assim estabelece então um conjunto de símbolos juntamente com algumas regras que permitiram contar e representar os números.

Por fim, o processo de contagem consiste em fazer corresponder, objetos a símbolos, fazendo uma ponte entre o concreto e o conceito abstrato de números em sua representação adequada.

3.4.2 E o homem aprendeu a contar

A história dos símbolos matemáticos esta presente em todo processo histórico da humanidade, embora consistente, seu desenvolvimento encontra-se de forma solta, sem uma linha do tempo que possamos observa seu desenvolvimento, pois cada civilização desenvolvia um sistema próprio de contagem e de representação de quantidades, não existindo uma ligação intima entre elas, por isso não se relacionavam fato, que só começou a ocorrer quando se iniciou o comércio entre estes povos.

Pode-se dizer que o primórdio dos números se dá com a preocupação do homem em garantir que seus pertences pudessem ser guardados de forma prática, certificando-se que a quantidade de um dia fosse relativa ao do outro dia, que os animais dentro do curral pela manhã fosse igual a que ele prenderia a tarde.

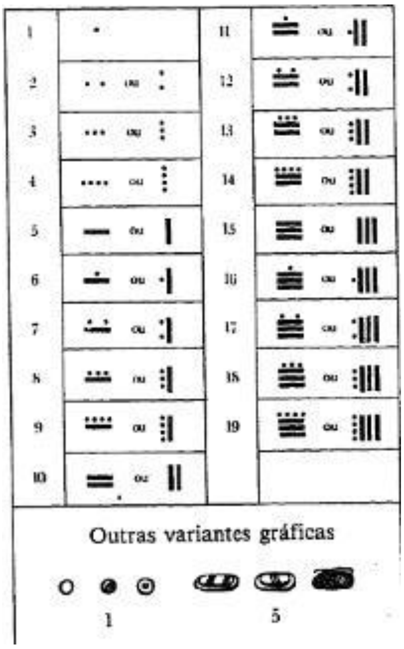
Assim iniciou-se o processo de correspondência um a um, onde um objeto ou animal representava uma pedra, risco em uma pedra ou pedaço de madeira, ou um nó em uma corda.

Esses processos foram evoluindo de modo que se criou o sistema de contagem de objetos, em as quantidades poderiam ser guardadas, embora de forma ainda não muito segura. Podemos destacar alguns desses sistemas abaixo.

3.4.3 O Sistema Maia

Um dos principais manuscritos Maias, o Codex de Desdren, revela a existência de base 20 munida com um zero, onde cada valor dos algarismos é determinado por sua posição escrita nos números. Percebe-se que até os dezenove, as unidades de primeira ordem desta numeração vigesimal é representada por símbolos de ponto e traços. Como se percebe no figura abaixo, essa representação Maia dos dezenove primeiros números inteiros.

Figura 14. Sistema Maia

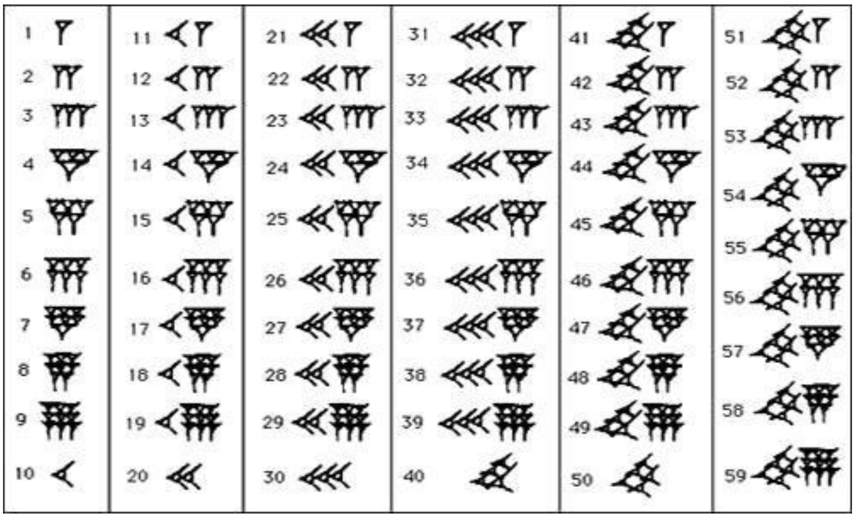


De acordo com Gundlach (1992, p.29), os números de 1 a 19 eram representados aditivamente pelo uso de combinações apropriadas de pontos e barras simbolizando 1 e 5, sendo o 19 representado por quatro pontos (1) e três barras(5), já no 20 começava a numeração posicional, os numerais sendo lidos verticalmente, de cima para baixo.

3.4.4 O sistema babilônico

O Segundo Ifrah (1997, p.20), os babilônios desenvolveram numa época anterior ao ano 2000 a. C., o sistema de numeração sexagesimal (base 60) que empregava o princípio posicional, na verdade esse sistema era uma mistura de base 10 com base 60, o sistema necessita de 60 algarismos diferentes de 0 a 59**.** Para compor esses números eles usam a base 10 também utilizada no sistema de numeração decimal, para associar símbolos que correspondiam aos 60 “algarismos” necessários. Conforme figura abaixo:

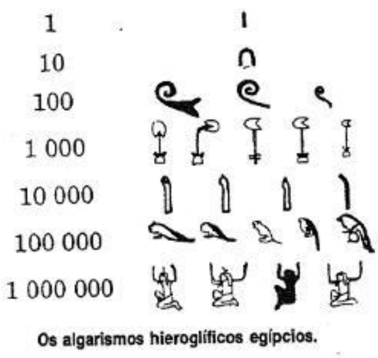
Figura 15. Sistema babilônico



3.4.5 Sistema de numeração egípcia

A numeração hieroglífica egípcia é diferente das dos sumérios. A primeira é decimal enquanto a outra é sexagesimal. Os sumérios faziam seus algarismos e signos sobre pedaços de argila enquanto os egípcios escupiam em monumentos de pedra conforme a figura abaixo.

Figura 16. Sistema egípcio



A numeração egípcia permite a representação dos números além do milhão através de hieróglificos especiais para indicar a unidade e cada uma de suas potencias de 10.

3.4.6 Sistema de numeração romana

O sistema romano também não se era possível efetuar cálculos, além disso, eles criaram uma regra a qual todo signo numérico colocado a esquerda de um algarismo de valor superior é dele abatido, o que tornou a numeração romana ainda mais insuficiente.

Segundo Gundlach (1992, p.24), nas inscrições mais antigas feitas em monumentos de pedra, o "um" era indicado por um traço vertical, o "cinco" era representado por V, talvez representando uma mão, o "dez" era representado por X que naturalmente sugere dois "V's". Não existe nenhuma informação segura para a origem de L para "cinqüenta". A palavra romana para "uma centena" era centum, e a palavra para "um milhar" era mille, e talvez por isso tenham sido usados o C para "uma centena" e o M para "um milhar", também era usado o símbolo par "um milhar", o que pode ter originado o D para "cinco centenas" se pensarmos no formato da parte dianteira deste símbolo que também era usado para "um milhar".

Esse sistema com certeza representou uma regressão em relação as outras numerações da história. Alguns valores inteiros são representados por letras romanas específicas conforme figura 17.

Figura 17. Sistema Romano

Simbolo	Nome	Valor
I	*unus*	1 (um)
V	*quinque*	5 (cinco)
X	*decem*	10 (dez)
L	*quinquaginta*	50 (cinquenta)
C	*centum*	100 (cem)
D	*quingenti*	500 (quinhentos)
M	*mille*	1,000 (mil)

3.4.7 Sistema de numeração decimal (hindu-arabico)

Durante muito tempo os habitantes da Índia usaram uma escrita arcaica com inúmeras inscrições desde o século I a.C. e uma de suas características é que seus nove primeiros algarismos eram diferentes e bem característicos do nosso sistema moderno, conforme Figura 18.

Figura 18. Escrita da Índia

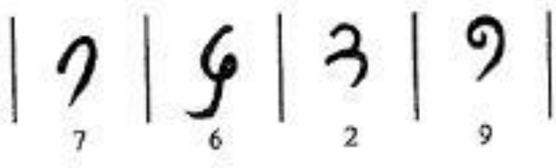
Com o passar do tempo estes números arcaicos foram-se modificando de região pra região até chegar à numeração moderna atualmente, solucionando problemas referente as suas limitações e melhorando as operações aritméticas até que os sábios hindus, então tiveram a idéia de representar os números grandes por algarismos escritos por extenso utilizando a base 10 atribuindo-se um nome para cada um dos nove primeiros números inteiros. Como na Figura 19.

Figura 19. Sistema Hindus

10	*dasa*
100	*sata*
1.000	*sahasra*
10.000	*ayuta*
100.000	*laksa*
1.000.000	*prayuta*
10.000.000	*koti*
100.000.000	*vyarbuda*
1.000.000.000	*padma*

E com as devidas adaptações, principalmente da escrita eles começaram a representa grande quantidade como o número 7.629 representado na Figura 20.

Figura 20. Representação do número 7.629



3.4.8 Sistema decimal

O sistema decimal é um sistema de numeração de posição que utiliza a base dez. Baseia-se em uma numeração de posição, onde os dez algarismos indo-arábicos : 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 servem a contar unidades, dezenas, centenas, etc. da direita para a esquerda.

> A base decimal tem sua primeira dezena representada pelo número dez, ou seja, uma dezena e zero unidade, e o restante das dezenas é a simples combinação de dezenas e unidades 11, 12, 13, 20, 21... 30, 31... 99, a primeira centena é a base vezes ela mesma, representada na forma 6 exponencial 102 ou 10 x 10 ou simplesmente pelo número 100. Depois as combinações de unidades, dezenas e centenas 101, 102... 201, 202... 999, e a seguir temos a milhar, ou à base elevada ao cubo ou 103 ou 10 x 10 x 10 ou o número 1.000, e continuando assim indefinidamente (CONTADOR, 2008, p. 32).

Contrariamente à numeração romana, o algarismo árabe tem um valor diferente segundo sua posição no número: assim, em **111**, o primeiro algarismo significa 100, o segundo algarismo 10 e o terceiro 1, enquanto que em **VIII** (oito em numeração romana) os três **I** significam todos *1*.

A base de numeração decimal, ou seja, a base 10. Portanto, quando escrevemos 347, por exemplo, estamos nos referindo ao número que contém sete unidades, quatro dezenas e três centenas, ou seja, o algarismo 347 nada mais é que uma abreviação da expressão

$$\mathbf{347 = 3.\ 100 + 4\ .\ 10 + 7\ .\ 1 = 3\ .\ 10^2 + 4\ .\ 10^1 + 7\ .\ 10^0}$$

Segundo OLIVEIRA (2012) qualquer número admite uma representação única em qualquer outra base numérica, podendo ser provado pelo teorema seguinte.

Teorema. Dados $a, b \in N$, com $b > 1$, existem únicos números naturais $r_0, r_1, ..., r_n$ tais que $0 \le r_i \le b-1, 0 \le i \le n$, e satisfazendo

$$a = r_n b^n + r_{n-1} b^{n-1} + \ldots + r_1 b + r_0$$

A representação acima é dita representação de a na base b e usaremos a notação

$$a = (r_n r_{n-1} ... r_1 r_0)_b$$

Para fazer referência a esta.

Demonstração. Apliquemos sucessivamente a divisão euclidiana como segue:

$$
\begin{aligned}
&a = bq_0 + r_0, r_0 < b,\\
&q_0 = bq_1 + r_1, r_1 < b,\\
&q_1 = bq_2 + r_2, r_2 < b,\\
&\ldots \quad \ldots \quad \ldots \; \ldots\\
&q_{j-1} = bq_j + r_j,\ r_j < b,
\end{aligned}
$$

E assim por diante. Como $a > q_0 > q_1 > q_2 > \ldots > q_{j-1}$, para algum $j = n$ devemos ter que $q_{n-1} < b$. Logo, $q_j = 0$ para todo $j \geq n$, assim como $r_j = 0$ para todo $j \geq n+1$. Das igualdades acima, para $1 \leq j \leq n$, tem-se

$$
\begin{aligned}
&a = bq_0 + r_0,\\
&bq_0 = b^2 q_1 + br_1,\\
&b^2 q_1 = b^3 q_2 + br_2,\\
&\ldots \quad \ldots \quad \ldots\\
&b^{n-1} q_{n-2} = b^n q_n + b^{n-1} r_{n-1}\\
&b^n q_{n-1} = b^{n+1} 0 + b^n r_n.
\end{aligned}
$$

Efetuando a soma de todas as igualdades obtemos

$$a = r_n b^n + r_{n-1} b^{n-1} + \ldots + r_1 b + r_0.$$

A unicidade dos números r_i vem da unicidade dos restos na divisão euclidiana.

Para Godefroy (1997), o criador do sistema binário, entre outras brilhantes atuações de estudo e pesquisa, foi o grande matemático e filósofo Leibniz. Criou com o intuito, talvez, de substituir os números decimais pelos binários, de reduzir ao máximo a quantidade de símbolos para escrever um número qualquer e facilitar as operações aritméticas utilizando-se apenas dois símbolos para representar esse número: o 0 (zero) e o 1 (um).

No sistema decimal o símbolo 0 (zero) posicionado à esquerda do número escrito não altera seu valor representativo. Assim: 1; 01; 001 ou 0001 representam a mesma grandeza, neste caso a unidade. O símbolo zero posto à direita implica em multiplicar a grandeza pela base, ou seja, por 10 (dez).

3.4.9 Sistema Binário

O sistema binário é um sistema de numeração posicional em que todas as quantidades se representam utilizando como base o número dois, dispondo-se das cifras: zero e um (0 e 1).

Os computadores digitais trabalham internamente com dois níveis de tensão, seu sistema de numeração natural é o sistema binário (aceso, apagado). Com efeito, num sistema simples como este é possível simplificar o cálculo, com o auxílio da lógica booleana. Em computação, chama-se um dígito binário (0 ou 1) de *bit*, que vem do inglês *Binary Digit*. Um agrupamento de 8 bits corresponde a um byte (Binary Term).

O sistema binário é base para a Álgebra booleana (de George Boole - matemático inglês), que permite fazer operações lógicas e aritméticas usando-se apenas dois dígitos ou dois estados (sim e não, falso e verdadeiro, tudo ou nada, 1 ou 0, ligado e desligado).

Segundo OLIVEIRA (2012), todo número natural se escreve de modo único como soma de potências distintas de 2. A lista de números começados com *a*, seguido pelo quociente q_0 da divisão de *a* por 2, seguido pelo quociente q_1 da divisão de q_0 por 2, seguido pelo quociente q_2 da divisão de q_1 por 2, etc.

Na divisão euclidiana sucessiva, temos que, se *a* é ímpar, então $r_0 = 1$; caso contrário, $r_0 = 0$; temos $r_1 = 1$ se q_0 é ímpar, e $r_1 = 0$, caso contrário. Em geral, $r_{i+1} = 1$ se q_i é ímpar, e $r_{i+1} = 0$, caso contrário. Até encontramos $q_{n-1} = 1$, quando colocamos $r_n = 1$. Segue-se, portanto, que

$$a = r_0 + r_1 .2 + ... + r_n .2^n.$$

Toda eletrônica digital e computação está baseada nesse sistema binário e na lógica de Boole, que permite representar por circuitos eletrônicos digitais (portas lógicas) os números, caracteres, realizar operações lógicas e aritméticas. Os programas de computadores são codificados sob forma binária e armazenados nas mídias (memórias, discos, etc) sob esse formato.

3.4.9.1 Conversão de Decimal para Binário

Divide-se sucessivamente por 2. Depois o número binário é formado pelo quociente da última divisão seguido dos restos de todas as divisões na seqüência em que foram realizadas.

Exemplo: $8_D = ?_B$

8/2=4 resto = 0
4/2=2 resto = 0
2/2=**1** resto = 0
$8_D = 1000_B$

3.4.9.2 Conversão de números binários para decimal

Dado um número N, binário, para expressá-lo em decimal, deve-se escrever cada número que o compõe (bit), multiplicado pela base do sistema (base = 2), elevado à posição que ocupa. Uma posição à esquerda da vírgula representa uma potência positiva e à direita uma potência negativa. A soma de cada multiplicação de cada dígito binário pelo valor das potências resulta no número real representado.

Exemplo: $1011_B = ?_D$

$1 \times \mathbf{2^3} + 0 \times \mathbf{2^2} + 1 \times \mathbf{21} + 1 \times \mathbf{20} = 8 + 0 + 2 + 1 = 11$
$1011_B = 11_D$

3.4.9.3 Adição no Sistema Binário

Os números binários são base 2, ou seja, há apenas dois algarismos: 0 (zero) ou 1 (um). Na soma de 0 com 1 o total é 1. Quando se soma 1 com 1, o resultado é 2, mas como 2 em binário é 10, o resultado é 0 (zero) e passa-se o outro 1 para a "frente", ou seja, para ser somado com o próximo elemento.

0 + 0 = 0

0 + 1 = 1

1 + 1 = 10 = 0 + vai para próxima posição

1 + 1 + 1 = 11 + vai 1 para próxima posição

Exemplos:

```
    1                11
    1100              1100
+    111          +   1111
   -----             -----
=  10011          =  11011
```

3.4.9.4 Subtração de Binários

0-0=0

0-1= 1 e vai 1 (para subtrair ao digito imediatamente à esquerda)

1-0=1

1-1=0

Exemplo:

```
   1 111
   1101110
-    10111
   -------
=  1010111
```

Explicando: Quando temos 0 menos 1, precisamos pegar um do vizinho e fazer a conversão. Nesse processo de conversão cada um vem valendo 2 (dois), pelo fato de ser um número binário. Então, no caso da coluna 0 - 1 = 1, porque na verdade a operação feita foi 2 - 1 = 1. Esse processo se repete e o elemento que foi convertido e valia 1 passa a valer 0. Perceba, que, logicamente, quando o valor for zero, ele não pode ser convertido para ninguém, então a conversão passa para o próximo elemento e esse zero recebe o valor de 1.

3.4.9.5 Multiplicação de binários

A multiplicação entre binários é similar à realizada com números decimais. A única diferença está no momento de somar os termos resultantes da operação:

0x0=0

0x1=0

1x0=0

1x1=1

Exemplos:

```
        1 0 1 1
      x 1 0 1 0
      ---------
        0 0 0 0
+     1 1 0 1 1
+     0 0 0 0
+ 1 0 1 1
-------------
= 1 1 0 1 1 1 0
```

```
          1 1 1
    x     1 1 1
    ---------
        1 1
      1 1 1 1 1
+     1 1 1 1
+   1 1 1 1
  -------------
=   1 1 0 0 0 1
```

Perceba que na soma de 0 e 1 o resultado será 1, mas na soma de 1 com 1, ao invés do resultado ser 2, ele será 0 (zero) e passa-se o 1 para a próxima coluna. Nota que se a soma passar de 2 dígitos, deve-se somar o número em binário correspondente.

3.4.9.6 Divisão de binários

A divisão com números binários baseia-se no princípio de subtrações sucessivas. Subtraímos o divisor do dividendo enquanto o resto (resultado da subtração) for maior ou igual ao divisor e, a cada subtração, somamos 1_2 no quociente. Essa operação também é similar àquela realizada entre números decimais:

Exemplo:

```
   110 |10
 - 10   11
 ------
   010
 -  10
 ------
    00
```

3.4.10 Atividades Didáticas com o tema Criptografia

Para realização desta atividade será utilizado o 11º episódio da 1º temporada de Numb3rs. Na seção seguinte consta o resumo deste episódio e em seguida as atividades didáticas propostas.

3.4.10.1 Resumo: Sacrifício

Um pesquisador de Ciência da Computação que trabalhava para uma organização privada chamada Lorman Grup e que tinha acesso a Segurança Nacional foi encontrado morto em sua casa. Ao ter acesso ao computador do Dr.Hoke uma especialista do FBI percebe que alguns arquivos já haviam sido apagados e quem limpou as informações do disco rígido não tinha realizado uma cópia.

Ao conversar com Don ela diz “E quem quer que os apagou, sabia exatamente o que estava fazendo.”. Para ela o disco tinha sido girado centenas de vezes e Don pede para definir o termo “Girado”. Charlie que estavam com eles então diz” A linguagem de um computador é essencialmente Códigos Binários. Todo pedaço de informação é uma sequência especifica de 0 e 1. Quando você deleta os dados, você não os apaga realmente, você somente começa a girar como uma moeda pra frente e para trás e isso destrói o código e deixa a informação bastante inteligível.”

Como código binário em um computador são formados por milhões e milhões de 0 e 1 então Charlie acrescenta” Para poder recriar os dados, eu preciso reconstruir a sequência original do código”, porque o programa usado para girar o código acaba deixando um padrão. Dr. Hoke estava trabalhando em um contrato com DOD desenvolvendo um programa de computador para interpretar as imagens de satélites, conhecido como Sensibilidade Remota, que é um processo que escaneia assinaturas eletromagnéticas na superfície terrestre.

Charlie ao analisar o computador do doutor percebe, que o arquivo referente ao trabalho de sensibilidade remota não era o foco da deleção do disco rígido e sim um conhecido como “SaberMetrics”, que coloca valores numéricos em habilidades especificas e que são muitos utilizados no Baseball. Então ele descobre que Dr. Hoke estava trabalhando em outro programa pois o doutor usou dados estatístico de Baseball para esconder seu novo programa.

David descobre que o doutor tinha uma apólice de seguro no valor de 2 milhões de dólares e as suspeitas vão para sua esposa e seu namorado.

Enquanto o FBI os investigam, Charlie continua fazendo uma análise mais profunda no computar e percebe que os dados escondidos atrás das estatística de baseball eram na verdade dados do censo federal dos Estados Unidos. Ele então diz ao FBI “Ele estava tentando aplicar o conceito de Sabermetrics para classificar comunidades e não atletas”.Com esses dados do censo ele tem acesso as contas bancarias, compras e seguro de saúde e com isso ele consegue medir o potencial humano.

Então ao conversar com Don Charlie diz “Ele estava usando a Sabermetrics para determinar quais pessoas valeriam a pena investir” e Don Diz “Então ninguém seria deixado para trás, ele apenas não começaria a investir”. Porém sua equação não estava finalizada.

Ao conversar com Scott que era estagiário de Hoke, Don descobre que O Oliver que é o diretor da empresa tinha enviado os dados para o doutor, e isso o torna também suspeito.

Isso tudo leva a perceber que Hoke estava agindo por trás da empresa. Ao retornar a casa do doutor David encontra um sistema de vigilância que foi instalado pelo namorado da ex-esposa e em posse deste material Charlie faz uma estudo e ao encontrar algo vai conversar com Don.

E ao mostrar duas representações digitais de padrões a Don, ele diz “Operadores de telégrafos costumavam se reconhecer pelas diferentes formas com que eles digitavam os mesmos códigos” e Don diz “estou sentado aqui e estou olhando para isso, e eles parecem idênticos” e Charlie acrescenta “è porque eles são” e assim consegue descobrir o assassino.

3.4.10.2 Atividades Didáticas

Após a exibição o professor pode utilizar as atividades abordando binários para que o estudante desenvolva os conceitos básicos de números binários, conforme o exemplo a seguir.

Atividade 1: Transformando binário em decimal.

Faça a conversão de binário para decimal dos seguintes itens:

a) 100101

b) 1000101101

c) 1111010110110

Atividade 2: Transformando decimal em binário

Faça a conversão de decimal para binário dos seguintes itens:

a) 297
b) 4021
c) 9135

Atividade 3: Próximo termo da sequência

Na sequência abaixo, cada número, do terceiro em diante, é obtido a partir dos dois anteriores de acordo com uma certa regra: 12, 20, 32, 52, 84, 136, ... O próximo número na forma binária é o:

A) 11011100 B) 10101010 C) 11100110

D) 01010101 E) 11001100

Atividade 4: Sistema Binário com função Afim

Considere as funções *f* e *g*, ambas com domínio *Z*, dadas por $f(x) = 5x - 3$ e $g(x) = 3x + 5$. Determine o valor de $f\ (101_B) - g\ (110_B)$.

Atividade 5: Operação de binário

Calcule as seguintes operações em binário:

a)

$$\begin{array}{r} 1\,1\,1\,0\,1\,1\,0\,1 \\ +\ 1\,0\,1\,0\,1\,0\,1\,0 \\ \hline \end{array}$$

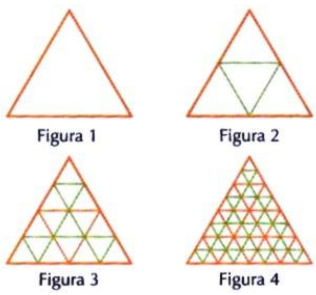
b)

$$\begin{array}{r} 1\,0\,1\,0\,1\,0\,1 \\ -\ 0\,1\,0\,1\,0\,1\,0 \\ \hline \end{array}$$

Atividade 6: Observando as figuras

Considere esta seqüência de figuras.

Figura 21. Sequência de triângulos



Na Figura 1, há 1 triângulo.

Na Figura 2, o número de triângulos menores é 4.

Na Figura 3, o número de triângulos menores é 16 e assim por diante.

a) Prosseguindo essa construção de figuras, teremos quantos triângulos menores na figura 7?

b) Represente o resultado anterior na base 2.

3.5 Proposta para o 13º episódio de Numb3rs

Imagine um país onde a população é dividida em três classes sociais, denominadas de estado: pobre, rico e classe média. E que em cada unidade de tempo a probabilidade de mudança de um estado para outro seja constante no tempo e só dependa dos estados, ou seja, os estados anteriores são irrelevantes para a predição dos estados seguintes, desde que o estado atual seja conhecido. Este processo é chamado de cadeias de Markov.

Segundo SANTOS (2006), as cadeias de Markov é um processo onde você está no estado *j* no tempo t, então a probabilidade de que você se mova para o estado *i* no tempo t + 1 não depende de t, e somente depende do estado atual *j* em que você está.

Tomando t_{ij} como a probabilidade de mudança do estado j para o estado i em uma unidade de tempo (geração). Cuidado com a ordem dos índices. Um espaço de estados é representável por uma matriz.

Matrizes são tabelas retangulares utilizadas para organizar dados numéricos, onde cada número é chamado de elemento da matriz, as filas horizontais são chamadas de linhas e as filas verticais são chamadas de colunas.

A matriz

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix}$$

é chamada matriz de transição. A matriz de transição, é uma matriz quadrada que tem duas características: 1) todas as entradas são não-negativas e 2) todas as colunas tem soma de entradas igual a 1. A distribuição da população inicial entre os três estados pode ser descrita pela seguinte matriz:

$$P_0 = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$

Após uma unidade de tempo a população estará dividida entre os três estados da seguinte forma

$$P_1 = \begin{pmatrix} t_{11}p_1 + t_{12}p_2 + t_{13}p_3 \\ t_{21}p_1 + t_{22}p_2 + t_{33}p_3 \\ t_{31}p_1 + t_{32}p_2 + t_{33}p_3 \end{pmatrix}$$

Assim a matriz de estado após uma unidade de tempo é dada pelo produto de matrizes:

$$P_1 = T.P_0$$

3.5.1 Representação de uma matriz

Considerando uma matriz A do tipo m x n. Um elemento qualquer dessa matriz será representado pelo símbolo a_{ij}, no qual i refere-se à linha em que se encontra tal elemento e o índice j refere-se à coluna em que se encontra o elemento.

Representamos também a matriz A por $A = (a_{ij})_{m \times n}$. Note que $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$.

Exemplo:

Vamos escrever a matriz $A = (a_{ij})_{2 \times 3}$ em que $a_{ij} = i + j$.

Uma matriz do tipo 2 x 3 pode ser genericamente representada por $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$. Utilizando a condição de formação dessa matriz, temos:

$a_{11} = 1 + 1= 2$ $\quad$ $a_{12} = 1 + 2 = 3$ $\quad$ $a_{13} = 1 + 3 = 4$

$a_{21} = 2 + 1 = 3$ $\quad$ $a_{22} = 2 + 2 = 4$ $\quad$ $a_{23} = 2 + 3 = 5$

Assim , $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

3.5.2 Matrizes especiais

- Matriz linha: matriz formada por uma única linha.

  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}_{1 \times 3}$

- Matriz coluna: é uma matriz formada por uma única coluna.

  $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}_{3 \times 1}$

- Matriz nula: é uma matriz cujos os valores elementares são todos iguais a zero.

  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{2 \times 3}$

- Matriz quadrada: é uma matriz que possui número de linhas igual ao número de colunas.

$$C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & -2 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

3.5.3 Igualdade de matrizes

Duas matrizes de mesmo tipo m x n são iguais quando todos os seus elementos correspondentes são iguais.

Exemplo:

Para que as matrizes $A=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 2 & b \end{pmatrix}$ e $B=\begin{pmatrix} 3 & d \\ c & -5 \end{pmatrix}$ sejam iguais, devemos ter:

a = 3 1 = d 2 = c b = - 5

3.5.4 Adição de matrizes

Dadas duas matrizes, $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{m\times n}$, a matriz A + B é a matriz $C = (c_{ij})_{m\times n}$, em que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ para todo i e todo j.

Exemplo:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

3.5.5 Matriz oposta

Seja a matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$. Chama-se oposta de A a matriz representada por –A, tal que A + (–A) = 0, em que 0 é a matriz nula do tipo m x n.

Exemplo:

Se $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 3 & 4 & -5 \end{pmatrix}$, então $-A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -4 \\ -3 & -4 & 5 \end{pmatrix}$

3.5.6 Subtração de matrizes

Dada duas matrizes, $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$, definimos a matriz diferença A – B como a soma de A com a oposta de B; isto é:

$$A - B = A + (-B)$$

Exemplo:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

3.5.7 Propriedades da adição

Sejam A, B e C matrizes do mesmo tipo (m x n) e 0 a matriz nula do tipo m x n, pode-se provar que valem as seguintes propriedades para a adição de matrizes:

I. Comutativa: A + B = B + A

II. Associativa: (A + B) + C = A + (B + C)

III. Elemento neutro: A + 0 = A

IV. Oposto: A + (-A) = 0

3.5.8 Produto de um número real por uma matriz

Sejam a matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e K um número real. O produto de K pela matriz A é a matriz $B = (b_{ij})_{m \times n}$, que se obtém multiplicando cada elemento de A pelo fator K.

Exemplo:

Se $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 3 & 4 & -5 \end{pmatrix}$, então $3 \cdot A = \begin{pmatrix} 6 & -9 & 12 \\ 9 & 12 & -15 \end{pmatrix}$

3.5.9 Matriz Transposta

Dada um matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$, chama-se transposta de A a matriz:

$$A^t = \left(a'_{ij}\right)_{n \times m}$$

tal que $a'_{ij} = a_{ij}$ para todo i e todo j. Em outras palavras, a matriz A^t tem colunas ordenadas iguais às linhas de A.

Exemplo:

A transposta de $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ é $A^t = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$.

3.5.10 Matriz simétrica

Chama-se matriz simétrica toda matriz quadrada A de ordem n, tal que:

$$A^t = A$$

Exemplo:

$\text{Se}\, A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, então $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

3.5.11 Matriz anti-simétrica

Chama-se matriz anti-simétrica toda matriz quadrada A, de ordem n, tal que:

$$A^t = -A$$

Exemplo:

$A = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$, $A^t = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} e - A = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$

3.5.12 Multiplicação de matrizes

Dadas as matrizes $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{jk})_{n \times p}$, chama-se de produto de A por B, e se indica por A . B, a matriz $C = (c_{ik})_{m \times p}$, em que um elemento qualquer c_{ik} é obtido da seguinte maneira:

- Mutiplicamos o 1º elemento da 1º linha da matriz A pelo 1º elemento da 1º coluna da matriz B, o elemento da 2º linha da matriz A pelo 2º elemento da 2º coluna da matriz B, e assim sucessivamente.

- Somamos os produtos obtidos.

Assim:

$$C_{ik} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + ... + a_{in} \cdot b_{nk}$$

Exemplo:

Dada as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, vamos determinar C = A . B:

$$C = \begin{pmatrix} 1.1+2.0+0.3 & 1.2+2.5+0.4 \\ 3.1+1.0+4.3 & 3.2+1.5+4.4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 15 & 27 \end{pmatrix}$$

3.5.13 Propriedades da multiplicação

Supondo que as matrizes A, B e C sejam de tipos tais que as operações abaixo possam ser realizadas, segundo IEZZI (2004) valem as seguintes propriedades para a multiplicação de matrizes:

I. Associativa: (A . B) . C = A . (B . C)

II. Distributiva à direita em relação à adição: (A + B) . C = A . C + B . C

III. Distributiva à esquerda em relação à adição: C . (A + B) = C . A + C . B

3.5.14 Matriz identidade

Seja A uma matriz de ordem n. A é denominada matriz identidade de ordem n quando os elementos de sua diagonal principal são todos iguais a 1, e os demais elementos são iguais a zero.

Exemplo:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Propriedade

Qualquer que seja a matriz quadrada A de ordem n, tem-se:

$$A.I_n = A \text{ e } I_n \cdot A = A$$

3.5.15 Matriz inversa

Seja A uma matriz quadrada de ordem n. A matriz A é dita inversível se existir uma matriz tal que:

$$A \,.\, B = B \,.\, A = I_n$$

Nesse caso, B é dita inversa de A e é indicada por A^{-1}.

Exemplo:

Vamos encontrar, se existir, a inversa de $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$.

Devemos determinar $A^{-1}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, tal que $A \,.\, A^{-1} = I_2$

Temos:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3a+2c & 3b+2d \\ 5a+4c & 5b+4d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Do conceito de igualdade, seguem os sistemas:

$$\begin{cases} 3a+2c=1 \\ 5a+4c=0 \end{cases}, \text{cuja solução é } a=2 \text{ e } c=-\frac{5}{2}$$

$$\begin{cases} 3b+2d=0 \\ 5b+4d=1 \end{cases}, \text{cuja solução é } b=-1 \text{ e } d=\frac{3}{2}$$

Assim, $A^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

3.5.16 Atividades Didáticas com o tema Matrizes

Para realização desta atividade será utilizado o 13º episódio da 1º temporada de Numb3rs. Na seção seguinte consta o resumo deste episódio e em seguida as atividades didáticas propostas.

.

3.5.16.1 Resumo: Caça ao homem

Um ônibus que fazia a transferência de presos envolve-se em um acidente e dois prisioneiros conseguem escapar. Para ajudar a capturar os fugitivos Don chama Billys Cooper um antigo parceiro de trabalho. Então Don divide sua equipe em duas para começar a busca pelos foragidos. Após essa divisão ele vai falar com uma médica que testemunhou no caso de Mcdowd e ao encontrar ela diz "eu tinha esperança de nunca mais ouvir esse nome de novo". Ela viu esse cara matar outro a sangue frio e no dia em que ela deu o depoimento ele olhou para médica e sorriu, e em seguida passou o dedo no pescoço. Don ficou preocupado e queria colocá-la na proteção de testemunha.

Encontrar o assassino fugitivo será uma tarefa muito complicada, então Charlie tenta fazer algumas aplicações matemática para entender o que aconteceu no acidente. Larry que é professor de física e amigo de Charlie começa a olhar o material e diz "parece ser basicamente mecânica newtoniana" então ele pergunta ao amigo "Por que essas equações elementares capturam sua imaginação?" e Charlie responde, " é uma fascinante aproximação a inferência Bayesiana na aplicação de análise de dados seriais de tempo."

Para entender melhor o que aconteceu Charlie monta uma situação parecida com o acidente real e quando Larry vê aquilo diz "Posso entender o fascínio das equações cinemáticas, quando se está trabalhando com uma atraente caso de policia, mas por que todo o equipamento para gramado?". Charlie começa a conversa com o amigo e relata o que estava fazendo para entender o acidente. Durante essa conversa ele diz que teria acontecido duas possibilidades "o ônibus aumentou sua velocidade incrivelmente" e físico afirma " não, dada a massa do ônibus" e Charlie continua " ou o caminhão plataforma reduziu sua velocidade, no momento crítico, fazendo com que a pick-up entrasse na frente do ônibus. Esse fato significa que é uma cadeia de Markov". Assim, eles chegam a conclusão de que não foi um acidente realmente, mas o que aconteceu foi uma encenação levando a parecer um acidente.

Após essa descoberta ele vai falar com Don e explica a situação dizendo que todos esses diferentes eventos e fatores da velocidade inicial do ônibus, até o seu torque final, tudo isso cria o que chamamos de cadeia de Markov. Billy então diz "Que tipo de cadeia?" e Charlie acrescenta " é uma sequência de valores aleatórios onde a probabilidade num dado momento depende dos valores no momento anterior. O fator controlador numa cadeia de Markov, é chamado de probabilidade transacional. Agora nesse caso, o ônibus atinge um certo ponto na estrada logo quando o caminhão bloqueia a pista, logo a pick-up corta o ônibus. Se o caminhão tivesse mantido sua velocidade inicial, então a pick-up teria tido espaço suficiente para livremente passar o ônibus em segurança”. Para chegar a essa conclusão ele usa estatísticas Bayesianas e a equação Chapman-Kolmogorov.

Charlie começa a tentar determinar áreas com grandes possibilidades estatísticas de serem visitadas pelos fugitivos. Desta forma ele tentou mapear os movimentos de Mcdowd.e em seguida usaria a análise Bayesiana para fazer o gráfico . Quando o mapa gerado pelo algoritmo fica pronto, ele leva para o FBI, e ao analisar o mapa com Don percebem que o foragido esta movendo-se em círculo em uma determinada localidade e neste momento FBI vai a sua a captura do foragido.

3.5.17 Atividades Didáticas

Com este episódio, o professor pode utilizar atividades abordando matrizes, visto que cadeia de Markov é um processo onde a probabilidade de mudança de um estado para outro seja constante no tempo e só dependa dos estados, ou seja, os estados anteriores são irrelevantes para a predição dos estados seguintes, desde que o estado atual seja conhecido.

Esse processo envolve operações com matrizes levando o estudante desenvolver os conceitos básicos do conteúdo, conforme o exemplo a seguir.

Atividade 1: Determinando uma matriz

Sejam as matrizes $A = (a_{ij})_{6 \times 3}$, em que $a_{ij} = i + j$, e $B = (b_{jk})_{3 \times 4}$, em que $2j - k$.

a) Escreva as matrizes A e B.

b) Sendo $C = (c_{ik})_{6 \times 4}$ a matriz produto A . B, determine o elemento c_{43}.

Atividade 2: Matriz para determinar preço

A matriz C fornece, em reais, o custo das poções de arroz, carne e salada usadas em um restaurante:

$$C = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{arroz} \\ \text{carne} \\ \text{salada} \end{array}$$

A matriz P fornece o número de porções de arroz, carne e salada usadas na composição dos pratos tipo P_1, P_2, P_3 desse restaurante:

$$P = \begin{array}{cccc} arroz & carne & salada & \\ \left(\begin{array}{c} 2 \\ 1 \\ 2 \end{array}\right. & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 2 \end{array} & \left.\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 0 \end{array}\right) & \begin{array}{l} prato\ P_1 \\ prato\ P_2 \\ prato\ P_3 \end{array} \end{array}$$

A matriz que fornece o custo de produção, em reais dos pratos P_1, P_2, P_3 é:

a) $\begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 8 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 9 \\ 11 \\ 4 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

Atividade 3: Calculando nota dos candidatos

A tabela 5 mostra as notas obtidas pelos alunos A, B e C nas provas de Português, Matemática e conhecimentos Gerais em um exame vestibular.

Tabela 3- Pontuação

Aluno	Português	Matemática	Conhecimentos Gerais
A	4	6	7
B	9	3	2
C	7	8	10

Se os pesos das provas são 7 (em Português), 6 (em Matemática) e 5 (em Conhecimentos Gerais), qual o produto de matrizes que permite determinar a nota final de cada aluno?

Atividade 4: Pontuação

Durante a primeira fase da Copa do Mundo de futebol realizada na frança em 1998, o grupo A era formado por quatro países: Brasil, Escócia, Marrocos e Noruega. Observe os resultados (número de vitórias, empates e derrotas) de cada país registrados na Tabela 6.

Tabela 4- Jogos

Países	Vitória	Empate	Derrota
Brasil	2	0	1
Escócia	0	1	2
Marrocos	1	1	1
Noruega	1	2	0

Pelo regulamento da Copa, cada resultado (vitória, empate ou derrota) tem uma pontuação que pode ser observado na Tabela 7.

Tabela 5- Pontuação

Resultado	Pontuação
Vitória	3
Empate	1
Derrota	0

A matriz $C=\begin{bmatrix} \text{Brasil} \\ \text{Escócia} \\ \text{Marrocos} \\ \text{Noruega} \end{bmatrix}$ que representa a pontuação final de cada país, ao término dessa primeira fase é:

$$a) C=\begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \quad b) C=\begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} \quad c) C=\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix} \quad d) C=\begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} \quad e) C=\begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Atividade 5: Quantidade de árvores

Em uma plantação, as árvores são classificadas de acordo com os seus tamanhos em três classes: pequena (P), média (M) e grande (G). Considere, inicialmente, que havia na plantação p_0 árvores da classe P, m_0 da classe M e g_0 da classe G. Foram cortadas árvores para venda. A fim de manter a quantidade total de árvores que havia na floresta, foram plantadas k mudas (pertencentes à classe P). Algum tempo após o replantio, as quantidades de árvores das classes P, M e G passaram a ser, respectivamente, p_1, m_1 e g_1, determinadas segundo a equação matricial:

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ m_1 \\ g_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}9 & 0 \\ 0 & 0{,}1 & 0{,}95 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0 \\ m_0 \\ g_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Observando-se que $p_1 + m_1 + g_1 = p_0 + m_0 + g_0$, pode-se afirmar que k é igual a:

a) 5 % de g_0.

b) 10 % de g_0.

c) 15 % de g_0.

d) 20 % de g_0.

e) 25 % de g_0.

Conclusão

A introdução dos recursos tecnológicos no ambiente escolar não se restringe apenas a utilização de determinados equipamentos e produtos. Essa evolução tecnológica e sua chegada e utilização no trabalho docente veio a contribuir na alteração de comportamentos que podem colaborar significativamente no processo de aprender e ensinar.

O professor não deixa de ter importância no desenvolvimento do seu papel como mediador da aprendizagem devido à inserção das novas tecnologias no ambiente escolar, mas, ao contrário, pode passar a ser o elemento principal dessa sociedade que utiliza cada vez mais essas novas tecnologias como recurso didático promovendo o enriquecimento da prática educativa.

A renovação na prática docente pode ser constatada, não pelo uso puro e simples desses recursos tecnológicos em seu cotidiano, mas, a partir do momento em que esses equipamentos modifiquem de forma significativa o olhar do professor diante de sua prática, suas concepções de educação, seus modelos de ensino-aprendizagem.

Portanto, o trabalho desenvolvido pelo professor em sala de aula requer habilidades e conhecimentos específicos para que, o docente tenha condições de desenvolver uma prática adequada às exigências apresentadas no decorrer do exercício de suas funções, para isso, faz-se necessário, compreender-se que a formação do docente deve fundamentar-se na construção da atitude reflexiva, abrindo assim o caminho ao docente a análise e revisão da prática pedagógica e de construção de esquemas teóricos e práticos a serem aplicadas em sua sala de aula.

Deste modo a elaboração destas sugestões de atividades feitas a partir de um estudo elaborado tendo como elemento norteador a utilização de recursos multimídias como a série americana Numb3rs utilizada neste trabalho, poderá ser de grande valia para mudança de determinados estigmas criados a cerca da aprendizagem da matemática.

Ao analisar os episódios selecionados para realização deste trabalho foi possível ainda perceber que existe a possibilidade de um trabalho interdisciplinar, pois alguns episódios conseguem abordar conteúdos de matemática, química e física, abrindo um leque de possibilidades.

Segundo Machado (2008), o vídeo surge como um recurso de comunicação que possibilita a apresentação de conteúdos de maneira dinâmica, devendo, no entanto, ser analisado e escolhido de maneira consciente e criteriosa por parte dos professores. Diversos autores como Ferrés, Arroio & Giordan, Powlik & Fortenberry, têm considerado que a presença do vídeo na escola guarda uma série de possibilidades como elemento de atração ou de reforço do interesse do aluno, despertando a sua curiosidade e motivando-o. Dessa forma o estudo de um dado fenômeno amparado pelo uso do vídeo levará o estudante a imaginar diversas situações práticas da vida cotidiana que se relacionam com o fenômeno em questão, despertando o seu interesse em aprofundar os seus conhecimentos naquele assunto.

Por meio das propostas elaboradas, verifica-se, num primeiro momento, que o filme tem potencial para atuar como motivador, introdutor ou auxiliar no desenvolvimento do conteúdo, bem como atuar como elemento contextualizador para que se desenvolvam atividades de resolução de problemas, fato esse, apontado hipoteticamente no início desse estudo.

Vale ressaltar que dando continuidade a essa investigação será possível verificar os efeitos que tais propostas ocasionarão no interesse dos estudantes em resolver problemas matemáticos.

Percebemos ainda na análise de trabalhos já realizados por Serres, Mazzei & Bassos, Neto & Siqueira e Dantas & Machado com o uso de vídeos e seriados o quanto a sua utilização pode ser positiva para criar novas estratégias de aprendizagem, fazendo com que o estudo da matemática, tanto nas series do ensino fundamental, ensino médio ou superior seja mais prazeroso e significativo.

Assim, abrimos as possibilidades de aulas nas quais os alunos se sintam desafiados a buscarem por si mesmos a solução de problemas, construindo alternativas a partir da discussão dos temas abordados, construindo desta forma um modo eficaz de proporcionar a eles um ambiente no qual desenvolvam sua autonomia, assumindo a responsabilidade por sua aprendizagem.

Referências Bibliográficas

ARROIO, A., GIORDAN, M., O vídeo educativo: aspectos da organização do ensino. Química Nova na Escola, n. 24, p. 8-11, nov. 2006.

BERLINGROFF, William P.FERNANDO Q. Gouvêa, A matemática através dos tempos: Tradução Elza F. Gomide e Helena Castro. 2. Ed.São Paulo: Edgard Blucher, 2010.

BOYER, C. B. História da matemática,2ª. Edição. Edgard Blücher, 1998.

BRASIL, LEI 9394, de 20/12/1996. Diretrizes e Bases da Educação Nacional.

BRASIL, Ministério da Educação, Secretaria de Educação Média e Tecnológica (Semtec). Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio. Brasília: MEC/Semtec, 2006.

CONTADOR, Paulo Roberto Martins. Matemática, uma breve história. Vol. I. São Paulo: Livraria da Física, 2008.

COUTINHO,Severino Collier. Números inteiros e criptografia *RSA*. 2. ed. IMPA,2014.

DANTAS, Rodrigo; MACHADO, Aline. O uso pedagógico do vídeo no ensino de engenharia: um estudo de caso no curso de engenharia química da PUCRS. XX simpósio Brasileiro de Informática na educação. Santa Catarina, 2009.

D'AMBROSIO, Ubiratan. História da Matemática e Educação. In. Cadernos CEDES – História e Educação Matemática. Campinas: Papirus, n.40, 1996. 96p. p.7-17.

______________, Beatriz S. Como ensinar matemática hoje? Temas e Debates. SBEM. Ano II. N2. Brasilia. 1989. p. 15-19.

FARIAS, Ana Maria Lima de. Teoria das Probabilidades I.UFF. documento eletrônico disponível. http://www.professor.uff.br/anafarias/imagens/stories. Acesso em 06 de fevereiro de 2015.

FERNANDEZ, Pedro J. Introdução à Teoria das Probabilidades. Rio de Janeiro: IMPA, 2005.

FERRÉS, J., Vídeo e educação. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996.

GIOVANNI, José Ruy, BONJORNO, José Roberto. Matemática: uma nova abordagem. Versão trigonometria. Vol. 2. São Paulo: FTD, 2000.

GODEFROY, Gilles. A aventura dos números. Lisboa: Instituto PIAGET, 1997

GROENWALD, Claudia Lisete Oliveira; FRANKE, Rosvita Fuelber. Currículo de Matemática e o tema Criptografia no Ensino Médio. Educação Matemática em Revista – RS. 2008, 51-57.

GUNDLACH, Bernard H. História dos números e numerais. São Paulo: Atual, 1992.

IEZZI, Gelson & MURAKAMI, Carlos. Fundamentos de Matemática Elementar: Conjuntos e Funções. Vol. 1 Ed. 8.ed. São Paulo: Atual, 2004.

_____________, Gelson & MURAKAMI, Carlos. Fundamentos de Matemática Elementar: Combinatória e Probabilidade . Vol. 5. 7.ed. Ed. Atual. São Paulo, 2004.

_____________, Gelson. HAZZAN, Samuel. Fundamentos de matemática elementar: Sequências, Matrizes, Determinantes e Sistemas. Vol. 4. 7ª Ed. São Paulo: Atual, 2004.

_____________, Gelson. DOLCE, Osvaldo. DEGENSZAJN, David. PÉRIGO, Roberto. ALMEIDA, Nilze de. Matemática: ciência e aplicações. Vol. 2. 4. ed. São Paulo: Atual, 2006.

IFRAH, Georges, Os números: a história de uma grande invenção. Tradução de Stella Maria de Freitas Senra: revisão técnica Antonio Jose Lopes, Jorge Jose de Oliveira.-11. ed.-São Paulo: Globo:, 2005

IFRAH, Georges. História universal dos algarismos. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1997.

LEMOS, Manoel J.M.S.. Criptografia, Números Primos e Algoritmos. UFPE. 4. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2010.

MACHADO, Silvia Dias Alcântara et al. Educação Matemática: uma (nova) introdução. 2.ed. São Paulo: EDUC, 2008.

MENEZES, L. A.; CARVALHO, M. P. Criptografia na Sala de Aula. In: X Encontro Nacional de Educação Matemática. 2010, Salvador - Bahia. Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática. Sociedade Brasileira de Educação Matemática. Ilheus, Bahia: Via Litterarum, 2010.

NETO, José Euzébio Simões; SIQUEIRA, José Edson de M. A Química e o seriado Numb3rs: Uma abordagem multidisciplinar da radioatividade. XIV Encontro Nacional de Ensino de Química. Recife, 2008.

OLIVEIRA, D.; KRIPKA, R. M. L. O Uso da Criptografia no Ensino de Matemática. 2011. Disponível em: www.cimm.ucr.ac.cr/ocs/index.php/xiii_ciaem/xiii\. Acesso em: 12/05/15.

OLIVEIRA, Krerley Irraciel Martins; FERNANDEZ, Adán José Carcho. Iniciação Matemática: um curso com problemas e soluções. 2.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012

POWLIK, J., FORTENBERRY, N., Putting Education in the Picture. Journal of SMET Education: Innovations and Research, v. 2, n. 3 e 4, p. 3-10, set/dez. 2001.

SANTOS, Reginaldo J. Cadeias de Markov, 2006. Disponível em http://www.mat.ufmg.br/~regi/gaalt/markov.pdf, Acesso em 12/06/15

SERRES, Fabiana F.; MAZZEI, Luiz D.; BECKER, Mateus Henrique O.; BASSOS, Marcus. Vídeo e ação: a Matemática na solução de mistérios. XX simpósio Brasileiro de Informática na educação. Santa Catarina, 2009.

SILVA, Marcio Antonio da. Currículo de Matemática no Ensino Médio: em busca de critérios para escolha e organização de conteúdos. Tese de doutorado. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2009.

SINGH, Simon. O Livro dos Códigos: A Ciências do Sigilo - do Antigo Egito à Criptografia Quântica. Rio de Janeiro, Record, 2003.

TAMAROZZI, Antônio Carlos. Codificando e decifrando mensagens. In Revista do Professor de Matemática 45, São Paulo: Sociedade Brasileira de Matemática, 2001.

TERADA, Routo. Criptografia e a importância das suas aplicações. Revista do Professor de Matemática (RPM). No 12, 1º semestre de 1988, 1-6.

Anexos

Resolução das Propostas de Atividades

1º Proposta

Atividade 1: Determinado probabilidade

No lançamento de um dado, determinar a probabilidade de se ter:

a) O número 2

$n(A)=1 \qquad n(U)=6$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(U)}=\frac{1}{6}$$

b) Um número par

$n(A)=3 \qquad n(U)=6$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(U)}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

c) Um numero múltiplo de 3

$n(A)=2 \qquad n(U)=6$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(U)}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

Atividade 2: Probabilidade no baralho

De Um baralho com 52 cartas tiram-se, sucessivamente, sem reposição, duas cartas. Determinar a probabilidade dos eventos:

a) As duas cartas são damas

$1^o\, carta\ ser\ dama$

$n(A)=4 \qquad n(U)=52$

$2^o\, carta\ ser\ dama$

$n(A)=3 \qquad n(U)=51$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(U)}=\frac{4}{52}.\frac{3}{51}=\frac{1}{221}$$

b) As duas cartas são de ouros

$1^{o}\,carta\ ser\ ouro$

$n(A) = 13 \qquad n(U) = 52$

$2^{o}\,carta\ ser\ dama$

$n(A) = 12 \qquad n(U) = 51$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{13}{52} \cdot \frac{12}{51} = \frac{1}{17}$$

Atividade 3: Código de segurança

O código de acesso de um cartão de crédito é formado por seis dígitos decimais. Cada digíto é um número inteiro que pode assumir qualquer valor entre 0 e 9. Tendo extraviado seu cartão de crétido, Alexandre receia que um extranho o encontre e tente descobrir o código. Calcule a probabilidade aproximada de alguém acertar o código do cartão de Alexandre num total de 1000 tentativas aleatórias e distintas.

Solução: Existem 10^6 possíveis combinações para a senha. Dizer que em até 1000 tentativas se encontrou a senha correta é o mesmo que dizer que, dentre os k = 1000 números extraídos ao acaso do total de n = 10^6, esteja presente a senha.

$$C_{n,K} = \frac{n!}{k!(n-k)} \qquad C_{n-1,K-1} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}$$

$Logo\ a\ probabilidade\ será$

$$P(A) = \frac{\dfrac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}}{\dfrac{n!}{k!(n-k)}} = \frac{k}{n} = \frac{1000}{10^6} = 10^{-3} = 0{,}1\%$$

Atividade 4. Mega Sena

A vontade de ganhar na loteria e ficar milionário é o sonho de muitos apostadores, que procuram as casas lotéricas para apostar nas loterias da Caixa Econômica Federal. A mais desejada por todos é a Mega Sena, sua cartela é composta de 60 números, de 1 a 60. Neste jogo, a aposta mínima é constituída de seis números e a máxima de quinze, mas os valores das apostas variam de acordo com o aumento dos números apostados, pois quanto mais números marcados maior a chance de ganhar.

a) Qual a probabilidade de um ganhador fazendo a aposta mínima?

$$C_{60,6} = \frac{60!}{6!(60-6)!} = \frac{60!}{6!.54!} = 50.063.860$$

$n(A) = 1$ $\qquad\qquad$ $n(U) = 50.063.860$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{1}{50.063.860}$$

b) E se ele fizer a aposta máxima, qual será sua chance de ganhar?

$$C_{60,6} = \frac{60!}{6!(60-6)!} = \frac{60!}{6!.54!} = 50.063.860$$

$$C_{15,6} = \frac{15!}{6!(15-6)!} = \frac{15!}{6!.9!} = 5005$$

$n(A) = 5005$ $\qquad\qquad$ $n(U) = 50.063.860$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{5005}{50.063.860} = \frac{1}{10.003}$$

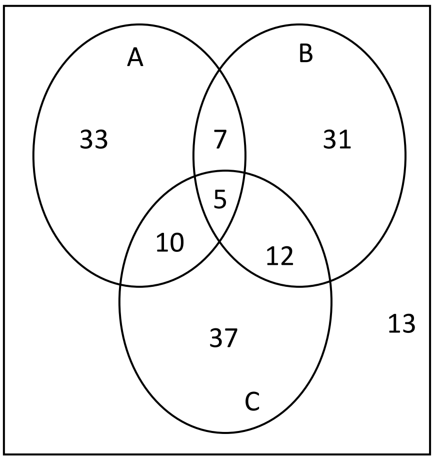
Atividade 5. Operações com eventos aleatórios

Numa prova com três questões (A, B e C) verificou-se que:

- 5 alunos acertaram as três questões;
- 15 alunos acertaram as questões A e C;
- 17 alunos acertaram as questões B e C;
- 12 alunos acertaram as questões B e A;
- 55 alunos acertaram só a questão A;
- 55 alunos acertaram só a questão B;
- 64 alunos acertaram só a questão C;
- 13 alunos erraram as três questões.

Um aluno é escolhido ao acaso. Qual é a probabilidade de ele ter acertado:

a) Pelo menos duas questões?



$Solução:$

$n(A) = 10 + 5 + 7 + 12 = 34$

$n(U) = 33 + 10 + 5 + 7 + 12 + 31 + 37 + 13 = 148$

$P(A) = \dfrac{n(A)}{n(U)} = \dfrac{34}{148}$

b) Exatamente uma questão?

$Solução:$

$n(A) = 33 + 31 + 37 = 101$

$n(U) = 33 + 10 + 5 + 7 + 12 + 31 + 37 + 13 = 148$

$P(A) = \dfrac{n(A)}{n(U)} = \dfrac{101}{148}$

Atividade 6. Sede do mundial de natação

Pequim, Tóquio, Los Angeles, Nova York, Buenos Aires, Cidade do México, Rio de Janeiro, Montreal, Madri, Paris, Londres e Berlin são cidades que se candidataram a sede de um campeonato mundial de natação.

a) Se a cidade escolhida não fica na Europa, qual é a probabilidade de que seja o Rio de Janeiro?

$n(A) = 1 \qquad n(B) = 8 \qquad n(U) = 12$

$P(A) = \dfrac{1}{12} \qquad P(B) = \dfrac{8}{12} \qquad P(A \cap B) = \dfrac{1}{12}$

$$p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{8}{12}} = \frac{1}{8}$$

b) Se nem Nova York nem Buenos Aires foram escolhidas, qual é probabilidade de a nova cidade sede ser européia?

$n(A) = 4 \qquad n(B) = 10 \qquad n(U) = 12$

$P(A) = \dfrac{4}{12} \qquad P(B) = \dfrac{10}{12} \qquad P(A \cap B) = \dfrac{4}{12}$

$$p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{\frac{4}{12}}{\frac{10}{12}} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

2º Proposta

Atividade 1: Cifra de César:

a) Codifique a frase “Usando números, nós podemos resolver os maiores problemas que conhecemos” utilizando a Cifra de César.

Quadro 1. Quadro do método de substituição utilizado por Júlio César.

Alfabeto Normal	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
Alfabeto Cifrado	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C

Solução: “XVDQGR QXPHURV QRV SRGHPRV UHVROYHU RV PDLRUHV SURE-OHPDV TXH FRQKHFHPRV”

b) Agora Decodifique a frase “r-f-d-p-l-q-k-r-s-d-u-d-d-i-h-o-l-f-l-g-d-g-h-h-v-w-d-h-p-y-l-y-h-u-p-r-v-r-s-u-h-v-h-q-w-h”, utilizando a Cifra de César.

Solução: “O caminho para felicidade está em vivermos o presente.”

Atividade 2 – Criptograma:

Qual é o número? Na adição apresentada a seguir, letras iguais representam o mesmo algarismo e letras diferentes algarismos diferentes. Encontre o número ABCDE.

$$
\begin{array}{r}
A\;B\;C\;D\;E \\
B\;C\;D\;E \\
+\qquad C\;D\;E \\
D\;E \\
E \\
\hline
A\;A\;A\;A\;A
\end{array}
$$

A B C D E = 5 2 4 8 7

B C D E = 2 4 8 7

C D E = 4 8 7

D E = 8 7

E = 7

A A A A A = 5 5 5 5 5

Atividade 3 – Código com Função linear.

a) Considere o Quadro 2 abaixo que, para cada letra do alfabeto, associa um número inteiro de 1 a 26 e codifique a mensagem “A matemática rege o mundo.”, utilizando o Código com Função Linear, sabendo que a função codificadora é f(x) = 4x + 3.

Quadro 2. Quadro do valor numérico de cada letra.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26

$f(1) = 4(1) + 3 \Rightarrow f(1) = 7$

$f(20) = 4(20) + 3 \Rightarrow f(20) = 83$

$f(9) = 4(9) + 3 \Rightarrow f(9) = 39$

$f(18) = 4(18) + 3 \Rightarrow f(18) = 75$

$f(15) = 4(15) + 3 \Rightarrow f(15) = 63$

$f(14) = 4(14) + 3 \Rightarrow f(14) = 59$

$f(13) = 4(13) + 3 \Rightarrow f(13) = 55$

$f(5) = 4(5) + 3 \Rightarrow f(5) = 23$

$f(3) = 4(3) + 3 \Rightarrow f(3) = 15$

$f(7) = 4(7) + 3 \Rightarrow f(7) = 31$

$f(21) = 4(21) + 3 \Rightarrow f(21) = 87$

$f(1) = 4(4) + 3 \Rightarrow f(4) = 19$

Frase codificada

“7, 55,, 7, 83, 23, 55, 7, 83, 39, 15, 7, 75, 23, 31, 23, 63, 55, 87, 59, 19, 63”

b) agora decodifique a mensagem “34, - 2, 55, 10, 34, - 2, 55, 22, 4, - 2”, utilizando o Quadro 2, sabendo que a função codificadora é f(x) = 3x – 5.

$$f(x)=34 \Rightarrow 3x-5=34 \Rightarrow x=13$$
$$f(x)=-2 \Rightarrow 3x-5=-2 \Rightarrow x=1$$
$$f(x)=55 \Rightarrow 3x-5=55 \Rightarrow x=20$$
$$f(x)=10 \Rightarrow 3x-5=10 \Rightarrow x=5$$
$$f(x)=4 \Rightarrow 3x-5=4 \Rightarrow x=3$$
$$f(x)=22 \Rightarrow 3x-5=22 \Rightarrow x=9$$

Mensagem descodificada “Matemática”

Atividade 4 – Código com Função quadrática:

Considere o Quadro 2 e a função cifradora f(x) = x^2 – 2x + 1, codifique a mensagem "Tudo é matemática".

Primeiro, relaciona-se cada letra do alfabeto a um número, conforme observa-se a seguir.

Cifre esta mensagem, utilizando a função cifradora

Seja a função f(x) = x^2 – 2x + 1, calcula-se a imagem da função para cada algarismo da sequência numérica:

$$f(x)=x^2-2x+1$$
$$f(20)=(20)^2-2(20)+1 \ \Rightarrow f(20)=361$$
$$f(21)=(21)^2-2(21)+1 \ \Rightarrow f(21)=400$$
$$f(4)=(4)^2-2(4)+1 \ \Rightarrow f(4)=9$$
$$f(15)=(20)^2-2(15)+1 \ \Rightarrow f(15)=196$$
$$f(5)=(20)^2-2(5)+1 \ \Rightarrow f(5)=16$$
$$f(13)=(13)^2-2(13)+1 \ \Rightarrow f(13)=144$$
$$f(1)=(1)^2-2(1)+1 \ \Rightarrow f(1)=0$$
$$f(9)=(9)^2-2(9)+1 \ \Rightarrow f(9)=74$$
$$f(3)=(3)^2-2(3)+1 \ \Rightarrow f(3)=4$$

Mensagem codificada "361, 400, 9, 196" "16" "144, 0, 361, 16, 144, 0, 361, 74, 4, 0"

Atividade 5 – Código com Função exponencial

Considere o Quadro 2 e a função cifradora f(x) = 2^x, codifique a mensagem "Alice é linda".

Primeiramente relaciona-se para cada letra do alfabeto um número, que corresponderá aos valores de x na função, conforme a figura anterior

A seguir, escolhe-se uma função exponencial cifradora f(x) = 2^x

$$f(x) = 2^x$$
$$f(1) = 2$$
$$f(12) = 2^{12} \Rightarrow f(12) = 4096$$
$$f(9) = 2^9 \Rightarrow f(9) = 512$$
$$f(3) = 2^3 \Rightarrow f(3) = 8$$
$$f(5) = 2^5 \Rightarrow f(5) = 32$$
$$f(14) = 2^{14} \Rightarrow f(14) = 16384$$
$$f(4) = 2^4 \Rightarrow f(4) = 16$$

A mensagem a ser transmitida ao receptor deve ser a seqüência numérica obtida pela imagem da função, para cada letra do texto criptografado.

Mensagem codificada “2, 4096, 512, 8, 32, 32, 4096, 512, 16384, 16, 2”

3º Proposta

Atividade 1: Próximo termo da sequência :

Na sequência abaixo, cada número, do terceiro em diante, é obtido a partir dos dois anteriores de acordo com uma certa regra: 12, 20, 32, 52, 84, 136, ... O próximo número é o:

(A) 220; (B) 224; (C) 228; D) 232; (E) 236

Solução: a_3 = 12 + 20, a_4 = 20 + 32, a_5 = 32 + 52 seguindo a lógica a_7 = 84 + 136= 220

Atividade 2: Identificando padrões numéricos:

Descubra os dois termos seguintes das seqüências e determine qual o padrão de cada uma.

a) (2, 5, 8, 11, 14, 17, ...)
   Solução: a sequência foi construída somando sempre o número 3. Logo os próximos são 20 e 23.
b) (3, 6, 12, 24. ....)
   Solução: a sequência foi construída multiplicando cada termo a partir do primeiro por 2. Logo os próximos termos são 48 e 96.
c) (1, 2, 4, 7, 11, ...)

Solução: a sequência foi construída somando 1 ao primeiro termo, 2 ao segundo e assim por diante. Logo os próximos termos são 16 e 22.

d) (3, 6, 11, 18, 27, ...)

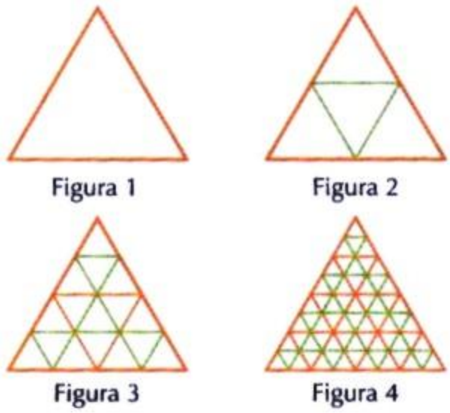
Solução: a sequência foi construída somando 3 ao primeiro termo, 5 ao segundo, 7 ao terceiro e assim por diante. Logo os próximos termos são 38 e 51.

e) (2, 10, 12, 16, 17, 18, 19, ...)

Solução: Cada termo desta sequência começa com a letra “d”. Logo os próximos termos são 200 e 201.

Atividade 3: Observando as figuras:

Considere esta seqüência de figuras.



Na figura 1, há 1 triângulo.

Na figura 2, o número de triângulos menores é 4.

Na figura 3, o número de triângulos menores é 16 e assim por diante.

Prosseguindo essa construção de figuras, teremos quantos triângulos menores na figura 7?

$Solução: (1, 4, 16, \ldots)$

$a_n = a_1 . q^{n-1} \Rightarrow a_7 = 1.4^{7-1} \Rightarrow 4^6 \Rightarrow (2^2)^6 \Rightarrow 2^{12}\ ou\ 4096$

Atividade 4: Aumentando a produção:

Uma empresa produziu 10 000 unidades de certo produto em 2011. A cada ano seguinte produzirá 20% a mais desse produto em relação ao ano anterior. Quantas unidades desse produto a empresa produzirá no período de 2011 a 2015?

a) Utilizando uma calculadora, calcule o aumento de cada ano utilizando porcentagem apenas e preencha a tabela abaixo.

Ano	Produção (em unidades)
2011	10000
2012	12000
2013	14400
2014	17280
2015	20736

b) Agora com uso da fórmula a produção deste período.

$Solução:$

$a_n = a_1 . q^{n-1}$

$a_2 = 10000.(1,2)^{2-1} = 12000$

$a_3 = 10000.(1,2)^{3-1} = 14400$

$a_4 = 10000.(1,2)^{4-1} = 17280$

$a_5 = 10000.(1,2)^{5-1} = 20736$

Atividade 5: Equação e PG:

As raízes da equação do 2º grau x² - 5x + 4 = 0 são o 1º e 2º termos de uma PG crescente. Determine o 6º termo dessa sequência.

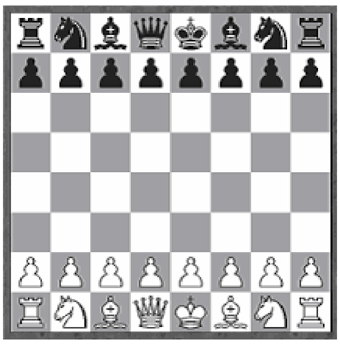
$\text{Solução: Raízes da equação são 1 e 4}$

$\text{PG} = (1,4,16,\ldots)$

$\text{a}_n = \text{a}_1 . \text{q}^{n-1} \Rightarrow \text{a}_6 = 1.4^{6-1} \Rightarrow \text{a}_6 = 4^5 \text{ ou } 2^{10}$

Atividade 6: Xadrez

Conta a lenda que um rei solicitou a seus súditos que inventasse um novo jogo para diminuir o tédio que ele sentia. Um dos súditos inventou, então, o jogo de xadrez.



Fascinado pelo jogo, o rei chamou o inventor e prometeu-lhe como recompensa todas as riquezas que ele desejasse.

O astuto inventor pediu somente alguns grão de trigo, nas seguintes condições: um grão na primeira casa do tabuleiro de xadrez e, em cada casa seguinte, o dobro de grão que havia na casa anterior. Como o tabuleiro de xadrez tem 64 casas, determine a soma dos primeiros 64 termos da PG: 1,2, 4, 8, 16, 32, ... e descubra o valor pedido pelo inventor.

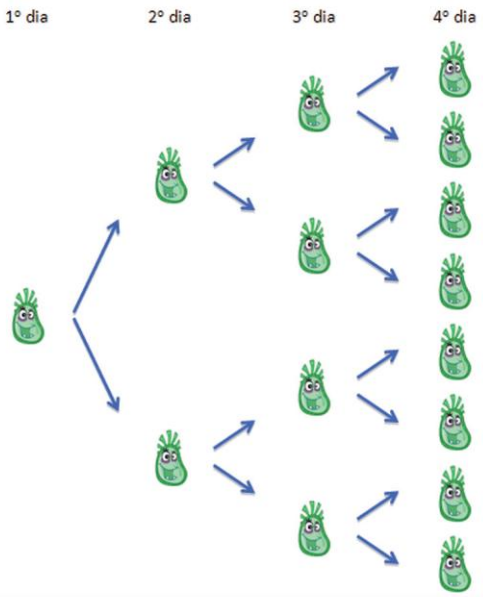
$$S_n = \frac{a_1\left(1-q^n\right)}{1-q} ou \frac{a_1\,(q^n -)}{q-1}$$

$$S_{64} = \frac{1\left(2^{64}-1\right)}{2-1} \Rightarrow 2^{64}-1$$

Atividade 7: Crescimento do número de protozoário:

A ameba é um protozoário e só pode ser vista ao microscópio. Após crescer até um certo tamanho, uma ameba se divide ao meio e produz outras duas. No dia seguinte, cada uma se divide ao meio novamente, formando quatro amebas no total. No terceiro dia o mesmo processo se repete e teremos oito amebas, e esse processo, teoricamente, pode continuar indefinidamente

O desenho abaixo ilustra tal situação até o 4º dia.



a) Quantas amebas existirão no 5º dia? Explique como encontrou este valor.

Solução: As amebas dividiram-se três vezes, logo $2^3 = 8$

b) Utilizando uma sequência numérica, expresse o número de amebas que se reproduziram nos 6 primeiros dias.

Solução: (1, 2, 4, 8, 16, 32)

c) Explique como podemos encontrar o número de amebas do 10º dia se conhecemos o número de amebas do 8º dia?

Solução: Utilizando a fórmula $a_n = a_k \cdot q^{n-k}$, assim $a_{10} = a_8 \cdot 2^{10-8}$

d) Explique como podemos encontrar o número de amebas do 22º dia se conhecemos o número de amebas do 23º dia?

Solução: Utilizando a fórmula $a_n = a_k \cdot q^{n-k}$, assim $a_{23} = a_{22} \cdot 2^{23-22}$

e) Quantas amebas haverá no 11º dia?

Solução: $a_{11} = 1 \cdot 2^{11-1} = 2^{10}$ ou 1024

4º Proposta

Atividade 1: Transformando binário em decimal.

Faça a conversão de binário para decimal dos seguintes itens:

a) $100101 = 2^5 + 2^2 + 2^0 = 37$

b) $1000101101 = 2^9 + 2^5 + 2^3 + 2^2 + 2^0 = 557$

c) $1111010110110 = 2^{12} + 2^{11} + 2^{10} + 2^9 + 2^7 + 2^5 + 2^4 + 2^2 + 2 = 7862$

Atividade 2: Transformando decimal em binário.

Faça a conversão de decimal para binário dos seguintes itens:

a) 297 = 100101001

b) 4021= 111110110101

c) 9135 = 10001110101111

Atividade 3: Próximo termo da sequência :

Na sequência abaixo, cada número, do terceiro em diante, é obtido a partir dos dois anteriores de acordo com uma certa regra: 12, 20, 32, 52, 84, 136, ... O próximo número na forma binária é o:

A) 11011100 B) 10101010 C) 11100110

D) 01010101 E) 11001100

Solução: 220 = 11011100

Atividade 4: Sistema Binário com função Afim

Considere as funções *f* e *g*, ambas com domínio *Z*, dadas por *f*(*x*) = 5x -3 e *g*(*x*) = 3*x* + *5*. Determine o valor de *f* (101_B) – *g* (110_B).

Solução:

$101_B = 2^2 + 2^0 = 5$ f(5) = 5(5) – 3 = 22

$110_B = 2^2 + 2^1 = 6$ g(6) = 3(6) +5 = 23

f (101_B) – *g* (110_B). = 22 – 23 = -1

Atividade 5: Operação de binário

Efectue as seguintes operações em binário:

a)

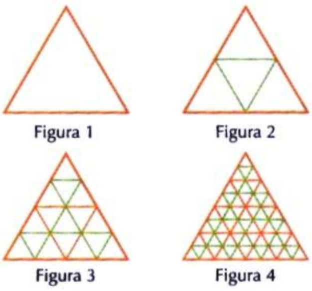
$$\begin{array}{r} 11101101 \\ +\,10101010 \\ \hline 110010111 \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{r} 1010101 \\ -\,0101010 \\ \hline 0101011 \end{array}$$

Atividade 6: Observando as figuras:

Considere esta seqüência de figuras.



Na figura 1, há 1 triângulo.

Na figura 2, o número de triângulos menores é 4.

Na figura 3, o número de triângulos menores é 16 e assim por diante.

a) Prosseguindo essa construção de figuras, teremos quantos triângulos menores na figura 7?

$Solução: (1,4,16,\ldots)$

$$a_n = a_1 . q^{n-1} \Rightarrow a_7 = 1.4^{7-1} \Rightarrow 4^6 \Rightarrow \left(2^2\right)^6 \Rightarrow 2^{12}\ ou\ 4096$$

b) Represente o resultado anterior na base 2.

Solução:

4096 = 1000000000000

5º Proposta

Atividade 1: Determinando uma matriz

Sejam as matrizes A = $(a_{ij})_{6 \times 3}$, em que a_{ij} = i + j, e B = $(b_{jk})_{3 \times 4}$, em que 2j – k.

a) Escreva as matrizes A e B.

$$a_{11} = 1+1=2, a_{12} = 1+2=3, a_{13} = 1+3=4, a_{21} = 2+1=3, a_{22} = 2+2=4, a_{23} = 2+3=5,$$
$$a_{31} = 3+1=4, a_{32} = 3+2=5, a_{33} = 3+3=6, a_{41} = 4+1=5, a_{42} = 4+2=6, a_{43} = 4+3=7,$$
$$a_{51} = 5+1=6, a_{52} = 5+2=7, a_{53} = 5+3=8, a_{61} = 6+1=7, a_{62} = 6+2=8, a_{63} = 6+3=9.$$
$$b_{11} = 2(1)-1=1, b_{12} = 2(1)-2=0, b_{13} = 2(1)-3=-1, b_{14} = 2(1)-4=-2,$$
$$b_{21} = 2(2)-1=3, b_{22} = 2(2)-2=2, b_{23} = 2(2)-3=1, b_{24} = 2(2)-4=0,$$
$$b_{31} = 2(3)-1=5, b_{32} = 2(3)-2=4, b_{33} = 2(3)-3=3, b_{34} = 2(3)-4=2,$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}_{6 \times 3} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}_{3 X 4}$$

b) Sendo C = $(c_{ik})_{6 \times 4}$ a matriz produto A . B, determine o elemento c_{43}.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}_{6 \times 3} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}_{3 X 4} = C(c_{ik})_{6 x 4}$$

$$C_{43} = 5.(-1) + 6.(1) + 7.(3) = 22$$

Atividade 2: Matriz para determinar preço

A matriz C fornece, em reais, o custo das poções de arroz, carne e salada usadas em um restaurante:

$$C = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{arroz} \\ \text{carne} \\ \text{salada} \end{matrix}$$

A matriz P fornece o número de porções de arroz, carne e salada usadas na composição dos pratos tipo P_1, P_2, P_3 desse restaurante:

$$\begin{array}{cccccc} & \textit{arroz} & \textit{carne} & \textit{salada} & \\ P = & \left(\begin{array}{c} 2 \\ 1 \\ 2 \end{array} \right. & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 2 \end{array} & \left. \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right) & \begin{array}{l} prato\, P_1 \\ prato\, P_2 \\ prato\, P_3 \end{array} \end{array}$$

A matriz que fornece o custo de produção, em reais dos pratos P_1, P_2, P_3 é:

$$a)\begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 8 \end{pmatrix} \quad b)\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \quad c)\begin{pmatrix} 9 \\ 11 \\ 4 \end{pmatrix} \quad d)\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} \quad e)\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$Solução:$

$$P.C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.1+1.3+1.2 \\ 1.1+3.2+2.1 \\ 2.1+2.3+0.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Atividade 3: Calculando nota dos candidatos

A tabela abaixo mostra as notas obtidas pelos alunos A, B e C nas provas de Português, Matemática e conhecimentos Gerais em um exame vestibular.

	Português	Matemática	Conhecimentos Gerais
Aluno A	4	6	7
Aluno B	9	3	2
Aluno C	7	8	10

Se o peso das provas são 7 (em Português), 6 (em Matemática) e 5 (em Conhecimentos Gerais), qual o produto de matrizes que permite determinar a nota final de cada aluno?

$Solução:$

$$Pontos = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 7 \\ 9 & 3 & 2 \\ 7 & 8 & 10 \end{pmatrix} e\, Pesos = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$Pontos.Pesos = \begin{pmatrix} 4.7+6.6+7.5 \\ 9.7+3.6+2.5 \\ 7.7+8.6+10.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 99\, pontos\, para\, A \\ 91\, pontos\, para\, B \\ 147\, pontos\, para\, C \end{pmatrix}$$

Atividade 4: Pontuação

Durante a primeira fase da Copa do Mundo de futebol realizada na frança em 1998, o grupo A era formado por quatro países: Brasil, Escócia, Marrocos e Noruega. Observe os resultados (número de vitórias, empates e derrotas) de cada país registrados na tabela 1.

Países	Vitória	Empate	Derrota
Brasil	2	0	1
Escócia	0	1	2
Marrocos	1	1	1
Noruega	1	2	0

Pelo regulamento da Copa, cada resultado (vitória, empate ou derrota) tem uma pontuação que pode ser observado na tabela 2.

Resultados	Pontuação
Vitória	3
Empate	1
Derrota	0

A matriz $C=\begin{bmatrix} \text{Brasil} \\ \text{Escócia} \\ \text{Marrocos} \\ \text{Noruega} \end{bmatrix}$ que representa a pontuação final de cada país, ao término dessa primeira fase é:

$$a)C=\begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \quad b)C=\begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} \quad c)C=\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix} \quad d)C=\begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} \quad e)C=\begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$Solução$:

$$Jogos=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} e\, Pontos=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Jogos.Pontos=\begin{pmatrix} 2.3+0.1+1.0 \\ 0.3+1.1+2.0 \\ 1.3+1.1+1.0 \\ 1.3+2.1+0.0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Atividade 5: Quantidade de árvores

Em uma plantação, as árvores são classificadas de acordo com seus tamanhos em três classes: pequena (P), média (M) e grande (G). Considere, inicialmente, que havia na plantação p_0 árvores da classe P, m_0 da classe M e g_0 da classe G. Foram cortadas árvores para venda. A fim de manter a quantidade total de árvores que havia na floresta, foram plantadas k mudas (pertencentes à classe P). Algum tempo após o replantio, as quantidades de árvores das classes P, M e G passaram a ser, respectivamente, p_1, m_1 e g_1, determinadas segundo a equação matricial:

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ m_1 \\ g_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}9 & 0 \\ 0 & 0{,}1 & 0{,}95 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0 \\ m_0 \\ g_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Observando-se que $p_1 + m_1 + g_1 = p_0 + m_0 + g_0$, pode-se afirmar que k é igual a:

a) 5 % de g_0.

b) 10 % de g_0.

c) 15 % de g_0.

d) 20 % de g_0.

e) 25 % de g_0.

Solução:

$$\begin{bmatrix} 0{,}8 & 0 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}9 & 0 \\ 0 & 0{,}1 & 0{,}95 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0 \\ m_0 \\ g_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 \\ m_1 \\ g_1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0{,}8P_0 \\ 0{,}2P_0 + 0{,}9m_0 \\ 0{,}1m_0 + 0{,}9g_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 \\ m_1 \\ g_1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 0{,}8P_0 + K \\ 0{,}2P_0 + 0{,}9m_0 \\ 0{,}1m_0 + 0{,}9g_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 \\ m_1 \\ g_1 \end{bmatrix} = \begin{matrix} P_1 = 0{,}8P_0 + K \\ m_1 = 0{,}2P_0 + 0{,}9m_0 \\ g_1 = 0{,}1m_0 + 0{,}9g_0 \end{matrix}$$

$$\textit{Como } p_1 + m_1 + g_1 = p_0 + m_0 + g_0 \textit{ temos}$$
$$0{,}8P_0 + K + 0{,}2P_0 + 0{,}9m_0 + 0{,}1m_0 + 0{,}9g_0 = p_0 + m_0 + g_0 \Rightarrow$$
$$K + 0{,}9g_0 = g_0 \Rightarrow K = 0{,}1g_0 \textit{ ou } 10\% g_0$$