KARINE GANTES MONTEIRO

Uma proposta para o ensino de trigonometria e semelhança de triângulos no Ensino Fundamental

Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil

Março, 2016

KARINE GANTES MONTEIRO

Uma proposta para o ensino de trigonometria e semelhança de triângulos no Ensino Fundamental

Dissertação submetida por Karine Gantes Monteiro como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre, pelo Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT junto ao Instituto de Matemática, Estatística e Física da Universidade Federal do Rio Grande.

Universidade Federal do Rio Grande - FURG

Instituto de Matemática, Estatística e Física - IMEF

Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Orientador: Dr. LEANDRO SEBBEN BELLICANTA

Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil

Março, 2016

Colaboradores

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE
http://www.furg.br

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E FÍSICA
http://www.imef.furg.br

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
http://www.profmat-sbm.org.br

SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
http://www.sbm.org.br

COORDENAÇÃO DE APERFEIÇOAMENTO DE PESSOAL DE NÍVEL SUPERIOR
http://www.capes.gov.br

Ficha catalográfica

M775p Monteiro, Karine Gantes.

Uma proposta para o ensino de trigonometria e semelhança de triângulos do Ensino Fundamental / Karine Gantes Monteiro. – – 2016.

74 f.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande – FURG, Programa de Pós-graduação Profissional em Matemática em Rede – PROFMAT, Rio Grande/RS, 2016.

Orientador: Dr. Leandro Sebben Bellicanta.

1. Ensino Fundamental 2. Semelhança de triângulos 3. Trigonometria I. Bellicanta, Leandro Sebben II. Título.

CDU 514.116:377.3

Catalogação na Fonte: Bibliotecário Me. João Paulo Borges da Silveira CRB 10/2130

KARINE GANTES MONTEIRO

Uma proposta para o ensino de trigonometria e semelhança de triângulos no Ensino Fundamental

Dissertação submetida por Karine Gantes Monteiro como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre, pelo Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT junto ao Instituto de Matemática, Estatística e Física da Universidade Federal do Rio Grande.

Trabalho aprovado. Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil, 19 de março de 2016.

Dr. LEANDRO SEBBEN BELLICANTA
Orientador

Dra. CRISTIANA ANDRADE POFFAL
Convidada

Dra. LISANDRA SAUER
Convidada

Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil

Março, 2016

Dedico esse trabalho à minha família, especialmente ao meu filho Bernardo para que no futuro aprenda a gostar de Matemática assim como eu. Dedico também a todos os professores que lutam pela qualidade do ensino e buscam incessantemente meios de transformar a educação que temos para alcançar aquela que queremos.

Agradecimentos

Eu agradeço a Deus pela oportunidade de realizar esse trabalho, à minha mãe e meu pai por todo amparo incondicional recebido durante esses dois anos de Mestrado.

Ao meu marido e meu filho por todo apoio emocional e compreensão que me dedicaram nesse tempo, mesmo nos momentos mais complicados. À CAPES pelo suporte financeiro, aos professores do PROFMAT que me auxiliaram a construir novos pensamentos e a olhar para a Matemática de uma maneira mais profunda.

A Escola Estadual de Ensino Fundamental Barão de Cerro Largo que permitiu a aplicação dessa proposta na turma 9ºB no ano de 2015. Agradeço a todos os alunos da turma, que abraçaram essa proposta e me ensinaram muito mais do que pude ensinar para eles. Pelo empenho, participação e ótima convivência que tivemos durante todo esse período, muito obrigada!

As minhas amigas Mirella e Silvana, que foram muito importantes com suas sugestões oportunas na melhora da qualidade desse trabalho.

A todos que fizeram parte da minha trajetória nesses dois anos e que diretamente ou indiretamente contribuíram de alguma forma para que esse trabalho fosse colocado em prática.

Ao professor orientador Dr. Leandro Bellicanta que, com suas aulas de Geometria na graduação e no PROFMAT, onde estimulava o raciocínio e compreensão, contribuiu significativamente para a minha luta pelo ensino de Geometria no Ensino Básico, na busca pela melhoria da qualidade da educação.

"Eu tentei 99 vezes e falhei, mas na centésima tentativa eu consegui. Nunca desista de seus objetivos mesmo que esses pareçam impossíveis, a próxima tentativa pode ser a vitoriosa." Albert Einstein

Resumo

Esse trabalho apresenta um roteiro de atividades dirigidas elaboradas ao longo dos anos de 2014 e 2015, período no qual a autora cursava o Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT. O intuito dessas atividades é servir de alternativa ao tratamento de alguns dos conteúdos de geometria previstos para o nono ano do ensino fundamental. A partir de uma atividade prática, onde os estudantes medem a altura do corpo e a respectiva sombra produzida pelos colegas, são desenvolvidos assuntos tais como: relações métricas e trigonométricas no triângulo retângulo e semelhança de triângulos. Esta proposta foi efetivamente aplicada em uma turma de 9º ano na Escola Estadual de Ensino Fundamental Barão de Cerro Largo na cidade do Rio Grande, Rio Grande do Sul. Ao longo do texto os resultados obtidos e alguns aspectos teóricos que se mostraram relevantes são analisados.

Palavras-chave: Ensino Fundamental. Semelhança de triângulos. Trigonometria.

Abstract

This work presents a guide of directed activities elaborated through the years of 2014 and 2015, which was the period where the Author was attending the Professional Master on Mathematics in National Network – PROFMAT. The aim of these activities is to serve as an alternative to the treatment of some of the geometry content planned for the 9th grade of elementary school. From a practical activity – where the students measure their height and the respective shadow produced by their classmates –subjects are developed such as: metric and trigonometric relations on the right triangle and similar triangles. This proposal was effectively applied to a class of 9th grade at Escola Estadual de Ensino Fundamental Barão de Cerro Largo, Rio Grande, Rio Grande do Sul. Throughot this text, the results obtained and some of the relevant theoretical aspects are analyzed.

Keywords: Elementary School. Triangle Similarity. Trigonometry.

Sumário

Introdução

Apresentamos nesse trabalho, um roteiro de atividades dirigidas para o ensino de alguns conteúdos de Geometria no 9º ano do Ensino Fundamental. Essas atividades foram elaboradas durante os anos de 2014 e 2015, período no qual a autora cursava o Mestrado Profissional de Matemática - PROFMAT. A aplicação dessa proposta ocorreu no mês de maio de 2015 e posteriormente foram feitas análises dos resultados obtidos em relação à motivação e aprendizagem dos alunos, que serão apresentadas no decorrer do texto.

Nosso intuito consiste em propor atividades que trabalhem os conceitos geométricos, relacionando-os entre si e a outros conteúdos matemáticos, possibilitando aos alunos visualizar, reconhecer e dialogar com o objeto de estudo, partindo de uma atividade prática até chegar ao nível de abstração no qual eles sejam capazes de fazer a dedução de fórmulas.

Entendemos a Geometria como um ramo importante da matemática, pois através dela podemos modelar situações cotidianas, utilizando concomitantemente ideias de lógica matemática, álgebra e visualizações geométricas. Interligando conteúdos na resolução de problemas, acreditamos que o raciocínio e o pensamento matemático dos alunos se desenvolvem de maneira mais eficaz, auxiliando-os a se relacionar com o mundo que os cerca. Buscamos construir atividades que proporcionem esse processo de diálogo e interação em um ambiente motivador, para que os discentes compreendam a importância e a utilidade desses conceitos, de modo que os mesmos possam fazer parte dos seus saberes individuais e sirvam de base para o desenvolvimento de noções mais amplas e generalizadas futuramente.

Compreendemos que há resistência dos estudantes em realizar atividades em que os conteúdos estão sendo construídos, a partir de análises e questionamentos, e atribuímos isso, à ausência de tarefas que promovam essa postura investigativa nas aulas de Matemática. Queremos motivar os alunos e também os professores, mostrando que algumas atitudes diferentes podem contribuir para aumentar o rendimento e a dedicação dos estudantes, sem deixar de lado aspectos formais da matemática. Melhorar a qualidade do ensino não é uma tarefa fácil e depende de muitos fatores, ainda assim, cabe a nós, professores, buscar alternativas que sejam possíveis dentro do nosso âmbito profissional.

Esta proposta de ensino consiste em uma sequência de atividades que tem por objetivo principal trabalhar as relações métricas e trigonométricas no triângulo retângulo e estudar a semelhança entre triângulos. Além disso, outros assuntos relacionados surgem em segundo plano, tais como: ângulos, perpendicularidade entre segmentos de reta, modelagem de situações reais, figuras geométricas, proporção, sistemas de equações (resolução pelo método da adição), entre outros. Sugerimos cinco atividades, onde trabalhamos os conceitos geométricos de maneira interligada e de forma gradual, possibilitando aos alunos visualizar, reconhecer e dialogar com as ideias apresentadas, chegando até o nível de abstração, realizando a dedução de fórmulas relacionadas aos conteúdos abordados.

O texto está dividido em três capítulos. No primeiro, apresentamos um resumo breve sobre os aspectos históricos do ensino da Geometria, relacionando-os com situações que ocorrem no dia a dia da maioria das escolas. Fundamentamos a proposta a partir do modelo de aprendizagem geométrica dos níveis de Van Hiele (RODRIGUES, 2007) e da aprendizagem significativa defendida por Ausebel (AUSEBEL, 2003). Além disso, comentamos sobre alguns tópicos, tais como: trabalho em grupo, avaliação e planejamento do professor, que consideramos relevantes para que haja sucesso na aplicação desse roteiro de atividades.

No segundo capítulo, descrevemos cada uma das cinco atividades propostas, informando os objetivos e os materiais a serem utilizados. Apresentamos uma breve discussão sobre o que é esperado em cada uma das questões. Tecemos comentários sobre possíveis intervenções ou modificações que o professor poderá realizar, de acordo com o rendimento e as necessidades de cada turma. Também são sugeridos exercícios, para os quais apresentamos uma das possíveis resoluções.

No terceiro capítulo, analisamos resultados da aplicação dessa proposta, comparando a motivação e o desempenho da turma que realizou essas atividades, com outra turma onde o trabalho foi feito baseado no livro didático. Refletimos ainda sobre a importância da participação ativa do professor nesse tipo de atividade, para que o trabalho atinja seus objetivos satisfatoriamente.

No apêndice, apresentamos uma história sobre o matemático Pitágoras, que pode auxiliar o professor com elementos da história da Matemática. E por último, nos anexos, temos as atividades, os exercícios e um modelo de prova que podem ser utilizados como materiais de apoio para o docente.

Visamos que esse trabalho possa dar suporte às atividades de outros professores e sirva de estímulo para que outras propostas surjam nesse sentido, objetivando contribuir para a melhora na qualidade do ensino e da aprendizagem em Matemática, principalmente no Ensino Básico que é o ponto inicial do desenvolvimento do pensamento matemático dos estudantes.

1 Considerações sobre o ensino de Geometria

1.1 Um pouco de história

Desde os tempos mais remotos o Homem vem desenvolvendo o pensamento geométrico, muitas vezes de forma inconsciente, observando a natureza, a lua, o sol, as estrelas. Povos antigos deixaram muitos vestígios sobre seus conhecimentos nessa área, sejam eles babilônios, egípcios, chineses e hindus e muito do que conhecemos hoje de Geometria devemos a eles.

Os pensadores daquela época se dedicavam a entender e solucionar problemas surgidos no cotidiano que, por serem situações reais, relacionavam entre si muitos conteúdos de diferentes áreas. O conhecimento se restringia a poucas pessoas que dedicavam sua vida ao estudo, porém ao longo do tempo ele passou a ser difundido para maior número de pessoas, pois ocorreram transformações, discussões, desacordos sobre como ensinar, o que ensinar e para quem ensinar. Não existiam metodologias para o ensino, por isso os professores ensinavam conforme compreendiam o conteúdo e da forma que lhes parecia mais agradável, além disso ainda não havia planos de ensino unificados, por isso a escolha dos conteúdos abordados também era a critério de cada docente.

Atualmente, existem as Diretrizes Curriculares Nacionais (BRASIL, 2013) e os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997) que indicam o que é esperado da aprendizagem do aluno e quais os conteúdos mais importantes a serem abordados em sala de aula. Ainda assim, há problemas em seu ensino e aprendizagem, seja pela falta de preparo de alguns professores, seja pelas dificuldades de aprendizagem dos alunos ou pela ausência de uma metodologia adequada ao seu ensino.

Analisando a história do ensino de Geometria no Brasil podemos compreender aspectos históricos importantes que permeiam as discussões.

Até o final dos anos de 1920, a matemática brasileira dependia dos modelos de ensino franceses em sua estrutura de ensino e até mesmo nos livros e manuais utilizados que eram traduções francesas. Em 1930 ocorreu a reforma Francisco Campos, que tinha como objetivo principal integrar o ensino de Aritmética, Álgebra e Geometria, porém não houve sucesso porque os professores consideraram como "confusões de assuntos". Em 1942, os conteúdos voltaram a ser trabalhados separadamente, devido a um novo movimento chamado de Reforma Gustavo Capanema. A Geometria era apresentada na sua forma dedutiva, de maneira complexa e abstrata e por isso muitos alunos recorriam a memorização. Surgiu então o movimento da Matemática Moderna a partir dos anos 50, que influenciou o ensino de matemática não só no Brasil como em outros países. Essa reforma priorizava o ensino de Teoria dos Conjuntos e Álgebra e o ensino de Geometria sofreu uma desvalorização, passando para o final dos livros didáticos e também sendo ensinado ao final do ano letivo pela maioria dos docentes. A partir da década de 70 esse modelo de ensino começa a ser repensado e volta a ser discutido o ensino de Geometria, como um ramo tão importante da matemática quanto a álgebra e a arimética. (LOBO; BAYER, 2004)

As principais críticas a esse Movimento eram em relação ao rigor e a ênfase em todo processo de raciocínio dedutivo. Era esperado que os alunos entendessem e reproduzissem demonstrações, entretanto o cálculo de áreas e volumes de sólidos que os cercavam e a resolução de problemas práticos foram deixados em segundo plano. Ou seja, os conhecimentos matemáticos davam prioridade ao pensamento abstrato, havendo pouca relação com a prática, as utilidades e os aspectos históricos que haviam dado origem a esses conhecimentos. Essa postura em relação a aprendizagem foi uma herança do período de Regime Militar, pois o "novo governo manteve o foco em formar um povo capaz de realizar tarefas, mas não necessariamente de pensar sobre elas." (SILVA, 2015)

Em 1971 foi criado o vestibular como forma de ingresso nas Universidades e o Ministro Jarbas Passarinho sancionou uma lei que determinava a organização do ensino em 1º e 2º graus, em lugar de primário, ginásio e colegial. Após o fim do período de ditadura, vários aspectos do país voltaram a ser repensados, entre eles, a educação. Assim, no ano de 1988, a nova Constituição Federal foi aprovada e reconheceu a Educação como direito subjetivo de todos os cidadãos. Durante a década de 80, alternativas para democratizar e facilitar a compreensão da Matemática foram pensadas e o ensino dessa disciplina foi centrado em três grandes temas: "Números, Medida e Geometria". Havia a preocupação em fazer uma abordagem histórica dos temas estudados, dava-se ênfase à compreensão dos conceitos, levando-se em conta o desenvolvimento dos estudantes e voltou a ter grande importância o ensino da Geometria sem a utilização demasiada da linguagem de conjuntos. Em 1996, foi aprovada a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, que indicou que os professores deveriam possuir formação em nível superior e o 1º e 2º graus passaram a ser Ensino Fundamental e Médio, como são denominados até os dias atuais. A partir do ano 2000 o Brasil foi incluído no Programa Internacional de Avaliação de Alunos (PISA) e ficou em último lugar demonstrando que havia problemas na educação do país. (SILVA, 2015)

Algumas conclusões que foram obtidas a partir dos resultados do PISA aplicado em 2012: "Altas taxas de repetência ainda são encontradas em todo o Brasil, especialmente entre os alunos mais pobres, e estão negativamente associadas ao desempenho em Matemática (ou seja, quanto maior a repetência de uma rede de ensino, piores são as notas em matemática dos seus alunos).” (SILVA, 2015)

Mesmo após todas as mudanças e discussões que tivemos nos últimos anos, na Educação Básica, o ensino de Matemática, consequentemente o de Geometria, ainda não possui a qualidade que gostaríamos. Visando ser uma ferramenta auxiliar na modificação desse panorama é que construímos essa proposta.

1.2 Ensino, aprendizagem e avaliação em Geometria

De acordo com (ALMOULOUD et al., 2006) o fracasso no ensino e na aprendizagem ocorre devido a vários fatores, entre eles, a formação inicial precária de professores em relação a esse ramo da matemática e também a ausência de métodos que relacionem a visualização geométrica e os conteúdos para que os alunos façam a passagem da geometria empírica para a geometria dedutiva. Segundo os autores essa segunda falha ocorre também em grande parte dos livros didáticos, o que acaba dificultando o trabalho do professor. O ensino de Geometria acaba ficando restrito a definições e à aplicação direta de algoritmos, sem explorar de maneira satisfatória as inúmeras aplicações e relações com o cotidiano que o tema possui.

Quando o ensino de Geometria é axiomático não é proporcionado aos alunos um ambiente onde eles possam reconhecer o conteúdo, familiarizarem-se com ele e desenvolverem seu modo de pensar até chegarem ao raciocínio formal. Sem esses fatores, diminuem as possibilidades de que a aprendizagem seja satisfatória. Acreditamos que o pensamento geométrico progride seguindo algumas etapas, conhecidas como Níveis de Van Hiele[1].

De acordo com a teoria de Van Hiele existem cinco níveis que o estudante percorre a fim de adquirir a compreensão do conteúdo geométrico que está aprendendo (RODRIGUES, 2007):

- O primeiro nível é a visualização, quando o aluno reconhece visualmente uma figura geométrica, tem condições de aprender o vocabulário geométrico e não reconhece ainda as propriedades de uma determinada figura.
- O segundo nível é análise, quando ele identifica as propriedades de uma determinada figura, e não faz inclusão de classes.

[1] Níveis de Van Hiele foi uma expressão que surgiu decorrente do trabalho de dois professores holandeses de matemática no ensino secundário, Pierre M. Van Hiele e Dina Van Hiele-Geldof, que resultou em duas teses de doutorado.

- O terceiro nível é a dedução informal, quando o discente já é capaz de fazer a inclusão de classes, acompanhar uma prova informal, mas não é capaz de construir uma outra.
- O quarto nível é a dedução formal, quando o estudante é capaz de fazer provas formais, e raciocina num contexto de um sistema matemático completo.
- O quinto nível é o rigor, quando ele é capaz de comparar sistemas baseados em diferentes axiomas, e neste nível é que as geometrias não euclideanas são compreendidas.

Segundo os autores, a passagem de um nível para outro depende mais dos conteúdos e dos métodos de instrução do que da idade. É importante ressaltar que nenhum método permite ao aluno saltar algum nível, o que pode ocorrer é a aceleração do progresso. Do mesmo modo é possível retardar ou mesmo impossibilitar o progresso de um nível para outro.

Refletindo a partir desse modelo de desenvolvimento do pensamento geométrico é que baseamos nossa proposta em atividades que permitem aos discentes questionarem, visualizarem e construírem os conhecimentos geométricos a partir de um roteiro de atividades dirigidas. Uma forma não-convencional de trabalhar a geometria nas séries finais do Ensino Fundamental.

A utilização em sala de aula de atividades diferenciadas para o ensino e a aprendizagem de matemática pode auxiliar na quebra de paradigmas em relação a essa disciplina. Sabemos que a matemática é considerada, por muitos estudantes, uma das matérias mais complicadas e sem utilidade prática. Acreditamos que esse quadro pode ser amenizado ou até mesmo revertido se usarmos durante as aulas, elementos que, de alguma forma, contextualizem o assunto e justifiquem os cálculos a serem feitos, mostrando aos alunos de onde surgiram as fórmulas e como podem ser aplicadas. Propiciar que os alunos deduzam, por si próprios, algumas das fórmulas estudadas, também pode implicar um acréscimo na qualidade da aprendizagem.

As discussões atuais sobre o ensino de Matemática, entre elas, as contidas nos documentos oficiais criados pelo governo, tais como os PCN's (BRASIL, 1997) e as Diretrizes Curriculares Nacionais (BRASIL, 2013), a fim de orientar sobre os objetivos a serem alcançados na educação dos níveis fundamentais e médio, indicam que o ensino e a aprendizagem de matemática deve possibilitar ao aluno: resolver problemas de ordem prática presentes em seu cotidiano, modelar matematicamente problemas reais, desenvolver o raciocínio lógico e o pensamento crítico, além de auxiliar na tomada de decisões (BRASIL, 1997). Estando estes objetivos tão distantes da realidade, cabe a discussão sobre o ensino da Geometria no currículo escolar atual e mais ainda, sobre formas diferenciadas de ensino desses conteúdos.

Acreditamos na importância de ensinar Geometria levando-se em conta o seu caráter de ciência do espaço, além da sua estrutura lógica e, dessa forma, propor aos estudantes atividades que possibilitem imaginar, explorar, criar, levantar hipóteses e argumentar, conduzindo os alunos a vivenciarem a construção dos conceitos geométricos.

De acordo com (AUSEBEL, 2003) "a repetição multicontextual de uma ideia, consolida-a hipoteticamente mais na memória do que as repetições dentro de um mesmo contexto." Dessa forma explorando aplicações dos conceitos geométricos em diferentes contextos, a aprendizagem vai sendo construída de maneira significativa para os estudantes, aumentando a possibilidade de se tornar um conhecimento a longo prazo. O autor afirma que a aprendizagem significativa se processa com base em ideias, que ele chama de âncoras, já existentes na mente do estudante e, com o auxílio de um material de instrução potencialmente significativo, o aluno relaciona o que está sendo estudado a outras ideias, expandindo o seu conhecimento.

> Estas ideias novas interagem com as ideias relevantes ancoradas e o produto principal desta interação torna-se, para o aprendiz, o significado das ideias de instrução acabadas de introduzir. Estes novos significados emergentes são, depois, armazenados (ligados) e organizados no intervalo de retenção (memória) com as ideias ancoradas correspondentes. (AUSEBEL, 2003)

Com o uso de materiais e métodos adequados, o professor estimula a organização cognitiva dos alunos para a aprendizagem significativa:

> em qualquer disciplina a estrutura cognitiva do aprendiz pode ser influenciada (1) de forma substantiva, através do carácter inclusivo, do poder de explicação e das propriedades integradoras dos conceitos e princípios específicos e unificadores apresentados ao aprendiz; e (2) de forma sistemática, através de métodos apropriados de apresentação, disposição e avaliação da aquisição significativa da matéria, através da utilização adequada de material de instrução organizado e pré-testado e através da manipulação adequada das variáveis quer cognitivas, quer sociais de motivação da personalidade. (AUSEBEL, 2003)

A compreensão dos alunos acerca dos conteúdos ligados à Geometria está em constante transformação. Ela se modifica e melhora conforme o estudante vai se apossando das propriedades básicas e busca a descoberta de outras, o que pode ser facilmente verificado ao longo da resolução de situações problema.

Para que o objetivo pedagógico, de apropriação e construção das ideias geométricas pelos alunos ocorra de forma satisfatória é preciso

> fornecer aos alunos um conjunto de situações didáticas variadas em que ele terá a oportunidade de "dialogar" com o saber geométrico em diferentes representações e a partir daí com o auxílio da visualização, elaborar diferentes representações mentais. O que iniciará o processo de elaboração e reelaboração que culminará na assimilação do conceito. (GESTAR, 2008)

Quando o aluno relaciona a Geometria com a realidade que o cerca, ele pode perceber o significado que existe em estudar esse conteúdo e compreender suas aplicações na vida prática. Por isso, sugerimos nesse trabalho um material de instrução organizado que proporcione aos alunos melhoria na qualidade da aprendizagem para que haja compreensão e os conhecimentos estudados possam interagir com os saberes prévios e empíricos que os estudantes já possuem, de modo a serem consolidados como aprendizagem significativa, que servirá de base para níveis de ensino posteriores.

De acordo com os PCN's (BRASIL, 1997) ao final do Ensino Fundamental um dos objetivos é que o aluno seja capaz de "comunicar-se matematicamente, ou seja, descrever, representar e apresentar resultados com precisão e argumentar sobre suas conjecturas, fazendo uso da linguagem oral e estabelecendo relações entre ela e diferentes representações matemáticas". Pensando nisso, em cada uma das atividades propomos aos estudantes que definam com suas palavras o que foi aprendido e também que façam uma autoavaliação.

As atividades que propomos nesse trabalho procuram privilegiar o trabalho em grupo na sala de aula, pois concordamos com (TEIXEIRA, 1999) que:

> É na discussão com os colegas que a criança exercita sua opinião, sua fala, seu silêncio, defendendo seu ponto de vista. O trabalho em grupo, portanto, estimula o desenvolvimento do respeito pelas ideias de todos, a valorização e discussão do raciocínio; dar soluções e apresentar questionamentos, não favorecendo apenas a troca de experiência, de informações, mas criando situações que favorecem o desenvolvimento da sociabilidade, da cooperação e do respeito mútuo entre os alunos, possibilitando aprendizagem significativa. A relação com o outro, portanto, permite um avanço maior na organização do pensamento do que se cada indivíduo estivesse só.

Cabe ressaltar que consideramos fundamental o papel do professor nesse tipo de trabalho, pois é ele quem media todo esse processo e estabelece os objetivos de curto, médio e longo prazo, de acordo com as suas pretensões de ensino e o nível de cada turma. Além disso, ele poderá intervir propondo novos questionamentos aos alunos sempre que julgar necessário, a fim de auxiliar na construção dos conceitos que estão sendo abordados.

Para melhor organização do docente, vamos refletir sobre alguns aspectos referentes à avaliação. Na perspectiva de Luckesi (2002, p. 175) "(...) a avaliação da aprendizagem escolar auxilia o educador e o educando na sua viagem comum de crescimento.” A partir dessa ótica, acreditamos que a avaliação deve nortear todo o processo de aplicação das atividades de forma não somente quantitativa, mas qualitativa. De modo que a cada etapa o professor possa se certificar dos objetivos que foram atingidos e os que ainda não foram, para que possa intervir com recursos pedagógicos adequados a fim de alcançá-los, praticando a avaliação formativa, que é definida por Rabelo (1998) como:

> É uma avaliação que contribui para melhorar a aprendizagem, pois, informa ao professor sobre o desenvolver da aprendizagem e ao aluno sobre os seus sucessos e fracassos, o seu próprio caminhar. Assim, proporciona segurança e confiança do aluno nele próprio; “feedback” ao dar rapidamente informações úteis sobre etapas vencidas e dificuldades encontradas; diálogo entre professor e aluno, bem fundamentado em dados precisos e consistentes. Além disso, a avaliação formativa assume uma função reguladora, quando permite tanto a alunos como os professores ajustarem estratégias e dispositivos. Ela pode reforçar positivamente qualquer competência que esteja de acordo com alguns objetivos previamente estabelecidos e permitir ao próprio aluno analisar situações, reconhecer e corrigir seus eventuais erros nas tarefas. (RABELO, 1998, p. 73-74)

Esse tipo de avaliação exige organização e planejamento adequado do docente, que precisa ter claros os objetivos de cada atividade e da proposta como um todo. Também é recomendável fazer registros para acompanhar o desenvolvimento dos alunos. Dentre as formas de acompanhamento podemos citar: anotações diárias do professor; estabelecimento de metas individuais e auto avaliação dos alunos ao término de cada atividade. Cabe ao profissional de educação a decisão sobre a melhor maneira de avaliar continuamente o progresso de suas turmas, de acordo com os critérios e tipos de avaliação que julgar mais adequado, podendo ainda mesclar os vários tipos citados ou acrescentar outro que julgar conveniente, tendo em vista o acompanhamento do processo de desenvolvimento da aprendizagem.

As atividades favorecem a compreensão dos estudantes de que diferentes caminhos podem levar a mesma solução, pois ao longo do processo eles vão apresentando maneiras distintas de resolver a mesma questão e também questionam as resoluções apresentadas. É tarefa do professor valorizar os pensamentos dos alunos, mostrando se o mesmo está certo ou errado e o porquê de eventuais erros. Isso estimula-os a pensar e também contribui para aumentar sua autoestima em relação a aprendizagem em matemática, além de mostrar que é possível aprender a partir das tentativas e erros e que ao analisar os seus equívocos podem desenvolver as próprias ideias conseguindo fazer as ligações necessárias entre os assuntos trabalhados. Essa postura torna ativa a figura do professor e, dessa forma, ele pode analisar individualmente os discentes durante as aulas.

A seguir apresentaremos detalhadamente as atividades propostas e junto a cada uma delas colocamos comentários e sugestões que podem ser úteis para o desenvolvimento do trabalho docente.

2 Descrição da proposta

Essa proposta é dividida em cinco atividades com tempo de aplicação estimado em torno de 15 aulas, considerando aulas com duração de 45 minutos, podendo variar de acordo com o rendimento de cada turma. Antes da realização destas atividades, sugerimos que seja feita uma revisão sobre razão e proporção, para que os alunos estejam aptos a compreender os conceitos abordados.

O objetivo principal que permeia as atividades é relacionar os conceitos geométricos de relações trigonométricas e semelhança de triângulos com situações práticas, possibilitando aos alunos que a partir da modelagem de uma situação cotidiana desenvolvam sua compreensão sobre matemática e sejam capazes de deduzir as fórmulas das relações métricas no triângulo retângulo.

O problema central que propomos é de medição da sombra e da altura dos alunos em um determinado período do dia. A partir desses dados, os alunos poderão modelar matematicamente essa situação com auxílio do triângulo retângulo, estudar as relações trigonométricas no triângulo retângulo e intuitivamente trabalhar as relações de semelhança entre triângulos.

Em seguida, os alunos recebem três triângulos retângulos confeccionados em cartolina e a partir dos questionamentos e atividades conduzidas pelo professor poderão formalizar o conceito de semelhança entre triângulos e deduzir algumas das relações métricas no triângulo retângulo.

2.1 Atividade 1 - Medindo sombras e alturas

O objetivo dessa atividade consiste em modelar o problema proposto, através do triângulo retângulo, onde a altura e a sombra são os catetos desse triângulo.

Nesta atividade o material utilizado será trena e/ou fita métrica. Essa aula deve ser realizada ao ar livre em um dia de sol, pois é preciso que haja a sombra causada pela luz do sol. Sugerimos que a turma seja dividida em duplas a fim de facilitar as medições e visando que todos possam medir as sombras com maior agilidade, afim de que os cálculos tenham o máximo de precisão na sequência das atividades.

Questão 1: Cada dupla deverá medir o tamanho de suas sombras e de suas alturas anotando esses valores, usando duas casas decimais. Para organizar os valores de maneira mais adequada pedimos que sejam colocados de acordo com a Tabela 1:

Tabela 1:

	Altura	Sombra
Aluno 1		
Aluno 2		

Enquanto os estudantes realizam as medições o professor deve orientar para que procurem ser precisos nas medições a fim de minimizar erros e auxiliá-los em eventuais dificuldades que possam surgir pela falta de prática em utilizar os instrumentos de medida.

Na sequência da aula sugerimos algumas questões a serem abordadas pelo professor, levando os alunos a refletirem sobre a atividade:

Questão 2: Qual figura plana é formada pelo aluno e sua sombra?

Essa pergunta tem como objetivo levar os alunos a modelar a situação real que estão vivenciando. É importante que eles reflitam e pensem sobre isso, pois nesse momento eles saem da situação concreta e passam para um modelo matemático que, nesse caso, é representado por uma figura geométrica: o ângulo reto.

A abstração desse modelo matemático não é simples para a maioria dos alunos, eles estão visualizando a situação em três dimensões (no espaço) e precisam modelá-la em duas dimensões (no plano).

O desenvolvimento da abstração é um item muito importante que deve ser desenvolvido ao longo desse trabalho, porém como essa atividade é o ponto inicial, deve-se dar especial atenção a esse aspecto nesse momento. A ideia é trazer a reflexão e o questionamento da turma afim de que todos compreendam e visualizem essa possibilidade de modelagem.

É importante que o docente instigue os alunos a pensar sobre essa situação, pois apesar de os alunos desse nível de ensino, em sua grande maioria, conhecerem o ângulo reto, para eles não é tão simples relacionar o conceito de ângulo reto com a situação prática.

Abaixo segue uma definição de ângulo reto e perpendicularidade contida no primeiro livro da obra "Os Elementos" de Euclides, traduzida para o português diretamente do grego por Bicudo (2009).

Definição 1. *E quando uma reta, tendo sido alteada sobre uma reta, faça ângulos adjacen-*

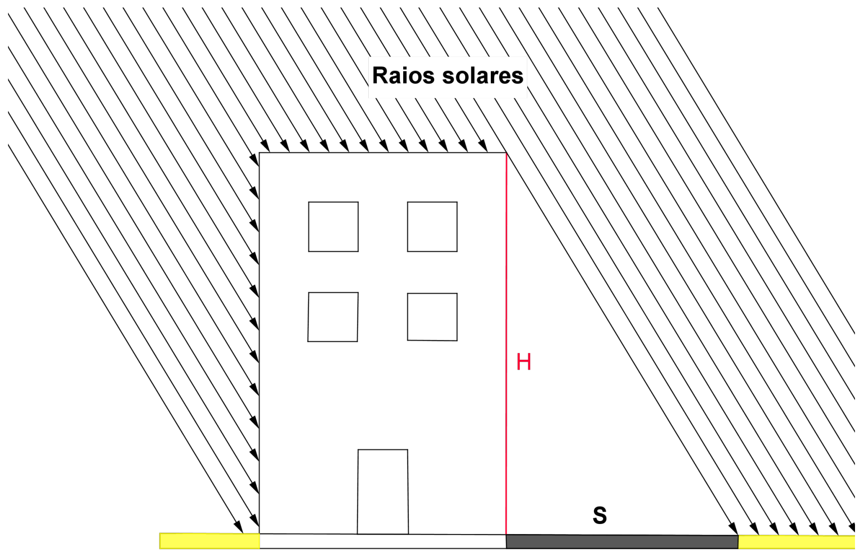


Figura 1: Representação esquemática dos raios solares e a sombra de um prédio

tes iguais, cada um dos ângulos é reto*, e a reta que se alteou é chamada uma* perpendicular *àquela sobre a qual se alteou.*

Para que eles possam compreender que a disposição “Estar de pé”, pode ser descrita como “estar perpendicular ao solo”, novamente é necessário utilizar a abstração como ferramenta para modelar essa situação. É preciso que visualizem a si mesmos como uma reta, e o solo como uma outra reta. O ponto comum é o ponto onde seus pés tocam o solo. Pode-se contar com o auxílio dos transferidores de quadro-negro para verificar que o ângulo formado pelo aluno e o solo é igual ao seu adjacente, caracterizando assim o ângulo reto.

Questão 3: O tamanho da sombra seria o mesmo em qualquer horário do dia? Por quê?

Acerca dessa pergunta nossa sugestão é que seja discutido o modo como os raios de sol chegam até a Terra, conforme Figura 1. Outro aspecto interessante que pode ser colocado em pauta é que nosso corpo em contato com esses raios solares, se comporta como um obstáculo à passagem da luz, formando a sombra.

Pode ser trazido à reflexão se existem outros objetos que os alunos conheçam que permitam a passagem da luz, ou de parte dela. Além disso, podemos ressaltar que essa mudança no tamanho da sombra ocorre devido à rotação da Terra em torno de si mesma ao longo de um dia.

Questão 4: Que tipo de figura plana podemos formar usando a altura e a sombra do aluno em conjunto com os raios solares?

Reunindo as conclusões das questões dois e três, juntamente com as considerações sobre o feixe de raios paralelos chegando do sol, é possível imaginar que, além do ângulo reto, teremos um triângulo, ou seja, a figura é um triângulo retângulo.

Questão 5: Desenhe em uma folha de papel o triângulo retângulo que representa sua altura e sua sombra utilizando uma escala de 1:10, isto é, se sua altura for 1,72 metros e sua sombra 3,15 metros, o triângulo terá os lados perpendiculares com 17,2 centímetros e 31,5 centímetros.

Estes desenhos servirão para que os alunos comparem visualmente o seu triângulo com o dos colegas e percebam que são, de alguma forma, parecidos. Estes desenhos podem contribuir para a construção do conceito de semelhança que será estudado na atividade 5.

Questão 6: É possível descobrir a medida do ângulo que os raios de sol formam com o solo, no momento da realização das medições, apenas com os tamanhos da sombra e altura de cada aluno?

O objetivo dessa pergunta é incitar a curiosidade dos alunos, deixando em aberto esse questionamento que será respondido no decorrer do trabalho. Nesse momento, o professor pode perceber o envolvimento deles na atividade e analisar as discussões que surgirem. Essa questão é a motivação para a segunda atividade e traz à tona a ideia de medida de ângulos, trabalhada posteriormente em outra atividade. O docente pode estabelecer um tempo de duração para essa discussão e pedir que os alunos escrevam suas cogitações, informando que saberão responder a essa pergunta posteriormente.

Durante a aplicação na turma em que trabalhamos, pudemos notar que os alunos apresentaram algumas dificuldades iniciais, na modelagem e no conceitos de ângulos e ângulo reto. Eles não conseguiam enxergar que o problema poderia ser modelado por um triângulo retângulo, além disso, alguns dos conhecimentos prévios sobre ângulos precisaram ser relembrados durante a atividade para um melhor aproveitamento dos estudantes. Os alunos se sentiam inseguros quanto à resolução da atividade, queriam um modo “correto” de escrever e responder as alternativas. Colocar em prática essa atividade foi desafiante, porque era preciso incentivar a autonomia individual de cada aluno. Percebemos neste momento, que cada um possuía um ritmo e uma maneira de aprender diferente e que seria necessário aprender a lidar com essas diferenças para que o trabalho pudesse surtir o efeito que desejávamos.

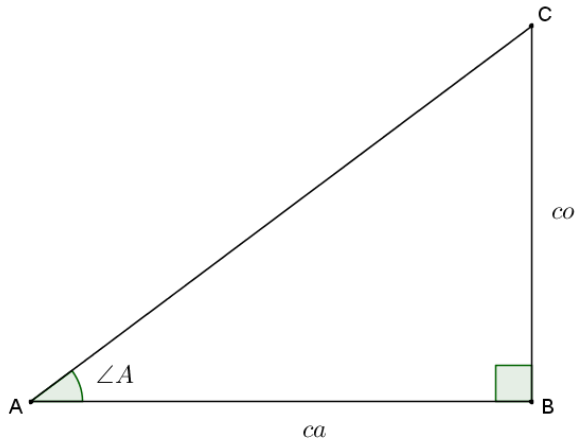
2.2 Atividade 2 - Conhecendo a tangente de um ângulo agudo

Ao longo desta atividade, teremos como meta explicar aos estudantes a seguinte definição de tangente:

Definição 2. *Seja o triângulo retângulo $\triangle ABC$, com ângulo reto em B, a* tangente *do ângulo $\angle A$ é a razão entre o* cateto oposto *BC e o* cateto adjacente *AB, que podem ser obtidos a partir da Figura 2.*

$$\tan \angle A = \frac{BC}{AB},$$

Figura 2: Modelo de triângulo retângulo, onde co = cateto oposto e ca = cateto adjacente ao ângulo $\angle A$.



Nesse primeiro contato dos alunos com as razões trigonométricas, optamos por contextualizar os termos cateto oposto e cateto adjacente nomeando-os respectivamente como altura e sombra, já que estávamos trabalhando com o ângulo que os raios de sol fazem com o solo. Posteriormente, no decorrer das atividades, serão introduzidas as nomenclaturas formais.

Utilizam-se calculadoras científicas. Como essas atividades são propostas para o Ensino Fundamental, não se espera que os alunos tenham ou estejam acostumados a utilizarem calculadoras científicas. Esse instrumento, em grande parte das escolas, é inserido no cotidiano dos estudantes a partir do Ensino Médio. Como atualmente grande parte dos alunos possuem celulares, sugerimos o uso de aplicativos gratuitos que estão disponíveis para "download" e contém todas as funções que uma calculadora científica dispõe, "MyCalc Calculator" e "Scientific Calculator for Android" são exemplos. Acreditamos que esta é uma maneira de mostrar aos estudantes que a tecnologia oferece recursos pedagógicos que podem ser utilizados por diferentes disciplinas.

O pré-requisito para essa atividade é que a turma tenha concluído que a figura formada por cada um e sua respectiva sombra é um triângulo retângulo. O objetivo é trabalhar o conceito de tangente a partir das razões entre os lados de um triângulo retângulo, utilizando os triângulos construídos pelos alunos na atividade anterior.

Ressaltamos que nesse momento o professor ainda não apresentou a definição formal de tangente de um ângulo. Nossa intenção é que antes da definição, os estudantes possam compreender a situação e trabalhar intuitivamente com os conceitos para uma posterior formalização.

Sugerimos algumas questões para que os alunos possam refletir sobre essa atividade.

Questão 1: Calcule o quociente entre a sua altura e a sua sombra, utilizando duas casas decimais.

Provavelmente haverá surpresa dos estudantes ao constatarem que os quocientes de todos os alunos serão praticamente iguais, podendo ocorrer alguma variação mínima por eventuais erros de medição ou variação do tempo de uma medida para outra.

Questão 2: Porque os resultados foram aproximadamente iguais se as alturas e tamanhos de sombras são diferentes, ou seja, os triângulos dos alunos possuem medidas de lados distintas?

Esse é o momento que o docente deve conduzir e orientar as conjecturas da turma. Sugerimos que solicite a formulação das respostas por escrito após a discussão com os colegas. É importante deixá-los pensar e discutirem entre si, pois dessa forma eles vão desenvolvendo a capacidade de criar argumentos e defender pontos de vista de maneira lógica percebendo que na matemática é importante a expressão e justificativa das respostas. Além disso, mostra aos discentes que saber expressar o seu raciocínio em linguagem materna ou linguagem matemática é uma ferramenta que auxilia na aprendizagem favorecendo a compreensão dos conceitos. (LOPES; OLIVEIRA, 2012)

Essa discussão entre os alunos e a intervenção posterior do professor é algo que consideramos muito importante, já que as conclusões que os alunos devem chegar serão ponto de partida para as atividades seguintes.

Após esse período de discussões, o professor deve intervir para homogenizar as ideias, apresentando a definição formal de tangente de um ângulo agudo segundo a definição 2. Na medida do possível, acreditamos ser proveitosa a prática de considerar as hipóteses dos estudantes e explicar o porquê de um ponto de vista estar certo ou errado, visando que os alunos compreendam o raciocínio e possam aprender também a partir dos próprios erros.

No segundo momento da discussão, o educador pode formalizar uma resposta, baseando-se em tudo que foi apresentado pelos alunos. De fato, os quocientes são iguais porque apesar dos lados serem diferentes, os ângulos correspondentes de todos os triângulos são congruentes.

O professor deve induzir os alunos a perceberem que o ângulo reto e o ângulo dos raios de sol em relação ao solo são comuns a todos os triângulos. O terceiro ângulo pode ser obtido através da soma dos ângulos internos e, portanto, terá a mesma medida para todos os triângulos. Devido aos ângulos correspondentes serem congruentes, decorre que as razões entre os lados correspondentes serão as mesmas. O estudo da soma dos ângulos internos de um triângulo faz parte de um conteúdo trabalhado em anos anteriores, porém é uma excelente oportunidade de revisar e interligar os conhecimentos.

Essa discussão prepara para a noção de semelhança de triângulos que será trabalhada posteriormente. Poderá ser comentado que é devido ao conceito de semelhança que a tangente de um ângulo agudo pode ser definida como a razão entre os catetos do triângulo retângulo e não utiliza diretamente o ângulo em questão.

Na maioria dos livros texto utilizados no Ensino Fundamental, tais como: (CENTURIÓN; JAKUBOVIC, 2012), (MORI; ONAGA, 2012) e (MAZZIEIRO; MACHADO, 2012), a apresentação formal da trigonometria dá-se após o estudo sistemático de semelhança de triângulos. Segundo Lima et al. (2006, p. 215) "...a semelhança de triângulos é a base de sustentação da trigonometria...". Nossa proposta rompe com esta sequência tradicional de apresentação dos conteúdos e, apoiada na facilidade e no apelo motivacional e lúdico que a atividade de medida de sombras possui, tenta criar um significado, ainda que informal, para os conceitos de tangente e semelhança relacionando-os de maneira um pouco mais concreta. Além disso, da forma como imaginamos a aplicação desta proposta, a estrutura lógica da teoria pode ser reprisada ao longo das atividades, partindo-se de algo mais concreto e gradualmente estruturando um conhecimento mais formal.

Questão 3: Será que é possível saber a medida do ângulo que os raios de sol fazem com o solo em um determinado momento apenas conhecendo o valor da tangente deste ângulo?

A ideia neste momento é induzir os estudantes a usarem uma calculadora. Os alunos calculariam a função *arcotangente* (função inversa da tangente) do quociente entre a medida da altura e a medida da sombra obtido na questão 1.

No entanto, entendemos que esta questão é, de certa forma, complexa para um aluno do Ensino Fundamental que ainda não possui conhecimentos sobre a função tangente e sua inversa. Além disso, o resultado apresentado pela calculadora representa a medida do ângulo em questão, expressa em alguma unidade de medida de ângulos que está pré-selecionada na calculadora, geralmente graus[1], grados[2] ou radianos[3] que, na maioria dos casos, os alunos ainda não compreendem bem.

Por isso acreditamos que esta é uma questão bastante rica, no sentido que possibilita ao professor tratar desde o significado da medida de um ângulo com suas diferentes unidades, até a questão da injetividade da função tangente para ângulos agudos, comentando que, para cada valor positivo existe *um único* ângulo agudo que possui tal valor como tangente. É isso que permite, a partir do resultado da questão 1, que seja possível calcular o ângulo solicitado. Além disso, o próprio manuseio de uma calculadora científica já traz aprendizados importantes para os alunos.

Vale notar que o cálculo da medida do ângulo por este método se dá de maneira indireta, isto é, os alunos não usam um aparelho para medir o ângulo, como um transferidor por exemplo, mas medem a altura e a sombra e, com o auxílio de uma calculadora, descobrem a medida do ângulo.

Durante a aplicação dessa atividade, os alunos possuíam um roteiro com os questionamentos nos quais o grupo deveria refletir e percebemos que em alguns momentos eles se sentiam perdidos, necessitando de uma intervenção direta do professor. Entretanto, ao longo do processo, nosso posicionamento sempre foi o de orientá-los de acordo com o raciocínio apresentado por eles, o que aos poucos diminuiu essa dificuldade inicial, ocasionada pela falta de autonomia e os alunos nessa atividade mostraram-se mais seguros e participativos. Notamos bastante dificuldade em lidar com a calculadora científica, que no nosso caso foi um aplicativo para telefones celulares, e atribuímos isso a falta de prática no manuseio desse tipo de tecnologia.

2.3 Atividade 3 - Conhecendo o seno e o cosseno de um ângulo agudo

O objetivo dessa atividade é estudar o seno e o cosseno de um ângulo no triângulo retângulo utilizando as medidas de altura e sombra obtidas pela turma na primeira atividade.

[1] *grau* é uma unidade de medida de ângulos planos que corresponde à 1/360 da circunferência.

[2] *grado* é uma unidade de medida de ângulos planos que corresponde à 1/400 da circunferência, equivalente a 9/10 do grau ou $\pi/200$ do radiano.

[3] *radiano* é uma unidade de medida de ângulo que corresponde ao ângulo central subtendido por um arco de circunferência cujo comprimento seja igual ao raio desta mesma circunferência

As definições de seno e cosseno de um ângulo agudo podem ser dadas de maneira similar a definição de tangente, utilizando-se um triângulo retângulo qualquer:

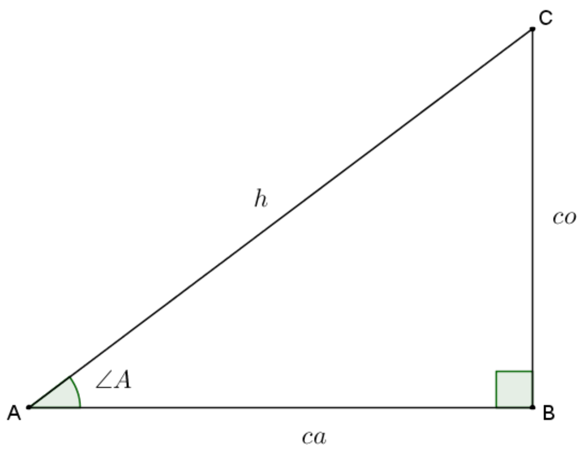
Definição 3. *Dado o triângulo retângulo $\triangle ABC$, com ângulo reto em B, o* seno *do ângulo $\angle A$ é a razão entre o* cateto oposto BC *e a* hipotenusa AC *conforme figura 3:*

$$\operatorname{sen} \angle A = \frac{BC}{AC}$$

Definição 4. *Dado o triângulo retângulo $\triangle ABC$, com ângulo reto em B, o* cosseno *do ângulo $\angle A$ é a razão entre o* cateto adjacente AB *e a* hipotenusa AC *conforme figura 3:*

$$\cos \angle A = \frac{AB}{AC}$$

Figura 3: Modelo de triângulo retângulo, onde co = cateto oposto, ca = cateto adjacente ao ângulo $\angle A$ e h = hipotenusa.



Para que seja possível realizar essa atividade é necessário explicar aos alunos sobre o terceiro lado do triângulo, que não foi medido na atividade prática: a hipotenusa. Para isso, sugerimos o comentário a respeito da nomenclatura formal dos lados do triângulo retângulo, pois a essa altura os estudantes terão maiores chances de compreender a linguagem matemática devido ao contato inicial que tiveram com esses conceitos e, além disso, a apresentação das definições de seno e cosseno para a turma.

Acreditamos ainda que seja fator de motivação, comentar sobre a história de Pitágoras e do famoso *Teorema de Pitágoras* que possibilitará calcular o valor da hipotenusa. Ressaltando que posteriormente eles vão poder demonstrar a validade dessa e de outras relações nas próximas atividades. No apêndice deste trabalho, pode-se ler alguns fragmentos históricos sobre Pitágoras, retirados de (MOL, 2013).

Questão 1: A partir do Teorema de Pitágoras, calcule a medida da hipotenusa do triângulo obtido na primeira atividade.

Questão 2: Utilizando o resultado encontrado para a hipotenusa, calcule os valores do seno e do cosseno do ângulo $\angle A$ que os raios de sol fazem com o solo, usando o triângulo que você construiu. Organize os valores encontrados na Tabela 2:

Tabela 2:

	Aluno 1	Aluno 2
$\text{sen}(\angle A) = \dfrac{Altura}{hipotenusa}$		
$\cos(\angle A) = \dfrac{Sombra}{hipotenusa}$		

Questão 3: Discuta com seu colega se os valores encontrados são diferentes ou iguais? A que razões atribuem esse fato?

Essa questão retoma a discussão da tangente que foi feita em atividade anterior, por isso é esperado que os estudantes possam discutir suas ideias com maior clareza e utilizando linguagem matemática. O professor deve intervir trazendo essa relação novamente, comentando sobre os ângulos internos do triângulo e o fato de todos os triângulos possuírem ângulos correspondentes congruentes, devido a soma dos ângulos internos. Além disso, essa congruência entre os ângulos ocorre devido ao paralelismo dos raios solares que determinam ângulos correspondentes em relação ao solo, para medidas de sombra realizadas simultaneamente.

Questão 4: Qual é a característica principal que você observa nos triângulos que possuem ângulos correspondentes congruentes entre si? Como eles se parecem visualmente? Você consegue escrever matematicamente uma resposta a essa questão, ou explicar com suas palavras o que acontece?

Esse questionamento é fundamental e deve motivar para a próxima atividade. O registro através da escrita é importante, pois leva a reflexão do próprio aprendiz, além disso na interação com os colegas surgem várias hipóteses que podem ser aceitas ou rejeitadas e, desse modo, eles aprendem a questionar as informações e desenvolver o raciocínio de maneira própria, sendo críticos e aprendendo a analisar situações pelo ponto de vista matemático.

Percebemos na aplicação, que os alunos conseguiram discutir e resolver com êxito as questões, utilizando o Teorema de Pitágoras como uma ferramenta para o cálculo da hipotenusa. Além disso, demonstraram curiosidade sobre sua utilização em qualquer triângulo retângulo. A principal dificuldade que encontramos foi em relação à escrita, os discentes não conseguiam responder a questão 4. O comentário que faziam era "Eu sei como é, mas não consigo explicar", nesse momento buscamos valorizar cada ideia que eles expunham verbalmente e discutindo com a turma chegamos em um conceito comum sobre os triângulos se "parecerem como ampliações ou reduções uns dos outros". Nossa intenção era fazer a formalização desse conceito durante a atividade seguinte, então, devido a isso, buscamos que a resposta a esse questionamento demonstrasse apenas que os alunos haviam compreendido a ideia relacionada ao conceito de semelhança.

2.4 Atividade 4 - O que são dois triângulos semelhantes?

O objetivo dessa atividade é estudar a semelhança de triângulos. De acordo com (DOLCE; POMPEO, 2013) temos:

Definição 5. *Dados dois triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$, diz-se que estes triângulos são* semelhantes *quando é possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre os vértices, por exemplo*

$$\begin{aligned} A &\longleftrightarrow D \\ B &\longleftrightarrow E \\ C &\longleftrightarrow F \end{aligned}$$

de tal forma que

i) $\angle A \cong \angle D$, isto é, o ângulo A é congruente ao ângulo D,

ii) $\angle B \cong \angle E$, isto é, o ângulo B é congruente ao ângulo E,

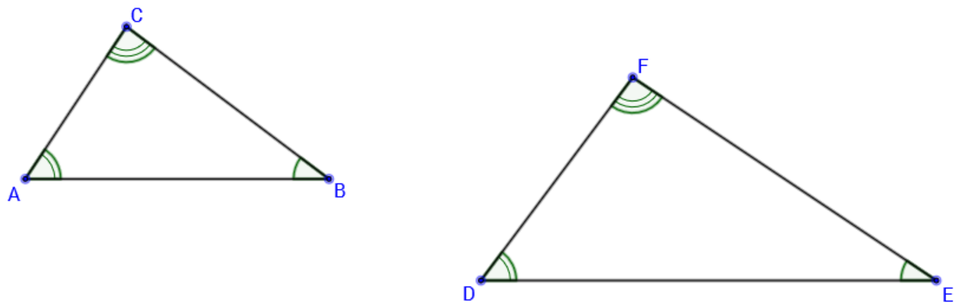
iii) $\angle C \cong \angle F$, isto é, o ângulo C é congruente ao ângulo F,

e ainda

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}.$$

Usa-se a notação $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ para indicar que os triângulos são semelhantes. Na figura 4 temos um exemplo dessa situação:

Figura 4: Representação esquemática de dois triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$ semelhantes entre si.

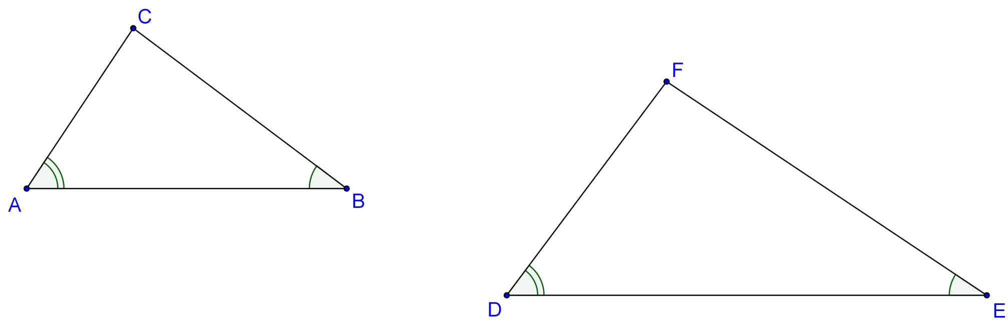


Dois triângulos semelhantes satisfazem sempre às seis condições. Porém, em alguns casos, podemos afirmar que dois triângulos são semelhantes garantindo apenas a validade de algumas dessas condições. Estes são os conhecidos *casos de semelhança de triângulos*. Neste trabalho citaremos apenas dois deles:

Primeiro caso de semelhança: Dois triângulos são semelhantes, se e somente se, possuem um ângulo congruente compreendido entre dois lados proporcionais;

Segundo caso de semelhança: Dois triângulos são semelhantes, se e somente se, possuem dois ângulos correspondentes congruentes. (Ver Figura 5).

Figura 5: Segundo caso de semelhança de triângulos: $\angle A \cong \angle D$ e $\angle B \cong \angle E$.



Nesta atividade utilizamos o segundo caso de semelhança, pois temos dois ângulos que serão congruentes nos triângulos de todos os alunos: o ângulo reto e o ângulo dos raios de sol com o solo.

Pede-se que os alunos utilizem os triângulos retângulos que desenharam na atividade 1, considerando a sombra e a altura como catetos. Pode-se dividir a turma em duplas e sugerir o seguinte roteiro de atividades:

Questão 1: Comparando o seu triângulo com o do colega, marque com a mesma cor os ângulos que são correspondentes.

Neste item os alunos irão escolher três cores diferentes para marcar com a mesma cor os ângulos que forem correspondentes em ambos os triângulos. Uma das cores será usada para os ângulos retos, outra para os ângulos que representam a inclinação dos raios de sol e a terceira cor fica para os ângulos que sobraram.

Questão 2: Comparando o seu triângulo com o do colega, marque com a mesma cor os lados opostos ao ângulos que são correspondentes. Chamaremos estes lados de lados correspondentes.

Neste item os alunos irão escolher três cores diferentes para marcar com a mesma cor os lados que forem correspondentes. Como é um triângulo retângulo, eles devem concluir que a sombra de um é correspondente a sombra do outro e de maneira análoga ocorre com a altura e a hipotenusa. Esta questão pode ser utilizada para os alunos fixarem a nomenclatura de lados correspondentes e ângulos correspondentes que será utilizada na definição formal de semelhança.

Questão 3: Calcule a razão entre os lados correspondentes.

Nesse item os alunos irão calcular os quocientes entre os lados correspondentes, anotando de forma clara qual a razão em forma de fração e o resultado da divisão utilizando duas casas decimais. É importante que eles se organizem adequadamente na hora de realizar os registros, pois é partir dos seus próprios registros que vão compreender o que está sendo aprendido.

Questão 4: O que você observou nos números encontrados na questão 3? A que atribui esse fato?

Os alunos deverão encontrar o mesmo resultado para os quocientes dos lados correspondentes, pois como os triângulos são de fato semelhantes, os lados devem ser proporcionais e o quociente deve ser uma constante. Como eles ainda não conhecem a definição de semelhança e estão construindo esse conceito, o professor pode destacar apenas o fato de que todos os alunos encontraram o mesmo número nas suas divisões e pedir que eles tentem formular uma explicação para esse fato.

Questão 5: Defina com as suas palavras o que são dois triângulos semelhantes.

A intenção dessa pergunta é que eles relacionem os itens anteriores e cheguem a conclusão de que dois triângulos semelhantes possuem os lados proporcionais e a razão entre os lados sempre será a mesma, além disso é necessário que possuam ângulos congruentes.

Nesse momento é oportuno permitir que os alunos interajam entre si e expressem seus pensamentos sobre o assunto, mas em seguida, sendo um ponto de orientação a reunir todas as considerações e hipóteses levantadas, o professor deve intervir formalizando a semelhança de triângulos.

Após a realização de várias atividades de reflexão, os alunos se sentirão mais aptos a acompanhar o raciocínio do professor mostrando a definição matemática de triângulos semelhantes, conforme Definição 5.

É importante que fique claro aos alunos, pois é a partir da semelhança que se realizam as atividades de demonstração posteriores. Pode ser necessário um acompanhamento individual de alunos que apresentem maior dificuldade ou ainda retomar essa discussão, trazendo exemplos de triângulos semelhantes, triângulos não-semelhantes e triângulos congruentes, a fim de que os alunos compreendam as diferenças.

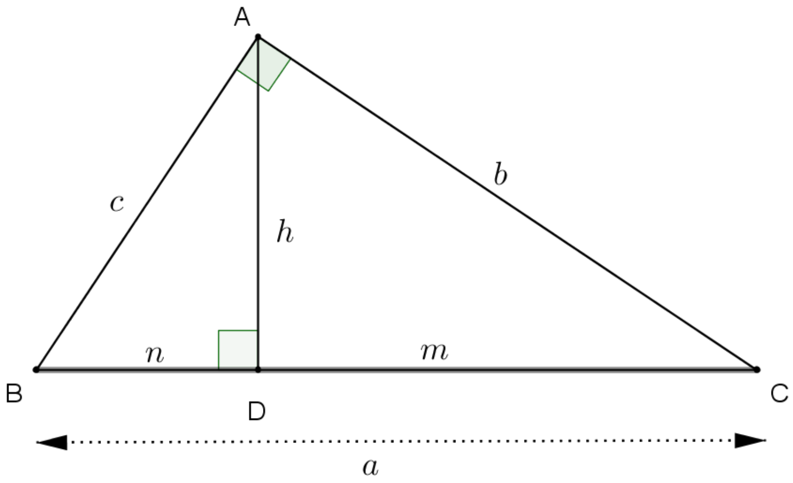
Percebemos durante a aplicação com a turma, que os alunos demonstraram dificuldades em entender o que são triângulos semelhantes, pois muitos alunos confundiam “triângulos semelhantes” com “triângulos iguais”, atribuindo outros significados para a palavra semelhante. Foi necessário retomar a discussão em uma aula posterior e explicar novamente a diferença entre dois triângulos serem semelhantes e dois triângulos serem iguais ou congruentes. Para facilitar o entendimento da noção de semelhança, trouxemos à discussão a ampliação e a redução de fotos,que haviam sido comentados na atividade anterior e com isso os alunos conseguiram compreender o conceito apresentado. Notamos que nessa atividade os alunos se mostraram mais autônomos, demonstrando segurança em resolver as atividades que requeriam cálculos. E em contrapartida, para responder aos questionamentos permaneceu a dificuldade na expressão escrita.

2.5 Atividade 5 - Deduzindo as relações métricas no triângulo retângulo

O objetivo dessa atividade consiste em trabalhar as relações métricas no triângulo retângulo a partir da semelhança de triângulos. Ao realizar a dedução de fórmulas matemáticas que, na maioria das vezes são apresentadas prontas, os alunos desenvolvem a segurança e o entendimento maior sobre o conteúdo, além de relacioná-lo a possíveis áreas de aplicação. Além disso, para que a linguagem matemática seja dominada pelos discentes, ela precisa ser trabalhada em conjunto com aspectos mais práticos ganhando significado, o que foi explorado nas atividades anteriores.

Quando falamos em relações métricas estamos pensando na situação: dado um triângulo retângulo $\triangle ABC$ com ângulo reto no vértice A, traçamos um segmento AD, perpendicular a BC, com $D \in BC$ conforme Figura 6:

Figura 6: Elementos de um triângulo retângulo envolvidos nas relações métricas.



Notação: $BC = a$ (hipotenusa); $AC = b$ (cateto); $AB = c$ (cateto); $BD = n$ (projeção ortogonal do cateto c sobre a hipotenusa); $CD = m$ (projeção ortogonal do cateto b sobre a hipotenusa); $AD = h$ (altura relativa à hipotenusa).

Partindo-se da semelhança entre os triângulos, $\triangle DBA$, $\triangle DAC$ e $\triangle ABC$ pode-se demonstrar as seguintes relações, que na literatura são normalmete chamadas de *relações métricas do triângulo retângulo* (DOLCE; POMPEO, 2013) :

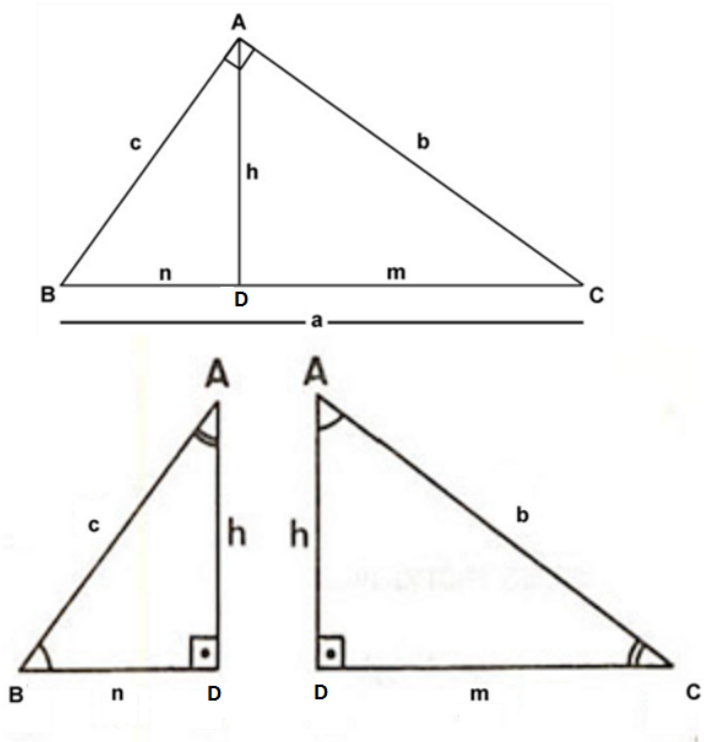
1. $b^2 = a \cdot m$
2. $c^2 = a \cdot n$
3. $h^2 = m \cdot n$
4. $b \cdot c = a \cdot h$
5. $b \cdot h = c \cdot m$
6. $c \cdot h = b \cdot n$
7. $a^2 = b^2 + c^2$

A ideia é que os alunos deduzam algumas dessas relações utilizando o que foi aprendido nas atividades anteriores e que, posteriormente, consigam usá-las na resolução dos exercícios propostos.

A tarefa de deduzir as relações métricas do triângulo retângulo tem um efeito surpreendente de aumentar a autoconfiança dos alunos e trabalha habilidades importantes como abstração e manipulação algébrica de equações. Estas habilidades auxiliam na evolução do terceiro para o quarto nível da hierarquia de etapas que os estudantes devem percorrer, para um aprendizado consistente, previstas na teoria de Van Hiele. Além disso, os alunos percebem claramente o uso da álgebra na obtenção de resultados geométricos e, ao entenderem a origem das fórmulas, terão melhores condições de relembrá-las e utilizá-las na resolução de problemas. A demonstração do Teorema de Pitágoras, que sugerimos nesse trabalho, se dá a partir das relações métricas encontradas para cada um dos catetos que, manipuladas algebricamente, resultam no teorema. A critério do professor, outras formas de demonstração podem ser mencionadas de acordo com as necessidades de cada turma.

O material necessário para a realização dessa atividade são três triângulos retângulos semelhantes: um grande, um médio e um pequeno, em cartolina, que foram confeccionados baseando-se em um triângulo retângulo grande no qual baixamos a altura relativa a hipotenusa dando origem aos outros dois triângulos, conforme Figura 7 :

Figura 7: Material para os alunos



Os triângulos já estavam com os lados nomeados pela representação padrão que é encontrada na maioria dos livros de matemática consultados: b e c são os catetos; a é a hipotenusa; h é a altura relativa a hipotenusa; m e n são, respectivamente, as projeções ortogonais dos catetos b e c sobre a hipotenusa.

Os seguintes questionamentos podem ajudar a conduzir a atividade:

Questão 1: Dentre os triângulos recebidos, existem triângulos semelhantes entre si?

A ideia é que os alunos percebam que os três triângulos são semelhantes e possam relacioná-los dois a dois.

Questão 2: Para cada par de triângulos semelhantes que você encontrou, relacione quais são os os lados correspondentes, os vértices correspondentes e os ângulos correspondentes.

Nesse item eles devem escrever os lados correspondentes de cada par de triângulos e, para fins de organização didática, pedimos que anotem essas relações usando uma nomenclatura preestabelecida. Por exemplo, ao tratarem da semelhança ($\triangle ABC \sim \triangle DBA$) os alunos poderiam usar *triângulo grande* $\times$ *triângulo pequeno*; ao tratarem da semelhança ($\triangle ABC \sim \triangle DAC$) os alunos poderiam usar *triângulo grande* $\times$ *triângulo médio* e ao tratarem da semelhança ($\triangle DAB \sim \triangle DAC$), poderiam usar *triângulo pequeno* $\times$ *triângulo médio* .

Espera-se que os estudantes escrevam, mesmo que com direcionamentos ativos por parte do professor, relações do tipo

$$\begin{aligned} A &\longleftrightarrow D \\ B &\longleftrightarrow B \\ C &\longleftrightarrow A \end{aligned}$$

para o caso *triângulo grande* x *triângulo pequeno* ou ainda

$$\begin{aligned} &c \text{ está para } n \text{ assim como } b \text{ está para } h; \\ &b \text{ está para } h \text{ assim como } a \text{ está para } c. \end{aligned}$$

Questão 3: Escreva as razões de semelhança para cada par de triângulos semelhantes que você encontrou.

É esperado que os estudantes tenham percebido que os três triângulos são semelhantes entre si e sejam capazes de comparar os lados correspondentes desses pares de triângulos. As razões de semelhança que deverão encontrar são:

1. Triângulos médio e grande:
$$\frac{h}{c} = \frac{b}{a} = \frac{m}{b}; \tag{2.1}$$
2. Triângulos pequeno e grande:
$$\frac{n}{c} = \frac{h}{b} = \frac{c}{a}; \tag{2.2}$$
3. Triângulos pequeno e médio:
$$\frac{h}{n} = \frac{m}{h} = \frac{b}{c}. \tag{2.3}$$

Questão 4: A partir das razões encontradas nos itens anteriores demonstre as relações métricas:

1. $b^2 = am$ 2. $c^2 = an$ 3. $h^2 = mn$ 4. $ah = bc$.

A partir das razões encontradas, os alunos utilizam as regras já conhecidas da aritmética e podem deduzir as fórmulas solicitadas. Por exemplo: das igualdades (2.1) resultam $b^2 = am$ e $ah = bc$ e, das igualdades (2.2) e (2.3), resultam respectivamente $c^2 = an$ e $h^2 = mn$.

Durante a aplicação dessa atividade constatamos que os alunos, após perceberem que deveriam manipular algebricamente as frações obtidas nas razões de semelhança, não apresentaram maiores dificuldades em deduzir as fórmulas solicitadas. Nossa expectativa era que, por se tratar de manipulação simbólica com várias variáveis, essa atividade seria considerada difícil pelos estudantes, porém ocorreu o contrário. Inclusive muitos alunos comentaram durante o processo que a atividade só parecia difícil à primeira vista, mas que era simples de ser resolvida.

Questão 5: Utilizando as relações 1 e 2 da questão 4, demonstre o Teorema de Pitágoras:

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Na resolução desta questão, os alunos deverão manipular as relações 1 e 2 obtidas na questão anterior, somando-as e percebendo que $m + n$ corresponde ao comprimento da hipotenusa a, isto é,

$$\left.\begin{array}{rr} & b^2 = am \\ + & c^2 = an \\ \hline & b^2 + c^2 = am + an \end{array}\right\} \Longrightarrow b^2 + c^2 = a(m+n) \Longrightarrow b^2 + c^2 = a^2.$$

Este já é um raciocínio com um nível de complexidade maior que aqueles usados na questão anterior o que possibilita que os alunos com uma maior desenvoltura no assunto, possam evoluir ainda mais.

Inicialmente o professor pode deixar alguns minutos para que os estudantes pensem por si mesmos. Mas em seguida, caso haja dificuldades, o professor pode estimular o raciocínio com o seguinte questionamento: o que acontece se somarmos as duas equações algebricamente?

Na turma onde foi aplicada esta atividade, muitos estudantes mostraram-se surpresos com a técnica de somar duas equações para obter uma terceira que seja mais útil para a solução do problema. Nos pareceu que a regra básica da matemática: *"E, caso sejam adicionadas coisas iguais a coisas iguais, os todos são iguais"*, enunciada conforme a segunda *Noção Comum* na obra *Os Elementos* de Euclides (BICUDO, 2009), ainda não tinha sido incorporada pelos alunos como ferramenta na solução deste tipo de problema.

Quando indagamos à turma a respeito da resolução de sistemas de primeiro grau, que foi conteúdo trabalhado no ano anterior, responderam que aprenderam apenas o método da substituição e que o método da adição não foi trabalhado na ocasião. Isso nos serviu de motivação e de clara exemplificação que os conteúdos de matemática estão todos interligados. Um bom domínio das técnicas de resolução de sistemas de equações poderia ter auxiliado no melhor desempenho da atividade. Como sugestão para futuras aplicações desta proposta, pode-se inserir material complementar nesta atividade, explorando a resolução de sistemas de equações de primeiro grau pelo método da adição, utilizando o raciocínio análogo ao que foi feito quando somamos as duas equações das relações métricas.

Propor que os estudantes tentem realizar o procedimento da soma algébrica e posteriormente resolver os problemas com aqueles que não tenham conseguido chegar ao resultado pretendido pode ser uma boa oportunidade para revisar o conceito de equação e comentar a segunda Noção Comum usada por Euclides.

Ao término dessa atividade pode-se questionar os alunos sobre o nível de dificuldade que sentiram ao realizarem as demonstrações. Seria interessante que eles se autoavaliassem quanto ao desenvolvimento da aprendizagem dos conteúdos trabalhados. Ao refletir sobre o desempenho individual é possível que o aluno encontre uma maior motivação para continuar aprendendo. Além disso, o professor pode usar estas autoavaliações como auxílio na verificação de quais alunos atingiram os objetivos e quais precisam de mais ajuda para a compreensão da matéria.

2.6 Sugestões de exercícios

Nesta seção estão selecionados alguns exercícios com enunciados que procuram tratar os conteúdos de forma contextualizada, exigindo, em algumas ocasiões, que os estudantes modelem o problema nos moldes trabalhados nas atividades anteriores.

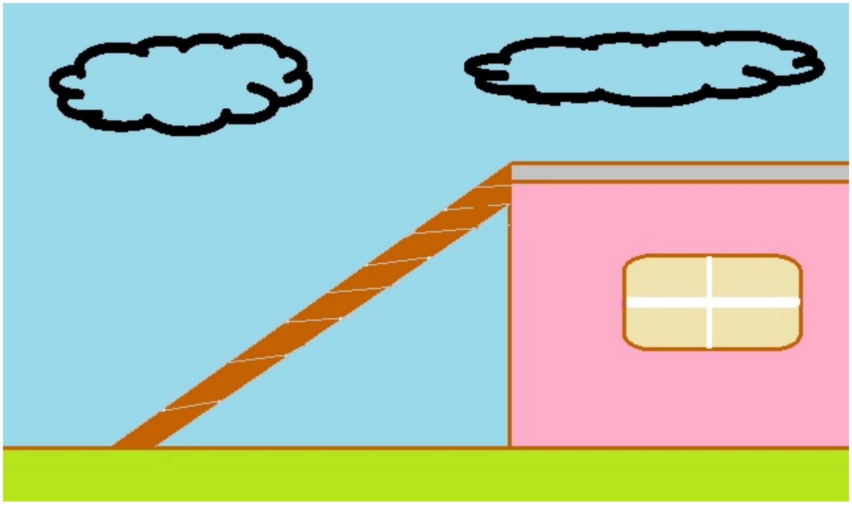
Acreditamos que após a realização das cinco atividades os estudantes serão capazes de realizar os exercícios de forma eficaz e sugerimos, ainda, que sejam resolvidos em grupos para facilitar as discussões na turma.

É importante ressaltar que mostramos apenas uma das possíveis soluções para cada exercício por isso o professor deve estar atento porque, muitas vezes, surgem a partir dos alunos outras resoluções corretas para o mesmo problema.

Os exercícios[4] de 1 a 5 apresentados a seguir poderão ser resolvidos a partir da modelagem matemática, utilizando o triângulo retângulo de maneira direta. Apresentamos um desenho representativo da situação, exceto no último, a fim de que os alunos saibam resolver a partir de desenhos dados ou montar o próprio esquema para a resolução.

Exercício 1. *Para executar um serviço, um trabalhador apoiou na laje da sua casa uma escada de 4,3 metros de comprimento, de acordo com o esquema na Figura 8. A base da escada apoiada no piso está a 1,8 metros da parede. Qual é a altura aproximada da construção?*

Figura 8: Exercício 1



Resolução. A situação pode ser modelada através de um triângulo retângulo, onde a escada representa a hipotenusa, enquanto a altura da casa (x) e a distância do pé da escada até a base da casa ($1,8\ m$) são os catetos. Desse forma, aplica-se o Teorema de Pitágoras e obtém-se:

$$(4,3)^2 = x^2 + (1,8)^2$$

cuja solução positiva é, aproximadamente

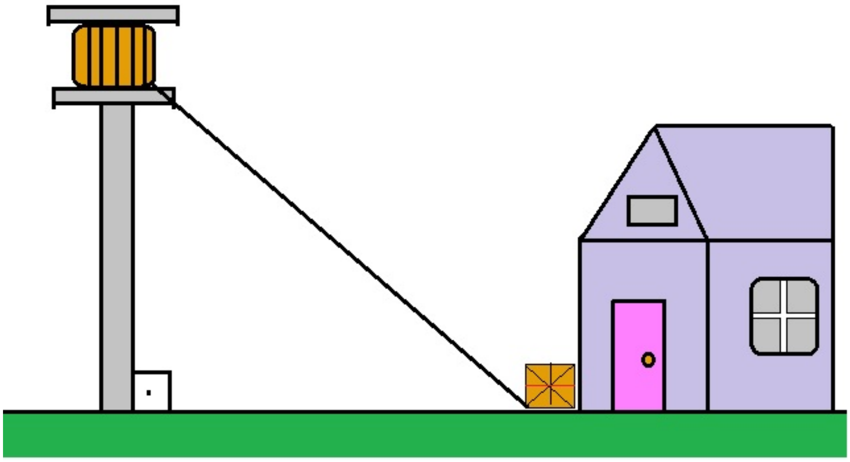
$$x = 3,9.$$

Logo, a altura da casa é de aproximadamente $3,9$ metros.

Exercício 2. *Quantos metros de fio são necessários para ligar os fios de um poste de 6 metros de altura até a caixa de luz que está ao lado da casa e a 8 metros da base do poste? A representação da situação está ilustrada na Figura 9.*

[4] Os exercícios 1 e 5 foram adaptados a partir do site http://docslide.com.br/documents/exercicios-problemasrelacoes-metricas.html, e os exercícios 2, 3 e 4 foram adaptados de http://files.robertasuero.webnode.com.br/200000235-13753146e0/Lista_09%20Eletrotecnica.pdf

Figura 9: Exercício 2



Resolução. Para resolver esse exercício é preciso modelar a situação utilizando o triângulo retângulo, pois temos a presença do ângulo reto no triângulo formado. Inicialmente vamos perceber o que cada valor numérico dado representa: o ângulo que o poste forma em relação ao solo é reto; a altura do poste (6m) é um cateto; a distância da caixa de luz até a base do poste (8m) é o outro cateto; o comprimento do fio (x) será a hipotenusa que é o lado oposto ao ângulo reto. Logo, aplicando o Teorema de Pitágoras temos:

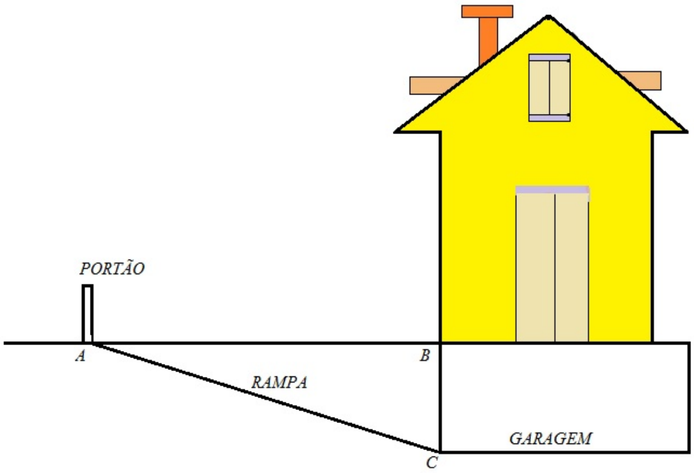
$$x^2 = 6^2 + 8^2$$

$$x = 10.$$

Portanto, o comprimento do fio é de 10 metros.

Exercício 3. *O acesso a uma garagem situada no subsolo de uma casa é feito por rampa, conforme nos mostra a Figura 10. Sabe-se que a rampa AC tem 10,25 metros de comprimento e a altura BC da garagem é de 2,25 metros. A distância AB entre o portão e a entrada da casa é de quantos metros?*

Figura 10: Exercício 3



Resolução. Esse exercício também pode ser modelado utilizando um triângulo retângulo. A altura da garagem é um cateto (2,25m) e a rampa AC é a hipotenusa, queremos encontrar a distância entre a casa e o portão que é o outro cateto (x). Aplicando-se o Teorema temos:

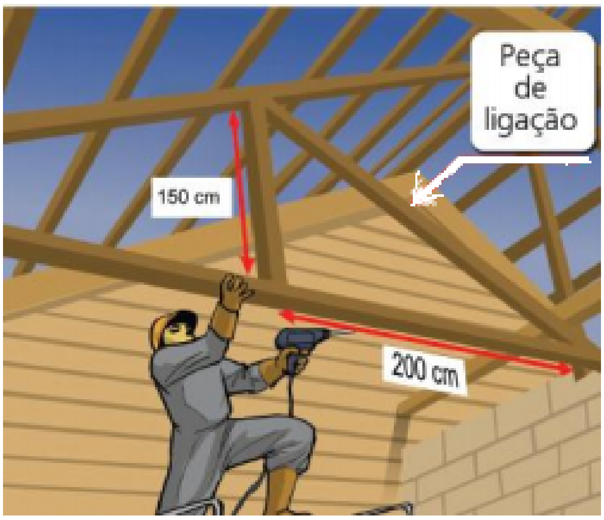
$$10,25^2 = x^2 + 2,25^2$$

$$x = 10.$$

A distância do portão até a casa é de 10 metros.

Exercício 4. *Observe a Figura 11 e responda qual deve ser o comprimento da peça de ligação do telhado?*

Figura 11: Exercício 4



Resolução. Esse exercício pode ser resolvido de maneira análoga aos anteriores, basta identificar os valores que são dados na Figura 11: 150 cm e 200 cm são catetos, a peça de ligação é a hipotenusa, logo aplicando o Teorema de Pitágoras resulta que a peça de ligação terá 250 cm.

Exercício 5. *Uma árvore foi quebrada pelo vento e a parte do tronco que restou em pé forma um ângulo reto com o solo. Se a altura do tronco da árvore que restou em pé é de 12 metros e a ponta da parte quebrada está a 9 metros da base da árvore e encosta no solo, qual é a medida da outra parte quebrada da árvore? E qual era o tamanho da árvore antes do vento quebrá-la?*

Resolução. Esse exercício não apresenta desenho da situação, talvez seja necessário a intervenção do professor a fim de que os alunos possam imaginar a cena. Pode-se modelar essa situação utilizando o triângulo retângulo, pois a parte da árvore que não está quebrada forma um ângulo de 90º com o solo. Então temos as seguintes correspondências: A altura da parte que restou de pé (12m) é um cateto. A distância da ponta da parte quebrada até a base da árvore é outro cateto. A parte quebrada da árvore é a hipotenusa (x). Aplicando-se o Teorema de Pitágoras temos:

$$x^2 = 12^2 + 9^2$$

$$x = 15$$

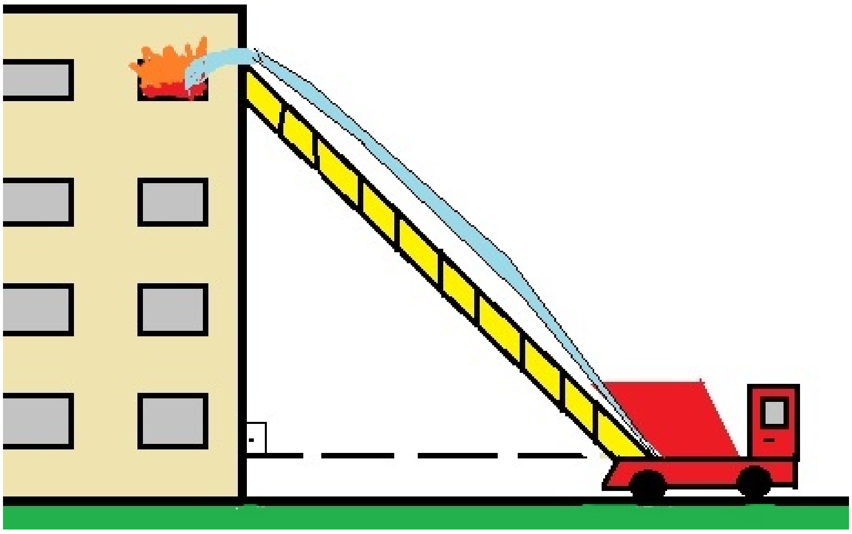
O tamanho da parte quebrada da árvore é de 15 metros. Para saber a altura da árvore antes da tempestade, basta somarmos a parte quebrada com a parte que restou de pé: $15 + 12 = 27$. Portanto a altura original da árvore era de 27 metros.

Esse segundo bloco de exercícios[5] (de 6 a 9) não é resolvido a partir da aplicação direta do triângulo retângulo. É preciso além de modelar, efetuar mais alguns cálculos e em alguns casos a resolução é dividida em duas etapas.

Exercício 6. *Durante um incêndio num edifício de apartamentos, os bombeiros utilizaram uma escada Magirus de 10 metros para atingir a janela do apartamento em chamas. A escada estava colocada a 1 metro do chão, sobre um caminhão que se encontrava afastado 6 metros do edifício. Observe a Figura 12 e calcule qual é a altura do apartamento em relação ao chão.*

[5] Os exercícios de 6 a 9 foram adaptados de http://files.robertasuero.webnode.com.br/200000235-13753146e0/Lista_09%20Eletrotecnica.pdf

Figura 12: Exercício 6



Resolução. Pode-se modelar esse exercício utilizando triângulo retângulo e considerando que a base do triângulo está na mesma reta do carro de bombeiro, ou seja, o nosso triângulo está distante 1m do solo.

Desse modo, a distância do carro até o prédio é um cateto (6m), a altura do apartamento em relação ao carro é outro cateto (x) e a escada é a hipotenusa (10m). Aplicando-se o Teorema de Pitágoras obtemos:

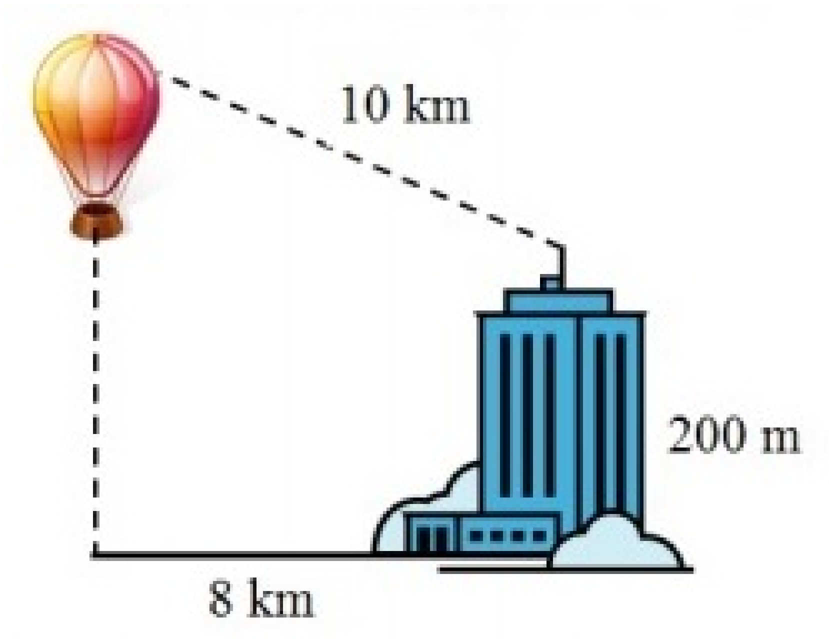
$$10^2 = 6^2 + x^2$$

$$x = 8.$$

Portanto, a altura do apartamento em chamas em relação ao carro de bombeiros é de 8 metros, mas como o carro está a 1 metro do chão, então a altura do apartamento em relação ao solo é 9 metros.

Exercício 7. *De acordo com o esquema apresentado na Figura 13, qual deve ser a altitude do balão para que sua distância ao topo do prédio seja de 10 km? Considere que a altitude do balão seja a distância do solo até o topo do balão.*

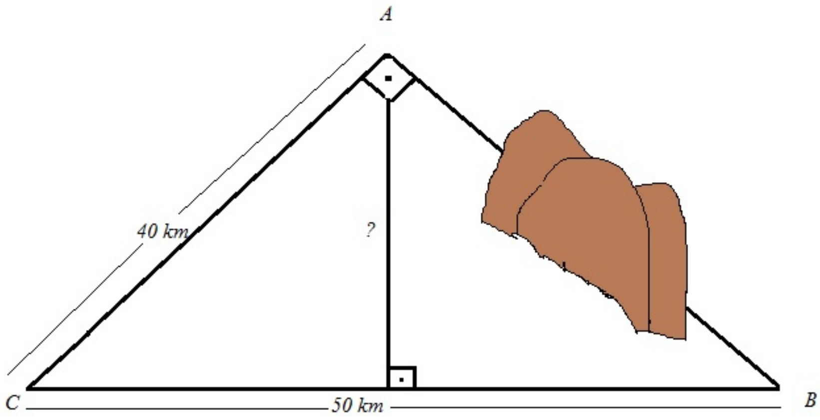
Figura 13: Exercício 7



Resolução. Esse exercício assemelha-se ao exercício do carro de bombeiros e pode ser resolvido de maneira análoga, porém deve-se considerar as unidades de medida diferentes: o prédio tem sua altura em metros e as outras distâncias são apresentadas em quilômetros. Nesse resolução escolhemos trabalhar com as unidades em quilômetro e 200 metros é equivalente a 0,2 quilômetros. O problema pode ser resolvido em duas etapas, encontrando inicialmente um valor de altitude para o balão ao qual deverá ser acrescentada a altura do prédio para termos a altitude total. Efetuando os cálculos você irá encontrar que a altitude do balão é de 6,2 km.

Exercício 8. *No mapa as cidades A, B e C são vértices de um triângulo retângulo, sendo que o ângulo reto é $\angle A$. A estrada AC tem 40 km e a estrada BC tem 50 km. As montanhas impedem a construção de uma estrada que ligue diretamente A com B. Por isso, será construída uma estrada da cidade A para a estrada BC, de modo que ela seja a mais curta possível, veja o esquema na Figura 14. Qual o comprimento da estrada que será construída?*

Figura 14: Exercício 8



Resolução. Dividimos a resolução desse problema em três etapas: na primeira, calculamos a distância entre as cidades A e B, na segunda justificamos o fato da altura relativa à hipotenusa ser a menor distância entre a cidade A e a estrada BC e na terceira, calculamos o valor de h.

Primeira etapa:

Queremos calcular a distância c entre a cidade A e B e pode-se perceber pelo desenho que essa distância é um dos catetos do triângulo retângulo formado pelas três cidades. Nota-se que a distância entre as cidades A e C é o outro cateto b, já que o ângulo reto está na cidade A. Portanto, a estrada BC é a hipotenusa a do triângulo retângulo. Aplicando-se o Teorema de Pitágoras, temos:

$$b^2 + c^2 = a^2$$

$$40^2 + c^2 = 50^2$$

$$c = 30.$$

A distância entre a cidade A e B é de 30 km.

Segunda etapa:

A estrada de menor tamanho que liga a cidade A até a estrada BC é um segmento de reta perpendicular a BC, denominado h. Através da Figura 14 pode-se concluir que esse segmento seja o menor, mas isso pode não ser um conceito assimilado pelos alunos, portanto poderá ser feita uma discussão, justificando esse fato com auxílio do Teorema de Pitágoras. Escolhe-se um ponto P pertencente ao segmento BC e forma-se um novo segmento AP. Esse novo segmento AP, é a hipotenusa do triângulo, enquanto que h é um dos catetos desse triângulo. Pelo Teorema de Pitágoras pode-se mostrar que a hipotenusa sempre será maior do que qualquer um dos catetos. Logo h é a menor distância entre a cidade A e a estrada BC.

Terceira Etapa: Temos os valores dos catetos e da hipotenusa e queremos descobrir o valor da altura, logo a relação métrica mais apropriada nesse caso é:

$$a \cdot h = b \cdot c$$

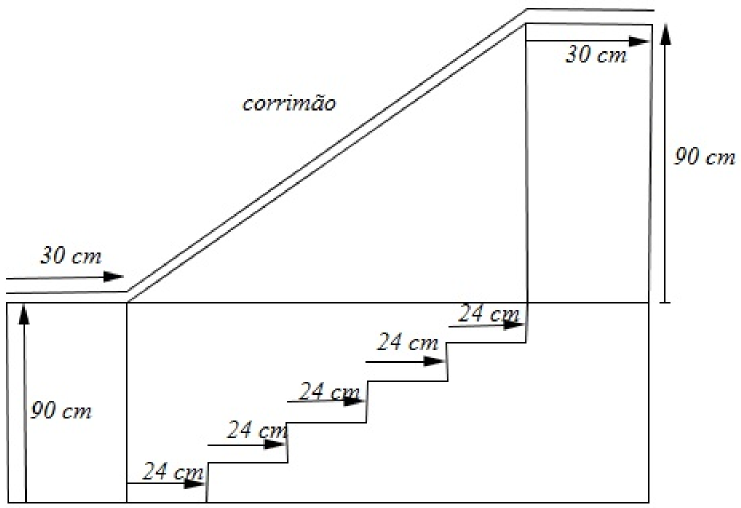
$$50 \cdot h = 30 \cdot 40$$

$$h = 24.$$

Portanto a menor estrada que liga a cidade A até a estrada BC possui um comprimento de 24 km.

Exercício 9. *O esquema da Figura 15 representa o projeto de uma escada com cinco degraus de mesma altura. De acordo com os dados apresentados, qual é o tamanho de todo o corrimão?*

Figura 15: Exercício 9



Resolução. Pode-se perceber que cada degrau tem o comprimento de 24 cm. Pela regularidade da Figura 15, a soma de todos os degraus resultará no comprimento de um dos catetos do triângulo retângulo. Portanto, é possível saber o tamanho dos catetos: um dos catetos é dado, mede 90 cm; o outro, é a soma dos comprimentos dos degraus $24 \cdot 5 = 120$ cm. O pedaço de corrimão que desconhecemos é a hipotenusa desse triângulo, logo aplicando-se o Teorema de Pitágoras temos:

$$x^2 = 90^2 + 120^2$$
$$x = 150$$

O tamanho total do corrimão será $150 + 30 + 30 = 210$ cm.

Os próximos exercícios (10, 11 e 12) foram pensados no intuito de os alunos reconhecerem a nomenclatura formal dos lados de um triângulo retângulo e montarem o desenho que melhor representa as situações descritas. São exercícios onde é necessário o domínio da linguagem matemática para a sua resolução e auxiliam o professor a perceber o aprendizado dos alunos. Para resolvê-los basta identificar os dados que estão sendo fornecidos e aplicar a relação métrica mais adequada, dentre as estudadas.

Exercício 10. *Em um triângulo retângulo as projeções dos catetos sobre a hipotenusa medem 6cm e 8cm. Determine a altura relativa à hipotenusa desse triângulo.*

Resolução. Temos m e n respectivamente igual a 6cm e 8cm. Como queremos determinar a altura relativa à hipotenusa, a relação métrica mais adequada é:

$$\begin{aligned} h^2 &= m \cdot n \\ h^2 &= 6 \cdot 8 \\ h &= 4\sqrt{3} \end{aligned}$$

Exercício 11. *A medida da altura relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo é 12 cm e uma das projeções medem 9 cm. Calcular a medida dos catetos desse triângulo.*

Resolução. Temos a altura $h = 12$ cm e uma das projeções dos catetos sobre a hipotenusa mede 9 cm. Através da relação $h^2 = m.n$ podemos descobrir o valor da outra projeção. Considere que a projeção dada seja $m = 9$ cm, iremos descobrir n.

$$\begin{aligned} h^2 &= m \cdot n \\ 12^2 &= 9 \cdot n \\ n &= 16cm \end{aligned}$$

A hipotenusa será a soma das projeções: $16cm + 9cm = 25cm$ Agora utilizaremos as duas relações que relacionam o cateto e a sua respectiva projeção:

$$\begin{aligned} b^2 &= a \cdot m \\ b^2 &= 25 \cdot 9 \\ b &= 15cm \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c^2 &= a \cdot n \\ c^2 &= 25 \cdot 16 \\ c &= 20cm \end{aligned}$$

Exercício 12. *Determine a medida das projeções em um triângulo retângulo cuja hipotenusa mede 12 cm e um dos catetos 4 cm.*

Resolução. Podemos calcular o valor da projeção do cateto dado sobre a hipotenusa:

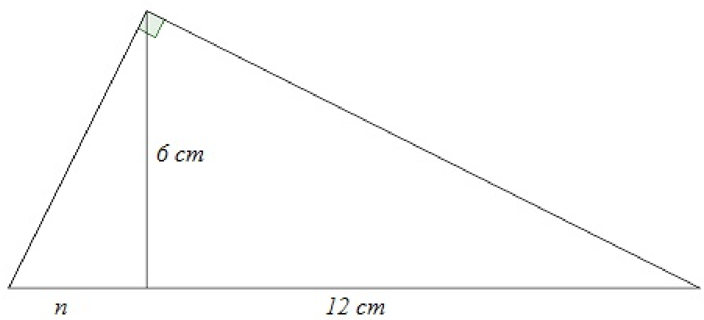
$$\begin{aligned} c^2 &= a \cdot n \\ 4^2 &= 12 \cdot n \\ n &= 1,33cm \end{aligned}$$

Como a hipotenusa é a soma das duas projeções, temos que $12 - 1,33$ será o tamanho da outra projeção, ou seja, $10,67$.

O último grupo de exercícios que sugerimos (13, 14 e 15), difere dos outros, pois apresentam o desenho do triângulo e os alunos devem escolher a relação métrica adequada para calcular os valores solicitados. Podem ser resolvidos através de manipulações algébricas, não exigem interpretação e servem para que os estudantes pratiquem e percebam os pontos de dificuldades na aprendizagem.

Exercício 13. *Calcule o valor de n na Figura 16:*

Figura 16: Exercício 13



Resolução. Queremos calcular n. A Figura nos fornece $h = 6$ e $m = 12$, portando utilizando a relação métrica

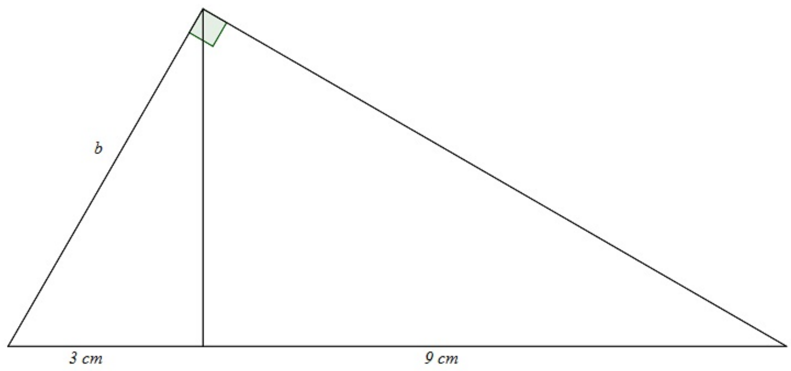
$$h^2 = m \cdot n$$

$$6^2 = 12 \cdot n$$

$$n = 3.$$

Exercício 14. *Calcule o valor de b na Figura 17:*

Figura 17: Exercício 14



Resolução. Queremos calcular b. Sabemos $m = 3$ e $n = 9$. Temos que:

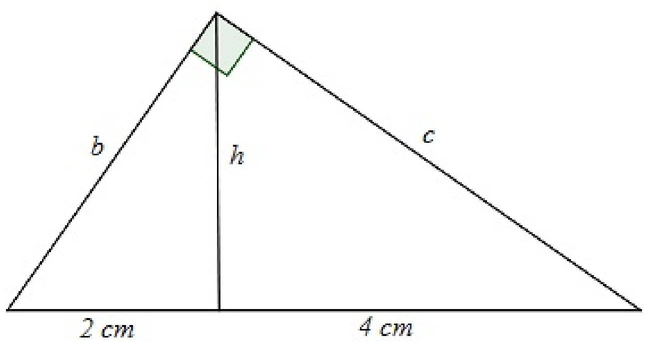
$$a = m + n = 3 + 9 = 12$$

Para calcular b:

$$b^2 = a \cdot m = 12 \cdot 3 \Rightarrow b = 6.$$

Exercício 15. *Calcule o valor de b, h e c na Figura 18:*

Figura 18: Exercício 15



Resolução. Queremos calcular h, b e c. Vamos calcular primeiro h. Temos $m = 2$ e $n = 4$, logo:

$$h^2 = m \cdot n = 2 \cdot 4 \Rightarrow h = 2\sqrt{2}.$$

Para poder calcular b e c precisamos encontrar o valor de a:

$$a = m + n = 2 + 4 = 6.$$

Calculando b temos:

$$b^2 = a \cdot m = 6 \cdot 2 \Rightarrow b = 2\sqrt{3}.$$

Calculando c:

$$c^2 = a \cdot n = 6 \cdot 4 \Rightarrow c = 2\sqrt{6}.$$

Após a realização dos exercícios o professor poderá avaliar quantitativamente os alunos , pois a avaliação qualitativa pôde ser feita no decorrer das atividades. No anexo C pode ser encontrada, como sugestão, a avaliação escrita que utilizamos com nossos alunos. Percebemos que houve muita motivação, empenho, participação e produção em sala de aula, porém o resultado não foi o mesmo na avaliação. Alguns alunos tiveram um ótimo desempenho enquanto outros apresentaram um rendimento muito abaixo do esperado, relatando dificuldades na interpretação do que estava sendo solicitado. De fato, quando comentamos sobre os exercícios durante a correção da prova, os estudantes perceberam que sabiam como resolver as questões. A partir disso, refletimos sobre o quanto é importante o domínio da linguagem, leitura e interpretação e de como essas dificuldades afetam a aprendizagem e a resolução de problemas em matemática.

3 Considerações Finais

Essa sequência de aulas foi aplicada em uma escola estadual de Ensino Fundamental, com alunos de uma turma de 9º ano que apresentava alunos que já haviam reprovado em matemática em séries anteriores, porém estavam cursando pela primeira vez o nono ano. A média de idade da turma era de 15 anos. Ao questionarmos a turma sobre sua relação com a matemática as respostas não foram positivas e a grande maioria dos estudantes não gostava da disciplina, pois considerava o conteúdo difícil e sem conexão com a realidade. Os discentes fizeram comentários como: "Geometria é mais difícil do que matemática." e "Mas para que estudar Geometria, isso serve para o quê?" demonstrando não entender a relação entre os diferentes ramos da matemática, nem mesmo compreender o significado dos conteúdos estudados ao longo da trajetória escolar.

Ao escolhermos essa turma para a aplicação da atividade, além do ensino dos conceitos, outro objetivo que nos motivou foi o de desmistificar esse preconceito que os alunos tinham com a matemática, principalmente em relação a Geometria.

Ao iniciarmos as tarefas, os alunos reagiram com muitos questionamentos e notava-se que estavam inseguros e sem saber como se portar na realização das tarefas. A primeira atividade de medição das sombras e alturas, por ser prática, transcorreu de forma tranquila, porém quando eles se depararam com as reflexões solicitadas houve um certo impacto, pois eles queriam um padrão, uma maneira "certa" de proceder. Foi na sequência das aulas que notamos a evolução de cada um e a construção da autonomia sobre a própria aprendizagem.

Notamos que a partir do desenvolvimento dessa proposta houve uma transformação positiva no modo como eles se relacionavam com a disciplina. Os alunos que normalmente tinham aversão à aula de matemática, se mostraram participativos, atentos e colaborativos junto a seus colegas. Além disso, o trabalho em grupos contribuiu para a união da turma que passou a colaborar mais entre si, não somente nas aulas de matemática, mas, também, nas outras disciplinas do currículo.

Outro fator que merece destaque diz respeito à escrita que foi solicitada ao final de cada atividade. Os estudantes demonstraram muita dificuldade em escrever sua autoavaliação em relação à aprendizagem. Esperávamos que os alunos escrevessem mais e soubessem se expressar melhor, pois estavam se referindo as suas construções e experiências. Além disso, houve dificuldade em lidar com a linguagem matemática, porque alguns termos têm significado específico em matemática e podem ser confundidos com expressões usuais em língua portuguesa. Um exemplo disso é a palavra “semelhança”, que causou distorções no entendimento dos alunos durante algumas aulas.

Ao planejar as atividades e estabelecer os objetivos a serem alcançados tínhamos uma expectativa em relação aos resultados e fomos sendo surpreendidos em todos os momentos. A atividade 1,por exemplo, que para nós parecia simples, foi recebida com dificuldade pelos estudantes e ao contrário, a atividade 5, que nos parecia mais complexa, foi resolvida de maneira simples e eficaz pelos estudantes, até o momento que antecedeu a demonstração do Teorema de Pitágoras. Durante o processo, procuramos analisar o desenvolvimento de cada aluno e reavaliar os objetivos de acordo com o andamento das atividades. Algumas vezes foi necessário retomar conceitos que não haviam ficado compreendidos, o que exigiu dedicação e empenho da nossa parte e da parte dos alunos. Felizmente, a turma que trabalhamos abraçou a proposta e mostrou grande dedicação na realização das atividades.

Acreditamos que a proposta favoreceu o entendimento dos conceitos geométricos, mesmo com as dificuldades encontradas ao longo do processo e em nosso ponto de vista houve acréscimo no desenvolvimento individual de cada aluno em relação ao ensino desse mesmo conteúdo de forma tradicional. Esta diferença pode ser constatada ao compararmos a motivação e o modo como os alunos se relacionaram com os conteúdos nas duas turmas de 9º ano que trabalhamos simultaneamente na escola. Em apenas uma delas aplicamos esta proposta e na outra desenvolvemos o assunto empregando basicamente o livro didático adotado pela escola, (DANTE, 2012).

Constatamos que a turma que realizou a proposta tinha muito mais entusiasmo e vontade em relação às aulas de matemática. Além disso, os alunos participavam e faziam muitos questionamentos que, de certa forma, enriqueciam as aulas. Os estudantes demonstravam surpresa ao perceberem que a matemática estava presente no cotidiano deles sem que tivessem reparado nisso antes. Esse comportamento reflexivo que se estabeleceu ao longo desse período, contribuiu na postura que eles adotaram em relação aos conteúdos que foram trabalhados posteriormente e ainda, na questão da escrita, eles foram se habituando a escrever e pensar sobre a própria aprendizagem. Quantitativamente, o desempenho da turma em geral foi considerado satisfatório. É importante destacar que haviam alguns alunos com grande dificuldades de aprendizagem e que para esses as atividades conseguiram formar uma ponte, pois eles se interessavam e se motivavam, apesar de não conseguirem atingir todos os objetivos propostos.

A turma que trabalhou com o livro, (DANTE, 2012) não demonstrava interesse pelas aulas e teve um rendimento quantitativo inferior, pois não questionava e participava pouco das aulas. Nessa turma, a média de idade era de 13 anos e os alunos, em maioria, não apresentavam histórico de reprovação em Matemática nos anos anteriores. Entretanto, havia desmotivação em relação ao estudo e aprendizagem em geral. Esse comportamento foi mantido durante todo o ano letivo, inclusive quando foram feitas tentativas de explicar o porquê do estudo de tais conteúdos, através de exercícios contextualizados. Essa comparação, nos mostrou que ao realizar atividades em que os discentes participem e sejam levados a pensar e refletir, deixando de ser "espectadores", a grande maioria se sente motivado e há um aumento na qualidade da aprendizagem, pois o aluno questiona e desenvolve o próprio raciocínio.

Em relação ao trabalho do professor, ao propor uma sequência de atividades é necessário que os objetivos de cada parte desta sequência estejam claros para que ele saiba onde quer chegar em cada fase. Isso é uma tarefa que exige dedicação e constante reflexão sobre os resultados obtidos a cada aula. É importante perceber que em uma sala de aula há alunos com diferentes níveis de conhecimentos e com ritmos de aprendizagem distintos. Por isso o trabalho em grupo facilita as interações entre os estudantes, porém o professor deve estar atento para que todos participem e consigam formular o seu conhecimento individual. Incentivar cada um dentro das suas possibilidades e buscar entender e motivar cada aluno a superar as suas limitações, exige preparo e esforço por parte do docente e é um desafio, pois ele deixa de ser o detentor do conhecimento e passa a entender os diversos caminhos de raciocínios que os discentes utilizam. Além disso, é importante que o professor se prepare para os questionamentos que podem surgir e esteja disposto a aprender e pesquisar sempre sobre os assuntos que não souber responder de imediato. Esse tipo de postura favorece a aproximação entre alunos e professores.

Acreditamos na importância de apresentar a alunos de Ensino Básico motivações para o estudo e a compreensão da matemática, seja a partir da história, de situações problema, ou de aplicações dos conteúdos, sem deixar de considerar os aspectos da linguagem formal e do raciocínio dedutivo. Por isso, iniciamos com uma atividade prática e desenvolvemos o raciocínio até chegar à dedução das relações métricas. Percebemos, devido ao envolvimento e evolução gradual a cada atividade, que os alunos compreenderam e trabalharam melhor com a linguagem matemática.

É um desafio do professor de matemática superar a resistência inicial que os alunos apresentam ao realizar atividades que propõe reflexão e investigação. Grande parte dos alunos acredita que a matemática deve ser resolvida somente utilizando cálculos, sem interpretação ou reflexão sobre o que está sendo solicitado pelo problema. Eles não estão acostumados a pensar, tomar decisões e utilizarem raciocínio lógico. Vários conteúdos de matemática são campos férteis para o trabalho diferenciado que vise superar essas barreiras e ao desenvolver o pensamento na resolução de situações problema envolvendo conceitos geométricos, o aluno amplia sua compreensão do mundo que o rodeia e passa a interagir de forma diferente com esse ambiente. Desenvolve a percepção de que o conhecimento escolar e acadêmico estão presentes em diversas atividades e setores de trabalho. Um esforço por parte dos professores na direção de transformar esse preconceito que há em relação a matemática, pode aumentar a qualidade das aulas e estimular os alunos ao gosto por essa disciplina.

Referências

ALMOULOUD, S. A. et al. *A geometria no Ensino Fundamental: reflexões sobre uma experiência de formação envolvendo professores e alunos*. [S.l.]: Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação, 2006. Citado na página 15.

AUSEBEL, D. P. *Aquisição e Retenção de Conhecimentos: Uma Perspectiva Cognitiva*. Lisboa: Platáno Edições Técnicas, 2003. ISBN 9727073646. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 17.

BICUDO, I. *Os elementos*. São Paulo: UNESP, 2009. ISBN 9788571399358. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=um94A66MDxkC>. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 39.

BRASIL. MEC, SEB, DICEI. *Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais da Educação Básica*. Brasília, DF, 2013. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=15548-d-c-n-educacao-basica-nova-pdf&Itemid=30192>. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 16.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais : Matemática*. Brasília, DF, 1997. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf>. Citado 3 vezes nas páginas 13, 16 e 18.

CENTURIÓN, M.; JAKUBOVIC, J. *Matemática: teoria e contexto, 9º ano*. [S.l.]: Saraiva, 2012. ISBN 9788502157774. Citado na página 27.

DANTE, L. R. *Projeto Teláris: Matemática, 9º ano*. [S.l.]: Ática, 2012. ISBN 9788508156375. Citado na página 53.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. *Fundamentos de Matemática Elementar: Geometria Plana*. Nona. Brasil: Atual, 2013. v. 9. Citado 2 vezes nas páginas 31 e 35.

GESTAR. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Programa Gestão da Aprendizagem Escolar - Gestar II. Caderno de Teoria e Prática 3 - TP3*. Brasília, 2008. Citado na página 18.

LIMA, E. L. et al. *A Matemática do Ensino Médio*. Nona edição. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006. v. 1. ISBN 85-8581810-7. Citado na página 27.

LOBO, J. da S.; BAYER, A. O ensino de geometria no ensino fundamental. *Acta Scientiae*, v. 6, n. 1, p. 19 – 26, 2004. Citado na página 14.

LOPES, C. E.; OLIVEIRA, R. A. de. Ler e o escrever na construção do conhecimento matemático no ensino médio. *Bolema*, v. 26, n. 428, p. 513 – 534, 2012. Citado na página 26.

LUCKESI. *Avaliação da aprendizagem escolar*. São Paulo: Cortez, 2002. Citado na página 18.

MAZZIEIRO, A. dos S.; MACHADO, P. A. F. *Descobrindo e aplicando a Matemática, 9º ano*. [S.l.]: Dimensão, 2012. ISBN 9788573195316. Citado na página 27.

MOL, R. S. *Introdução à História da Matemática*. Belo Horizonte: CAED-UFMG, 2013. ISBN 9788564724266. Disponível em: <http://www.mat.ufmg.br/ead/acervo/livros/introducao_a_historia_da_matematica.pdf>. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 59.

MORI, I.; ONAGA, D. S. *Matemática: ideias e desafios, 9º ano*. [S.l.]: Saraiva, 2012. ISBN 9788502161610. Citado na página 27.

RABELO, E. H. *Avaliação: novos tempos e novas práticas*. Petrópolis, R.J.: Vozes, 1998. Citado na página 19.

RODRIGUES, A. C. *O Modelo de Van Hiele de desenvolvimento do Pensamento Geométrico*. Dissertação (Trabalho de Conclusão de Curso) — Universidade Católica de Brasília, 2007. Disponível em: <https://www.ucb.br/sites/100/103/TCC/22007/AlessandraCoelhoRodrigues.pdf>. Acesso em: 31 jan. 2016. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 15.

SILVA, E. G. M. G. da. *Contextualização histórica para o estudo da trigonometria e construção do teodolito no Ensino Fundamental*. Dissertação (Dissertação (Mestrado - Mestrado Profissional em Matemática)) — Universidade de Brasília, 2015. Disponível em: <https://www.ucb.br/sites/100/103/TCC/22007/AlessandraCoelhoRodrigues.pdf>. Acesso em: 31 jan. 2016. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 15.

TEIXEIRA, C. F. *Compreensão, criação e resolução de problemas de estrutura multiplicativa: um sequência didática com problemas "abertos"*. Dissertação (Monografia) — UFPE/Curso de especialização em ensino de pré a 4ª série, 1999. Citado na página 18.

Apêndices

APÊNDICE A – História de Pitágoras

Trazemos aqui alguns aspectos históricos sobre Pitágoras que podem auxiliar a enriquecer as discussões em sala de aula, de acordo com (MOL, 2013):

> Nascido na ilha de Samos, também na Iônia e próxima a Mileto, Pitágoras, que teria sido aluno de Tales de Mileto, realizou viagens em sua juventude e terminou por estabelecer-se na cidade de Crotona, na costa sudeste da Itália. Em Crotona, formou-se em torno de Pitágoras uma irmandade religiosa, filosófica e científica, uma escola de pensamento onde o racionalismo grego convivia com elementos de misticismo. Dentro da escola de Pitágoras, a transmissão oral do conhecimento era tradição, o que certamente contribuiu para a escassez de fontes escritas. Muito do que se atribui a Pitágoras é baseado em relatos produzidos anos depois de seu tempo. A Escola Pitagórica dava destaque a quatro campos do saber: aritmética, música, geometria e astronomia. A concepção pitagórica do universo era aritmética: "todas as coisas são números", segundo Pitágoras. Os números, elementos básicos da filosofia pitagórica, eram tratados como entidades místicas e objeto de devoção. O misticismo pitagórico atribuía aos números características e personalidades:
>
> 1. O número um é a essência do número, o gerador de todos os outros números e o número da razão; nele está a origem de todas as coisas e do divino.
>
> 2. O número dois é o primeiro número par ou número feminino, o número da opinião.
>
> 3. O número três é o primeiro número masculino, o número da harmonia.
>
> 4. O número quatro é o número da justiça.
>
> 5. O número cinco é o número do casamento, por ser a união dos primeiros números feminino e masculino.
>
> Um lugar sagrado é reservado ao número dez ou tetractys. Ele é considerado o número do universo, por ser a soma das dimensões geométricas: um ponto, que é o gerador de todas as dimensões; dois pontos, que determinam uma reta de dimensão um; três pontos não alinhados, que determinam um triângulo de dimensão dois; e, por fim, quatro pontos não contidos em um plano, que determinam um tetraedro de dimensão três. Desse modo, o número dez, que nos primórdios da evolução matemática nasce do método de contagem com os dedos, é produzido pelos pitagóricos por um processo puramente abstrato.
>
> A filosofia pitagórica dava aos números inteiros o poder de descrever o mundo. Essa concepção, porém, sofreu um grande abalo com a descoberta das grandezas incomensuráveis, que a história da matemática atribui aos pitagóricos. O número hoje conhecido por $\sqrt{2}$ pode ter sido obtido de duas formas distintas. De uma maneira geométrica, ao se calcular a diagonal do quadrado de lado 1. Ou ainda, de uma forma puramente aritmética, obtendo-se a média geométrica entre a unidade e duas vezes a unidade, ou seja, $\frac{1}{x} = \frac{x}{2}$. O número assim produzido e a unidade são incomensuráveis, ou seja, inexiste uma unidade básica a partir da qual ambos podem ser obtidos como múltiplos inteiros. Tal descoberta, talvez a mais importante descoberta matemática da época, entrou em

choque com a visão mística que Pitágoras tinha dos números, a ponto de colocar em dúvida a adequação de sua concepção numérica do universo. Pela primeira vez na história a matemática viveu uma crise em seus fundamentos. Pitágoras propunha teoremas do ponto de vista abstrato e intelectual e, sem dúvida, o resultado mais famoso atribuído à Escola Pitagórica é o que hoje conhecemos como Teorema de Pitágoras: as medidas a e b dos catetos e a medida c da hipotenusa de um triângulo retângulo satisfazem

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Esse resultado já era conhecido na geometria da Mesopotâmia e do Egito e não existem evidências de que Pitágoras ou seus seguidores tenham trabalhado nele. De todo modo, também não há evidências de outros trabalhos matemáticos dos pitagóricos e muito do que lhes é atribuído provém de uma tradição que remonta à antiguidade clássica. Após um levante popular, o templo de Pitágoras em Crotona foi destruído e sua irmandade deixou de existir como um grupo ativo e organizado. Muitos de seus seguidores, espalhados pelo mundo helênico, ainda mantiveram suas atividades por mais dois séculos. Acredita-se que Pitágoras tenha sido o primeiro homem a denominar-se “filósofo”, ou seja, amante da sabedoria. As ideias pitagóricas viriam a influenciar Platão e, através deste, toda a filosofia ocidental.

Anexos

ANEXO A – Atividades

Atividade 1 - Medindo sombras e alturas

Questão 1: Cada dupla deverá medir o tamanho de suas sombras e de suas alturas tomando nota desses valores, usando duas casas decimais. Para organizar os valores de maneira mais adequada, complete a tabela abaixo:

	Altura	Sombra
Aluno 1		
Aluno 2		

Questão 2: Qual figura plana é formada pelo aluno e sua sombra?

Questão 3: Que tipo de ângulo é formado pelo aluno de pé, em relação ao chão?

Questão 4: O tamanho da sombra seria o mesmo em qualquer horário do dia? Por que?

Questão 5: Desenhe em uma folha de papel o triângulo retângulo que representa sua altura e sua sombra utilizando uma escala de 1:10, isto é, se sua altura for 1,72 metros e sua sombra 3,15 metros, o triângulo terá os lados perpendiculares com 17,2 centímetros e 31,5 centímetros.

Questão 6: É possível descobrir a medida do ângulo que os raios de sol formam com o solo, no momento da realização das medições, apenas com os tamanhos da sombra e altura de cada aluno?

Atividade 2 - Conhecendo a tangente de um ângulo agudo

Questão 1: Calculem o quociente da altura pela sombra, utilizando duas casas decimais. Complete a tabela abaixo:

	Altura/Sombra
Aluno 1	
Aluno 2	

Questão 2: Por que os resultados foram aproximadamente iguais se as alturas e tamanhos de sombras são diferentes, ou seja, os triângulos dos alunos possuem medidas de lados distintas?

Questão 3: Será que é possível saber a medida do ângulo que os raios de sol fazem com o solo em um determinado momento apenas conhecendo o valor da tangente deste ângulo?

Atividade 3 - Conhecendo o seno e o cosseno de um ângulo agudo

Questão 1: A partir do Teorema de Pitágoras, calcule a medida da hipotenusa do triângulo obtido na primeira atividade.

Questão 2: Utilizando a medida da hipotenusa, determine os valores do seno e do cosseno do ângulo $\angle A$ que os raios de sol fazem com o solo, usando o triângulo que você construiu. Organize os valores encontrados na tabela abaixo:

	Aluno 1	Aluno 2
$\text{sen}(\angle A) = \dfrac{Altura}{hipotenusa}$		
$\cos(\angle A) = \dfrac{Sombra}{hipotenusa}$		

Questão 3: Discuta com seu colega se os valores encontrados são diferentes ou iguais? A que razões atribuem esse fato?

Questão 4: Qual é a característica principal que você observa nos triângulos que possuem ângulos correspondentes congruentes entre si? Como eles se parecem visualmente? Você consegue escrever matematicamente uma resposta a essa questão, ou explicar com suas palavras o que acontece?

Atividade 4 - O que são dois triângulos semelhantes?

Utilizando os triângulos construídos na atividade 1, responda:

Questão 1: Comparando o seu triângulo com o do colega, marque com a mesma cor os ângulos que são correspondentes.

Questão 2: Comparando o seu triângulo com o do colega, marque com a mesma cor os lados opostos ao ângulos que são correspondentes. Chamaremos estes lados de *lados correspondentes.*

Questão 3: Calcule a razão entre os lados correspondentes.

Questão 4: O que você observou nos números encontrados na questão 3? A que atribui esse fato?

Questão 5: Defina com as suas palavras o que são dois triângulos semelhantes.

Atividade 5 - Deduzindo as relações métricas no triângulo retângulo

Questão 1: Dentre os triângulos recebidos, existem triângulos semelhantes entre si?

Questão 2: Para cada par de triângulos semelhantes que você encontrou, relacione quais são os os lados correspondentes, os vértices correspondentes e os ângulos correspondentes.

Questão 3: Escreva as razões de semelhança para cada par de triângulos semelhantes que você encontrou.

Questão 4: A partir das razões encontradas nos itens anteriores demonstre as relações métricas:

1. $b^2 = am$
2. $c^2 = an$
3. $h^2 = mn$
4. $ah = bc$

Questão 5: Utilizando as relações 1 e 2 da questão 4, demonstre o Teorema de Pitágoras:

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

ANEXO B – Exercícios

Exercício 1. *Para executar um serviço, um trabalhador apoiou na laje da sua casa uma escada de 4,3 metros de comprimento, de acordo com o esquema na Figura 19. A base da escada apoiada no piso está a 1,8 metros da parede. Qual é a altura aproximada da construção?*

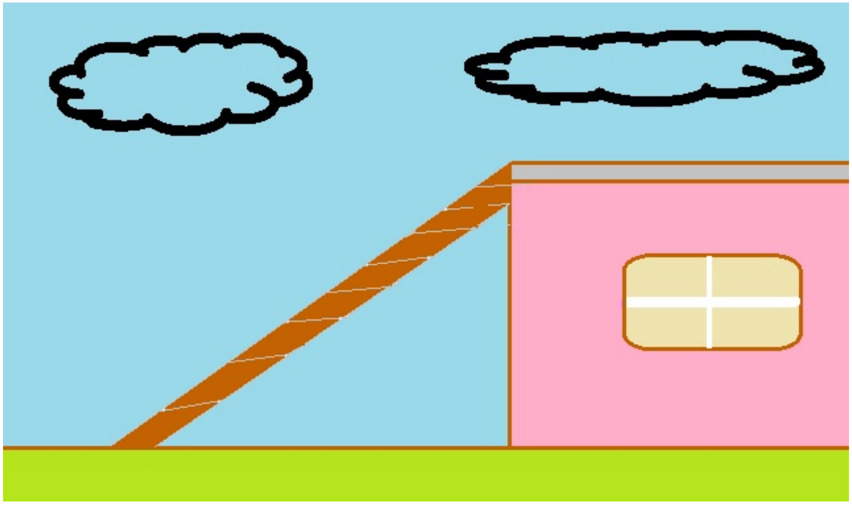


Figura 19: Exercício 1

Exercício 2. *Quantos metros de fio são necessários para ligar os fios de um poste de 6 metros de altura até a caixa de luz que está ao lado da casa e a 8 metros da base do poste? A representação da situação está ilustrada na Figura 20:*

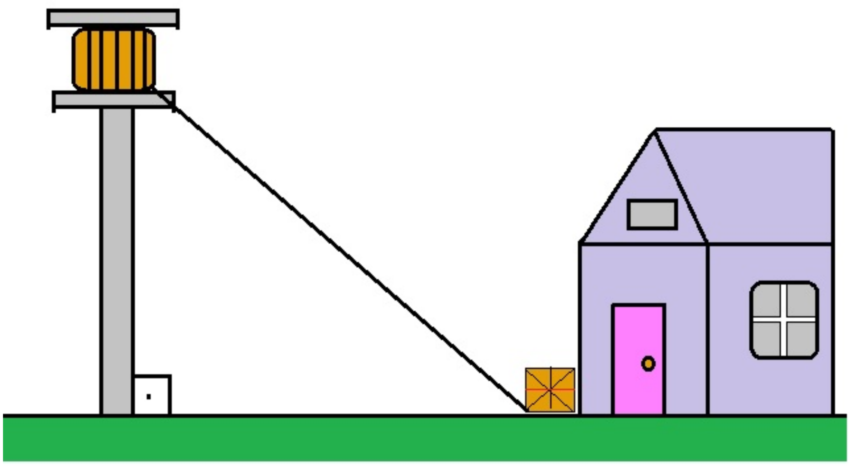


Figura 20: Exercício 2

Exercício 3. *O acesso a uma garagem situada no subsolo de uma casa é feito por rampa, conforme nos mostra a Figura 21. Sabe-se que a rampa AC tem 10,25 metros de comprimento e a altura BC da garagem é de 2,25 metros. A distância AB entre o portão e a entrada da casa é de quantos metros?*

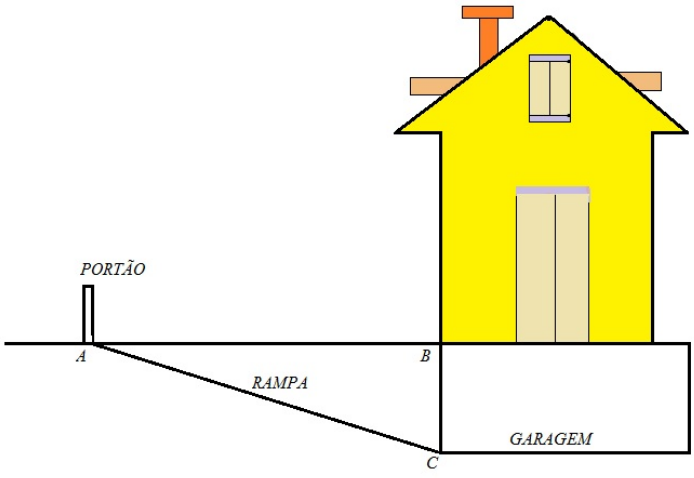


Figura 21: Exercício 3

Exercício 4. *: Observe a Figura 22 e responda qual deve ser o comprimento da peça de ligação do telhado?*

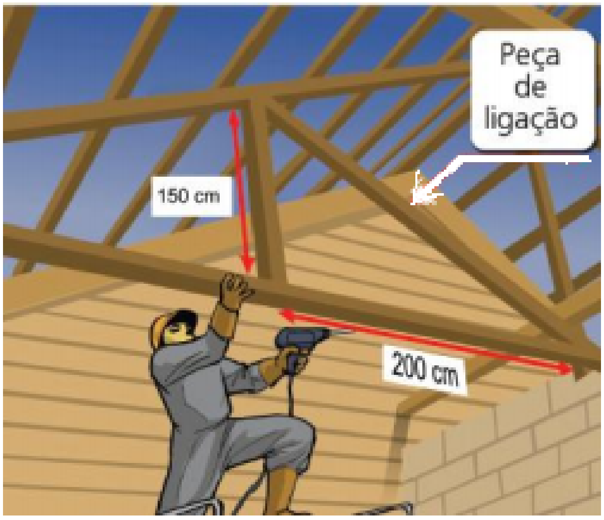


Figura 22: Exercício 4

Exercício 5. *Uma árvore foi quebrada pelo vento e a parte do tronco que restou em pé forma um ângulo reto com o solo. Se a altura do tronco da árvore que restou em pé é de 12 metros e a ponta da parte quebrada está a 9 metros da base da árvore, qual é a medida da outra parte quebrada da árvore? E qual era o tamanho da árvore antes do vento quebrá-la?*

Exercício 6. *Durante um incêndio num edifício de apartamentos, os bombeiros utilizaram uma escada Magirus de 10 metros para atingir a janela do apartamento em chamas. A escada estava colocada a 1 metro do chão, sobre um caminhão que se encontrava afastado 6 metros do edifício. Qual é a altura do apartamento em relação ao chão? Observe a ilustração da situação na Figura 23*

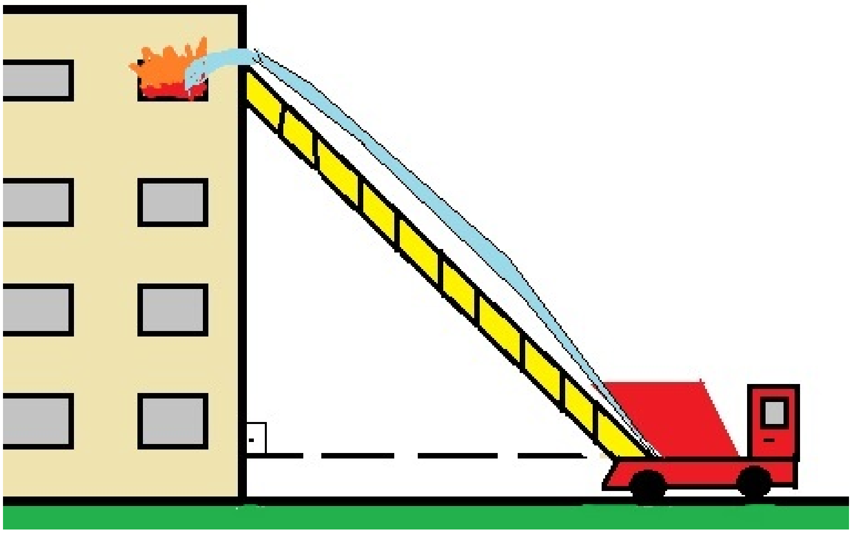


Figura 23: Exercício 6

Exercício 7. *De acordo com a Figura 24, qual deve ser a altitude do balão para que sua distância ao topo do prédio seja de 10 km? Considera que a altitude seja a distância do solo até o topo do balão.*

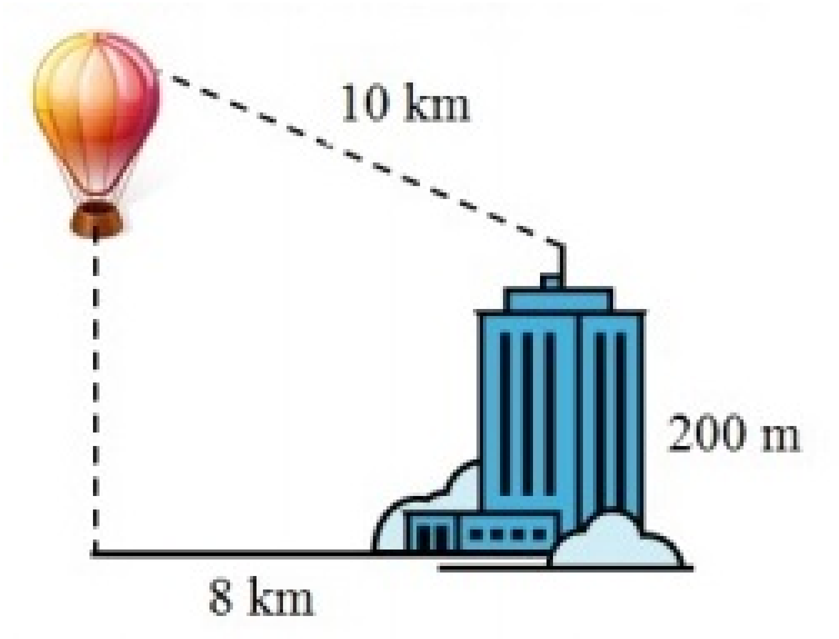


Figura 24: Exercício 7

Exercício 8. *No mapa as cidades A, B e C são vértices de um triângulo retângulo, sendo que o ângulo reto é $\angle A$. A estrada AC tem 40 km e a estrada BC tem 50 km. As montanhas impedem a construção de uma estrada que ligue diretamente A com B. Por isso, será construída uma estrada da cidade A para a estrada BC, de modo que ela seja a mais curta possível, conforme a Figura 25. Qual o comprimento da estrada que será construída?*

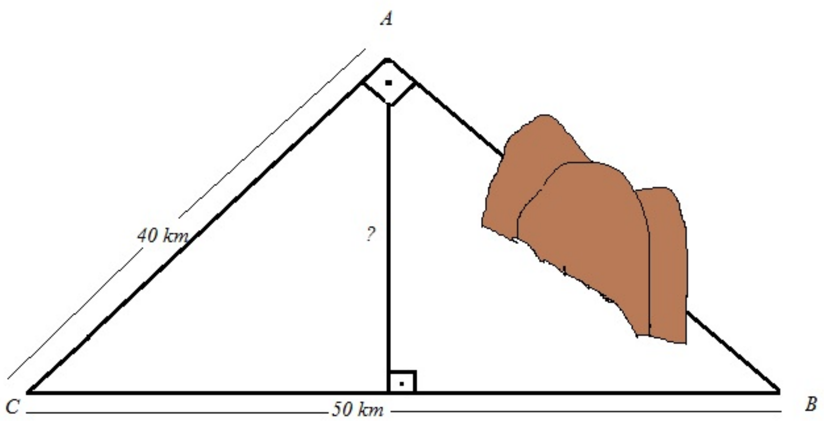


Figura 25: Exercício 8

Exercício 9. *O esquema da Figura 26 representa o projeto de uma escada com cinco degraus de mesma altura. De acordo com os dados apresentados, qual é o tamanho de todo o corrimão?*

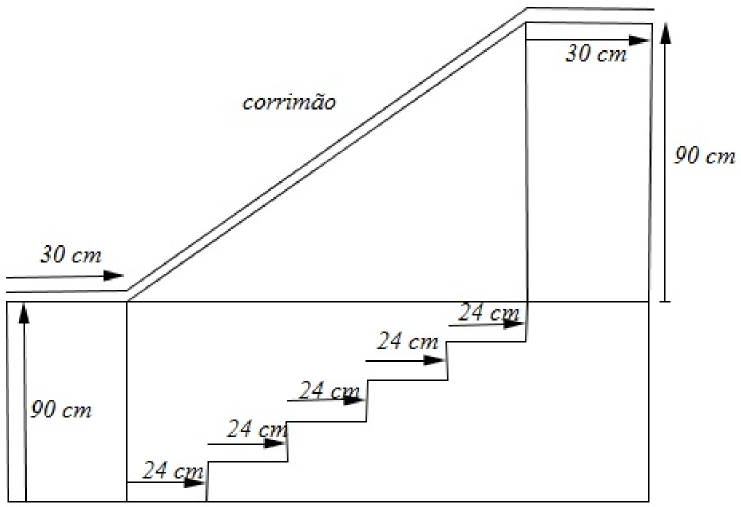


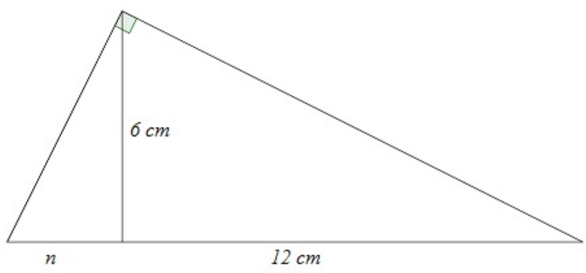
Figura 26: Exercício 9

Exercício 10. *Em um triângulo retângulo as projeções dos catetos sobre a hipotenusa medem 6cm e 8cm. Determine a altura relativa à hipotenusa desse triângulo.*

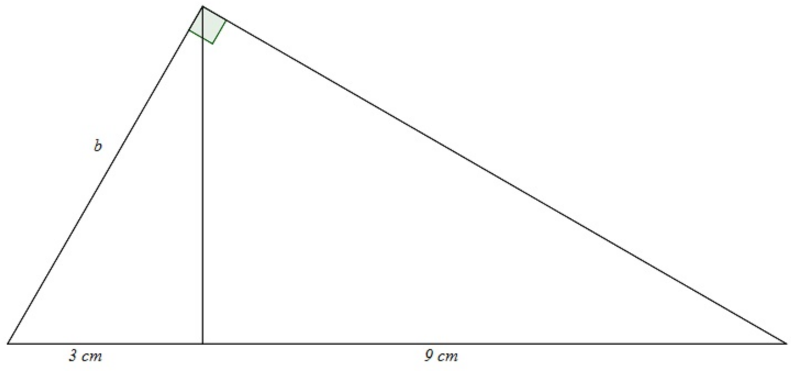
Exercício 11. *A medida da altura relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo é 12 cm e uma das projeções medem 9 cm. Calcular a medida dos catetos desse triângulo.*

Exercício 12. *Determine a medida das projeções em um triângulo retângulo cuja hipotenusa mede 12 cm e um dos catetos 4 cm.*

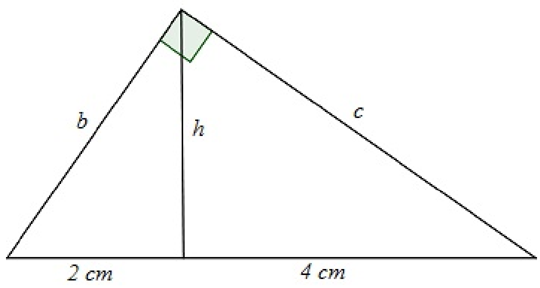
Exercício 13. *Calcule o valor de n na Figura 13:*



Exercício 14. *Calcule o valor de b na Figura 14:*



Exercício 15. *Calcule o valor de b, h e c na Figura 15:*



(Os exercícios 1 e 5 foram adaptados a partir do site
http://docslide.com.br/documents/exercicios-problemasrelacoes-metricas.html,
e os demais exercícios foram adaptados de
http://files.robertasuero.webnode.com.br/200000235-13753146e0/Lista_09%20Eletrotecnica.pdf)

ANEXO C – Modelo de Prova

```
Texto: Camila é uma aluna que adora perguntar "Por quê?". Certo dia,
Camila decidiu medir sua altura e descobriu que tinha 1,73 m de altura.
Ela percebeu que era mais alta do que Carla que tinha 1,67m e mais baixa
do que Eduardo que tinha 1,80m.
Prestou atenção também que o tamanho de sua sombra variava ao longo do
dia e ficou intrigada se perguntando porque isso acontecia. Resolveu
então fazer uma experiência: em uma manhã de sol, mediu a sua sombra e
obteve como resposta 7,74m.
Camila ficou pensativa sobre o que poderia fazer com todos esses números.
Vamos ajudá-la a descobrir os cálculos que podem ser feitos?
```

Questão 1: Com base no texto responda aos seguintes questionamentos:

a) Faça um desenho que represente Camila e sua sombra e indique qual a figura geométrica pode representar esse problema.

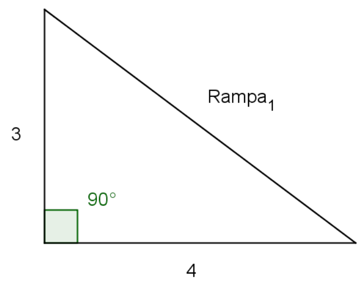
b) A partir das medidas obtidas pela menina, calcule o valor da tangente do ângulo que os raios de Sol faziam com o solo naquele momento.

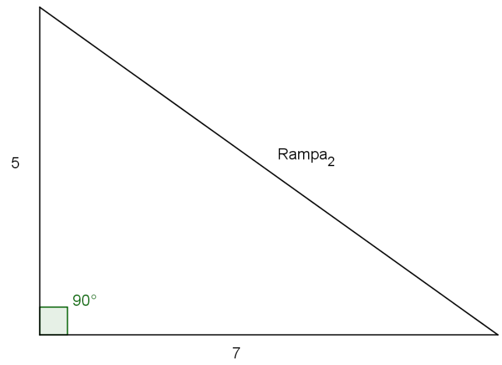
c) Calcule o valor da hipotenusa do triângulo encontrado.

d) No dia em que Camila realizou as medições, Eduardo não estava junto com ela, mas depois se interessou em saber qual seria o tamanho da sua sombra. Usando como referência o triângulo de Camila, ajude Eduardo a descobrir o tamanho de sua sombra, se ele tivesse medido ao mesmo tempo que Camila.

e) Porque é possível descobrir o tamanho da sombra de Eduardo usando como referência o triângulo de Camila? Justifique.

Questão 2: Analise as rampas abaixo:





A tangente de um ângulo está relacionada ao índice de subida de uma rampa, quanto maior o valor da tangente mais íngreme é a subida.

Vamos calcular os índices de subida de cada rampa?

a) Calcule o índice de subida da rampa 1.

b) Calcule o índice de subida da rampa 2.

c) Compare os valores obtidos e diga qual subida é mais íngreme.

Questão 3: Auto-avaliação: Relate brevemente sobre como sente a sua aprendizagem em matemática após essa sequência de atividades e como foi o seu preparo para realizar esse teste.

ANEXO D – Material para a atividade 5