UNIVERSIDADE FEDERAL DO RECÔNCAVO DA BAHIA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

MAXIMA ON ANDROID: UMA FERRAMENTA TECNOLÓGICA NA CONSTRUÇÃO DO GRÁFICO DE FUNÇÕES DE VARIÁVEL REAL

ALEXANDRO RIBEIRO DOS SANTOS

CRUZ DAS ALMAS - Bahia
2015

MAXIMA ON ANDROID: UMA FERRAMENTA TECNOLÓGICA NA CONSTRUÇÃO DO GRÁFICO DE FUNÇÕES DE VARIÁVEL REAL

ALEXANDRO RIBEIRO DOS SANTOS

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), coordenado pela Sociedade Brasileira de Matemática, ofertado pelo Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof^{o} Dr. Eleazar Geraldo Madriz Lozada

CRUZ DAS ALMAS - Bahia

2015

FICHA CATALOGRÁFICA

S237m

Santos, Alexandro Ribeiro dos.

Maxima on android: uma ferramenta tecnológica na construção do gráfico de funções de variável real / Alexandro Ribeiro dos Santos._ Cruz das Almas, BA, 2015.

61f.; il.

Orientador: Eleazar Geraldo Madriz Lozada.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas.

1.Matemática – Estudo e ensino. 2.Matemática - Funções de variáveis reais. 3.Softwares educacionais – Avaliação. I.Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas. II.Título.

CDD: 515

Ficha elaborada pela Biblioteca Universitária de Cruz das Almas - UFRB.

MAXIMA ON ANDROID: UMA FERRAMENTA TECNOLÓGICA NA CONSTRUÇÃO DO GRÁFICO DE FUNÇÕES DE VARIÁVEL REAL

ALEXANDRO RIBEIRO DOS SANTOS

Dissertação apresentada ao Programaa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), coordenado pela Sociedade Brasileira de Matemática, ofertado pelo Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Banca Examinadora:

Orientador: Eleazar
Prof° Dr. Eleazar Geraldo Madriz Lozada (UFRB)

Membro: Ana Carla Percontini da Paixão
Prof° Dr. Ana Carla Percontini da Paixão (UEFS)

Membro: Yuri Tavares dos Passos
Prof° MsC. Yuri Tavares dos Passos (UFRB)

Cruz das Almas, 16 de Dezembro de 2015.

À memória de minha mãe Gildete.

"As grandes ideias surgem da observação dos pequenos detalhes."
Augusto Cury

Agradecimentos

A Deus, por me permitir viver e me dar forças para isto.

Ao meu orientador, Prof^{o} Dr. Eleazar Geraldo Madriz Lozada pelas relevantes contribuições na execução e conclusão deste trabalho.

Aos professores da instituição, que contribuíram significativamente na minha formação.

A CAPES, ao IMPA e a SBM pela criação e manutenção do PROFMAT, que proporcionou-me a oportunidade de tornar-me um mestre.

Aos colegas e amigos da turma PROFMAT UFRB 2013, pelas resenhas, apoio nos momentos de dificuldades e pelos bons momentos que tivemos juntos. Em especial Patricia pelo incentivo e Simão e Leila, companheiros em tudo.

A minha família e a minha esposa Veraci, pelo apoio e compreensão depositada.

Enfim, a todos os que, de alguma maneira, contribuíram para a realização deste trabalho e que colaboraram para a construção de quem sou hoje. Os meus sinceros agradecimentos.

Principalmente a minha mãe (in memorian), pelo exemplo de pessoa, por tudo o que me ensinou, pela confiança em mim depositada. Amo demais a Senhora, obrigado por tudo.

Alexandro Ribeiro dos Santos

Resumo

O Presente trabalho ilustra as potencialidades do aplicativo Maxima on Android. Mostra que ele pode ser uma ferramenta de apoio para alunos e professores desde o ensino básico, calculando potências, valores numéricos de funções num ponto, trançando gráfico de funções simples, até mesmo para um aluno de início de graduação, pois calcula limites, derivadas, integrais entre outros. Foi dada uma atenção maior a construção de gráficos de funções reais, especialmente de funções polinomiais e funções racionais, assim, calculamos seus limites, suas derivadas e estudando detalhadamente seu comportamento gráfico.

Palavras-chave: Função Real, Gráfico, Polinomial, Racional, Maxima, Macsyma, Aplicativo, Android, Smartphone.

Abstract

The present work illustrates the potential of the Maxima on Android application. It shows that it can be a support tool for students and teachers from basic education calculating powers, numerical values of functions at a point, plotting simple functions, even for an undergraduate beginning student because it calculates limits, derivatives, integrals, etc. Greater attention was given to the construction of graphs of real functions, especially of polynomial functions and rational functions, thus, we calculate its limits, its derivatives and study in detail their behavior graphic.

Keywords: Real Function, Graphic, Polynomial, Rational, Maxima, Macsyma, Application, Android, Smartphone.

Sumário

Lista de Figuras

Introdução

Figura 1: Logo do Maxima e do Maxima on Android.

Os celulares "inteligentes" (Smartphones) são utilizados por uma parcela significativa da população brasileira e mundial, princialmente entre jovens.

Não há como negar que o celular, definitivamente, está presente em nossas vidas, mudando até mesmo o modo de nos comunicarmos. Usados de maneira adequada, estes celulares podem ser um instrumento de grande apoio a aprendizagem, até mesmo em salas de aula. Tendo em mãos um celular, e nele instalados aplicativos matemáticos adequados, as aulas tornam-se mais dinâmicas e os alunos aprendem intuitivamente e mais rápido, pois sentem-se motivados e instigados pela tecnologia que, geralmente, dominam bem.

Uma grande parte dos estudantes do ensino básico e da graduação tem dificuldade na aprendizagem dos conteúdos de matemática. Utilizando os aplicativos matemáticos adequados e de maneira correta, essas dificuldades são reduzidas, pois os estudantes podem conferir se as soluções de seus exercícios estão corretas, ou então conferir a solução passo a passo, caso não a tenha feito, fazendo depois um exercício análogo.

Pensando nisso, este trabalho apresenta-se como um material complementar a alunos do ensino básico e da graduação

No presente trabalho utilizamos o Maxima, um aplicativo livre, disponível para vários sistemas operacionais. Mais especificamente utilizaremos o Maxima on Android, disponível para smartphones com sistema operacional Android a partir da versão 4.2.2, cujo download e instalação estão disponíveis na loja virtual Google Play no link https://play.google.com/store/apps/details?id=jp.yhonda.

O aplicativo também está disponível para os sistemas operacionais mais conhecidos Windows, Linux e Macintosh. Os arquivos para download e instalação nesses sistemas estão disponíveis no link http://sourceforge.net/projects/maxima/files/.

No Android, a instalação do aplicativo requer 130 MB de memória do celular, 45 MB na memória interna e os outros 85 MB, o usuário escolhe onde quer alocar na primeira vez que utilizar o aplicativo, na memória interna ou no cartão de memória.

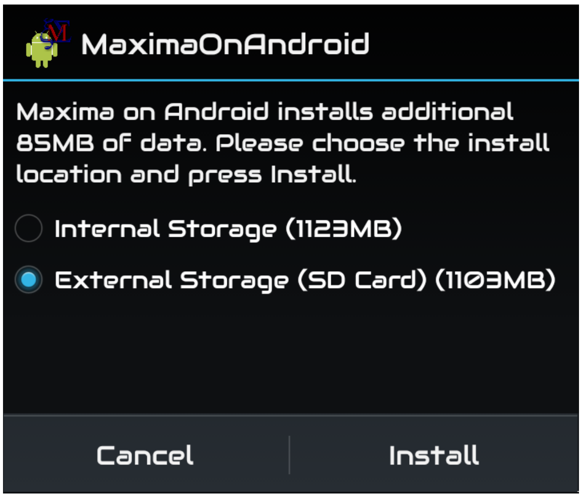

Figura 2: Utilizando o aplicativo pela primeira vez.

É recomendável que o leitor esteja sempre com um smartphone android com o aplicativo instalado ao lado para que, ao ler o texto, vá comprovando os comandos e aprendendo a usá-los de maneira completamente prática.

Maxima é uma linguagem de programação baseada em Lisp para a manipulação de expressões simbólicas e numéricas. Manipula expressões, equações, gráficos, cálculos de integração e diferenciação, matrizes, limites, vetores, etc. Pode obter resultados de forma simbólica, sendo um de seus pontos mais interessantes. Para se resolver, por exemplo, a equação $x^2 - 2 = 0$ um outro programa pode retornar como resultado $x = 1,4142$ ou $x = -1,4142$. Por mais que se aumente a precisão do resultado, sempre são perdidas infinitas casas decimais no processo. Utilizando a forma simbólica do Maxima, para a mesma equação, as raízes seriam $x = \sqrt{2}$ ou $x = -\sqrt{2}$. Neste caso, não há nenhuma perda por arredondamento ou truncamento de resultados.

As origens do Maxima estão no MIT (Instituto Tecnológico de Massachussets) a partir do ano de 1967 como uma parte do projeto MAC (Machine Aided Cognition - Cognição Auxiliada por Máquina). O software receberia o nome de Macsyma (MAC's SYmbolic MAnipulator - Manipulador Simbólico do MAC). Em 1982 uma copia foi entregue ao DOE (Department Of Energy - Departamento de Energia), e outra ao professor William F. Schelter, da Universidade do Texas. Esta primeira versão é conhecida como DOE-Macsyma, e posteriormente, o DOE concede a licença de exploração à empresa Symbolics, que segue desenvolvendo o projeto durante alguns anos. Em 1992 o software é adquirido pela empresa Macsyma Inc, e o programa iria perdendo fôlego progressivamente diante a presença no mercado de outros programas similares.

Em 1998, três anos antes de sua morte, o professor Schelter conseguiu do DOE permissão para distribuir a versão que estava a seu poder (conhecida como Maxima para diferenciá-la da versão comercial) sob a licença GNU-GPL (www.gnu.org). Com essa ação, mais pessoas começaram a observar o desenvolvimento do Maxima, justo no momento em que a versão comercial estava praticamente morta.

Atualmente, o projeto está sendo liderado por um grupo de desenvolvedores provenientes de vários países, tanto do meio acadêmico como do meio privado, assistidos e orientados por pessoas interessadas no Maxima e que mantêm um canal de comunicação através de uma lista de e-mails (maxima.sourceforge.net/maximalist.html). Como o Maxima é distribuído sob a licença GNU-GPL, tanto o código fonte como os manuais são de livre acesso através da página web do projeto maxima.sourceforge.net.

Figura 3: William Frederick Schelter, 1947-2001.

O presente trabalho segue assim apresentado: O capítulo 1 trata dos conceitos matemáticos básicos como função, limite, continuidade e derivada. O capítulo 2, trata de regras e comandos básicos para definição de variáveis, listas, equações, inequações, funções, limites e derivadas no aplicativo Maxima on Android. No capítulo 3 é feito o estudo do gráfico de funções de variável Real utilizando o aplicativo Maxima on Android. No capítulo 4, como atividade, é feito o tratamento da Função Polinomial e da Função Racional. No ultimo capítulo, são feitas algumas conclusões e sugestões a respeito do aplicativo destacando suas potencialidades.

Capítulo 1

Conceitos Matemáticos Básicos

NESTE capítulo são expostos os conceitos básicos de função, limite, continuidade e derivada. As demonstrações de alguns dos teoremas encontram-se no Anexo deste trabalho.

1.1 Função Real de Variável Real

O conceito de função é um dos mais importantes de toda a matemática, e surge, intuitivamente, toda vez que associamos a variação de uma grandeza em relação a variação de outra grandeza. Assim, quando associamos a medida r do raio da circunferência com o seu comprimento C, temos a bem conhecida equação $C = 2\pi r$, ou seja, o comprimento da circunferência depende da medida do seu raio, ou ainda, o comprimento da circunferência está em função da medida do seu raio. Observemos que para cada valor assumido por r, temos um único valor para C.

Definição 1.1. *Sejam os conjuntos $A, B \subset \mathbb{R}$. Uma relação f de A em B recebe o nome de aplicação de A em B ou função definida em A com valores em B se, e somente se, para todo $x \in A$ existe um único $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$.*

Geralmente existe uma sentença aberta $y = f(x)$ que expressa a lei mediante a qual, dado $x \in A$, determina-se $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$, então $f = \{(x, y) | x \in A,\ y \in B\ \ e\ \ y = f(x)\}$. Isto significa que, dados A e B, a função f tem lei de correspondência $y = f(x)$. Para indicar a função f, definida em A com valores em B , segundo a lei de correspondência $y = f(x)$, utiliza-se uma das notações:

$f : A \to$ B tal que $y = f(x)$

ou

$f : A \to B$

$x \mapsto f(x)$

O *Domínio* de f, denotado D_f, é o conjunto dos elementos $x \in A$ para os quais existe $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$. Como, pela definição de função todo elemento de A tem essa propriedade, temos que

$$D_f = A$$

O conjunto B é chamado de *Contradomínio* de f.

A *Imagem* de f, denotada Im_f, é o conjunto dos elementos $y \in B$ para os quais existe $x \in A$ tal que $(x, y) \in f$. Portanto

$$Im_f \subset B$$

Dizemos que x é a *variável independente* enquanto que y é a *variável dependente*, assim no nosso exemplo da circunferencia, r é a variável independente enquanto que C é a variável dependente.

As funções mais simples são as Funções Potências de x com expoentes inteiros não-negativos

$$f(x) = 1,\ f(x) = x,\ f(x) = x^2,\ f(x) = x^3,\ f(x) = x^4,\ ...,\ f(x) = x^n,\ ...$$

Se uma quantidade finita delas são multiplicada por constantes e os resultados são somados, obtemos a Função Polinomial

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + ... + a_nx^n$$

Definição 1.2. *A função* $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + ... + a_nx^n$$

onde $a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$ *são os coeficientes e n inteiro não-negativo, é chamada de Função Polinomial. Se* $a_n \neq 0$ *o grau de* $p(x)$ *é n.*

Observemos que a partir do Algoritmo da Divisão para Polinômios é possível considerar a existência de uma função que seja o quociente entre duas funções polinomiais p e q, isto motiva a seguinte definição:

Definição 1.3. *Sejam as funções polinomiais* $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + ... + a_nx^n$ *e* $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + ... + b_mx^m$, *com* $a_0, a_1, ..., a_n, b_0, b_1, ..., b_m \in \mathbb{R}$ *e* n, m *inteiros não-negativos. A função*

$$R(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

é chamada de Função Racional.

A partir da Definição 1.3 podemos observar que o Domínio de uma Função Racional é o conjunto dos Números Reais excluindo aqueles x tais que $q(x) = 0$.

Exemplo 1.1. *A função*

$$f(x) = \frac{x}{1 + x^2}$$

é racional e seu gráfico está representado na Figura 1.1

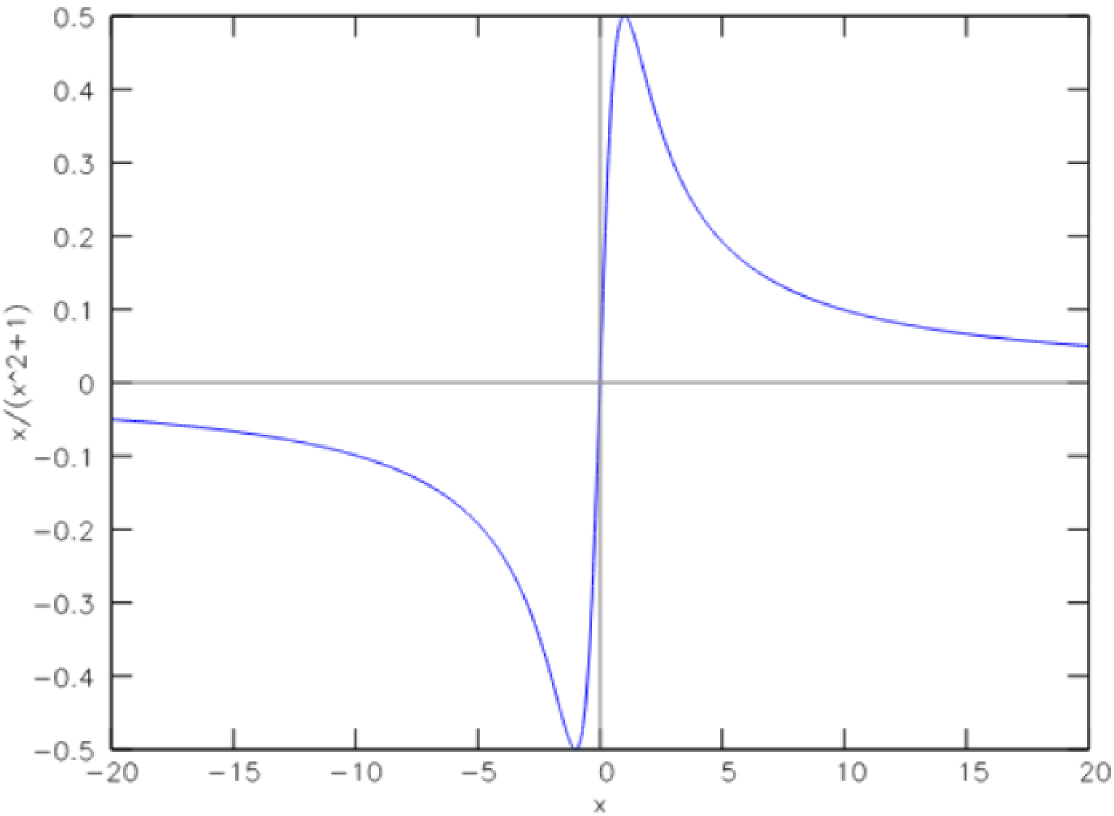

Figura 1.1: Grafico de uma Função Racional

No Capítulo 3 detalharemos como fazer o gráfico de uma função.

1.2 Limite de Funções

O conceito de limite é fundamental em todo o Cálculo diferencial, um campo da matemática que iniciou-se no século XVII com os trabalhos de Newton e Leibnitz que visava resolver problemas da Mecânica e da Geometria.

O conceito de limite é usado para descrever o comportamento de uma função à medida que o seu argumento se aproxima de um determinado valor, assim como o comportamento de uma sequência de números reais, à medida que o índice (da sequência) vai crescendo (tende para infinito). Os limites são usados no cálculo diferencial e em outros ramos da análise matemática para definir derivadas e a continuidade de funções.

Definição 1.4. *[Limite de Funções]*

Sejam a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$. Dizemos que limite de $f(x)$ quando x tende a a será L, se, e somente se dado $\epsilon > 0$ qualquer, existe um $\delta > 0$, tal que se $0 < |x - a| < \delta$ então $|f(x) - L| < \epsilon$.

Simbolicamente:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \ \ | \ \ 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

Se o limite de uma função existe (é igual ao número real L), ele é único. Vejamos isso no Teorema a seguir, cuja demonstração está no Anexo.

Teorema 1.1. *[Unicidade do Limite]*

Sejam a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$. Se $\lim_{x \to a} f(x) = L_1$ e $\lim_{x \to a} f(x) = L_2$ então $L_1 = L_2$

Demonstração.

Ver Anexo

Apresentaremos agora algumas propriedades básicas dos limites que serão úteis no desenvolvimento deste trabalho.

Teorema 1.2. *Se $a, m, n \in \mathbb{R}$, então:*

$$\lim_{x \to a} (mx + n) = ma + n$$

Demonstração. Caso 1: $m \neq 0$

Pela Definição 1.4, dado $\epsilon > 0$, devemos mostrar que existe $\delta > 0$, tal que

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |(mx + n) - (ma + n)| < \epsilon$$

assim,

$$|(mx + n) - (ma + n)| = |mx - ma| = |m| \cdot |x - a| < \epsilon \Rightarrow |x - a| < \frac{\epsilon}{|m|}$$

Tomando $\delta = \dfrac{\epsilon}{|m|}$, temos

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |(mx + n) - (ma + n)| = |m||x - a| < |m| \cdot \frac{\epsilon}{|m|}$$

portanto $\lim\limits_{x \to a}(mx + n) = ma + n$

Caso 2: $m = 0$

Se $m = 0$ então $|(mx + n) - (ma + n)| = 0 \;\; \forall x$.

Logo, tomando qualquer $\delta > 0$, a definição de limite é satisfeita. Portanto

$\lim\limits_{x \to a}(mx + n) = ma + n, \quad \forall x \in R$ □

As propriedades a seguir simplificam o cálculo dos limites, pois, conhecendo-as, não é necessário recorrer sempre a definição de limite. Suas demonstrações encontram-se no Anexo.

Teorema 1.3. *[Propriedades Operatórias dos Limites]*

Sejam f e g funções reais e $a \in \mathbb{R}$. Se $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to a} g(x)$ existem, então para todo $k \in \mathbb{R}$ e para todo $n \in \mathbb{N}$ temos:

(1) $\lim\limits_{x \to a} k = k$

(2) $\lim\limits_{x \to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \pm \lim\limits_{x \to a} g(x)$

(3) $\lim\limits_{x \to a}[k \cdot f(x)] = k \cdot \lim\limits_{x \to a} f(x)$

(4) $\lim\limits_{x \to a}[f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} g(x)$

(5) $\lim\limits_{x \to a} \left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$ *, se* $\lim\limits_{x \to a} g(x) \neq a$

(6) $\lim_{x \to a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \to a} f(x)\right]^n$

(7) $\lim_{x \to a} \left[\sqrt[n]{f(x)}\right] = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)}$

Algumas funções só apresentam limite num determinado ponto se limitarmos à direita ou à esquerda desse ponto. Assim, consideremos a função $f(x) = \sqrt{x-2}$. Podemos notar que todos os valores de x menores que 2 induzem um valor indefinido na função, esta indefinição também se refletirá nos limites dos valores da função neste intervalo de indefinição. Portanto não faz sentido falar de limites absolutos quando os valores da função estão indefinidos para certa faixa do domínio. Para analisar os valores válidos da função limitamos o seu domínio e consequentemente limitamos os seus limites; quando temos um meio de definir o intervalo de exclusão dos números, podemos também, excluir certa faixa dos limites. No exemplo acima analisamos o que acontece com $f(x)$ quando x se aproxima de 2 pela direita e pela esquerda.

Definição 1.5. *[Limites Laterais]*

(i) *Seja f uma função definida para todo número em algum intervalo aberto (a, c). Então **o limite de** $f(x)$ **quando** x **tende a** a **pela direita será** L, se, e somente se dado $\epsilon > 0$ qualquer, existe um $\delta > 0$, tal que se $0 < x - a < \delta$ então $|f(x) - L| < \epsilon$.*
Simbolicamente:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \ \ | \quad 0 < x - a < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

(ii) *Seja f uma função definida para todo número em algum intervalo aberto (d, a). Então **o limite de** $f(x)$ **quando** x **tende a** a **pela esquerda será** L, se, e somente se dado $\epsilon > 0$ qualquer, existe um $\delta > 0$, tal que se $-\delta < x - a < 0$ então $|f(x) - L| < \epsilon$.*
Simbolicamente:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \ \ | \ \ -\delta < x - a < 0 \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

Para que exista um valor de limite, é necessário que ele seja independente do caminho tomado para que o valor da variável independente seja alcançado. Isso é verdade quando os dois limites laterais coincidem. Caso contrário, o limite não existe.

Teorema 1.4. *[Limite Lateral]*

Seja f uma função definida em um intervalo aberto contendo a, exceto, possivelmente o próprio a. Então $\lim_{x \to a} f(x) = L$ se, e somente se $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$ e $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$

Demonstração.

Ver Anexo

Veremos nesta seção os Limites no Infinito

Definição 1.6. *[Limites no Infinito]*

(i) *Seja f uma função definida em um intervalo aberto $(a, +\infty)$, O limite de $f(x)$ quando x cresce indefinidamente, é L quando é satisfeita a seguinte condição:*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists N > 0 \mid x > N \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

(ii) *Seja f uma função definida em um intervalo aberto $(-\infty, a)$, O limite de $f(x)$ quando x decresce indefinidamente, é L quando é satisfeita a seguinte condição:*

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists N < 0 \mid x < N \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

Teorema 1.5. *Se n é um inteiro positivo então:*

(i) $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

(ii) $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

Demonstração. Provemos a parte (i), o item (ii) é feito de modo análogo.

Devemos provar, pela Definição 1.6(i) que para todo $\epsilon > 0$ existe um número N, tal que:

$$x > N \Rightarrow \left| \frac{1}{x^n} - 0 \right| < \epsilon$$

Para que isso seja valido tomamos $N = \left(\frac{1}{\epsilon}\right)^{\frac{1}{n}}$.

Assim, se $N = \left(\frac{1}{\epsilon}\right)^{\frac{1}{n}}$ e $x > N$, então $\left|\dfrac{1}{x^n} - 0\right| < \epsilon$, assim, $|x|^n > \frac{1}{\epsilon}$ e $n > 0$, então $|x| > \left(\frac{1}{\epsilon}\right)^{\frac{1}{n}}$, o que prova (i) $\square$

Veremos nesta seção os Limites Infinitos

Definição 1.7. *[Limites Infinitos]*

(i) Seja f uma função definida em um intervalo aberto que contenha a, exceto, possivelmente o próprio a. Quando x tende a a, $f(x)$ cresce indefinidamente , se é satisfeita a seguinte condição:

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \delta > 0 \mid 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > M$$

(ii) Seja f uma função definida em um intervalo aberto que contenha a, exceto, possivelmente o próprio a. Quando x tende a a, $f(x)$ decresce indefinidamente , se é satisfeita a seguinte condição:

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M < 0, \exists \delta > 0 \mid 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < M$$

Teorema 1.6. *Se n é um inteiro positivo então:*

(i) $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$

(ii) $\displaystyle\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} -\infty, & se \quad n \quad impar \\ +\infty, & se \quad n \quad par \end{cases}$

Demonstração. Provemos a parte (i), o item (ii) é feito de modo análogo.

Devemos provar, pela Definição 1.7(i) que para todo $M > 0$ existe um número $\delta > 0$, tal que:

$0 < x < \delta \Rightarrow \dfrac{1}{x^n} > M$

Para que isso seja valido tomemos $\delta = \left(\frac{1}{M}\right)^{\frac{1}{n}}$, assim, se $0 < x < \delta \Rightarrow \dfrac{1}{x^n} > M$ $\square$

Teorema 1.7. *[Limite da Função Polinomial]*

Seja $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + ... + a_nx^n$$

(i) $\lim_{x \to a} p(x) = p(a)$

(ii) $\lim_{x \to \pm\infty} p(x) = \lim_{x \to \pm\infty} a_nx^n$

Demonstração. (i) Segue diretamente pela generalização do Teorema 1.2

(ii) $\lim_{x \to \pm\infty} p(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + ... + a_nx^n \right) =$
$\lim_{x \to \pm\infty} \left[a_nx^n \cdot \left(\frac{a_0}{a_n} \cdot \frac{1}{x^n} + \frac{a_1}{a_n} \cdot \frac{1}{x^{1-n}} + \cdots + 1 \right) \right]$
Aplicando as Propriedades Operatórias (Teorema 1.3) e o Teorema 1.5, segue o resultado. □

Corolário 1.1. *[Limite da Função Racional]*

Sejam as funções $p, q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tais que

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n \quad e \quad q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + ... + b_mx^m$$

e R a função $R(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$, com $q(x) \neq 0$:

(i) $\lim_{x \to a} R(x) = \dfrac{p(a)}{q(a)}$

(ii) $\lim_{x \to \pm\infty} R(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \dfrac{a_nx^n}{b_mx^m}$

A demonstração Segue diretamente do Teorema 1.7

1.3 Continuidade das Funções

A definição matemática de continuidade corresponde estreitamente ao significado da palavra *continuidade* na linguagem do dia-a-dia. Um processo contínuo é aquele que ocorre gradualmente, sem interrupções ou mudanças abruptas (STEWART).

O conceito básico de continuidade representa a expressão da isenção de quebras na regularidade da forma da função, quando a apresentamos sob a forma gráfica. Devemos ter em mente que a função contínua em um intervalo do seu domínio é suavemente descritível, cada valor é precedido de outro menor ou maior, mas com uma discreta variação (JERÓNIMO).

Definição 1.8. *Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua em $a \in \mathbb{R}$ se as seguintes condições forem satisfeitas:*

(i) $f(a)$ *está definida, isto é, a está no* D_f*;*

(ii) $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ *existe;*

(iii) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

Se ao menos uma dessas condições não forem verificadas em a, a função f será descontinua em a.

Teorema 1.8. *[Propriedades Operatórias das Funções Continuas]*

Sejam f e g funções reais e $a \in \mathbb{R}$. Se f e g são funções contínuas em a então são continuas em a as funções:

(1) $f + g$

(2) $f - g$

(3) $f \cdot g$

(4) $\dfrac{f}{g}$, *se* $g(a) \neq 0$

Demonstrações.
Ver Anexo

Teorema 1.9. *Seja $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma Função Polinomial, então p é continua em todo seu Domínio*

Demonstração. :

Pelo Teorema 1.7 (i) $\lim_{x \to a} p(x) = p(a)$, logo p é continua, para todos os valores de $a \in \mathbb{R}$. □

Corolário 1.2. *Sejam p e q duas Funções Polinomiais, a Função Racional R, definida por*

$$R(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

é continua em todo $a \in \mathbb{R}$, tal que $q(a) \neq 0$.

A Demonstração segue diretamente do Teorema 1.9

1.4 Derivada

Na Física a taxa de variação da posição de um objeto com relação ao tempo, isto é, sua velocidade, é estudada a partir do conceito de derivada de uma função. Na Biologia a taxa de crescimento de uma colônia de bactérias é uma aplicação da derivada. Também, na Economia, a taxa de variação do lucro em função da quantidade de mão de obra,usa-se o conceito de derivada .

Do que foi visto anteriormente podemos afirmar que o conceito derivada de uma função tem um papel importante em diversos áreas do conhecimento motivando assim sua abordagem formal neste trabalho.

Definição 1.9. *[Derivada de uma Função num Ponto]*

Seja f uma função real e $x_o \in D_f$. O limite

$$\lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$$

se existir e for finito denomina-se derivada de f no ponto x_o e é indicado por $f'(x_o)$. Assim

$$f'(x_o) = \lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$$

Fazendo $\Delta x = x - x_o$, podemos reescrever a derivada no ponto como

$$f'(x_o) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_o + \Delta x) - f(x_o)}{\Delta x}$$

Se f admite derivada em x_o dizemos que f é derivável (ou diferenciável) em x_o. Dizemos que f é derivável no intervalo $A \subset D_f$ se f for derivável em todo $x_o \in A$.

Dizemos que f é uma função derivável se f for derivável em todos os pontos do seu domínio.

Definição 1.10. *[Função Derivada]*

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável em D_f . Definimos a Função Derivada de f, e a denotaremos por $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, a função definida como

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

para todo $x \in D_f$.

Ao usarmos a notação tradicional $y = f(x)$ para indicar que a variável independente é x enquanto y é a variável dependente, podemos usar outras notações para a derivada:

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}[f]$$

A notação $\dfrac{dy}{dx}$ foi introduzida por Leibnitz, nela, caso se queira calcular a derivada num ponto, utilizamos $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=x_o}$

Se f é uma função derivável e f' também for derivável, então a sua derivada é chamada derivada segunda de f e é representada por $f''(x)$ (lê-se f-duas linhas de x). Se f'' é uma função derivável, sua derivada, representada por $f'''(x)$, é chamada derivada terceira de f. A derivada de ordem n ou n-ésima derivada de f, representada por $f^{(n)}(x)$, é obtida derivando-se a derivada de ordem $n-1$ de f.

Como o cálculo da Derivada a partir de sua definição exige um alto nível de formalidade matemática, enunciaremos a seguir, um teorema que apresenta as propriedades que permitem o calculo da Derivada de algumas funções elementares:

Teorema 1.10. *[Regras de Derivação]*

Sejam f, g e h funções reais, deriváveis, então:

(1) $f(x) = k,\ k \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(x) = 0$ *(Derivada da Constante)*

(2) $h(x) = f(x) + g(x) \Rightarrow h'(x) = f'(x) + g'(x)$ *(Derivada da Soma)*

(3) $f(x) = x^n,\ n \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$ *(Derivada da Potência)*

(4) $h(x) = f(x) \cdot g(x) \Rightarrow h'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$ *(Derivada da Produto)*

Caso Particular: $h(x) = k \cdot f(x),\ k \in \mathbb{R} \Rightarrow h'(x) = k \cdot f'(x)$

(5) $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)},\ g(x) \neq 0 \Rightarrow h'(x) = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$ *(Derivada do Quociente)*

Demonstração.

Ver Anexo

Usando o Teorema 1.10 podemos calcular a Derivada da Função Polinomial e da Função Racional.

Corolário 1.3. *[Derivada da Função Polinomial]*

Seja $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + ... + a_nx^n$$

Então:

$$p'(x) = a_1 + 2 \cdot a_2 \cdot x + 3 \cdot a_3 \cdot x^2 + 4 \cdot a_4 \cdot x^3 + ... + n \cdot a_n \cdot x^{n-1}$$

A Demonstração segue diretamente do Teorema 1.10 itens (1), (2), (3) e (4).

Corolário 1.4. *[Derivada da Função Racional]*

Sejam as Funções Polinomias $p, q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, e a função $R(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$, com $q(x) \neq 0$, então:

$$R'(x) = \frac{p'(x) \cdot q(x) - p(x) \cdot q'(x)}{[q(x)]^2}$$

A demonstração Segue diretamente do Teorema 1.10 item (5)

Capítulo 2

Regras Básicas no Maxima on Android

NESTE capítulo é exposto um breve tutorial sobre o aplicativo Maxima on Android, suas principais regras e seus comandos básicos como definição de variáveis, listas, equações e funções.

A figura 2.1 mostra a tela inicial do aplicativo informando sua versão, compatibilidade, autor, página web do projeto, sua licença livre e uma dedicatória a Willian Schelter, mantenedor do projeto durante muito tempo. É possível, aumentar ou diminuir o tamanho do texto exibido, com o movimento padrão de "pinça" com dois dedos pra fora ou pra dentro (isso afetará também as entradas e resultados).

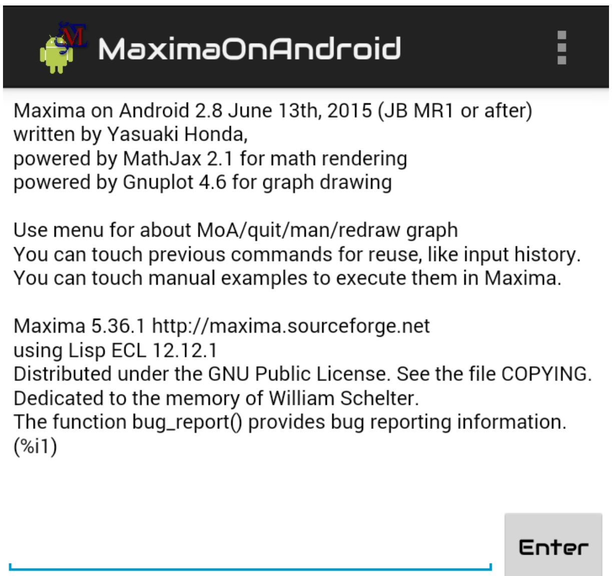

Figura 2.1: Tela Inicial do Maxima on Android.

2.1 Variáveis, Símbolos e Operações

O Maxima on Android recebe comando ou valores que devem ser digitados na linha (%in), que é o campo de entrada, na parte de baixo do aplicativo. Em (%in), "i" significa input (do inglês: entrada), e "n" é um número natural equivalente a ordem da linha. Ao tocar em *enter* este comando é executado, aparecendo a esquerda da tela os comando digitados na linha (%in) e logo abaixo, o resultado da operação. Caso não queira que um resultado seja exibido, basta por o simbolo "$" no final do comando.

Pode-se atribuir valor a uma variável no aplicativo, através do comando "dois pontos" (:). Logo x:3, significa que x vale 3 ou x = 3. Quando se quer inserir vários comandos ao mesmo tempo, utiliza-se o comando "pontos e virgula" (;). Por exemplo, x:3 ; y:-1 ; z:1/2 , informa ao programa que as variáveis x, y e z valem, respectivamente 3, -1 e $\frac{1}{2}$. Parênteses tem a mesma função clássica. Assim podemos fazer operações usando os simbolos da Tabela 2.1 com as variáveis x, y e z atribuídas acima (Figura 2.2).

O comando kill (all) é utilizado para limpar todas as variáveis já atribuídas anteriormente, assim é conveniente utilizá-lo após atribuir valor a várias variáveis, evitando assim futuros erros na declaração de variáveis. O mesmo vale para listas, equações e funções. É utilizado também para voltar o aplicativo ao seu estágio inicial, (ou seja, para linha 1 - %i1).

Simbolo/Comando	Operação/Significado
+	Adição
-	Subtração
*	Multiplicação
/	Divisão
** ou ^	Potenciação
%pi	Número π
%e	Número de Euller
%i	Unidade Imaginária

Tabela 2.1: Operações básicas no Maxima.

```
(%i1) x:3 ; y:-1 ; z:1/2;
```

$$3$$

$$-1$$

$$\frac{1}{2}$$

```
(%i4) x+y+z;
```

$$\frac{5}{2}$$

```
(%i5) z**3;
```

$$\frac{1}{8}$$

```
(%i6) y^2+12/x;
```

$$5$$

```
(%i7) (2*x)**y;
```

$$\frac{1}{6}$$

Figura 2.2: Atribuindo valores as variáveis e realizando alguns cálculos.

A raiz quadrada é calculada com a sintaxe "sqrt(<número>)". Para calcular raízes com demais índices, utilizamos a propriedade da potenciação:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

Assim para calcular $\sqrt[3]{8}$, digitamos no aplicativo com o comando 8**(1/3).

Tudo que for escrito entre /* e */ é considerado comentário. Os comentários são ignorados na execução do aplicativo e servem para orientar o leitor/usuário durante a utilização do aplicativo.

Na Figura 2.3 temos os cálculos de: $\sqrt{49}$, $\sqrt[3]{8}$ e $\sqrt[5]{-243}$

(%i1) sqrt(49) /* raiz quadrada de 49 */;

$$7$$

(%i2) 8**(1/3) /* raiz cúbica de 8 */;

$$2$$

(%i3) (-243)**(1/5) /* raiz quinta de -243 */;

$$-3$$

Figura 2.3: Calculando raízes exatas.

Um dos destaques do aplicativo é o cálculo simbólico, mas, caso o usuário queira uma resposta numérica basta usar uma das sintaxes:

I. *<expressão>, numer*

II. *float (<expresão>)*

O símbolo "%" sozinho é usado sempre que o usuário queira retomar a última saída, por exemplo, o comando "%, numer", transforma em numérica a última entrada simbólica. Caso o usuário queira retomar uma saída anterior qualquer basta usar o comando "%in"onde n é o número da linha a qual queira retomar (Figura 2.4).

Uma outra maneira de retomar uma entrada anterior qualquer é, simplesmente, tocando sobre ela. Assim na Figura 2.4 caso se queira retomar a entrada $\sqrt{20}$ (linha 1) basta tocar na tela sobre esta linha, que aparecerá novamente do campo de entrada de comandos. Este é um mecanismo muito útil de histórico de comandos.

Na Figura 2.4 temos os cálculos de: $\sqrt{20}$ e $\sqrt[5]{64}$ simbolicamente e numericamente pelos comandos *numer* e *float* .

(%i1) sqrt(20) /* raiz quadrada de 20 */;

$$2\sqrt{5}$$

(%i2) %, numer /* raiz quadrada de 20 numericamente (aproximada) */;

$$4.47213595499958$$

(%i3) 64**(1/5) /* raiz quinta de 64 */;

$$2^{\frac{6}{5}}$$

(%i4) float (64**(1/5)) /* raiz quinta de 64 numericamente */;

$$2.29739670999407$$

(%i5) float (%i1) /* raiz quadrada de 20 numericamente */;

$$4.47213595499958$$

Figura 2.4: Calculando Raízes não exatas com resultado simbólico e numérico

Em cálculo numérico, por vezes, os resultados e os cálculos efetuados necessitam ser expressos com um determinado número de casas decimais e/ou algarismos significativos. Podemos estabelecer essa precisão atribuindo um valor à variável interna global **fpprec (float point precision)**, que por padrão, no Máxima é 16.

Por exemplo, se quisermos obter o valor das constantes π e e com 30 casas decimais fazemos: (Figura 2.5)

(%i1) fpprec:30$
(%i2) bfloat (%pi);

$$3.14159265358979323846264338328_B \times 10^0$$

(%i3) bfloat (%e);

$$2.71828182845904523536028747135_B \times 10^0$$

Figura 2.5: Escolhendo o número de casas decimais

2.2 Listas

Uma lista no Maxima on Android é uma coleção finita de tipos de dados, escritos entre colchetes e com seus elementos separados por vírgula.

Na Figura 2.6(a) há um exemplo de lista, a qual atribuímos o nome ListEx, e algumas operações que podem ser feitas sobre a mesma. Os elementos são indexados a partir do número 1. Para manipular um elemento de uma lista usa-se "nomedalista[n]", onde n representa o numero do elemento na lista a ser processado (Figura 2.6(b)).

(%i1) ListEx: [5, 3/2, sqrt(3) , sin(%pi/5)] /*lista*/;

$$\left[5, \frac{3}{2}, \sqrt{3}, \sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\right]$$

(%i2) 2*ListEx /*o dobro dos elementos*/;

$$\left[10, 3, 2\sqrt{3}, 2\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\right]$$

(%i3) ListEx**2 /*o quadrado dos elementos*/;

$$\left[25, \frac{9}{4}, 3, \sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right)\right]$$

(%i4) %, numer /*lista anterior na forma numérica*/;

$$[25, 2.25, 3, 0.3454915028125263]$$

(a)

(%i5) ListEx[1] /*primeiro elemento da lista*/;

$$5$$

(%i6) ListEx[1] + ListEx[2] /*soma do primeiro e do segundo elemento*/;

$$\frac{13}{2}$$

(b)

Figura 2.6: Trabalhando com listas

2.3 Equações

No Maxima on Android uma equação é definida usando o operador "=" (igual) que separa os membros da equação.

Podemos somar ou multiplicar expressões a ambos os membros de uma equação. Para agilizar a digitação podemos atribuir um nome a equação, desta forma não é necessário digitar a equação varias vezes. O comando "*expand*" apresenta uma simplificação da equação (Figura 2.7).

(%i1) eq1: (x**2+4)/3=2*x**3-4;

$$\frac{x^2+4}{3}=2\,x^3-4$$

(%i2) (3/2)*eq1 /*multiplicando ambos os membros da equação*/;

$$\frac{x^2+4}{2}=\frac{3\left(2\,x^3-4\right)}{2}$$

(%i3) expand (%) /*simplificando a equação anterior*/;

$$\frac{x^2}{2}+2=3\,x^3-6$$

Figura 2.7: Simplificando equações

Para resolver uma equação utiliza-se o comando "*solve*" com uma das sintaxe:

∗ "solve(<equação>)" para equações de uma incógnita;

∗ "solve(<equação>, <variável>)" para equações de mais de uma incógnita.

No campo <equação> digitamos a equação desejada e no campo <variável> digitamos a variável a ser isolada.

Na Figura 2.8 resolvemos algumas equações do 1º e 2º graus e equações literais.

(%i1) eq2:(5*x+4)/2=7*x/3;

$$\frac{5\,x+4}{2}=\frac{7\,x}{3}$$

(%i2) solve (eq2);

$$[x=-12]$$

(%i3) eq3: x**2-6*x+9=0;

$$x^2-6\,x+9=0$$

(%i4) solve (eq3);

$$[x=3]$$

(%i5) eq4: x**2+x-2=0;

$$x^2+x-2=0$$

(%i6) solve (eq4);

$$[x=1,x=-2]$$

(%i7) eq5: x**2-2*x+5=0;

$$x^2-2\,x+5=0$$

(%i8) solve (eq5);

$$[x=1-2\,i,x=2\,i+1]$$

(%i9) eq6: (p+1)/2=3-q;

$$\frac{p+1}{2}=3-q$$

(%i10) solve (eq6, p);

$$[p=5-2\,q]$$

(%i11) solve (eq6, q);

$$\left[q=-\frac{p-5}{2}\right]$$

Figura 2.8: Resolvendo equações

2.4 Inequações

O Maxima on Android possui um algoritmo que permite o tratamento para a resolução simbólica de inequações. O mesmo pode ser ativado digitando *load(fourier_elim)* [1], para depois utilizarmos a sintaxe

fourier_elim ([<lista de inequações>],[<variável>])

Onde devemos preencher o campo <lista de inequações> com uma ou mais inequações separadas por virgulas e no campo <variável> a variável a ser isolada.

Na Figura 2.9 é apresentado o fourier_elim para resolver a inequação $3x^2 - 6x > 0$, encontrando assim a solução $x < 0$ ou $x > 2$.

```
(%i1) load (Fourier_elim);
/storage/emulated/0/Android/data/jp.yhonda/files/maxima-5.36.1/share/fourier_elim/Fourier_elim.lisp

(%i2) fourier_elim ([3*x**2-6*x>0], [x] );
```

$$[2 < x] \vee [x < 0]$$

Figura 2.9: Resolvendo inequações

2.5 Funções

No Maxima on Android uma função de uma ou mais variável é definida utilizando o operador ":=" . Assim escrevendo f(x) := 2*x+3 define-se a função $f(x) = 2x + 3$. Definida a função, para calcular as imagens digitamos f(1), f(2), f(-10), f(3/5), etc

[1]O Módulo para resolver inequações recebe o nome de fourier_elim, porque usa o Método de Eliminação de Fourier-Motzkin para resolução sistemas de inequações lineares. Para saber mais sobre o Método podemos consultar a dissertação de mestrado de Monticeli, intitulada *Um estudo sobre sistemas de inequações lineares*, disponível em <http://www.bibliotecadigital.unicamp.br/document/?view=000479616>.

Determinamos a(s) raiz(es) de uma função de maneira análoga a resolução de uma equação, utilizando-se o comando "*solve*" com a sintaxe:

∗ "solve(<função> = 0)" para função de uma variável;

∗ "solve(<função> = 0, <variável>)" para funções de mais de uma variável.

No campo <função> digitamos a função desejada e no campo <variável> digitamos a variável a ser isolada.

Nas Figuras 2.10 e 2.11 calculamos algumas imagens e as raízes das funções $f(x) = 2x + 3$ e $g(x) = x^2 - 4y$, respectivamente.

```
(%i1) f(x) := 2*x+3 $
(%i2) imagens:[f(0), f(2), f(-1), f(5/2), f(%pi) ];
```

$$[3, 7, 1, 8, 2\pi + 3]$$

```
(%i3) solve (f(x)=0);
```

$$\left[x = -\frac{3}{2}\right]$$

Figura 2.10: Imagens e raiz de função de uma variável

```
(%i1) g(x,y) := x**2-4*y;
```

$$g(x, y) := x^2 - 4\,y$$

```
(%i2) g(2,1);
```

$$0$$

```
(%i3) g(1,-1);
```

$$5$$

```
(%i4) solve (g(x,y), x);
```

$$\left[x = -2\,\sqrt{y}, x = 2\,\sqrt{y}\right]$$

```
(%i5) solve (g(x,y), y);
```

$$\left[y = \frac{x^2}{4}\right]$$

Figura 2.11: Imagens e raiz de função de duas variáveis

2.6 Limite de Funções

No Maxima on Android calculamos o limite de funções com o comando "*limit*". Sejam f a função a qual desejamos calcular o limte, e a o valor para o qual a variável x tende. A seguir apresentamos as sintaxes dos diferentes tipos de limites

(i) $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ $\quad$ $limit\,(f(x), x, a)$

(ii) $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ $\quad$ $limit\,(f(x), x, a, minus)$

(iii) $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ $\quad$ $limit\,(f(x), x, a, plus)$

(iv) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ $\quad$ $limit\,(f(x), x, inf)$

(v) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ $\quad$ $limit\,(f(x), x, minf)$

Vejamos agora como usar o Maxima on Android para calcular os seguintes limites:

$$\lim_{x \to -2} f(x) = \frac{x^3 - 3x + 2}{x^2 - 4} \quad e \quad \lim_{x \to 1} f(x) = \frac{1}{x-1}$$

observe que o segundo limite não existe.

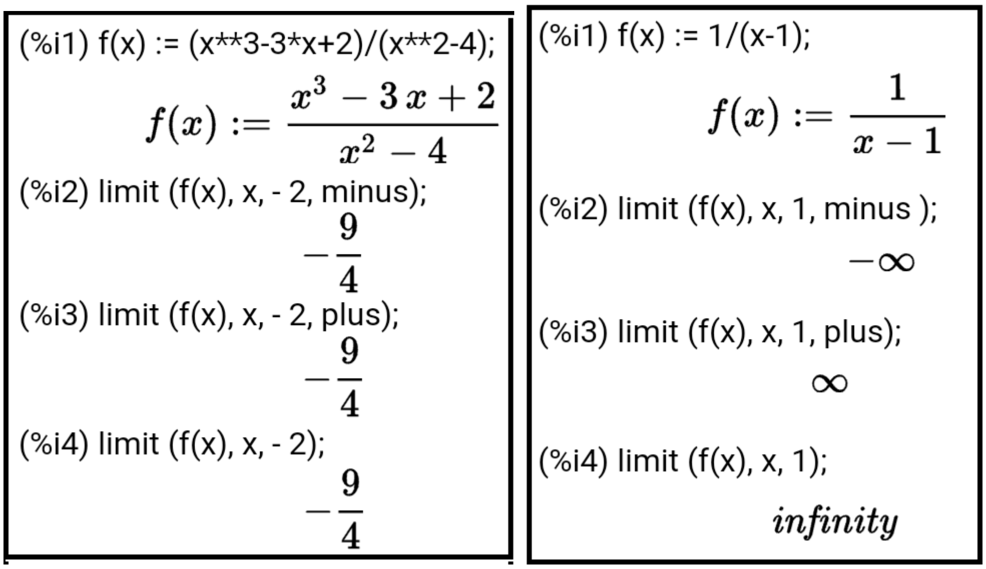

Figura 2.12: Cálculo de Limites

Como podemos observar na Figura 2.12 o Maxima on Android nos permite calcular limites finitos, limites que tendem ao infinito ($-\infty$ e ∞) e ainda, limites que não existe, este último representado por "infinity"

2.7 Derivadas

No Maxima on Android a derivada de uma função é calculada simbolicamente com o comando "*diff*". Sejam, f a função a qual desejamos calcular a derivada, x sua variável independente e n a ordem da derivada a qual se deseja calcular. Usaremos então a seguinte sintaxe:

$$diff\ (f(x), x, n)$$

No caso em que se deseje calcular a derivada de primeira ordem o parâmetro n pode ser suprimido.

Na Figura 2.13 apresentamos as expressões matemáticas que definem as funções derivadas até terceira ordem da função $f(x) = 2x^5 + x^3$, usando o Maxima on Android.

(%i1) f(x) := 2*x**5+x**3;

$$f(x) := 2\,x^5 + x^3$$

(%i2) diff (f(x), x);

$$10\,x^4 + 3\,x^2$$

(%i3) diff (f(x), x, 1);

$$10\,x^4 + 3\,x^2$$

(%i4) diff (f(x), x, 2);

$$40\,x^3 + 6\,x$$

(%i5) diff (f(x), x, 3);

$$120\,x^2 + 6$$

Figura 2.13: Cálculo de Derivadas

Capítulo 3

Gráfico de Funções Reais no Maxima on Android

NESTE capítulo iremos estudar o comportamento do gráfico de Funções Reais. Teremos como ferramenta de apoio o aplicativo Maxima on Android.

No Maxima on Android plotamos gráficos com o comando "*plot2d*", utilizando a seguinte sintaxe:

plot2d([<funções f(x), g(x), ... >],[x,<xmin>,<xmax>],[y,<ymin>,<ymax>])

No campo **<funções f(x), g(x), ... >** devemos digitar uma função ou uma lista de funções (separadas por virgulas), a qual desejamos plotar.

Nos campos **<xmin>, <xmax>, <ymin>, <ymax>,** devemos digitar o intervalo que será mostrado nos eixos x e y , ou seja, as dimensões da janela de visualização do gráfico. O usuário pode decidir não digitar o intervalo de exibição do eixo y, nesse caso o próprio aplicativo decide qual é esse intervalo. Ao tocar em "*enter*"o aplicativo abre a janela de visualização do gráfico.

Na Figura 3.1 foram plotados os gráficos das funções $f(x) = 2 - x$ e $g(x) = x^2 - 2x - 8$, numa mesma janela, note que foi escolhido o intervalo [-5, 5] para ser exibido no eixo x e o próprio aplicativo escolheu o intervalo [-10, 30] para mostrar o eixo y. Caso o usuário queira um intervalo personalizado basta digitá-lo. O usuário pode aumentar ou diminuir a janela de visualização do gráfico tocando em $+$ ou $-$ ou ainda com o movimento padrão de "pinça" com dois dedos pra fora ou pra dentro.

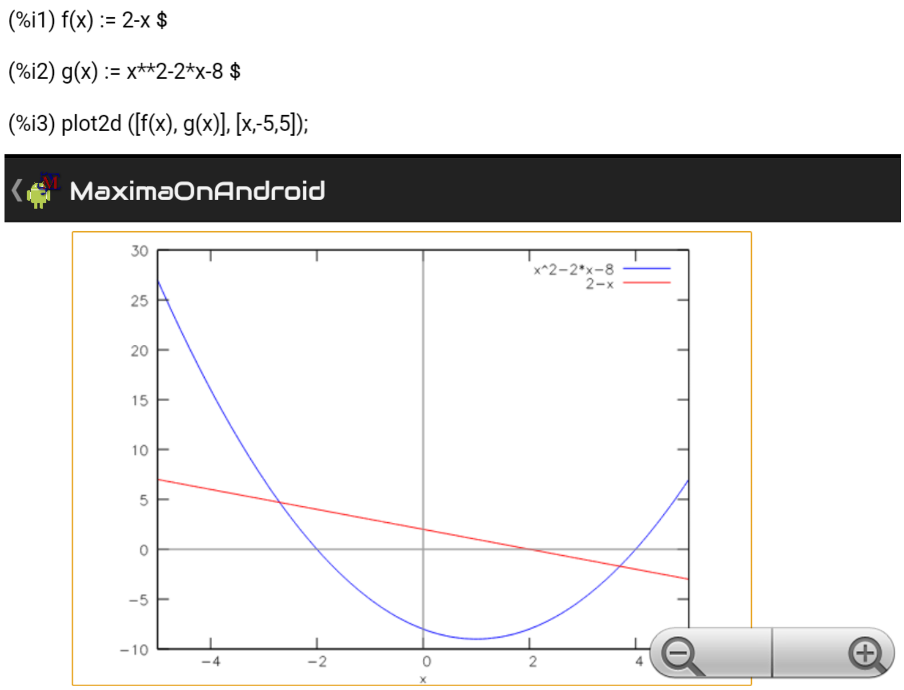

Figura 3.1: Gráfico de funções usando o plot2d

Inicialmente, antes de fazermos gráficos de funções mais complexas, vamos conhecer as definições abaixo e os teoremas a elas relacionados. Suas demonstrações encontram-se no Anexo.

- Intervalos de crescimento e decrescimento
- Pontos crítico
- Máximos e mínimos relativos
- Concavidade
- Pontos de inflexão
- Assíntotas

Definição 3.1. *[Função Crescente e Função Decrescente]*

Sejam f uma função definida num intervalo aberto I e $x_1 < x_2$. Então:

(i) f é crescente em I, se $f(x_1) \leq f(x_2), \forall x_1, x_2 \in I$

(ii) f é decrescente em I, se $f(x_1) \geq f(x_2), \forall x_1, x_2 \in I$

Se f é crescente ou decrescente em I dizemos que f é monótona neste intervalo.

Pela análise do sinal da primeira derivada, podemos determinar os intervalos onde uma função derivável é crescente ou decrescente, pelo seguinte teorema:

Teorema 3.1. *[Crescimento e Decrescimento das Funções]*

Seja f uma função contínua e derivável no intervalo aberto I então:

(i) Se $f'(x) > 0 \ \forall x \in I$ então f é crescente em I.

(ii) Se $f'(x) < 0 \ \forall x \in I$ então f é decrescente em I.

Demonstração.

Ver Anexo

Exemplo 3.1. *Para que valores de x a função $f(x) = x^3 - 3x^2$ é crescente?*

Solução:

Pelo Teorema 3.1 devemos ter $f'(x) > 0$.

```
(%i1) load (fourier_elim);
/storage/emulated/0/Android/data/jp.yhonda/files/maxima-5.36.1/share/fourier_elim/fourier_elim.lisp
(%i2) f(x) := x**3-3*x**2;
```

$$f(x) := x^3 - 3\,x^2$$

```
(%i3) diff (f(x), x, 1) /*f'(x)*/;
```

$$3\,x^2 - 6\,x$$

```
(%i4) fourier_elim ([%>0], [x]) /*f'(x)>0*/;
```

$$[2 < x] \vee [x < 0]$$

Figura 3.2: Crescimento e Decrescimento das Funções

Portanto $f(x)$ é crescente para $x < 0$ ou $x > 2$.

Definição 3.2. *[Pontos Críticos]*

*Seja a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, os valores de x para os quais $f'(x) = 0$ ou $f'(x)$ não existe são chamados de **pontos críticos**.*

Definição 3.3. *[Máximo e Mínimo Relativo]*

Sejam f uma função definida num intervalo aberto I e $x_o \in I$. Então:

(i) f tem um máximo relativo em x_o, se $f(x) \leq f(xo), \forall x \in I$

(ii) f tem um mínimo relativo em x_o, se $f(x) \geq f(xo), \forall x \in I$

Teorema 3.2. *[Críterio da Derivada Primeira para determinação de extremos]*

Seja f uma função continua e derivável no intervalo $I = (a, b)$ que contém o ponto crítico x_o então:

(i) Se $f'(x) > 0 \;\; \forall x < x_o$ e $f'(x) < 0 \;\; \forall x > x_o$, então f tem um máximo relativo em x_o

(ii) Se $f'(x) < 0 \;\; \forall x > x_o$ e $f'(x) > 0 \;\; \forall x < x_o$, então f tem um mínimo relativo em x_o

Isso significa que se f' troca o sinal de $+$ para $-$ quando passa por x_o então f tem um máximo relativo, caso contrário tem um mínimo relativo.

Demonstração.

Ver Anexo

Exemplo 3.2. *Obter os extremos da função $f(x) = x^4 - 4x^3$:*

Solução:

Pelo Teorema 3.2 devemos devemos estudar o final de f', ou seja, verificar para quais valores de x temos $f'(x) > 0$ ou $f'(x) < 0$.

Então, no Maxima on Android, calculamos f' e depois resolvemos as inequações $f'(x) > 0$ e $f'(x) < 0$ e analisamos o comportamento do sinal de f' (Figura 3.3):

```
(%i1) load (fourier_elim) $
(%i2) f(x) := x^4-4*x^3;
```

$$f(x) := x^4 - 4\,x^3$$

```
(%i3) g: diff (f(x), x, 1)    /* g = f ' */;
```

$$4\,x^3 - 12\,x^2$$

```
(%i4) fourier_elim ([g>0], [x]);
```

$$[3 < x]$$

```
(%i5) fourier_elim ([g<0], [x]);
```

$$[x < 0] \vee [0 < x, x < 3]$$

Figura 3.3: Extremos de uma Função

Como em $x = 3$ o sinal de f' muda de $-$ para $+$ temos que $f(x)$ tem um mínimo relativo em $x = 3$.

Note que na linha 3 (%i3) atribuímos **g**, a primeira derivada de **f**, afim de simplificar o cálculo das inequações posteriores, logo $g(x) = f'(x)$.

Teorema 3.3. *[Crítério da Derivada Segunda para determinação de extremos]*
Seja f uma função continua e derivável até segunda ordem no intervalo aberto I que contém o ponto crítico x_o então:

(i) Se $f''(x_o) > 0$ então f tem um mínimo relativo em x_o

(ii) Se $f''(x_o) < 0$ então f tem um máximo relativo em x_o

Se $f''(x_o) = 0$ nada se conclui, então devemos reportar ao critério da derivada primeira

Demonstração.
Ver Anexo

Definição 3.4. *[Concavidade]*

(i) Uma função f é côncava para cima no intervalo I, se $f'(x)$ for crescente neste intervalo.

(ii) Uma função f é côncava para baixo no intervalo I, se $f'(x)$ for decrescente neste intervalo.

Teorema 3.4. *Sejam f uma função contínua e derivável até segunda ordem no intervalo aberto I e $x_o \in I$, então*

(i) Se $f''(x_o) > 0$ então f é côncava para cima em I

(ii) Se $f''(x) < 0$ então f é côncava para baixo em I

Demonstração.
Ver Anexo

Exemplo 3.3. *Estudar a concavidade da função $f(x) = x^4 - 4x^3$.*

Solução:

Pelo Teorema 3.4 devemos devemos estudar o final de f'', ou seja, verificar para quais valores de x temos $f''(x) > 0$ ou $f''(x) < 0$.

```
(%i1) load (fourier_elim) $
(%i2) f(x) := x^4-4*x^3;
```

$$f(x) := x^4 - 4\,x^3$$

```
(%i3) h: diff (f(x), x, 2)   /* h = f " */;
```

$$12\,x^2 - 24\,x$$

```
(%i4) fourier_elim([h>0],[x]);
```

$$[2 < x] \vee [x < 0]$$

```
(%i5) fourier_elim([h<0],[x]);
```

$$[0 < x, x < 2]$$

Figura 3.4: Concavidade de uma Função

Em $0 < x < 2$, $f''(x) < 0$ logo tem concavidade pra baixo.
Em $x < 0$ ou $x > 2$, $f''(x) > 0$ logo tem concavidade pra cima.

Definição 3.5. *[Ponto de Inflexão]*

Seja f uma função contínua num intervalo aberto I. $P_o\,(x_o, f(x_o))$ é um ponto de inflexão de f se em P_o a concavidade da curva muda de sentido.

No Exemplo 3.3, a função $f(x) = x^4 - 4x^3$ apresenta pontos de inflexão em $P_1(0,0)$ e $P_2(2,-16)$, pois a concavidade muda de sentido nesses pontos.

Encontramos com muita frequência gráficos de funções que se aproximam de uma reta a medida que x tende a $+\infty$ ou $-\infty$. Essas retas são chamadas de *Assíntotas* , vamos analisar agora as assíntotas horizontais e as verticais.

Definição 3.6. *A reta $x = a$ é uma assíntota vertical do gráfico de f, se pelo menos uma das condições abaixo for verdadeira:*

(i) $\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$

(ii) $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$

(iii) $\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty$

(iv) $\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$

Definição 3.7. *A reta $y = b$ é uma assíntota horizontal do gráfico de f, se pelo menos uma das condições abaixo for verdadeira:*

(i) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = b$

(ii) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$

Exemplo 3.4. *Encontre as assíntotas ao gráfico da função* $f(x) = \dfrac{3x}{x-1}$

Solução:

Como f não está definida para $x = 1$, este é um candidato a assíntota vertical. Aplicando as Definições 3.6 e 3.7 (Figura 3.5) concluímos que as reta $x = 1$ e $y = 3$ são assíntota verticais e horizontais, respectivamente.

Na Figura 3.5 temos um passo a passo de como resolver este exemplo, no Maxima on Android, encontrando as assíntotas do gráfico de f e a sua representação gráfica.

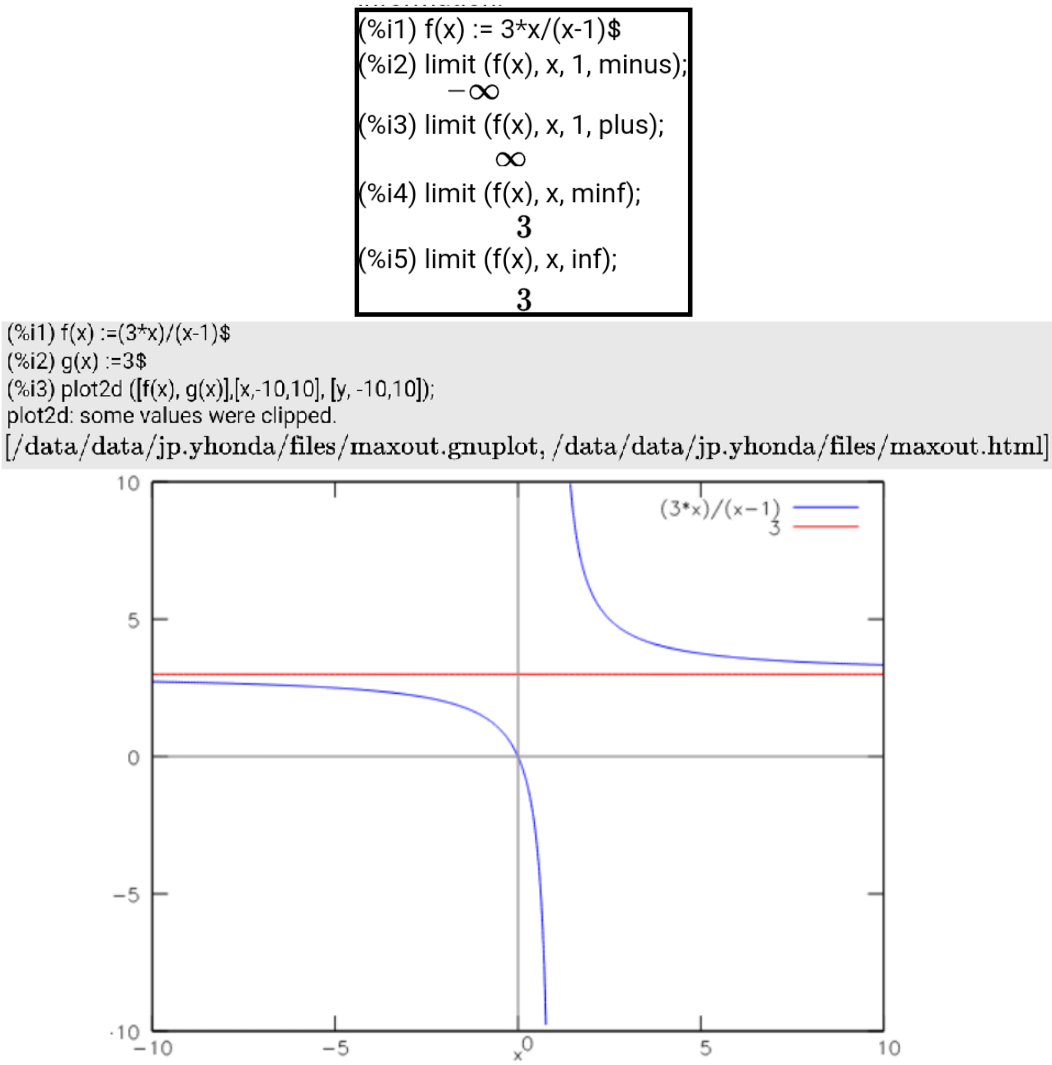

Figura 3.5: Assíntotas

Capítulo 4

Um caso particular: Maxima on Android aplicado as Funções Polinomiais e Racionais

NESTE capítulo veremos, como exemplo de tudo que foi visto anteriormente, o comportamento detalhado da Função Polinomial e da Função Racional, ou seja, determinaremos:

1. Seu domínio;
2. Os pontos de interseção com os eixos x e y;
3. Os intervalos de crescimento e decrescimento;
4. Os pontos críticos;
5. Os máximos e mínimos relativos;
6. A concavidade;
7. Os pontos de inflexão;
8. As assintotas.
9. Seu gráfico

Aplicação 1

Estudar o comportamento e traçar o gráfico da Função Polinomial

$$f(x) = x^3 + x^2 - 5x$$

Como f é uma função polinomial, $D_f = \mathbb{R}$

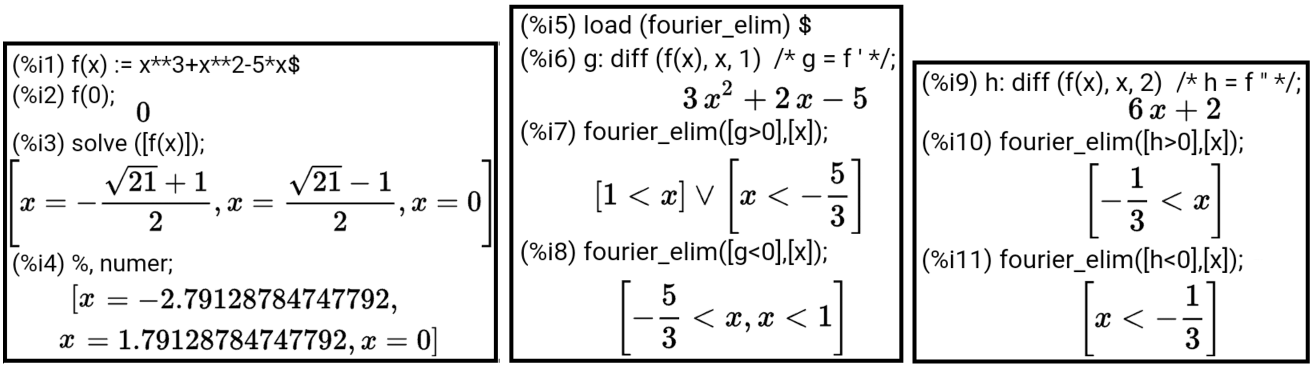

Figura 4.1: Estudo gráfico da Função Polinomial no Maxima on Android

A interseção com o eixo y é em $y = 0$ e com o eixo x é $x = -2{,}79$, $x = 0$ e $x = 1{,}79$ (Figura 4.1-Esquerda).

f é crescente em $x < -\frac{5}{3}$ ou $x > 1$ e decrescente em $-\frac{5}{3} < x < 1$

Como o sinal de f' varia de $+$ pra $-$ em $x = -\frac{5}{3}$ e de $-$ pra $+$ em $x = 1$, então f tem um máximo relativo em $x = -\frac{5}{3}$ e um minimo relativo em $x = 1$. (Figura 4.1-Centro)

f tem concavidade para cima se $x < -\frac{1}{3}$ e tem concavidade para baixo se $x > -\frac{1}{3}$. (Figura 4.1-Direita)

f tem um ponto de inflexão em $x = -\frac{1}{3}$, pois a concavidade muda de sentido. (Figura 4.1-Direita)

Por f ser polinomial, é contínua em todo D_f ou seja $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$, assim f não possui assíntota vertical e também não possui assíntota horizontal $\left(\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty\right)$.

O Gráfico da função polinomial $f(x) = x^3 + x^2 - 5x$ está representado na Figura 4.2.

```
(%i1) plot2d ([x**3+x**2-5*x],[x,-5,5], [y,-10,10] );
plot2d: some values were clipped.
```

$[/data/data/jp.yhonda/files/maxout.gnuplot, /data/data/jp.yhonda/files/maxout.htm$

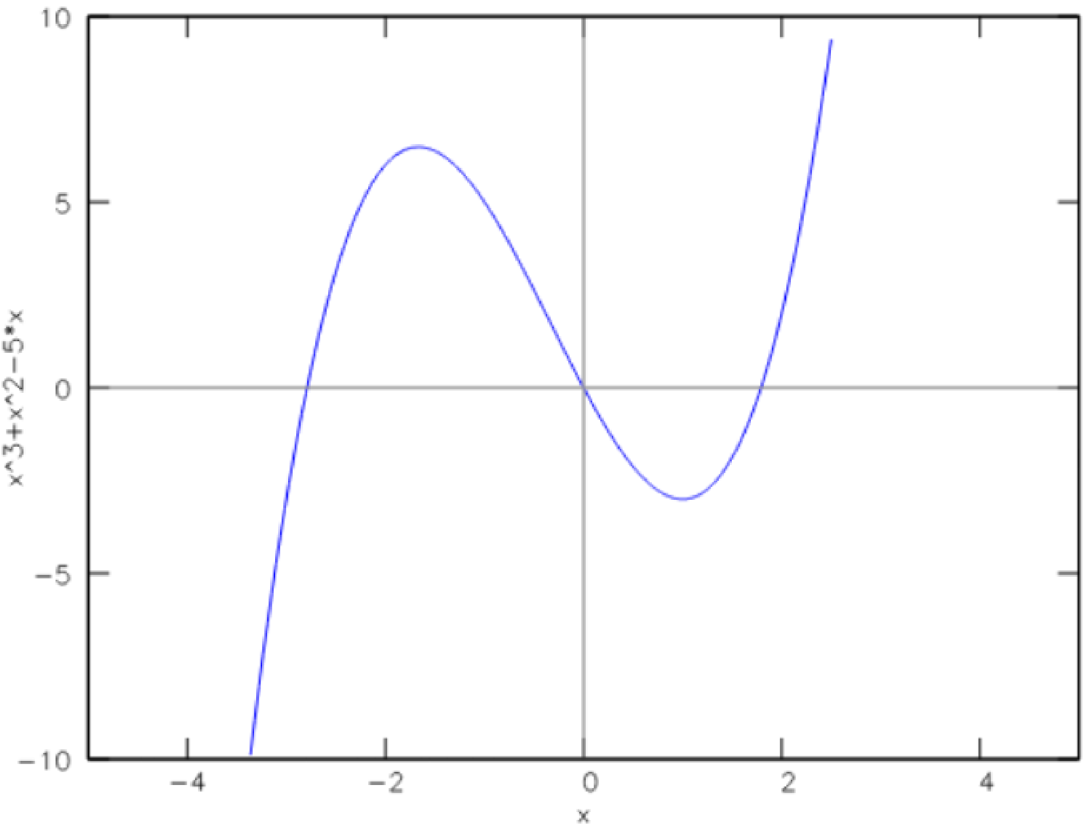

Figura 4.2: Grafico da Função $f(x) = x^3 + x^2 - 5x$

Aplicação 2

Estudar o comportamento e traçar o gráfico da Função Racional

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}$$

Note que o D_f é $\mathbb{R}$.
$f(0) = 0 \Rightarrow$ O gráfico passa na origem.

$\dfrac{x}{1+x^2} = 0 \Rightarrow x = 0$

Logo $(0,0)$ é a única interseção do gráfico de f com os eixos cartesianos.

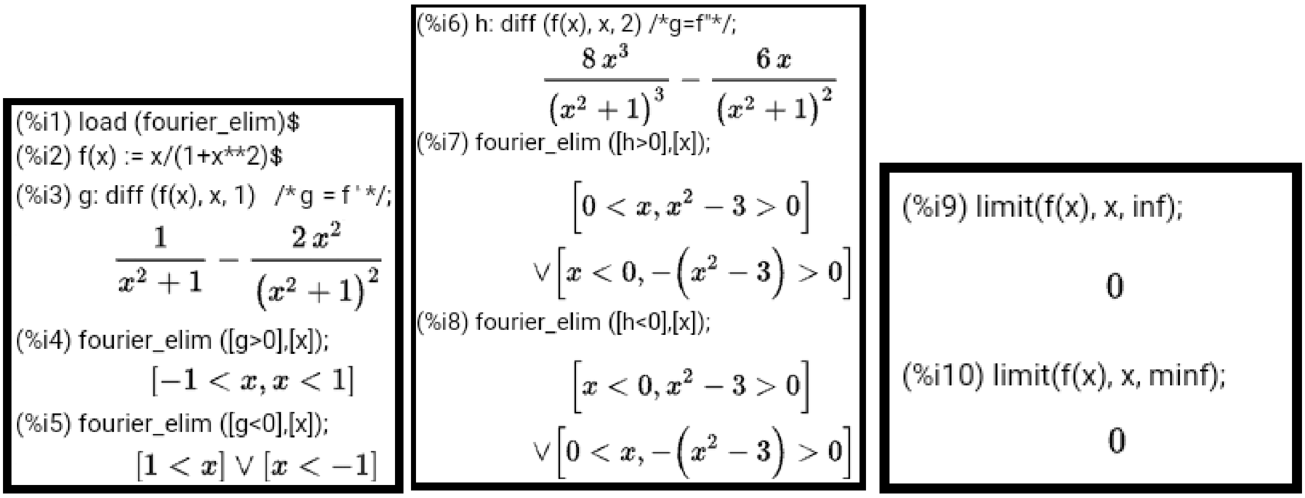

Figura 4.3: Estudo gráfico da Função Racional no Maxima on Android

f é crescente em $-1 < x < 1$ e decrescente em $x < -1$ ou $x > 1$ (%i4 e %i5)

Como o sinal de f' varia de $-$ pra $+$ em $x = -1$ e de $+$ pra $-$ em $x = 1$, então f tem um mínimo relativo em $x = -1$ e um máximo relativo em 1. (%i4 e %i5)

f tem concavidade para baixo se $x < -\sqrt{3}$ ou $0 < x < \sqrt{3}$ e tem concavidade para cima se $-\sqrt{3} < x < 0$ ou $x > \sqrt{3}$ (%i7 e %i8)

Consequentemente f tem inflexão nos pontos de abcissa $x = -\sqrt{3}, \quad x = 0$ e $x = \sqrt{3}$ (%i7 e %i8)

Não possui assíntota vertical pois f é continua ou seja $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. Possui assíntota horizontal em $y = 0$ (%i9 e %i10)

O Gráfico da função racional $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ está representado na Figura 4.4

```
(%i1) plot2d ([x/(1+x^2)],[x,-20,20]);
```

[/data/data/jp.yhonda/files/maxout.gnuplot, /data/data/jp.yhonda/files/maxout.html]

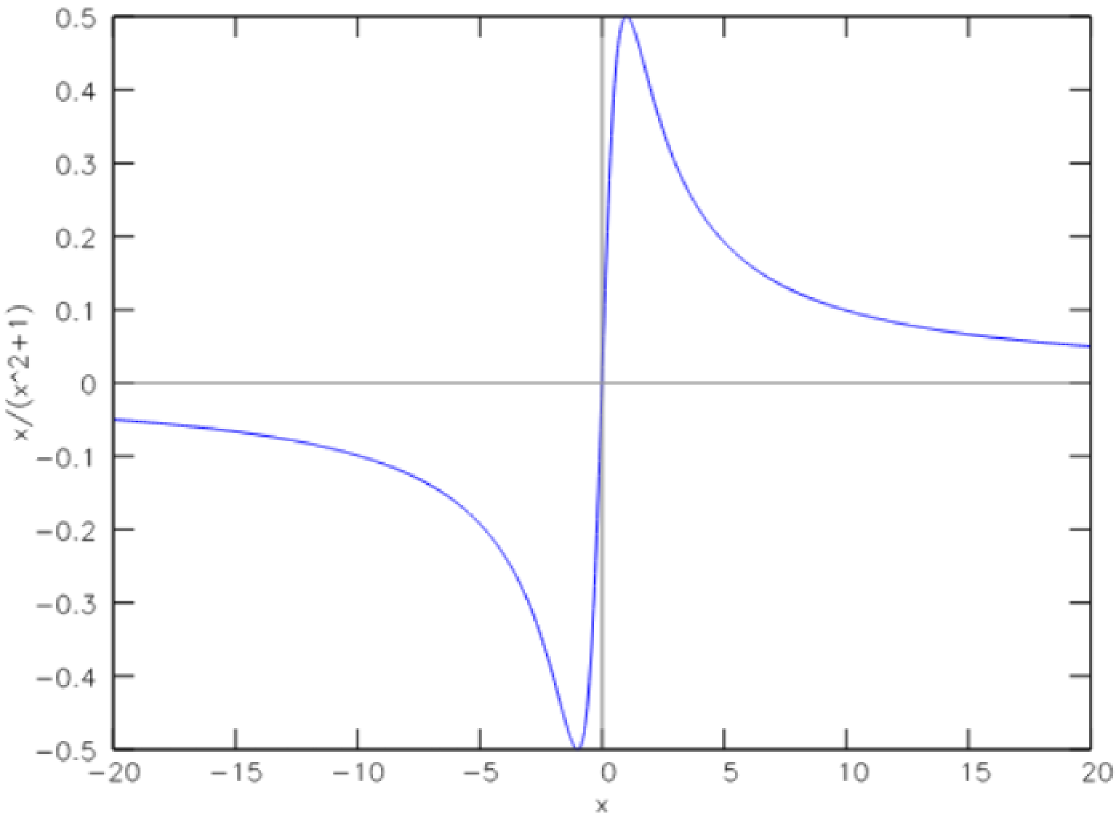

Figura 4.4: Grafico da Função $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$

Capítulo 5

Conclusões

Este trabalho foi elaborado com o intuito de trazer contribuições ao ensino de Matemática na Educação Básica e início da Educação Superior. Nele apresentamos a teoria e os teoremas sobre funções, limites, continuidade e derivadas. Mas, fundamentalmente, apresentamos o aplicativo para celulares inteligentes (os smartphones) Maxima on Android e algumas de sua variedades de aplicações Matemáticas, dando maior destaque a aquelas relacionadas a construção de gráficos de funções.

Como visto, o aplicativo possui inúmeras ferramentas que podem ser utilizadas na complementação da teoria de diversos conteúdos matemáticos, muito dos quais não foi abordado aqui, por se afastar do foco do trabalho

Vale ressaltar, que o objetivo não é substituir o tratamento formal baseado em demostrações e sim ser um complemento que auxilie na compreensão de fatos que devem também ser vistos sobre o olhar da mais pura Matemática. O aplicativo é um diferencial tecnológico que torna o estudo da disciplina envolvida mais interessante para os alunos na hora dos estudos, pois geralmente dominam a tecnologia, podendo comprovar resultados já conhecidos ou conhecer novos resultados e buscar mais informações. Os professores podem conferir resoluções de questões que podem ser usados durante as aulas ou em uma avaliação.

Além do aplicativo ter inúmeras utilizações, um outro ponto forte é sua licença gratuita, pois pode ser distribuído livremente e utilizado amplamente em instituições de ensino ou para uso pessoal sem qualquer custo de instalação ou direitos autorais. O aplicativo vai ainda mais além, ele está disponível nos sistemas operacionais mais conhecidos atualmente: Windows, Android, Linux e Macintosh.

O aplicativo mostrou-se muito estável, capaz de realizar tudo ao qual foi destinado em frações de segundos, não travando nem mesmo em operações mais complexas.

Referências Bibliográficas

[1] Flemming, D.M.; Gonçalves, M.B. **Calculo A: Funções, Limites, Derivação, Integração.** 6. ED. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2007.

[2] GUIDORIZZI, H. L. **Um Curso de Cálculo, volume 1**. Rio de Janeiro: LTC, 2011

[3] IEZZI, G; MURAKAMI, C. **Fundamentos de Matemática Elementar: Funções, volume 1**. São Paulo: Atual, 2007.

[4] IEZZI, G; MURAKAMI, C. **Fundamentos de Matemática Elementar: Complexos, Polinômios e Eqações, volume 6**. São Paulo:Atual, 2004.

[5] JERÓNIMO, J; MOURA, M. A. N.; et. al. **Calculo Volume 1**, Wikilivros, 2008. Disponível em: <http://pt.wikibooks.org>, acesso em 05/10/2015

[6] LEITHOLD, L. **O Cálculo com Geometria Analítica, volume 1**. 5. ED. São Paulo: Harbra, 1994.

[7] SISTEMA DE ÁLGEBRA COMPUTACIONAL MAXIMA. **Manual do Maxima**. Disponível em: <http://maxima.sourceforge.net/docs/manual/pt_BR/maxima.html>, acesso em 20/10/2015

[8] STEWART, J. **Cálculo volume I**. São Paulo: Pioneira Thomsom Learning, 2006.

ANEXO

Neste Anexo estão as demonstrações dos Teoremas que foram omitidos do corpo do texto.

Teorema 1.1 [Unicidade do Limite]

Sejam a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$. Se $\lim_{x\to a} f(x) = L_1$ e $\lim_{x\to a} f(x) = L_2$ então $L_1 = L_2$

Demonstração. Suponhamos que exista L_1 e L_2 e que $L_1 \neq L_2$, então, para todo $\epsilon > 0$ arbitrário, existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$, tais que

$$0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L_1| < \epsilon$$

$$0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - L_2| < \epsilon$$

Escrevendo $L_1 - L_2$ como $L_1 - f(x) + f(x) - L_2$, pela desigualdade triangular temos:

$$|L_1 - L_2| = |L_1 - f(x) + f(x) - L_2| \leq |L_1 - f(x)| + |f(x) - L_2| = |f(x) - L_1| + |f(x) - L_2|$$

Tomando $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\}$

$$\begin{gathered} 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L_1| < \epsilon \quad \text{e} \quad |f(x) - L_2| < \epsilon \\ 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L_1| + |f(x) - L_2| < 2\epsilon \\ 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |L_1 - L_2| < 2\epsilon \end{gathered}$$

Como ϵ é arbitrário, fazendo $\epsilon = \dfrac{|L_1 - L_2|}{2}$, temos

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |L_1 - L_2| < |L_1 - L_2|$$

Que é uma contradição, portanto $L_1 - L_2$.

$\square$

Teorema 1.3 [Propriedades Operatórias dos Limites]

Sejam f e g funções reais e $a \in \mathbb{R}$. Se $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to a} g(x)$ existem, então para todo $k \in \mathbb{R}$ e para todo $n \in \mathbb{N}$ temos:

(1) $\lim\limits_{x \to a} k = k$

(2) $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \pm \lim\limits_{x \to a} g(x)$

(3) $\lim\limits_{x \to a} [k \cdot f(x)] = k \cdot \lim\limits_{x \to a} f(x)$

(4) $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} g(x)$

(5) $\lim\limits_{x \to a} \left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$, se $\lim\limits_{x \to a} g(x) \neq a$

(6) $\lim\limits_{x \to a} [f(x)]^n = \left[\lim\limits_{x \to a} f(x)\right]^n$

(7) $\lim\limits_{x \to a} \left[\sqrt[n]{f(x)}\right] = \sqrt[n]{\lim\limits_{x \to a} f(x)}$

Demonstração. Provaremos os itens (1), (2) e (3)

(1) Segue diretamente do Teorema 1.2, tomando $m = 0$ e $n = k$

(2) Parte $'' + ''$

Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ e $\lim\limits_{x \to a} g(x) = M$

$$|f(x) + g(x) - (L + M)| \leq |f(x) - L| + |g(x) - M|$$

Da hipótese, dado $\epsilon > 0$, exste $\delta > 0$, tal que

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \frac{\epsilon}{2}$$

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |g(x) - M| < \frac{\epsilon}{2}$$

daí

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) + g(x) - (L + M)| < \epsilon$$

(3) Se $k = 0$, $k \cdot f(x) = 0 \; \forall x \in D_f$, logo

$$\lim_{x \to a}[k \cdot f(x)] = k \cdot \lim_{x \to a} f(x)$$

Se $k \neq 0$ dado $\epsilon > 0$, exste $\delta > 0$, tal que

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \frac{\epsilon}{|k|}$$

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |k \cdot f(x) - k \cdot L| < \epsilon$$

□

Teorema 1.4 [Limite Lateral]

Seja f uma função definida em um intervalo aberto contendo a, exceto, possivelmente o próprio a. Então $\lim_{x \to a} f(x) = L$ se, e somente se $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$ e $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$

Demonstração. Provemos apenas a condição suficiente. A condição necessária é consequência direta das definições de limite.

Suponhamos que $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$ e $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$. Então dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \epsilon$ sempre que $a - \delta_2 < x < a$. Tomemos $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\}$. Então $a - \delta_2 \leq a - \delta$ e $a + \delta \leq a + \delta_1$, e portanto se $x \neq a$ e $a - \delta < x < a + \delta$, temos que $|f(x) - L| < \epsilon$.

De forma equivalente, $|f(x) - L| < \epsilon$ sempre que $0 < |x - a| < \delta$ e desta forma, $\lim_{x \to a} f(x) = L$ □

Teorema 1.8 [Propriedades Operatórias das Funções Continuas]

Sejam f e g funções reais e $a \in \mathbb{R}$. Se f e g são funções contínuas em a então são continuas em a as funções:

(1) $f + g$ (3) $f \cdot g$

(2) $f - g$ (4) $\frac{f}{g}$, se $g(a) \neq 0$

Demonstração. :

(1) Como f e g são contínuas em a, pelo Definição 1.8:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \quad e \quad \lim_{x \to a} g(x) = g(a)$$

Além disso, pelas propriedades operatórias dos Limites:

$$\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) = f(a) + g(a)$$

Portanto $f + g$ é contínua em a
Os demais itens são feito de maneira análoga

□

Teorema 1.10 [Regras de Derivação]

Sejam f, g e h funções reais, deriváveis, então:

(1) $f(x) = k,\ k \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(x) = 0$ (Derivada da Constante)

(2) $h(x) = f(x) + g(x) \Rightarrow h'(x) = f'(x) + g'(x)$ (Derivada da Soma)

(3) $f(x) = x^n,\ n \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$ (Derivada da Potência)

(4) $h(x) = f(x) \cdot g(x) \Rightarrow h'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$ (Derivada da Produto)

Caso Particular: $h(x) = k \cdot f(x),\ k \in \mathbb{R} \Rightarrow h'(x) = k \cdot f'(x)$

(5) $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)},\ g(x) \neq 0 \Rightarrow h'(x) = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$ (Derivada do Quociente)

Demonstração. :

(1) Se $f(x) = k$, então, pela Definição 1.10

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{k - k}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0$$

(2) Por hipótese existem

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad e \quad g'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

Assim temos,

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x+\Delta x) - h(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[f(x+\Delta x) + g(x+\Delta x)] - [f(x) + g(x)]}{\Delta x}$$

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} = f'(x) + g'(x)$$

Os demais itens são feito de maneira análoga

□

Teorema 3.1 [Crescimento e Decrescimento das Funções]

Seja f uma função contínua e derivável no intervalo aberto I então:

(i) Se $f'(x) > 0 \;\; \forall x \in I$ então f é crescente em I.

(ii) Se $f'(x) < 0 \;\; \forall x \in I$ então f é decrescente em I.

Demonstração. :

Assumiremos sem demonstrar o Teorema do Valor Médio [1].

(i) Sejam $x_0, x_1 \in I$, tal que $x_0 < x_1$; como f é contínua e derivável em I, pelo Teorema do Valor Médio, existe $x \in I$ tal que $f(x_1) - f(x_0) = f'(x)(x_1 - x_0)$.

Como $f'(x) > 0 \forall x \in I$, temos que $f(x_0) < f(x_1)$.

A demonstração do item (ii) é análoga.

□

[1] Uma demonstração precisa está por exemplo em Flemming.

Teorema 3.2
[Críterio da Derivada Primeira para determinação de extremos]

Seja f uma função continua e derivável no intervalo $I = (a, b)$ que contém o ponto crítico x_o então:

(i) Se $f'(x) > 0 \ \ \forall x < x_o$ e $f'(x) < 0 \ \ \forall x > x_o,$ então f tem um máximo relativo em x_o

(ii) Se $f'(x) < 0 \ \ \forall x > x_o$ e $f'(x) > 0 \ \ \forall x < x_o,$ então f tem um mínimo relativo em x_o

Demonstração. :

(i) Pelo Teorema 3.1 concluímos que f é crescente em (a, x_o) e decrescente em (x_o, b). Portanto, $f(x) < f(x_o), \forall x \neq x_o$ em I. Assim f tem um máximo relativo em x_o

A demonstração do item (ii) é análoga.

□

Teorema 3.3
[Críterio da Derivada Segunda para determinação de extremos]

Seja f uma função continua e derivável até segunda ordem no intervalo aberto I que contém o ponto crítico x_o então:

(i) Se $f''(x_o) > 0$ então f tem um mínimo relativo em x_o

(ii) Se $f''(x_o) < 0$ então f tem um máximo relativo em x_o

Demonstração. :

(i) Como f possui um ponto crítico em x_o, $f'(x_o) = 0$. Temos, por hipótese que $f''(x_o) = \lim_{x \to x_0} \dfrac{f'(x) - f'(x_o)}{x - x_o} = \lim_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{x - x_o} > 0$. Assim, pelo Teorema do Valor Médio existe $\delta > 0$ tal que $\dfrac{f'(x)}{x - x_o} > 0$, para todo x na vizinhança de x_o. Assim, $f'(x) > 0$, se $x > x_o$ e $f'(x) < 0$, se $x_o > x$. Pelo Teorema 3.2, temos que f tem um mínimo relativo em x_o.

A demonstração do item (ii) é análoga.

□

Teorema 3.4 [Concavidade]

Sejam f uma função contínua e derivável até segunda ordem no intervalo aberto I e $x_o \in I$, então

(i) Se $f''(x_o) > O$ então f é côncava para cima em I

(ii) Se $f''(x) < O$ então f é côncava para baixo em I

Demonstração. :
(i) Como $f''(x) = [f'(x)]'$, se $f''(x) > 0, \forall x \in I$, pelo Teorema 3.1, f' é crescente em I. Logo, f é côncava para cima em I.

A demonstração do item (ii) é análoga.

□