LUCAS MAKEN DA SILVA OLIVEIRA

ENSINANDO GEOMETRIA COM RÉGUA E COMPASSO, UMA PROPOSTA PARA O 8º ANO

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE
DARCY RIBEIRO - UENF
CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ
NOVEMBRO DE 2015

LUCAS MAKEN DA SILVA OLIVEIRA

ENSINANDO GEOMETRIA COM RÉGUA E COMPASSO, UMA PROPOSTA PARA O 8º ANO

"Dissertação apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Matemática."

Orientador: Prof. Oscar Alfredo Paz La Torre

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE
DARCY RIBEIRO - UENF
CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ
NOVEMBRO DE 2015

LUCAS MAKEN DA SILVA OLIVEIRA

ENSINANDO GEOMETRIA COM RÉGUA E COMPASSO, UMA PROPOSTA PARA O 8º ANO

"Dissertação apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Matemática."

Aprovada em 27 de Novembro de 2015.

Profª. Silvia Cristina Freitas Batista
D.Sc. - IFF

Profª. Liliana Angelina León Mescua
D.Sc. - UENF

Prof. Rigoberto Gregorio Sanabria Castro
D.Sc. - UENF

Prof. Oscar Alfredo Paz La Torre
D.Sc - UENF
(ORIENTADOR)

DEDICATÓRIA

Dedico à Deus em primeiro lugar, pois sem Ele eu nem existiria, à minha Mãe Luciméri e minha madrinha mãe Ana Maria que sempre acreditaram em mim, ao meu Pai Jairo que me incentivou a estudar, à minha noiva Mayara que permaneceu ao meu lado nas horas mais difíceis, aos meus irmãos que são pessoas maravilhosas e à minha filha Lara que é o combustível para eu sempre seguir em frente.

Agradecimentos

Agradeço a toda minha família, aos meus amigos, a todos os professores que ja passaram por minha formação desde o fundamental.

Agradeço ao Professor Aluísio Lima que me incentivou a lecionar, à Professora Cynthia Sodré que me motivou a ingressar no PROFMAT, aos meus colegas de trabalho da rede Estadual que são professores incríveis, ao pessoal do Conceito A, Wellington Dutra, Flávio, Heitor, Bruno, Ingrid, etc.

Agradeço em especial as pessoas que passaram alguns sábados ao meu lado, meus amigos do PROFMAT, Carlos Alberto (Kuala), Jorge, Patrício, Marcus, etc, só vocês sabem como foi difícil chegar até aqui.

Gostaria de agradecer as pessoas que nos ensinaram a verdadeira extensão da matemática, nos mostraram que ela vai muito além do que imaginávamos, obrigado professores do PROFMAT-UENF, em especial ao meu orientador Oscar.

"Não acredite em algo simplesmente porque ouviu.
Não acredite em algo simplesmente porque todos falam a respeito.
Não acredite em algo simplesmente porque está escrito em seus livros religiosos.
Não acredite em algo só porque seus professores e mestres dizem que é verdade.
Não acredite em tradições só porque foram passadas de geração em geração.
Mas depois de muita análise e observação,
se você vê que algo concorda com a razão,
e que conduz ao bem e beneficio de todos, aceite-o e viva-o."

BUDA

Resumo

Neste trabalho queremos mostrar que por meio das construções com régua e compasso é possível melhorar a compreensão de conceitos geométricos dos alunos. O referencial teórico utilizado é a teoria de Van Hiele que através de um teste permite avaliar o nível de pensamento geométrico em que o aluno se encontra. Com base no resultado obtido, foi elaborada uma sequência de atividades que envolve a construções de retas paralelas, retas perpendiculares, bissetrizes e mediatrizes com alunos do 8º ano do Ensino Fundamental. Após análise da aplicação das atividades propostas, concluiu-se que foi possível aos alunos apresentarem significativamente uma melhora nos conceitos geométricos tratados, assim como uma motivação maior para aprender novos conceitos.

Palavras-chaves: Construções Geométricas, Teoria de Van Hiele.

Abstract

In this paper we show that through constructions with ruler and compass is possible to improve the understanding of geometrical concepts of students. The theoretical framework used is the Van Hiele theory that through a test allows to evaluate the level of geometric thinking in which the student is . Based on the results obtained , an activity sequence was developed which involves the construction of parallel lines , perpendicular lines , bisectrixs and perpendicular bisectors with 8th graders of elementary school. After review of the implementation of the proposed activities , it was concluded that it was possible for students to present a significant improvement in geometric concepts treated , as well as greater motivation to learn new concepts

Key-words: Geometric Constructions, Van Hiele Model.

Lista de ilustrações

Lista de tabelas

Lista de abreviaturas e siglas

ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
abnTeX	Absurdas Normas para TeX
LDB	Lei de Diretrizes e Bases da Educação
PCNs	Parâmetros Curriculares Nacionais
RPM	Resolução de Problemas Matemáticos
SEEDUC	Secretaria de Educação

Lista de símbolos

α	Letra grega alpha
β	Letra grega beta
δ	Letra grega delta
γ	Letra grega gamma
θ	Letra grega theta
$\in$	Pertence

Sumário

Introdução

A Lei 5692 da LDB em 1971 dividiu as disciplinas em dois núcleos: Núcleo Obrigatório e Optativo, com isso o ensino fundamental no Brasil sofreu grandes mudanças (ZUIN, 2001). As Construções Geométricas que até então fazia parte do núcleo das disciplinas Obrigatórias, passou a ser uma disciplina Optativa. Ao mesmo tempo em que as Construções Geométricas entrou para o núcleo das disciplinas Optativas a Educação Artística passou a fazer parte do núcleo das disciplinas Obrigatórias. Algumas escolas optaram por manter as Construções Geométricas, outras usaram as aulas de Educação Artística para ensinar as Construções, e outras a ensinavam sem conexão com a Geometria.

Nessa mesma época, as construções geométricas foram abolidas dos vestibulares para os cursos de Engenharia e Arquitetura, reafirmando o desprestígio desse ramo da Matemática. Porém, sabe-se que dentre as instituições que mantiveram o ensino do DG, havia uma diferença quanto a quem essa matéria era destinada. Segundo Young (1971) o acesso ao conhecimento era dividido hierarquicamente de acordo com a classe social de cada indivíduo.

Somente no final da década de noventa, com a publicação dos PCNs vemos um movimento contrário, isto é, o incentivo à volta das Construções Geométricas feitas com os instrumentos euclidianos. O retorno das Construções Geométricas aos bancos escolares permitiria a construção dos conhecimentos geométricos a partir das investigações e da prática - como é fortemente sugerido pelos PCNs do 3º e 4º Ciclos do Ensino Fundamental, disciplina Matemática. Os PCNs afirmam que

> os conceitos geométricos constituem parte importante do currículo de Matemática no ensino fundamental, porque, por meio deles, os alunos desenvolvem um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive. (BRASIL, 1998).

E complementa "O trabalho com espaço e forma pressupõe que o professor explore situações em que sejam necessárias algumas construções com régua e compasso "o que permitiria não só a aplicação de propriedades estudadas, como também a visualização e construção. No currículo mínimo estadual do Rio de Janeiro no sétimo ano do ensino fundamental, é pedido que os alunos construam ângulos utilizando régua e compasso (JULIANELLI, 2012), o que mostra uma preocupação da SEEDUC em ensinar aos alunos a manipulação dos instrumentos de DG. .

O ensino de Construção Geométrica está sendo esquecido pelos ensinos Fundamental e Médio das escolas brasileiras e isso tem apresentado consequências sérias no aprendizado da Geometria. A dificuldade dos alunos em Geometria vai de encontro com esse desprestígio. Segundo Putnoki (2013), essa dificuldade não é coincidência e sim consequência desse abandono ao ensino das Construções Geométricas, dessa forma é importante buscar uma metodologia que facilite a aprendizagem para professores e alunos.

Aprender Geometria com régua e compasso desenvolverá no aluno a capacidade de planejar, projetar e/ou abstrair, podendo dessa forma ser usado em diferentes campos da Matemática. Para Wagner (2000) as Construções Geométricas são uma interpretação da realidade Geométrica, visual, emocional e intelectual, feito por meio de uma representação gráfico. É grande a importância das Construções Geométricas para os alunos e professores, uma vez que serve como base para Geometria.

Alan Hofer (1981, p. 12) diz que "[...] é difícil o professor deixar de dar ênfase à provas, mesmo quando os alunos estão sentindo dificuldades. No entanto, há outras habilidades de natureza geométrica que podem ser de igual importância para os alunos.[...]". Então conforme ele, a Geometria é claramente uma matéria visual. Para ele os alunos precisam explorar figuras manipuláveis e desenhar utilizando ferramentas do DG. Ainda segundo Hofer (1981), a Geometria é um assunto quase que universalmente detestado pelos alunos. Apresentar a geometria por meio de desenhos e construções com régua e compasso pode ser fundamental para que esses alunos passem a gostar desse assunto.

> não há Geometria sem Régua e Compasso. Quando muito, há apenas meia Geometria, sem os instrumentos euclidianos. A própria designação Desenho Geométrico me pareça inadequada. No lugar, prefiro Construções Geométricas. Os problemas de construções são parte integrante de um bom curso de Geometria. O aprendizado das construções amplia as fronteiras do aluno e facilita muito a compreensão das propriedades geométricas, pois permite uma espécie de "concretização". Vejo a régua e o compasso como instrumentos que permitem "experimentar". Isso, por si só, dá uma outra dimensão aos conceitos e propriedades geométricas.
> (...)
> Em todas as interfaces que a Matemática faz com a linguagem gráfica, o conhecimento de Desenho entra como ferramenta enriquecedora. Por exemplo, o estudo da Geometria Analítica fica bastante facilitado para alunos que estudaram Desenho (ZUIN, 2001, p. 177).

Foi apresentado neste trabalho uma sequência de atividades que têm o objetivo de ensinar a Geometria utilizando à Régua e o Compasso, essas atividades foram elaboradas depois da aplicação do teste de Van Hiele, o teste a aplicado foi elaborado pela equipe do Projeto Fundão (NASSER; SANTANNA, 1997). Depois de analisar essa aplicação o professor será capaz de preparar as atividades de acordo com nível de pensamento geométrico em que os alunos se encontram de acordo com a teoria de Van Hiele.

A motivação desse trabalho deve-se a necessidade de inovar a aprendizagem da Geometria no nível fundamental, pois nesse nível o aluno começa a desenvolver uma intuição espacial. O intuito desse trabalho é verificar se, através de atividades elaboradas com embasamento na manipulação da Régua e do Compasso, os alunos irão apresentar de forma significativa o aprendizado da Geometria.

Além disso, a escolha do material se deu ao fato da régua e compasso ser um material de fácil acesso para alunos. Este trabalho está dividido em cinco capítulos:

O capítulo 1 aborda a da parte histórica do desenho geométrico e também a origem do tangram.

O capítulo 2 trata das construções básicas e apresenta também as classificações de triângulos.

No capítulo 3, apresentam-se as habilidades de Alan Hofer (1981) e a teoria de Van Hiele com níveis de raciocínio, propriedades e as fases da aprendizagem.

No capítulo 4 aborda-se os aspectos metodológicos: tipo de pesquisa, escolha do campo, a caracterização dos participantes.

O quinto e último capítulo descreve a implementação da sequência didática constituída pelos teste de Van Hiele e pela análise das atividades que foram elaboradas de acordo com o resultado desse teste.

O trabalho se encerra com as considerações finais e um apêndice que contém as atividades aplicadas e um anexo contendo o teste de Van Hiele.

Capítulo 1

História da Geometria

1.1 No Mundo

Segundo Putnoki (1993) o desenho nasceu a cerca de 60 mil anos e foi através dos desenhos feitos pelo homem na pedra que foi possível entender seu cotidiano. A arte rupestre foi muito importante para entendermos como viviam os homens pré-históricos.

De acordo com Dutra (2010) o desenho na rocha (figura 1) descreve as relações do homem com o meio em que vivia.

Figura 1 – Arte Rupestre

Fonte: www.fumdham.org.br/pinturas.asp acessado em 05/12/2014

> O que é a escrita se não a combinação de símbolos desenhados. Através de gravuras traçadas nas paredes das cavernas, o homem pré-histórico registrou fatos relacionados a seu cotidiano, deixando indicadores importantes para os pesquisadores modernos estudar os ancestrais de nossa espécie. Enfim a arte do desenho é algo inerente ao homem (PUTNOKI, 1993, p. 7).

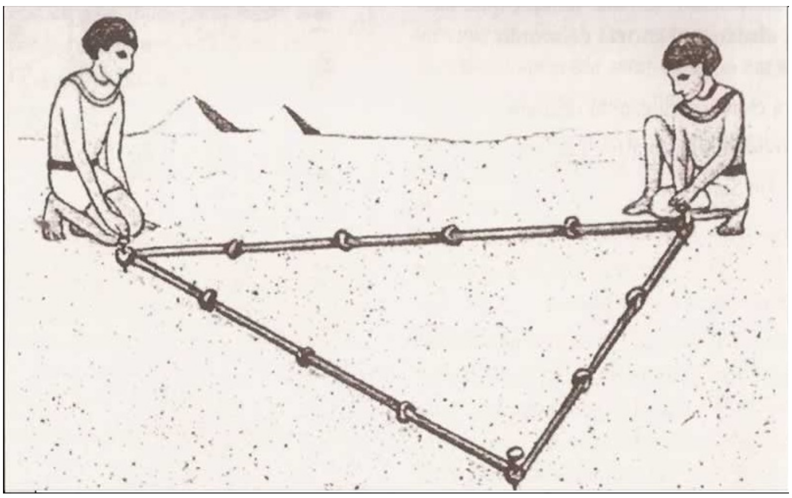
A palavra grega Geometria é composta por geo que significa terra e metria que significa medida, ou seja, geometria é a denominação encontrada pelos egípcios e babilônicos em tempos distantes para a medição de terra.

> A cobrança de imposto foi, talvez, o primeiro imperativo para o desenvolvimento da geometria, pois embora teoricamente o faraó possuísse todas as terras e bens, na realidade os templos e até os indivíduos em particular possuíam imóveis. O governo determinava os impostos da terra baseado na altura da enchente do ano e na área de superfície das propriedades (MLODNOW, 2010, p. 12).

Devido a essas marcações feita pelas águas do Rio Nilo após as enchentes os egípcios desenvolveram métodos para calcular a área de um quadrado, de um retângulo e de um trapézio, para demarcarem suas terras.

Todas as civilizações da nossa história humana desenvolveram meios próprios de compreensão do mundo e de integração harmônica com o mesmo. Realmente todas as grandes civilizações tiveram profundos conhecimentos na estrutura geral da natureza, no modo mais adequado de equilibrar a atividade e na vida humana com o meio ambiente em que se encontrava. Segundo Mlodnow (2010), nos tempos do Antigo Egípcio existia um tipo de sacerdote, conhecido pelo nome de Harpedonopta que literalmente significa um esticador de cordas (Figura 2), encarregado da função sagrada de mensuração do terreno. Devia restabelecer por meios geométricos, e sem nenhuma sombra de dúvida, os talhões de terra que o Nilo devolvia na descida das suas águas após as cheias. A vida no Egito dependia totalmente das terras fertilizadas pelo Nilo e, por isso, era importantíssimo para a economia egipciana saber exatamente a quem pertenciam os terrenos, onde era o começo e fim de cada terreno.

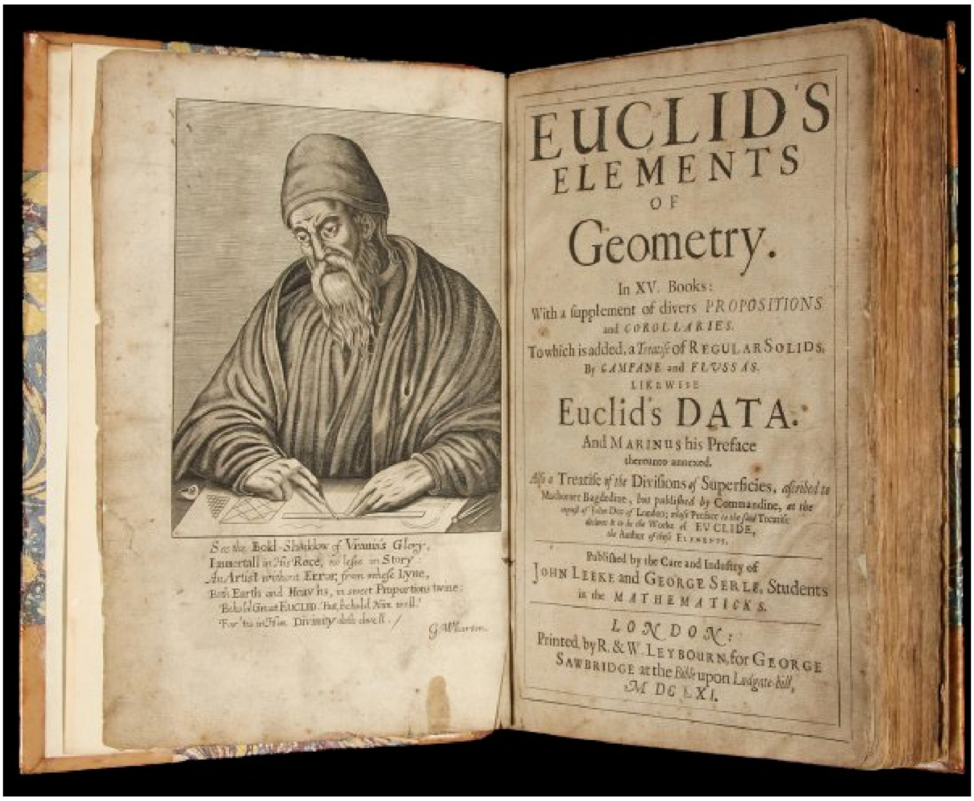
Figura 2 – Sistema de cordas



Fonte: www.meuartigo.brasilescola.com/matematica/o-sistema-numeracao-egipcio.htm acessado em 28/12/2014

Com a obra de Euclides, a civilização grega, teve grande importância no desenvolvimento da Geometria, pois além de reunir os conhecimentos de diversas culturas, organizou todo o conhecimento que existia até a época. Segundo Ávila (2003) os quatro primeiros livros de Euclides é dedicado à Geometria, toda teoria é dada junto com as construções geométricas, o que mostra sua importância no desenvolvimento e entendimento da Matemática e mais especificamente da Geometria.

Figura 3 – Os Elementos de Euclides



Fonte: www.esquadraodoconhecimento.wordpress.com/2015/04/20/euclides-e-os-elementos acessado em 21/07/2015

Ainda segundo Ávila (2003), nos três primeiros postulados, Euclides enuncia construções geométricas:

I - pede-se que se desenhe uma reta de um ponto qualquer até outro ponto, (ou seja, que se trace uma reta por dois pontos);

II - que se produza uma linha reta finita continuamente em uma linha reta (ou seja, que se prolongue uma linha reta continuamente segundo uma reta);

III - e que com qualquer centro e distância se descreva um círculo (ou seja, que se descrevam o círculo conhecendo um ponto e uma distância).

Os conhecimentos egípcios foram empregados para fins impressionantes, por exemplo, um projeto de estrutura que contava com uma base quadrangular e faces triangulares. De acordo com Tort (2014), a Grande Pirâmide de Giza, era também conhecida como a Pirâmide de Khufu ou a Pirâmide de Quéops, ela foi construída com objetivo de servir como tumba para o grande Faraó Khufu. As Pirâmides do Egito tem em média 147 metros de altura e uma base quadrada de lado medindo aproximadamente 230 metros. O historiador grego Heródoto, em sua época afirmou que para construí-la foram necessários uns 30 anos e o trabalho de 100 mil homens.

Segundo Mlodnow (2010), as construções das pirâmides e templos pelas civilizações egípcia e babilônica são o testemunho mais antigo de um conhecimento sistemático da geometria.

Figura 4 – Pirâmides de Gizé

Fonte: www.sohistoria.com.br/ef2/egito/piramides.php acessado em 22/07/2015

Segundo Boyer (1996), Platão deve ser o responsável pela restrição aos instrumentos utilizados no DG, isto é, só seria permitido o uso de compasso e régua sem escalas para as construções. Hoje, já é aceito o uso de esquadros para traçados de paralelas e perpendiculares. Como na época de Euclides só contávamos com os números inteiros, o que restringia muitas vezes as medidas, as grandezas passaram a ser "construídas"ao invés de serem medidas ou calculadas.

> [...] a descoberta das grandezas incomensuráveis, frequentemente atribuída a um pitagórico, deve ter tido outras origens. Tal descoberta contribuiu para a separação entre a geometria e a aritmética, a primeira devendo se dedicar às grandezas geométricas e a segunda, aos números – separação que é um dos traços marcantes da geometria grega, ao menos na maneira como ela se disseminou com Euclides (ROQUE, 2012, p. 76).

Muitos problemas eram de fácil solução, já outros levaram muito tempo para serem solucionados, como a duplicação do cubo, a trissecção do ângulo e a quadratura do círculo. A busca da solução desses problemas por meio de régua e compasso foi de grande valia para o desenvolvimento da Geometria na Grécia. Foi na tentativa da resolução desses problemas através da régua e do compasso que se chegou às cônicas, várias curvas cúbicas e quadráticas, entre outras. Somente no século retrasado ficou comprovado que, utilizando apenas régua e compasso, esses problemas não teriam solução. Muitas vezes a solução ocorre utilizando Geometria Analítica. Como os problemas que envolvem as construções geométricas requerem conhecimentos básicos de Geometria, se as duas partes da Geometria (teórica e desenho) forem trabalhadas juntas, haverá um maior entendimento do conteúdo.

1.2 No Brasil

Segundo Zuin (2001), havia no Brasil uma cultura humanística herdada do ensino jesuítico, no qual não era dado ênfase no ensinamento da matemática. Só com o passar do tempo algumas modificações foram feitas, como a Reforma Pombalina em 1772, com a introdução de disciplinas como Geometria, Álgebra, Aritmética e, posteriormente, com a criação do Colégio Pedro II em 1837.

Figura 5 – Colégio Pedro II no século XIX e XXI

Fonte: www.skyscrapercity.com acessado em 23/07/2015

De acordo com Nascimento (1994), após a chegada de D. João VI ao Brasil, a necessidade de se estabelecerem as profissões técnicas e científicas faz com que sejam criados cursos de Desenho no país. A Missão Francesa composta por 18 integrantes chega ao Rio de Janeiro em 1816, a convite de D. João VI, para organizar e criar a Escola Real de Ciências, Artes e Ofícios no Brasil. Em 1817, é criado o curso de Desenho em Vila Rica. No entanto, apenas após abolição da escravatura, as artes e os trabalhos manuais começam a ser mais valorizados. É criado em 1812 o curso de Desenho e Figura na Bahia, e cinco anos depois é criado o curso de Desenho Técnico.

A Academia Real Militar da Corte foi fundada pela Carta Régia de 4 de Dezembro de 1810, através de D. João VI. Essa foi a primeira instituição destinada a um curso completo de Ciências Matemáticas, de Ciência de Observação, da Física, Química, Mineralogia, Metalurgia e Historia Natural. A partir daí, se estabeleceu o ensino sistemático da matemática, da ciência e das técnicas no Brasil no início do século XIX. Desta forma, passou a ser competência das escolas do Exército, da Marinha e das Engenharia ensinar a matemática de nível superior, pois antes de 1934 não havia instituição com essa responsabilidade (NASCIMENTO, 1994).

As matérias que compunham o currículo da Academia eram:

1º ano - Aritmética, Álgebra, Geometria, Trigonometria, Desenho.

2º ano - Álgebra, Geometria, Geometria Analítica, Cálculo Diferencial e Integral, Geometria Descritiva, Desenho.

3º ano - Mecânica, Balística, Desenho.

4º ano - Trigonometria Esférica, Física, Astronomia, Geodésia, Geografia Geral,Desenho.

5º ano - Tática, Estratégia, Castrametração (arte de assentar acampamentos), Fortificação de Campanha, Reconhecimento do Terreno, Química.

6º ano - Fortificação Regular e Irregular, Ataque e Defesa de Praças, Arquitetura Civil, Estradas, Portos e Canais, Mineralogia, Desenho.

7º ano - Artilharia, Minas, História Natural.

Observe que, enquanto a Geometria faz parte do currículo apenas no 1º e 2º anos, o Desenho só não estava incluído no 5º e 7º anos dos cursos, demonstrando que o caráter prático dessa disciplina era muito valorizado e utilizado em outras matérias. Isso pode ser constatado quando avaliamos as disciplinas do curso, como Geometria Descritiva, Arquitetura Civil, Estradas, Portos e Canais, as quais necessitam de conhecimentos de Desenho. Sendo importante para os profissionais formados nas diversas áreas de competência da instituição, sua presença durante cinco anos se mostra fundamental.

O Desenho Geométrico permaneceu no Brasil como uma componente curricular escolar durante 40 anos de 1931 a 1971, quando foi promulgada a Lei 5692 da LDB que dividia as disciplinas em dois núcleos: Núcleo Obrigatório e Núcleo Optativo. Desde então o ensino fundamental no Brasil sofreu grandes mudanças (ZUIN, 2001). Com isso, muitas escolas deixaram de aplicar as construções geométricas como uma componente curricular obrigatória, passando esta a ser uma disciplina do núcleo optativo, que integraria a parte diversificada do currículo, onde a escola tinha liberdade de escolher, daí o DG passou a fazer parte do núcleo das disciplinas optativas, enquanto Educação Artística passou a fazer parte do núcleo obrigatório. Algumas unidades de ensino não-profissionalizantes mantiveram o Desenho na grade curricular, outras optaram por utilizar as aulas de Educação

Artística para tal e outras ainda ensinavam Desenho como uma disciplina à parte, sem conexão com a Geometria Plana ensinada nas aulas de Matemática.

Nessa mesma época, as construções geométricas foram abolidas dos vestibulares para os cursos de Engenharia e Arquitetura, reafirmando o desprestígio desse ramo da Matemática. Porém, sabe-se que dentre as instituições que mantiveram o ensino do Desenho, havia uma diferença quanto a quem essa matéria era destinada, segundo Young (1971) o ensino das Construções Geométricas era presente nos cursos técnicos de Mecânica, Edificações, Estradas, entre outros, sob o nome de Desenho Técnico, pois eram apresentados aos alunos apenas o que fosse requisito básico para a compreensão dessas áreas específicas. Entretanto, não apresentavam a relação existente entre o Desenho Técnico e a Geometria Euclidiana.

Somente no final da década de noventa, com a publicação dos Parâmetros Curriculares Nacionais vemos um movimento contrário, isto é, o incentivo à volta das construções geométricas feitas com os instrumentos euclidianos. Esse incentivo é visto no campo do Espaço e Forma, mas não deve ser restringir a ele.

Segundo Zuin (2002, p. 11), as Construções Geométricas devem ser relacionados com os demais campos do conhecimento, "em particular com as atividades numéricas, métricas e com a noção de proporcionalidade ". As Construções Geométricas devem ser vistas como um saber paralelo à teoria da Geometria: as duas devem caminhar juntas, só assim os Desenhos Geométricos voltarão a ter seu merecido valor.

De acordo com Zuin (2002), os PCNs sugerem também um retorno da Geometria não apenas com os instrumentos euclidianos, mas permitindo também, o uso dos outros instrumentos como, régua graduada, esquadro e transferidor. Para Zuin (2001), existe um real interesse, por parte de alguns professores de Matemática, pelo ensino de Geometria e das construções com régua e compasso, não só no ensino fundamental, mas também no ensino médio, no qual pode-se dar um melhor embasamento teórico, contribuindo para a formação dos estudantes. Através do DG, definem-se conceitos, demonstram-se propriedades, se resolvem problemas, desenvolve-se raciocínio lógico-dedutivo e também a criatividade científica, que é a capacidade de concluir conhecimentos.

As construções geométricas estão ganhando força na educação básica, ela é de fundamental importância para a matemática e principalmente a geometria, há uma preocupação da Secretaria de Educação do Estado do Rio de Janeiro quando ao ensino de construções geométricas, pois a mesma ja inseriu o uso de régua e compasso no Currículo Mínimo do sétimo ano do Ensino Fundamental como mostra a figura 6 (JULIANELLI, 2012).

Figura 6 – Currículo Mínimo (RJ), Matemática, 7º ano do Ensino Fundamental

Matemática — **7º ANO / ENSINO FUNDAMENTAL**

1º Bimestre

Campo Numérico Aritmético	Números inteiros
Habilidades e Competências	- Ordenar e comparar os números inteiros. - Representar números inteiros na reta numérica. - Determinar o valor absoluto de um número inteiro. - Realizar as quatro operações elementares com os números inteiros. -Calcular potências com números inteiros.
Campo Geométrico	**Ângulos**
Habilidades e Competências	- Compreender o conceito de ângulo e identificar seus elementos. - Identificar e representar ângulos retos, agudos e obtusos. - Construir ângulos utilizando régua, transferidor e compasso. - Compreender a ideia de ângulo como mudança de direção.

Fonte: http://www.rj.gov.br/web/seeduc acessado em 19/10/2015

Capítulo 2

A Geometria com régua e compasso

> Não há geometria sem régua e compasso. [...] O aprendizado das construções amplia as fronteiras do aluno e facilita muito a compreensão das propriedades geométricas, pois permite uma espécie de "concretização do conhecimento. [...] Em todas as interfaces que a Matemática faz com a linguagem gráfica, o conhecimento de Desenho entra como ferramenta enriquecedora (ZUIN, 2001, p. 177).

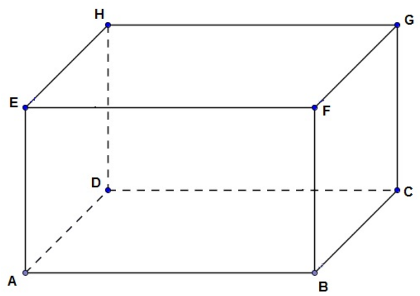
2.1 Noções básicas

Para introduzir as construções geométricas os alunos devem primeiramente suprimir todas as dúvidas relativas a pontos, retas, semirretas e segmentos de retas. Umas forma de fácil entendimento é o professor dar a própria sala como exemplo, pois elas possuem o formato de um paralelepípedo que é uma figura do cotidiano do aluno. Serão apresentados também os instrumentos de construções geométricas.

2.1.1 O ponto e a reta

1) O Ponto

Figura 7 – Pontos

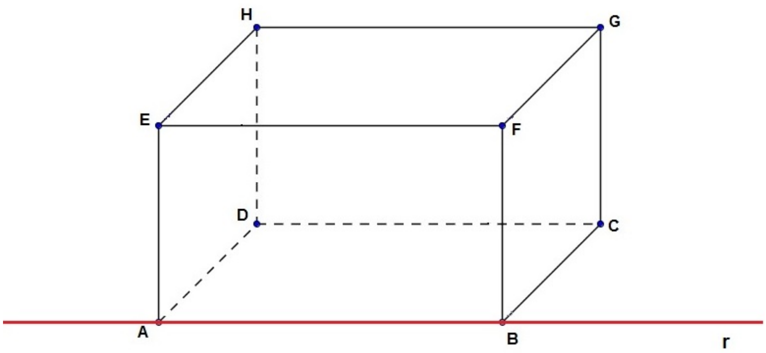


Fonte: Elaboração própria

Na figura 7 os vértices A, B, C, D, E, F, G e H são o que chamamos de pontos, e esses devem ser representados por letras maiúsculas do alfabeto. Observe que cada vértice do paralelepípedo que é o encontro de suas arestas determina um ponto.

2) A Reta

Figura 8 – Reta



Fonte: Elaboração própria

Na figura 8 prolongamos uma das arestas do paralelepípedo, nesse caso a aresta AB, e assim determinamos a ideia de *reta*. As retas podem ser indicadas por uma letra minúscula do alfabeto ou por dois pontos contidas nela. Podemos nos referir a essa reta como *reta r* ou *reta* AB.

3) Semirreta

Figura 9 – Semirreta

Fonte: Elaboração própria

Definição: Semirreta é uma parte da reta que possui uma origem, mas não existe um ponto em que ela termine.

Observando a figura 9 temos as semirretas $\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OA}$:

$\overrightarrow{OB}$ é a semirreta onde *O* é ponto inicial e *B* indica a direção e o sentido.
$\overrightarrow{OA}$ é a semirreta onde *O* é ponto inicial e *A* indica à direção e o sentido.

Se considerarmos uma reta *r* e os pontos *A, O e B* contidos nela, vemos que o ponto *O* divide a reta em duas partes: a primeira, que se inicia em *O* e caminha para a direita em direção de *B* (azul) e a segunda que se inicia em *O* e caminha para a esquerda em direção de *A* (vermelha).

4) Segmento de reta

Figura 10 – Segmento de Reta

Fonte: Elaboração própria

Definição: Segmento de reta é um pedaço finito da reta, isto é, ele tem um inicio e fim.

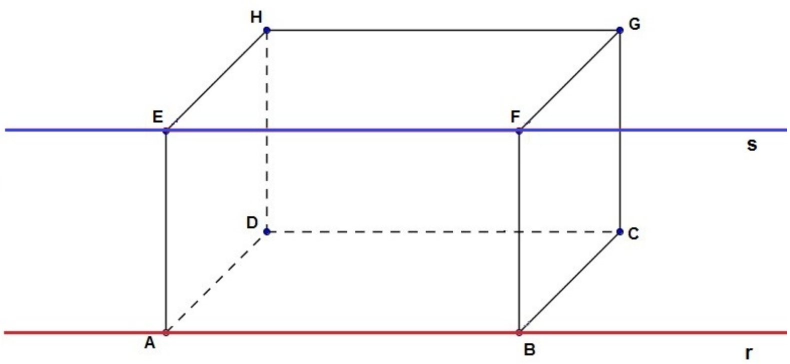
Se na figura 10, considerarmos apenas o conjunto dos pontos compreendidos entre *A* e *B*, incluindo-os, teremos um segmento de reta e esse será denotado por $\overline{AB}$ segmento em vermelho. Assim, observando essa mesma figura temos também os segmentos de retas $\overline{BC}$ segmento lilas e $\overline{AC}$ que é a união do segmento $\overline{AB}$ com $\overline{BC}$.

2.1.2 Posição relativa entre duas retas no plano

1) Retas paralelas

Duas retas são consideradas paralelas se estiverem num mesmo plano, não apresentarem nenhum ponto em comum e a distância entre elas permanecer constante.

Figura 11 – Retas Paralelas



Fonte: Elaboração própria

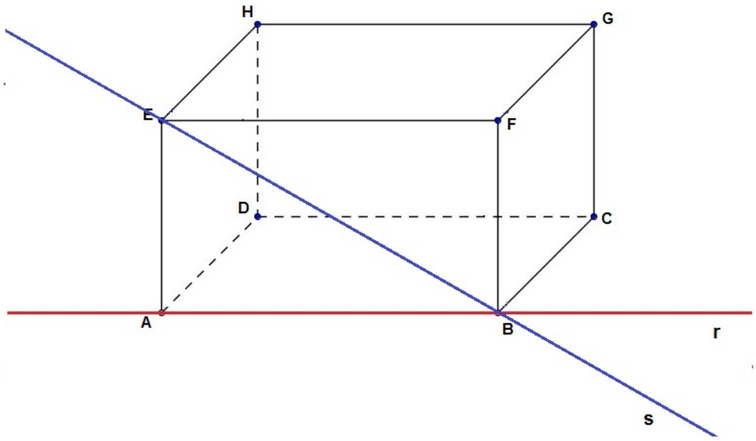
Observe a figura11, as retas *r* e *s* que são os prolongamentos dos segmentos de retas $\overline{AB}$ e $\overline{EF}$ respectivamente, são paralelas.
Notação: r//s, significa que as retas r e s são paralelas.

Embora não seja foco deste trabalho, existem também as retas coincidentes. Duas retas são consideradas coincidentes se pertencerem a um mesmo plano e possuírem todos os pontos em comum.

2) Retas Concorrentes

Duas retas são consideradas concorrentes se existir um único ponto em comum entre elas.

Figura 12 – Retas Concorrentes



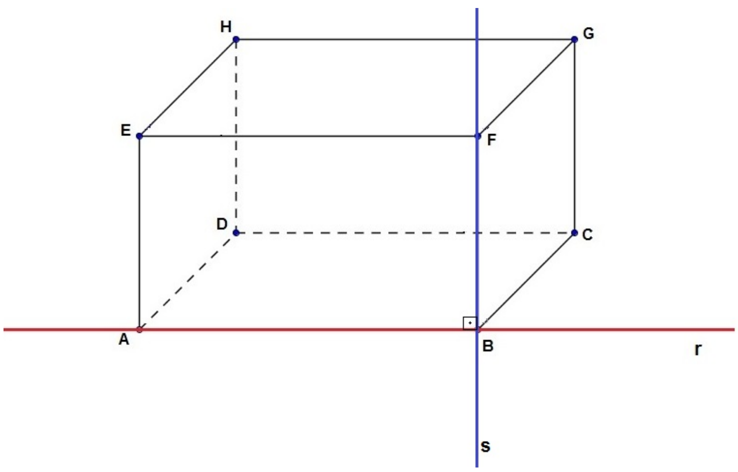
Fonte: Elaboração própria

Observe a figura 12, as retas r e s tem o ponto B em comum.
Notação: $r \nmid s$, significa que as retas r e s são concorrentes.

3) Retas Concorrentes Perpendiculares

Duas retas podem ser consideradas perpendiculares se forem concorrentes e o ângulo entre elas for de 90º.

Figura 13 – Retas Perpendiculares



Fonte: Elaboração própria

Observe a figura 13, as retas r e s são perpendiculares pois estão no mesmo plano e tem o ponto B em comum formando entre elas um ângulo de 90º.
Notação: $r \perp s$, significa que as retas r e s são perpendiculares.

2.2 Instrumentos utilizados na Construção Geométrica

Segundo Wagner (2000), as construções com régua e compasso já aparecem no século V a.C., época dos pitagóricos, e tiveram enorme importância no desenvolvimento da matemática grega.

Desde Os Elementos de Euclides, o desenho geométrico acompanha a Geometria Plana. A proposta de Euclides, ao elaborar sua geometria, era o estudo da possibilidade de construir uma figura usando régua e compasso e não, simplesmente, a execução do traçado da figura com esses instrumentos. Porém, o desenho geométrico já não é mais trabalhado nas escolas e, paralelamente, a essa realidade ou como consequência dela, o ensino de Geometria tem se tornado o terror da Matemática, tanto para alunos quanto para professores (PUTNOKI, 1993).

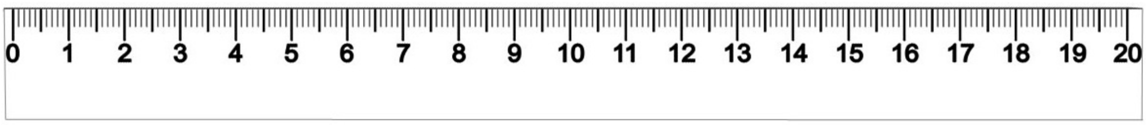
> A rigor, ensinar geometria sem esses instrumentos é como dar a uma criança um triciclo sem as duas rodas traseiras. Ela até consegue se locomover, mas muito mal. Estamos é mutilando a geometria quando a ensinamos como fazemos hoje, além de abrir mão de ferramentas cujo alcance didático é inesgotável (PUTNOKI, 2013, p. 369).

O ensino com régua e compasso é definitivamente muito importante para geometria, torna-se relevante que o uso da régua e do compasso seja incorporado à geometria.

1) A Régua

A régua é usada exclusivamente para ligar dois pontos e construir retas, semirretas ou segmentos de reta. Essa régua pode ser graduada ou não. Normalmente as réguas que os alunos utilizam são graduadas em milímetros e centímetros (Figura 14).

Figura 14 – Régua



Fonte: http://www.loucospormusica.com acessado em 20/09/2015

2) O Compasso

O compasso é um instrumento com muitas utilidades em DG. Entre elas estão: Construção de circunferências, arcos, ângulos, transporte de ângulo e segmentos. Ele possui duas hastes: uma chamada ponta seca, onde encontramos uma ponta metálica e na outra encontra-se o grafite que deve estar sempre apontado. As duas hastes do compasso devem ter o mesmo tamanho (Figura 15).

Figura 15 – Compassos

Fonte: http://www.sualistaescolar.com.br acessado em 20/09/2015

Observação 2.1 *Na atividade quatro do Anexo A foi proposta a construção de um tangran, que é um quebra-cabeça de origem milenar feito na China. Ele é formado por sete peças, cinco triângulos retângulos e isósceles, sendo dois pequenos, um médio e dois grandes, também possui um quadrado e um paralelogramo, ambos com mesma área de dois triângulos dos pequenos.*

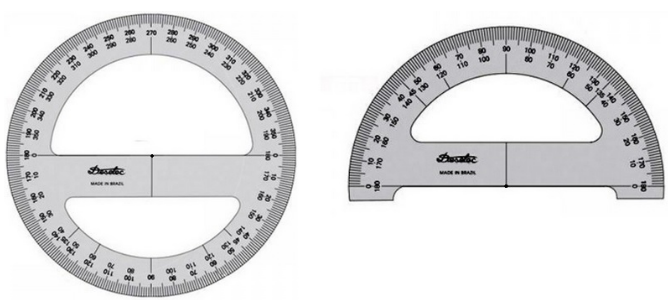
> *O tangram é utilizado como material de apoio didático. Isso se deve ao fato de as formas geométricas que o compõem permitirem inúmeras explorações, como, por exemplo, a construção de polígonos: triângulos, quadriláteros, pentágonos e hexágonos. Este material é de fácil manuseio e contribui para que os alunos experimentem, explorem intuitivamente, visualizem e contextualizem situações geométricas, o que auxilia no processo de construção do raciocínio lógico-dedutivo e na explicitação formal desse raciocínio (MORI; ONAGA, 2012, p. 51).*

Tanto como jogo quanto como arte, o tangram possui um forte apelo lúdico e oferece ao aluno um desafio envolvente.

3) O Transferidor

Existem dois tipos de transferidor: um de meia volta ou 180° e o outro de uma volta ou 360° como mostra a figura 16. Esses instrumentos são utilizados para medir ângulos e auxiliar em suas construções.

Figura 16 – Transferidores

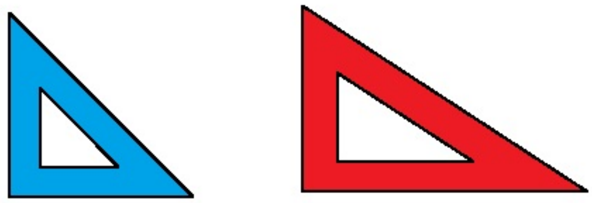


Fonte: http://www.papeldepapel.com.br acessado em 21/092015

4) Os Esquadros

Há dois tipos de esquadros como se pode observar na figura 17, um deles possui os seguintes ângulos 45°, 45° e 90° (esse esquadro é comumente chamado de esquadro de 45° ou ainda isósceles), o outro possui ângulos de 30°, 60° e 90° (sendo esse chamado de esquadro de 60° ou ainda escaleno).

Figura 17 – Par de Esquadros



Fonte: Elaboração própria

Os esquadros são utilizados para traçar segmentos perpendiculares ou paralelos e também alguns ângulos.

2.3 Habilidade de desenho

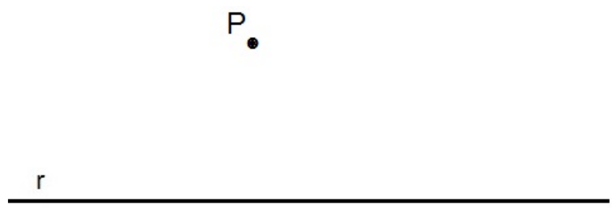
As habilidades de desenho devem ser trabalhadas de forma clara e com muita calma, pois os alunos não estão acostumados a aprender geometria através das construções geométricas. Neste primeiro contato mostraremos como fazer as construções básicas utilizando a régua e o compasso.

Segundo Wagner (2000), os problemas relacionados ao traçado de paralelas e perpendiculares devem ser os primeiros a serem aprendidos.

2.3.1 Paralelas e perpendiculares

1) Observe a figura 18. Dados uma reta r e um ponto P fora dessa reta, trace uma reta perpendicular a r que passe por P.

Figura 18 – Primeiro problema antes da solução



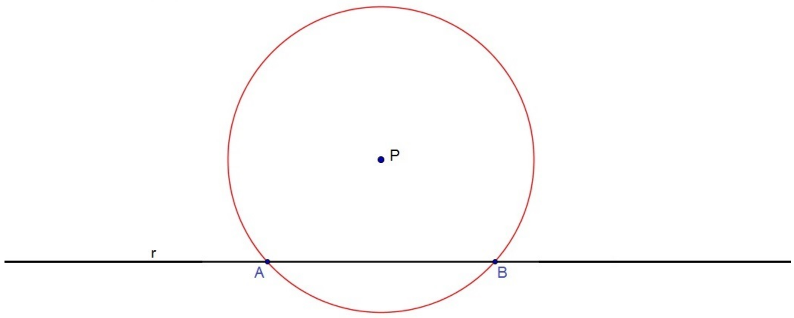
Fonte: Elaboração própria

A solução desse problema é feito da seguinte maneira:

Roteiro

1º Passo: Com centro em P, ou seja, a ponta seca do compasso em cima do ponto P, trace uma circunferência qualquer cortando a reta r em dois pontos e esses serão chamados de A e B, como mostra a figura 19.

Figura 19 – Pontos A e B na reta r com P fora dela

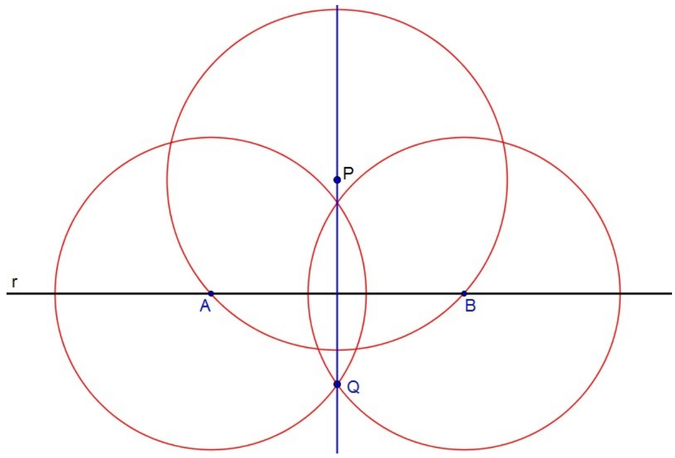


Fonte: Elaboração própria

2º Passo: Desenhe duas circunferência de raios congruentes, uma com centro no ponto A e a outra em B de tamanho suficiente para se intersectarem, determinando assim um ponto Q na interseção dessas circunferências como mostra a figura 20.

3º Passo: Utilizando a régua trace uma reta passando por P e Q.

Figura 20 – Reta PQ perpendicular a reta r

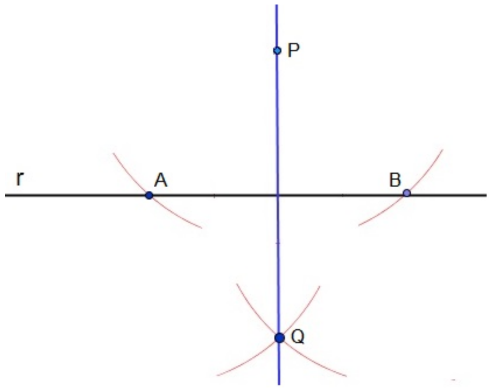


Fonte: Elaboração própria

Observe que a reta que passa por P e Q é perpendicular a reta r como mostra a figura 20, e assim o problema está resolvido.

Depois que os alunos estiverem dominando o uso da régua e do compasso podemos ensina-los que não é necessário desenhar toda a circunferência, pode-se desenha apenas um pequeno arco, desde que as interseções sejam feitas no lugar certo, assim a construção fica mais limpa, como mostrado no desenho abaixo (Figura 21).

Figura 21 – Reta perpendicular traçada com arcos



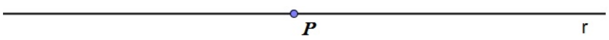
Fonte: Elaboração própria

Um fato importante das construções geométricas é que não basta encontrar a solução. É preciso justificar por que ela está correta. Neste primeiro problema a justificativa é a seguinte:

Observe que na figura 20 a primeira circunferência desenhada garante que PA = PB e as duas seguintes, garantem que QA = QB. Assim, os pontos P e Q equidistam de A e B. Isso garante que a reta PQ é a mediatriz do seguimento AB, portanto AB $\perp$ PQ.

2) Dado uma reta r e um ponto P pertencente a essa reta, trace uma reta perpendicular a r que passe por P (Figura 22).

Figura 22 – Segundo problema antes da solução

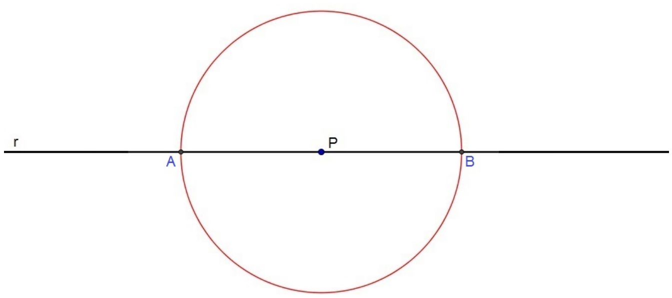


Fonte: Elaboração própria

Roteiro

1º Passo: Construa uma circunferência com centro em P (ponta seca do compasso), determinando assim os pontos A e B na reta r como mostra a figura 23.

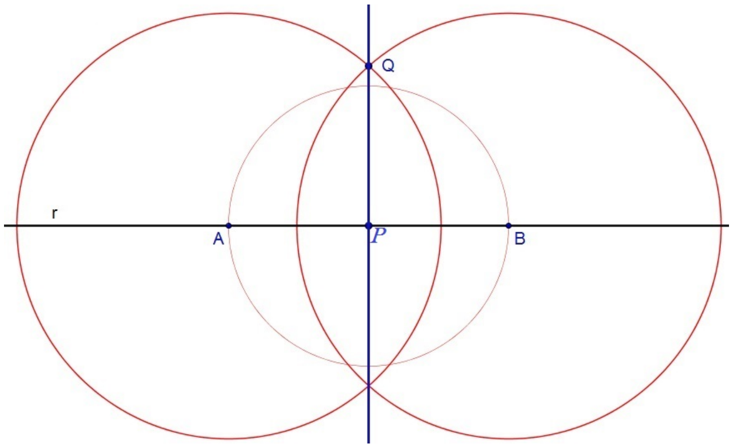
Figura 23 – Pontos A e B na reta r com P na reta



Fonte: Elaboração própria

2º Passo: Agora trace duas circunferências de raio congruentes, uma com centro em A e a outra em B. Determinando assim um ponto Q na interseção dessas circunferências como mostra na figura 24.
3º Passo: Trace uma reta passando por P e Q para terminar a solução do problema.

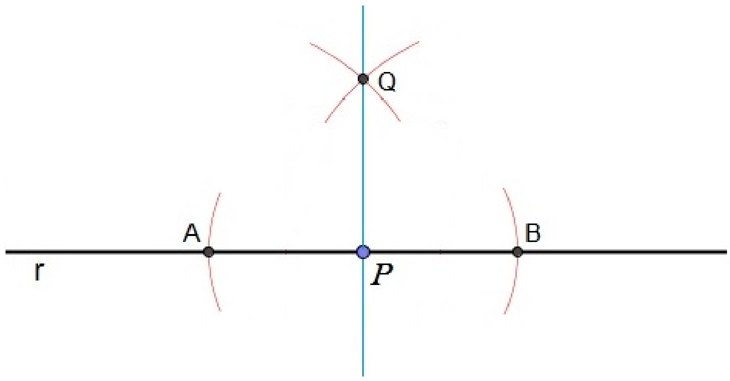
Figura 24 – Circunferências com centro em A e B



Fonte: Elaboração própria

Os alunos podem resolver o mesmo problema traçando apenas arcos de circunferências e depois traçar a reta PQ perpendicular a r como mostra a figura 25.

Figura 25 – Reta Perpendicular



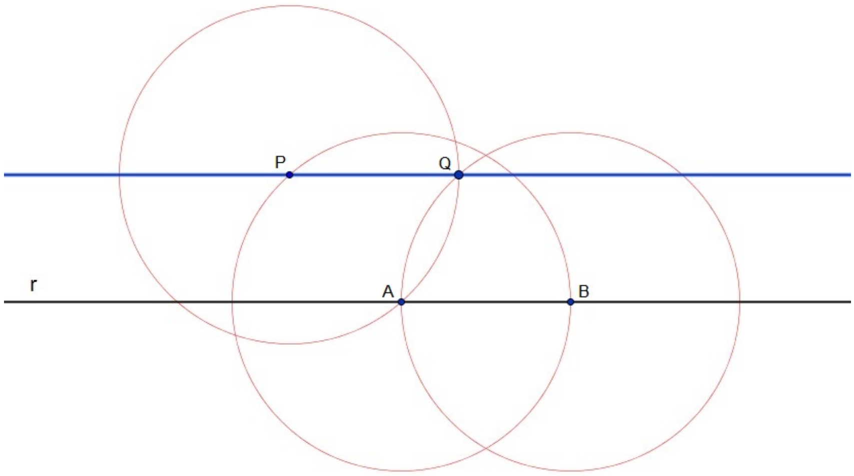
Fonte: Elaboração própria

3) Dado uma reta r e um ponto P fora dessa reta, trace uma reta paralela a r que passe por P (Figura 18).

Roteiro
1º Passo: Faça uma circunferência com centro em P cortando a reta r formando um ponto A como mostra a figura 26.
2º Passo: Mantenha a abertura do compasso e trace outra circunferência com centro em A e marque um ponto B na interseção com r.

3º Passo: Faça uma terceira circunferência com centro em B formando com a primeira um ponto Q.
4º Passo: Trace uma reta passando por P e Q, assim o problema está resolvido.

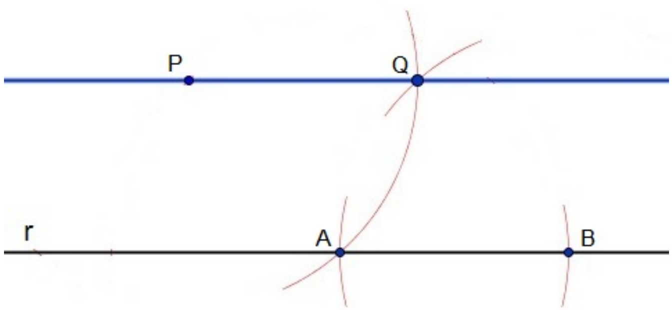
Figura 26 – Reta PQ paralela a reta r



Fonte: Elaboração própria

Como feito no problema anterior, podemos mostrar aos alunos que esse tipo de problema pode ser resolvido traçando apenas pequenos arcos, observando a figura 27 e veremos que a solução fica mais limpa.

Figura 27 – Reta paralela



Fonte: Elaboração própria

A justificativa dada por Eduardo Wagner (2000) é a seguinte. Da forma como foi feita a construção, PABQ é um losango e portanto, seus lados PQ e AB são paralelos.

2.3.2 Traçando paralelas e perpendiculares com régua e esquadros

1) Dado uma reta r e um ponto P fora dessa reta, trace uma reta perpendicular a r que passe por P (Figura 18).

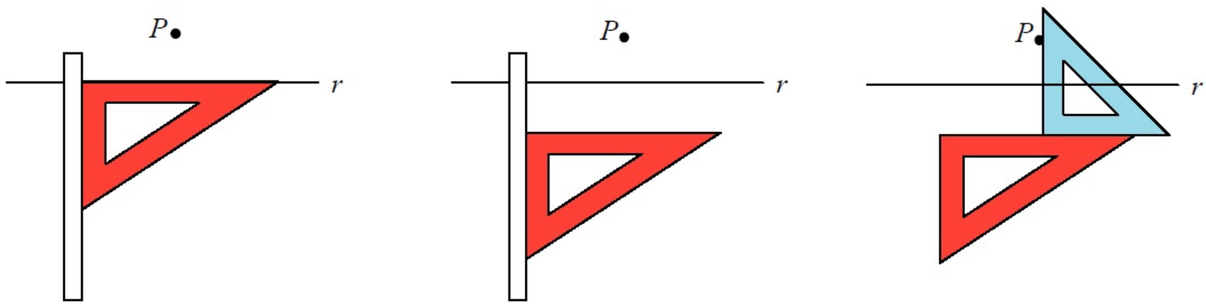
Roteiro

1º Passo: Posicione a régua e um dos esquadros como mostra a figura 28 (desenho da esquerda).

2º Passo: Fixe bem a régua e deslize o esquadro afastando-o da reta r para um melhor traçado da perpendicular (desenho do meio).

3º Passo: Posicione o segundo esquadro sobre o primeiro e trace por P uma reta perpendicular a r (desenho da direita).

Figura 28 – Perpendiculares



Fonte: Elaboração própria

1.1) Uma outra solução para este problema é a seguinte:

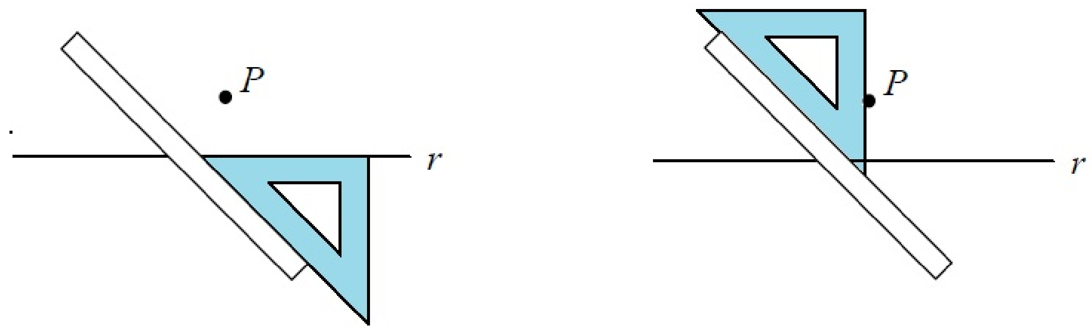
Roteiro

1º Passo: Posicione a régua e o esquadro de 45º como mostra a figura 29 (desenho a esquerda);

2º Passo: Fixe bem a régua e deslize o esquadro até que o outro cateto passe por ponto P;

3º Passo: Fixe o esquadro e trace por P uma perpendicular a r e o problema estará resolvido (desenho a direita);

Figura 29 – Perpendiculares com esquadro de 45º

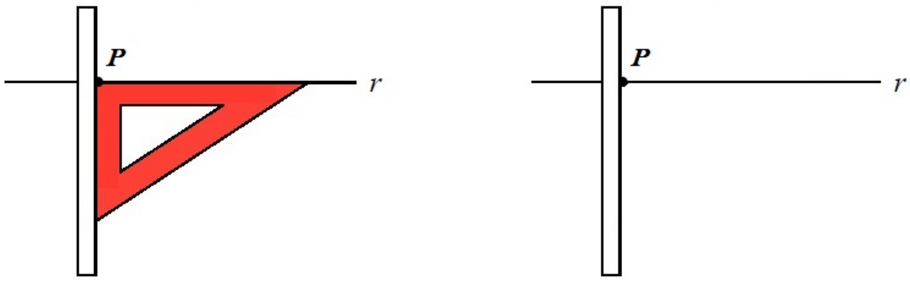


Fonte: Elaboração própria

2) Dado uma reta r e um ponto P pertencente a essa reta, trace uma reta perpendicular a r que passe por P (Figura 22).

Roteiro
1º Passo: Posicione a régua e um dos esquadros como mostra a figura 30 (desenho da esquerda);
2º Passo: Fixe bem a régua remova o esquadro e trace uma reta perpendicular a r passando por P e o problema estará resolvido (desenho da direita);

Figura 30 – Perpendiculares com um dos esquadros

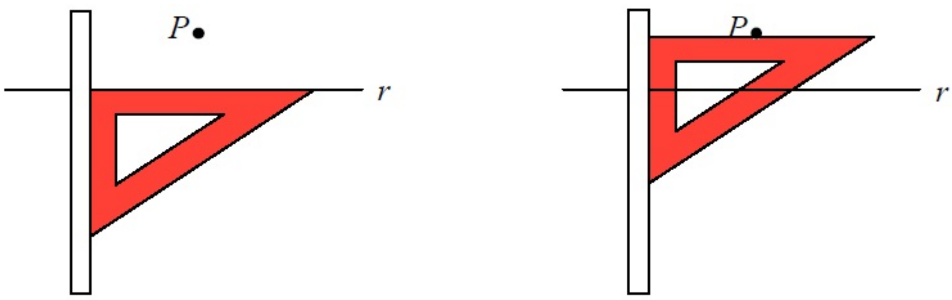


Fonte: Elaboração própria

3) Dado uma reta r e um ponto P fora dessa reta, trace uma reta paralela a r que passe por P (Figura 18).

Roteiro
1º Passo: Posicione a régua e um dos esquadros como mostra a figura 31 (desenho a esquerda);
2º Passo: Fixe bem a régua e deslize o esquadro até que sua extremidade encoste no ponto P;
3º Passo: Fixe o esquadro e trace uma reta paralela a r e o problema está resolvido (desenho a direita);.

Figura 31 – Paralelas com esquadro



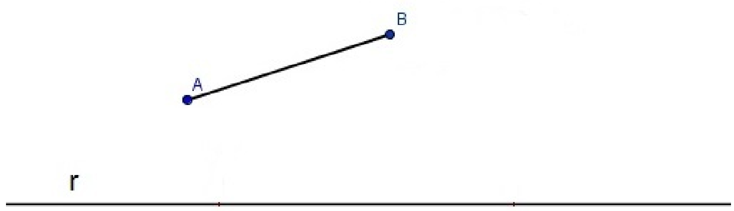
Fonte: Elaboração própria

2.3.3 Transporte de segmento

Transportar segmentos significa traçar um segmento de igual comprimento sobre uma reta ou semirreta dada.

1) O transporte do segmento AB da figura 32 para a reta r abaixo usando apenas o compasso.

Figura 32 – Segmento AB e a reta r

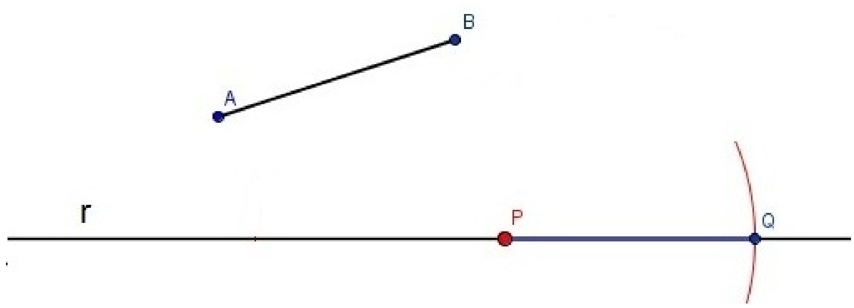


Fonte: Elaboração própria

Roteiro

1º Passo: Marque um ponto P na reta r como na figura 33;
2º Passo: Abra o compasso com tamanho medindo AB (para fazer tal abertura basta colocar a ponta seca em A e o grafite em B);
3º Passo: Mantenha a abertura do compasso, coloque a ponta em P e trace um arco de circunferência de modo que corte a reta r, assim obtendo um ponto Q;

Figura 33 – Transportando segmento



Fonte: Elaboração própria

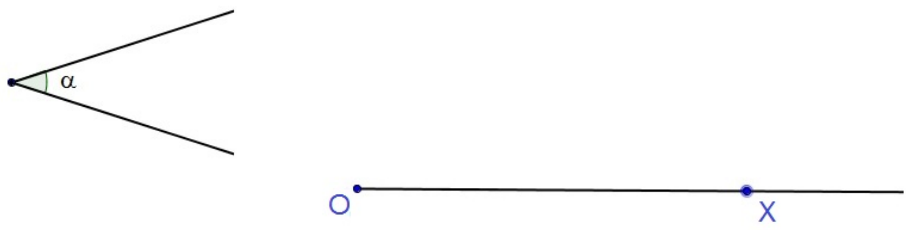
Observe que na figura 33 o segmento PQ é congruente ao AB e o problema está resolvido.

2.3.4 Transporte de ângulos

Transportar ângulos significa construir um ângulo, congruente ao ângulo dado, sobre uma semirreta que será um dos lados desse ângulo.

1) Dado um ângulo α e a semirreta OX como mostra a figura 34, construa um ângulo XOY que seja congruente a α.

Figura 34 – Ângulo e Semirreta

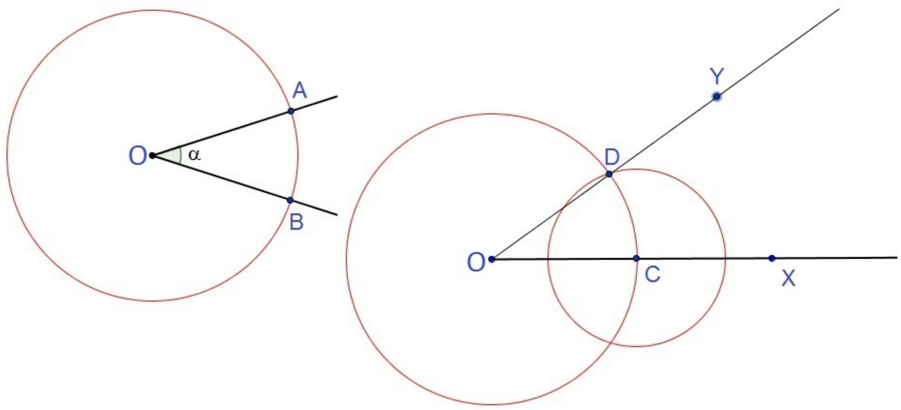


Fonte: Elaboração própria

Roteiro

1º Passo: Com a ponta seca do compasso no vértice do ângulo dado na figura 35 faça uma circunferência formando os pontos A e B na interseção com os lados do ângulo;
2º Passo: Sem modificar a abertura do compasso trace outra circunferências com centro em O, marque um ponto C na semirreta OX;
3º Passo: Pegue a medida do arco AB com o compasso e mantenha essa medida (coloque a ponta seca em A e o grafite em B) e mantenha essa abertura;
4º Passo: Coloque a ponta seca do compasso em C e faça uma outra circunferência, marque um ponto D na interseção com a primeira circunferência;
5º Passo: Trace a semirreta OY passando pelo ponto D e o problema está resolvido;

Figura 35 – Transporte de ângulos

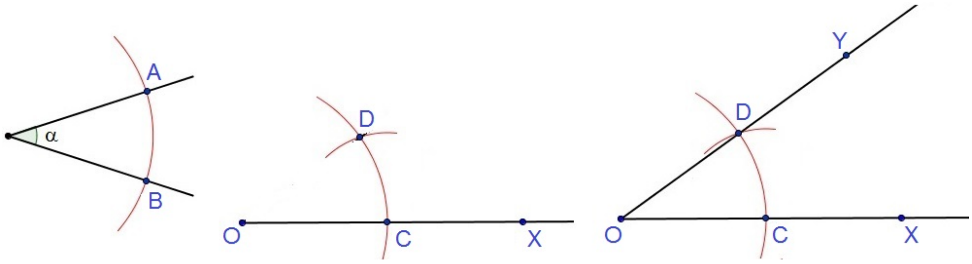


Fonte: Elaboração própria

Observe que na figura 35 o ângulo X $\hat{O}$ Y é congruente ao ângulo α da figura 34.

Esse mesmo problema pode ser resolvido traçando pequenos arcos, veja na figura 36 essa solução.

Figura 36 – Transporte de ângulos



Fonte: Elaboração própria

2.3.5 Mediatriz

A mediatriz de um segmento AB é uma reta perpendicular a AB que contém o seu ponto médio (WAGNER, 2000).

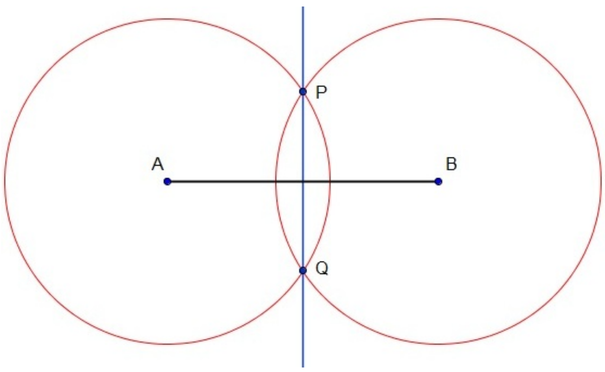
1) Trace a mediatriz do segmento de reta da figura 37.

Figura 37 – Segmento AB

Fonte: Elaboração própria

Roteiro
1º Passo: Trace duas circunferências com raios congruentes de modo que elas sejam secantes (figura 38), uma com centro em A e a outra em B;
2º Passo: Marque os pontos P e Q na interseção das circunferências e trace a reta PQ.

Figura 38 – Traçando a mediatriz com circunferências

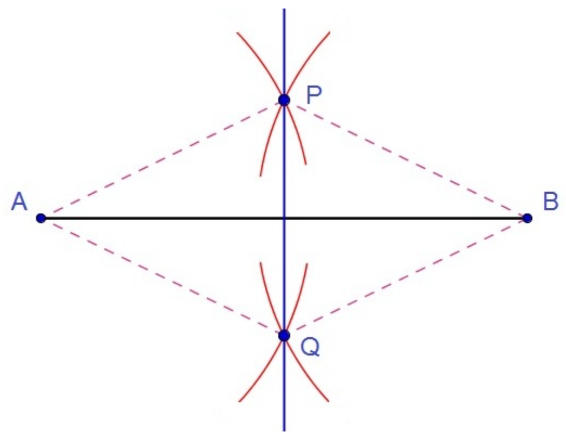


Fonte: Elaboração própria

Observe na figura 39 que a reta PQ é a mediatriz de AB porque sendo APBQ um losango, suas diagonais são perpendiculares e cortam-se ao meio. Ainda segundo Wagner (2000, p. 13) é importante lembrar que "a mediatriz de um segmento é o conjunto de todos os pontos que equidistam dos extremos do segmento".

Para construir uma mediatriz de forma mais limpa, traçamos dois arcos de circunferência com centros em A e B e com interseções P e Q como mostra na figura 39.

Figura 39 – Traçando a mediatriz com arcos

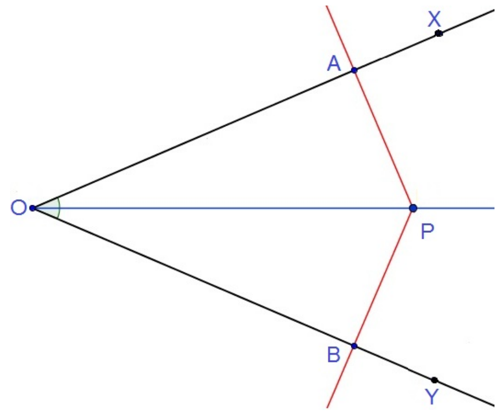


Fonte: Elaboração própria

2.3.6 Bissetriz

A bissetriz de um ângulo XÔY é a semirreta OP tal que o XÔP=PÔY, também é correto dizer que a bissetriz "divide" o ângulo em dois outros congruentes. Todo ponto da bissetriz de um ângulo equidista dos lados do ângulo. Na figura 40, P é um ponto da bissetriz OP do ângulo XÔY, temos que PA=PB e esses segmentos são perpendiculares aos lados do ângulo.

Figura 40 – Bissetriz: encontro das perpendiculares



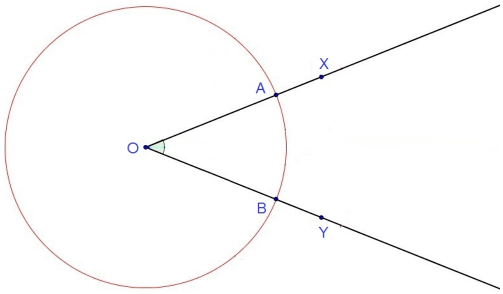
Fonte: Elaboração própria

Utilizando o transferidor podemos medir um ângulo qualquer e dividir o resultado da medição por dois e traçar a bissetriz com facilidade se essa medida nos der um valor exato, mas se essa medição não nos der valores exatos, dividir esse ângulo ao meio utilizando apenas o transferidor se tornará algo muito difícil.

O método que será apresentado é o mais prático e rápido para traçar bissetrizes de um ângulo qualquer.

1º Passo: Trace uma circunferência de raio conveniente e centro no vértice O, obtendo os pontos A e B como mostra a figura 41.

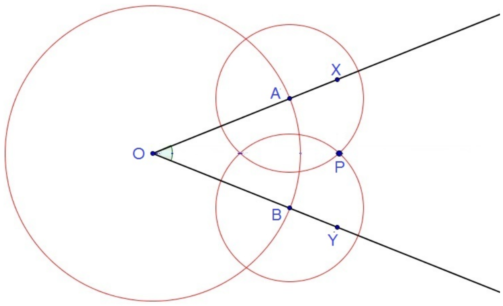
Figura 41 – Primeiro passo para traçar a bissetriz



Fonte: Elaboração própria

2º Passo: Em seguida trace mais duas circunferências de raios congruentes com centros em A e B. As duas circunferências devem se intersectar formando o ponto P como mostra a figura 42.

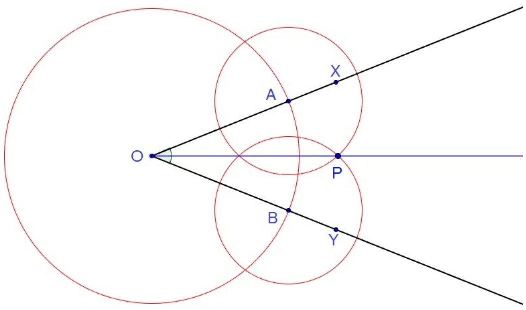
Figura 42 – segundo passo para traçar a bissetriz



Fonte: Elaboração própria

3º Passo: trace a semirreta OP que é a Bissetriz do ângulo XÔY, veja que na figura 43 os ângulos formados são congruentes.

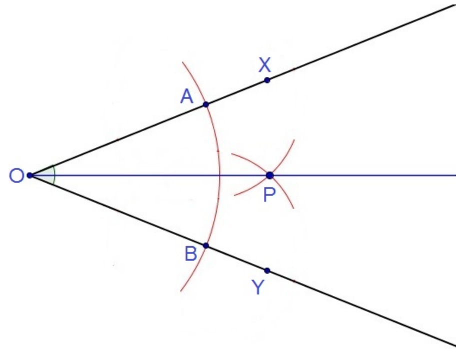
Figura 43 – terceiro passo para traçar a bissetriz



Fonte: Elaboração própria

Pode-se resolver esse mesmo problema traçando apenas arcos das circunferências mencionadas na resolução anterior. Observe a figura 44.

Figura 44 – Solução prática de traçar a bissetriz



Fonte: Elaboração própria

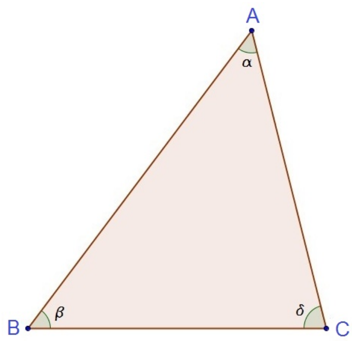
2.4 Triângulos

O triângulo é um dos polígonos mais utilizados na construção de figuras geométricas no nosso dia a dia. Segundo Roque e Pitombeira (2012), os triângulos fascinam as pessoas e de fato estão presentes em diversas áreas da vida humana. Antes de começar as Construções Geométricas dos triângulos, serão mencionados seus conceitos e propriedades elementares.

2.4.1 Partes de um triângulo

Os triângulos são polígonos que possuem três lados, três ângulos e três vértices, como mostra a figura 45.

Figura 45 – O Triângulo



Fonte: Elaboração própria

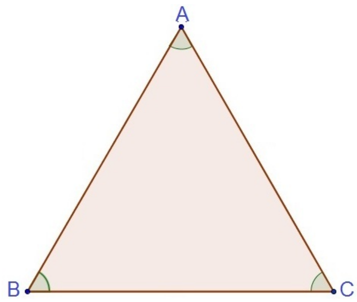
Segundo Muniz (2012), no triângulo genérico ABC, os vértices são A, B e C, os segmentos AB, AC e BC são os dos lados do triângulo ABC. Os ângulos α, β e δ são os ângulos internos desse triângulo.

2.4.2 Classificação quanto a medida de seus lados

Os triângulos possuem três classificações quanto à medida de seus lados, eles podem ser equiláteros, isósceles ou escalenos.

1) Equiláteros: São triângulos que possuem os três lados congruentes, como mostra a figura 46.

Figura 46 – Triângulo Equilátero

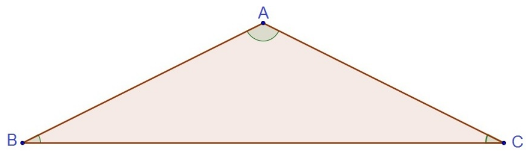


Fonte: Elaboração própria

Observe que o triângulo acima possui os três lados congruentes, ou seja, AB = AC = BC.

2) Isósceles: São os triângulos que possuem dois lados congruentes, como mostrado na figura 47 a seguir.

Figura 47 – Triângulo Isósceles

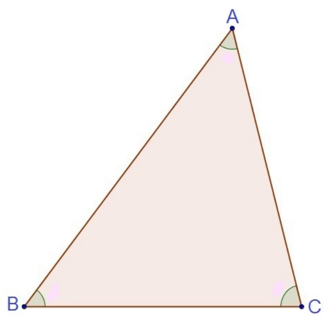


Fonte: Elaboração própria

O triângulo acima possui apenas dois lados iguais, observe que AB = AC $\neq$ BC.

3) Escalenos: São triângulos que não possuem lados congruentes, ou seja, todos os lados são diferentes, como mostra a figura 48.

Figura 48 – Triângulo Escaleno



Fonte: Elaboração própria

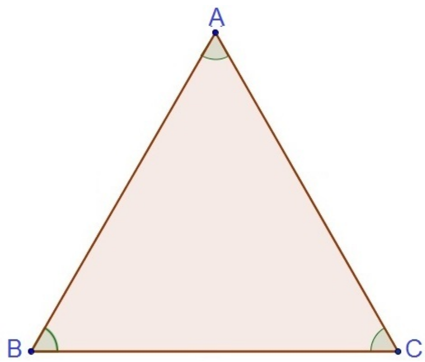
Observe que o triângulo acima não possui lados iguais, consequentemente AB $\neq$ AC $\neq$ BC.

2.4.3 Classificação quanto à medida dos ângulos

Assim como as classificações de acordo com a medida dos lados, os triângulos também possuem três classificações quanto à medida de seus ângulos, eles podem ser acutângulos, retângulos ou obtusângulos.

1) Triângulos Acutângulos: São aqueles que possuem os três ângulos agudos, os seja, todos os ângulos são menores que 90º, como pode-se observar na figura 49.

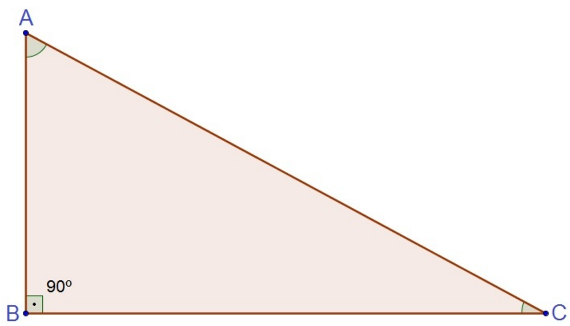
Figura 49 – Triângulo Acutângulo



Fonte: Elaboração própria

2) Triângulos Retângulos: São aqueles que possuem um de seus ângulos medindo 90º, este ângulo é chamado de reto, observe que na figura 50 o ângulo reto é o que se encontra no vértice B.

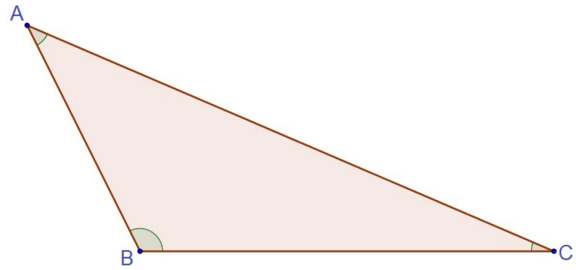
Figura 50 – Triângulo Retângulo



Fonte: Elaboração própria

3) Triângulos Obtusângulos: São aqueles que possuem um de seus ângulos medindo mais que 90º, observe que na figura 51 que o ângulo localizado no vértice B é maior que 90º.

Figura 51 – Triângulo Obtusângulo

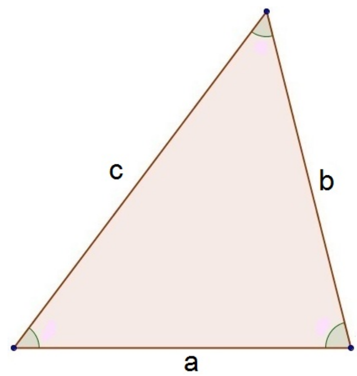


Fonte: Elaboração própria

2.4.4 Condição de existência de um triângulo

Considere o triângulo da figura 52, o que veremos a seguir mostrará as condições para que um triângulo exista de acordo com a medida de seus lados. A prova para essa condição foi demonstrada por Muniz (2012) e ele usou a construção para tal feito.

Figura 52 – Triângulo e lados a, b e c



Fonte: Elaboração própria

Como visto anteriormente, sabe-se que um triângulo é formado por três lados e cada um possui uma determinada medida, mas essas não podem ser escolhidas aleatoriamente.

Só irá existir um triângulo se, e somente se, os seus lados obedeceram à seguinte regra: um de seus lados deve ser maior que o valor absoluto (módulo) da diferença dos outros dois lados e menor que a soma desses dois lados. Veja o resumo da regra abaixo:

$$|c - b| < a < |c + b|$$
$$|c - a| < b < |c + a|$$
$$|b - a| < c < |b + a|$$

Para melhor entendimento do aluno, pode-se dizer que para construir um triângulo é necessário que a medida do maior lado seja menor que a soma de seus dois menores lados, isso garante a existência de um triângulo.

2.5 Construindo ângulos com régua e compasso

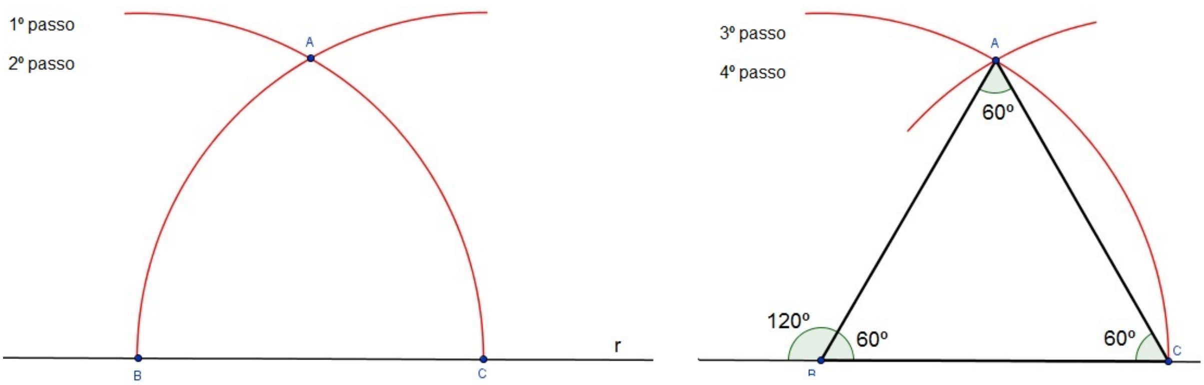
Alguns ângulos você pode obter utilizando régua e compasso. Para desenhar alguns desses ângulos usaremos como base o triângulo equilátero e retas perpendiculares.

Os ângulos notáveis (30°, 45°, 60°, 90° entre outros) e seus complementos e suplementos são facilmente construídos utilizando apenas régua, compasso e conhecimentos anteriores.

2.5.1 Ângulos de 120º, 60º, 30º e 15º

Roteiro figura 53
1º Passo: Desenhe uma reta r arbitrariamente.
2º Passo: Marque um ponto B e um ponto C na reta r.
3º Passo: Faça dois arcos de circunferências de raio BC (abra o compasso com tamanho BC) um com centro em B e o outro em C.
4º Passo: Marque o ponto A na interseção dos arcos da circunferências e ligue os segmentos AB e AC formando o triângulo ABC.

Figura 53 – Construindo ângulo de 60º e 120º

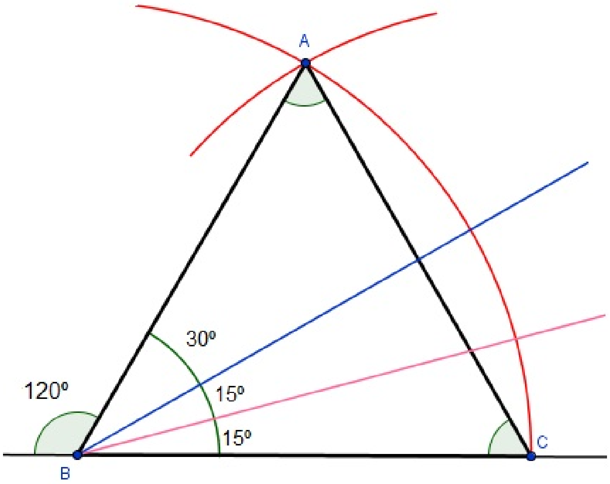


Fonte: Elaboração própria

Observe que o triângulo construído na figura 53 é equilátero, logo os ângulos são congruentes e cada um mede 60º. Observe também que ao fazer essa construção, automaticamente desenhamos o ângulo de 120º que é o suplementar de 60º.

Agora para construir o ângulo de 30º, basta traçar a bissetriz de 60º e para desenhar o ângulo de 15º, faça o mesmo procedimento com o ângulo de 30º como mostra a figura 54.

Figura 54 – Construindo ângulo de 30º e 15º



Fonte: Elaboração própria

2.5.2 Ângulos de 90º, 45º e 135º

Roteiro da figura 55

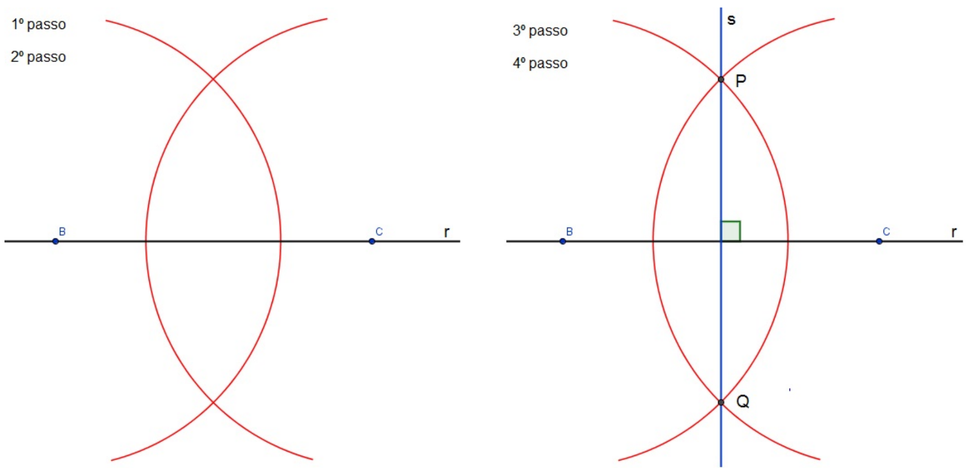
1º Passo: Desenhe uma reta r arbitrariamente.

2º Passo: Marque um ponto B e um ponto C na reta r.

3º Passo: Faça dois arcos de circunferências de raio congruentes com centro em B e C de modo que eles se encontrem em dois pontos.

4º Passo: Marque os pontos P e Q na interseção dos arcos da circunferências e trace uma reta s passando por PQ.

Figura 55 – Construindo ângulo de 90º

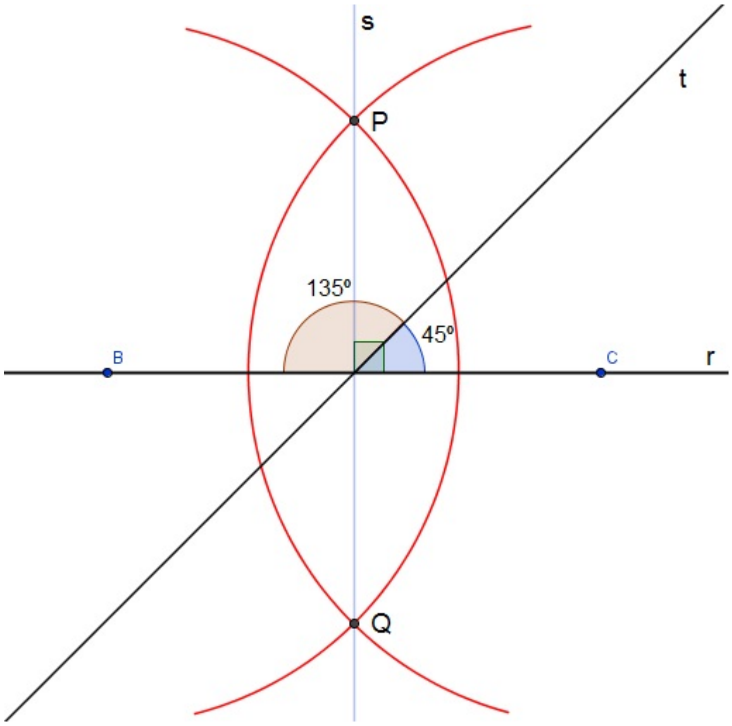


Fonte: Elaboração própria

Observe que acabamos de construir a mediatriz de BC na figura 55, logo está garantido que os ângulos formados entre as retas r e s são perpendiculares, ou seja, o ângulo entre elas mede 90º.

Agora para construir o ângulo de 45º basta traçar a bissetriz de 90º, observe que ao construir o ângulo de 45º automaticamente o ângulo de 135º estará determinado pois este é o suplemento do ângulo de 45º (Figura 56).

Figura 56 – Construindo ângulo de 45º e 135º



Fonte: Elaboração própria

Capítulo 3

Referencial teórico

3.1 Habilidades em Geometria

Segundo Hofer (1981), as habilidades básicas da Geometria estão divididas em cinco áreas, visuais, verbais, desenho, lógicas e aplicadas. Ele salienta que devemos dedicar mais tempo do Ensino Médio a elas. Algumas dessas habilidades podem ser estudadas por alunos do oitavo e nono ano do Ensino Fundamental. Em ambos os casos é importante proporcionar aos alunos do Ensino Médio experiências nestas habilidades.

3.1.1 Habilidades Visuais

Notoriamente observa-se que a Geometria é uma matéria claramente visual, mas com muita frequência seus aspectos visuais são utilizados primeiramente como uma ferramenta para provas, o que não é apropriado. Pesquisa sobre os dois hemisférios do cérebro (esquerdo e direito), constataram que o hemisfério esquerdo tem mais a ver com funções lógicas e analíticas, enquanto o hemisfério direito é responsável pelas funções sintetizadoras e espaciais. Assim, como em todo bom curso de geometria, é importante proporcionar aos alunos experiências adequadas para desenvolver ambos os lados do cérebro.

Segundo Piaget e Inhelder (1993), é necessário que o sujeito compreenda o objeto para que a representação simbólica ultrapasse o campo perceptivo. Os autores estudaram a construção da noção de reta por crianças e concluíram que para estas desenharem as retas é necessário que as mesmas tomem consciência do alinhamento dos pontos, o que é feito a partir da visualização.

3.1.2 Habilidades Verbais

No curso de Geometria o uso da linguagem é muito mais usado do que em qualquer outro curso. Há muitas informação de linguagens geométricas para os alunos aprenderem, definições precisas, postulados e proposições que descrevem propriedades de figuras e relações entre elas. Pede-se aos alunos que leiam muito material e que escrevam suas próprias demonstrações.

Alguns alunos têm muita dificuldade quando estão fazendo descrição de um conceito, pede-se aos professores que deem a oportunidade dos alunos descreverem e reconhecerem a falta de precisão nas suas próprias afirmações e não forcem formulações precisas antes dos alunos estarem prontos.

3.1.3 Habilidade de Desenho

As habilidades de desenhar devem ser desenvolvidas durante o curso de Geometria e atividades com as Construções Geométricas são muito importantes para um melhor aprendizado da Geometria e suas propriedades. Por exemplo, usar régua e transferidor para fazer desenhos ajuda a preparar os alunos para os postulados de reta e ângulo. Fazer construções com compasso e esquadro ajuda os alunos a entenderem propriedades das figuras geométricas. Usar papel quadriculado ajuda os estudantes a desenharem em duas e três dimensões e com isso entender suas propriedades. Os reticulados podem ser usados para preparar conceitos de área e volume, bem como para semelhança. Por exemplo, peça aos seus alunos para fazerem desenhos de figuras cujos lados são proporcionais a uma dada figura, este tipo de atividade desperta nos alunos a noção de semelhança, razão e proporção.

Os cursos de Geometria fornecem oportunidades únicas para os alunos desenvolverem e expressarem suas ideias em desenhos e diagramas. Na vida cotidiana os alunos tem mais necessidade de fazer um desenho do que ficar provando teoremas.

3.1.4 Habilidades Lógicas

A Geometria é uma das matérias do currículo que mais ajudam os alunos a analisarem e reconhecerem as formas de argumentos válidos e não-válidos no contexto de figuras geométricas e, posteriormente, em problemas da vida diária. A habilidade de desenvolver um argumento lógico num contexto geométrico pode focalizar-se num diagrama com certas informações dadas, os alunos são convidados a chegar à conclusão baseados em informações previamente fornecidas.

Muitos alunos necessitam trabalhar informalmente com ideias ilustrativas e verbais antes de serem introduzidos às regras da lógica. Eles devem estar conscientes das ambiguidades da linguagem, do uso de quantificadores, e assim por diante. Essas atividades podem ser tão divertidas quanto instrutivas. Por exemplo, considere a ambígua frase da placa de uma mercearia:
"Por que pagar preços mais altos em outro lugar? Compre aqui".

3.1.5 Habilidades Aplicadas

Segundo Hofer (1981), Geometria significa mais do que apenas "medição de terra". Os gregos usavam a palavra mathema para indicar "aquilo que é aprendido". Ele imaginava que os gregos viam a matemática como um estudo aprofundado de fenômenos físicos. Essa visão é bem ilustrada na escola Pitagórica, que a utilizava para explicar música, arte e ciência. Estudo da estrutura de uma colmeia levam naturalmente a questões sérias sobre hexágonos. Descrever movimento dos planetas leva a questão sobre círculos, elipses, esferas, e assim por diante. poderíamos ver a matemática como o estudo de estrutura frequentemente sugerido pelos fenômenos físicos.

Para Alan Hofer a ideia de descrever fenômenos matematicamente é chamado de Modelagem Matemática. Pela análise de um modelo pode-se prover informações sobre os fenômenos originais. Um dos melhores exemplos de modelo matemático é encontrado no livro Os Elementos de Euclides, que pode ter sido o resultado de uma tentativa de descrever logicamente o universo como era conhecido para os gregos. Modelos matemático são usados hoje em vários campos como: agricultura, biologia, administração, geografia e psicologia.

3.2 Teoria de Van Hiele

De acordo com Crowley (1996), a teoria de Van Hiele teve origem nas respectivas teses de doutorado de Dina van Hiele-Geldof e de seu marido, Pierre van Hiele, na Universidade de Utrecht, Holanda, em 1957. Dina, infelizmente, morreu logo após concluir sua tese e Pierre foi quem, desenvolveu e posteriormente publicou a teoria.

Enquanto a tese de Pierre tinha como foco explicar o motivo dos alunos terem problemas ao aprender geometria (sob tal aspecto, ela era explicativa e descritiva), a tese de Dina falava sobre um experimento educacional e, sob tal aspecto, é mais prescritiva com relação à ordenação do conteúdo de geometria e atividades de aprendizado dos alunos.

A principal característica da teoria é a distinção de cinco diferentes níveis de pensamentos com relação ao desenvolvimento da compreensão dos alunos acerca da geometria. Quatro características importantes da teoria são resumidas da seguinte maneira por (USISKIN, 1982).

- ordem fixa: Em outras palavras, um aluno não pode estar no nível n sem ter passado pelo nível n-1.
- adjacência: Em cada nível de pensamento que era intrínseco no nível anterior se torna extrínseco no nível atual.
- distinção: Cada nível possui seus próprios símbolos linguísticos e sua própria rede de relacionamentos que conecta tais símbolos.
- separação: Duas pessoas com raciocínio em níveis diferentes não podem entender uma à

outra.

Para Crowley (1996), os Van Hiele atribuíram a principal razão da falha do currículo de geometria tradicional ao fato de que o currículo era apresentado em um nível superior ao que os alunos se encontravam, ou seja, eles não conseguiam entender o professor, e o mesmo por sua vez não conseguia entender o porquê eles não conseguiam acompanhar a explicação!

3.2.1 Níveis de Van Hiele

Segundo Dutra (2010), a teoria de Van Hiele está dividida em cinco níveis, "visualização", "análise", "dedução informal", "dedução formal"e "rigor". Começando no nível zero e terminando no nível quatro.

Nível 0: Visualização

> Neste estágio inicial, os alunos percebem o espaço apenas como algo que existe em tono deles. Os conceitos de Geometria são vistos como entidades totais, e não como entidades que têm componentes ou atributos. As figuras geométricas, por exemplo, são reconhecidas por sua forma como um todo, isto é, por sua aparência física, não por suas partes e propriedades. Alguém neste nível consegue aprender um vocabulário geométrico, identificar formas específicas e, dada uma figura, consegue reproduzi-la (CROWLEY, 1996, p. 2).

Os alunos reconhecem as figuras visualmente por sua aparência global. Reconhecem triângulos, quadrados, paralelogramos, entre outros, por sua forma, mas não identificam as propriedades de tais figuras explicitamente.

Nível 1: Análise

Crowley (1996) diz que nesse nível começa uma análise sobre conceitos geométricos. Por exemplo, através da observação e de experimentação, os alunos começam a discernir as características das figuras. Surgem então propriedades que são utilizadas para conceituar classes de configurações. Assim, reconhece-se que as figuras têm partes, e as mesmas são reconhecidas por suas partes.

Os alunos começam a analisar as propriedades das figuras e aprendem a terminologia técnica adequada para descrevê-las, mas não correlacionam figuras ou propriedades das mesmas.

Nível 2: Dedução Informal

Segundo Crowley (1996), neste nível os alunos conseguem estabelecer inter-relações de propriedades tanto dentro de figuras quanto entre figuras. Dessa maneira os alunos são capazes de deduzir propriedades das figuras e reconhecer suas classes. As inclusões de classes são compreendidas, as definições tem significados, os alunos acompanham e formulam argumentos informais. Neste nível, porém, não compreendem o significado da dedução como um todo ou o papel dos axiomas. Resultados obtidos empiricamente são muitas vezes usados em conjunção com técnicas de dedução. Os alunos são capazes de acompanhar demonstrações formais, mas não conseguem entender como se pode alterar a ordem lógica nem como se pode construir uma prova partindo de princípios diferentes ou não familiares.

Nível 3: Dedução Formal

Neste nível os alunos começam a desenvolver sequências mais longas de enunciados e a entender o significado da dedução, o papel dos axiomas, e as definições de teoremas e provas. Realização espontânea de conjecturas e esforços iniciados por vontade própria para verificá-los de maneira dedutiva.

> Neste nível compreende-se o significado da dedução como uma maneira de estabelecer a teoria geométrica no contexto de um sistema axiomático. São percebidos a inter-relação e o papel de termos não definidos, axiomas, postulados, definições, teoremas e demonstrações. Neste nível, a pessoa é capaz de construir demonstrações, e não apenas de memorizá-las; enxerga a possibilidade de desenvolver uma demonstração de mais de uma maneira; compreende a interação das condições necessárias e suficientes; é capaz de fazer distinções entre uma afirmação e sua recíproca (CROWLEY, 1996, p. 4).

Nível 4: Rigor

Segundo Crowley (1996), neste nível o aluno é capaz de trabalhar em vários sistemas axiomáticos, isto é, podem-se estudar Geometrias não euclidianas e comparar sistemas diferentes. A Geometria é vista no plano abstrato. Os alunos que chegam a esse nível são capazes de avaliar vários sistemas dedutivos com um alto grau de rigor. Comparam sistemas baseados em diferentes axiomas e estudam várias geometrias na ausência de propriedades de um sistema dedutivo, tais como consistência, independência e completude dos axiomas. Capacidade de compreender demonstrações formais; Estabelecer teoremas em diversos sistemas e compara-los.

Van Hiele admitiu, em comunicação pessoal com Alan Hofer em 1895, que estaria particularmente interessado nos primeiros níveis que vão das séries escolares mais elementares ao início do terceiro grau. De fato, observamos na literatura disponível que o último nível, o do rigor, é menos desenvolvido nos seus trabalhos originais e que também tem merecido pouca atenção dos pesquisadores (HOFER, 1981).

Para Alan Hofer (1981), cada habilidade deve passar pelos cinco níveis de Van Hiele. Por exemplo, habilidade visual, primeiro nível reconhecimento de figuras geométricas, segundo nível análise de suas propriedades, terceiro nível ordenar propriedade de tipos diferentes de figuras, quarto nível a partir de determinadas informações deduz outras, quinto nível rigorosamente reconhece suposições injustificadas feita através de figuras em vários sistemas dedutivos. Daí passa para a próxima habilidade e aplica os níveis de Van Hiele novamente.

3.2.2 Fases da Aprendizagem Propostas por Van Hiele

De acordo com Dutra (2010), os Van Hiele criaram cinco fases sequenciais de ensino, e essa sequência favorece a aquisição de um nível do pensamento em um determinado tópico de geometria.

FASE 1: Questionamento ou Informação

O professor e os alunos estabelecem um diálogo sobre o material de estudo deste nível. Nestes diálogos serão feitas observações, questões são levantadas, e o vocabulário específico do nível é introduzido. Nesta fase o professor percebe quais os conhecimentos anteriores que os alunos têm do assunto, e estes percebem qual direção os estudos tomarão.

FASE 2: Orientação Direta

Esta é a fase da orientação dirigida. Os alunos devem explorar um determinado tópico através de materiais cuidadosamente selecionados pelo professor, que serão entregues gradualmente aos alunos de acordo com o nível em que ele se encontra. As atividades, em sua maioria, são tarefas de uma só etapa, que possibilitam respostas específicas e objetivas.

FASE 3: Explicitação

Com base nas experiências anteriores, os alunos refinam o uso de seu vocabulário, expressando verbalmente suas opiniões emergentes sobre as estruturas que observam. O papel do professor, nesta fase, deve ser mínimo, deixando o aluno independente na busca da formação do sistema de relações em estudo.

FASE 4: Orientação Livre

Nesta fase, as tarefas apresentadas ao aluno devem ser de múltiplas etapas, tarefas que possibilitam várias maneiras de ser completadas ou tarefas em aberto. É fundamental que o aluno ganhe experiência na busca de sua forma individual de resolver as tarefas, buscando sua própria orientação no caminho da descoberta de seus objetivos; desta maneira, muitas relações entre os objetos de estudo se tornam mais claras.

FASE 5: Integração

Esta fase é de revisão e síntese do que foi estudado, visando uma integração global entre os objetivos e relações com a consequente unificação e internalização num novo domínio de pensamento. O papel do professor nesta fase é o de auxiliar no processo de síntese, fornecendo experiências e observações globais, sem todavia introduzir ideias novas ou discordantes.

Ao final desta quinta fase, os alunos devem ter alcançado um novo nível de pensamento, estando aptos a repetir as fases de aprendizagem no nível seguinte.

3.2.3 Teste para identificar em que nível o aluno se encontra

Professores e pesquisadores que trabalham com o modelo Van Hiele utilizam testes para determinar o nível de raciocínio geométrico dos alunos. Estes testes são necessários tanto para iniciar um trabalho apoiado no modelo Van Hiele, como para avaliar a evolução dos alunos.

Segundo Jaime e Gutierrez (1990), o teste pode ser oral, que consiste de entrevistas clínicas individuais entre professor e aluno, ou escrito. Pode ser elaborado com questões de múltipla escolha ou com exercícios de respostas livres. Os testes de múltipla escolha, além de ter facilidade na aplicação, apresentam a vantagem da agilidade na organização dos dados. Não é difícil perceber que a entrevista individual é a que proporciona resultados mais confiáveis sobre o nível de raciocínio geométrico de um indivíduo. Porém, este método não é muito viável à nossa realidade, pois consome muito tempo não podendo ser aplicado a grupos muito grandes.

Capítulo 4

Metodologia

Neste capítulo serão apresentados o tipo da pesquisa, o campo onde ela foi realizada, a caracterização dos alunos e o teste usado para avaliar em que nível os alunos se encontram de acordo com a teoria de Van Hiele.

4.1 Tipo da pesquisa

A metodologia utilizada foi a pesquisa qualitativa, na modalidade investigação-ação, ela inclui ao mesmo tempo, a ação e investigação, alternando-os entre sí, contribuindo assim para uma reflexão crítica e aperfeiçoamento dos métodos. Para Coutinho (2009), é essencial que na investigação-ação o professor explore reflexivamente sua prática, "contribuindo assim para a resolução de problemas e principalmente para a planificação e introdução de alterações nessa mesma prática".

> A dinâmica cíclica de ação-reflexão, própria da investigação-ação, faz com que os resultados da reflexão sejam transformados em praxis e esta, por sua vez, dê origem a novos objetos de reflexão que integram, não apenas a informação recolhida, mas também o sistema apreciativo do professor em formação. É neste vaivém contínuo entre ação e reflexão que reside o potencial da investigação-ação enquanto estratégia de formação reflexiva, pois o professor regula continuamente a sua ação, recolhendo e analisando informação que vai usar no processo de tomada de decisões e de intervenção pedagógica (SANCHES, 2005, p. 129).

No que se refere à abordagem, a pesquisa se classifica como qualitativa, que tem como objetivo a compreensão da lógica interna de grupos, instituições e atores quanto a valores culturais e representações sobre sua história e temas específicos; relações entre indivíduos, instituições e movimentos sociais; processos históricos, sociais e de implementação de políticas públicas e sociais (MINAYO, 2007). Uma pesquisa qualitativa possui como características seu caráter descritivo, considerando:

> O ambiente como fonte direta dos dados e o pesquisador como instrumento chave; o processo é o foco principal de abordagem e não o resultado ou o

> produto; a análise dos dados é realizada de forma intuitiva e indutivamente pelo pesquisador; não requer o uso de técnicas e métodos estatísticos; e, por fim, tem como preocupação maior a interpretação de fenômenos e a atribuição de resultados (GODOY, 1995, p. 59).

Para Godoy (1995), a pesquisa qualitativa não procura a mensuração dos eventos estudados e também não utiliza instrumental estatístico na análise dos dados, mas envolve a aquisição de dados descritivos sobre pessoas, lugares e processos interativos através do contato direto do pesquisador com a situação estudada, buscando a compreensão dos fenômenos segundo a perspectiva dos participantes da situação em estudo.

Ao utilizar a abordagem qualitativa, o pesquisador busca aprofundar-se no fenômeno que estuda, interpretando-o segundo a visão do participante da situação analisada, não havendo preocupação com estatísticas e representações numéricas, pois existe uma necessidade do pesquisador estar em contato direto com o campo, a fim de captar os significados dos comportamentos observados (GOLDENBERG, 1999).

Segundo Soares (2002), a pesquisa qualitativa é mais apropriada quando o pesquisador pretende interpretar dados, fatos e teorias; descrever a complexidade de determinada hipótese ou problema; quando deseja obter dados psicológicos de um indivíduo ou grupo; analisar a interação entre variáveis; situações em que se faz necessária a substituição de dados estatísticos por observações qualitativas; ou apresentar contribuições no processo de mudança, criação ou formulação de opiniões de determinado grupo.

4.2 Campo da pesquisa

A pesquisa ocorreu no Colégio Estadual Rotary II localizado no município de Campos dos Goytacazes no estado do Rio de Janeiro.

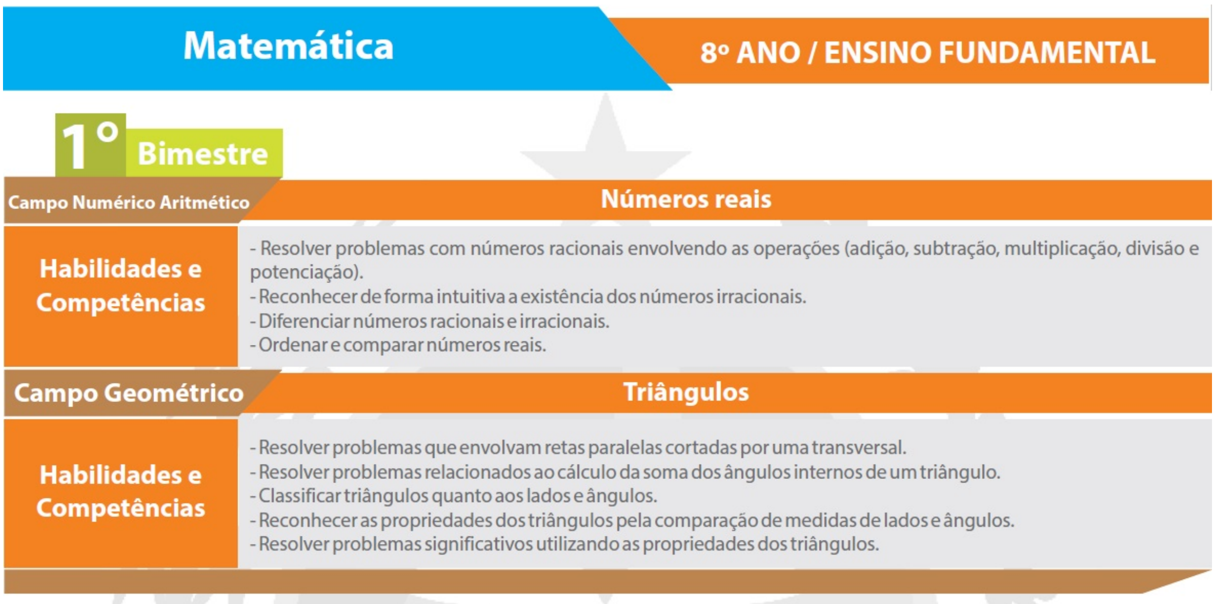
A história do Colégio Estadual Rotary II tem início no dia 18 de maio de 1960 (http://rotaryii.blogspot.com.br/2010/04/h-i-s-t-o-r-i-c-o-d-o-colegio-estadual.html acessado em 05/11/2015), quando o Rotary Club descobriu a localidade conhecida como "Cidade de Palha ", hoje Custodópolis, tendo este nome em homenagem ao Sr. Custódio, notável proprietário de terras na região. Desse modo, a entidade resolveu percorrer a região e descobriu um terreno que pertencia ao Senhor Bueno Braga que o vendeu ao Rotary Club. Seu objetivo inicial era de ter um curso primário de excelente qualidade e que alfabetizasse as crianças daquela comunidade. A escola começou com duas salas de aula que inicialmente atendeu a 146 (cento e quarenta e seis) alunos que ansiosos aguardavam a tão sonhada instituição. A escola tem sua origem na obra fundada pelo rotariano Rangelito Tavares Rangel, que se interessou pela causa colocando-se a inteira disposição da humilde escola. Para chegar a esta posição, tornou-se necessário ao longo dos anos superar barreiras e vencer etapas de maneira firme e estável, contando com o trabalho integrado de toda a família Rotariana.

No Diário Oficial, do Estado do Rio de Janeiro de 19 de maio de 1961, o Governador de Estado do Rio de Janeiro, com fundamento no art. 40, item I, da Constituição Estadual, de 20 de junho de 1947, Decreta:
Art. 1º - Fica criada a Escola “Rotary II”, em Custodópolis, 6º Distrito do Município de Campos. Para primeira dirigente da escola foi escolhida a professora Maria da Conceição Tavares Rangel, nora do rotariano Rangelito.

A escolha dessa escola como campo de pesquisa se deu pelo fato de ser o local onde o pesquisador leciona as disciplinas de RPM e Matemática, desde 2011, para os ensinos Fundamental e Médio. Estando assim familiarizado com as dificuldades apresentadas pelos alunos nestas disciplinas e principalmente aos conceitos geométricos. Deseja-se proporcionar a esses alunos experiências e atividades significativas e diversificadas que lhes deem a oportunidade de intervir ativamente no processo de ensino/aprendizagem.

O presente estudo foi desenvolvido em agosto de 2015, em turmas de oitavo ano do Ensino Fundamental. A escolha desse ano de escolaridade deu-se por conta do conteúdo de retas paralelas, triângulos e suas propriedades constarem no Currículo Mínimo (JULIANELLI, 2012), documento que norteia a grade curricular de todas as disciplinas no estado do Rio de Janeiro como mostra a figura 57.

Figura 57 – Currículo Mínimo (RJ), Matemática, 8º série do Ensino Médio



Matemática — **8º ANO / ENSINO FUNDAMENTAL**

1º Bimestre

Campo Numérico Aritmético	Números reais
Habilidades e Competências	- Resolver problemas com números racionais envolvendo as operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação). - Reconhecer de forma intuitiva a existência dos números irracionais. - Diferenciar números racionais e irracionais. - Ordenar e comparar números reais.
Campo Geométrico	**Triângulos**
Habilidades e Competências	- Resolver problemas que envolvam retas paralelas cortadas por uma transversal. - Resolver problemas relacionados ao cálculo da soma dos ângulos internos de um triângulo. - Classificar triângulos quanto aos lados e ângulos. - Reconhecer as propriedades dos triângulos pela comparação de medidas de lados e ângulos. - Resolver problemas significativos utilizando as propriedades dos triângulos.

Fonte: http://www.rj.gov.br/web/seeduc acessado em 12/08/2015

A pesquisa foi realizada nas turmas 802 e 803 do Colégio Estadual Rotary II que ocupam as salas 7 e 8 no turno da tarde. Na turma 802, estão matriculados 27 alunos, porém 5 não frequentam totalizando 22 alunos. Na turma 803 estão matriculados 25 alunos, sendo que 2 não frequentam totalizando 23 alunos. Vale ressaltar que essas atividades foram aplicadas dentro da disciplina de Resolução de Problemas Matemáticos (RPM) que consta de duas aulas semanais de cinquenta minutos, enquanto que a disciplina de matemática consta de quatro aulas semanais.

4.3 Teste de Van Hiele

O teste de van Hiele contido no Anexo A foi elaborado pela equipe do Projeto Fundão (NASSER; SANTANNA, 1997) e modificado pelo pesquisador para melhorar seu aspectos visuais. Esse teste é composto de 15 questões, distribuídas em três blocos, cada um desses blocos correspondem a um dos níveis do pensamento geométrico de Van Hiele. O teste tem como objetivo investigar o nível de pensamento geométrico de cada aluno. O objetivo é que ao preparar as atividades, elas estejam de acordo com o nível alcançado pelos alunos.

> Bloco 1: são as questões de 1 a 5, referentes ao nível básico. As questões de 1 a 4 exigiam habilidades: visual (reconhecer figuras), verbal (básico para associar o nome correto a uma figura) e lógica (perceber que existe diferenças e semelhanças entre figuras e compreender a conservação da figura mesmo quando a mesma se apresenta em outras posições). A questão 5 exigia apenas habilidade visual (reconhecer quando duas retas são paralelas através de informações fornecidas pela figura).
>
> Bloco 2: são as questões de 6 a 10, referentes ao nível 1. As questões 6 e 8 demandavam habilidades: visual (assinalar, entre as alternativas apresentadas, apenas as propriedades corretas de cada figura). As questões 7 e 9 exigiam habilidades: visual (observar propriedades de uma figura) e verbal (descrever precisamente várias propriedades da figura apresentada na questão). A questão 10 requeria habilidade lógica (reconhecer que através das propriedades podemos diferenciar figuras) e habilidade gráfica (usar as propriedades para desenhar ou construir figuras).
>
> Bloco 3: são as questões de 11 a 15. A questão 11 requeria a habilidade visual (reconhecer propriedades comuns em diferentes tipos de figuras). As questões 12 e 13requeriam habilidade verbal (avaliar as sentenças apresentadas mostrando que há inter-relações entre figuras); A questão exigia a habilidade de lógica (usar propriedade das figuras tendo em vista assim se uma classe de figuras está contida ou não em outra classe) (NASSER; SANTANNA, 1997, p. 14).

Capítulo 5

Análise das aplicações

Neste capítulo será descrita e analisada a aplicação do teste de Van Hiele (Anexo A), cujo objetivo é investigar em que nível de pensamento geométrico os alunos se encontram.

5.1 Aplicação do teste de Van Hiele

A aplicação desse instrumento ocorreu no dia 18/08/2015 nas turmas 802 e 803 do turno da tarde do Colégio Estadual Rotary II. Alguns alunos faltaram no dia da aplicação, com isso apenas 32 alunos participaram da pesquisa. Os alunos foram previamente avisados que ocorreria um teste, com isso no dia da aplicação os alunos responderam às quinze questões sem problemas.

Análise das questões do Teste de Van Hiele.

1) De acordo com a tabela 1 apenas dezessete alunos acertaram a questão, identificando como triângulos as figuras B, C e E. Dez alunos marcaram apenas as alternativas B e E como corretas, desconsiderando o triângulo obtuso da opção C. Cinco alunos assinalaram a alternativa D como correta, é possível que eles tenham considerado apenas a aparência global dessas figuras.

2) Dezoito alunos acertaram essa questão marcando as duas opções corretas. Quatorze alunos marcaram apenas a figura identificada com a letra R como correta, isso ocorreu por dois motivos, alguns não perceberam que podia marcar mais de uma opção, outros não consideraram a figura T como quadrado por não está alinhado com a base da folha.

3) Dezenove alunos acertaram a questão, pois marcaram as figuras U e Y, nessa questão treze alunos também consideraram apenas figura U como retângulo, devido ao fato de ser o único com às bordas paralelas as da folha.

4) Apenas treze alunos acertaram essa questão, dezenove alunos marcaram apenas a figura A não considerando a figura D como paralelogramo.

5) Onze alunos marcaram as alternativas A e C, acertando assim a questão. Dezoito alunos assinalaram apenas a alternativa A como resposta correta e três alunos marcaram a alternativa E como correta, esses alunos provavelmente confundiram paralelas como perpendiculares.

6) Vinte dos alunos marcaram apenas uma alternativa como a correta, e a questão deixa bem claro que os alunos podem marcar mais de uma alternativa e apenas quatro dos alunos acertaram completamente a questão, marcando as alternativas A, B e C como corretas.

7) Apenas quatro alunos resolveram essa questão de forma correta, muitos deixaram a questão em branco. Percebi que os alunos não queriam escrever, gostariam que todas as questões fossem objetivas.

8) Nove alunos acertaram a essa questão. Muitos induzidos pela figura marcaram a alternativa D que é a propriedade dos triângulos equiláteros.

9) A maioria deixou essa questão em branco, e dos que tentaram fazer nenhum acertou totalmente.

10) Nenhum aluno acertou essa questão, os que tentaram desenhar não utilizaram nenhum objeto para traçar as retas, tendo feito elas a mão livre.

11) Como pode-se observar na tabela 1, apenas um aluno assinalou essa questão de forma correta, a maioria marcou apenas duas alternativas, desconsiderando que o quadrado também é um retângulo.

12) Apenas dois alunos responderam corretamente essa questão. Alguns alunos responderam corretamente, mas não conseguiram justificar.

13) Apenas oito alunos tentaram responder a essa questão e desses somente um aluno respondeu corretamente, pode-se verificar que nas questões discursivas os alunos ficam com receio de responder.

14) Apenas três alunos assinalaram a opção correta. Todos marcaram alguma alternativa e pela quantidade de erros, percebe-se que eles marcaram essa questão de forma aleatória.

15) Nesta questão ocorreu o mesmo problema da questão 14. Com isso apenas dois alunos acertam a essa questão.

Observe que a tabela 1 indica o número de acertos dos alunos para cada questão do teste de Van Hiele, indica também em que nível de pensamento geométrico cada aluno se encontra.

Informações para leitura da tabela 1.

Os quadros pintados de verde indicam que o aluno acertou.

Os quadros em branco indica que o aluno errou ou não respondeu a questão.
A letra N indica que o aluno não alcançou nenhum nível do pensamento geométrico indicado por Van Hiele.

Tabela 1 – Níveis do pensamento geométrico dos alunos segundo o Teste de Van Hiele

	Bloco 1					Bloco 2					Bloco 3						
Questões	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	Acertos	Nível
Aluno 1	■	■	■													3	0
Aluno 2			■													1	N
Aluno 3	■		■		■		■									4	0
Aluno 4																0	N
Aluno 5	■	■	■	■		■							■			6	0
Aluno 6																0	N
Aluno 7	■	■	■													3	0
Aluno 8	■															1	N
Aluno 9	■	■		■			■	■							■	6	0
Aluno 10		■	■	■	■										■	5	0
Aluno 11		■														1	N
Aluno 12	■	■		■												2	0
Aluno 13														■		1	N
Aluno 14		■	■	■	■			■								5	0
Aluno 15			■	■												2	N
Aluno 16		■	■													2	N
Aluno 17	■		■		■									■		4	0
Aluno 18	■	■	■	■								■				5	0
Aluno 19	■	■														2	N
Aluno 20		■	■	■		■		■								5	0
Aluno 21																0	N
Aluno 22	■	■	■		■	■	■	■			■					8	1
Aluno 23	■	■	■	■	■			■								6	0
Aluno 24	■	■	■					■								4	0
Aluno 25	■													■		2	N
Aluno 26	■		■		■			■								4	0
Aluno 27	■	■		■	■											4	0
Aluno 28		■	■	■	■		■									5	0
Aluno 29		■	■	■				■								4	0
Aluno 30	■			■	■			■								4	0
Aluno 31					■	■						■				3	N
Aluno 32			■													2	N

Fonte: Elaboração própria

5.2 Aplicação das Atividades

As atividades que se encontram no Apêndice A, foram elaboradas com base nos livros de Construções Geométricas de Eduardo Wagner (2000), adaptando-as para o nível do pensamento geométrico em que a maioria dos alunos se encontram, de acordo com o teste de Van Hiele. Com essas atividades, deseja-se que os alunos dominem o uso da régua e do compasso para efetuar as construções básicas, pois a maioria dos alunos atingiram apenas o nível 0 da teoria de Van Hiele.

Essas atividades foram aplicadas utilizando os dois tempos semanais da disciplina de RPM, esta disciplina foi criada pela SEEDUC-RJ há poucos anos.

De acordo com o nível de pensamento geométrico dos alunos da 802 e 803, foram elaboradas seis atividades, porém apenas quatro delas foram aplicadas. Por motivos diversos, o tempo para aplicação das atividades foi curto, atribuirei o principal motivo ao fato da disciplina de RPM possuir somente dois tempos semanais, diferente da disciplina de matemática que dispõem de quatro tempos.

Antes de começar a aplicação das atividades, o professor deve iniciar uma conversa para saber o que os alunos trazem de conhecimento sobre ponto, retas paralelas e perpendiculares, também perguntar se eles tem conhecimento do que é compasso, régua, transferidor e esquadros o que sugere a primeira fase da aprendizagem. Pode-se perguntar aos alunos se eles conhecem alguma profissão que utiliza esses instrumentos e de que forma eles são utilizados. Criando um debate construtivo para ser aproveitado posteriormente durante a aplicação das atividades.

5.2.1 Atividade 1 - Visualização e reconhecimento

Essa atividade tem como finalidade apresentar e/ou lembrar aos alunos as noções básicas de Geometria, especificamente as posições relativas entre duas retas. Nessa atividade os alunos conhecerão também os instrumentos de Desenho Geométrico e suas respectivas utilidades.

Para melhor explorar as habilidades visuais e verbais sugerida por Alan Hofer (1981), é de grande importância que os professores levem para a sala alguns sólidos geométricos, para que os alunos tenham uma melhor visualização de pontos e segmentos de retas. Os pontos devem ser associados aos vértices, assim como os segmentos de retas podem ser associados às arestas, que por sua vez é formada por dois vértices. Essa atividade foi aplicada em dupla, a aplicação da mesma durou três tempos com 50 minutos cada, contando com a abordagem e questionamento.

O primeiro exercício tem como finalidade manifestar a visão geométrica em três dimensões e também fazer os alunos perceberem que para determinar um segmento de reta, basta ligar dois pontos. Esse exercício foi resolvido com facilidade por todos os alunos, destacando que a maioria dos alunos escolheram o ponto G para formar segmentos de reta.

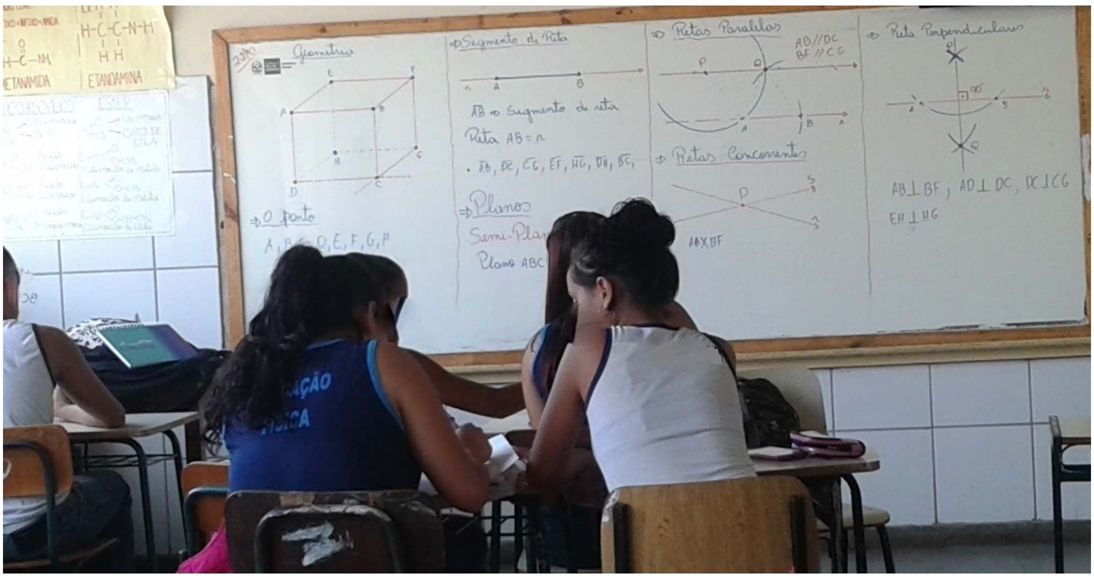
Já no segundo exercício, foi preciso a intervenção do pesquisador que com o auxilio do quadro, régua e compasso, construiu retas paralelas, concorrentes e perpendiculares para que eles pudessem ter um melhor entendimento (Figura 58). A maior dificuldade que eles tiveram foi em assimilar os símbolos, porém o fizeram corretamente.

O terceiro exercício foi respondido por todas as duplas com facilidade, com a observação de que eles esqueciam o nome dos instrumentos, mas sabiam sua finalidade.

No quarto exercício a maioria dos alunos acertaram, alguns utilizaram apenas uma rua associando-a com outras para classifica-las em paralelas e perpendiculares.

O quinto exercício teve como respostas, régua e esquadros, considerei as duas alternativas corretas. O sexto exercício foi muito interessante pois os alunos associaram o desenho à estrela de Davi, que tem as características desse desenho, alguns segmentos que precisavam ser associados para dizer se são paralelos ou perpendiculares não estavam traçados, alguns alunos o traçaram, outros apenas visualizaram e responderam corretamente.

Figura 58 – Explicação de paralelas e perpendiculares com régua e compasso



Fonte: Elaboração própria

Quando essas atividades forem aplicadas por outros professores, é sugerido que modifique o exercício quatro do mapa (fonte: https://www.google.com.br/maps) para um mapa que mostre ruas conhecidas dos alunos, pois assim a atividade ficará mais atrativa.

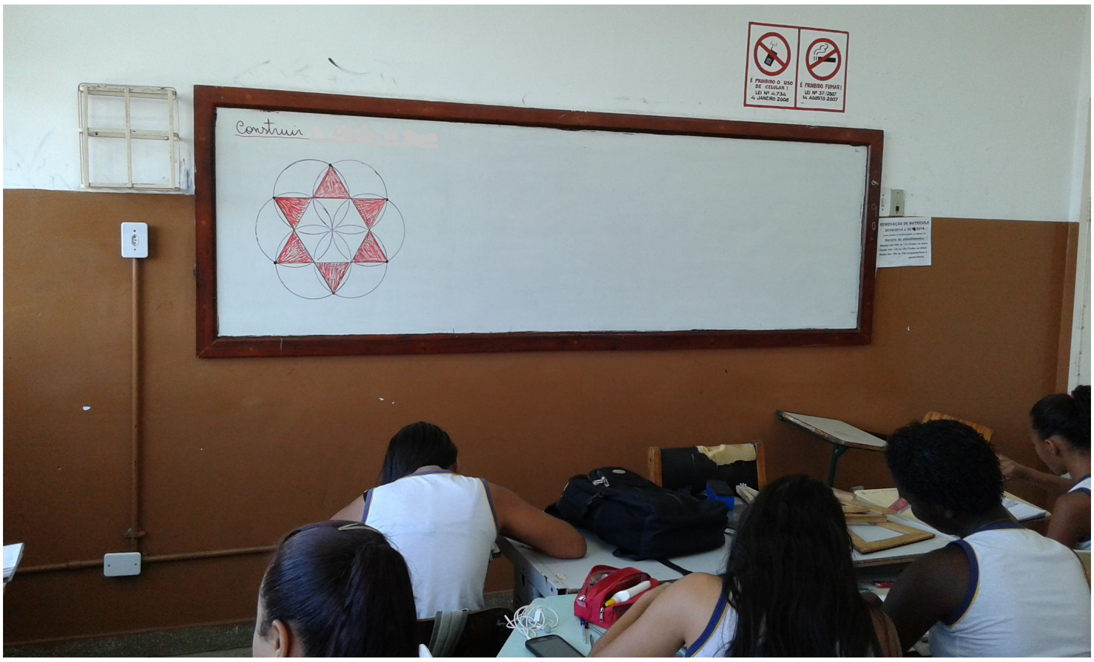
5.2.2 Atividade 2 - Aprendendo a manusear régua e compasso

Esta é a primeira atividade em que os alunos utilizaram os instrumentos de Construção Geométrico.

A atividade aprendendo a manusear régua e compasso foi realizada em grupos, cada um com três integrantes. O objetivo foi aprimorar o uso do compasso, porém cada um com seu compasso, pois os alunos ainda não estão acostumados com esses instrumentos. Esta atividade gastou o período de duas aulas com cinquenta minutos cada. Os alunos fizeram os dois primeiros exercícios sem dificuldades, porém no terceiro exercício a maioria dos alunos tiveram dificuldades, tive que resolver passo a passo com eles.

A princípio tentei ir à mesa de cada um dos grupos para ensinar um de cada vez, porém estava gastando muito tempo sem alcançar a maioria, então fiz com eles passo à passo no quadro branco utilizando apenas régua e compasso, como mostra a figura 59.

Figura 59 – Exercício resolvido junto com os alunos



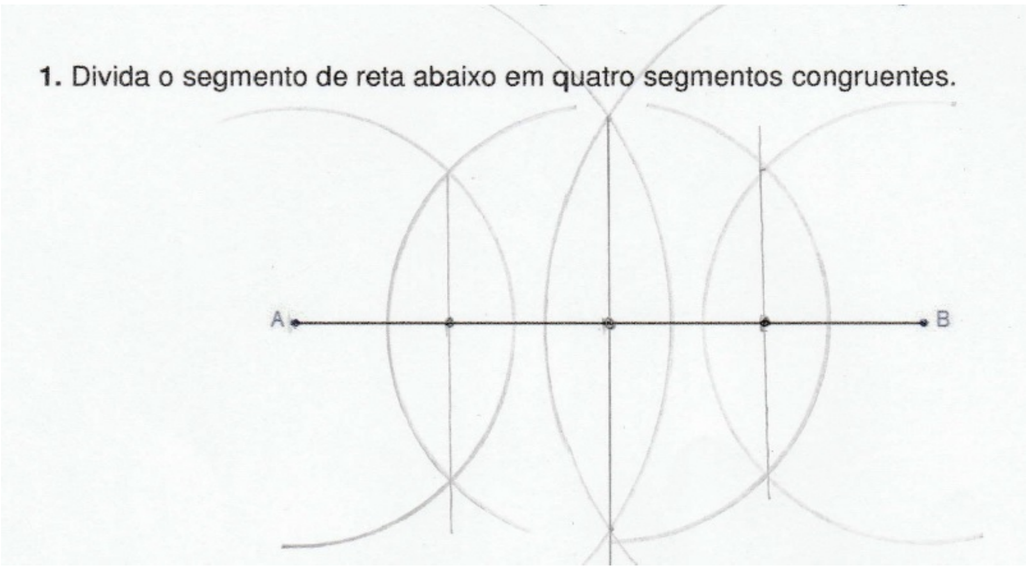
Fonte: Elaboração própria

5.2.3 Atividade 3 - Construções básicas

Nesta atividade os alunos associaram conhecimentos das atividades 1 e 2 para fazer as construções geométricas com mais facilidade, esta atividade gastou cinco aulas de cinquenta minutos cada, contando a explicação e a aplicação da atividade.

O primeiro exercício tem como objetivo fazer os alunos associarem a divisão de um segmento com a construção da mediatriz, pois sabe-se que a mesma divide um segmento em duas partes iguais. Como o exercício pede para o aluno dividir o segmento em 4 partes iguais, pretende-se mostrar ao aluno que ele precisa fazer a construção da mediatriz três vezes, ele também teria a opção de traçar a mediatriz duas vezes e depois fazer o transporte de segmento, mas a maior parte dos alunos preferiram traçar a mediatriz três vezes como mostra a figura 60.

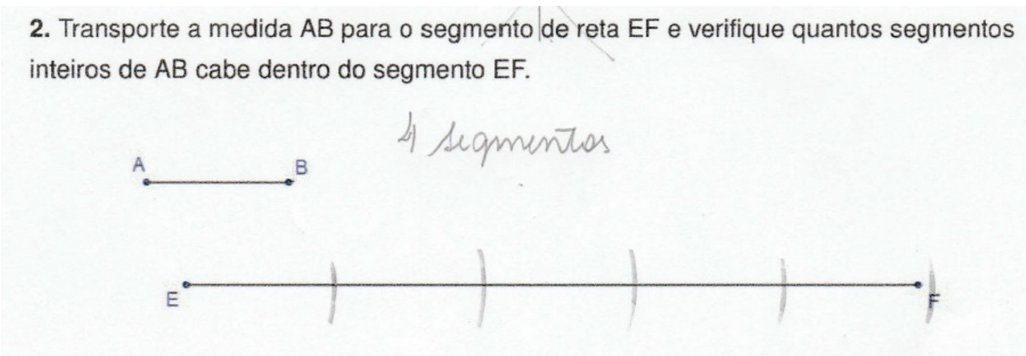
Figura 60 – Fragmento da atividade feita pelo aluno 5



Fonte: Elaboração própria

No segundo exercício foi pedido ao aluno que transportasse um mesmo segmento mais de uma vez e depois dizer quantos segmentos caberiam dentro do outro. Os alunos não tiveram dificuldades em resolver essa questão e responderam corretamente, mas houve algumas divergências, pois para alguns alunos o segmento coube exatamente quatro vezes e para outros cinco, isso se deu pelo fato de o último segmento ficar quase coincidente ao ponto F como mostra a figura 61.

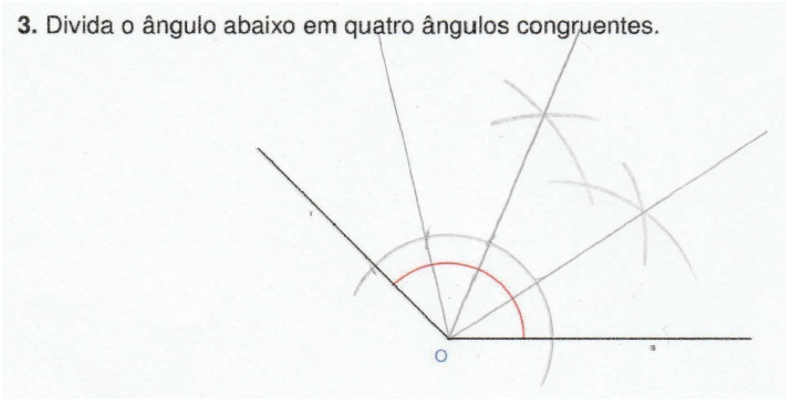
Figura 61 – Fragmento da atividade feita pelo aluno 10



Fonte: Elaboração própria

O terceiro exercício é semelhante ao segundo, mas ao invés de traçar mediatrizes os alunos devem traçar bissetrizes. Destaque para o aluno 22 (tabela 1) que construiu a bissetriz apenas duas vezes e o outro ângulo foi transportado por ser congruente ao já traçado na segunda construção, como mostra a figura 62. Vale lembrar que o aluno 22 foi o único que conseguiu alcançar o nível 1 de Van Hiele.

Figura 62 – Fragmento da atividade feita pelo aluno 22

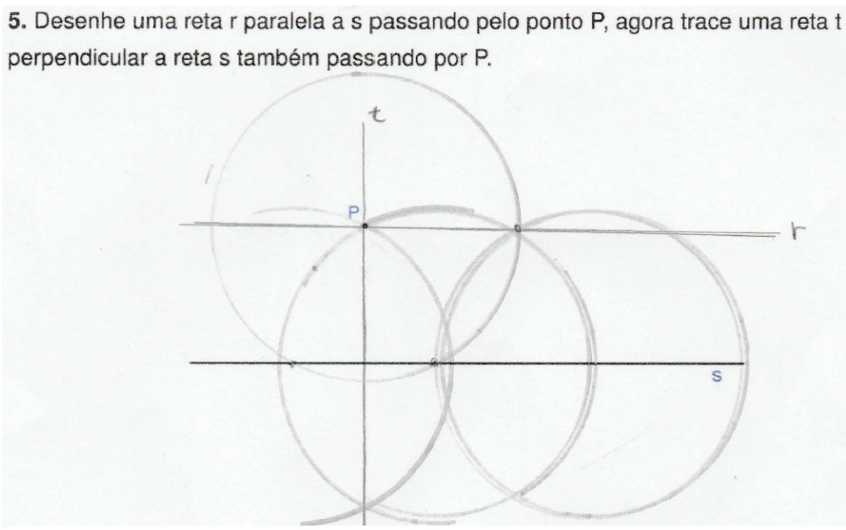


Fonte: Elaboração própria

O quarto exercício foi de pouco destaque, os alunos acharam fácil e desinteressante, todos os alunos o construíram corretamente, apesar de alguns ainda terem dificuldades para manusear o compasso. Quatro alunos executaram corretamente porém não ficou com aspecto visual bom.

O quinto exercício foi desafiador, os alunos confundiam as circunferências ja construídas no traçado das paralelas quando estavam traçando a perpendicular, grande parte dos alunos construíram corretamente, mas não nomearam as retas construídas como pedido na atividades. O aluno 17 o fez corretamente como mostra a figura 63.

Figura 63 – Fragmento da atividade feita pelo aluno 17

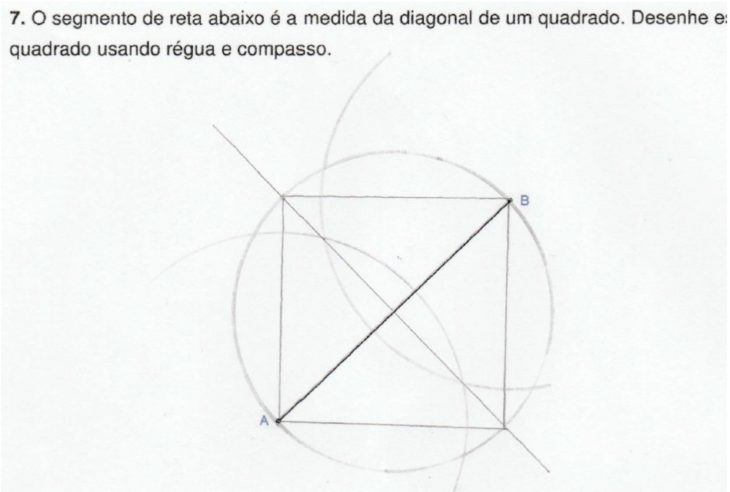


Fonte: Elaboração própria

O sexto exercício foi resolvido sem dificuldades e de maneira rápida, assim como ocorreu na questão 4.

O exercício sete foi de grande dificuldade, os alunos ficaram confusos e eu tive que fazer um esboço da solução no quadro branco, também utilizando régua e compasso. Depois dessa intervenção os alunos resolveram o exercício, como mostra a figura 64.

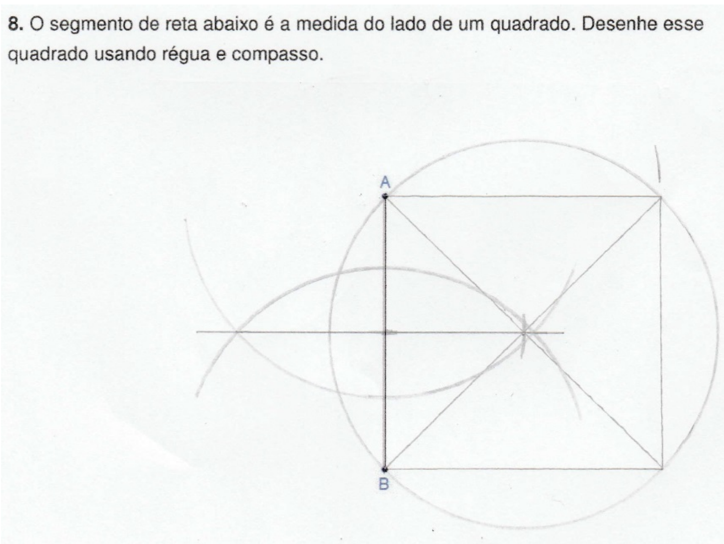
Figura 64 – Fragmento da atividade feita pelo aluno 31



Fonte: Elaboração própria

No oitavo exercício, pedi que os alunos me apresentassem suas soluções antes de resolver com eles. Fui surpreendido, pois um dos alunos apresentou uma solução diferente. Enquanto que a solução do professor envolvia o traçado de duas perpendiculares e o transporte de segmentos, a solução feita pelo aluno precisou apenas da construção de uma mediatriz, como mostra a figura 65, o aluno relatou que usou o exercício 7 como base para realizar essa solução.

Figura 65 – Fragmento da atividade feita pelo aluno 23



Fonte: Elaboração própria

5.2.4 Atividade 4 - Tangram

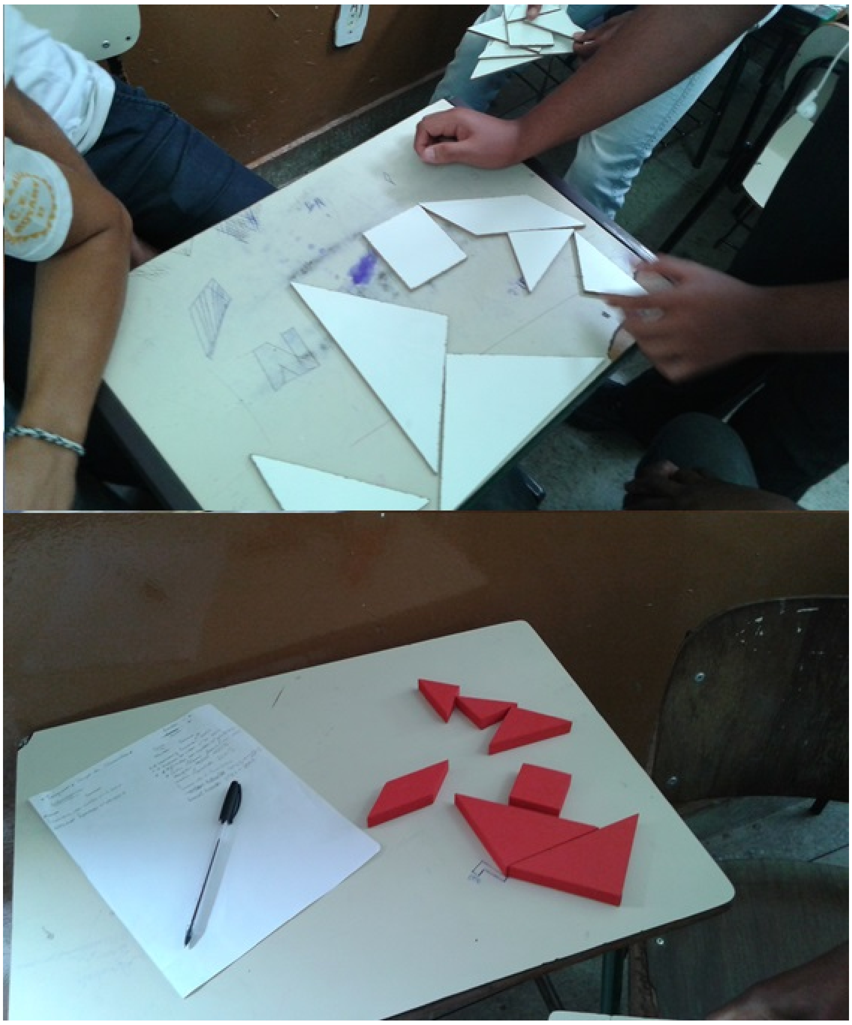
Essa atividade foi aplicada gastando cinco aulas de cinquenta minutos cada, sendo três aulas para os exercícios e duas aulas para a apresentação do tangram construído em casa.

No primeiro exercício os alunos tiveram grande dificuldades em construir o tangram, mas fazendo passo a passo foi possível a construção do mesmo. Para montar as figuras, grande parte dos alunos preferiram recortar o tangram descrito na própria atividade, pois alegaram que o deles não havia ficado perfeito. Depois de recortado e acompanhando as divisões das figuras não tiveram dificuldades.

No exercício dois, poucos alunos conseguiram replicar a figura com as peças do tangram, pois as mesmas não possuíam linhas divisórias, mas depois de terem visto o problema solucionado conseguiram replicar sem problemas.

O exercício três foi o mais produtivo, os alunos construíram tangrans ótimos e de vários tamanhos, como mostra a figura 66.

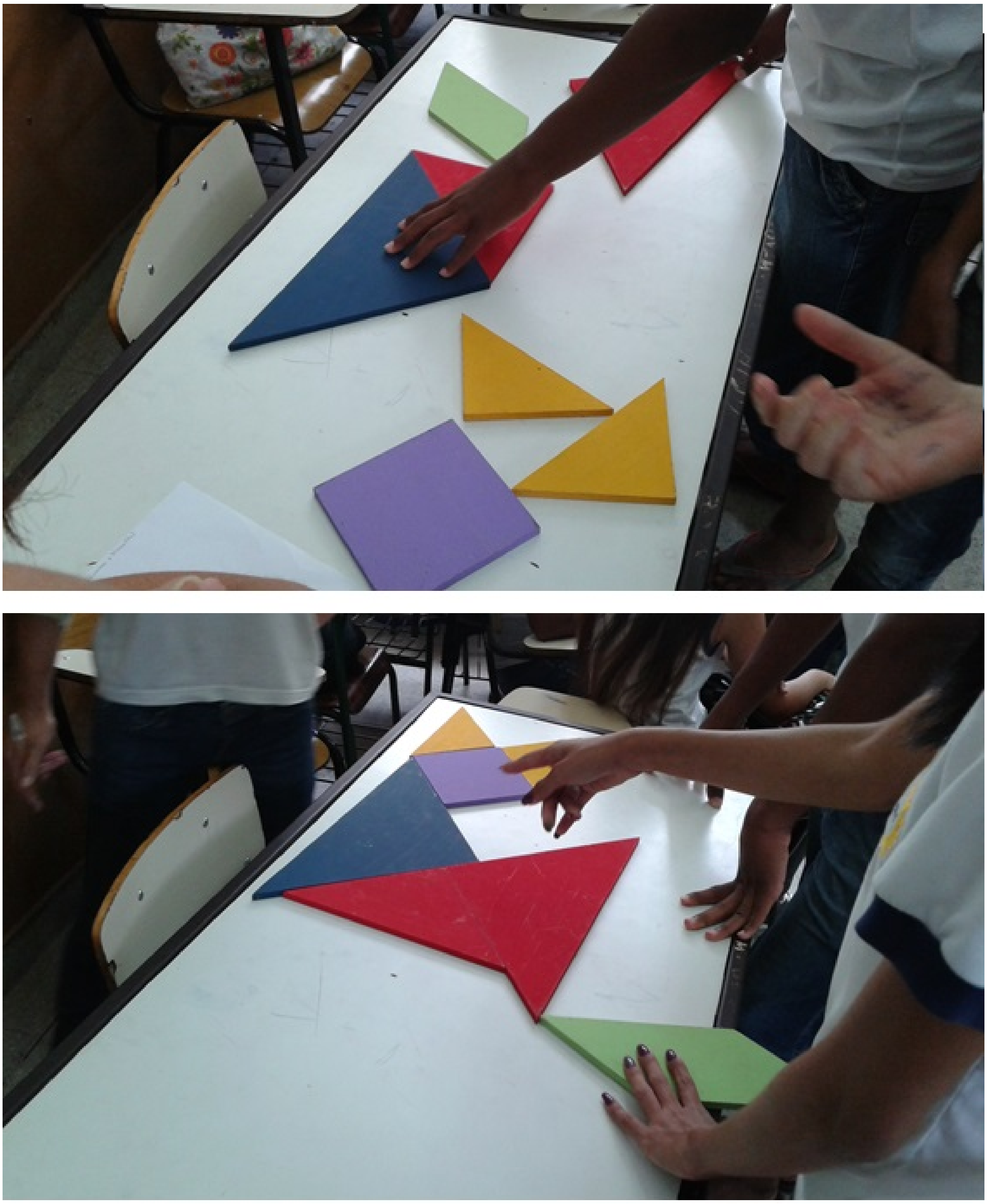
Figura 66 – Tangram de tamanhos diversos



Fonte: Elaboração própria

Com destaque para o grupo do aluno 22 que fez um tangram enorme, e perguntado como ele fez um tangram desse tamanho, ele relatou que utilizou um prego como ponta seca do compasso e um barbante para representar a abertura do compasso. Na figura 67 estão os alunos tentando montar as duas figuras que os alunos desse grupo pediram para ser replicado.

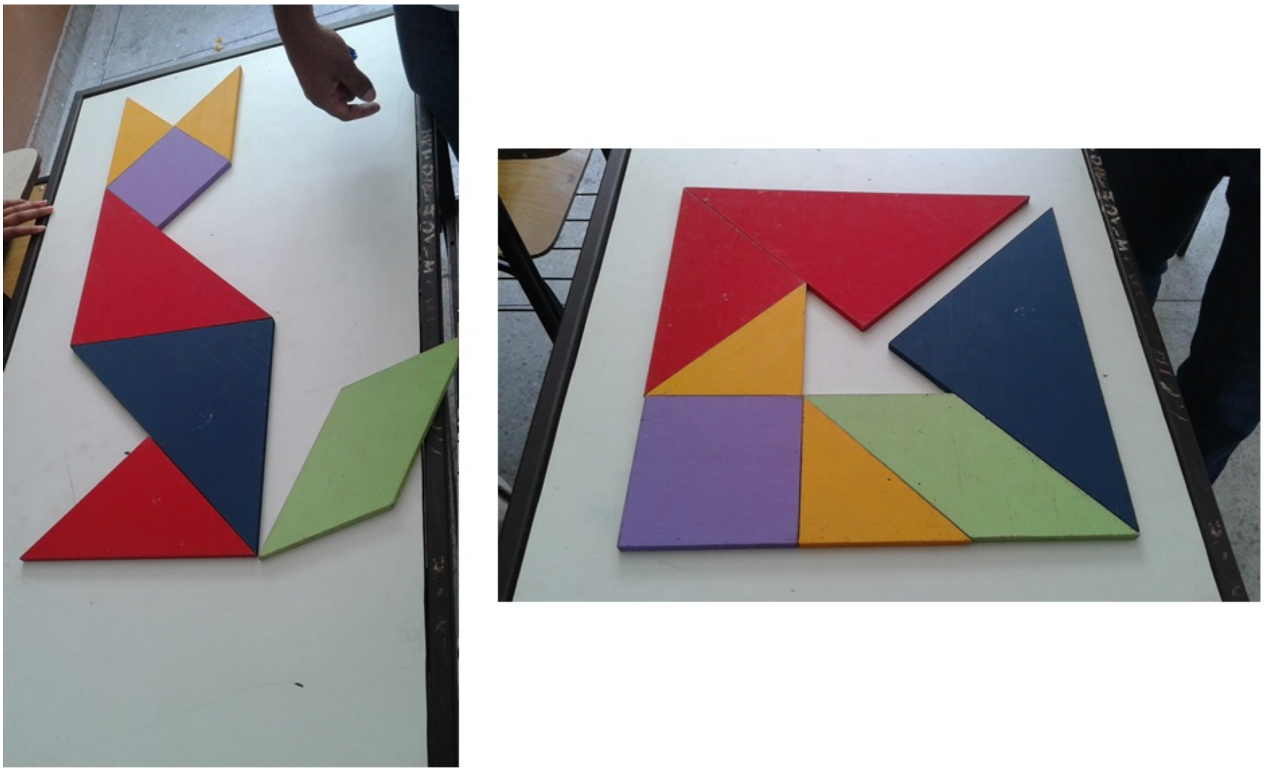
Figura 67 – Desafiando os alunos



Fonte: Elaboração própria

Na figura 68 estão os desafios resolvidos por alunos de outras turmas. Como proposto anteriormente cada grupo deveria desafiar alunos de outras turmas para resolver o tangram, e esse desafio foi feito no dia da matemática 360º que é um projeto de matemática proposto pela SEEDUC-RJ para ser apresentado no sábado letivo.

Figura 68 – Desafio do tangram resolvido



Fonte: Elaboração própria

5.2.5 Algumas considerações

Em todas as atividades observa-se que os alunos demonstraram interesse na realização das mesmas. Percebeu-se que o envolvimento deles se deu devido a utilização dos instrumentos de Construção Geométrica, os alunos gostaram de sair da rotina caderno e exercícios. Eles viram o compasso como uma ferramenta facilitadora, as quais se tornaram parte integrante da sua atividade. Reconheceram o seu valor, porque as construções os ajudaram a descobrir os conceitos de retas paralelas e perpendiculares assim como pontos médios, mediatrizes e bissetrizes. Os alunos ficaram super motivados pela vasta utilização que o compasso possui.

A organização das tarefas, pela sua estruturação e coerência, associada à dinâmica de sala de aula, foi determinante para o empenho e envolvimento dos alunos. Outro fator determinante para o sucesso das atividades, foi o fato de terem sido preparadas de acordo com o nível de raciocínio geométrico dos alunos, segundo ao modelo Van Hiele, ou seja, o professor e os materiais didáticos, assim como as habilidades verbais e visuais devem estar compatíveis com o nível geométrico em que os alunos se encontram.

Foi pretendida uma atividade com o GeoGebra, mas devido aos computadores obsoletos o *software* não rodou corretamente.

Considerações Finais

Dentre as diversas áreas da matemática, a Geometria é a que mais aparece em nosso redor, ela está presente na natureza, na arte, nas profissões. A geometria é uma das partes mais antigas da matemática, ela foi utilizada pelas primeiras civilizações e até hoje é a parte da matemática que mais podemos observar no nosso cotidiano.

Este trabalho apresentou uma sequência de atividades baseadas nas construções com régua e compasso que foram aplicadas no 8° ano do Ensino Fundamental. Por meio da aplicação do teste de Van Hiele investigou-se o nível de pensamento geométrico em que os alunos pesquisados se encontravam. As atividades foram elaboradas de acordo com o nível dos alunos, com aplicação das mesmas, utilizando régua e compasso, buscou-se apresentar os conceitos de paralelas, perpendiculares, bissetrizes, ponto médio e mediatrizes de forma dinâmica e com a participação direta dos alunos em suas construções.

Mediante os resultados obtidos por meio de atividades adequadas ao nível de raciocínio geométrico que cada aluno se encontrava, o uso dos instrumentos de Construção Geométrica, principalmente a régua e o compasso aliado a atividades respaldadas na teoria de van Hiele e tudo que presenciei durante as atividades aplicadas e o desafio do tangram construído pelos próprios alunos, considero que o objetivo do estudo foi alcançado, que era tornar significativa a aprendizagem dos conceitos sobre construções de paralelas, perpendiculares, bissetrizes, ponto médio e mediatrizes no Ensino Fundamental. Com destaque para a teoria de Van Hiele que foi de grande importância para que as atividades fossem elaboradas de acordo com o nível de pensamento geométrico em que o aluno se encontrava, mas o principal destaque foi para o compasso, que tornou as aulas mais interessantes. Os alunos participaram ativamente das aulas e ficaram maravilhados com a vasta utilização do compasso.

Minha experiência relata que este trabalho nos apresenta a possibilidade de oferecer aos alunos do Ensino Fundamental uma aula mais dinâmica, em que possam participar mais ativamente de todo o processo de construção do conhecimento. O uso de atividades e recursos adequados, favorecem o desenvolvimento de várias habilidades em geometria, deixando assim um incentivo para que os professores utilizem a régua e o compasso, pois são instrumentos de fácil acesso dos alunos e tornam as aulas mais atrativas.

Muito ainda há de ser feito na aprendizagem da Geometria, pois esse estudo não esgotou o assunto. Outras pesquisas poderão ser realizadas buscando investigar o nível de pensamento geométrico em alunos de outros anos escolares, outras escolas, entre outros, oferecendo propostas de atividades adequadas utilizando a régua e compasso como facilitadores da aprendizagem, para tornar as mesmas significativas.

Referências

ÁVILA, P. de. *Os Elementos de Euclides*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Ferderal de Santa Catarina, Florianópolis SC, Março 2003. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 20.

BOYER, C. B. *História da Matemática*. São Paulo: Blucher, 1996. Citado na página 21.

BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais*. Brasília: MEC: Secretaria de Educação Fundamental, 1998. 148 p. Citado na página 15.

COUTINHO, C. P. Investigação - acção: metodologia preferencial nas práticas educativas. *Revista Psicologia, Educação e Cultura*, v. 13, n. 2, p. 355 – 379, 2009. Citado na página 58.

CROWLEY, M. L. *O modelo Van Hiele do desenvolvimento do pensamento geométrico.* Aprendendo e ensinando geometria. São Paulo: Atual, 1996. Citado 3 vezes nas páginas 53, 54 e 55.

DUTRA, F. J. *DesGeometriaétrico como Ferramenta de Aprendizagem de Geometria*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2010. Citado 3 vezes nas páginas 18, 54 e 56.

GODOY, A. S. Introdução à pesquisa qualitativa e suas possibilidades. *Revista de Administração de Empresas*, v. 35, n. 2, p. 57 – 63, Março/Abril 1995. Citado na página 59.

GOLDENBERG, M. *A arte de pesquisar: como fazer pesquisa qualitativa em Ciências Sociais.* Rio de Janeiro: Record, 1999. Citado na página 59.

HOFER, A. Geometria é mais que prova. *Revista Professor de Matemática*, p. 16, Janeiro 1981. Citado 6 vezes nas páginas 16, 17, 51, 53, 55 e 65.

JAIME, A.; GUTIERREZ, A. *Una propuesta de fundamentación para la ensenanza de la geometria: El modelo de van Hiele*. [S.l.]: S. Llinares and M. V. Sánchez, 1990. Citado na página 57.

JULIANELLI, J. R. Currículo mínimo de matemática. 2012. Citado 3 vezes nas páginas 15, 24 e 60.

MINAYO, M. C. de S. *O desafio do conhecimento: pesquisa qualitativa em saúde*. 11. ed. São Paulo: HUCITEC, 2007. Citado na página 58.

MLODNOW, L. *A janela de Euclides*. São Paulo: Geração Editorial, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 21.

MORI, I.; ONAGA, D. S. *Matemática: Ideias e desafios*. São Paulo: Saraiva, 2012. Citado na página 31.

MUNIZ, A. C. N. *Tópicos de Matemática Elementar: geometria euclidiana plana*. Rio de Janeiro: SBM, 2012. v. 1. Citado 2 vezes nas páginas 44 e 47.

NASCIMENTO, R. A. *O ensino do desenho na educação brasileira: apogeu e decadência de uma disciplina escolar*. Dissertação (Mestrado em Educação) — Universidade Estadual Paulista, Marília, 1994. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 23.

NASSER, L.; SANTANNA, N. P. *Geometria segundo a teoria de van Hiele*. Dissertação (Mestrado) — UFRJ, Rio de Janeiro, 1997. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 61.

PIAGET, J.; INHELDER, B. *Apresentação do Espaço da Criança*. [S.l.]: Artes Médicas, 1993. Citado na página 51.

PUTNOKI, J. C. *Elementos de Geometria e Desenho Geométrico*. [S.l.]: Scipione, 1993. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 30.

PUTNOKI, J. C. Que se devolvam a euclides a régua e o compasso. *Revista do Professor de Matemática*, n. 13, p. 368 – 374, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 30.

ROQUE, J. B.; PITOMBEIRA, T. M. *Tópicos De História Da Matemática*. Rio de Janeiro: SBM, 2012. 269 p. Citado na página 44.

ROQUE, T. *História da Matemática*. Rio de Janeiro, RJ: ZAHAR, 2012. Citado na página 21.

SANCHES, I. Compreender, agir, mudar, incluir. da investigação - acção à educação inclusiva. *Revista Lusófona de Educação*, n. 5, p. 127 – 142, 2005. Citado na página 58.

SOARES, E. *Metodologia científica*. São Paulo: Atlas, 2002. Citado na página 59.

TORT, A. C. *A Grande Pirâmide de Giza*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Física, 2014. Citado na página 20.

USISKIN, Z. *Níveis de Van Hiele e realização da geometria na escola secundária*. Dissertação (Mestrado) — Universidade de Chicago, Chicago, 1982. Citado na página 53.

WAGNER, E. *Construções Geométricas*. Rio de Janeiro: SBM, 2000. v. 4. Citado 6 vezes nas páginas 16, 30, 32, 36, 41 e 65.

YOUNG, M. *Knowledge and control: new directions for the Sociology of Education*. London: Collier Macmillan, 1971. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 24.

ZUIN, E. de S. L. *Da régua e do compasso: as construções geométricas como um saber escolar no Brasil*. Dissertação (Mestrado) — UFMG, Faculdade de Educação, 2001. Citado 6 vezes nas páginas 15, 16, 22, 23, 24 e 26.

ZUIN, E. de S. L. *Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática para o 3 e 4 Ciclos do Ensino Fundamental e o Ensino das Construções Geométricas, Entre Outras Considerações*. PUC Minas: [s.n.], 2002. GT 19 - Educação Matemática. Citado na página 24.

Apêndices

APÊNDICE A

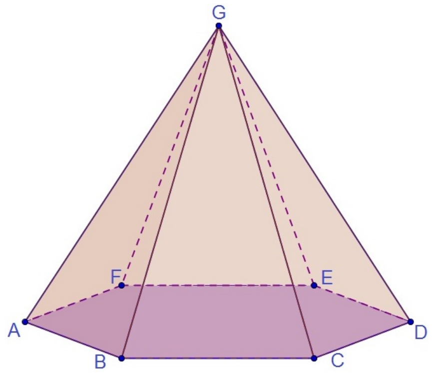
Atividades

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
Pesquisador: Lucas Maken da Silva Oliveira
Orientador: Oscar Alfredo Paz La Torre
Aluno:______________________________________.
Grupo:_____ **Turma:**_______ **Data:**___/___/___.

Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro

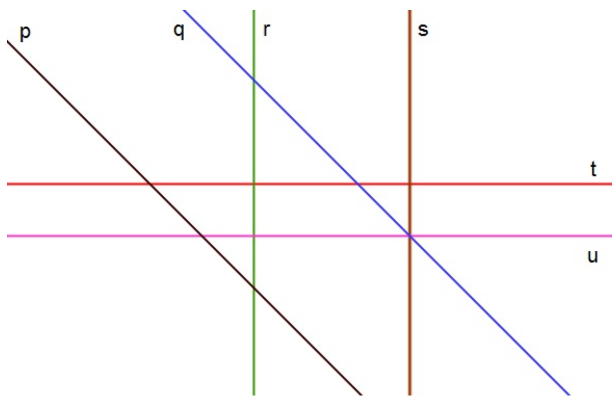
A.1 Atividade 1 - Visualização e Reconhecimento

1. Determine o que se pede observando o desenho abaixo:



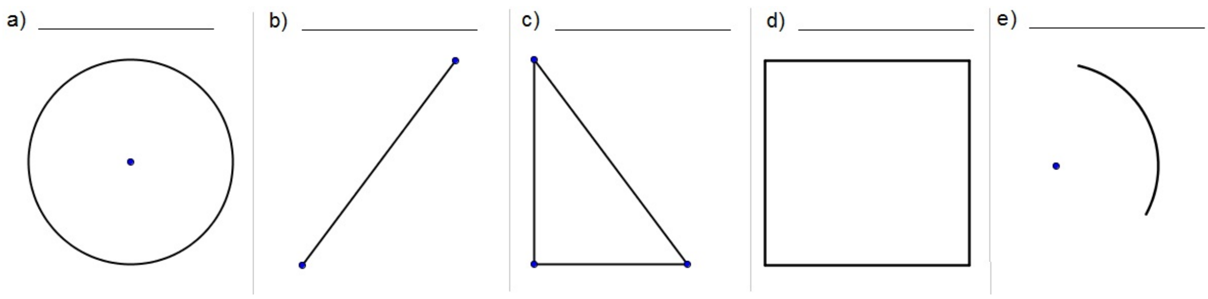
a) 4 pontos ________, ________, ________ e ________.
b) 5 Segmentos de reta _______, _______, _______, _______ e _______.

2. Observe o desenho a seguir e complete o que se pede usando os símbolos //, $\perp$ ou $\nmid$ para determinar se as retas são paralelas, perpendiculares ou concorrentes não perpendiculares, respectivamente nesta ordem.

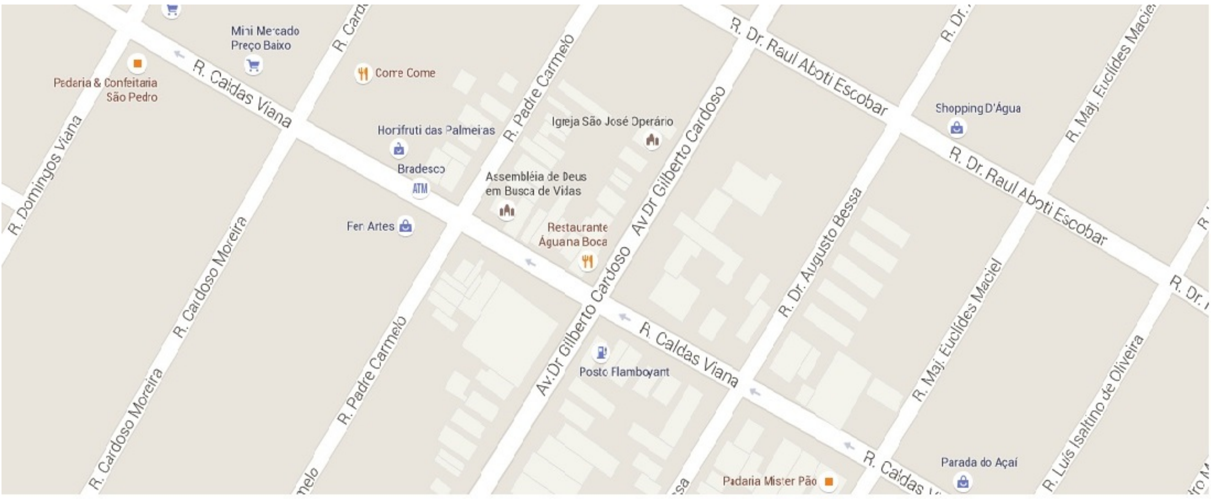


$a)p$______q $d)q$______r $g)t$______r
$b)p$______u $e)q$______t $h)r$______u
$c)p$______r $f)r$______s $i)t$______u

3. Observe cada figura abaixo e diga qual dos instrumentos geométricos é o mais apropriado para construir cada uma delas.



4. Observe o mapa abaixo e responda o que se pede:



a) Diga o nome de uma rua que pode ser considerada perpendicular à Rua Caldas Viana

______________________________.

b) Diga qual rua pode ser considerada paralela à Rua Gilberto Cardoso

______________________________.

c) 3 pares diferentes de ruas paralelas

______________________________ // ______________________________,

______________________________ // ______________________________ e

______________________________ // ______________________________.

d) 3 pares diferentes de ruas perpendiculares

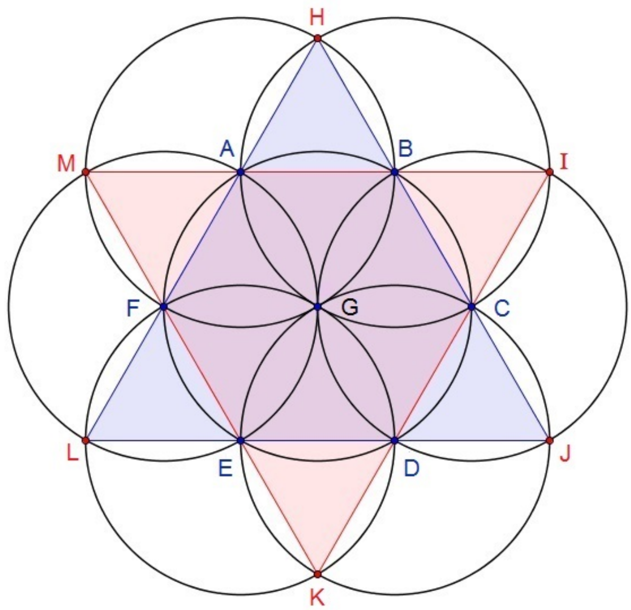
______________________________ $\perp$ ______________________________,

______________________________ $\perp$ ______________________________ e

______________________________ $\perp$ ______________________________.

5. Qual dos instrumentos você considera o mais apropriado para unir dois pontos quaisquer? ______________________________

6. A figura a seguir se chama rosácea matemática, ela é composta por 7 circunferências congruentes.



De acordo com a rosácea acima determine:

a) 3 segmentos de retas paralelos ____________________________.

b) 3 segmentos de retas perpendiculares ____________________________.

c) 3 segmentos de retas concorrentes não perpendiculares

____________________________.

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
Pesquisador: Lucas Maken da Silva Oliveira
Orientador: Oscar Alfredo Paz La Torre
Aluno:____________________________________.
Grupo:_____ **Turma:**_______ **Data:**___/___/___.

PROFMAT

UENF
Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro

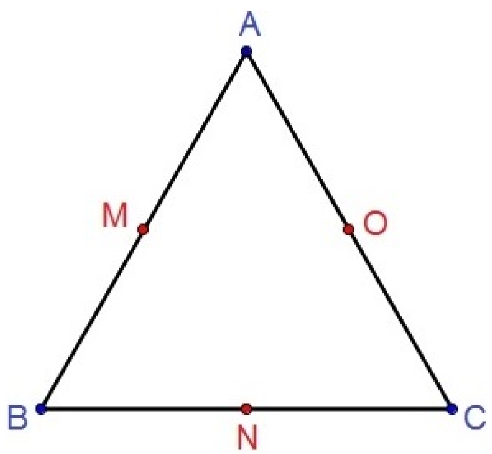
A.2 Atividade 2 - Aprendendo a manusear régua e compasso

1. Observe que os pontos M, N e O são pontos médios dos segmentos AB, BC e AC respectivamente.

a) Desenhe uma circunferência com centro em A passando por M.

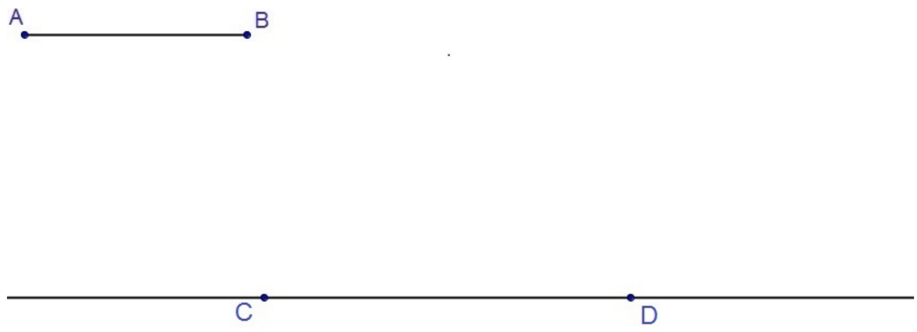
b) Desenhe outra circunferência com centro em B passando por N.

c) Desenhe uma terceira circunferência com centro em C e passando por O.



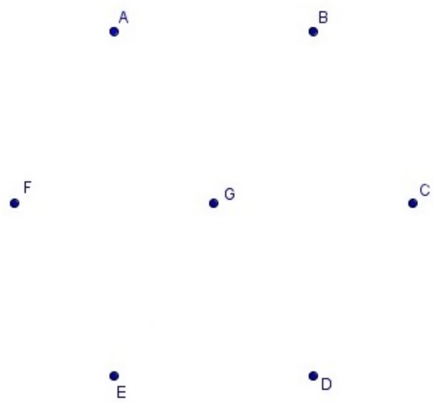
d) O que você pode dizer sobre as três circunferências? ______________________________

2. Com a abertura do compasso de tamanho AB, faça duas circunferências, uma com centro no ponto C e a outra em D.



a) Observe que as circunferências se intersectaram, marque dois pontos nas interseções entre essas circunferências e chame-os de P e Q.
b) Agora ligue esses dois pontos e diga qual relação você pode observar entre as retas PQ e CD? ______________________________

3. Faça sete circunferências, cada uma com centro em cada um dos pontos dados, de modo que:
a) A primeira tenha centro em a e raio AG.
b) A segunda com centro em B e raio BG.
c) A terceira com centro em G e raio GA.
d) A quarta com centro em F e raio FG.
e) A quinta com centro em C e raio CG.
f) A sexta com centro em E e raio BG.
g) A sétima com centro em D e raio DG.

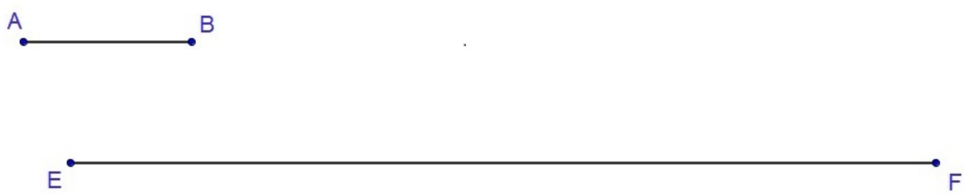


Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
Pesquisador: Lucas Maken da Silva Oliveira
Orientador: Oscar Alfredo Paz La Torre
Aluno:____.
Grupo:______ **Turma:**________ **Data:**___/___/____.

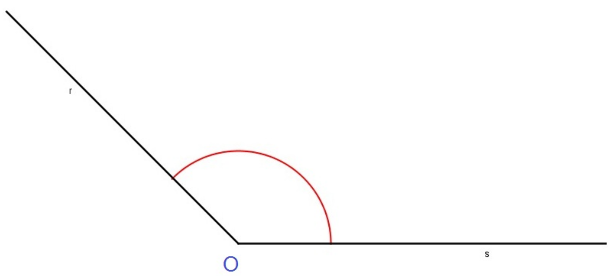
A.3 Atividade 3 - Construções básicas com régua e compasso

1. Divida o segmento de reta abaixo em quatro segmentos congruentes.

2. Transporte a medida AB para o segmento de reta EF e verifique quantos segmentos inteiros de AB cabem dentro do segmento EF.



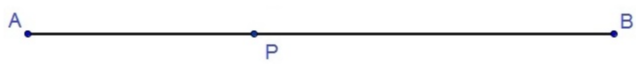
3. Divida o ângulo abaixo em quatro ângulos congruentes.



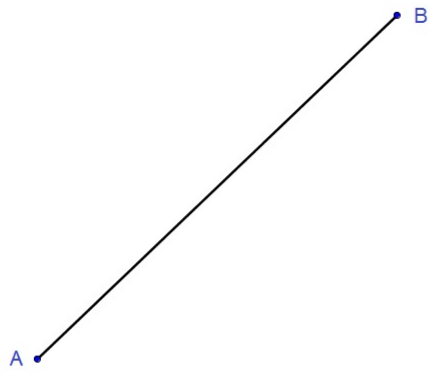
4. Trace a mediatriz do segmento AB e marque um ponto C na interseção da mediatriz com o segmento AB. Depois faça uma circunferência com centro em C e raio de tamanho CB.

5. Desenhe uma reta r paralela a s passando pelo ponto P, agora trace uma reta t perpendicular a reta s também passando por P.

6. Construa uma reta perpendicular ao segmento AB passando pelo ponto P, agora construa circunferência com centro em P e tamanho AP.



7. O segmento de reta abaixo é a medida da diagonal de um quadrado. Desenhe esse quadrado usando régua e compasso.

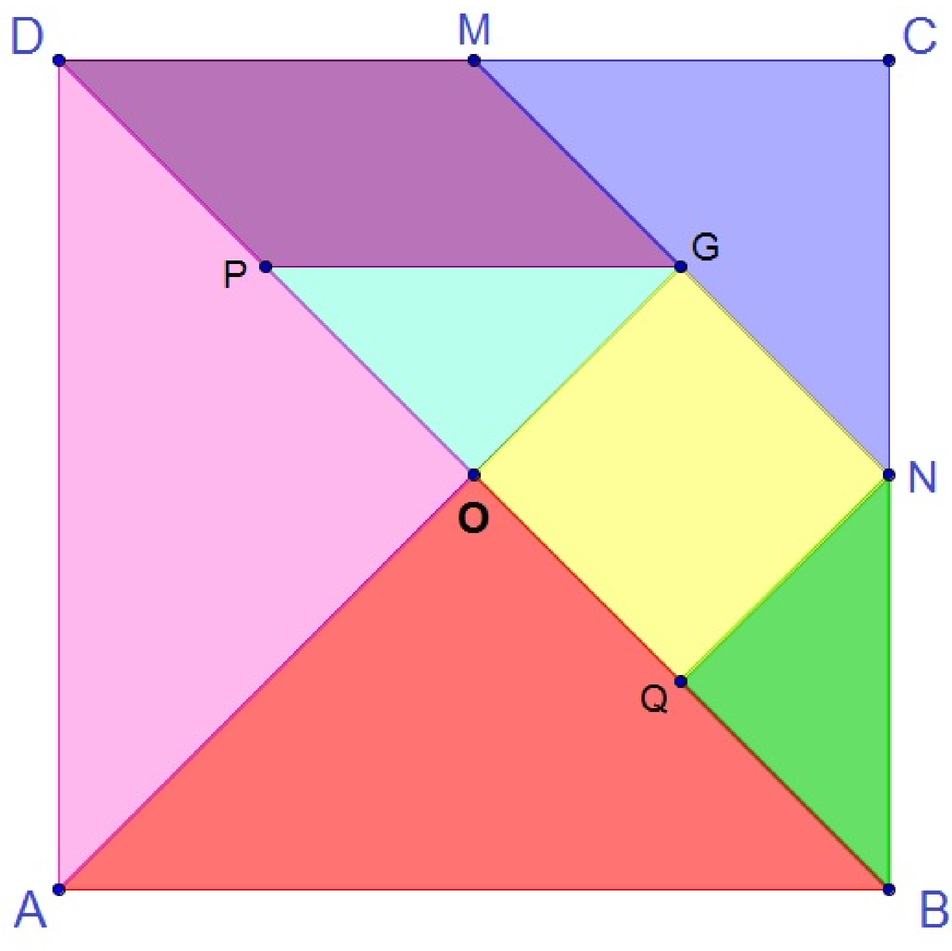


8. O segmento de reta abaixo é a medida do lado de um quadrado. Desenhe esse quadrado usando régua e compasso.

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
Pesquisador: Lucas Maken da Silva Oliveira
Orientador: Oscar Alfredo Paz La Torre
Aluno:____.
Grupo:______ **Turma:**________ **Data:**___/___/____.

A.4 Atividade 4 - Tangram

1) Construa em uma folha de papel A4 o tangram abaixo seguindo o roteiro e utilizando apenas régua e compasso.



Vamos a construção passo a passo.

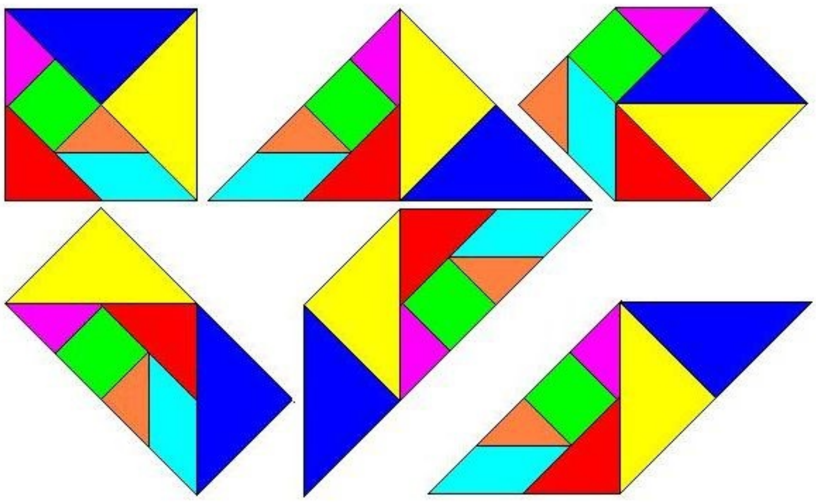
Roteiro:

1º Passo: Construa um quadrado como feito no exercício 7 da atividade 3, de maior tamanho possível numa folha de de papel A4 e nomeie seus vértices de A, B, C e D.

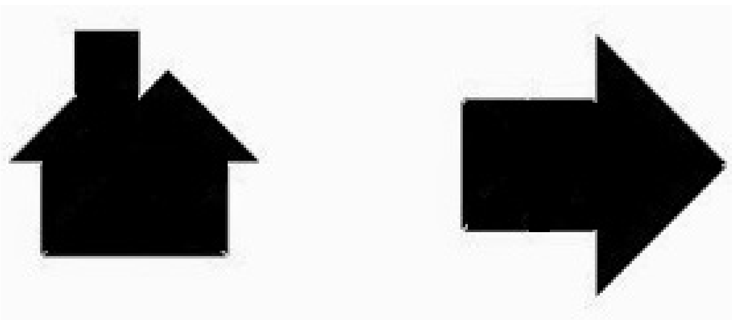
2º Passo: Marque o ponto médio de BC e de CD determinando os pontos N e M, respectivamente.

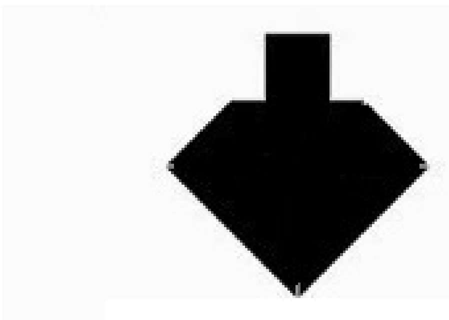
3º Passo: Agora trace os segmentos BD e MN.
4º Passo: Agora trace a diagonal de AC, de modo que pare no segmento MN, determinando O na interseção com BD e um ponto G na interseção com MN.
5º Passo: Trace o ponto médio de DO formando um ponto P e o ponto médio de BO determinando um ponto Q.
6º Passo: Ligue o ponto P ao ponto G, e ligue o ponto Q ao ponto N.
7º Passo: Recorte cada uma das peças e pinte-as da cor que quiser.

Agora tente formar as figuras geométricas abaixo utilizando essas peças.



2) Use as peças do tangram para replicar as figuras abaixo.





3) Tarefa para casa em grupo:
Construam um tangram com o material de sua preferência.
Pesquise figuras que se pode montar com essas peças, depois de escolhido vamos apresentar para outras turmas como forma de desafio.

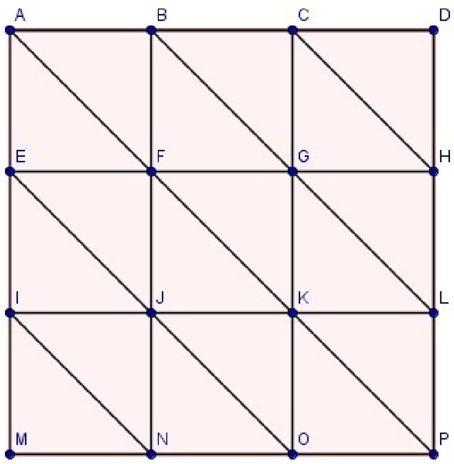
PROFMAT

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
Pesquisador: Lucas Maken da Silva Oliveira
Orientador: Oscar Alfredo Paz La Torre
Aluno:____.
Grupo:______ **Turma:**________ **Data:**____/____/____.

UENF
Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro

A.5 Atividade 5 - Triângulos e suas classificações

1. (OBMEP-editado) Quantos triângulos existem na figura abaixo? Liste cada um deles de acordo com seus vértices.



Liste abaixo os triângulos encontrados

____

____

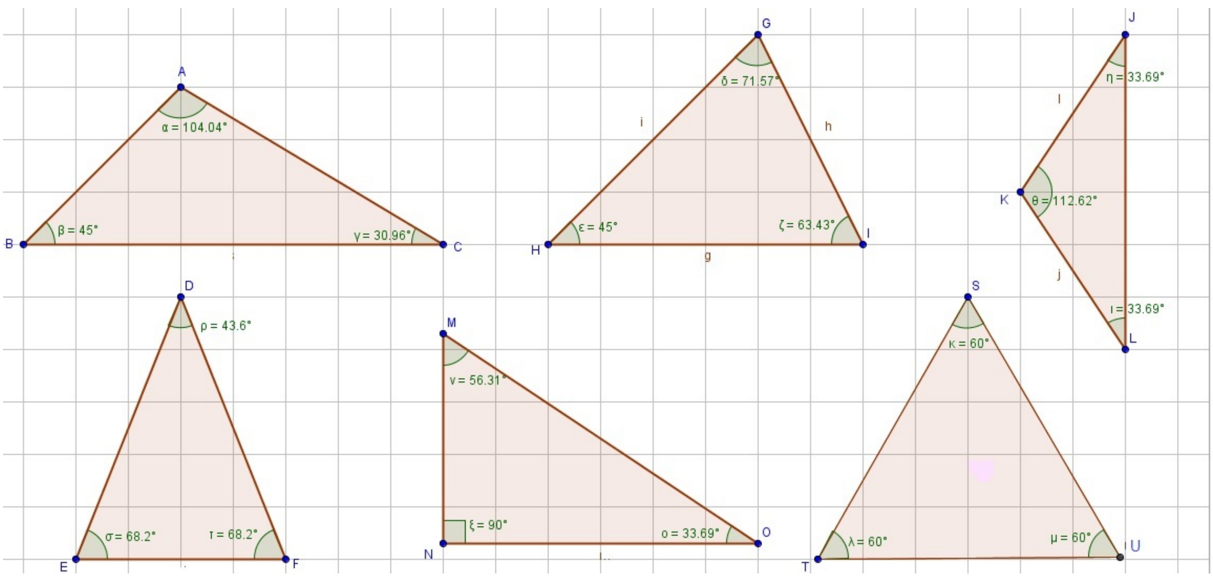
____

____

____

____

Observe os triângulos da figura abaixo para responder as questões 2 e 3.



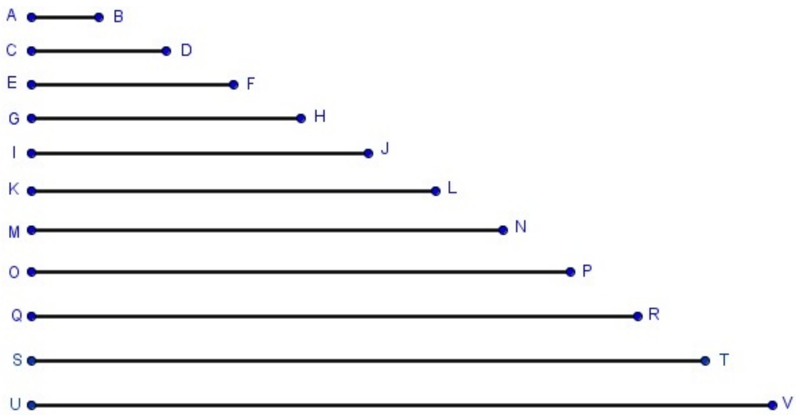
2. De acordo com a medida dos lados, classifique cada um dos triângulos acima em equilátero, isósceles ou escaleno.

$a)\Delta ABC$____________________ $d)\Delta JKL$____________________
$b)\Delta DEF$____________________ $e)\Delta MNO$____________________
$c)\Delta GHI$____________________ $f)\Delta STU$____________________

3. Agora classifique-os de acordo com a medida de seus ângulos cada triângulo em acutângulo, retângulo ou obtusângulo.

$a)\Delta ABC$____________________ $d)\Delta JKL$____________________
$b)\Delta DEF$____________________ $e)\Delta MNO$____________________
$c)\Delta GHI$____________________ $f)\Delta STU$____________________

4. Observe todos os segmentos de reta abaixo e faça o que se pede (os triângulos devem ser desenhados em folhas separadas de papel A4):



a) Desenhe um triângulo com seus lados medindo EF, GH e IJ.

b) Construa um triângulo com seus três lados medindo EF.

c) Desenhe um triângulo com a base medindo UV e os outros dois lados com medida KL.

d) Construa um triângulo com a base AB e os outros dois lados medindo CD.

e) Desenhe um triângulo com a base medindo ST, e os outros lados com medidas QR e CD.

f) Construa um triângulo com a base medindo OP, e os outros lados com medidas CD e EF.

g) Desenhe um triângulo com seus três lados medindo EF.

h) Construa um triângulo com a base medindo OP, e os outros lados com medida CD.

5. Classifique cada triângulo da questão anterior de acordo com a medida de seus lados.

$a)$ ____________________	$e)$ ____________________
$b)$ ____________________	$f)$ ____________________
$c)$ ____________________	$g)$ ____________________
$d)$ ____________________	$h)$ ____________________

6. Classifique cada triângulo da questão 4 de acordo com a medida dos seus ângulos.

$a)$ ____________________	$e)$ ____________________
$b)$ ____________________	$f)$ ____________________
$c)$ ____________________	$g)$ ____________________
$d)$ ____________________	$h)$ ____________________

PROFMAT

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
Pesquisador: Lucas Maken da Silva Oliveira
Orientador: Oscar Alfredo Paz La Torre
Aluno:____.
Grupo:______ **Turma:**________ **Data:**____/____/____.

UENF
Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro

A.6 Atividade 6 - Construindo ângulos e triângulos

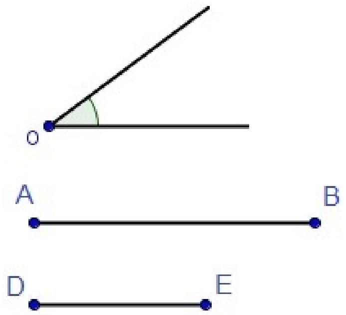
1) Construa um triângulo isósceles que tenha um de seus ângulos medindo 150°.

2) Construa um triângulo isósceles dado em posição a sua base e sabendo que os ângulos adjacentes a essa base devem medir 45°.

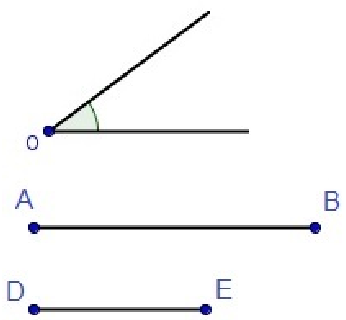
3) Construa um triângulo escaleno que seja retângulo.

4) O segmento posicionado abaixo representa a altura de um triângulo equilátero, desenhe esse triângulo.

5. Construa um triângulo dado um ângulo e os lados adjacentes a ele.



6. Construa um triângulo dado um ângulo, o segmento AB adjacente a ele e o segmento DE que não é adjacente ao ângulo dado.

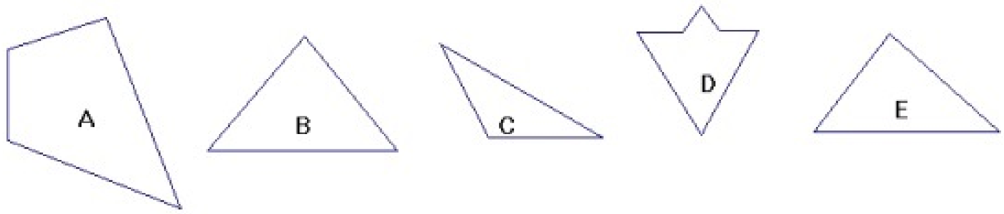


ANEXO A

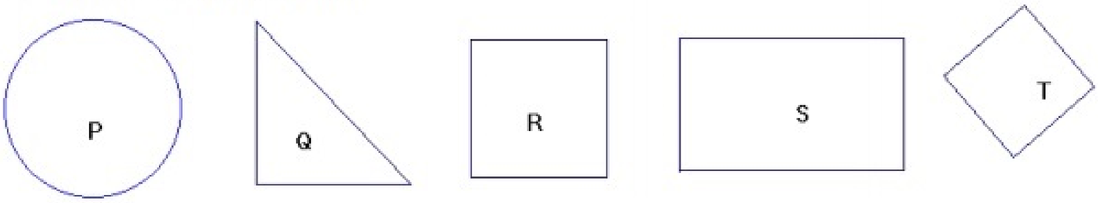
Teste de Van Hiele

Nome: .... **Turma**: .... **Idade**: ....

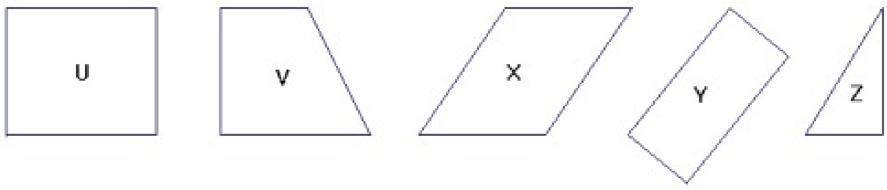
1 – Assinale o(s) triângulos(s):



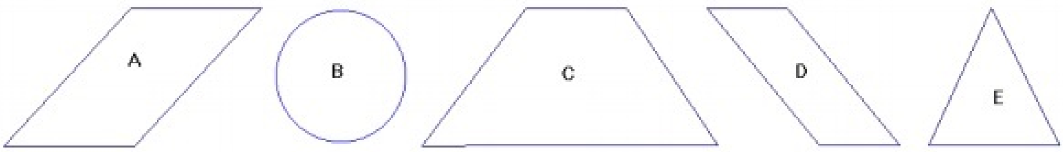
2 – Assinale o(s) quadrado(s):



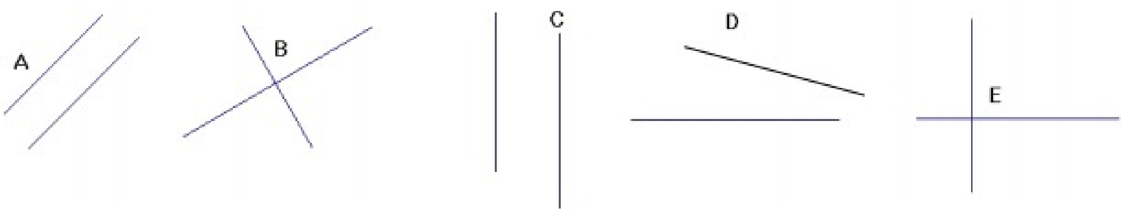
3 – Assinale o(s) retângulo(s):



4 – Assinale o(s) paralelogramo(s):



5 – Assinale os pares de retas paralelas:

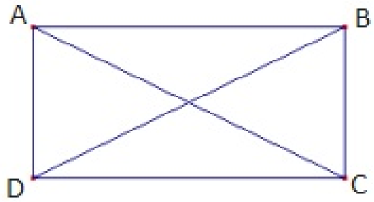


Nível 0: S ☐ N ☐

Nome:.. **Turma**:............ **Idade**:............

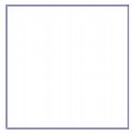
6 – No retângulo ABCD, as linhas AC e BD são chamadas de diagonais.
Assinale a(s) afirmativa(s) verdadeira(s) para todos os retângulos:

a) Têm 4 ângulos retos.
b) Têm lados opostos paralelos.
c) Têm diagonais de mesmo comprimento.
d) Têm os 4 lados iguais.
e) Todas são verdadeiras.



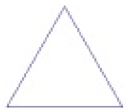
7 – Dê 3 propriedades dos quadrados:

1 – ....
2 – ....
3 – ....



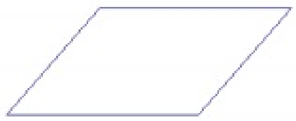
8 – Todo triângulo isósceles têm dois lados iguais. Assinale a afirmativa verdadeira sobre os ângulos do triângulo isósceles:

(a) Pelo menos um dos ângulos mede 60º.
(b) Um dos ângulos mede 90º.
(c) Dois ângulos têm a mesma medida.
(d) Todos os três ângulos têm a mesma medida.
(e) Nenhuma das afirmativas é verdadeira.



9 – Dê 3 propriedades dos paralelogramos.

1 – ....
2 – ....
3 – ....

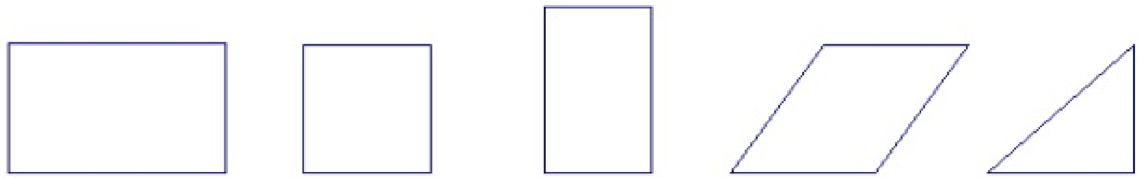


10 – Dê um exemplo de um quadrilátero cujas diagonais não têm o mesmo comprimento. Desenhe esse quadrilátero.

Nível 1: S ☐ N ☐

Nome: .... **Turma**: .... **Idade** : ....

11- Assinale a(s) figura(s) que pode(m) ser considerada(s) retângulos:



12 – Os quatro ângulos A, B, C e D de um quadrilátero ABCD são todos iguais.

(a) Pode-se afirmar que ABCD é um quadrado?
....
(b) Por que?...
(c) Que tipo de quadrilátero é ABCD?
....

13 – Pode-se afirmar que todo retângulo é também um paralelogramo?
....Por que?...

14 – Considere as afirmativas:

(I) A figura X é um retângulo
(II) A figura X é um triângulo.

Assinale a afirmativa verdadeira:
(a) Se I é verdadeira, então II é verdadeira.
(b) Se I é falsa, então II é verdadeira.
(c) I e II não podem ser ambas verdadeiras.
(d) I e II não podem ser ambas falsas.
(e) Se II é falsa, então I é verdadeira.

15 – Assinale a afirmativa que relaciona corretamente as propriedades dos retângulos e dos quadrados;
(a) Qualquer propriedade dos quadrados é também válida para os retângulos.
(b) Uma propriedade dos quadrados nunca é propriedade dos retângulos.
(c) Qualquer propriedade dos retângulos é também válida para os quadrados.
(d)Uma propriedade dos retângulos nunca é propriedade dos quadrados.
(e) Nenhuma das afirmativas anteriores.

Nível 2: S ☐ N ☐