Universidade Federal de Sergipe

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE**

**PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA**

**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA**

**MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT**

# Uma Construção Geométrica dos Números Reais

**Simone de Carvalho Santos**

**Orientador: Professor Dr. Evilson da Silva Vieira**

São Cristóvão - SE

Agosto de 2015.

**Simone de Carvalho Santos**

# Uma Construção Geométrica dos Números Reais

*Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.*
*Orientador: Professor Dr. Evilson da Silva Vieira.*

São Cristóvão - SE

Agosto de 2015.

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA**
**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE**

Santos, Simone de Carvalho

S237

Uma construção geométrica dos números reais / Simone de Carvalho Santos ; orientador Evilson da Silva Vieira. – São Cristóvão, 2015.

93 f. il.

Dissertação (mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Sergipe, 2015.

1. Matemática. 2. Números reais. 3. Números irracionais. 4. Números racionais. I. Vieira, Evilson da Silva, orient. II. Título.

CDU 51

PROFMAT

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE**
**PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA**
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA**
**MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL**

*Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.*

**Uma Construção Geométrica dos Números Reais**

***por***

Simone de Carvalho Santos

Aprovada pela Banca Examinadora:

Evilson S. Vieira

Prof. Dr. Evilson da Silva Vieira- UFS
Orientador

Almir Rogério Silva Santos

Prof. Dr. Almir Rogério Silva Santos- UFS
Primeiro Examinador

Crislene Santos da Paixão

Prof$^{a}$. Dra. Crislene Santos da Paixão - IFS
Segundo Examinador

São Cristóvão, 31 de Agosto de 2015.

Cidade Universitária "Prof. José Aloísio de Campos" – Av. Marechal Rondon, s/no - Jardim Rosa Elze – Campus de São Cristóvão. Tel. (00 55 79) 2105-6887
CEP: 49100-000 - São Cristóvão – Sergipe - Brasil – E-mail: promat.ufs@gmail.com

# Agradecimentos

Agradeço

A Deus, por me dar forças para superar os momentos difíceis e mostrar o caminho nas horas de incerteza.

Ao meu orientador, Evilson da Silva Vieira, não só pela constante direção neste trabalho, mas sobretudo pela sua paciência, boa vontade e compreensão das minhas limitações.

À minha família, em especial a minha mãe, Cione, e a minha irmã, Paula, por terem me apoiado e incentivado com amor incondicional.

Ao meu namorado Vinícius, pelo amparo, pelo apoio durante todo o trabalho, tendo sempre palavras de amizade, ânimo e incentivo, sem o qual eu não teria conseguido vencer mais esta etapa e por me fazer feliz todos os dias.

Aos meus amigos e colegas que contribuíram de forma direta ou indireta para a realização desse trabalho.

Aos professores e coordenadores do PROFMAT-UFS pelo empenho e dedicação mostrados ao longo do curso.

À CAPES pelo suporte financeiro.

# Resumo

O presente trabalho tem por objetivo apresentar uma construção geométrica dos números reais caracterizando-os como números que expressam uma medida. Nesta construção cada ponto de uma reta orientada representa a medida de um segmento (um número real), com base nos cinco axiomas da geometria euclidiana definiu-se uma relação de ordem, um método para somar e multiplicar pontos de tal forma que fosse possível demonstrar que a reta possui uma estrutura algébrica de corpo ordenado completo a qual chamamos de conjunto dos números reais. Para tanto, foram apresentados elementos históricos que permitem compreender o surgimento dos números irracionais como solução para a insuficiência dos números racionais no que diz respeito ao problema de medida, a evolução do próprio conceito de número, bem como a importância que a construção rigorosa dos números reais tiveram para os Fundamentos da Matemática. Exibimos uma construção dos números racionais a partir dos números inteiros como motivação para construções de conjuntos numéricos. Usando a noção de medida mostramos uma interpretação geométrica dos números racionais associando-os aos pontos de uma reta orientada para demonstrar que eles deixam "buracos" na reta e concluir sobre a necessidade de construir um conjunto que contenha os números racionais e que preencham todos os pontos de uma reta. O tema é de extrema importância para o ensino da matemática, visto que um dos principais objetivos do ensino básico é promover a compreensão dos números e das operações, desenvolver o sentido de número e desenvolver a fluência no cálculo, sendo necessário para tal assimilar os números reais, em especial os irracionais, os quais são tratados a partir do ensino fundamental.

**Palavras-chave:** Construção dos números Reais. Números irracionais. Construção dos números racionais. Corpo ordenado completo.

# Abstract

This study aims to present a geometric construction of real numbers characterizing them as numbers that express a measure. In this construction, each point in an oriented line represents the measure of a segment (a real number). Based on five axioms of Euclidean geometry it was defined an order relation, a method to add and multiply points so that it was possible to demonstrate that the line has a full ordered body of algebraic structure that we call the set of real numbers. To do so, it were presented historical elements that allow us to understand the emergence of irrational numbers as a solution to the insufficiency of rational numbers with respect to the measuring problem, the evolution of the concept of number, as well as the importance that the strict construction of real numbers had to the Foundations of Mathematics. We display a construction of rational numbers from the integernumbers as motivation for construction of numerical sets. Using the notion of measure,we show a geometric interpretation of rational numbers linking them to the points of an oriented line to demonstrate that they leave "holes" in the line and conclude on the need to build a set that contains the rational numbers and that fill all the points of a line. The theme is of utmost importance to the teaching of mathematics because one of the major goal of basic education is to promote understanding of numbers and operations, to develop number sense and to develop fluency in the calculation. To achieve this, it is necessary to assimilate the real numbers, especially the irrational ones, which are taught since the elementary school.

**Keywords:** Construction of Real numbers. Irrational numbers. Construction of rational numbers. Full ordered body.

# Conteúdo

# Capítulo 1

# Introdução

A compreensão dos números é a base para compreender toda a matemática. Apesar de o utilizamos diariamente a todo instante, dar uma definição para número não é uma tarefa fácil. Neste trabalho diremos que os números são abstrações que surgem do processo de contagem de objetos e de medição de várias quantidades, como comprimento, peso e tempo. E que existe tipos diferentes de números.

Dos números apresentados no ensino fundamental os que causam mais embaraço são os números reais, especialmente os números irracionais. Esse embaraço continua no ensino médio e as vezes no ensino superior. A falta de uma noção clara do que é um número irracional e o que o distingue de um número racional, para além da notação, mais a impressão de que são inúteis do ponto de vista prático, implica numa séria dificuldade de compreensão destes números e consequentemente de outros conteúdos dependentes do conceito de número real, por exemplo, continuidade de funções, convergência de séries, limites, etc.

Penteado, em [20], cita algumas conclusões das pesquisas realizadas no Brasil e no exterior acerca das concepções dos alunos sobre os números reais que destacamos a seguir: a associação de número irracional a um número que não é exato; a definição de número irracional como sendo infinito ou aquele que contém infinitos dígitos após a vírgula ou ainda as raízes; a confusão entre número irracional e sua aproximação atribuindo o mesmo significado (como $\pi = 3,14$); a concepção de que duas grandezas são sempre comensuráveis; que as propriedades atribuídas à reta real continuavam válidas mesmo sem os números irracionais e o desconhecimento da completude do conjunto dos números reais.

Uma pesquisa desenvolvida sobre as imagens conceituais dos números reais realizada com 84 alunos dos cursos de Licenciatura em Matemática da UFMG e UFSC, ver [9], mostrou que quase 50% não compreendem o que é um número irracional, definem um número irracional como um número não exato; a distinção entre racional e irracional é apenas na forma de representação (fração x não fração - decimal finito ou periódico x decimal infinito não periódico); não associam o significado da incomensurabilidade de dois segmentos com o sentido e a necessidade dos números irracionais.

Não é de se espantar com tais resultados uma vez que o tratamento que se dá aos números irracionais no ensino básico é um tanto superficial. Os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental aponta que uma das causas que contribui para que os alunos não desenvolvam bem o conceito dos números irracionais é que o estudo desses números têm se limitado quase que exclusivamente ao ensino do cálculo com radicais. No entanto, das quatros sugestões que faz para trabalhar esse tema duas delas é com o cálculo de radicais.

> O estudo desses números pode ser introduzido por meio de situações-problema que evidenciem a necessidade de outros números além dos racionais. Uma situação é a de encontrar números que tenham representação decimal infinita, e não periódica. Outra é o problema clássico de encontrar o comprimento da diagonal de um quadrado, tomando o lado como unidade, que conduz ao número $\sqrt{2}$. Nesse caso, pode-se informar (ou indicar a prova) da irracionalidade de $\sqrt{2}$, por não ser uma razão de inteiros. O problema das raízes quadradas de inteiros positivos que não são quadrados perfeitos, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, etc., poderia seguir-se ao caso particular de $\sqrt{2}$.
>
> ... explorar números na forma $a + b\sqrt{2}$, com $a$ e $b$ racionais, pode contribuir para a superação da ideia equivocada de que há poucos irracionais. (PCN, [4], pág. 106, 107).

E é exatamente isso que os livros do ensino fundamental trazem, os números irracionais são abordados a partir do 8º ano do ensino fundamental geralmente com problemas envolvendo a determinação de raízes quadradas não exatas, ensina-se a determinar valores aproximados, faz-se o estudo da representação decimal dos números racionais verifica-se que a divisão é finita, ou infinita e periódica e então define-se os números irracionais como um número não racional, que não pode ser escrito em forma de fração e cuja representação decimal é infinita e não-periódica. Cita-se alguns exemplos, especialmente os radicais ($\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{17}$, etc...) e as vezes o número $\pi$. Depois disso, define-se o conjunto dos números reais como a união dos números racionais e dos números irracionais. O problema dessas definições é admitir previamente o entendimento do que seja número, isto é, número real. No 1º ano do ensino médio estuda-se mais uma vez os conjuntos numéricos, agora de forma apressada, uma espécie de revisão rápida, quando deveria ser feito uma abordagem com o objetivo de ganhar mais consistência teórica. Mais uma vez enfatiza-se a representação decimal infinita e não periódica dos números irracionais, finita ou infinita periódica do números racionais, sem ao menos justificar por que a repetição acontece, e o conjunto dos números reais como a união do conjunto dos números racionais e o conjunto dos números irracionais.

Não estamos com isso querendo defender uma apresentação rigorosa dos números reais, julgamos inclusive inadequado. Mas é perfeitamente possível definir um número real como o resultado da medida de uma grandeza, contar o motivo pelo qual eles existem explicando o que são grandezas incomensuráveis, conceito cuja discussão pode favorecer a compreensão de que os números irracionais são indispensáveis para representar a medida de quaisquer grandezas.

Utilizando-se do fato que sempre podemos imaginar o resultado de uma medida como um segmento de reta, apresentaremos uma construção geométrica dos números reais definindo um número real como um ponto de um reta orientada que representa a medida de um segmento, definiremos um método para somar e multiplicar pontos da reta usando régua e compasso ou software GeoGebra, como uma alternativa para a introdução desses números no ensino fundamental sob uma perspectiva geométrica.

Iniciamos nosso estudo fazendo um apanhado histórico dos números irracionais desde a descoberta dos segmentos incomensuráveis até a construção do conjunto dos números reais por Dedeking. O conhecimento da evolução histórica dos conceitos matemáticos é importante, pois ajuda-nos a refletir sobre a necessidade de dar tempo para o adequado desenvolvimento da compreensão de determinados conceitos matemáticos.

No segundo capítulo falamos sobre o processo de contagem, conjuntos finitos, infinitos, conjuntos enumeráveis, relações de equivalência, corpo, conjuntos limitados, o conceito de supremo e de ínfimo, definições e propriedades que são necessários para o entendimento das construções que fazemos. Ainda neste capítulo explicamos o significado de medir e o que são segmentos comensuráveis e segmentos incomensuráveis.

No terceiro capítulo fazemos uma construção dos números racionais a partir dos números inteiros para mostrar ao leitor como construir conjuntos. Fazemos uma identificação dos números racionais a pontos de uma reta orientada, mostramos que existem pontos na reta que não correspondem a números racionais.

O quarto capítulo contém o desenvolvimento da proposta deste trabalho que é construir geometricamente o conjunto dos números reais. Iniciamos definindo um número real como um ponto de uma reta orientada que representa o tamanho de um segmento de reta, isto é, a medida de uma grandeza. Usando as definições do capítulo 2 mostramos que essa reta possui a estrutura algébrica de um corpo ordenado completo.

No quinto capítulo apresentamos algumas construções geométricas usando régua e compasso e utilizando o GeoGebra.

## 1.1 Contexto histórico

A matemática demonstrativa nasceu numa atmosfera de racionalismo em que o homem começou a formular questões fundamentais para entender o por quê das coisas. Os primeiros personagens conhecidos aos quais se associam descobertas matemáticas são Tales de Mileto[1] e Pitágoras (572 a.C. - 496 a.C.), fundador da escola pitagórica, que além de ser um centro de estudo de filosofia, matemática e ciências naturais, era também uma irmandade estreitamente unida por ritos secretos e cerimoniais.

A filosofia pitagórica baseava-se na suposição de que todas as coisas do universo podiam ser descritas através dos números inteiros. Isso levava a uma exaltação e aos estudos das propriedades dos números e da aritmética, junto com a geometria, a música e a astronomia, que constituíam as artes liberais básicas do programa pitagórico.

Atribui-se a Pitágoras a descoberta do teorema sobre triângulos retângulos, hoje universalmente conhecido pelo seu nome:

"O quadrado sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma dos quadrados sobre os cateto."

Uma das maiores realizações dos pitagóricos foi a descoberta dos segmentos incomensuráveis, um marco na História da Matemática.

[1] Considerado um dos sete sábios da antiguidade. Creditam-se a ele, entre outras coisas, os seguintes resultados: os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais; os ângulos opostos pelo vértice são iguais; se dois triângulos têm dois ângulos e um lado em cada um deles respectivamente iguais, então eles são semelhantes.

Eles provaram que não há nenhum número inteiro[2], nem nenhuma razão entre inteiros (número racional) que possa representar a medida da diagonal de um quadrado cujos lados medem uma unidade. Como consequência, novos números tiveram que ser inventados para representarem essas medidas, surgem então os números irracionais (significa números não-racionais).

A revelação da existência desses novos números foi considerada uma crise nos fundamentos da Matemática, primeiro porque abalou a base da filosofia pitagórica de que tudo dependia dos números inteiros, limitou a teoria da proporções à grandezas comensuráveis e invalidou a teoria geral das figuras semelhantes [3]. Além disso, contrariava o senso comum, pois intuitivamente é razoável admitir que dados dois segmentos de reta sempre seria possível encontrar um terceiro segmento, talvez muito pequeno, que coubesse exatamente um número inteiro de vezes em cada um dos dois segmentos dados. Abriu-se as portas para processos infinitos, visto que um segmento não podia mais ser considerado indivisível, mas infinitamente divisível.

Nessa mesma época, surge os paradoxos de Zenão de Eléia. Eles mostravam que considerar grandezas indivisíveis ou infinitamente divisíveis levava a contradições. Vejamos um deles:

"*A Dicotomia*: Se um segmento de reta pode ser subdividido indefinidamente, então o movimento é impossível pois, para percorrê-lo, é preciso antes alcançar seu ponto médio, antes ainda alcançar o ponto que estabelece a marca de um quarto do segmento, e assim por diante, *ad infinitum*. Segue-se então que o movimento jamais começará."

Durante muito tempo os matemáticos buscaram explicar esses paradoxos, sem sucesso, decidiram evitar os processos infinitos.

A solução desses problemas se deu, por volta de 370 a. C. com a nova definição de proporção feita por Eudoxo que se aplicava tanto a grandezas comensuráveis quanto a grandezas incomensuráveis. Essa definição está exposta no Livro V dos Elementos de Euclides, e diz o seguinte:

*"Diz-se que quatro grandezas estão na mesma razão, a primeira para segunda e a terceira para quarta, tomando-se equimúltiplos quaisquer da primeira e da terceira e equimúltiplos quaisquer da segunda e da quarta, os primeiros equimúltiplos são ambos maiores que, ou ambos iguais a, ou ambos menores que os últimos equimúltiplos considerados em*

[2]Entender por inteiro os que classificamos atualmente como inteiros positivos.

[3]Dependente do Teorema de Tales.

*ordem correspondente."*

Em linguagem atual, dadas quatro grandezas (segmentos de reta, área, volume,...) da mesma espécie $A, B, C$ e $D$, diz-se que $A$ está para $B$ assim como $C$ está para $D$, isto é, $\left(\frac{A}{B} = \frac{D}{C}\right)$ se para inteiros $m$ e $n$ arbitrários, as condições a seguir eram verificadas:

$$\text{Se } m \cdot A > n \cdot B \text{ então } m \cdot C > n \cdot D$$
$$\text{Se } m \cdot A < n \cdot B \text{ então } m \cdot C < n \cdot D$$
$$\text{Se } m \cdot A = n \cdot B \text{ então } m \cdot C = n \cdot D$$

Essa teoria forneceu a fundamentação para construção da teoria dos números reais, desenvolvida no século XIX, por Dedekind.

Muita matemática tinha sido desenvolvida usando uma ideia intuitiva de limites: funções de variáveis reais, convergência de séries infinitas, o cálculo diferencial e integral. E a ideia de limite fora construída sobre uma noção intuitiva simples dos números reais. Até que essa falha foi percebida e muitos matemáticos do século XIX se preocuparam em estabelecer uma definição rigorosa dos números reais para que assim tudo que dele decorresse na análise inspirasse segurança, esse período é conhecido como "aritmetização da análise". Matemáticos como Weierstrass, Cantor e Dedekind dedicaram-se a esta tarefa. Sendo a definição desse ultimo a mais difundida, conhecida como Teoria dos Cortes de Dedekind.

De acordo com Eves, em [8], a análise, a geometria e a álgebra podem ser deduzidas logicamente de um conjunto de postulados que caracterizem o sistema dos números reais, portanto, a consistência de toda a matemática existente depende da consistência do sistema dos números reais. Daí a importância de estudar as propriedades desses números.

O texto acima foi baseado em [3] e [8].

# Capítulo 2

# Considerações iniciais

Neste capítulo veremos alguns tópicos que servirão de base para compreensão das construções que fazemos no terceiro e quarto capítulo. Iniciamos falando sobre o processo de contagem e os números naturais, estabelecemos correspondências entre conjuntos infinitos para trabalhar a ideia de conjuntos infinitos enumeráveis, produto cartesiano, relação de equivalência, classes de equivalência, corpo e corpo ordenado. Explicamos o significado de medir e o conceito de incomensurabilidade. Para maiores detalhes sobre os temas aqui abordados ou mesmo para encontrar alguns resultados apresentados neste capítulo recomendamos a leitura de [1], [5], [7], [15], [16] e [17].

## 2.1 Contar: fazer corresponder um-a-um

A noção de número e o desenvolvimento da matemática estão intimamente relacionados à história da humanidade. Resulta das necessidades e preocupações das culturas e dos grupos sociais os mais diversos, procurando por vezes contar os dias do ano, concluir trocas e transações, enumerar seus membros, esposas, mortos, bens, rebanhos, soldados, perdas, procurando datar por vezes a fundação de suas cidades ou uma de suas vitórias. (Ver [13], pagina xvii).

Para Georges [13], "é a história de uma humanidade que, graças à inteligência de sua ação e reflexão e também pela força das coisas, foi conduzida a considerar tudo o que exige uma avaliação numérica".

Não se sabe ao certo quando o homem começou a contar, mas mesmo em épocas mais primitivas acredita-se que tínhamos algum senso numérico ao menos ao ponto de notar quando se acrescentavam ou retiravam algum objeto de uma coleção pequena. Com o desenvolvimento da vida em sociedade, tornaram-se inevitáveis alguma forma de contagem e de registro. Por exemplo, para os que guardavam ovelhas era importante verificar se a quantidade de animais que saiam pela manhã era a mesma quando retornavam e assim perceber a falta de alguma que ficasse perdida ou de alguma que se acrescentasse ao rebanho. O homem começou a contar utilizando os recursos disponíveis em seu entorno e até partes de seu corpo.

Acredita-se que a maneira mais antiga de contagem se baseasse em algum método de registro simples, empregando o princípio da correspondência um-a-um. Para contagem de ovelhas, por exemplo, podia-se dobrar um dedo para cada animal ou associar uma pedra para cada ovelha ou fazer uma marca em um osso.

Percebemos esse tipo de contagem quando pedimos a uma criança, mesmo que ainda não saiba o processo formal de contagem, para comparar duas coleções diferentes. Basta lhe mostrar um pacote com três borrachas e um com três lápis que ela perceberá que pode corresponder cada elemento de um pacote com cada elemento do outro.

Podemos dizer que a contagem se deu fazendo corresponder sucessivamente, a cada borracha do conjunto um lápis. Esse processo de associar cada elemento de um conjunto com cada elemento do outro, até que um ou ambos os conjuntos se esgotem, é o que chamamos de *correspondência unívoca ou um-a-um.* O ato de associar dois elementos é uma das operações mentais mais importantes que utilizamos constantemente todos os dias.

A correspondência entre dois conjuntos será chamada *correspondência biunívoca ou bijetiva* quando a cada elemento do primeiro corresponde um elemento do segundo e reciprocamente.

**Exemplo 1** *Numa turma de Fundamentos de Matemática, a correspondência aluno / número de chamada da caderneta é unívoca, assim como sua recíproca, número de chamada da caderneta / aluno. Dizemos então que a correspondência entre aluno e o número de chamada da caderneta é uma correspondência biunívoca.*

Da necessidade de contar surge os números naturais [1] (ou inteiros positivos). Mas

[1] O conjunto dos números naturais pode ser construído por meio da teoria axiomática dos conjuntos em que um número natural é definido como um conjunto. Isto significa obter uma definição para o número 1 (um), para número natural e para sucessor de um número que satisfaça os axiomas de Peano. Para

as necessidades da vida diária demandam, além da contagem de objetos individuais, a medição de várias quantidades, como comprimento, peso e tempo. Essas medições eram representadas por razões entre os números naturais, o que talvez tenha levado os membros da escola pitagórica a postularem que na natureza tudo é número, devido acreditarem que tudo podia ser contado, logo atribuído um número, e que a qualquer medida também se poderia atribuir um número ou uma razão entre números.

Quando queremos contar uma coleção de objetos estabelecemos uma correspondência um-a-um entre os elementos da coleção e a sequência dos números naturais. A seguir faremos uma definição mais cuidadosa para o processo de contagem e conjunto finito.

## 2.2 Conjuntos finitos, infinitos e enumeráveis

Vamos considerar os conjuntos:

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, ...\}$ = conjunto dos números naturais.

$I_n = \{1, 2, 3, 4, ..., n\}$ = conjunto dos números naturais de 1 até $n$.

Com base nesses dois conjuntos definiremos conjunto finito e conjunto infinito enumerável.

A ideia que temos de um conjunto finito é quando conseguimos contar seus elementos.

**Definição 1** *Dizemos que $A$ é um conjunto finito se é vazio ou se, para algum $n \in \mathbb{N}$, existe uma correspondência biunívoca $f : I_n \to A$. O número natural $n$ chama-se número cardinal do conjunto $A$.*

A injeção $f : I_n \to A$ chama-se uma contagem dos elementos de $A$, e denotaremos por $n(A)$ o seu número de elementos.

Ao conjunto vazio associaremos o cardinal zero.

**Exemplo 2** *O conjunto das letras da palavra CIONE é finito e possui 5 elementos.*

$$\begin{array}{ccccc} C, & I, & O, & N, & E \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ 1, & 2, & 3, & 4, & 5 \end{array}$$

maiores detalhes sobre essa construção recomendamos a leitura de [11]. A partir dos números naturais podemos construir o conjunto dos números inteiros por meio de classes de equivalência de pares ordenados de números naturais. Para maiores detalhes ver [7], páginas 162-181.

**Definição 2** *Um conjunto $A$ será infinito quando não for finito. Ou seja, $A$ não é um conjunto vazio e não existe uma correspondência biunívoca $f : I_n \to A$ qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$.*

**Exemplo 3** *O conjunto dos números naturais é infinito.*

Não existe um $n \in \mathbb{N}$ tal que $I_n \to \mathbb{N}$. Isto decorre do fato que para todo $n \in \mathbb{N}$ existe um sucessor $n + 1 \in \mathbb{N}$. A operação "somar um pode" ser repetida infinitamente.

### 2.2.1 Correspondência entre conjuntos infinitos

"Ninguém poderá nos expulsar do Paraíso que Cantor criou".
David Hilbert.

Coisas interessantes acontecem quando estabelecemos uma correspondência entre dois conjuntos infinitos. Analisemos os exemplos a seguir:

**Exemplo 4** *A correspondência entre o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais e o conjunto $\mathcal{P}$ dos números naturais pares, ambos infinitos. A princípio o leitor pode pensar que o conjunto $\mathcal{P}$ é menor do que o conjunto $\mathbb{N}$, tendo em vista que o segundo é formado por todos os números de $\mathcal{P}$ mais os números naturais ímpares (que também são infinitos). Mas não é verdade. Podemos estabelecer uma correspondência biunívoca entre os elementos de $\mathbb{N}$ e de $\mathcal{P}$, basta para isso estabelecermos uma correspondência entre todos os elementos $x \in \mathbb{N}$ com os elementos $y \in \mathcal{P}$, tal que $y = 2x$. E sua recíproca, para cada elemento $y \in \mathcal{P}$ corresponde um elemento $x \in \mathbb{N}$ tal que $x = \dfrac{y}{2}$. Como mostra o esquema abaixo:*

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathbb{N}: & 1, & 2, & 3, & \cdots & n, & \cdots \\
 & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \\
\mathcal{P}: & 2, & 4, & 6, & \cdots & 2n, & \cdots
\end{array}$$

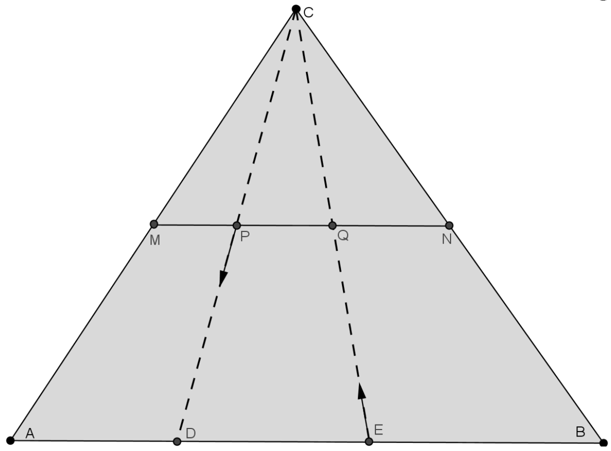
Outras correspondências entre o conjunto dos números naturais com um de seus subconjuntos infinitos podem ser estabelecidas. Como a de $\mathbb{N}$ com o conjunto dos números naturais ímpares, ou de $\mathbb{N}$ com o conjunto dos quadrados perfeitos [2].

[2] Galileu Galilei (1564-1642) em sua obra *Discorsi*, afirma que "nem o número de quadrados é menor do que a totalidade dos números, nem esta última é maior do que aquele".

**Exemplo 5** *A correspondência entre os pontos de dois segmentos de reta. Há infinitos pontos num segmento de reta. Como bem observou Kubrusly em [14], é necessário que se faça uma diferença entre pontos físicos que são pedaços de matéria que compõe um todo e, nesse caso, o número de pontos de qualquer objeto será sempre finito e menor do que o número acima, e pontos matemáticos. Pontos, retas, planos são entendidos como entidades puramente matemáticas e abstratas. São consideradas contínuas e portanto com capacidade de serem divididas eterna e infinitamente. Qualquer tamanho pode ser sempre dividido em duas metades e esse processo de dividir por metades nunca terá fim. Na definição de Euclides, o ponto é o que não tem partes e portanto não será divisível em metades. Não terá tamanho ou medida e por não ocupar espaço será possível amontoar uma infinidade deles em qualquer segmento de reta.*

*Considere o triângulo $ABC$, ver Figura 2.1, tracemos uma reta pelo ponto médio de $AC$ paralela ao segmento $AB$. Sabemos que $\overline{AB} = 2\overline{MN}$. Apesar do segmento $MN$ ter comprimento igual a metade do comprimento de $AB$, o conjunto infinito de pontos de $MN$ é equivalente ao conjunto infinito de pontos do segmento $AB$. Para verificar isso, basta estabelecer uma correspondência biunívoca entre esses dois conjuntos, da seguinte maneira: a cada ponto $P$ de $MN$ faz-se corresponder o ponto $D$(único) de $AB$ em que $D$ é o ponto de intersecção da reta $CP$ com o segmento $AB$; a cada ponto $E$ de $AB$ faz-se corresponder o ponto $Q$(único) de $MN$ em que $Q$ é a intersecção da reta $EC$ com o segmento $MN$.*

Figura 2.1: Correspondência biunívoca entre os pontos do segmento AB e MN.




*Os dois conjuntos são portanto equivalentes, ou seja, possuem a mesma cardinalidade ainda que o comprimento do segmento $MN$ seja a metade do comprimento do segmento $AB$.*

Isso é bastante curioso e foge da realidade imediata do nosso cotidiano em que o todo é sempre maior do que sua parte, no campo infinito o todo pode ser equivalente a sua parte.

Como dissemos no Capítulo 1, houve muita dificuldade para compreender e aceitar grandezas infinitas. Um dos matemáticos que estudaram grandezas infinitas foi Cantor, responsável por introduzir o conceito de cardinalidade e mostrar que há diferentes tipos de conjuntos infinitos. Surgiram assim, os conceitos de conjunto enumerável e de conjunto não enumerável.

### 2.2.2 Conjuntos enumeráveis

Intuitivamente, um conjunto é enumerável se seus elementos podem ser colocados numa lista de modo que qualquer elemento do conjunto pode ser alcançado se avançarmos o suficiente na lista.

**Definição 3** *Um conjunto $A$ é dito enumerável, se ele for finito ou se existir uma bijeção entre os elementos de $A$ e os números naturais $\mathbb{N}$.*

**Exemplo 6** *O conjunto dos números naturais ímpares é enumerável. O esquema abaixo indica uma forma de estabelecer uma correspondência biunívoca.*

$$\begin{array}{cccccc} 1, & 3, & 5, & \cdots, & 2n-1, & \cdots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \\ 1, & 2, & 3, & \cdots, & n, & \cdots \end{array}$$

**Exemplo 7** *O conjunto $\mathbb{Z} = \{0, \pm1, \pm2, \pm3, \cdots\}$ dos números inteiros é enumerável. O esquema abaixo indica como estabelecer uma bijeção entre os elementos de $\mathbb{Z}$ e os elementos de $\mathbb{N}$.*

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0, & 1, & -1, & 2, & -2, & 3, & -3, & \cdots & n, & -n, & \cdots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \updownarrow & \\ 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & \cdots & 2n, & 2n+1, & \cdots \end{array}$$

*Note que a correspondência é definida da seguinte forma: o zero corresponde ao número* $1$, *os inteiros positivos $n$, correspondem ao natural $2n$ e os inteiros negativos, $-n$, correspondem ao natural $2n+1$, com $n \in \mathbb{N}$.*

**Proposição 1** *Se dois conjuntos, $A$ e $B$, são enumeráveis, então a união de $A$ e $B$ é enumerável.*

**Prova.** Considere os conjuntos $A = \{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots\}$ e $B = \{b_1, b_2, b_3, \cdots, b_n, \cdots\}$ então podemos estabelecer uma correspondência biunívoca entre os elementos de $A \cup B$ e os elementos de $\mathbb{N}$ da seguinte maneira:

$$\begin{tikzcd}
a_1, \arrow[d, leftrightarrow] & b_1, \arrow[d, leftrightarrow] & a_2, \arrow[d, leftrightarrow] & b_2, \arrow[d, leftrightarrow] & \cdots & a_n, \arrow[d, leftrightarrow] & b_n, \arrow[d, leftrightarrow] & \cdots \\
1, & 2, & 3, & 4 & \cdots & 2n-1, & 2n, & \cdots
\end{tikzcd}$$

A correspondência é definida do seguinte modo: cada $a_n \in A \cup B$ corresponde a $2n-1 \in \mathbb{N}$ e cada $b_n \in A \cup B$ corresponde a $2n \in \mathbb{N}$, com $n$ natural.

$\diamond$

**Proposição 2** *A união de um número finito de conjuntos enumeráveis é enumerável.*

**Prova.** Considere os conjuntos $A_1 = \{a_{11}, a_{12}, a_{13}, \cdots\}$, $A_2 = \{b_{21}, b_{22}, b_{23}, \cdots\}, \cdots, A_n = \{a_{n1}, a_{n2}, \cdots\}$. Podemos estabelecer uma relação biunívoca de $B = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ e $\mathbb{N}$ da seguinte maneira:

Dispor os elementos do conjunto $B$ em uma tabela em que os elementos do conjunto $A_n$ serão dispostos na linha $n$, seguindo a ordem crescente. O esquema abaixo nos sugere uma forma para enumerar:

$$\begin{tikzcd}
a_{11} \arrow[d] & a_{12} \arrow[d] & a_{13} \arrow[d] & \cdots \arrow[d] \\
a_{21} \arrow[d] & a_{22} \arrow[d] & a_{23} \arrow[d] & \cdots \arrow[d] \\
\vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \cdots \\
a_{n1} \arrow[uuur] & a_{n2} \arrow[uuur] & a_{n3} \arrow[uuur] & \cdots
\end{tikzcd}$$

$\diamond$

O conjunto do números racionais é enumerável, sua enumerabilidade foi demonstrada por Cantor.

Segundo Cantor, dois conjuntos, $A$ e $B$ tem a mesma cardinalidade quando é possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre os elementos de $A$ e os elementos de $B$. Isso equivale a dizer que existe uma bijeção entre $A$ e $B$.

Será que todos os conjuntos infinitos são enumeráveis?

Em 1874 Cantor surpreendeu os matemáticos de sua época com uma descoberta muito importante. Ele mostrou que o conjunto dos números reais tem cardinalidade diferente da do conjunto dos números naturais, isto é, existia conjuntos não enumeráveis, portanto existiam dois tipos de infinitos, o tipo enumerável e o tipo não enumerável.

**Definição 4** *Um conjunto infinito que não é enumerável, é dito não enumerável.*

O conjunto dos números reais não é enumerável, apresentaremos a demonstração, também elaborada por Cantor, no Capítulo 4.

## 2.3 Produto Cartesiano

Um *par ordenado* $p = (a, b)$ é um par de objetos cuja ordem tem importância. Chamamos $a$ de primeira coordenada e $b$ de segunda coordenada. Dois pares ordenados $p = (a, b)$ e $q = (c, d)$ serão iguais quando $a = c$ e $b = d$.

O par ordenado $p = (a, b)$ não é a mesma coisa que o conjunto $\{a, b\}$, pois $\{a, b\} = \{b, a\}$ sempre, mas $(a, b) = (b, a)$ somente quando $a = b$.

**Definição 5** *Dados dois conjuntos $A$ e $B$, o produto cartesiano de $A$ por $B$, denotado por $A \times B$, é o conjunto de todos os pares ordenados $(a, b)$ cuja primeira coordenada $a$ pertence a $A$ e cuja segunda coordenada $b$ pertence a $B$. Isto é,*

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

**Exemplo 8** *Se $A = \{1, 2\}$ e $B = \{5, 6\}$ então $A \times B = \{(1, 5), (1, 5), (2, 5), (2, 6)\}$.*

**Exemplo 9** *Se $A = \varnothing$ e $B$ um conjunto qualquer, então $A \times B = \varnothing$.*

***Prova.*** *Suponhamos que exista $(a, b) \in A \times B$. Por definição de par ordenado, $a \in A$ e $b \in B$, é um absurdo, pois por hipótese $A = \varnothing$. Portanto, não existe $(a, b)$ pertencente a $A \times B$.* $\diamond$

**Exemplo 10** *Se* $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$ *e* $B = \{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$*, possuem, respectivamente,* $m$ *e* $n$ *elementos, então* $A \times B$ *possui* $m \cdot n$ *elementos, pois tem-se* $m$ *possibilidades para a primeira coordenada e* $n$ *possibilidades para a segunda.*

*Uma forma interessante de enxergar isto é pensar no produto cartesiano como uma matriz* $M$ *de* $m$ *linhas e* $n$ *colunas.*

$$M = \begin{bmatrix} (a_1, b_1) & (a_1, b_2) & \cdots & (a_1, b_n) \\ (a_2, b_1) & (a_2, b_2) & \cdots & (a_2, b_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_m, b_1) & (a_m, b_2) & \cdots & (a_m, b_n) \end{bmatrix}.$$

$\diamond$

O produto cartesiano $A \times B$ está intimamente ligado à ideia de relação binária. Para mais informações ver [15].

Uma relação binária $\mathcal{R}$ entre elementos do conjunto $A$ e elementos do conjunto $B$ é um subconjunto do produto cartesiano de $A$ por $B$. Essa relação $\mathcal{R}$ é uma condição ou um conjunto de condições que permitem determinar, dados $a \in A$ e $b \in B$, se $a$ está ou não relacionado com $b$ segundo $\mathcal{R}$. No caso afirmativo, escrevemos $a\mathcal{R}b$ em caso negativo $a\not\mathcal{R}b$.

Uma relação interessante é a relação "maior do que" entre números naturais. A condição que nos permite escrever que $a > b$, com $a \in \mathbb{N}$ e $b \in \mathbb{N}$ é $a - b \geq 1$. Neste caso é uma relação entre $\mathbb{N}$ e $\mathbb{N}$.

**Exemplo 11** *Seja* $A = \{1, 2, 3, 4\}$ *e a relação* $\mathcal{R} = \{(a, b) \in A \times A \mid a - b \geq 1\}$.

*Temos:*

$2\mathcal{R}1$, $3\mathcal{R}1$, $3\mathcal{R}2$, $4\mathcal{R}1$, $4\mathcal{R}2$ *e* $4\mathcal{R}3$.

*Isto é,*

$\mathcal{R} = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$.

## 2.4 Relações de equivalência

**Definição 6** *Dado um conjunto* $A$ *e uma relação* $\mathcal{R}$ *sobre ele. Diz-se que* $\mathcal{R}$ *é uma relação de equivalência se satisfaz as seguintes propriedades:*

1. *Reflexiva:* $a\mathcal{R}a$*, para todo* $a \in A$*;*

2. *Simétrica: se* $a, b \in A$ *e* $a\mathcal{R}b$, *então* $b\mathcal{R}a$;

3. *Transitiva: para* $a, b, c \in A$, *se* $a\mathcal{R}b$ *e* $b\mathcal{R}c$, *então* $a\mathcal{R}c$.

A relação $\mathcal{R}$ do Exemplo 11 não é reflexiva, pois $1 \in A$ e $(1,1) \notin \mathcal{R}$, nem simétrica, dado que $2\mathcal{R}1$, mas não $1\mathcal{R}2$. Entretanto, ela é transitiva, pois $3\mathcal{R}2$ e $2\mathcal{R}1 \Rightarrow 3\mathcal{R}1$; $4\mathcal{R}2$ e $2\mathcal{R}1 \Rightarrow 4\mathcal{R}1$; $4\mathcal{R}3$ e $3\mathcal{R}1 \Rightarrow 4\mathcal{R}1$; $4\mathcal{R}3$ e $3\mathcal{R}2 \Rightarrow 4\mathcal{R}2$.

**Exemplo 12** *Seja* $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ *e* $\mathcal{R} = \{(a, b) \in A \times A \mid a \text{ e } b \text{ são números ímpares}\}$, *ou seja,* $\mathcal{R} = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (5, 1), (5, 3), (5, 5)\}$ *é uma relação de equivalência, pois:*

1. *Vale a reflexiva:* $1, 3, 5 \in A$, $1\mathcal{R}1$, $3\mathcal{R}3$ *e* $5\mathcal{R}5$;

2. *Vale a simétrica:* $1, 3, 5 \in A$, $1\mathcal{R}3$, $3\mathcal{R}1$, $1\mathcal{R}5$, $5\mathcal{R}1$, $3\mathcal{R}5$ *e* $5\mathcal{R}3$;

3. *Vale a transitiva:* $1, 3, 5 \in A$, $1\mathcal{R}3$, $3\mathcal{R}5$, $1\mathcal{R}5$.

**Exemplo 13** *Sejam* $A = \mathbb{N}$ *e* $\mathcal{R}$ *a relação dada por:* $a\mathcal{R}b$ *quando os restos das divisões de* $a$ *e* $b$ *por* $2$ *forem iguais. Por exemplo,* $(3, 5) \in \mathcal{R}$, *mas* $(5, 10) \notin \mathcal{R}$. *Verifiquemos se* $\mathcal{R}$ *é uma relação de equivalência:*

1. *Vale a reflexiva: Seja* $x \in \mathbb{N}$, *a divisão de* $x$ *por* $2$ *tem resto* $t \in \{0, 1\}$. *Obviamente* $t = t$, *portanto,* $x\mathcal{R}x$ *para todo* $x \in \mathbb{N}$;

2. *Vale a simétrica: sejam* $x, y \in \mathbb{N}$ *e* $x\mathcal{R}y$, *isto é,* $x$ *e* $y$ *divididos por* $2$ *têm o mesmo resto* $t$, *logo* $y\mathcal{R}x$;

3. *Vale a transitiva: Sejam* $x, y, z \in \mathbb{N}$ *e* $x\mathcal{R}y$ *e* $y\mathcal{R}z$. *Dessa forma,* $x$ *e* $y$ *divididos por* $2$ *possuem o mesmo resto* $t$, *assim como* $y$ *e* $z$ *possuem o mesmo resto* $u$. *Como* $y$ *dividido por* $2$ *possui o resto* $t$ *e também o resto* $u$, *concluímos que* $t = u$ *e, logo o resto da divisão de* $x$ *e* $z$ *por* $2$ *é o mesmo, ou seja,* $x\mathcal{R}z$.

*Portanto* $\mathcal{R}$ *é uma relação de equivalência.*

### 2.4.1 Classe de equivalência

**Definição 7** *Seja* $\mathcal{R}$ *uma relação de equivalência sobre um conjunto* $A$ *e* $a \in A$ *um elemento fixado arbitrariamente. O conjunto* $\overline{a} = \{x \in A \mid x\mathcal{R}a\}$ *denomina-se classe de* *equivalência de a pela relação $\mathcal{R}$, ou seja, $\overline{a}$ é o conjunto constituído dos elementos de $A$ que se relacionam com $a$.*

Na relação do Exemplo 13 existe apenas duas classes de equivalência distintas. Sabemos que os números naturais são classificados em pares ou ímpares e que na divisão por 2 há apenas duas possibilidades para o resto ou 0 ou 1. Os números pares possuem resto 0 e os ímpares possuem resto 1. Dessa forma, as classes de equivalência para esta relação são $\overline{a} = \overline{0}$ para $a$ par e, $\overline{a} = \overline{1}$ para $a$ ímpar.

## 2.5 Corpo

Um conjunto $K$ munido de duas operações, chamadas adição e multiplicação, é um corpo, indicaremos por $(K, +, \cdot)$, se estas operações possuem certas propriedades chamadas *os axiomas de corpo.*

A adição faz corresponder a cada par de elementos $x, y \in$ K sua soma $x + y \in$ K, enquanto a multiplicação associa a esses elementos o seu produto $x \cdot y \in$ K. Os axiomas do corpo são os seguintes:

a) Axiomas da adição

(A1) A soma é associativa - quaisquer que sejam $x, y, z \in K$, tem-se $(x + y) + z = x + (y + z)$.

(A2) A soma é comutativa - quaisquer que sejam $x, y \in K$, tem-se $x + y = y + x$.

(A3) A soma possui elemento neutro - para quaisquer $x \in K$ existe $x' \in K$ tal que $x + x' = x' + x = x$. Representaremos o elemento neutro por 0.

(A4) A adição possui simétrico - para todo elemento $x \in K$ existe um simétrico $x' \in K$ tal que $x + x' = x' + x = 0$. Representaremos o simétrico de $x$ por $-x$.

b) Axiomas da Multiplicação

(M1) O produto é associativo - quaisquer que sejam $x, y, z \in K$, tem-se $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.

(M2) O produto é comutativo - quaisquer que sejam $x, y \in K$, tem-se $x \cdot y = y \cdot x$.

(M3) O produto possui elemento neutro - para quaisquer $x \in K$, existe $1 \in K$ tal que $x \cdot 1 = x$.

(M4) O produto, não nulo, possui um inverso multiplicativo - para todo $x \neq 0$ em $K$, existe $x' \in K$, tal que $x \cdot x' = x' \cdot x = 1$. Representaremos o inverso de $x$ por $x^{-1}$ ou $\frac{1}{x}$.

c) Axioma da distributividade

(D1) A multiplicação é distributiva em relação a soma - quaisquer que sejam $x, y, z \in K$ tem-se $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

**Algumas observações**

1) A soma $x + (-y)$ será indicada com a notação $x - y$ e será chamada diferença entre $x$ e $y$.

2) Somando-se $y$ a ambos os membros de uma igualdade do tipo $x - y = z$, obtém-se $x = y + z$. Analogamente, se $x + y = z$, então somando-se $-y$ a ambos os membros, obtém-se $x - y = z$. Portanto, $x - y = z \Rightarrow x = z + y$.

3) A multiplicação $x \cdot y^{-1}$ que pode ser representada por $\frac{x}{y}$ chamaremos de divisão de $x$ por $y$. Como o 0 não possui inverso multiplicativo, conclui-se que não há divisão por zero.

4) Resulta do axioma da distributividade que $x \cdot 0 = 0$ para todo $x \in K$, pois

$$x \cdot 0 + x = x \cdot 0 + x \cdot 1 = x \cdot (0 + 1) = x \cdot 1 = x.$$

Por outro lado, dados $x, y \in K$ com $x \cdot y = 0$, segue-se que $x = 0$ ou $y = 0$. Com efeito, se for $x \cdot y = 0$ e $x \neq 0$, então obtemos $x \cdot y = x \cdot 0$ e, pelo cancelamento multiplicativo temos, $y = 0$. Assim, num corpo $K$, tem-se $x \cdot y \neq 0$ sempre que os dois fatores $x$ e $y$ forem ambos diferentes de zero.

5) A distributividade explica também as “regras dos sinais” da Álgebra elementar:

- $(-x) \cdot y = x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$;
- $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$.

Em primeiro lugar temos $(-x) \cdot y + x \cdot y = (-x + x) \cdot y = 0 \cdot y = 0$, donde $(-x) \cdot y = -(x \cdot y)$. De forma análoga, $x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$. Logo, $(-x) \cdot (-y) = -[x \cdot (-y)] = -[-(x \cdot y)] = x \cdot y$.

**Exemplo 14** *O conjunto* $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$*, formado apenas por dois elementos distintos 0 e 1, com as operações* $0+1 = 1+0 = 1$*,* $0+0 = 1+1 = 0$*,* $0 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0$ *e* $1 \cdot 1 = 1$ *é um corpo. Aqui o simétrico de cada elemento é ele próprio (e o inverso também).*

### 2.5.1 Corpo ordenado

Um corpo ordenado é um corpo $K$, no qual se destacou um subconjunto $\mathbb{P} \subset K$, chamado o conjunto dos números positivos de $K$, tal que as seguintes condições são satisfeitas:

P1) A soma e o produto dos elementos positivos são positivos, ou seja:

$$x, y \in \mathbb{P} \to x + y \in \mathbb{P} \text{ e } x \cdot y \in \mathbb{P}.$$

P2) Dado $x \in K$, somente uma das três alternativas ocorre:

$$x = 0, \text{ ou } x \in \mathbb{P}, \text{ ou } -x \in \mathbb{P}.$$

Indicamos por $(-\mathbb{P})$ o conjunto dos elementos $-x$, tal que $x \in \mathbb{P}$. Os elementos de $(-\mathbb{P})$ chamam-se negativos. Assim, $K = \mathbb{P} \cup \{0\} \cup (-\mathbb{P})$, união disjunta.

Observe que num corpo ordenado, se $a \neq 0$, então $a^2 \in \mathbb{P}$. De fato, sendo $a \neq 0$, por P2) temos $a \in \mathbb{P}$, ou $-a \in \mathbb{P}$. No primeiro caso, $a^2 = a \cdot a \in \mathbb{P}$ e, no segundo caso $a^2 = (-a) \cdot (-a) = a \cdot a \in \mathbb{P}$. Em particular, temos $1 \cdot 1 = 1$ e que $-1$ não é quadrado de nenhum elemento.

### 2.5.2 Relação de ordem num corpo ordenado $K$

Considere um corpo $K$ e suponhamos que sobre $K$ esteja definida uma relação de ordem, representada pelo símbolo $<$, tal que goza das seguintes propriedades:

i. Transitiva. Se $a < b$ e $b < c$, então $a < c$;

ii. Tricotomia. dados $a, b \in K$, ocorre somente uma das alternativas:

$$a = b \text{ ou } a < b, \text{ ou } b < a;$$

iii. Monotonicidade da adição. Se $a < b$, então $a + c < b + c$, para todo $c \in K$;

iv. Monotonicidade da multiplicação. Se $a < b$, então para $c > 0$, tem-se $a \cdot c < b \cdot c$. No entanto, se $a < b$ e $c < 0$, então $a \cdot c > b \cdot c$.

Nessas condições diz-se que $K$ é um corpo ordenado.

A proposição "$a < b$" lê-se: $a$ é menor do que $b$. E significa que $b - a \in \mathbb{P}$. A notação $a \leq b$ (lê-se: $a$ é menor do que ou igual a $b$) indica que ou $a < b$ ou $a = b$, sem especificar qual dos dois ocorre. Dito de outra maneira, $a \leq b$ é a negação de $b < a$.

## 2.6 Valor absoluto

A relação de ordem em $\mathbb{K}$ permite-nos definir o valor absoluto, ou módulo, de um número $x \in \mathbb{K}$, vejamos:

**Definição 8** *(Módulo ou valor absoluto). Definiremos módulo ou valor absoluto de um número $x \in \mathbb{K}$ como:*

$$| x |= \begin{cases} x & , \textit{ se } x \geqslant 0 \\ -x & , \textit{ se } x < 0 \end{cases} .$$

O valor absoluto é o maior dos números $x$ e $-x$. Assim, quando $x = 0$ tem-se, $x = -x =| x |$. Portanto, temos:

$$| x |\geq 0 \text{ e } - | x |\leq x \leq| x | .$$

Mais geralmente, dados $x$ e $a \geq 0$ elementos de um corpo $\mathbb{K}$, são equivalentes:

(i) $-a \leq x \leq a$,

(ii) $x \leq a$ e $-x \leq a$,

(iii)$| x |\leq a$.

## 2.7 Corpo ordenado completo

Precisamos da noção de supremo e de ínfimo para definir um corpo ordenado completo. Para uma melhor compreensão do que é supremo e ínfimo, faremos nesta seção, uma breve explanação destes assuntos, buscando entender quando um conjunto tem ou não um maior elemento e quando tem ou não um menor elemento.

### Cota superior e cota inferior

Vejamos em que consiste a noção de cota superior de um corpo ordenado.

**Definição 9** *Seja $A$ um subconjunto de um corpo ordenado $K$. Dizemos que um elemento $u \in K$ é cota superior de $A$, se $u \geq x$ para todo $x \in A$. Neste caso dizemos que $A$ é limitado superiormente.*

**Definição 10** *Seja $A$ um subconjunto de um corpo ordenado $K$. Dizemos que um elemento $w \in K$ é cota inferior de $A$, se $w \leq x$ para todo $x \in A$. Neste caso dizemos que $A$ é limitado inferiormente.*

Observe que se um conjunto tem uma cota superior, então admite uma infinidade dela, pois, se $u$ é uma cota superior de $A$, então também o é $u + n$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

**Definição 11** *Um subconjunto $A$ de um corpo ordenado $K$ chama-se limitado quando é limitado superior e inferiormente.*

**Proposição 3** *Um corpo ordenado $K$ é dito arquimediano quando nele é válida qualquer uma das três condições equivalentes a seguir:*

*i)* $\mathbb{N} \subset K$ *é ilimitado superiormente;*

*ii)* *dados $a, b \in K$, com $a > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \cdot a > b$;*

*iii)* *dados qualquer $a > 0$ em $K$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \dfrac{1}{n} < a$.*

## Supremo e ínfimo de um conjunto

**Definição 12** *Dizemos que um elemento $b \in K$ é o supremo do conjunto limitado superiormente $A \subset K$, denotamos por $b = supA$, quando $b$ é a menor das cotas superiores de $A$ em $K$. Isto é, quando as condições abaixo são satisfeitas:*

*S1)* $x \in A \Rightarrow x \leq b$,

*S2)* $c \geq x$, *para todo* $x \in A \Rightarrow c \geq b$.

A propriedade S2) significa que qualquer outra cota superior deve ser maior do que ou igual ao $supA$.

**Definição 13** *Analogamente, um elemento $a \in K$ chama-se ínfimo do conjunto limitado inferiormente $A \subset K$, denotamos por $a = infA$, quando $a$ é a maior das cotas inferiores de $A$. Isto é, quando as condições abaixo são satisfeitas:*

*I1)* $x \in A \Rightarrow x \geq a$,

*I2)* $c \leq x$, *para todo* $x \in A \Rightarrow c \leq a$.

A propriedade I2) significa que qualquer outra cota inferior deve ser menor do que ou igual ao $infA$.

**Importante:** Quando dizemos que um conjunto tem um supremo, não estamos fazendo nenhuma afirmação sobre se o supremo está contido, ou não no conjunto.

**Exemplo 15** *Considere dois conjuntos,* $A$ *e* $B$*, contidos em um corpo ordenado* $K$*. Sendo* $A = \{x \in K \mid 0 < x < 1\}$ *e* $B = \{x \in K \mid 0 \leq x \leq 1\}$*. Percebe-se que o conjunto* $A$ *tem cota superior que é o* 1*, no entanto qualquer* $a \geq 1$ *também é cota superior de* $A$*. Nota-se que* 1 *é a menor das cotas superiores de* $A$*, portanto é o supremo deste conjunto.*

*O conjunto* $B$ *tem as mesmas cotas superiores de* $A$*. percebe-se que* 1 *é a menor das cotas superiores de* $B$*, ou seja, é o supremo de* $B$*. Observe que o supremo de* $B$ *pertence a* $B$ *e o supremo de* $A$ *não pertence a* $A$*.*

Com as noções de supremo e de ínfimo enunciaremos a definição de corpo ordenado completo.

**Definição 14** *Um corpo ordenado* $\mathbb{K}$ *chama-se completo quando todo subconjunto* $\mathbb{X}$ *não-vazio, limitado superiormente, possui supremo em* $\mathbb{K}$*.*

## 2.8 O problema da medida: a descoberta dos segmentos incomensuráveis

"Meça o que é mensurável e torne mensurável o que não é."

Galileu Galilei.

### O que significa medir?

Medir é tão importante quanto contar. Contar e medir são ações indispensáveis na vida cotidiana e aparecem juntas em muitas ocasiões. Por exemplo, medir a altura de um muro, o tempo de uma partida de futebol, a largura de uma porta, a área de uma sala, etc.

Poder medir as coisas é uma necessidade do ser humano, faz parte da vida. Expressar essa medida de forma que todos compreendam e cheguem ao mesmo resultado é tão importante quanto o ato de medir.

Caraça, em [5], diz que no problema da medida há três fases e três aspectos distintos: escolha da unidade; comparação da unidade; expressão do resultado dessa comparação por um número.

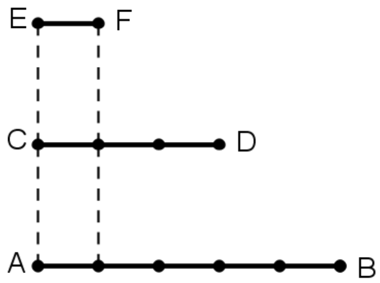
As unidades de medida eram criadas e adaptadas de acordo com a necessidade dos povos. Muitas dessas medidas eram realizadas baseadas em partes do corpo como o comprimento do pé, a largura da mão ou a grossura do dedo, o palmo e a passada, por exemplo. O cúbito era uma unidade de medida utilizada pelos egípcios há cerca de 50 séculos e definido pela distância do cotovelo até a ponta do dedo médio distendido. Tendo por padrão, o "cúbito real". Atualmente as unidades de medidas utilizadas em quase todos os países são padronizadas, existe um Sistema Internacional de Medidas - (SI).

Essencialmente medir é comparar. Para medir é necessário estabelecer uma unidade padrão de uma grandeza e verificar quantas cópias desta unidade são necessárias para obter toda a quantidade da grandeza que se deseja medir. O resultado dessa comparação será expressa através de um número que representa a medida da grandeza em relação a unidade. Considere dois segmentos, $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, queremos medir o segmento $\overline{CD}$ tomando $\overline{AB}$ como unidade de medida, o resultado da comparação exprime-se dizendo que no segmento $\overline{CD}$ cabe três vezes a unidade $\overline{AB}$, ou que a medida de $\overline{CD}$, tomando $\overline{AB}$ como unidade, é três. Ver Figura 2.2.

Figura 2.2:


O mais frequente é não termos quantidades inteiras da unidade de medida na grandeza que queremos medir, por isso é necessário subdividi-la em um certo número de partes iguais de tal forma que cada uma dessas partes, a nova unidade de medida, caiba uma quantidade inteira de vezes na grandeza que queremos medir. Consideremos os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, e queremos expressar a medida de $\overline{AB}$ tomando $\overline{CD}$ como unidade de medida, sendo que $\overline{CD}$ não cabe uma quantidade inteira de vezes em $\overline{AB}$. Então, buscamos um terceiro segmento $\overline{EF}$ que caiba um número inteiro de vezes tanto em $\overline{CD}$ quanto em $\overline{AB}$. Digamos, $m$ vezes em $\overline{AB}$ e $n$ vezes em $\overline{CD}$. Neste caso dizemos que a medida de $\overline{AB}$ é $\frac{m}{n}\overline{CD}$. Na Figura 2.3 ilustramos um exemplo em que $m = 5$ e $n = 3$.

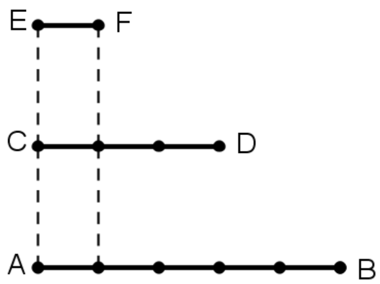
Figura 2.3:




$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{5\overline{EF}}{3\overline{EF}} \Longrightarrow \overline{AB} = \frac{5}{3}\overline{CD}$$

Outra situação é a grandeza que queremos medir ser menor do que a unidade de medida. Consideremos os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, e queremos expressar a medida de $\overline{CD}$ tomando $\overline{AB}$ como unidade de medida, sendo que $\overline{AB}$ não cabe uma quantidade inteira de vezes em $\overline{CD}$. Então, buscamos um terceiro segmento $\overline{EF}$ que caiba um número inteiro de vezes tanto em $\overline{AB}$ quanto em $\overline{CD}$. Digamos, $m$ vezes em $\overline{CD}$ e $n$ vezes em $\overline{AB}$. Neste caso dizemos que a medida de $\overline{CD}$ é $\frac{m}{n}\overline{AB}$. Na Figura 2.4 ilustramos um exemplo em que $m = 3$ e $n = 5$.

Figura 2.4:




$$\frac{\overline{CD}}{\overline{AB}} = \frac{3\overline{EF}}{5\overline{EF}} \Longrightarrow \overline{CD} = \frac{3}{5}\overline{AB}$$

Em geral, sempre que feita a subdivisão da unidade de medida em $n$ partes iguais tal que uma dessas partes caiba $m$ vezes na grandeza a medir. Essa medida será representada pela razão entre os números inteiros $m$ e $n$, ou seja, por um número racional.

Assim para medir precisamos de números que represente a medida de uma grandeza, dada uma unidade estabelecida. No caso de segmentos de reta, vimos que os números racionais exprimem essas medidas. Mas, os números racionais seriam suficientes para medir todo segmento? Será sempre possível encontrar uma unidade de medida, ou um submúltiplo da unidade, que caiba um número inteiro de vezes no segmento que se deseja medir? Isto é, dados dois segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, seria sempre possível encontrar um terceiro segmento $\overline{EF}$ contido um número inteiro de vezes em $\overline{AB}$ e outro número inteiro de vezes em $\overline{CD}$, situação esta que descrevemos dizendo que $\overline{EF}$ é um submúltiplo comum de $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$.

É bastante razoável acreditar que sim, sempre será possível encontrar um submúltiplo que caiba uma quantidade inteira de vezes em cada um dos segmentos desde que se efetue uma quantidade suficiente de divisões. Afinal, se $\overline{EF}$ não serve, podemos imaginar um segmento menor, outro menor ainda, e assim por diante. Nossa intuição geométrica nos faz acreditar que há de existir um certo segmento $\overline{EF}$ (unidade fundamental de comensurabilidade), talvez muito pequeno, mas satisfazendo aos propósitos desejados. O leitor deve ir muito além, imaginando um segmento $\overline{EF}$ tão pequeno que nem possa mais desenhar, para se convencer, pela sua intuição geométrica, da possibilidade de sempre encontrar uma unidade para medir $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$. Contudo, ficará surpreso, assim como os gregos, ao descobrir que nem sempre isso será possível.

### 2.8.1 Segmentos comensuráveis

Os matemáticos gregos tratavam a questão da medida usando o conceito de grandezas comensuráveis. Que podemos explicar da seguinte maneira:

Dados dois segmentos, $AB$ e $CD$, dizemos que eles são comensuráveis se existirem números inteiros positivos $m$ e $n$ e um segmento $EF$, tais que $\overline{AB} = m\overline{EF}$ e $\overline{CD} = n\overline{EF}$ (veja as Figuras 2.2 e **??**).

Ecrevemos:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{m\overline{EF}}{n\overline{EF}} = \frac{m}{n}.$$

Os gregos não entendiam as frações como número. Eles tratavam apenas das razões entre grandezas da mesma espécie. Eles diziam que $\overline{AB}$ está para $\overline{CD}$ assim como $m\overline{EF}$ está para $n\overline{EF}$.

### 2.8.2 Segmentos incomensuráveis

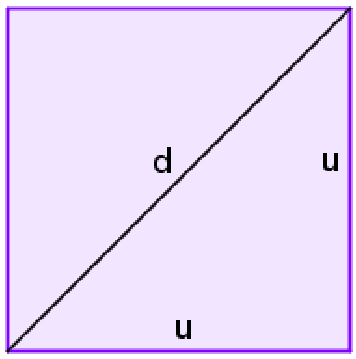
Os pitagóricos foram responsáveis por um dos momentos críticos da Matemática: a prova de que há segmentos não comensuráveis, os chamados incomensuráveis. Esta descoberta abalou a filosofia básica da Escola, de que tudo dependia dos números inteiros.

No livro "O Teorema do Papagaio" de Denis Guedj [12] este episódio da História da Matemática é contado de forma bem interessante e é uma boa opção de leitura para os alunos do ensino fundamental e do ensino médio. Uma outra opção de leitura[3] que também conta esse episódio é o livro "20.000 Léguas Matemáticas - Um passeio pelo misterioso mundo dos números" de Dewdney [6]. Baseado neste último livro, relataremos como Pitágoras provou a existência de grandezas incomensuráveis.

Pitágoras, descobriu o seguinte:

Não existe inteiros para expressar a razão entre a medida do lado de um quadrado unitário e sua diagonal.

Figura 2.5: Os segmentos $d$ e $u$ são incomensuráveis




O argumento que Pitágoras usou para demonstrar a incomensurabilidade entre o lado do quadrado e sua diagonal é bem simples, usando a linguagem atual. O primeiro passo para sua demonstração foi supor um quadrado de lado "$u$" e diagonal "$d$", tais que "$u$" e "$d$" eram comensuráveis, para isso, deveriam existir dois inteiros $m$ e $n$ tais que $\dfrac{d}{u} = \dfrac{m}{n}$. E também, que esses inteiros fossem as menores possíveis, isto é, $m$ e $n$ primos entre si. Naquela época, já era conhecido que o quadrado de um número par é par e o quadrado de um número ímpar é ímpar. E que se fosse construido um quadrado, tendo a diagonal "$d$" como lado, então sua área seria dada por $m^2 = n^2 + n^2 \Rightarrow m^2 = 2 \cdot n^2$ (Teorema de Pitágoras). Isto significava que o quadrado da diagonal era par, mas isso só poderia

[3]Ambos os livros fazem parte do acervo do Programa Nacional Biblioteca da Escola para o Ensino Médio - PNBEM/2008.

ocorrer se o comprimento do lado que estava sendo elevado ao quadrado, ou seja, "$m$", também fosse um número par. Por conseguinte, se "$m$" fosse um número par, seu quadrado seria um múltiplo de 4. Como o quadrado de "$m$" era o dobro do quadrado de "$n$" (e o quadrado de "$m$" era um múltiplo de 4), isso queria dizer que o quadrado de "$n$" deveria ser múltiplo de 2. Pitágoras aplicou a "$n$" o mesmo raciocínio que havia aplicado a "$m$", e concluiu finalmente que os dois comprimentos compunham-se de um número par das unidades fundamentais de comensurabilidade que os formavam. Isto queria dizer que, existia um divisor comum entre "$u$" e "$d$". Entretanto, como os inteiros em questão eram primos entre si, isso era uma contradição. Pitágoras sabia que esse resultado significava que um dos pressupostos que entravam na demonstração deveria está errado. O único pressuposto formulado foi o de que os comprimentos "$u$" e "$d$" eram comensuráveis. A contradição significava que não poderia sê-lo.

A diagonal e o lado de um quadrado não é o único par de segmentos incomensuráveis. Acredita-se que esse foi o primeiro par de segmentos incomensuráveis descoberto. Existe uma vertente que defende a tese de que a descoberta dos incomensuráveis está relacionada ao pentagrama, que é o símbolo dos pitagóricos, pois a razão entre o lado de um pentágono regular com a sua diagonal resulta na razão áurea que é dada pelo número $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ conhecido como número de ouro.

A existência de segmentos incomensuráveis implica na insuficiência dos sistemas numéricos conhecidos – números naturais e racionais - para efetuar medidas dos objetos geométricos mais simples, como o quadrado e o círculo. A solução que se impôs, na época, e que levou séculos para ser adotada, era a de ampliar o conceito de número, introduzindo os chamados números irracionais, de tal modo que, fixando uma unidade de comprimento arbitrária, qualquer segmento de reta pudesse ter uma medida numérica.

# Capítulo 3

# Construção dos Números Racionais

Neste capítulo faremos a construção do conjunto dos números racionais por meio de classes de equivalência de pares ordenados de números inteiros. Mostraremos que o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais possui uma estrutura matemática denominada de corpo, basicamente herdada das operações usuais dos números inteiros que, por sua vez, provêm das duas operações mais elementares, a soma e o produto de números naturais. Mostraremos o significado geométrico dos números racionais representando-os numa reta orientada e que estes números, apresar de denso, não preenchem toda a reta. Para maiores detalhes sobre o assunto ou mesmo para encontrar alguns resultados apresentados neste capítulo indicamos a leitura de [5], [7], [15], [16] e [21].

## 3.1 O corpo ordenado incompleto dos Racionais

Para fixar a notação, denotaremos por:

$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, ...\}$ o conjunto dos números inteiros.

$\mathbb{Z}^* = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, ...\}$ o conjunto dos números inteiros não nulos.

Vamos considerar ser conhecimento do leitor que o conjunto dos inteiros é fechado em relação à soma, ao produto e à diferença de inteiros, isto é, o resultado da soma, do produto e da diferença de dois inteiros é um inteiro. Mas não é fechado em relação à divisão de inteiros. Sendo que 0 é o elemento neutro da soma e 1 elemento neutro da multiplicação.

**Exemplo 16** *Dados $m, n \in \mathbb{Z}$ a operação $\dfrac{m}{n}$ só é possível se existir um inteiro $p$ tal que $m = p \cdot n$.*

Nosso objetivo é dar um sentido matemático a todas as operações do tipo $\dfrac{m}{n}$, para quaisquer $m, n \in \mathbb{Z}$, com $n \neq 0$, de maneira a tratar como entes do mesmo conjunto tanto aqueles $\dfrac{10}{2}, \dfrac{-16}{4}$, e $\dfrac{15}{5}$, quanto aqueles $\dfrac{3}{7}, \dfrac{1}{6}$, e $\dfrac{-4}{5}$, por exemplo. Nesse sentido, subjacente a cada "divisão" $\dfrac{m}{n}$ está o par ordenado $(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$. Além disso é fácil ver, por exemplo, que a igualdade em $\mathbb{Z}$

$$\frac{10}{5} = \frac{8}{4}$$

é equivalente a

$$10 \cdot 4 = 5 \cdot 8.$$

De uma maneira geral, se $m, n, p, q \in \mathbb{Z}$, com $n, q \neq 0$, vale a equivalência:

$$\frac{m}{n} = \frac{p}{q} \Longleftrightarrow m \cdot q = n \cdot p.$$

Essas considerações, aliada ao fato de que o conjunto dos Racionais a ser construido, deve ser uma "ampliação" de $\mathbb{Z}$, ajudam a entender o caminho que tomaremos.

Consideremos sobre o conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* = \{(m, n) \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}^*\}$ a relação $\sim$ definida da seguinte maneira: para quaisquer $(m, n)$ e $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$,

$$(m, n) \sim (p, q) \Longleftrightarrow m \cdot q = n \cdot p$$

A partir de agora escreveremos $m \cdot n$ como $mn$.

A relação $\sim$ definida acima de acordo com a Definição 6 é uma relação de equivalência, pois valem as três propriedades: reflexiva, simétrica e transitiva. Verifiquemos:

a) a refexividade:

Dados $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{Z}^*$ temos, $mn = nm$, visto que o produto de números inteiros é comutativo, portanto $(m, n) \sim (m, n)$.

b) a simetria:

Se $(m, n) \sim (p, q)$ então $mq = np \Rightarrow np = mq \Rightarrow pn = qm$, ou seja, $(p, q) \sim (m, n)$.

c) a transitividade:

Se $(m, n) \sim (p, q)$ e $(p, q) \sim (r, s)$ então $(m, n) \sim (r, s)$.

Por hipótese:

$mq = np$ (I) e $ps = qr$ (II).

Multiplicando (I) por $s$ e (II) por $n$, temos:

$mqs = nps$ e $nps = nqr$.

Daí, $mqs = nqr$, dividindo a igualdade por $q$, o que é possível pois $q \in \mathbb{Z}^*$, obtém-se $ms = nr$, isto é, $(m, n) \sim (r, s)$. $\diamond$

Observe que, $mq = np \Leftrightarrow \dfrac{m}{n} = \dfrac{p}{q}$, ou seja, se as divisões $m$ por $n$ e $p$ por $q$ coincidem, podemos dizer que $(m, n) \sim (p, q)$.

**Exemplo 17** *a.* $(2, 4) \sim (-5, -10) \sim (1, 2)$;

*b.* $(3, -5) \sim (-12, 20) \sim (6, -10)$;

*c.* $(2, 2) \sim (9, 9) \sim (-1, -1)$.

Sendo $\sim$ uma relação de equivalência em $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, por conseguinte, determina uma partição neste conjunto em classes de equivalência. Para cada par $(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, denotaremos por $\dfrac{m}{n}$ (m sobre n) a classe de equivalência determinada por $(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$. Assim:

$$\begin{aligned} \frac{m}{n} &= \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \mid (x, y) \sim (m, n)\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \mid nx = my\}. \end{aligned}$$

**Exemplo 18**

$$\begin{aligned} \frac{5}{10} &= \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \mid (x, y) \sim (5, 10)\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \mid 10x = 5y\} \\ &= \{(1, 2), (2, 4), (3, 6), (-1, -2), (-15, -30), \cdots\}. \end{aligned}$$

.

O conjunto quociente de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ por $\sim$, ou seja, o conjunto de todas as classes de equivalência $\dfrac{m}{n}$, para qualquer $(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, será indicado por $\mathbb{Q}$. Então:

$$\mathbb{Q} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* / \sim = \left\{ \frac{m}{n} \mid (m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \right\}.$$

Observe que cada elemento $a \in \mathbb{Q}$ admite infinitas representações, já que para $m, n, p, q \in \mathbb{Z}$, com $n, q \neq 0$, vale:

$$\frac{m}{n} = \frac{p}{q} \Longleftrightarrow mq = np.$$

Em cada uma delas chamaremos $m$ de numerador e $n$ de denominador.

**Proposição 4** *Dois elementos distintos, $a, b \in \mathbb{Q}$ admitem representações com denominadores iguais.*

**Prova.** De fato, dados $a = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ e $b = \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$, então $\frac{m}{n} = \frac{ms}{ns}$ e $\frac{r}{s} = \frac{nr}{ns}$, pois $m(ns) = n(ms)$ e $r(ns) = s(nr)$.

$\diamond$

Essa possibilidade de escrever dois elementos distintos com o mesmo denominador é muito importante e nos ajudará a entender a definição de soma a seguir.

# Operações em $\mathbb{Q}$

## 3.2 Adição em $\mathbb{Q}$

**Definição 15** *Sejam $a = \frac{m}{n}$ e $b = \frac{r}{s}$ elementos de $\mathbb{Q}$. Definiremos a adição de $a$ com $b$ e indicaremos por $a + b$ o elemento de $\mathbb{Q}$ que se obtém da seguinte forma:*

$$a + b = \frac{ms}{ns} + \frac{nr}{ns} = \frac{ms + nr}{ns}.$$

Para somar dois elementos racionais é necessário escrevê-los com o mesmo denominador. Depois, soma-se os numeradores e repete-se o denominador.

**Exemplo 19** $\frac{2}{6} + \frac{3}{9} = \frac{2 \cdot 9 + 6 \cdot 3}{6 \cdot 9} = \frac{36}{54} = \frac{2}{3}$

**Proposição 5** *A soma $a + b$ está bem definida, ou seja, se $a = \frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}$ e $b = \frac{r}{s} = \frac{r'}{s'}$ então, $\frac{m}{n} + \frac{r}{s} = \frac{m'}{n'} + \frac{r'}{s'}$.*

**Demonstração.** Por hipótese $mn' = nm'$ e $rs' = sr'$.

Multiplicando a primeira dessas igualdades por $ss'$, a segunda por $nn'$ e somando membro a membro as relações obtidas, temos:

$$mn'ss' + rs'nn' = nm'ss' + sr'nn' \Rightarrow (ms + rn)n's' = ns(m's' + r'n')$$

dividindo essa igualdade por $n's'ns$, temos:

$$\frac{ms + rn}{ns} = \frac{m's' + r'n'}{n's'}.$$

$\diamond$

### 3.2.1 Propriedades da adição em $\mathbb{Q}$

a) Comutatividade: $a+b=b+a$.

Sejam $a=\dfrac{m}{n}$, $b=\dfrac{r}{s}\in\mathbb{Q}$, temos:

$$\begin{aligned} a+b &= \frac{m}{n}+\frac{r}{s} = \\ &= \frac{ms+nr}{ns} = \\ &= \frac{nr+sm}{sn} = \\ &= \frac{r}{s}+\frac{m}{n} = b+a. \end{aligned}$$

b) Associatividade: $(a+b)+c=a+(b+c)$.

Dados $a=\dfrac{m}{n}$, $b=\dfrac{r}{s}$, $c=\dfrac{p}{q}\in\mathbb{Q}$, temos:

$$\begin{aligned} (a+b)+c &= \left(\frac{ms+nr}{ns}\right)+\frac{p}{q} = \\ &= \frac{(msq+nrq)+pns}{nsq} = \\ &= \frac{msq+(nrq+pns)}{nsq} = \\ &= \frac{m}{n}+\frac{rq+ps}{sq} = \\ &= \frac{m}{n}+\left(\frac{r}{s}+\frac{p}{q}\right) = a+(b+c). \end{aligned}$$

c) Existe elemento neutro: é a classe de equivalência $\dfrac{0}{t}=\dfrac{0}{1}=\dfrac{0}{2}=\cdots$ que indicaremos por 0 apenas. De fato,

$$\frac{m}{n}+\frac{0}{t}=\frac{m\cdot t+0\cdot n}{n\cdot t}=\frac{mt}{nt}=\frac{m}{n},$$

para todo $\dfrac{m}{n}\in\mathbb{Q}$.

d) Existe elemento simétrico(oposto), ou seja, para todo $a\in\mathbb{Q}$ existe $a^{'}\in\mathbb{Q}$ tal que $a+a^{'}=0$.

Dado $a=\dfrac{m}{n}$, seja $a^{'}=\dfrac{-m}{n}$,

$$a+a^{'}=\frac{m}{n}+\frac{-m}{n}=\frac{m+(-m)}{n}=\frac{0}{n}=0.$$

**Proposição 6** *(Cancelamento aditivo). Sejam $a, b, c \in \mathbb{Q}$. Então, vale*

$$a + b = c + b \Leftrightarrow a = c.$$

**Demonstração.** Sejam $a = \dfrac{m}{n}, b = \dfrac{p}{q}$ e $c = \dfrac{r}{s}$, temos:

$$\begin{aligned}
a + b = c + b &\Leftrightarrow \frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{r}{s} + \frac{p}{q} \\
&\Leftrightarrow \frac{mq + np}{nq} = \frac{rq + sp}{sq} \\
&\Leftrightarrow (mq + np)(sq) = (rq + sp)(nq) \\
&\Leftrightarrow mqsq + npsq = rqnq + spnq \\
&\Leftrightarrow q(msq + nps) = q(rnq + spn) \\
&\Leftrightarrow msq + nps = rnq + spn \\
&\Leftrightarrow msq = rnq \\
&\Leftrightarrow ms = rn \\
&\Leftrightarrow \frac{m}{n} = \frac{r}{s} \Leftrightarrow a = c.
\end{aligned}$$

◇

**Proposição 7** *O elemento $a'$, simétrico de $a$, é único e indicaremos por $-a$.*

**Demonstração.** Suponhamos que $z'$ seja também um simétrico de $a$. Assim, $z' + a = \dfrac{0}{t}$ e $a' + a = \dfrac{0}{t}$, dessa forma, $z' + a = a' + a$, daí pela propriedade do cancelamento aditivo, temos $z' = a'$.

◇

## 3.3 Subtração em $\mathbb{Q}$

**Definição 16** *Sejam $a = \dfrac{m}{n}$ e $b = \dfrac{r}{s}$ elementos de $\mathbb{Q}$. Definiremos a subtração de $a$ com $b$ e indicaremos por $a - b$ o elemento de $\mathbb{Q}$ que se obtém da seguinte maneira:*

$$a - b = a + (-b) = \frac{ms}{ns} + \frac{(-r)n}{ns} = \frac{ms + (-r)n}{ns} = \frac{ms - nr}{ns}$$

Como para todo $b \in \mathbb{Q}$ existe $-b \in \mathbb{Q}$ então, a subtração $a - b$ pode ser interpretada como a soma de $a$ com o simétrico de $b$.

### 3.3.1 Propriedades da subtração em $\mathbb{Q}$

a) $-(a+b) = -a-b$.

Dados $a = \dfrac{m}{n}$, $b = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$. Temos que $-(a+b)$ é o simétrico de $(a+b)$. Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{mq+np}{nq} + \left[\frac{-(mq+np)}{nq}\right] &= 0 \\
&= 0+0 \\
&= \left[\frac{m}{n} + \frac{(-m)}{n}\right] + \left[\frac{p}{q} + \frac{(-p)}{q}\right] \\
&= \frac{m}{n} + \frac{p}{q} + \frac{(-m)}{n} + \frac{-p}{q} \\
&= \frac{mq+np}{nq} + \frac{(-m)}{n} + \frac{(-p)}{q} \\
&= \frac{-m}{n} + \frac{-(p)}{q} \\
&= -a + (-b) \\
&= -a - b.
\end{aligned}$$

b) $(a-b)+b = a$.

Dados $a = \dfrac{m}{n}$, $b = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, temos:

$$\begin{aligned}
(a-b)+b &= \frac{mq+(-p)n}{nq} + \frac{p}{q} \\
&= \frac{[mq+(-p)n]+np}{nq} \\
&= \frac{mq+(-p+p)n}{nq} \\
&= \frac{mq}{nq} \\
&= a.
\end{aligned}$$

c) $a+c=b \Longleftrightarrow c = b-a$

Dados $a = \dfrac{m}{n}$, $b = \dfrac{p}{q}, c = \dfrac{r}{s} \in \mathbb{Q}$, temos:

$$\begin{aligned}
a+c=b &\Longleftrightarrow \frac{m}{n} + \frac{r}{s} = \frac{p}{q} \\
&\Longleftrightarrow \frac{-m}{n} + \frac{m}{n} + \frac{r}{s} = \frac{p}{q} + \frac{(-m)}{n} \\
&\Longleftrightarrow \frac{r}{s} = \frac{p}{q} - \frac{m}{n} \Longleftrightarrow c = b-a.
\end{aligned}$$

d) $a+b = a+c \Rightarrow b = c$

Dados $a = \dfrac{m}{n}$, $b = \dfrac{p}{q}, c = \dfrac{r}{s} \in \mathbb{Q}$, temos:

$$\begin{aligned}
a+b &= a+c \\
\frac{m}{n}+\frac{p}{q} &= \frac{m}{n}+\frac{r}{s} \\
\frac{-m}{n}+\frac{m}{n}+\frac{p}{q} &= \frac{-m}{n}+\frac{m}{n}+\frac{r}{s} \\
\frac{p}{q} &= \frac{r}{s} \Rightarrow b=c
\end{aligned}$$

## 3.4 Multiplicação em $\mathbb{Q}$

**Definição 17** *Sejam* $a=\frac{m}{n}$ *e* $b=\frac{r}{s}$ *elementos de* $\mathbb{Q}$*. Definiremos a multiplicação de* $a$ *por* $b$ *e indicaremos por* $ab$ *o elemento de* $\mathbb{Q}$ *definido da seguinte maneira:*

$$ab = a\cdot b = \frac{mp}{nq}.$$

Para multiplicar dois elementos basta multiplicar numerador com numerador e denominador com denominador.

**Exemplo 20** $\frac{5}{7}\cdot\frac{3}{2}=\frac{5\cdot 3}{7\cdot 2}=\frac{15}{14}$.

**Proposição 8** *A multiplicação está bem definida, isto é, o produto* $ab$ *não depende dos pares ordenados escolhidos para definir* $a$ *e* $b$*.*

**Prova.** De fato, se $a=\frac{m}{n}=\frac{m'}{n'}$ e $b=\frac{p}{q}=\frac{p'}{q'}$, então $mn'=nm'$ e $pq'=qp'$.

Multiplicando a primeira igualdade por $(pq')$ e a segunda igualdade por $(m'n)$, temos: $(mn')(pq')=(nm')(pq')$ (I) e $(pq')(m'n)=(qp')(m'n)$ (II)

Substituindo (II) em (I), vem:

$$\begin{aligned}
mn'pq' = qp'm'n \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{mp}{nq}=\frac{m'p'}{n'q'} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}=\frac{m'}{n'}\cdot\frac{p'}{q'}.
\end{aligned}$$

$\diamond$

### 3.4.1 Propriedades da multiplicação:

a) Comutativa: $ab=ba$.

Sejam $a=\frac{m}{n}, b=\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}$, temos:

$$ab=\frac{m}{n}\frac{p}{q}=\frac{mp}{nq}=\frac{pm}{qn}=\frac{p}{q}\frac{m}{n}=ba.$$

b) Associativa: $(ab)c = a(bc)$.

Sejam $a = \frac{m}{n}, b = \frac{p}{q}, c = \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$, temos:

$(ab)c = \left(\frac{mp}{nq}\frac{r}{s}\right) = \frac{mpr}{nqs} = \frac{m}{n}\left(\frac{pr}{qs}\right) = \frac{m}{n}\left(\frac{p}{q}\frac{r}{s}\right) = a(bc)$.

c) Existe elemento neutro, é a classe $\frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \frac{3}{3} = \frac{4}{4} = \cdots$ que indicaremos por 1. De fato,

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{1}{1} = \frac{m \cdot 1}{n \cdot 1} = \frac{m}{n}$$

para todo $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$.

d) Elemento inverso. Se $a \neq \frac{0}{t}$, existe $a^{'}$ tal que $a \cdot a^{'} = \frac{1}{1}$.

Sejam $a = \frac{m}{n}, a^{'} = \frac{n}{m} \in \mathbb{Q}$, com $m \neq 0$, temos:

$$\begin{aligned} a \cdot a^{'} &= \frac{m}{n}\frac{n}{m} = \frac{mn}{nm} = \frac{mn}{mn} = \frac{m}{m}\frac{n}{n} \\ &= \frac{1}{1}\frac{1}{1}, \text{ pelo item anterior} \\ &= \frac{1}{1}. \end{aligned}$$

Indicaremos o inverso de $a$ por $a^{-1}$, então:

$$a = \frac{m}{n}, a \neq 0 \Rightarrow a^{-1} = \frac{n}{m}.$$

Disso decorre também que: $(a^{-1})^{-1} = \left(\frac{n}{m}\right)^{-1} = \frac{m}{n} = a$.

Se $a$ e $b$ são elementos não nulos, então:

$$(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}.$$

Como

$$(ab)(a^{-1}b^{-1}) = (aa^{-1})(bb^{-1}) = 1,$$

então $a^{-1}b^{-1}$ é o inverso de $ab$.

e) Distributiva em ralação à soma: $a(b + c) = ab + ac$.

Dados $a = \frac{m}{n}, b = \frac{p}{q}, c = \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$, temos:

$$\begin{aligned} a(b+c) &= \frac{m}{n}\left(\frac{p}{q}+\frac{r}{s}\right) = \frac{m}{n}\left(\frac{ps+rq}{qs}\right) = \frac{m(ps+rq)}{n(qs)} \\ &= \frac{mps+mrq}{nqs} = \frac{mps}{nqs}+\frac{mrq}{nqs} = \frac{mp}{nq}+\frac{mr}{ns} \\ &= \frac{m}{n}\frac{p}{q}+\frac{m}{n}\frac{r}{s} = ab+ac. \end{aligned}$$

Com as operações definidas acima, adição e multiplicação, de modo que valem as propriedades associativa, comutativa, elemento neutro, simétrico aditivo, inverso multiplicativo e a distributividade da multiplicação em relação a soma, nessas condições, segue da definição de corpo feita na seção 2.5 que o conjunto $\mathbb{Q}$ dos racionais possui a estrutura algébrica de corpo, ou seja, $\mathbb{Q}$ é um corpo.

## 3.5 Relação de ordem em $\mathbb{Q}$

Um ponto importante é sabermos responder a seguinte questão "quem é maior $\frac{1}{4}$ ou $\frac{1}{5}$"? Para respondermos esse questionamento definiremos uma relação de ordem entre os números racionais, compatível com a soma e o produto, herdada da ordem natural dos inteiros,

$$\cdots < -4 < -3 < -2 < -1 < 0 < 1 < 2 < 3 < 4 < \cdots$$

em que a diferença entre dois inteiros consecutivos é sempre igual a 1, de forma que cada racional esteja entre dois inteiros consecutivos. Antes mostraremos essa ultima afirmação.

**Proposição 9** *Entre dois inteiros consecutivos sempre existe um número racional.*

**Demonstração.** Em $\mathbb{Z}$ vale o *algoritmo da divisão* geral. Para quaisquer $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$, existem $q, r \in \mathbb{Z}$, tais que $m = qn + r$ com $0 \leq r < n$. Assim, $qn \leq m < (q+1)n$ e, portanto dividindo por $n$, temos $q \leq \frac{m}{n} < q+1$ para o racional $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$.

◇

Lembre-se que existe infinitas representações para um mesmo elemento racional, então existe uma representação para $a = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ com denominador positivo. Isto é, vale a igualdade:

$$a = \frac{m}{n} = \frac{-m}{-n}.$$

**Exemplo 21** $\frac{5}{-7} = \frac{-5}{7}$ *e* $\frac{-5}{-7} = \frac{5}{7}$.

**Definição 18** *Sejam* $a = \dfrac{m}{n}$ *e* $b = \dfrac{p}{q}$ *elementos de* $\mathbb{Q}$*, com* $n, q > 0$*. Diz-se que* $a$ *é menor do que ou igual a* $b$*, e escreve-se* $a \leq b$ *se* $mq \leq np$ *(esta ultima relação é considerada em* $\mathbb{Z}$*). Equivalentemente pode-se dizer que* $b$ *é maior do que ou igual a* $a$ *e denotar* $b \geq a$*. Com as mesmas hipóteses, se* $mq < np$*, diz-se que* $a$ *é menor do que* $b$ *(notação:* $a < b$*) ou que* $b$ *é maior do que* $a$ *(notação:* $b > a$*).*

**Exemplo 22** *a.* $\dfrac{1}{4} > \dfrac{1}{5}$*, porque* $5 > 4$.
*b.* $\dfrac{-2}{7} < \dfrac{-1}{5}$*, porque* $-10 < -7$.
*c.* $\dfrac{6}{5} > \dfrac{5}{6}$*, porque* $36 > 25$.

Mostraremos que a Definição 18 não depende dos pares ordenados escolhidos para expressar $a$ e $b$, ou seja, ela está bem definida.

Sejam $\dfrac{m}{n} = \dfrac{m'}{n'}$, com $n, n' > 0$, isto é, $mn' = nm'(*)$. Temos,

$$\frac{m}{n} \leq \frac{p}{q} \Longleftrightarrow mq \leq np$$

multiplicando esta desigualdade por $n'$, obtemos:

$$mqn' \leq npn'$$

daí, pela igualdade (*),

$$nm'q \leq npn'$$

donde concluímos

$$m'q \leq pn' \Longleftrightarrow \frac{m'}{n'} \leq \frac{p}{q}.$$

Analogamente, como $\dfrac{p}{q} = \dfrac{p'}{q'} \Rightarrow pq' = qp'(**)$, temos

$$\frac{m'}{n'} \leq \frac{p}{q} \Rightarrow m'q \leq pn'$$

multiplicando essa desigualdade por $q'$, depois substituindo $pq'$ por $p'q$, temos:

$$m'qq' \leq pn'q' \Rightarrow m'qq' \leq n'p'q \Rightarrow m'q' \leq n'p' \Rightarrow \frac{m'}{n'} \leq \frac{p'}{q'}.$$

Logo, como $\dfrac{m}{n} \leq \dfrac{p}{q} \Rightarrow \dfrac{m'}{n'} \leq \dfrac{p}{q}$ e $\dfrac{m'}{n'} \leq \dfrac{p}{q} \Rightarrow \dfrac{m'}{n'} \leq \dfrac{p'}{q'}$, concluímos que $\dfrac{m}{n} \leq \dfrac{p}{q} \Rightarrow \dfrac{m'}{n'} \leq \dfrac{p'}{q'}$.

$\diamond$

Um elemento $a = \dfrac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ com $n > 0$, será positivo se $a > 0$. Então:

$$a > 0 \Longleftrightarrow \frac{m}{n} > \frac{0}{1} \Longleftrightarrow m > 0.$$

Um elemento $a = \dfrac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ será negativo quando $a < 0$ equivale dizer que $m < 0$, considerando sempre $n > 0$.

Quando definimos uma relação de ordem num conjunto que tem operações queremos que esta ordem esteja associada às operações. Ou seja, deve satisfazer as condições abaixo:

a) $a < b \Rightarrow a + c < b + c$, para qualquer $c \in \mathbb{Q}$. (Monotonicidade da adição)

b) $a < b$ e $c$ um número positivo, implica $a \cdot c < b \cdot c$. (Monotonicidade da multiplicação)

Mostraremos a seguir que $\leq$, conforme Definição 18, é uma relação de ordem total sobre $\mathbb{Q}$, pois possui as seguintes propriedades:

- Refexiva: $\dfrac{m}{n} \leq \dfrac{m}{n}$;

  Seja $\dfrac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, claramente, $mn \leq nm$, isto é, $\dfrac{m}{n} \leq \dfrac{m}{n}$.

- Anti-simétrica: $\dfrac{m}{n} \leq \dfrac{p}{q}$ e $\dfrac{p}{q} \leq \dfrac{m}{n} \Rightarrow \dfrac{m}{n} = \dfrac{p}{q}$;

  Como $mq \leq np$ e $pn \leq qm$ pela tricotomia dos inteiros $mq = np$. Logo:

$$\frac{m}{n} = \frac{p}{q}.$$

- Transitiva: Se $\dfrac{m}{n} \leq \dfrac{p}{q}$ e $\dfrac{p}{q} \leq \dfrac{r}{s} \Rightarrow \dfrac{m}{n} \leq \dfrac{r}{s}$.

  De fato, como $mq \leq np$ e $ps \leq qr$, multiplicando a primeira dessas relações por $s$ e a segunda por $n$, $(s, n > 0)$, temos:

$$mqs \leq nps \text{ e } psn \leq qrn.$$

  Usando a transitividade $\leq$ em $\mathbb{Z}$,

$$mqs \leq qrn.$$

  E, uma vez que $s > 0$, pode-se concluir que

$$ms \leq rn.$$

  Logo, $\dfrac{m}{n} \leq \dfrac{r}{s}$.

Estabelecida a relação de ordem em conformidade com as operações de soma e multiplicação dizemos que o conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ é um corpo ordenado.

## 3.6 A enumerabilidade dos racionais

Mostraremos agora o seguinte teorema:

**Teorema 1** *O conjunto dos números racionais é enumerável.*

***Prova.*** Para mostrar a enumerabilidade de $Q$ devemos estabelecer uma correspondência biunívoca entre os elementos de $\mathbb{Q}$ e os elementos do conjunto dos números naturais. Inicialmente, mostraremos que o conjunto dos números racionais positivos $\mathbb{Q}_+$ é enumerável. Para isso, organizaremos todos os elementos de $\mathbb{Q}_+$ em uma matriz $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ de modo que cada $a_{ij} = \dfrac{i}{j}$, ou seja, cada racional $\dfrac{i}{j}$ esteja localizado na linha $i$ e na coluna $j$, conforme representado abaixo:

$$
\begin{tikzcd}
\frac{1}{1} \arrow[r] & \frac{1}{2} \arrow[dl] & \frac{1}{3} \arrow[r] & \frac{1}{4} \arrow[dl] & \frac{1}{5} \arrow[r] & \cdots \arrow[dl] \\
\frac{2}{1} \arrow[d] & \frac{2}{2} \arrow[ur] & \frac{2}{3} \arrow[dl] & \frac{2}{4} \arrow[ur] & \frac{2}{5} \arrow[dl] & \cdots \\
\frac{3}{1} \arrow[ur] & \frac{3}{2} \arrow[dl] & \frac{3}{3} \arrow[ur] & \frac{3}{4} \arrow[dl] & \frac{3}{5} \arrow[ur] & \cdots \arrow[dl] \\
\frac{4}{1} \arrow[d] & \frac{4}{2} \arrow[ur] & \frac{4}{3} \arrow[dl] & \frac{4}{4} \arrow[ur] & \frac{4}{5} \arrow[dl] & \cdots \\
\vdots \arrow[ur] & \vdots & \vdots \arrow[ur] & \vdots & \vdots & \ddots
\end{tikzcd}
$$

As setas indicam o caminho a ser percorrido para contagem em $\mathbb{Q}_+$ o que mostra uma certa ordenação, fruto de uma bijeção de $\mathbb{Q}_+$ com $\mathbb{N}$.

De forma análoga podemos demonstrar que o conjunto dos números racionais negativos $\mathbb{Q}_-$ também é enumerável, basta considerar os elementos $a_{ij} = \dfrac{-i}{j}$. Como $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_+ \cup \mathbb{Q}_- \cup \{0\}$ segue da Proposição 2 que o conjunto dos números racionais é enumerável.

$\diamond$

## 3.7 Identificação de números a pontos de reta

Antes de fazermos essa identificação iremos expor alguns axiomas sobre os elementos fundamentais da Geometria Euclidiana Plana: o ponto, a reta e o plano. As principais referências utilizadas para construção dessa seção foram [18] e [22].

Esses três elementos são considerados ideias primitivas que não precisam de definição. Outros termos primitivos são: pertencer a, estar entre.

**O ponto** não possui comprimento ou largura, não tem dimensão. E representamos por letras maiúsculas do nosso alfabeto.

**A reta** possui uma única dimensão e é formada por uma sucessão de pontos. E representamos por letras minúsculas do nosso alfabeto.

**O plano** é formado por infinitos pontos e infinitas retas. É representado por letras minúsculas do alfabeto grego ( $\alpha, \beta, \gamma, ...$).

Pontos retas e planos são objetos matemáticos caracterizados por cinco grupos de axiomas: axiomas de incidência, axioma de ordem, axiomas de congruência, axiomas de continuidade e axioma das paralelas. Apresentaremos os axiomas de incidência, de ordem, de continuidade (sobre a medida de segmentos) e o axioma das paralelas. Desses axiomas decorrem alguns Teoremas que não citaremos aqui.

**Axioma de incidência**

AI1) Dados dois pontos distintos, $A$ e $B$ existe uma única reta que os contém.

AI2) Qualquer que seja a reta, existem pontos que pertencem à reta e pontos que não pertencem à reta.

O primeiro axioma é sobre a determinação de uma reta e o segundo garante que a reta não pode ser um conjunto vazio, nem um conjunto unitário e nem conter todos os pontos.

Estes axiomas não garantem que há infinitos pontos na reta e nem que existe pontos entre dois pontos quaisquer de uma reta, os axiomas a seguir servirão para este propósito.

**Axiomas de ordem.**

Escreveremos $A \bullet B \bullet C$ para indicar que o ponto $B$ está entre os pontos $A$ e $C$.

AO1) Se $A \bullet B \bullet C$, então $A, B$ e $C$ são pontos distintos de uma mesma reta e $C \bullet B \bullet A$.

AO2) Dados três pontos distintos de uma reta, um e apenas um deles está entre os outros dois.

AO3) Dados dois pontos $A$ e $B$, existem pontos $C, D$ e $E$ pertencentes à reta definida por $A$ e $B$, tais que $C \bullet A \bullet B$, $A \bullet D \bullet B$ e $A \bullet B \bullet E$.

Esses axiomas garantem que a reta pode ser continuada indefinidamente, isto é, existe infinitos pontos entre dois pontos quaisquer.

**Definição 19** *O conjunto constituído por dois pontos $A$ e $B$ e por todos os pontos que se encontram entre $A$ e $B$ é chamado de segmento $AB$. Os pontos $A$ e $B$ são denominados extremos do segmento.*

Notação: Medida do segmento $AB = \overline{AB}$

**Definição 20** *Uma semirreta com origem em $A$ e contendo $B$ é o conjunto dos pontos $C$ tais que $A \bullet B \bullet C$ mais o segmento $AB$, sendo representada por $\overrightarrow{AB}$.*

**Os axiomas de continuidade.**

AC1) A cada segmento $AB$ está associado um único número número maior ou igual a zero. Este número é zero se e só se $A = B$.

AC2) Se $A \bullet C \bullet B$, então $\overline{AC} + \overline{CB} = \overline{AB}$.

AC2 Os pontos de uma reta podem ser colocados em correspondência biunívoca com os números, de modo que o módulo da diferença entre estes números meça a distância entre os pontos correspondentes.

A noção de distância é uma das noções mais básicas da Geometria. Ela satisfaz às propriedades:

1) Para quaisquer dois pontos $A$ e $B$ do plano, tem-se $\overline{AB} \geq 0$. Além disso, $\overline{AB} = 0$ se e somente se $A = B$.

2) Para quaisquer dois pontos $A$ e $B$ tem-se $\overline{AB} = \overline{BA}$.

3) Para quaisquer três pontos do plano $A, B$ e $C$, tem-se $\overline{AC} \leq \overline{AB} + \overline{BC}$. A igualdade ocorre se e somente se o ponto $C$ pertencer ao intervalo $AB$.

**Axiomas da paralelas**

AP1 Por um ponto não pertencente a uma reta $r$ pode-se traçar uma única reta paralela a reta $r$.

### 3.7.1 Números sobre uma reta

Para associar cada número a um ponto da reta r, iniciamos associando o número zero a um ponto $O$, que será a origem, em seguida o número 1 a um ponto $U_1$ (com $U_1$ distinto de $O$), definimos a medida do segmento $OU_1$ como a unidade de medida e adotamos o sentido positivo como sendo a semirreta com origem em O que possui $U_1$. Dessa forma o número inteiro 2 se associa a um ponto $U_2$ da reta r, ponto que está a uma unidade de $U_1$ no sentido positivo de r, ou seja, $U_1$ está entre $O$ e $U_2$. O número 3 se associa ao ponto $U_3$ que está a uma unidade de $U_2$ no sentido positivo de r, ou seja, o ponto $U_2$ está entre $U_1$ e $U_3$. Dessa forma,

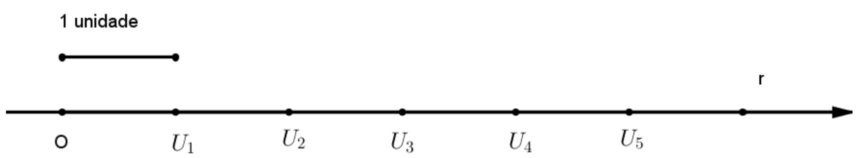
$\overline{U_1U_2} = 1 \cdot \overline{OU_1}$ e $\overline{OU_2} = 2 \cdot \overline{OU_1}$,

assim como,

$\overline{U_2U_3} = 1 \cdot \overline{OU_1}$, e $\overline{OU_3} = 3 \cdot \overline{OU_1}$.

Já o número 4 se associa a um ponto $U_4$ que está a uma unidade a direita de $U_3$, esse processo se repete para todos os números inteiros positivos. Ver Figura 3.1.

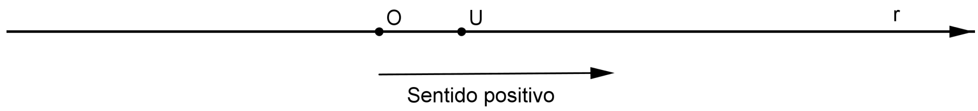
Figura 3.1: Números inteiros positivos sobre a reta orientada




**Definição 21** *Definiremos reta orientada uma reta na qual foram escolhidos um ponto O, denominado origem da reta, um segmento de comprimento arbitrário OU(em que U é um ponto distinto de O) como unidade de medida e a orientação positiva da reta, que é determinada pela semirreta que vai de O para U; e a semirreta oposta, denominaremos de orientação negativa da reta. Por questão de simplicidade, iremos sempre imaginar essa reta orientada na direção horizontal e o ponto U a direita de O, de modo que a orientação positiva é a que vai da esquerda para a direita. Como mostra a Figura 3.2.*

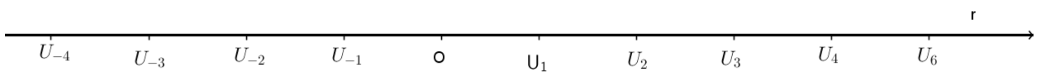
Os números inteiros negativos serão associados de forma análoga aos positivos. Na semirreta negativa (à esquerda de $O$) marca-se o ponto $U_{-1}$ tal que $\overline{OU_{-1}} = 1 \cdot \overline{OU_1}$, em seguida associamos o número $-1$ a esse ponto, já o número $-2$ será associado ao ponto $U_{-2}$ da reta que está uma unidade à esquerda de $U_{-1}$, o número $-3$ será associado ao

Figura 3.2: Reta orientada




ponto $U_{-3}$ da reta que está uma unidade à esquerda de $U_{-2}$ e assim sucessivamente. Dessa forma conseguimos associar todos os números inteiros a pontos da reta $r$, como mostra a Figura 3.3. Esse processo funciona pois qualquer um dos segmentos $OU_n$, com $n \in \mathbb{Z}^*$ é comensurável com a unidade $OU_1$.

Figura 3.3: Os números inteiros sobre a reta orientada

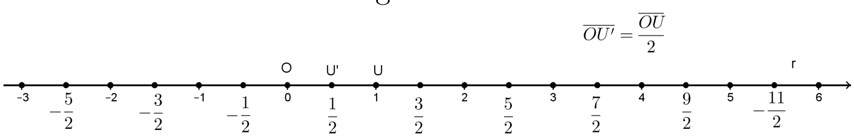



Assim o conjunto dos números inteiros é representado como um conjunto de pontos equidistantes na reta orientada em que os números positivos $x$ ficam $x$ unidades de $OU$ à direita de $O$ e os números negativos $y$ ficam $y$ unidades de $OU$ à esquerda de $O$.

### 3.7.2 A representação geométrica dos números racionais

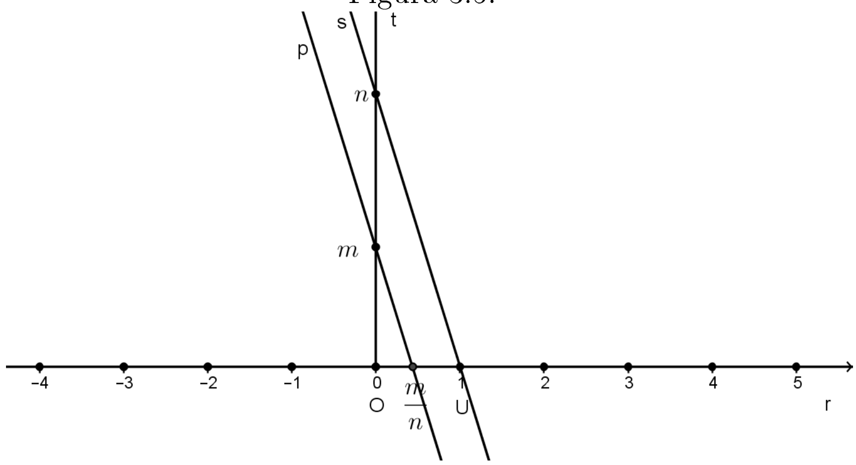
Os números racionais também podem ser representados geometricamente por pontos de uma reta. Para associar o número racional $\frac{m}{n}$ basta dividirmos cada um dos segmentos da unidade $OU$ em $n$ partes iguais. Assim, os pontos resultantes dessa subdivisão representam as frações com denominador $n$. Na Figura 3.4 subdividimos cada um dos segmentos da unidade em 2 partes iguais, temos a representação das frações com denominadores 2. Importante observar que as frações equivalentes são representadas na reta numérica por um mesmo ponto, ou seja, o ponto que representa $\frac{1}{2}$ é o mesmo que representa a fração $\frac{5}{10}$ e as demais frações equivalentes a $\frac{1}{2}$. Portanto cada ponto representa uma classe de equivalência de $\mathbb{Q}$.

Figura 3.4:



Com régua e compasso conseguimos fazer essas subdivisões [1]. Para isso, basta traçarmos uma semirreta $t$ com a origem em $O$ da reta orientada $r$, e nela marcar os pontos correspondentes a $m$ e a $n$, utilizando-se uma unidade de comprimento arbitrário (igual ou não a $OU$). Por $U$ e pelo ponto correspondente a $n$ traça-se uma reta $s$, depois pelo ponto correspondente a $m$ traça-se uma reta $p$ paralela à $s$. O número $\frac{m}{n}$ será o ponto correspondente a intersecção das retas $p$ e $r$. Veja a construção em Figura 3.5.

Figura 3.5:



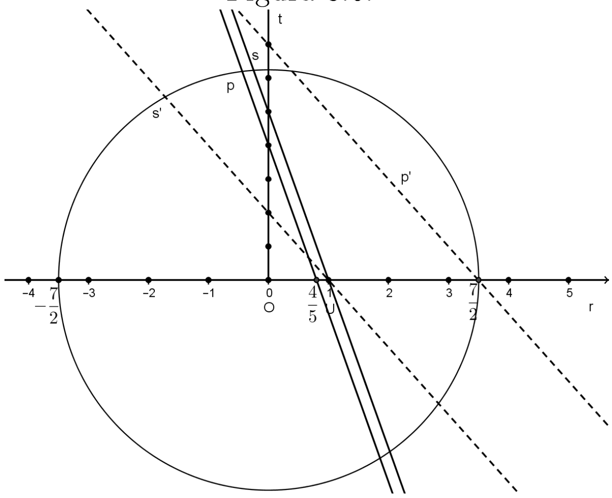

Se o número $\frac{m}{n}$ for negativo, $-\frac{m}{n}$ será positivo e usando o processo anterior podemos marcar sobre a reta $r$ o número $-\frac{m}{n}$; tomando seu simétrico em relação à origem $O$, temos o ponto sobre $r$ correspondente a $\frac{m}{n}$. Se para cada racional $\frac{m}{n}$ for feito o mesmo raciocínio, todos os números racionais serão representados por pontos desta reta numérica. Esses pontos serão chamados de pontos racionais.

**Exemplo 23** *Consideremos os números racionais* $\frac{4}{5}, \frac{7}{2}$ *e* $-\frac{7}{2}$, *e queremos representá-los na reta orientada* $r$. *Para isso, basta traçarmos uma semirreta* $t$ *com origem em* $O$ *e nela marcar os pontos correspondentes a 2, 4, 5 e 7 utilizando-se uma unidade de comprimento arbitrária. Para representar o número* $\frac{4}{5}$ *procedemos da seguinte maneira: por* $U$ *e pelo ponto correspondente a* $5 \in t$ *traça-se uma reta* $s$, *depois pelo ponto correspondente a* $4 \in t$ *traça-se uma reta* $p$ *paralela à reta* $s$, *o número* $\frac{4}{5}$ *será o ponto correspondente a intersecção das retas* $p$ *e* $r$. *Depois, para representar o número* $\frac{7}{2}$ *procedemos da seguinte maneira: por* $U$ *e pelo ponto correspondente a* $2 \in t$ *traça-se uma reta* $s'$, *depois pelo ponto correspondente a* $7 \in t$ *traça-se uma reta* $p'$ *paralela à reta* $s$, *o número* $\frac{7}{2}$ *será o ponto correspondente a intersecção das retas* $p'$ *e* $r$. *Para representar o ponto* $\frac{-7}{2}$ *(simétrico de*

[1] Dedicamos um capítulo deste trabalho para construções geométricas que utilizaremos aqui.

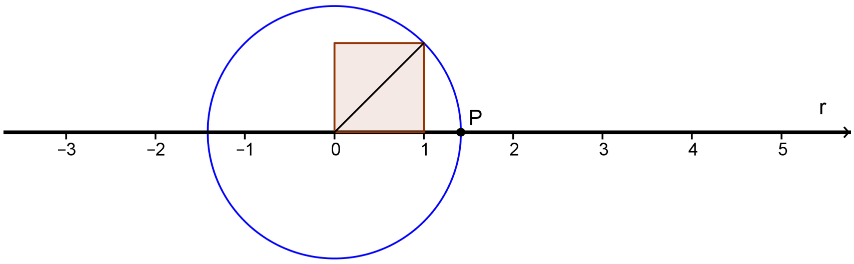
$\frac{7}{2}$*), basta traçar uma circunferência com centro em* $O$ *que passe por* $\frac{7}{2}$*, a intersecção da circunferência com a reta* $r$ *serão os pontos* $\frac{7}{2}$ *e* $\frac{-7}{2}$*. A Figura 3.6 mostra a representação desses números por pontos na reta* $r$*.*

Figura 3.6:




Lembre-se que um segmento de tamanho qualquer pode ser dividido quantas vezes desejarmos, portanto existirá infinitos pontos entre dois pontos quaisquer. Veja, se $a$ e $b$, forem dois números racionais distintos então existe pelo menos o número racional distinto $c = \frac{1}{2}(a+b)$ entre eles, que é o ponto médio entre $a$ e $b$. Consequentemente, existe uma infinidade de racionais entre dois racionais quaisquer. Isto significa que o conjunto $\mathbb{Q}$ é denso, ou seja, entre dois pontos da reta orientada sempre existe um número racional.

Figura 3.7: Falta um ponto $P$ na reta racional.



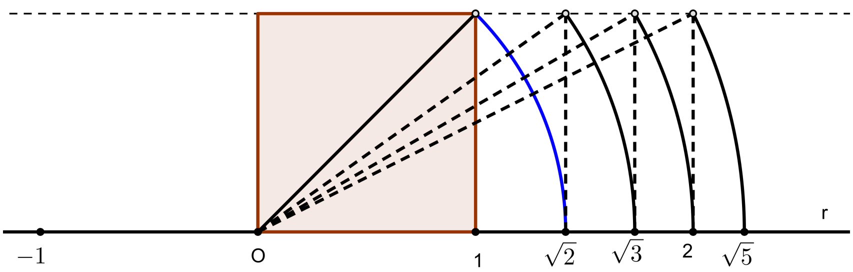

Podemos então pensar que os números racionais preenchem toda a reta orientada, ou seja, que existe uma correspondência biunívoca entre os pontos de uma reta e o conjunto dos números racionais. No entanto, uma construção simples com régua e compasso, ver Figura 3.7, nos permite encontrar um ponto $P$ da reta orientada associado ao comprimento da diagonal de um quadrado de lado 1, e sabemos conforme demonstrado na subseção

2.8.2 que não há um número racional que represente este ponto. Portanto, há ao menos um ponto na reta orientada que não tem um número racional correspondente.

Esse não é o único "furo" na reta racional. Sendo $\mathbb{Q}$ um corpo $-P$, $2P$, $\dfrac{P}{2}$ não podem está em $\mathbb{Q}$, pois o simétrico, a metade e o dobro de qualquer número racional também são números racionais. Mais do que isso, dado qualquer racional não nulo $a$ o ponto que representa a distância $aP$ de $O$ não pode ser um número racional já que, nesse caso, $P = \dfrac{1}{a}aP$ seria um número racional. Como isso vale para cada racional, constatamos que a existência desse "furo" implica numa infinidade de outros "furos" na reta racional.

O ponto $P$ que denotaremos por $\sqrt{2}$, não é o único exemplo de número não racional. Veja a construção de outros pontos não racionais na Figura 3.8.

Figura 3.8: Pontos não racionais na reta orientada $r$.




Portanto é necessário construir um corpo ordenado que seja completo, ou seja, que possua $\mathbb{Q}$ mas que não tenha buraco algum.

# Capítulo 4

# Construção dos números reais

Como vimos, para cada número racional há um ponto correspondente na reta orientada, mas nem todo ponto da reta orientada corresponde a um número racional, isto é, não há uma correspondência biunívoca entre o conjunto dos números racionais e os pontos de uma reta. Apesar do conjunto dos números racionais ser um conjunto denso, ou seja, entre dois pontos quaisquer existe um número racional, eles não são suficientes para preencher todos os pontos da reta orientada, isto é, existem "buracos" a serem preenchidos com um outro tipo de número: os números irracionais.

Para solucionar este problema foi necessário ampliar o conjunto dos números racionais. Criar um novo campo numérico que fosse suficiente para representar a medida de todos os segmentos de reta, isto é, que cada ponto da reta correspondesse a um número. Esse novo conjunto, denotado de conjunto dos números reais $\mathbb{R}$, deverá conservar as leis e propriedades aritméticas do conjunto dos números racionais além de possuir uma outra que os racionais não possuem chamada de completude.

Cada ponto de uma reta orientada está associado ao comprimento de um segmento, a essa quantidade chamaremos de número real. Definiremos soma e produto desses pontos de tal forma que a soma/produto pertençam a reta e satisfaçam as propriedades de corpo. O conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ será o modelo aritmético de uma reta, enquanto esta, será o modelo geométrico do conjunto $\mathbb{R}$.

## 4.1 O que é um número real?

Os números reais surgem do problema da medida, da insuficiência dos números racionais para representar a medida de grandezas incomensuráveis. A medição de uma grandeza é equivalente a medição de um segmento de reta, chamamos a quantidade dessa medida de número real.

O comprimento de um segmento de reta pode ser associado a um ponto de uma reta orientada tal que a distância desse ponto a origem represente o tamanho do segmento, ou seja, um número real. Em outras palavras, um número real será um ponto de uma reta orientada que representa o tamanho de um segmento $OP$ em relação a um segmento $OU$ (unidade de medida). Acompanhado de um sinal de menos,(-), caso $P$ esteja na semirreta, com origem em $O$, oposta a $U$. Chamaremos $P$ de imagem geométrica do número real $p$.

Existem três tipos desses números:

- se $P = O$, dizemos que a medida de $OP$ é o número zero;
- se $P$ estiver na semirreta $\overrightarrow{OU}$, então o tamanho do segmento $OP$ representa um número real positivo;
- se $P$ estiver na semirreta oposta a $U$, então o tamanho do segmento $OP$ precedido de um sinal de menos representa um número real negativo.

Sabemos que medir um segmento $OP$ em uma reta orientada significa determinar, por comparação, quantas vezes ele contém o segmento unitário $OU$.

Há duas possibilidades para medição de um segmento $OP$ usando $OU$ como unidade de medida:

1. O segmento $OP$ é comensurável com o segmento $OU$, ou seja, $OP$ é igual a um número inteiro de cópias de $OU$, ou de algum submúltiplo de $OU$. Os números que expressam a medida desse tipo de segmentos são denominados de números racionais.

2. O segmento $OP$ é incomensurável com a unidade $OU$, ou submúltiplo de $OU$, isto é, por menor que seja a unidade de medida que tomemos nunca conseguiremos reproduzir exatamente o segmento $OP$, o que conseguiremos são aproximações, que serão cada vez melhores à medida que formos tomando submúltiplos menores de $OU$. Os números que expressam as medidas de tais segmentos são os números irracionais.

Dessa forma, podemos dizer que os números racionais são os números reais que expressam a medida dos segmentos comensuráveis com o segmento unitário. E os números irracionais são os números reais que expressam a medida dos segmentos incomensuráveis com o segmento unitário.

Como cada segmento $OP$ de uma reta é ou comensurável, ou incomensurável com a unidade $OU$, segue que o conjunto dos números reais "preenchem" todos os pontos de uma reta. Assim o conjunto $\mathbb{R}$ é formado pelos números racionais e os números irracionais, e somente eles.

Dessa forma, uma reta orientada será a representação geométrica do conjunto dos números reais.

## 4.2 Operações em $\mathbb{R}$

Podemos, de forma geométrica, definir adição e multiplicação dos pontos de uma reta $r$.

### 4.2.1 Adição

**Definição 22** *Considere uma reta orientada $r$ (onde está definido a origem $O$, a unidade de medida e o sentido positivo). Dados dois pontos $A$ e $B$ sobre $r$. Definiremos a soma do ponto $A$ com o ponto $B$ como o ponto $C$ que se obtém seguindo os passos abaixo:*

*i. por um ponto $M$ não pertencente a $r$ traça-se uma reta $s$ paralela a $r$;*

*ii. por $O$ e $M$ traça-se uma reta $t_1$.*

*iii. por $B$, traça-se uma reta $t_2$ paralela a reta $t_1$. Denotaremos por $N$ a intersecção das retas $s$ e $t_2$;*

*iv. por $A$ e $M$, traça-se uma reta $t_3$.*

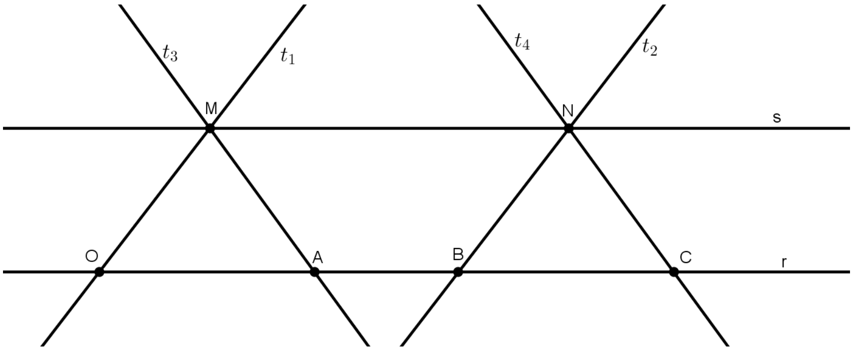
*v. por $N$, traça-se uma reta $t_4$ paralela a $t_3$. O ponto $C$ que é a intersecção das retas $t_4$ e $r$ representará a soma dos pontos $A$ e $B$.*

*Indicaremos a soma de $A$ com $B$ por $C = A + B$. Sua construção é dada na Figura 4.1.*

Na figura 4.1, $M$ é um ponto arbitrário do plano, não pertencente a $r$. Por construção, $s \parallel r$, $OM \parallel BN$ e $AM \parallel NC$. Pelo Teorema de Tales podemos afirmar que $OMNB$

e $AMNC$ são paralelogramos, portanto os segmentos $\overline{OB} \equiv \overline{MN} \equiv \overline{AC}$. Daí, como $\overline{OC} = \overline{OA} + \overline{AC}$, usando a equivalência $\overline{OB} \equiv \overline{AC}$, temos $\overline{OC} = \overline{OA} + \overline{OB}$. Isto é, $C = A + B$.

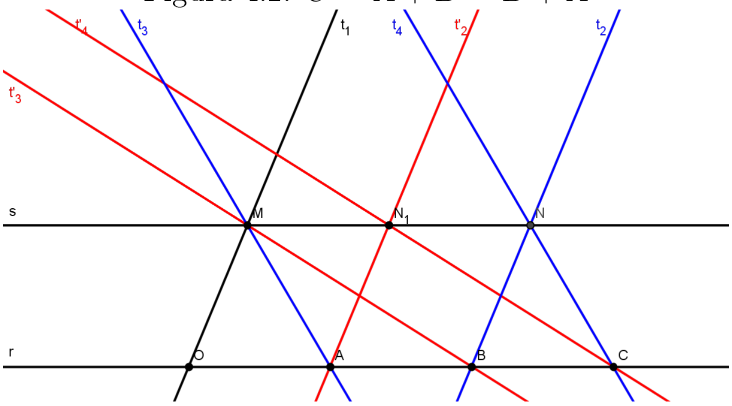
Figura 4.1: Adição de $A$ com $B$




## Propriedades da adição:

S1) Comutativa - quaisquer que sejam os pontos $A, B \in r$, tem-se $A + B = B + A$.

Figura 4.2: $C = A + B = B + A$




**Demonstração.** Considere a reta orientada $r$ e os pontos $A$ e $B$ sobre ela. Na figura 4.2 efetuamos, conforme a Definição 22, a soma de $A$ com $B$ utilizando as retas auxiliares $t_1, t_2, t_3$ e $t_4$, as três ultimas representadas em azul; e a soma de $B$ com $A$, com as retas auxiliares $t_1, t_2', t_3'$ e $t_4'$ as três ultimas representadas em vermelho.

Observe que, por construção $s \parallel r$ (lê-se: $s$ paralela a $r$), $t_1 \parallel t_2$ e $t_3 \parallel t_4$ então pelo Teorema de Tales podemos afirmar que $OBNM$ e $ACNM$ são paralelogramos portanto $\overline{OB} \equiv \overline{MN} \equiv \overline{AC}$. Analogamente, como $t_1 \parallel t_2'$ e $t_3' \parallel t_4'$, podemos afirmar que $OAN_1M$ e $BCN_1M$ são paralelogramos, portanto $\overline{OA} \equiv \overline{MN_1} \equiv \overline{BC}$. Dessa forma,

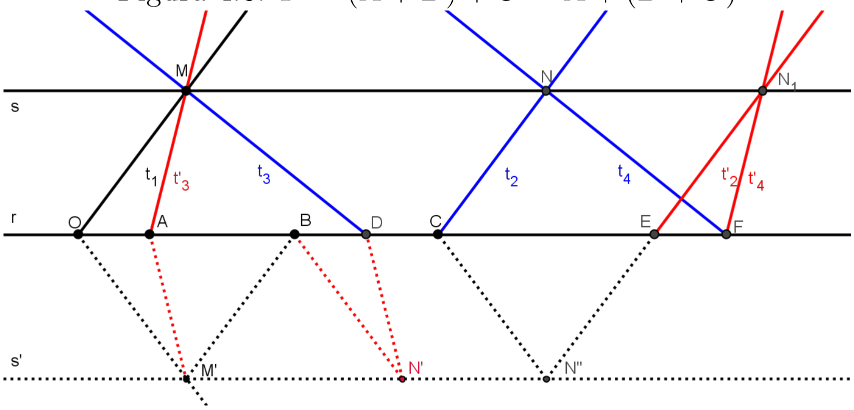
$$\overline{OC} = \overline{OA} + \overline{AC} \qquad \text{e} \qquad \overline{OC} = \overline{OB} + \overline{BC},$$

substituindo $\overline{AC}$ por $\overline{OB}$ na primeira equação e $\overline{BC}$ por $\overline{OA}$ na segunda equação, depois igualando as duas, temos:

$\overline{OA} + \overline{OB} = \overline{OB} + \overline{OA}$, isto é, $A + B = B + A = C$.

S2) Associativa - Para todo ponto $A, B, C \in r$, tem-se $(A + B) + C = A + (B + C)$.

Figura 4.3: $F = (A + B) + C = A + (B + C)$




**Demonstração.** Considere os pontos $A$, $B$ e $C$ sobre uma reta orientada $r$. O parêntese indica qual operação efetuar primeiro. Denotaremos por $D$ a soma de $A$ com $B$, por $E$ a soma de $B$ com $C$ e por $F$ a soma de $A, B$ e $C$. Na Figura 4.3, determinamos primeiro os pontos $D$ e $E$ e, para melhor visualização, refletimos a estrutura em relação a reta $r$. Depois efetuamos a soma de $D$ com $C$ com auxilio das retas $t_1, t_2, t_3$ e $t_4$ as três ultimas em azul; e a soma de $A$ com $E$ com o auxilio das retas $t_1, t_2', t_3'$ e $t_4'$ as três ultimas em vermelho.

Por construção, e pelo teorema de Tales podemos afirmar que $OBN'M', ADN'M'$, $OCN''M'$, e $BEN''M'$ são paralelogramos, portanto $\overline{OB} \equiv \overline{N'M'} \equiv \overline{AD}$ e $\overline{OC} \equiv \overline{N''M'} \equiv \overline{BE}$. Como,

$$\overline{OD} = \overline{OA} + \overline{AD} \qquad \text{e} \qquad \overline{OE} = \overline{OB} + \overline{BE},$$

substituindo $\overline{AD}$ por $\overline{OB}$ na primeira equação e $\overline{BE}$ por $\overline{OC}$ na segunda, obtemos:

$$\overline{OD} = \overline{OA} + \overline{OB} \qquad \text{e} \qquad \overline{OE} = \overline{OB} + \overline{OC}.$$

Analogamente, podemos afirmar que $OCNM, DFNM, OEN_1M$ e $AFN_1M$ são paralelogramos, portanto $\overline{OC} \equiv \overline{MN} \equiv \overline{DF}$ e $\overline{OE} \equiv \overline{N_1M} \equiv \overline{AF}$. Como

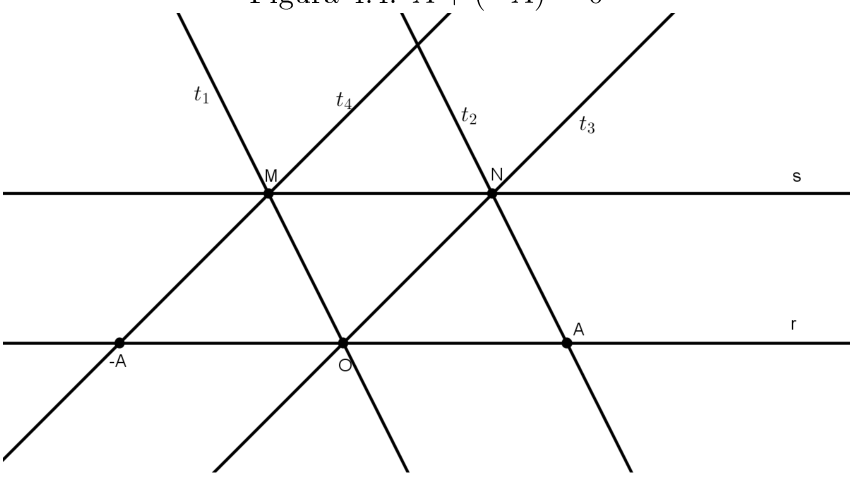
$$\overline{OF} = \overline{OD} + \overline{DF} \qquad \text{e} \qquad \overline{OF} = \overline{OA} + \overline{AF},$$

substituindo $\overline{DF}$ por $\overline{OC}$, $\overline{OD}$ por $\overline{OA} + \overline{OB}$ na primeira equação e $\overline{AF}$ por $\overline{OE}$, $\overline{OE}$ por $\overline{OB} + \overline{OC}$ na segunda equação, concluímos:

$$\begin{aligned} \overline{OF} &= \overline{OD} + \overline{OC} \\ &= (\overline{OA} + \overline{OB}) + \overline{OC} \\ &= (A+B)+C \end{aligned} \qquad \text{e} \qquad \begin{aligned} \overline{OF} &= \overline{OA} + \overline{OE} \\ &= \overline{OA} + (\overline{OB} + \overline{OC}) \\ &= A+(B+C) \end{aligned} \; .$$

S3) Possui simétrico - para todo ponto $A \in r$ existe um ponto simétrico $-A \in r$ tal que $A + (-A) = 0$.

Figura 4.4: $A + (-A) = 0$




**Demonstração.** Considere um ponto $A$ sobre a reta orientada $r$. Mostraremos que todo ponto possui simétrico. Para encontrar $-A$, devemos seguir os passos i), ii) e iii) da definição de soma, no quarto passo utilizando a informação de que a soma de um número com o simétrico é zero devemos:

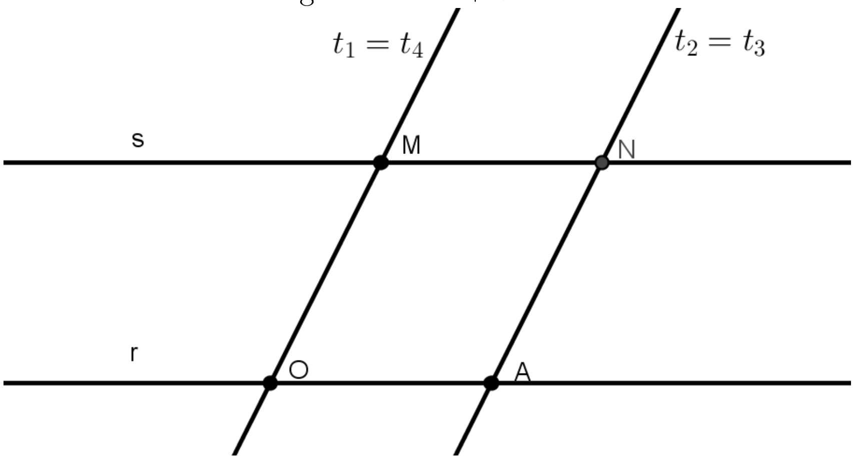
iv) por $O$ e $N$, traçar a reta $t_3$;

v) por $M$, traçar uma reta $t_4$ paralela a $t_3$. O ponto $-A$ será a intersecção das retas $t_4$ e $r$. Ver Figura 4.4.

Observe que o simétrico de um ponto $A$ pertence a semirreta oposta a semirreta de $A$, isto significa que terá sinal contrário ao de $A$. Por construção e pelo teorema de Tales, podemos afirmar que $-AONM$ e $OANM$ são paralelogramos, portanto $\overline{-AO} \equiv \overline{NM} \equiv \overline{OA}$.

S4) Possui elemento neutro - existe um ponto $X \in r$ tal que $A + X = A$, para qualquer ponto $A \in r$. Esse ponto $X$ é a origem da reta $r$, ou seja, o ponto $O$.

Figura 4.5: $A + O = A$




**Demonstração.** Considere um ponto $A$ sobre reta orientada $r$. Para determinar esse ponto devemos utilizar a informação de que a soma de qualquer ponto $A$ da reta com o elemento neutro resulta no próprio ponto $A$, e assim como fizemos com o simétrico o passo iv) e v) da definição deve ser o seguinte:

iv) por $A$ e $N$, traça-se a reta $t_3$.

v) por $M$, traça-se a reta $t_4$ paralela a $t_3$. A intersecção das retas $t_4$ e $r$ será o ponto $X$ que representa o elemento neutro da soma, ou seja será o ponto $O$. Ver construção na Figura 4.5.

Lembre-se que só existe uma única reta definida por dois pontos e uma única paralela por um ponto determinado, portanto as retas $t_1 = t_4$ e $t_2 = t_3$.

### 4.2.2 Multiplicação

**Definição 23** *Considere uma reta orientada r (onde está marcado a origem O, a unidade de medida OU, com $U \neq O$, e um sentido positivo). Dados dois pontos A e B sobre r. Definiremos o produto de A por B o ponto C que se obtém seguindo os passos abaixo:*

*i) por um ponto M do plano, não pertencente a reta r, traça-se uma semirreta s com origem em O;*

*ii) traça-se o segmento UM;*

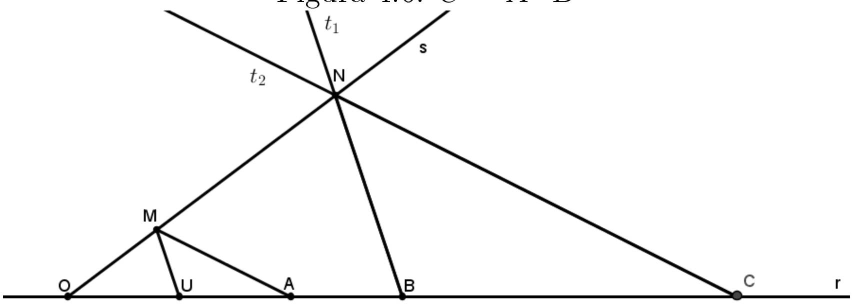
*iii) por $B$, traça-se uma reta $t_1$ paralela ao segmento $UM$. Chamaremos de $N$ a intersecção de $s$ com $t_1$;*

*iv) traça-se o segmento $AM$;*

*v) por $N$, traça-se uma reta $t_2$ paralela ao segmento $AM$. O ponto $C$ será a intersecção de $t_2$ com $r$.*

*Indicaremos o produto de $A$ por $B$ como $C$ e escreveremos $C = A \cdot B$. Sua construção é dada na Figura 4.6.*

Figura 4.6: $C = A \cdot B$




Na Figura 4.6, $s$ é uma semirreta arbitrária com origem em $O$, e por construção $UM \parallel BN$ e $AM \parallel CN$. Pelo Teorema de Tales, podemos afirmar que os triângulos $\triangle OMU$ e $\triangle ONB$ são semelhantes, pois possuem os três ângulos correspondentes congruentes, pela mesma razão os triângulos $\triangle OMA$ e $\triangle ONC$ também são semelhantes. Assim,

De $\triangle OMU \cong \triangle ONB$, temos:

$$\frac{\overline{OU}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OM}}{\overline{ON}}.$$

E de $\triangle OMA \cong \triangle ONC$, temos:

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{OM}}{\overline{ON}}.$$

Substituindo 1 em 2, concluímos:

$$\frac{\overline{OU}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OC}} \Longleftrightarrow \overline{OC} = \overline{OA} \cdot \overline{OB} \Longleftrightarrow C = A \cdot B.$$

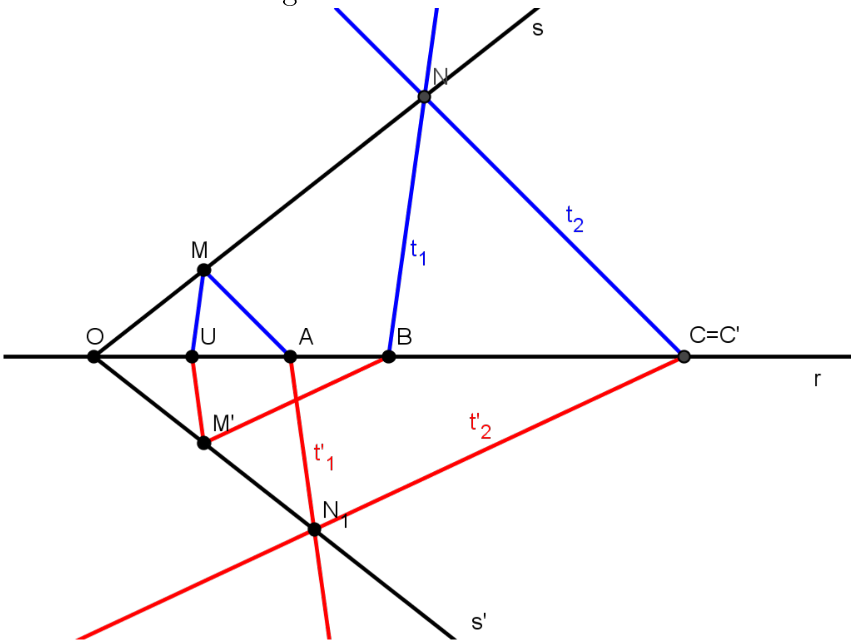
## Propriedades da multiplicação

A multiplicação possui as seguintes propriedades:

M1) Comutativa - quaisquer que sejam os ponto $A, B \in r$, tem-se $A \cdot B = B \cdot A$.

**Demonstração.** Considere os pontos $A$ e $B$ sobre a reta $r$. Na Figura efetuamos, conforme a Definição 23, a multiplicação de $A$ por $B$ em azul e de $B$ por $A$ em vermelho, para uma melhor visualização refletimos, em relação a reta $r$, a segunda multiplicação. Veja Figura 4.7.

Figura 4.7: $A \cdot B = B \cdot A$




Nesta construção teremos quatro pares de triângulos semelhantes. Dois da multiplicação resultantes de $A$ por $B$ e dois da multiplicação de $B$ por $C$.

O primeiro: $\triangle OMU \cong \triangle ONB$ cuja proporção dos seus lados são:

$$\frac{\overline{OU}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OM}}{\overline{ON}}.$$

O segundo:$\triangle OMA \cong \triangle ONC$, temos:

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{OM}}{\overline{ON}}.$$

Substituindo 1 em 2, concluímos:

$$\frac{\overline{OU}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OC}} \Longleftrightarrow \overline{OC} = \overline{OA} \cdot \overline{OB} \Longleftrightarrow C = A \cdot B.$$

O terceiro: $\triangle OMU \cong \triangle ON'B$ cuja proporção dos seus lados são:

$$\frac{\overline{OU}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OM}}{\overline{ON'}}.$$

O quarto: $\triangle OM'A \cong \triangle ON'C'$, temos:

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OC'}} = \frac{\overline{OM}}{\overline{ON'}}.$$

Substituindo 1 em 2, concluímos:

$$\frac{\overline{OU}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OC'}} \Longleftrightarrow \overline{OC'} = \overline{OA} \cdot \overline{OB} \Longleftrightarrow C' = A \cdot B.$$

Portanto $C = C'$, ou seja, $A \cdot B = B \cdot A$.

M2) Associativa - Para todo ponto $A, B, C \in r$, tem-se $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$.

**Demonstração.** Considere três pontos $A$, $B$ e $C$ sobre a reta orientada $r$. Na Figura 4.8, denotamos por $D = A \cdot B$ e por $E = B \cdot C$ os produtos já efetuados, representados pelas retas pontilhadas. Depois efetuamos a multiplicação de $D$ por $C$ em azul e de $A$ por $E$, em vermelho, para uma melhor visualização refletimos essa segunda parte em relação a reta r. Da multiplicação de $D$ por $C$, temos dois pares de triângulos semelhantes: $\triangle OMU \cong \triangle ONC$ e $\triangle ODM \cong \triangle OFN$. Cuja razões dos lados proporcionais são iguais. Do primeiro par, temos:

$$\frac{\overline{OU}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{OM}}{\overline{ON}}.$$

E do segundo,

$$\frac{\overline{OD}}{\overline{OF}} = \frac{\overline{OM}}{\overline{ON}}.$$

Dessas duas proporções, obtemos:

$$\frac{\overline{OU}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{OD}}{\overline{OF}} \Longleftrightarrow \overline{OF} = \overline{OD} \cdot \overline{OC}.$$

Como $\overline{OD} = \overline{OA} \cdot \overline{OB}$, vem, $\overline{OF} = \overline{OA} \cdot \overline{OB} \cdot \overline{OC}$.

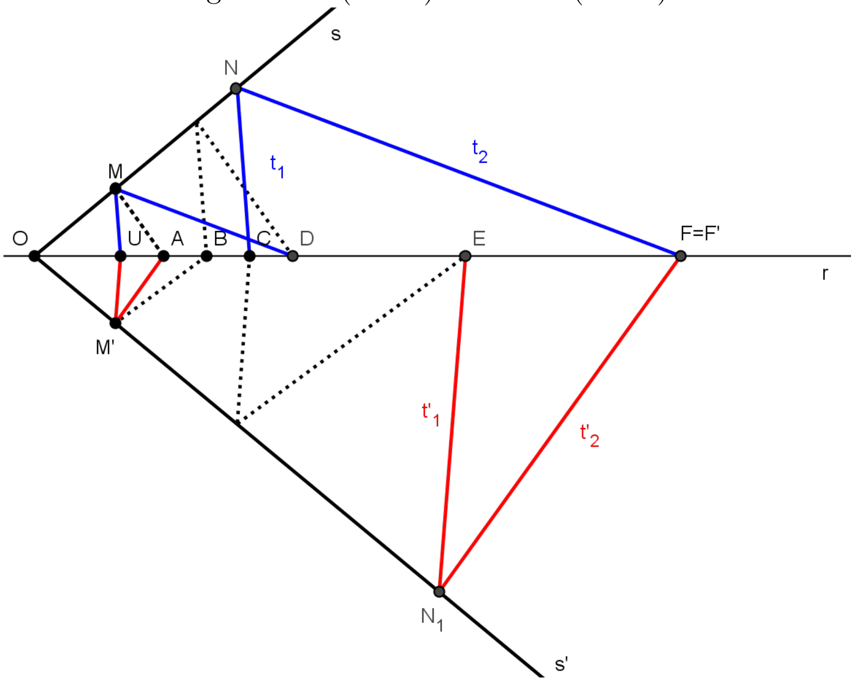
De forma análoga, da multiplicação de $E$ por $A$ temos dois pares de triângulos semelhantes: $\triangle OMU \cong \triangle OEN'$ e $\triangle OAM \cong \triangle OF'N'$. Donde,

$$\frac{\overline{OU}}{\overline{OE}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OF}} \Longleftrightarrow \overline{OF'} = \overline{OA} \cdot \overline{OE}.$$

Como $\overline{OE} = \overline{OB} \cdot \overline{OC}$, vem $\overline{OF'} = \overline{OA} \cdot \overline{OB} \cdot \overline{OC}$.

Portanto, $F = F'$, ou seja, $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$

Figura 4.8: $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$.




M3) Possui inverso multiplicativo - para todo ponto $A \in r$ com $A \neq O$ existe um ponto $A^{-1} \in r$ tal que $A \cdot A^{-1} = U = 1$.

**Demonstração.** Considere um ponto $A$ sobre a reta orientada $r$. Para determinar o inverso multiplicativo devemos seguir os passos i), ii) e iii), conforme a Definição 4.6, usando a informação que o produto é 1, os próximos passos são os seguintes:

iv) traça-se uma reta por $U$ e $N$.

v) Por $M$, traça-se uma reta $t_2$ paralela a $UN$, o ponto $A^{-1}$ será a intersecção de $t_2$ e $r$. Ver Figura 4.9.

Desta construção resulta dois pares de triângulos semelhantes $\triangle OA^{-1}M \cong \triangle OUN$ e $\triangle OUM \cong \triangle OAN$. Do primeiro par temos:

$$\frac{\overline{OA^{-1}}}{\overline{OU}} = \frac{\overline{OM}}{\overline{ON}}.$$

Do segundo par:

$$\frac{\overline{OU}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OM}}{\overline{ON}}.$$

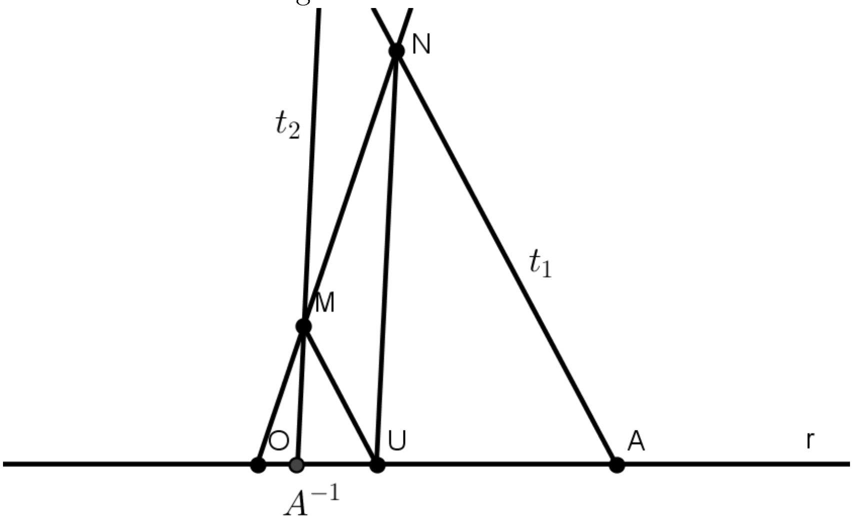
Das duas proporções anteriores, obtemos:

$$\frac{\overline{OU}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OA^{-1}}}{\overline{OU}}.$$

Desta maneira,

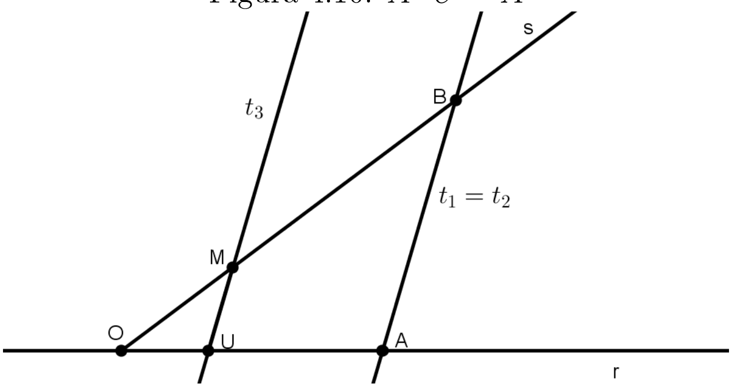
$$\overline{OA} \cdot \overline{OA^{-1}} = \overline{OU}^2 \iff A \cdot A^{-1} = 1.$$

Figura 4.9: $A \cdot A^{-1} = 1$




M4) Possui elemento neutro - existe um ponto $X \in r$ tal que $A \cdot X = A$, para qualquer ponto $A \in r$. Esse ponto $X$ é a unidade de medida da reta $r$, ou seja, o ponto $U$.

Figura 4.10: $A \cdot U = A$




**Demonstração.** Considere um ponto $A$ sobre a reta orientada $r$. Para determinar o elemento neutro da multiplicação seguimos os passos i), ii) e iii) da Definição 4.6 depois, usando a informação de que o produto é $A$, traçamos uma reta $t_2$ por $A$ e $N$, pelo o axioma de existência da geometria euclidiana essa reta coincide com a reta $t_1$; por $M$ traçamos uma reta $t_3$ paralela a $AN$, essa reta coincide com a reta $UM$, portanto a intersecção de $t_3$ e $r$ será o ponto $U$. Assim o elemento neutro da multiplicação é a unidade, ou seja, o ponto associado ao número 1. Veja a Figura 4.10.

M5) Distributiva em relação a soma - Para todo ponto $A, B, C \in r$, tem-se $A \cdot (B+C) = A \cdot B + A \cdot C$.

**Demonstração.** Primeiro efetuamos $D = B + C$, retas pontilhadas, depois a multiplicação de $A$ por $D$ que denotamos por $G$, veja a Figura 4.11, essas operações estão representadas em azul. Para melhor visualização refletimos as retas $p$ e $s$ em relação a reta $r$, efetuamos $E = A \cdot B$ e $F = A \cdot C$, retas pontilhadas, depois com esses pontos determinados sobre $r$, efetuamos a soma de $E$ por $F$ que denotamos por $G'$, essas operações estão representadas em vermelho.

Temos que $G = G'$. Por construção e pelo teorema de Tales, podemos afirmar que:

1) $\triangle OUM \cong \triangle ODN$ e $\triangle OAM \cong \triangle OGN$, consequentemente

$$\frac{\overline{OU}}{\overline{OD}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OG}} \Longleftrightarrow \overline{OG} = \overline{OA} \cdot \overline{OD}.$$

2) $OCQM$ e $BDQM$ são paralelogramos, portanto $\overline{OC} \equiv \overline{QM} \equiv \overline{BD}$, dessa forma,

$$\overline{OD} = \overline{OB} + \overline{OC}.$$

3) $\triangle OUM' \cong \triangle OBQ_1 \cong \triangle OCQ_2$ e $\triangle OAM' \cong \triangle OEQ_1 \cong \triangle OFQ_2$, assim

$$\frac{\overline{OU}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OE}} \Longleftrightarrow \overline{OE} = \overline{OA} \cdot \overline{OB},$$

$$\frac{\overline{OU}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OF}} \Longleftrightarrow \overline{OF} = \overline{OA} \cdot \overline{OC}.$$

4) $OFN_1M'$ e $EG'N_1M'$ são paralelogramos, então

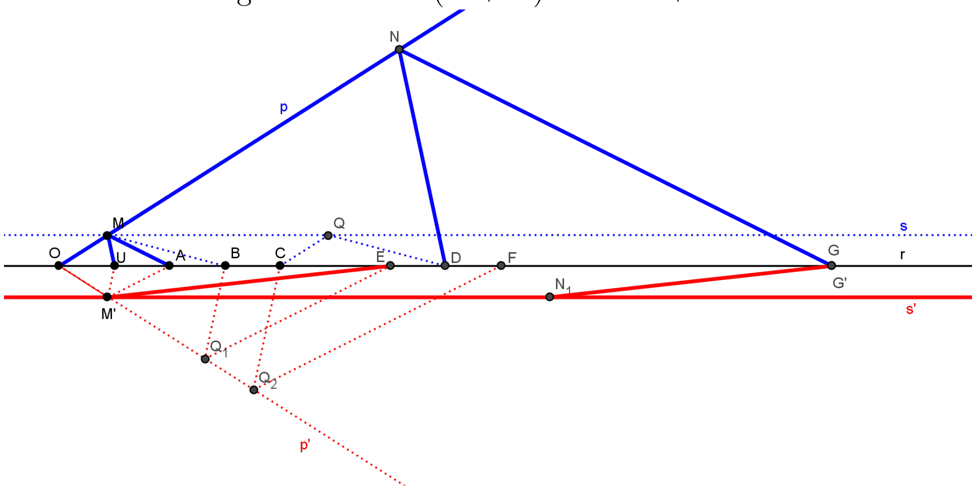
$$\overline{OG} \equiv \overline{N_1M'} \equiv \overline{EG'},$$

assim $\overline{OG'} = \overline{OE} + \overline{OF}$.

De 1) e 2), temos $\overline{OG} = \overline{OA} \cdot (\overline{OB} + \overline{OC})$. De 3) e 4), temos $\overline{OG'} = \overline{OA} \cdot \overline{OB} + \overline{OA} \cdot \overline{OC}$. Como,

$$\overline{OG} = \overline{OG'} \Longleftrightarrow A \cdot (B+C) = A \cdot B + A \cdot C.$$

Figura 4.11: $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$




Com as operações de adição e de multiplicação satisfazendo as propriedades S1, S2, S3, S4, M1, M2, M3, M4 e M5 a reta orientada $r$ possui uma estrutura algébrica de corpo a qual chamaremos de conjunto dos números Reais.

## 4.3 Relação de ordem em $\mathbb{R}$

O corpo dos Reais é ordenado, pois existe um subconjunto $\mathbb{P}$ dos elementos positivos de $\mathbb{R}$ que é formado por todos os pontos à direita da origem. Esse conjunto $\mathbb{P}$ possui a propriedade $\mathbb{R} = \mathbb{P} \cup 0 \cup (-\mathbb{P})$[1] essa reunião disjunta significa que todo número real é ou positivo, ou zero ou negativo e é equivalente dizer que um ponto de uma reta orientada está ou à direita da origem, ou na origem ou à esquerda da origem, respectivamente.

Desta forma:

a) Dado $x \in \mathbb{R}$, temos:

   $x = 0$ ou $x =$ positivo ou $-x =$ positivo.

b) Para todo $x, y \in \mathbb{P} \Longrightarrow x + y \in \mathbb{P}$ e $x \cdot y \in \mathbb{P}$.

Essas informações são importantes para definirmos uma relação de ordem ($<$) entre os elementos de $\mathbb{R}$. Dizer que $x < y$ significa que $y - x \in \mathbb{P}$.

**Definição 24** *Sejam $A, B \in r$, sendo $r$ uma reta orientada. Dizemos que $A$ é menor do que $B$ (escrevemos $A < B$) se $A$ estiver à esquerda de $B$; ou $A$ é igual a $B$ (escrevemos*

[1] $(-\mathbb{P})$ é o conjunto formado pelos simétricos dos elementos do conjunto $\mathbb{P}$

*$A = B$) se $A$ coincidir com $B$; ou que $B$ é menor do que $A$ (escrevemos $B < A$) se $B$ estiver à esquerda de $B$.*

Vale as equivalência:

1. Se $A < B$, então $B - A \in \mathbb{P}$. Também significa que a semirreta $\overrightarrow{AB}$ tem orientação positiva e a semirreta oposta, $\overrightarrow{BA}$, tem orientação negativa.

2. Se $B < A$, então $A - B \in \mathbb{P}$. Ou seja, a semirreta $\overrightarrow{BA}$ possui orientação positiva e a semirreta oposta, $\overrightarrow{AB}$, possui orientação negativa.

**(Princípio da Tricotomia)** - Dados dois pontos $A$ e $B$ sobre reta orientada $r$ só existe uma das três possibilidades:

$$A < B, \ A = B \text{ ou } B < A.$$

**Prova.** Dados dois pontos, $A$ e $B$, sobre $r$ só há duas possibilidades: $A = B$ ou $A \neq B$.

Se $A = B$ não há o que provar. Se $A \neq B$, então ou $A < B$ ou $B < A$. Verifiquemos agora que as possibilidades, $A < B$ e $B < A$ se excluem mutuamente. Para isto, suponhamos que $A < B$ e $B < A$ ocorrem ao mesmo tempo.

Se $A < B$ então $\overrightarrow{AB}$ possui sentido positivo e se $B < A$ então $\Longleftrightarrow$ $\overrightarrow{BA}$ possui sentido positivo. Um absurdo, pois as semirretas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BA}$ são opostas.

$\diamond$

**(Princípio da transitividade)** - Dados três pontos distintos $A$, $B$ e $C$ sobre a reta orientada $r$, se $A < B$ e $B < C$ então $A < C$.

**Prova.** Se $A < B$ e $B < C$ então $B - A \in \mathbb{P}$ e $C - B \in \mathbb{P}$, respectivamente. Adicionando $(B - A)$ com $(C - B)$, temos:

$$B - A + C - B = B - B + C - A = C - A.$$

Como a soma de dois números positivos é um número positivo, portanto:

$$C - A \in \mathbb{P} \Rightarrow A < C.$$

$\diamond$

## 4.4 A completude dos números reais

Dizer que o corpo ordenado dos números reais é completo significa, de acordo com a Definição 14, que todo subconjunto $X$ não vazio, limitado superiormente possui supremo em $\mathbb{R}$. Esta é a propriedade fundamental do sistema dos números reais que difere este conjunto do conjunto dos números racionais.

A propriedade análoga a do supremo é que todo subconjunto $X$ não vazio, limitado inferiormente possui ínfimo em $\mathbb{R}$.

Uma consequência importante da propriedade do supremo é que o subconjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais há sempre um menor elemento, mas não é limitado superiormente em $\mathbb{R}$. Isto é, dado um número real $x$, existe um número natural $n$ que é maior do que $x$, caso contrário $x$ seria cota superior de $\mathbb{N}$. Esta afirmação significa dizer que o corpo dos reais é arquimediano.

**Proposição 10** *(*$\mathbb{R}$ ***é arquimediano****) Se $x \in \mathbb{R}$, existe um natural $n \in \mathbb{N}$ tal que $x < n$.*

**Prova.** Suponhamos por absurdo que $\mathbb{N}$ é limitado superiormente e que $x$ é cota superior de $\mathbb{N}$. Portanto, pela propriedade do supremo, $\mathbb{N}$ tem um supremo $u$. Como $x$ é cota superior de $\mathbb{N}$, tem-se que $u \leq x$. Como $u - 1 < u$, temos que existe um $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $u - 1 < n_1 \to u < n_1 + 1$, como $n_1 + 1 \in \mathbb{N}$ isto contradiz que $u$ é cota superior de $\mathbb{N}$.

$\diamond$

**Corolário 1** *Sejam $x$ e $y$ reais positivos.*

*a) Existe um número natural $n$ tal que $nx > y$.*

*b) Existe um número natural $n$ tal que $0 < \dfrac{1}{n} < y$.*

*c) Existe um número natural $n$ tal que $n - 1 \leq y < n$*

**Prova.** a) Como $x$ e $y$ são positivos, então $z = \dfrac{y}{x}$ também é positivo. Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{y}{x} = z < n$, então $y < nx$.

b) Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \dfrac{1}{y} < n$, multiplicando a desigualdade por $\dfrac{y}{n}$, concluímos que $0 < \dfrac{1}{n} < y$.

c) A propriedade Arquimediana afirma que existem números naturais $n$ tais que $x < n$. Seja $n$ o menor desses números naturais, então $n - 1 \leq x < n$.

$\diamond$

Outra consequência importante da propriedade do supremo é que ela garante a existência de certos números reais.

**Proposição 11** ***(Existência de*** $\sqrt{2}$***)*** *Existe um número real positivo* $r \in \mathbb{R}$ *tal que* $r^2 = 2$

**Demonstração.** Sejam $A = \{y \in \mathbb{R} \mid y > 0, y^2 < 2\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0, x^2 > 2\}$. $A$ é limitado superiormente por 2, caso contrário existiria um elemento $z \in A$ tal que $2 < z$, donde decorreria que $4 < z^2 < 2$, uma contradição e, $B$ é limitado inferiormente por 2. Pela propriedade do supremo, o conjunto $A$ tem um supremo e o conjunto $B$ tem um ínfimo. Sejam $a = supA$ e $b = infB$, obviamente $a > 0$ e $b > 0$.

Suponhamos por absurdo que $b^2 \neq 2$, então $b \in A$ ou $b \in B$. Se $b \in B$ pode-se mostrar, para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, que $b - \dfrac{1}{n} \in B$ o que contradiz o fato de $b$ ser o ínfimo de $B$. Por outro lado, se $b \in A$ pode-se mostrar, para $n$ suficientemente grande, que $b + \dfrac{1}{n} \in A$ o que contradiz o fato de que $b$ ser a maior das cotas inferiores de $A$. Portanto $b = a$.

$\diamond$

**Corolário 2** *Seja* $\wp > 0$ *um número irracional e seja* $z > 0$ *então existe um número natural* $n$ *tal que o irracional* $\dfrac{\wp}{n}$ *satisfaz* $0 < \dfrac{\wp}{n} < z$.

**Demonstração.** Como $\wp, z > 0$, então $\dfrac{\wp}{z} > 0$. pela propriedade Arquimediana existe um número natural $n$ tal que $0 < \dfrac{\wp}{z} < n$, multiplicando a desigualdade por $\dfrac{z}{m}$, concluímos $0 < \dfrac{\wp}{m} < z$.

$\diamond$

**Teorema 2** *Sejam* $x$ *e* $y$ *números reais, com* $x < y$.

*a) Então existe um racional* $r$ *tal que* $x < r < y$.

*b) Se* $\wp > 0$ *é um irracional, então existe um racional* $s$ *tal que o irracional* $s\wp$ *satisfaz* $x < s\wp < y$.

**Demonstração.** Suponhamos, sem perda de generalidade que $x > 0$.

a) Como $y - x > 0$, pelo item (b) do Corolário 1 existe um natural $n$ tal que $0 < \frac{1}{n} < y - x$. Pelo item (c) do Corolário 1 aplicado a $nx > 0$, existe um natural $m$ tal que $\frac{m-1}{n} \leq x < \frac{m}{n}$. Devemos ter também $\frac{m}{n} < y$, pois doutra forma, $\frac{m-1}{n} \leq x < y \leq \frac{n}{m}$ o que implica $y - x \leq \frac{1}{n}$, contrariando a escolha de $m$. Portanto $x < \frac{m}{n} < y$.

b) Supondo $0 < x < y$ e $\wp > 0$, temos $\frac{x}{\wp} < \frac{y}{\wp}$. Por a) existe um racional $s$ tal que $\frac{x}{\wp} < s < \frac{y}{\wp}$. Portanto, $x < s\wp < y$.

$\diamond$

## 4.5 O conjunto dos números reais não é enumerável

Para concluir esta seção mostraremos que o conjunto dos números reais não é enumerável.

**Teorema 3** *O conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais não é enumerável.*

Essa demonstração baseia-se na demonstração feita por Figueiredo em [10], página 15.

**Prova.** Mostraremos que o conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$, não é enumerável. Consequentemente $\mathbb{R}$ não é enumerável. Os números pertencentes ao conjunto $A$ têm uma representação decimal da forma

$$0, a_1 a_2 a_3 \cdots \tag{4.1}$$

onde $a_i$ é um dos algarismos $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8,$ ou $9$.

Suponhamos que o conjunto $A$ é um conjunto enumerável:

$$\begin{aligned} 1 &\to 0, a_{11} a_{12} a_{13} a_{14} \cdots \\ 2 &\to 0, a_{21} a_{22} a_{23} a_{24} \cdots \\ 3 &\to 0, a_{31} a_{32} a_{33} a_{34} \cdots \\ &\vdots \end{aligned}$$

Agora forme o seguinte decimal

$$0, b_1 b_2 b_3 \cdots$$

da seguinte maneira: todos os $b_i$ são diferentes de 0 ou de 9 e

$$b_1 \neq a_{11},\ b_2 \neq a_{22},\ b_3 \neq a_{33}, \cdots$$

É claro que

$$0, b_1 b_2 b_3 \cdots \neq 0, a_{n1} a_2 a_3 \cdots$$

para todo $n$, pois $b_n \neq a_{nn}$. Logo $0, b_1 b_2 b_3 \cdots$ não está na lista acima o que é um absurdo.

Sabemos que $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$, uma união disjunta, sendo $\mathbb{Q}$ um conjunto enumerável, então usando o fato de que $\mathbb{R}$ não é enumerável, concluímos que $\mathbb{I}$ é um conjunto não enumerável, onde $\mathbb{I}$ é o conjunto dos números irracionais.

# Capítulo 5

# Algumas construções geométricas

Neste capítulo apresentamos algumas construções geométricas básicas: traçar retas paralelas, perpendiculares e divisão de segmentos em partes iguais. A primeira construção, traçar retas paralelas, é fundamental para os propósitos deste trabalho.

Levando em consideração que nem todas as escolas públicas brasileiras possuem laboratórios de informática adequados às necessidades, do ponto de vista quantitativo, para uma aula efetivamente proveitosa, apresentamos duas alternativas para fazer essas construções: uma com régua e compasso e a outra com um software gratuito de geometria dinâmica, o GeoGebra.

Apesar de parecer ultrapassado, a régua e o compasso são instrumentos fáceis de manipular e de baixo custo, portanto bastante acessível. O GeoGebra é um aplicativo gratuito de matemática dinâmica que combina conceitos de geometria e álgebra, de fácil manuseio e pedagogicamente muito rico.

As construções geométricas são uma ferramenta excelente de ensino. Primeiro porque os alunos gostam bastante de aulas de "desenho", a participação e envolvimento é maior. Segundo porque todas as construções devem ser justificadas isso contribui para os alunos compreenderem alguns termos e fixarem conteúdos importantes como o Teorema de Tales, Teorema de Pitágoras, semelhança de triângulos, proporcionalidade, entre outros.

## 5.1 Com régua e compasso

Nas construções geométricas são permitidos apenas a régua (não graduada) e o compasso. A régua serve para desenhar uma reta passando por dois pontos dados e o compasso serve apenas para desenhar uma circunferência cujo raio é dado e cujo centro é um ponto dado. Todas as construções devem ser justificadas. As construções que faremos foram retiradas e adaptadas de [22] e [23]. O leitor interessado em maiores detalhes pode consultar essas referências.

### 5.1.1 Retas paralelas e perpendiculares

Os primeiros problemas considerados básicos de construções geométricas que precisamos aprender são: traçar por um ponto dado uma reta paralela a uma reta dada e; traçar por um ponto dado uma reta perpendicular a uma reta dada.

#### Reta paralela

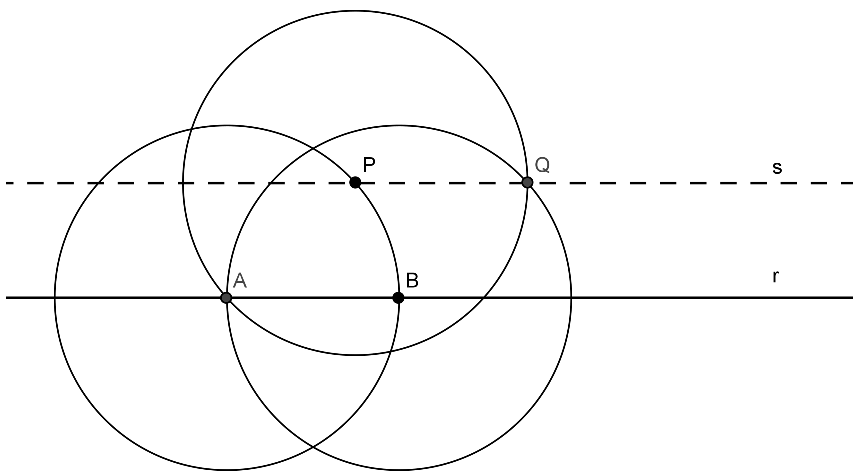
Dada uma reta $r$ e um ponto $P$ não pertencente a $r$, existe uma única reta $s$ que passa por $P$ e é paralela à reta $r$.

Para construir $s$ basta seguir os passos abaixo:

I) Com o compasso traça-se três circunferências com mesmo raio: a primeira com centro em $P$ cortando a reta $r$ em $A$; a segunda com centro em $A$ cortando a reta $r$ em $B$ e a terceira com centro em $B$ determinando um ponto $Q$, diferente de $A$, sobre a primeira circunferência.

II) Com a régua traça-se uma reta por $PQ$. A reta $PQ$ é a reta $s$ procurada. Ver Figura 5.1.

Figura 5.1: Reta paralela a uma reta dada



**Justificativa**. Observe que, pelas construções efetuadas, $\overline{PA} = \overline{AB} = \overline{BQ} = \overline{PQ}$, ou seja, $PABQ$ é um losango e, portanto seus lados opostos $PQ$ e $AB$ são paralelos.

## Reta perpendicular

Dada uma reta $r$ e um ponto $P$ , existe uma única reta $s$ que passa por $P$ e é perpendicular à reta $r$.

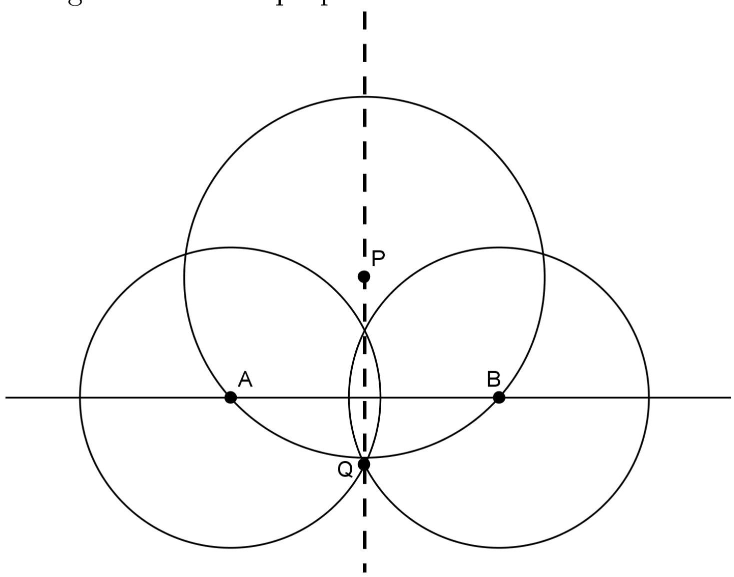
Para determinar $s$ basta seguir os passos abaixo:

I) Com o compasso traça-se uma circunferência com centro em $P$ e raio maior do que a distância de $P$ a $r$, intersectando a reta $r$ nos pontos $A$ e $B$.

II) Traça-se duas circunferência de mesmo raio, uma com centro no ponto $A$ e a outra com centro no ponto $B$, determinando na interseção o ponto $Q$.

III) Com a régua traça-se uma reta por $P$ e $Q$. A reta $PQ$ é a reta $s$ procurada. Ver Figura 5.2.

Figura 5.2: Reta perpendicular a uma reta dada




**Justificativa**. Note que a primeira circunferência desenhada garante que $\overline{PA} = \overline{PB}$ e as duas seguintes, garantem que $\overline{QA} = \overline{QB}$ . Assim, os pontos $P$ e $Q$ equidistam de $A$ e $B$. Portanto, eles pertencem à mediatriz do segmento $AB$ que é a reta perpendicular a $AB$ passando pelo seu ponto médio.

Observação: se o ponto $P$ pertencer a reta $r$ ele será o ponto médio de $A$ e $B$.

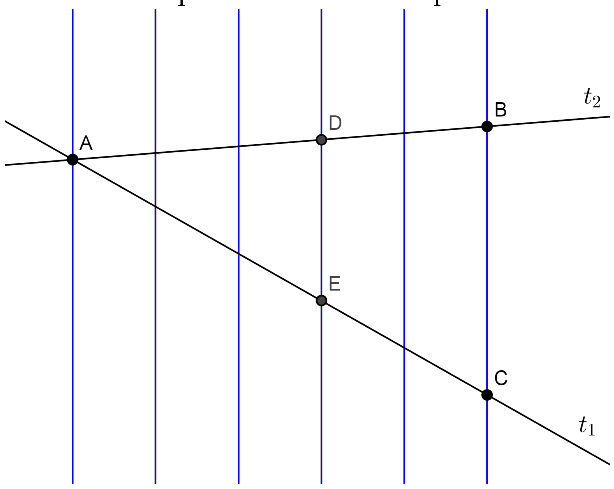
### 5.1.2 Divisão de segmentos

O Teorema de Tales pode ser aplicado para dividir segmentos em partes iguais ou proporcionais, determinar graficamente frações de segmentos, razões entre segmentos e determinar graficamente a terceira e a quarta proporcional entre segmentos.

O Teorema de Tales diz:

"Um feixe de retas paralelas determina sobre duas retas transversais quaisquer, segmentos correspondentes proporcionais".

Figura 5.3: Feixe de retas paralelas cortadas por duas retas transversais




Na figura 5.3, as retas em azul são paralelas entre si e $t_1$ e $t_2$ são retas transversais. Pelo Teorema de Tales, temos:

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}$$

Lê-se: $\overline{AD}$ está para $\overline{AB}$ assim como $\overline{AE}$ está para $\overline{AC}$.

## Dividindo segmentos em partes iguais:

Utilizando o Teorema de Tales podemos dividir graficamente um segmento em um número qualquer de partes iguais.

Para dividir um segmento em partes iguais, devemos:

a) considerar o segmento que se quer dividir, $AB$, contido na transversal $t_1$.

b) a segunda transversal $t_2$ deve começar em uma das extremidades do segmento $AB$, formando um ângulo agudo qualquer.

Figura 5.4: Segmento AB

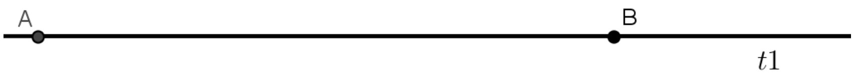
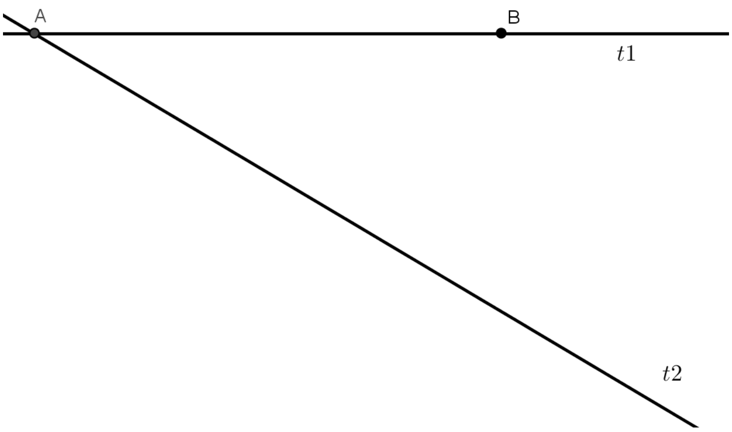
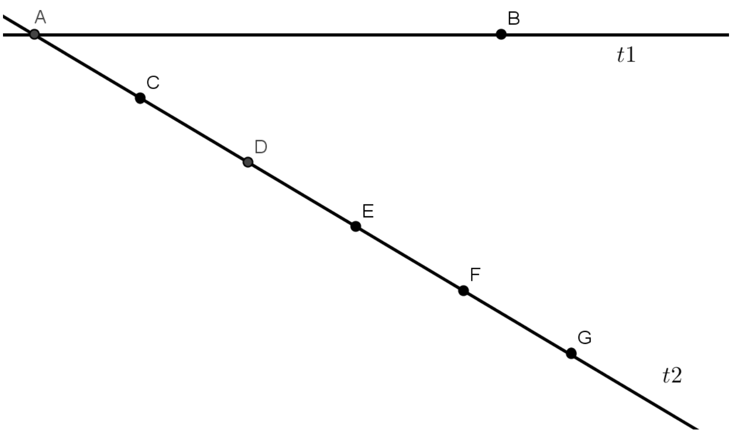



Figura 5.5: Reta transversal ao segmento AB




c) graduar, utilizando uma unidade de medida arbitrária, a segunda transversal $t_2$ a partir da extremidade inicial $A$ o número de vezes em que se quer dividir segmento dado (cinco vezes, por exemplo). Ver Figura 5.6.

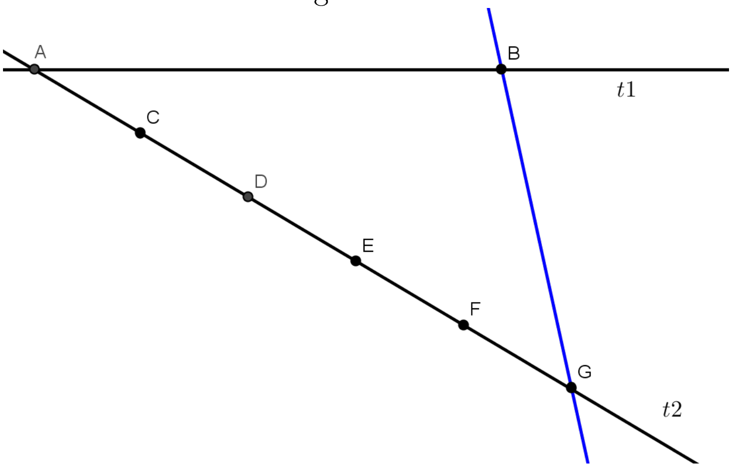
Figura 5.6: Graduação da reta transversal ao segmento AB




d) ligar a ultima marcação de $t_2$, $G$, a segunda extremidade do segmento que se quer dividir, $B$. Segmento que dá a direção das paralelas.

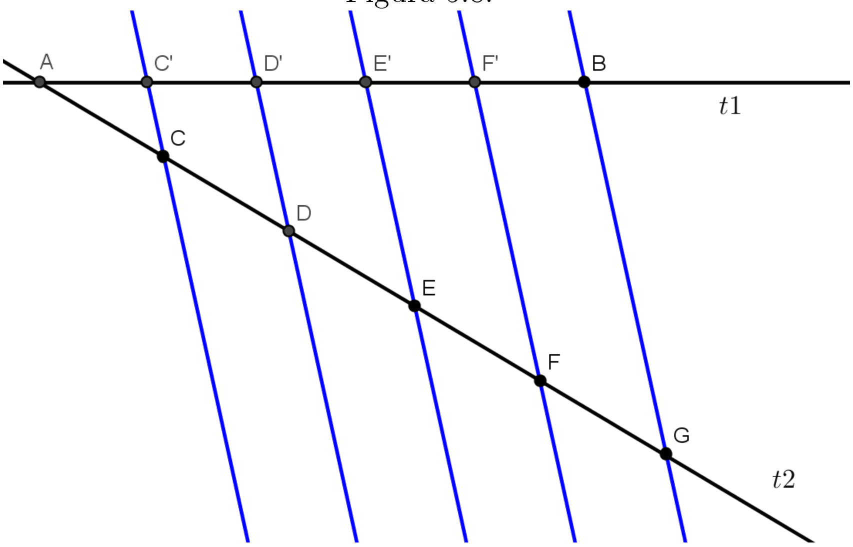
e) traçar paralelas ao segmento $GB$, passando pelos pontos $C, D, E$ e $F$. Se o traçado estiver correto, o segmento $AB$ estará dividido em 5 partes iguais, pois em $t_2$ foram

Figura 5.7:




marcados cinco segmentos colineares, consecutivos e congruentes. Os segmentos determinados em $AB$ são proporcionais aos marcados em $t_2$, $(\overline{AC} \equiv \overline{CD} \equiv \overline{DE} \equiv \overline{EF} \equiv \overline{FG})$, logo $(\overline{AC'} \equiv \overline{CD'} \equiv \overline{DE'} \equiv \overline{EF'} \equiv \overline{FB})$. Ver Figura 5.8.

Figura 5.8:




## 5.2 Com o GeoGebra

O GeoGebra[1] é um software gratuito de matemática dinâmica desenvolvido para o ensino e aprendizagem da matemática nos vários níveis de ensino (do básico ao universitário) que

[1] O leitor interessado pelo programa pode acessar o endereço http://www.geogebra.org/cms/pt_BR/download/ e, em seguida, fazer o download da versão do GeoGebra de acordo com o seu sistema operacional.

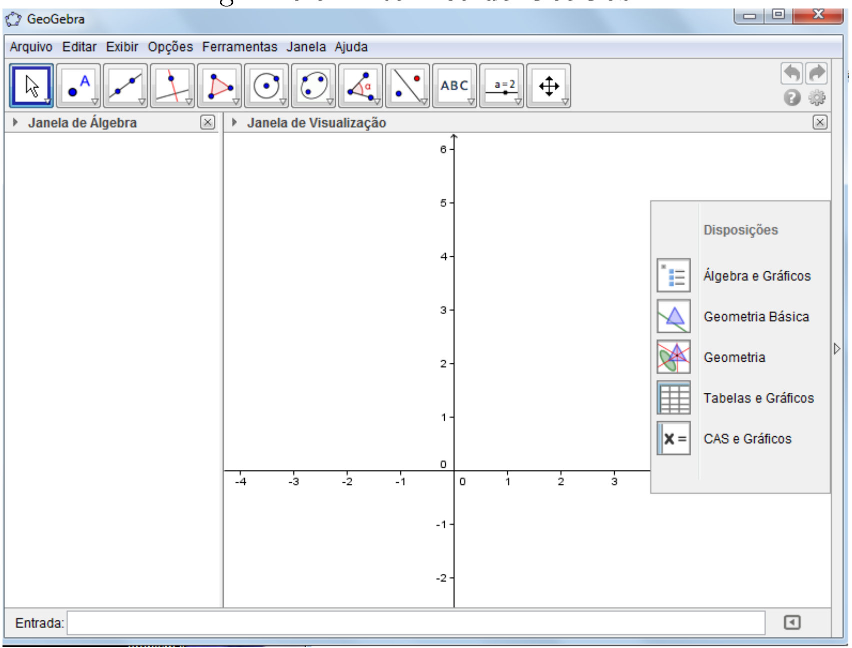
reúne recursos de geometria, álgebra, tabelas, gráficos, probabilidade, estatística e cálculos simbólicos em um único ambiente. Assim, o GeoGebra tem a vantagem didática de apresentar, ao mesmo tempo, representações diferentes de um mesmo objeto que interagem entre si. Foi criado em 2001 como tese de Markus Hohenwarter e a sua popularidade tem crescido desde então.

Faremos as mesmas construções apresentadas anteriormente. O leitor perceberá que o manuseio deste software é bastante fácil.

### 5.2.1 Interface

A Figura 5.9 mostra a interface do programa ao ser carregado.

Figura 5.9: Interface do GeoGebra




**Barra de Menus.** Disponibiliza opções para salvar o trabalho e para controlar configurações gerais.

**Barra de ícones.** Localizada na parte superior é composta de doze ícones que concentra todas as ferramentas úteis para construir pontos, retas, figuras geométricas, obter medidas de objetos construídos, entre outros. Cada ícone dessa barra esconde outros ícones que podem ser acessados clicando com o mouse em seu canto inferior direito.

**Janela de Álgebra.** Área em que é exibida as coordenadas, equações, medidas e outras informações dos objetos construídos

**Entrada.** Campo de entrada para digitação de comandos, por exemplo, equação de uma reta, circunferência, um ponto, etc.

**Janela de Visualização.** Área de visualização gráfica de objetos que possuam representação geométrica e que podem ser desenhados com o mouse usando ícones da Barra de ícones ou comandos digitados na Entrada.

### 5.2.2 Construções no GeoGebra

Para realizar uma construção basta selecionar a ferramenta necessária na Barra de ícones ou digitar as informações na caixa de Entrada. Considere os seguintes problemas:

**Retas paralelas** Dada uma reta $r$ e um ponto $P$ fora de $r$ determinar, por $P$, uma reta $s$ paralela a reta $r$.

Para construir a reta $s$, basta seguir os passos abaixo:

I) Selecione a ferramenta Reta definida por Dois Pontos.

II) Clique em qualquer região da janela de visualização para marcar um dos pontos $A$ da reta, depois arraste o mouse e clique em um local distinto de $A$, marcando assim o ponto $B$, determinando a reta $r$.

III) Selecione a ferramenta Novo Ponto, clique numa região da janela de visualização fora da reta $r$ para determinar o ponto $P$.

IV) Selecione a ferramenta Reta Paralela. Clique no ponto $P$ e depois na reta $r$.

Figura 5.10: Passo I)

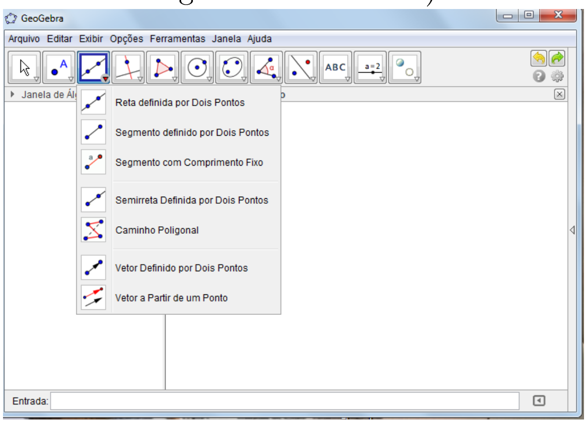



Figura 5.11: Passo II)

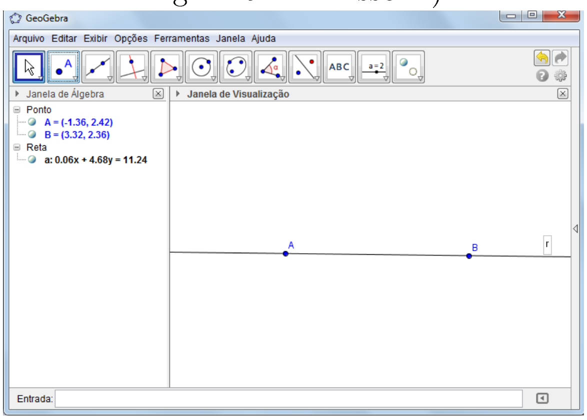


Figura 5.12: Passo III)

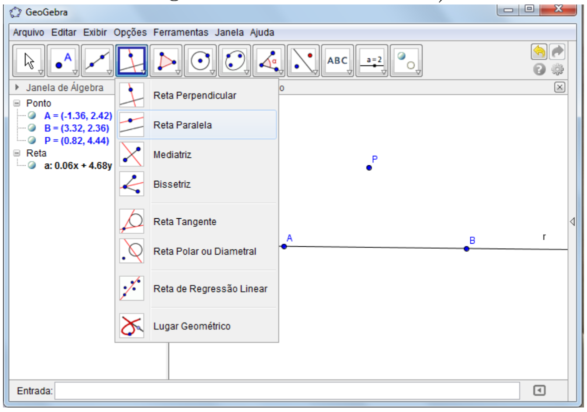
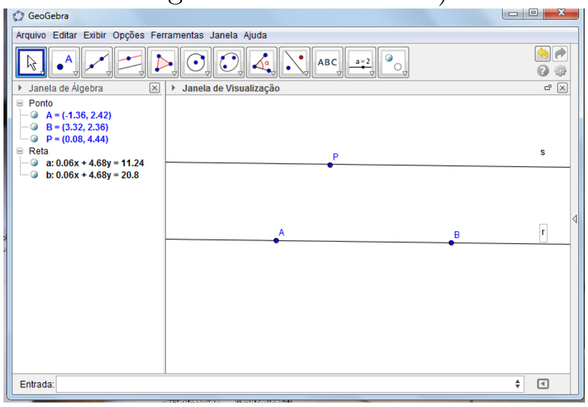



Figura 5.13: Passo IV)




## Retas perpendiculares

Dada uma reta $r$ e um ponto $P$ fora de $r$ determinar por $P$ uma reta $s$ perpendicular a reta $r$.

Para construir a reta $s$, basta seguir os passos I), II) e III) que mostramos para determinar uma reta paralela a $r$ e no passo IV) Selecione a ferramenta Reta perpendicular. Clique no ponto $P$ e depois na reta $r$.

Figura 5.14: Perpendicular: passo III)

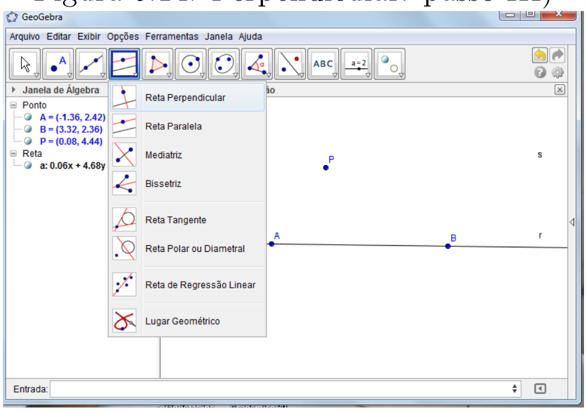
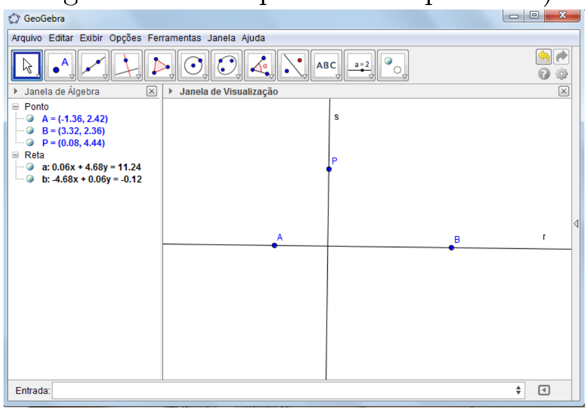



Figura 5.15: Perpendicular: passo IV)




## Divisão de segmentos

Para dividir um segmento $AB$ em $n$ parte iguais. Basta seguir os passos abaixo:

I) Selecione a ferramenta Reta definida por Dois Pontos, clique na janela de visualização para marcar os pontos $A$ e $B$, denote essa reta de $t_1$

II) Novamente, selecione a ferramenta Reta definida por Dois Pontos, clique no ponto $A$ depois arraste o mouse e clique na região (próximo ao ponto $A$) fora da reta $t_1$ para marcar um ponto $C$ e denomine a reta $AC$ de $t_2$.

III) Para graduar a reta $t_2$ adotando o segmento $\overline{AC}$ como unidade de medida, selecione a ferramenta Reflexão em Relação a um Ponto. Clique no ponto $A$ depois no ponto $C$, determinando um ponto $D$ em que $\overline{AC} \equiv \overline{CD}$, clique no ponto $C$ depois no ponto $D$ determinando um ponto $E$ em que $\overline{AC} \equiv \overline{CD} \equiv \overline{DE}$. Faça isso $n-1$ vezes, sendo $n$ a quantidade de parte que se deseja dividir $AB$.

IV) Selecione a ferramenta Reta definida por Dois Pontos, clique no ultimo ponto $G$ da reta $t_2$ e no ponto $B$.

V) Selecione a ferramenta Reta Paralela, clique no ponto $C$ depois na reta $GB$, clique no ponto $D$ depois na reta $GB$, trace paralelas a $GB$ passando por cada ponto de subdivisão da reta $t_2$.

VI) Selecione a ferramenta Interseção de Dois Objetos, clique no segmento $AB$ e em uma das reta paralelas a $GB$ determinando pontos $C', D', E', \cdots$ sobre o segmento $AB$ que caracterizarão a divisão deste segmento.

Figura 5.16: Divisão: passo I) a III)

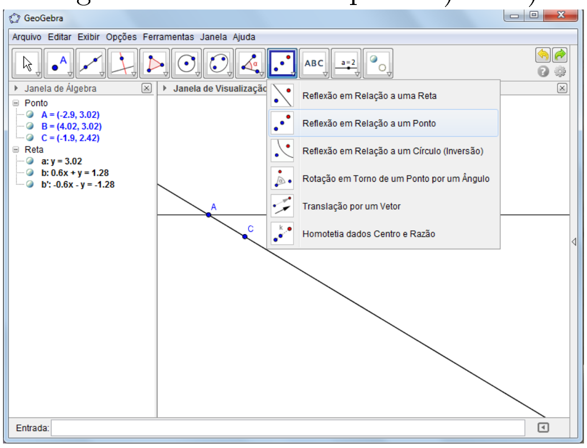


Figura 5.17: Divisão: passo IV)

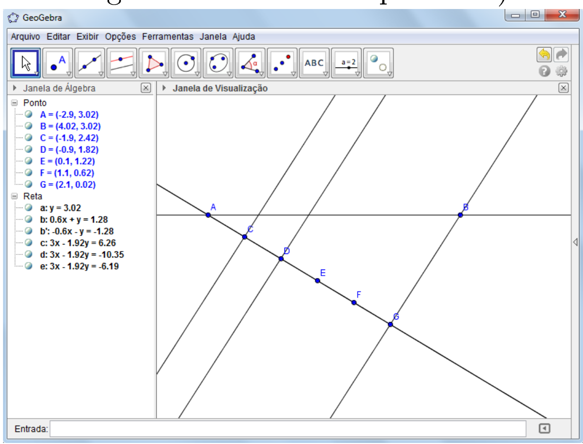


Figura 5.18: Divisão: passo V)

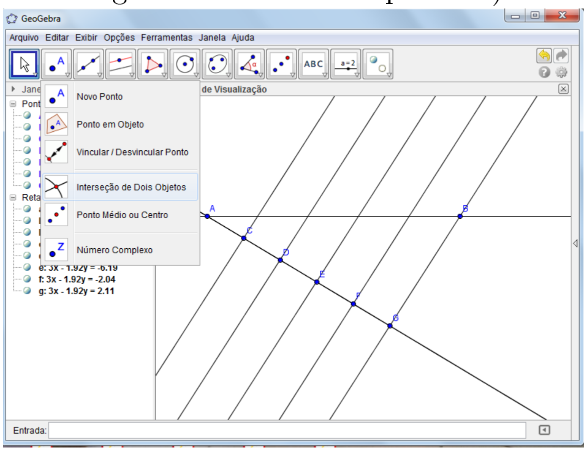
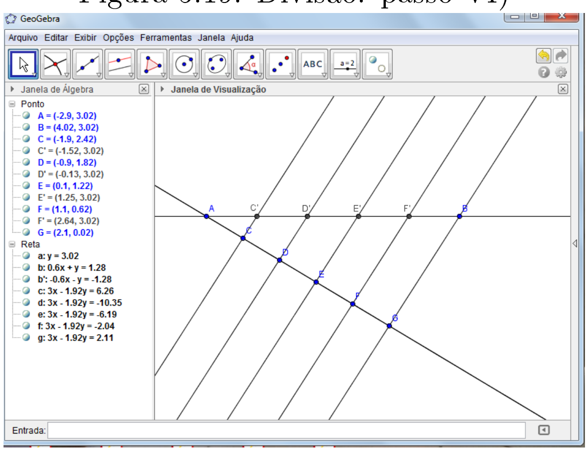



Figura 5.19: Divisão: passo VI)



# Considerações finais

O conjunto dos números reais permeia a maioria dos conteúdos em Matemática daí a importância de compreender bem o conceito desses números. Esta proposta de trabalho surgiu da preocupação com a compreensão e a interpretação desses números, especialmente os irracionais, com objetivo de propor um caminho que contribuísse para aprendizagem desse tema.

Podemos notar, com base na evolução histórica, que o conceito dos números reais não é tão simples. Desde a "descoberta" pelos pitagóricos dos segmentos incomensuráveis até a construção dos números reais por Dedekind se passaram cerca de 25 séculos. Acreditamos que o ensino desses números como números que representam a medida de quaisquer grandeza, trabalhar o conceito de incomensurabilidade, poderá facilitar a aprendizagem deste conteúdo.

Aprendemos que nem sempre a parte é menor do que o todo e que enquanto os números racionais são enumeráveis, os irracionais não o são, surgindo aí um resultado interessante de que existe infinitos de "tamanhos" diferentes.

Espero ter contribuído com o professor da Educação Básica, no sentido de apresentar uma alternativa para trabalhar os números reais. Uma possível continuação deste trabalho seria a elaboração de uma sequência didática de atividades para o ensino dos números números reais sob uma perspectiva geométrica, juntamente com os professores do Ensino Básico, viabilizando a sua aplicação aos seus alunos.

# Bibliografia


[1] BARTLE, Robert G. Elementos de Análise Real/ Robert G. B.; tradução de Alfredo A de F. Rio de Janeiro: Campus, 1983.(Páginas 16-58).

[2] BERLINGHOFF, William P. A Matemática através dos tempos: um guia fácil e prático para professores e entusiastas/ William P. Berlinghoff; Fernando Q. Gouvêa; tradução: Elza Gomida, Helena Castro. 2ª ed. São Paulo: Blucher, 2010.

[3] BONGIOVANNI, Vincenzo. As duas maiores contribuições de Eudoxo de Cnido - a teoria da proporções e o método da exaustão. Revista Iberoamericana de Educacíon Matemática.2005, Nº 2. (páginas 91-110).

[4] Brasil. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros curriculares nacionais, terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental: Matemética / Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC /SEF, 1998. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf Último acesso 27 de julho de 2015.

[5] CARAÇA, B. de J. Conceitos Fundamentais da Matemática. 2º ed. Lisboa: Gravida, 1998.

[6] DEWDNEY, A. K. 20.000 Léguas Matemáticas: Um passeio pelo misterioso mundo dos números./ A. K. Dewdney; tradução: Vera Ribeiro; revisão: Vitor Tinoco. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Ed., 2000.

[7] DOMINGUES, Hygino H. Fundamentos de aritmética. São Paulo: Atual, 1991.

[8] EVES, Howard. Introdução à História da Matemática/ Howard Eves; tradução: Hygino H. Domingues. 1ª ed. Campinas: UNICAMP, 2004.

[9] FERREIRA, M. C. C.; MOREIRA, P. C.; SOARES, E. F. E. Números reais: Concepções dos Licenciandos e Formação Matemática na Licenciatura. Zetetiké, Campinas, v. 7, n.12, p. 95–117, jul/dez. 1999. Disponível em: file:///C:/Users/cce/Downloads/Reais_SPEC_ZET-2009.pdf Último acesso em 30 de julho de 2015.

[10] FIGUEIREDO, Djairo G. Números irracionais e transcendentes. 3. Ed. Rio de Janeiro: SBM, 2011.

[11] GEQUELIM, H. F. Axiomas de Peano e os Números Naturais. Curitiba: UTFPR, 2012. Disponível em: http://conferencias.utfpr.edu.br/ocs/index.php/sicite/2012/paper/viewFile/971/492

[12] GUEDJ, Denis. O Teorema do Papagaio./Denis Guedj; tradução Eduardo Brandão. São Paulo: Companhia das Latras, 1999.

[13] IFRAH, Georges. História Universal dos Algarismos: a inteligência dos homens contada pelos números e pelo cálculo. Volume 1. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1997.

[14] KUBRUSLY, Ricardo S.. O Tamanho do Infinito. Disponível em: http://www.dmm.im.ufrj.br/projeto/diversos/tamanho.html Ultimo acesso em 10 de julho de 2015.

[15] LIMA, Elon Lages. A Matemática do Ensino Médio - Volume 1. 9ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[16] LIMA, Elon Lages. Curso de Análise. vol. 1. 14 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2012. (Páginas 1-87).

[17] LIMA, Elon Lages. Números e Funções Reais. 1ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[18] MANFIO, Fernando. Fundamentos da Geometria. São Paulo: ICMC - USP. Disponível em: http://www.icmc.usp.br/pessoas/manfio/Fundamentos.pdf Ultimo acesso 12 de julho de 2015.

[19] MELO, Severino B. de. A compreensão do conceito de números irracionais e sua história: um estudo junto a alunos dos cursos de ciências exatas. Revista Symposium. Ano 3. nº 1. pág 27-36

[20] PENTEADO, C. B. Concepção do professor do Ensino Médio relativas à densidade do conjunto dos números reais e suas reações frente a procedimentos para a abordagem desta propriedade. Dissertação de Mestrado. São Paulo: Faculdade de Educação-USP, 2004.

[21] REIS, G. L. dos; SILVA, V. V. da. Geometria Analítica. 2ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 1996.

[22] SANTOS, Almir R. S.; VIGLIONI, Humberto H. de B. Geometrica Euclidiana Plana. Aracaju: UFS, 2011.

[23] WAGNER, Eduardo. Uma Introdução às Construções Geométricas. Rio de Janeiro: SBM, 2009.