UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
REDE NACIONAL - PROFMAT

RAFAEL MESSIAS SANTOS

FUNDAMENTOS DE LÓGICA, CONJUNTOS E NÚMEROS NATURAIS

SÃO CRISTÓVÃO–SE
2015

RAFAEL MESSIAS SANTOS

FUNDAMENTOS DE LÓGICA, CONJUNTOS E NÚMEROS NATURAIS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Jose Anderson Valença Cardoso

SÃO CRISTÓVÃO–SE
2015

FICHA CATALOGRAFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

	Santos, Rafael Messias
S237f	Fundamentos de lógica, conjuntos e números naturais / Rafael Messias Santos ; orientador Jose Anderson Valença Cardoso. – São Cristóvão, 2015.
	120 f. : il.
	Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Sergipe, 2015.
	1. Lógica simbólica e matemática. 2. Números naturais. 3. Teoria dos conjuntos. 4. Proposição (Lógica). I. Cardoso, Jose Anderson Valença, orient. II. Título.
	CDU 510.65

Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Fundamentos de Lógica, Conjuntos e Números Naturais
por

Rafael Messias Santos

Aprovada pela Banca Examinadora:

José Anderson V. Cardoso

Prof. Dr. José Anderson Valença Cardoso- UFS
Orientador

Almir Rogério Silva Santos

Prof. Dr. Almir Rogério Silva Santos- UFS
Primeiro Examinador

Crislene Santos da Paixão

Prof^a. Dr^a. Crislene Santos da Paixão- IFS
Segundo Examinador

São Cristóvão, 28 de agosto de 2015.

Cidade Universitária "Prof. José Aloísio de Campos" – Av. Marechal Rondon, s/no - Jardim Rosa Elze – Campus de São Cristóvão. Tel. (00 55 79) 2105-6887
CEP: 49100-000 - São Cristóvão – Sergipe - Brasil – E-mail: promat.ufs@gmail.com

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus por sempre iluminar meus caminhos e decisões. Só tenho que agradecer, todos os dias.

À minha esposa Priscila Mendonça Moura, grande companheira que soube tolerar minhas irritações e estresses nos momentos mais difíceis desses dois anos e meio de mestrado e contribuiu bastante, ajudando-me muito, tanto do ponto de vista psicológico quanto intelectual com todo seu conhecimento em Letras Português.

À minha filha Nathália Mendonça Moura Santos, que nascera aproximadamente há um ano, minha "força-motriz", razão pela qual passei tudo que passei nesse longo período do mestrado.

Aos meus pais Manoel Messias Santos e Maria de Lourdes Santos, que me deram, e muito bem, o melhor presente de todos: a educação, portanto, a oportunidade de ser alguém na vida. Tenho muito orgulho deles!

Aos meus irmãos Thiago Messias Santos e Luciana Santos, que sempre torceram e torcem por mim.

À minha sogra Maria José Mendonça Moura, que sempre me ajudou no que pôde e sempre comemorou minhas conquistas.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Jose Anderson Valença Cardoso, ao qual sou muito grato, pois sem ele todo este trabalho não seria possível.

Aos professores, Crislene Santos da Paixão e Almir Rogério Silva Santos por aceitarem o convite de participar da minha banca examinadora e pelas interferências pertinentes ao meu trabalho.

Aos professores Allyson, Almir Rogério, Danilo Dias, Danilo Felizardo, Débora Lopes, Evilson, Humberto Henrique, Jose Anderson, Kalasas, Leandro Favacho, Lucas Valeriano, Naldisson e Romero pela dedicação e empenho em compartilharem seus conhecimentos.

A todos os colegas da turma do PROFMAT-2013, pelos muitos momentos que estivemos juntos estudando e pelas amizades conquistadas, afinal, é o que vale a pena!

À SBM (Sociedade Brasileira de Matemática), pela excelente iniciativa de promover um mestrado voltado para professores da Educação Básica.

À CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior), pela concessão da bolsa de estudos que foi de fundamental importância para o desenvolvimento deste mestrado profissionalizante.

E a todos que direta ou indiretamente contribuíram para a elaboração e conclusão deste trabalho.

Resumo

O presente trabalho tem como principal objetivo abordar os fundamentos de lógica e as noções de conjuntos de maneira estreita e elementar, culminando na construção dos números naturais. Apresentamos, e progredimos na medida do possível, de forma natural e/ou intuitiva, os conceitos de proposições e proposições abertas, e o uso destes nas especificações de conjuntos, de acordo com o axioma da especificação. Apresentamos também os conectivos lógicos de proposições abertas e as equivalências lógicas, relacionando-os aos conjuntos. Mostramos o conceito de Teorema, bem como algumas formas de escritas e demonstrações no âmbito dos conjuntos, e utilizamos propriedades e relações de conjuntos nas técnicas de demonstração. Encerramos nosso estudo com a construção dos números naturais e algumas das suas principais propriedades, como por exemplo, a Relação de Ordem.

Palavras-chaves: Noções de Lógica. Equivalências Lógicas. Noções de Conjuntos. Especificações de Conjuntos. Teoremas. Técnicas de Prova. Números Naturais. Axiomas de Peano.

Abstract

The present work has as main objective to approach the fundaments of logic and the notions of sets in a narrow and elementary way, culminating in the construction of natural numbers. We present and advance, as far as possible, natural and intuitively, the concepts of propositions and open propositions, and the use of these in the specification sets, according with the axiom of the specification. We also present the logic connectives of open propositions and logic equivalences, relating them to the sets. We showed the concept of Theorem, as well as some forms of writing and demonstrations in the scope of the sets, and we used properties and relations of sets in the demonstration techniques. Our study ended with the construction of natural numbers and some of its properties, for example, the Relation Order.

Keywords: Logic Notions. Equivalents Logic. Notions of Sets. Specifications of Sets. Theorems. Techniques of Proof. Natural Numbers. Axioms of Peano.

Sumário

Introdução

No Ensino Médio, o Programa Curricular de Matemática não contempla os Fundamentos de Lógica, apesar de alguns conceitos da mesma aparecerem nos livros didáticos sem uma prévia explicação. Por exemplo, um aluno do primeiro ano do Ensino Médio, depara-se com a seguinte definição de logaritmo:

> *"Dados os números reais positivos a e b, com $a \neq 1$, $b = a^c$, então o expoente c chama-se logaritmo de b na base a, ou seja:* $\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$*, com a e b positivos e $a \neq 1$"* (ver [2, p. 261]).

O estudante não perceberá a presença explícita dos conectivos: *condicional*; e *se, e somente se*; muito menos entenderá a equivalência que há entre o logaritmo e a exponencial presentes na definição. Outros problemas encontrados na aprendizagem matemática são o uso de símbolos e palavras que não são do cotidiano. Expressões como: *está contido*, *subconjunto*, *inclusão*, entre outras, que são próprias da linguagem de conjuntos, não são utilizadas no cotidiano das pessoas. Tal linguagem, universalmente adotada na apresentação da Matemática nos dias atuais, ganhou esta posição porque permite dar aos conceitos e às proposições desta ciência a precisão e a generalidade que constituem sua característica básica. Os conjuntos substituem as "propriedades" e as "condições". Assim, em vez de dizermos que "o elemento x goza da *propriedade* P" ou "o elemento y satisfaz a *condição* C", podemos escrever $x \in A$ e $y \in B$, onde A é o conjunto dos elementos que gozam da *propriedade* P e B é o conjunto dos elementos que satisfazem a *condição* C, por exemplo (ver [5]).

Ingressando na universidade, a maioria de nossos alunos se choca ao deparar-se com o formalismo e a abstração, requeridas por algumas das primeiras disciplinas de Matemática. O choque decorre, principalmente, da carência na formação dos alunos, dos professores e de um Ensino Médio que, na maioria das vezes, não lhes fornece um preparo adequado e nem lhes treina para usar o raciocínio lógico-dedutivo, o qual posteriormente será cobrado. Cremos que quanto mais cedo um estudante tiver acesso aos conceitos lógicos, mais facilmente construirá o raciocínio matemático.

Resultados matemáticos devem ser expressos com a exatidão necessária que exigem. Na linguagem matemática não há lugar para ambiguidades, para figuras de linguagem ou para metáforas, tão comuns e, até mesmo, apreciadas na linguagem coloquial ou literária. No dia a dia, quando alguém diz a frase: *"Chegarei em um minuto!"*, significa que chegará em pouco tempo. Já na Matemática, um minuto representa um minuto mesmo, isto é, sessenta segundos. Se perguntarmos aos alunos:

"Vocês fizeram todo o exercício?", grande parte responderá "Sim, só falta uma questão". Esse fato e muitos outros atrapalham, por exemplo, a formação do conceito de inclusão (note que a palavra "todo" não exclui nenhum elemento).

A partir dos simples exemplos citados, pode-se perceber que na Matemática as mensagens devem ser expressas com linguagem e cuidados específicos, muitas vezes, diferentes daqueles aos quais costumamos utilizar e interpretar na linguagem coloquial. Não é à toa que a Matemática é uma ciência exata e funciona de tal forma.

O principal objetivo neste trabalho é ampliar a literatura que versa sobre os fundamentos básicos da lógica e busca apresentar uma abordagem dos conceitos básicos como eles são realmente tratados por quem estuda Matemática. Para sua leitura, basicamente não é necessário pré-requisito matemático. Buscamos elaborar um texto o mais autocontido possível.

O presente trabalho está dividido em três capítulos. No primeiro capítulo apresentamos conceitos introdutórios que ajudam a entender como são organizadas as teorias matemáticas. Juntamente com as noções de conjuntos, os principais conceitos lógicos vão sendo gradativamente apresentados e o leitor é levado a compreender a lógica ao mesmo tempo que é levado a conhecer os conceitos básicos de conjuntos, evitando assim uma desconexão dos assuntos. Essencialmente, buscamos *"conhecer os conceitos de conjuntos para estudar a lógica e ao mesmo tempo, conhecer a lógica para estudar os conceitos de conjuntos"*. O segundo capítulo trata dos métodos de prova clássicos que a lógica naturalmente proporciona, a saber, estudamos os métodos direto, da contrapositiva, da contradição, etc. Esses métodos compõem um ferramental necessário a construção e estudo das principais propriedades básicas dos números naturais. O terceiro e último capítulo do nosso trabalho é dedicado à construção dos Números Naturais e ao estudo de suas principais propriedades.

Capítulo 1

Noções de Lógica e Conjuntos

Pode-se afirmar que praticamente toda a Matemática atual é formulada na linguagem de conjuntos. Não há receio em dizer que a noção de conjunto é uma das mais fundamentais da matemática. A partir dela, praticamente todos os conceitos matemáticos podem ser expressos. Heurística e intuitivamente falando, ela é também uma da mais simples idéias da matemática.

1.1 Conceitos Introdutórios

Na apresentação de uma teoria matemática, toda definição faz uso de termos específicos, os quais foram definidos usando outros termos, e assim sucessivamente. Este processo iterativo termina numa *palavra*, ou *conjunto de palavras*, que não são definidas, isto é, que são tomadas como representativas de *conceitos primitivos*.

Para poder empregar os *conceitos primitivos* adequadamente é necessário dispor de um conjunto de princípios ou regras que disciplinem sua utilização e estabeleçam suas propriedades. Tais princípios são chamados *axiomas* ou *postulados*. Assim, como os conceitos primitvos são objetos que não se definem, os axiomas são afirmações que não se demonstram.

Antes de começarmos nosso estudo, faz-se necessário o entendimento de alguns conceitos importantes na matemática, tais como: *conceito primitivo*, *axioma* e *definição*.

- Um **Conceito Primitivo** é um conceito adotado e não-definido.
  Exemplos: Pontos, Retas e Planos.

- Um **Axioma** é uma afirmação simples sobre conceitos primitivos que é aceita como verdadeira.
  Exemplo: Dados dois pontos distintos, pode-se traçar uma única reta passando por eles (Primeiro Axioma da Geometria Euclidiana).

- Uma **Definição Matemática** é uma convenção que consiste em usar um "nome" para designar um objeto mediante determinadas propriedades que o caracteri-

zem e o identifiquem plenamente.
Exemplo: Um triângulo é **Isósceles** quando possui dois lados de mesmo comprimento (Definição de Triângulo Isóceles).

Observação 1.1.1. *Precisa-se ressaltar que os Termos Primitivos e os Axiomas não se firmam por opiniões isoladas pessoais. Eles são frutos da experiência, da observação e de um certo "consenso coletivo".*

1.1.1 Noção de Conjunto

O conceito matemático de um *conjunto* pode ser usado como fundamento para todo conhecimento matemático. Assim como não somos capazes de definir precisamente na geometria Euclidiana os conceitos de ponto, reta e plano, por exemplo, também não somos capazes de definir precisamente o conceito de *Conjunto*. Mesmo não definido rigorosamente, podemos admitir a seguinte definição intuitiva dada por Georg Cantor (1845-1918):

Um *Conjunto* é qualquer coleção, dentro de um todo de objetos definidos e distinguíveis, chamados *Elementos*, de nossa intuição ou pensamento.

Exemplo 1.1.2. *Exemplos de conjuntos:*

a) O conjunto das vogais: a, e, i, o e u;

b) O conjunto de todas as cadeiras de uma sala de aula;

c) O conjunto de todos os estudantes paulistas da UFS;

Comumente representamos os conjuntos através de letras maiúsculas,

$$A, B, C, \ldots$$

e os elemtentos por letras minúsculas

$$a, b, c, \ldots.$$

Em casos específicos como no item a) do exemplo anterior, podemos escrever

$$V = \{a, e, i, o, u\},$$

onde V representa o conjunto das vogais.

Exemplo 1.1.3. *Naturalmente podemos ter conjuntos que possuem elementos que também são conjuntos. Por exemplo,*

$$D = \{a, i, o, \{e, o, u\}, \{o, \{a, i\}\}, e\}.$$

Observe que, da mesma forma que i é elemento de D, temos $\{e, o, u\}$ um elemento de D. Note ainda que u não é elemento de D, assim como $\{a, i\}$ também não é elemento de D.

Relação de Pertinência

Um dos conceitos primitivos mais importantes no estudo dos conjuntos é o conceito de *Pertinência*. Quando um "objeto" a é elemento do conjunto A, dizemos que a pentence a A e denotamos tal conceito por

$$a \in A.$$

Caso contrário, denota-se

$$a \notin A$$

e diz-se que *a não pertence* ao conjunto A.

Exemplo 1.1.4. *Exemplos de pertinências:*

a) Como V denota o conjunto das vogais, $V = \{a,\ e,\ i,\ o,\ u\}$, temos:

$$a \in V, \quad e \in V, \quad i \in V, \quad o \in V, \quad u \in V;$$

já

$$b \notin V \quad e \quad t \notin V.$$

b) O conjunto de todos os alunos da UFS pode ser representado por

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$$

onde n é o número de alunos da UFS. Então, temos:

$$a_1 \in A,\ a_2 \in A,\ \ldots,\ a_{n-1} \in A \text{ e } a_n \in A.$$

Se b representa o ex-presidente Getúlio Vargas, então $b \notin A$.

c) Do exemplo 1.1.3 onde

$$D = \{a, i, o, \{e, o, u\}, \{o, \{a, i\}\}, e\}$$

temos:

$$a \in D, \quad i \in D, \quad \{e, o, u\} \in D, \quad \{o, \{a, i\}\} \in D, \quad e \in D;$$

já

$$u \notin D \quad e \quad \{a, i\} \notin D.$$

Notação 1.1.5. *Podemos denotar*

$$a_1 \in A,\ a_2 \in A,\ \ldots,\ a_{n-1} \in A \text{ e } a_n \in A,$$

simplesmente por:

$$a_1, a_2, \ldots, a_n \in A.$$

Igualdade de Conjuntos

Dizemos que dois conjuntos A e B são *iguais*[1] quando possuem os mesmos elementos e denotamos

$$A = B. \tag{1.1}$$

Exemplo 1.1.6. *Sendo $A = \{a, b, c, d\}$ e $B = \{d, b, b, b, c, c, a\}$, temos:*

$$A = \{a, b, c, d\} = \{d, b, b, b, c, c, a\} = B.$$

Observação 1.1.7. *Na matemática, uma coisa só é igual a si própria. Quando se escreve $a = b$, isto significa que a e b são símbolos diferentes, usados para designar o mesmo objeto.*

A ordem em que aparecem os elementos no conjunto não tem importância. Assim, usando o Exemplo 1.1.6, temos que o conjunto $A = \{a, b, c, d\}$ é o mesmo que $B = \{d, c, c, b, b, b, a\}$. Além disso, como os elementos de um conjunto são "distintos", o conjunto $\{d, b, b, b, c, c, a\}$ não é uma notação apropriada, devendo a mesma ser substituída por $\{a, b, c, d\}$.

Observação 1.1.8. *Neste ponto é útil fazer as seguintes observações:*

a) *Quando escrevemos*

$$\{a_1, a_2, \cdots, a_n\},$$

estamos admitindo que os elementos $a_1, a_2, \cdots, a_n$ são todos distintos. Com isso, evitamos escrever, por exemplo, $\{a, a, i, o\}$; e, portanto, nesse caso devemos escrever $\{a, i, o\}$, como anteriormente observado.

b) *Se a é elemento de um conjunto, note que a e $\{a\}$ são "objetos" distintos pois, enquanto a é um elemento, $\{a\}$ é um conjunto que possui a como elemento. Da mesma forma, temos que a, $\{a\}$ e $\{\{a\}\}$ são todos "objetos" distintos, pois $\{a\}$ apesar de ser um conjunto, ele é um elemento de $\{\{a\}\}$.*

Notação 1.1.9. *Se os conjuntos A e B não são iguais, dizemos que eles são* diferentes *e denotamos por*

$$A \neq B.$$

Exemplo 1.1.10. *Considere as vogais* a, e, i, o *e* u. *Note que os conjuntos*

$$A = \{\text{e, i}\} \qquad e \qquad B = \{\text{e, i, u}\}$$

não são iguais. Assim, $A \neq B$.

Observação 1.1.11. *Observe que o conjunto A ser diferente do conjunto B significa que há algum elemento em A que é diferente de todos os elementos de B, ou que existe algum elemento em B que é diferente de todos os elementos de A. Note que no caso do Exemplo 1.1.10, a vogal u do conjunto B é diferente de todas as vogais do conjunto A.*

[1] Na teoria axiomática de conjuntos, esse conceito é conhecido como Axioma da Extensão

1.1.2 Produto Cartesiano de Conjuntos

Com um ou mais elementos no conjunto, existem várias formas de criar novos "objetos" (elementos) que dão origem a outros conjuntos. Uma dessas formas é usando o conceito de *Par Ordenado*, que podemos introduzir do seguinte modo heurístico:

> dados dois elementos quaisquer x e y em conjuntos, podemos formar um novo elemento ("objeto") chamado Par Ordenado "xy", que denotamos por (x, y).

A forma precisa de definir um par ordenado[2] foge do contexto de interesse neste momento. É necessário não confundir o par ordenado (a, b) com o conjunto $\{a, b\}$. O adjetivo "ordenado" enfatiza aqui que a ordem na qual os elementos a e b aparecem entre os parênteses é essencial.

Observação 1.1.12. *Neste momento é suficiente saber apenas que dois pares ordenados (x, y) e (a, b) são iguais quando, e somente quando, temos $x = a$ e $y = b$.*

Exemplo 1.1.13. *Considerando o conjunto das vogais, por exemplo, temos que (a, a) e (i, a) são pares ordenados distintos. Da mesma forma, os pares ordenados (a, o) e (o, a) são também pares ordenados distintos.*

Definição 1.1.14. *Sejam A e B dois conjuntos quaisquer. O conjunto de todos os pares ordenados (x_1, x_2), com $x_1 \in A$ e $x_2 \in B$, é chamado o* produto cartesiano *de A e B, e é denotado por $A \times B$.*

Exemplo 1.1.15. *Dados os conjuntos $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{x, y\}$, os produtos cartesianos $A \times B$ e $B \times A$ são:*

$$A \times B = \{(a, x), (a, y), (b, x), (b, y), (c, x), (c, y)\}$$

e

$$B \times A = \{(x, a), (x, b), (x, c), (y, a), (y, b), (y, c)\}.$$

Observe que, devido à Observação 1.1.12, os conjuntos $A \times B$ e $B \times A$ são conjuntos distintos.

Observação 1.1.16. *O conceito de par ordenado pode ser generalizado para tripla ordenada (x_1, x_2, x_3), quádrupla ordenada (x_1, x_2, x_3, x_4), e, mais geralmente, enupla ordenada*

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n).$$

Com isso, temos produtos catesianos tríplo $A_1 \times A_2 \times A_3$, quádruplo $A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4$ e enuplo

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n.$$

---

[2] A forma precisa de definir um par ordenado é: $(x, y) = \{x, \{x, y\}\}$ (ver, por exemplo, [3, Seção 6]). Com isso, é possível garantir a propriedede fundamental de par ordenado, a saber, a Observação 1.1.12.

1.2 Proposições e Proposições Abertas

Definição 1.2.1 (Proposição). *Chama-se* Proposição *todo conjunto de palavras ou símbolos que constitui uma afirmação que deve ser verdadeira ou falsa, de maneira exclusiva.*

Exemplo 1.2.2. *Exemplos de proposições:*

P_1. *O ex-presidente Getúlio Vargas é aluno da UFS;*
proposição falsa pois, como visto no Exemplo 1.1.4 item b), sendo A o conjunto de todos os alunos da UFS e "b" o ex-presidente Getúlio Vargas, $b \notin A$.

P_2. *A Oceania é o maior continente que existe;*
proposição falsa, pois o continente "Oceania" é menor territorialmente do que o continente asiático.

P_3. *A letra "a" é uma vogal;*
proposição verdadeira, pois a pertence a V, que é o conjunto das vogais como visto no Exemplo 1.1.4 item a).

Observação 1.2.3. *Note que para se ter uma sentença ou proposição, faz-se necessário:*

(1) Uma estrutura de oração, com sujeito, verbo e predicado;

(2) Ser declarativa, não podendo ser exclamativa, imperativa e nem interrogativa;

(3) Satisfazer os seguintes princípios:

- *(3.1)* ***Princípio do Terceiro Excluído****. Toda proposição ou é verdadeira ou é falsa, isto é, verifica-se sempre um destes casos e nunca um terceiro;*
- *(3.2)* ***Princípio da Não-contradição****.Uma proposição não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo.*

Exemplo 1.2.4. *Exemplos de não proposições:*

a) "Que horas são?"
A frase não é proposição por ser interrogativa e não declarativa.

b) "A bela moça."
A frase não é proposição por não ser uma oração, posuindo apenas sujeito, faltando verbo e predicado.

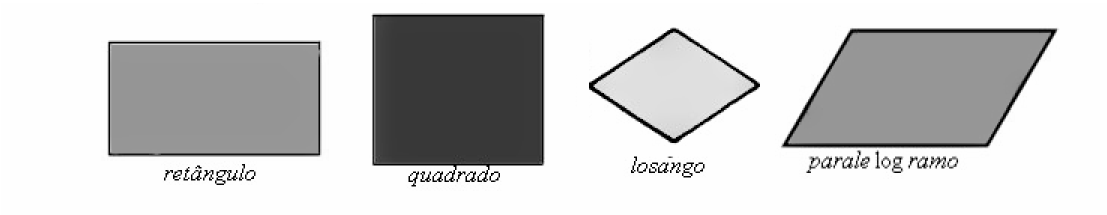
c) "Esta afirmação é falsa."
A frase não é proposição porque faz referência a si mesma, tornando impossível atribuir-lhe um valor lógico: se assumirmos como verdadeira, então a proposição afirma que é falsa, e da mesma forma, ao assumirmos como falsa, concluímos que ela é verdadeira, não satisfazendo o Princípio da Não-contradição.

Definição 1.2.5. *Chamamos de* Proposição Aberta*, a uma afirmação que está subordinada a pelo menos uma variável que fica livre, a qual nada podemos afirmar, impossibilitando a atribuição de um valor lógico (verdadeiro ou falso) para a afirmação.*

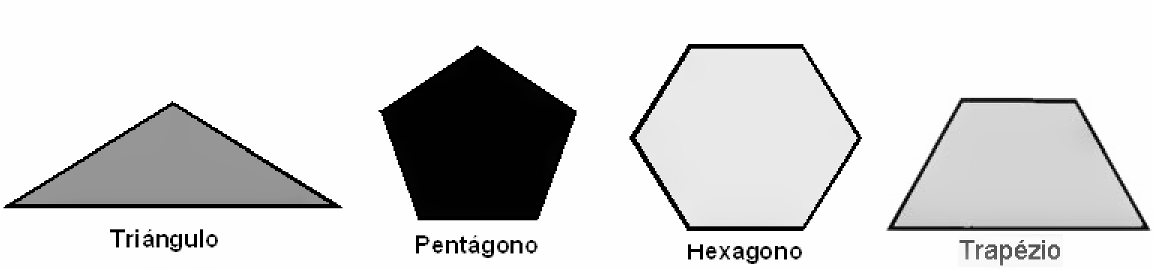
Exemplo 1.2.6. *Exemplo de proposição aberta:*

"O polígono tem exatamente quatro lados, todos paralelos"

Observe que essa frase é uma proposição aberta que tem como variável livre "polígono", pois há polígonos, a exemplo do quadrado, do retângulo, do losango e do paralelogramo, que a tornam uma proposição verdadeira;



e outros que a tornam falsa, a exemplo do triangulo, do trapézio e do hexágono.



Denotamos uma Proposição Aberta numa *variável livre* x por

$$P(x).$$

Dessa forma não há como atribuir diretamente um valor lógico para uma proposição aberta.

Diz-se que $P(x)$ é uma proposição aberta num conjunto A quando $P(x)$ torna-se uma proposição (verdadeira ou falsa) todas as vezes que se substitui a variável livre x por qualquer elemento a de A.

Exemplo 1.2.7. *Considere A o conjunto de todos os polígonos. Nesse caso, por exemplo, o quadrado, o retângulo, o triângulo pertencem a A. Considere agora a proposição aberta em A.*

"$P(x)$: o x tem exatamente quatro lados, todos paralelos."

Note que:

- *P(quadrado) é uma proposição verdadeira;*
- *P(triângulo) é uma proposição falsa;*

O conjunto A recebe o nome de *Domínio*[3] da variável livre x e qualquer elemento $a \in A$ diz-se um valor da variável x. Se $a \in A$ é tal que $P(a)$ é uma proposição verdadeira, diz-se que *a satisfaz* ou *verifica* $P(x)$.

Analogamente, dizemos que $P(x_1, x_2)$ é uma proposição aberta num conjunto $A \times B$ quando $P(x_1, x_2)$ torna-se uma proposição (verdadeira ou falsa) todas as vezes que se substitui as variáveis livres x_1 por qualquer elemento a de A e x_2 por qualquer elemento b de B (para mais detalhes ver, por exemplo,[1]).

Exemplo 1.2.8. *Considere A o conjunto de todos os países da América do Sul e B o conjunto de todos os países da Ásia. Nesse caso, por exemplo, o Brasil, a Argentina, a Bolivia pertencem a A, enquanto que o Japão, a China, a Coreia do Sul pertencem a B. Considere agora a sentença aberta em $A \times B$*

"$P(x_1, x_2)$: x_1 é mais populoso que x_2".

Note que:

- *$P(Brasil, Japão)$ é uma proposição verdadeira;*
- *$P(Brasil, China)$ é uma proposição falsa.*

Análogo ao caso de proposição aberta com uma variável, o conjunto $A \times B$ o *Domínio* das variáveis x_1 e x_2, e quaisquer elementos $a \in A$ e $b \in B$ são ditos valores das variáveis x_1 e x_2, respectivamente. Se $(a, b) \in A \times B$ é tal que $P(a, b)$ é uma proposição verdadeira, diz-se que (a, b) *satisfaz* ou *verifica* $P(x_1, x_2)$.

Observação 1.2.9. *Pode-se representar de modo análogo proposições abertas com n variáveis livres num produto cartesiano $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ por*

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Observação 1.2.10. *Numa proposição aberta $P(x)$ em um dado conjunto A, três casos podem ocorrer:*

I) *$P(x)$ é verdadeira para* todo *$x \in A$, ou seja, $P(x)$ exprime uma* condição universal *ou* propriedade universal *no conjunto A.*
Exemplo: *"$P(x)$: x é mortal", sendo A o conjunto dos seres humanos.*

II) *$P(x)$ é verdadeira para* alguns *$x \in A$, ou seja, $P(x)$ exprime uma* condição possível *ou* propriedade possível *no conjunto A.*
Exemplo: *"$P(x)$: x possui curso superior"; sendo A o conjunto de todas as pessoas.*

[3]Na literatura é comum o uso da expresão *Universo do Discurso*.

III) $P(x)$ *é verdadeira para* nenhum $x \in A$*, ou seja,* $P(x)$ *exprime uma* condição impossível *ou* propriedade impossível *no conjunto* A*.*
Exemplo: *"*$P(x)$*:* x *é imortal"; sendo* A *o conjunto dos seres humanos.*

Usamos nesta observação uma proposição aberta com uma variável livre apenas por simplicidade; o mesmo raciocínio pode ser empregado para proposições abertas com mais de uma variável livre.

1.3 Especificações de Conjuntos

Praticamente todos os princípios básicos da matemática são estabelecidos na linguagem de conjuntos. Um dos princípios básicos mais importantes nesse contexto é a construção de novos conjuntos a partir de outros. Antes da formulação desse princípio, vejamos o seguinte exemplo heurístico:

Exemplo 1.3.1. *Seja* A *o conjunto de todos os homens e considere a proposição aberta em* A*:*

$$\text{“}P(x)\text{: } x \text{ é casado”.}$$

Observe que a proposição aberta $P(x)$ *torna-se uma proposição verdadeira para alguns elementos* x *de* A *e uma proposição falsa para outros. Dessa forma, usamos a notação*

$$\{x \in A : x \textit{ é casado}\}$$

para especificar o conjunto dos homens casados e essa notação é comumente lida como "o conjunto de todos os x *em* A *tais que* x *é casado".*

Analogamente temos o conjunto de todos os homens solteiros:

$$\{x \in A : x \textit{ não é casado}\}.$$

Especificação de Conjunto:[4] Para cada conjunto A e cada proposição aberta $P(x)$ com domínio A, pode-se obter um conjunto B cujos elementos são exatamente aqueles elementos a de A tais que $P(a)$ é verdadeira. O conjunto B nesse caso representamos por

$$B = \{x \in A : P(x)\} \qquad \text{ou} \qquad B = \{x : P(x)\}.$$

Exemplo 1.3.2. *Análogo ao Exemplo 1.2.6, considere* A *o conjunto de todos os polígonos e a proposição aberta*

$$\text{“}P(x)\text{: O } x \text{ tem exatamente quatro lados, todos paralelos”.}$$

[4]Na teoria axiomática de conjuntos, a Especificação de Conjunto é um conceito conhecido como Axioma da Especificação (Ver [3, p. 10]).

O conjunto formado por "polígonos x" tais que $P(x)$ é verdade, pode ser representado por:

$$\{x \in A : P(x)\}. \tag{1.2}$$

Note, por exemplo, que o Paralelogramo e o Losango são elementos do conjunto repesentado em (1.2).

Exemplo 1.3.3. *Seja A o conjunto de todos os estudantes da UFS. A proposição aberta*

"$P(x)$: x é sergipano",

é verdadeira para alguns elementos x de A e falsa para outros. Neste caso podemos usar a notação

$$\{x \in A : P(x)\}$$

para especificar o conjunto de todos os estudantes sergipanos da UFS.

Observação 1.3.4. *De forma análoga, para proposições abertas com n variáveis livres $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e domínio $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$, pode-se obter também um conjunto cujos elementos são exatamente aqueles elementos $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ tais que $P(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ é verdadeira. Nesse caso, representamos tal conjunto por*

$$\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n : P(x_1, x_2, \ldots, x_n)\}.$$

1.4 Quantificadores

Uma forma de transformar uma proposição aberta em proposição é substituir a variável livre por qualquer elemento do domínio da proposição aberta, por exemplo, como visto no Exemplo 1.2.7. Uma outra maneira de transformar uma proposição aberta em uma proposição é através do uso dos chamados *Quantificadores.*

1.4.1 Quantificador Universal

Para introduzir o quantificador universal, consideremos inicialmente a proposição aberta em A (conjunto de todas as pessoas):

"$P(x) : x$ depende da água para sobreviver",

onde x representa cada pessoa do conjunto A. Agora observe a afirmação

"Para todo x de A, x depende da água para sobreviver". (1.3)

Note que a afirmação é uma proposição com valor lógico verdadeiro. Isto motiva a introdução do quantificador universal.

Definição 1.4.1. *Dada uma proposição aberta $P(x)$, com variável x e domínio A, a afirmação*

"Para todo x no conjunto A, $P(x)$",

que denotamos simbolicamento por

$$\forall\ x \in A; P(x),$$

é verdadeira quando $P(x)$ for sempre verdadeira ao substituirmos a variável x por qualquer elemento de A; e falsa se existir ao menos um elemento em A que torna $P(x)$ falsa quando a variável é substituida por esse elemento.

Notação 1.4.2. *O símbolo $\forall$ significa "para todo" ou "qualquer que seja"; e é chamado de Quantificador Universal.*

Exemplo 1.4.3. *Do exemplo 1.2.7, temos A o conjunto de todos os polígonos e*

"$P(x)$: o x tem exatamente quatro lados, todos paralelos",

a proposição aberta. Utilizando o quantificador universal, temos a proposição:

"Para todo x no conjunto A, o x tem exatamente quatro lados, todos paralelos".

Simbolicamente a proposição é

$$\forall\ x \in A; P(x).$$

Observe que essa é uma proposição falsa, pois substituindo x pelo elemento "Triângulo", temos $P($Triângulo$)$ com valor lógico falso.

Observação 1.4.4. *A afirmação "$\forall\ x \in A; P(x)$" também é escrita como*

"$\forall\ x \in A, P(x)$"

e ambas podem ser lidas como "para todo x em A, $P(x)$" ou "para todo x em A, temos $P(x)$", além de outras formas de leitura que aperecem na literatura.

Exemplo 1.4.5. *Sendo A o conjunto de todos os estados do nordeste brasileiro e*

"$P(x)$: x é um estado do Brasil"

a proposição aberta. Utilizando o quantificador universal, temos a proposição:

"Para todo x no conjunto A, x é um estado do Brasil".

Simbolicamente a proposição é

$$\forall\ x \in A; P(x).$$

Observe que essa é uma proposição verdadeira, pois substituindo x por qualquer estado do nordeste brasileiro, temos $P(x)$ com valor lógico verdadeiro.

Exemplo 1.4.6. *Considere os conjuntos cujos elementos são algumas capitais de estados brasileiros:*

$$A = \{Aracaju,\ Curitiba,\ Recife\} \qquad e \qquad B = \{Salvador,\ Porto\ Alegre\ \}.$$

Seja a proposição aberta em $A \times B$

"$P(x_1, x_2)$: x_1 e x_2 pertencem à mesma região do Brasil".

A proposição

$$\forall\ x_1 \in A\ e\ \forall\ x_2 \in B,\ \ P(x_1, x_2), \tag{1.4}$$

afirma que para qualquer x_1 de A e qualquer x_2 de B, tem-se x_1 e x_2 pertencentes à mesma região do Brasil. Observe que, por exemplo, Recife está na região nordeste enquanto que Porto Alegre está na região sul. Portanto, a proposição (1.4) *é falsa, pois temos:*

$$P(Aracaju, Porto\ Alegre)$$

uma proposição falsa.

Observação 1.4.7.

a) Quando temos conjuntos A e B iguais, também denotamos a proposição (1.4) *por*

$$\forall\ x_1, x_2 \in A,\ \ P(x_1, x_2).$$

b) Embora tenhamos apresentado quantificador universal de uma proposição aberta de duas variáveis livres na forma (1.4), *há outros modos "equivalentes" de representar* (1.4), *como por exemplo*

$$\forall\ (x_1, x_2) \in A \times B,\ \ P(x_1, x_2).$$

1.4.2 Quantificador Existencial

Para introduzir o quantificador existencial, consideremos inicialmente o conjunto B formado de todas as frutas produzidas no Brasil e a proposição aberta em B:

"$Q(x)$: x é consumida em Sergipe",

onde x representa cada fruta do conjunto B. Agora observe a afirmação

$$\text{"Existe } x \text{ de } B \text{ tal que } x \text{ é consumida em Sergipe".} \tag{1.5}$$

Note que a afirmação é uma proposição com valor lógico verdadeiro, pois a *Mangaba* é consumida em Sergipe. Isto motiva a introdução do quantificador existencial.

Definição 1.4.8. *Dada uma proposição aberta $Q(y)$, com variável y e domínio B, a afirmação*

"Existe y no conjunto B, P(y)",

que denotamos simbolicamente por

$$\exists\ y \in B; Q(y),$$

é verdadeira quando existir pelo menos um elemento de B que, ao substituir a variável y, torna a afirmação Q(y) verdadeira; e é falsa quando não existir elemento de B que torne Q(y) verdadeira.

Notação 1.4.9. *O símbolo ∃ significa "existe", e é chamado de Quantificador Existencial.*

Exemplo 1.4.10. *Do exemplo 1.2.7, temos A o conjunto de todos os polígonos e*

"P(x): o x tem exatamente quatro lados, todos paralelos",

a proposição aberta. Utilizando o quantificador existencial, temos a proposição:

> *"Existe um x no conjunto A tal que x tem exatamente quatro lados, todos paralelos".*

Simbolicamente a proposição é

$$\exists\ x \in A; P(x).$$

Observe que essa é uma proposição verdadeira, pois substituindo x pelo elemento "Quadrado", temos P(Quadrado) com valor lógico verdadeiro.

Observação 1.4.11. *A afirmação "$\exists\ x \in A; Q(x)$" também é escrita como*

$$\text{"}\exists\ x \in A, Q(x)\text{"}$$

e ambas são lidas como "existe x em A tal que Q(x)".

Exemplo 1.4.12. *Considere novamente os conjuntos cujos elementos são algumas capitais de estados brasileiros:*

$$C = \{Manaus,\ Cuiabá, Vitória\} \qquad e \qquad D = \{Aracaju,\ Recife\ \}.$$

Seja a proposição aberta em $C \times D$

"$P(x_1, x_2)$: x_1 e x_2 pertencem à mesma região do Brasil".

A proposição

$$\exists\ x_1 \in A,\ \exists\ x_2 \in B, P(x_1, x_2) \tag{1.6}$$

é falsa pois

- *P(Manaus, Aracaju) é uma proposição falsa;*
- *P(Manaus, Recife) é uma proposição falsa;*
- *P(Cuiabá, Aracaju) é uma proposição falsa;*
- *P(Cuiabá, Recife) é uma proposição falsa;*
- *P(Vitória, Aracaju) é uma proposição falsa;*
- *P(Vitória, Recife) é uma proposição falsa.*

1.4.3 Combinação de Quantificadores

Em matemática lidamos com situações em que aparecem naturalmente os quantificadores combinados. No presente, o que podemos mencionar de mais importante na combinação de quantificadores é que a ordem na qual os quantificadores de naturezas distintas - existencial e universal ou universal e existencial - aparecem numa proposição pode modificar inteiramente a proposição.

Exemplo 1.4.13. *Considere mais uma vez os conjuntos do Exemplo 1.4.6*

$$A = \{Aracaju,\ Curitiba,\ Recife\} \qquad e \qquad B = \{Salvador,\ Porto\ Alegre\ \}$$

e a proposição aberta em $A \times B$

$$\text{“}P(x_1, x_2) : x_1 \text{ e } x_2 \text{ pertencem à mesma região do Brasil”.} \tag{1.7}$$

A proposição

$$\text{“Para todo } x_1 \in A, \text{ existe } x_2 \in B \text{ tal que } P(x_1, x_2)\text{”,}$$

que também pode ser representada por

$$\forall\ x_1 \in A,\ \exists\ x_2 \in B, P(x_1, x_2), \tag{1.8}$$

é verdadeira. De fato, pelas definições dos quantificadores, para a proposição (1.8) *ser verdadeira é necessário que para cada elemento de A devemos encontrar um elemento de B que torne a proposição aberta* (1.7) *uma proposição verdadeira. Assim, como temos*

- $P(Aracaju, Salvador)$ *é uma proposição verdadeira;*
- $P(Curitiba, PortoAlegre)$ *é uma proposição verdadeira;*
- $P(Recife, Salvador)$ *é uma proposição verdadeira,*

garantimos a validade da proposição (1.8).

Por outro lado, a proposição

$$\text{“Existe } x_1 \in A \text{ tal que, para todo } x_2 \in B,\ P(x_1, x_2)\text{”,}$$

que também pode ser representada por

$$\exists\ x_1 \in A,\ \forall\ x_2 \in B, P(x_1, x_2), \tag{1.9}$$

é falsa. De fato, pelas definições dos quantificadores, para a proposição (1.9) *ser falsa é necessário que para cada elemento de A seja possível encontrar um elemento de B que torne a proposição aberta* (1.7) *uma proposição falsa. Assim, como temos por exemplo*

- $P(Aracaju, PortoAlegre)$ *é uma proposição falsa;*

- $P(Curitiba, Salvador)$ *é uma proposição falsa;*

- $P(Recife, PortoAlegre)$ *é uma proposição falsa,*

podemos concluir que a proposição é falsa.

Além disso, observe que a proposição

"Existe $x_2 \in B$ tal que, para todo $x_1 \in A$, $P(x_1, x_2)$",

que também pode ser representada por

$$\exists\ x_2 \in B,\ \forall\ x_1 \in A, P(x_1, x_2), \tag{1.10}$$

é também falsa. De fato, de forma análoga ao caso anterior, pelas definições dos quantificadores, para a proposição (1.10) *ser falsa é necessário que para cada elemento de B seja possível encontrar um elemento de A que torne a proposição aberta* (1.7) *uma proposição falsa. Assim, como temos por exemplo*

- $P(Curitiba, Salvador)$ *é uma proposição falsa;*

- $P(Aracaju, Porto\ Alegre)$ *é uma proposição falsa,*

podemos concluir que a proposição é falsa.

Observação 1.4.14. *A ordem na qual aparecem quantificadores de mesma natureza pode ser trocada, sem que exista alteração na proposição.*

1.5 Negação, Conectivos Lógicos e Conjuntos

Há vários modos de se obter uma nova proposição através de uma ou mais proposições dadas. Neste texto estudaremos apenas os cinco modos mais comuns e usados fequentemente na matemática. O modo mais simples de se obter uma proposição atráves de uma proposição dada é considerar a negação da mesma. Os outros modos de se construir novas proposições através das combinações de outras proposições que estudaremos são devidos aos conectivos da nossa língua:

e, *ou,* *se ..., então* e *... se, e somente se,....*

Um *Conectivo Lógico* (também chamado de operador lógico) é um símbolo ou palavra usado para conectar duas ou mais proposições de uma maneira gramaticalmente válida, de modo que o sentido da proposição composta produzida dependa apenas das proposiçoes originais.

1.5.1 Negação

Definição 1.5.1 (Negação de Proposição). *Dada uma proposição P, a* Negação *de P é a proposição representada por $\sim P$ cujo valor lógico é* verdadeiro, *quando P é falsa, e* falso, *quando P é verdadeira.*[5]

Exemplo 1.5.2. *Sendo*

"P : Roma é a capital da Inglaterra"

sua negação é

" $\sim P$: Roma não é a capital da Inglaterra "

ou

" $\sim P$: Não é verdade que Roma é a capital da Inglaterra".

Note que P e $\sim P$ são proposições com valores lógicos contrários, sendo assim o valor lógico de $\sim P$ depende do valor lógico de P. Podemos resumir o conceito de negação de uma proposição na seguinte tabela, chamada de Tabela Verdade da Negação:

P	$\sim P$
V	F
F	V

Tabela 1.1: Tabela Verdade da Negação

Negação de Proposições Abertas

Considere $P(x)$ uma proposição aberta em um conjunto A. Como anteriormente discutido, para cada $a \in A$, tem-se $P(a)$ uma proposição. Naturalmente, podemos representar a negação de $P(a)$ por $\sim P(a)$. Isso justifica que, dada uma proposição aberta $P(x)$ em um conjunto A, a negação de $P(x)$, que representaremos por $\sim P(x)$, é a proposição aberta em A tal que $\sim P(a)$ é a negação de $P(a)$, para cada $a \in A$.

Exemplo 1.5.3. *Consideremos o conjunto H de todos os seres humanos e a proposição aberta*

"$P(x)$: x tem menos de 21 anos".

Dessa forma, temos naturalmente que a negação da proposição aberta $P(x)$ é a proposição aberta em H

"$\sim P(x)$: x não tem menos de 21 anos",

[5] Geralmente a notação $\sim P$ é lida por "não P" ou "não é verdade que P".

ou escrita de outra forma,

$$\text{“}\sim P(x) : \textit{não é verdade que } x \textit{ tem menos de 21 anos”.}$$

Intuitivamente podemos introduzir o conceito de *Conjunto Vazio* como sendo o conjunto que não possui elemento. Porém, vamos estabelecer esse conjunto como no exemplo a seguir.

Exemplo 1.5.4. (**Conjunto Vazio**). *Considere A um conjunto qualquer. Note que*

$$\text{“}P(x,y) : x = y\text{”}$$

é uma proposição aberta em $A \times A$, cuja negação é

$$\text{“} \sim P(x,y) : x \neq y\text{”.}$$

Em particular, observe que

$$\text{“}Q(x) : x \neq x\text{”}$$

é uma proposição aberta em A, de modo que, para cada $a \in A$, $Q(a)$ é uma proposição falsa. Dessa forma, pela especificação de conjuntos temos o conjunto

$$\{x \in A : Q(x)\},$$

que é chamado de Conjunto Vazio. *Denotamos o conjunto vazio por $\varnothing$. Assim,*

$$\varnothing = \{x \in A : x \neq x\}.$$

Exemplo 1.5.5 (Diferença de Conjuntos). *Considere A e B conjuntos quaisquer. Note que podemos considerar*

$$\text{“}P(x) : x \in B\text{”}$$

como uma proposição aberta em A cuja negação é

$$\text{“} \sim P(x) : x \notin B\text{”.}$$

Dessa forma, pela especificação de conjuntos temos o conjunto

$$\{x \in A :\sim P(x)\},$$

que é chamado de Conjunto Diferença entre *A e B (nessa ordem). Denotamos o conjunto diferença entre A e B por $A \setminus B$. Assim,*

$$A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\}.$$

Note que, em palavras, o conjunto diferença entre os conjuntos A e B é o conjunto formado pelos elementos de A que não são elementos de B.

Observação 1.5.6. *Dados dois conjuntos, é possível que o conjunto diferença entre A e B seja um conjunto vazio. De fato, se por exemplo B é o conjunto das letras do alfabeto e A o conjunto das vogais, temos que*

$$A \setminus B$$

não possui elementos, isto é, $A \setminus B = \varnothing$.

1.5.2 Negação de Quantificadores

Para facilitar a compreensão das negações dos quantificadores, consideremos a seguinte proposição:

$$\text{“}\textit{Todos os alunos de Cálculo estão na sala de aula}\text{”}. \tag{1.11}$$

Assumindo que a afirmação é verdadeira, sua negação deve ser falsa. Então, qual é a negação? Observe que para a afirmação ser falsa, basta que um aluno de Cálculo não esteja na sala de aula. Portanto, a negação da proposição (1.11) é

$$\text{“}\textit{Existe pelo menos um aluno de Cálculo que não está na sala de aula}\text{”}. \tag{1.12}$$

Conforme já estudamos, considerando a váriavel livre x para representar os alunos, o conjunto D formado pelos alunos de Cálculo e

$$\text{“}P(x) : x \text{ está na sala de aula”}$$

a proposição aberta com domínio em D, podemos representar (1.11) por

$$\forall\ x \in D, P(x)$$

e sua negação (1.12) por

$$\exists\ x \in D, \sim P(x).$$

De modo geral, tem-se a negação dos quantificadores:

Negação do Quantificador Universal:

A negação da proposição $[\forall\ x \in D, P(x)]$ é a proposição

$$[\exists\ x \in D, \sim P(x)].$$

Analogamente, obtém-se

Negação do Quantificador Existencial:

A negação da proposição $[\exists\ x \in D, P(x)]$ é a proposição

$$[\forall\ x \in D, \sim P(x)].$$

A negação de afirmações que possuem dois ou mais quantificadores requer um pouco mais de cautela. Com o intuito de fixar melhor o entendimento de negação de uma proposição com dois ou mais quantificadores, vejamos o seguinte caso prático: consideremos os conjuntos A, formado pelos países da América do Sul, e B, formado pelos países da América do Norte, e a proposição aberta em $A \times B$

"$P(x,y)$: A população de x juntamente com a de y é maior que a da China".

Observe que a proposição

$$\exists\ x \in A, \exists\ y \in B, P(x,y), \tag{1.13}$$

significa em palavras:

> "Existe país na América do Sul e existe país na América do Norte, cujas populações juntas é maior do que a população da China".

Dessa forma, quem é a negação dessa proposição? Observe que negar a proposição é dizer basicamente que

> "Não existe país na América do Sul e Não existe país na América do Norte, cujas populações juntas é maior que a população da China";

que é o mesmo que dizer basicamente

> "Qualquer que seja o país da América do Sul e qualquer que seja o país da América do Norte, suas populações juntas não é maior que a população da China",

e essa proposição podemos escrever na forma

$$\forall\ x \in A, \forall\ y \in B, \sim P(x,y). \tag{1.14}$$

Portanto, observe nesse caso que a negação de (1.13) é precisamente (1.14).

Devemos ressaltar que não existe uma fórmula geral para se obter a negação de uma proposição que possui mais de um quantificador. Porém, uma maneira "prática" de se obter a negação de uma proposição com dois ou mais quantificadores é ir negando cada quantificador e cada propriedade na ordem em que aparecem na proposição e, com cada parte negada, formar uma frase que faça sentido e tenha significado lógico. Como mencionado, essa maneira não é para todas as negações e, portanto, requer bastante atenção. Por exemplo, no caso da negação de (1.13), é possível proceder o passo a passo basicamente assim:

$$\sim [\exists\ x \in A, \exists\ y \in B, P(x,y)].$$

No passo seguinte, negamos o primeiro quantificador e escrevemos:

$$\forall\ x \in A, \sim [\exists\ y \in B, P(x,y)].$$

No próximo passo, negamos o segundo quantificador e escrevemos:

$$\forall\ x \in A, \forall\ y \in B, \sim [P(x,y)].$$

Agora, organizamos a expressão de forma que tenha significado lógico:

$$\forall\ x \in A, \forall\ y \in B, \sim P(x,y).$$

Por fim, verificamos com bastante atenção se a proposição obtida é realmente a negação da proposição inicial. No nosso presente caso, observe que realmente funcionou.

Procedendo de forma similar, obtemos em resumo: considerando $P(x,y)$ uma proposição aberta com domínio $A \times B$, temos

Negação de proposições com dois quantificadores iguais:

A negação da proposição $[\forall\ x \in A, \forall\ y \in B, P(x,y)]$ é a proposição

$$[\exists\ x \in A, \exists\ y \in B, \sim P(x,y)].$$

A negação da proposição $[\exists\ x \in A, \exists\ y \in B, P(x,y)]$ é a proposição

$$[\forall\ x \in A, \forall\ y \in B, \sim P(x,y)].$$

Negação de proposições com dois quantificadores diferentes:

A negação da proposição $[\forall\ x \in A, \exists\ y \in B, P(x,y)]$ é a proposição

$$[\exists\ x \in A, \forall\ y \in B, \sim P(x,y)].$$

A negação da proposição $[\exists\ x \in A, \forall\ y \in B, P(x,y)]$ é a proposição

$$[\forall\ x \in A, \exists\ y \in B, \sim P(x,y)].$$

Vejamos como podemos utilizar isso de forma prática:

Exemplo 1.5.7. *Considere os conjuntos*

$$H = \{\textit{Miguel, João, Paulo}\} \qquad e \qquad M = \{\textit{Nathália, Priscila}\}$$

e seja

$$\text{“}P(x,y) : x \textit{ é irmão de } y\text{”}$$

proposição aberta em $H \times M$. *A proposição*

$$\exists\ y \in M, \forall\ x \in H, P(x,y) \tag{1.15}$$

pode ser lida, por exemplo, como

“Pelo menos uma mulher de M é irmã de todos os homens de H”.

Note que a negação de (1.15) *é*

$$\forall\ y \in M, \exists\ x \in H, \sim P(x,y)$$

que pode ser lida, por exemplo, como

“Qualquer que seja a mulher de M, existe um homem de H que não é seu irmão”.

1.5.3 Conjunção

Definição 1.5.8. *Chama-se* Conjunção *de duas proposições P e Q, a proposição representada por "$P \wedge Q$" e lida por "P e Q", cujo valor lógico é verdadeiro, quando as proposições P e Q são ambas verdadeiras, e falso nos demais casos.*

Exemplo 1.5.9. *Exemplos de conjunções:*

a) Considere as proposições

"P: João gosta de feijão"   *e*   *"Q: João gosta de arroz".*

A conjunção de P e Q é a proposição

"$P \wedge Q$: João gosta de feijão e *arroz".*

A conjunção será verdadeira, se de fato, João gosta de feijão e também de arroz.

b) Considere as proposições

"R: Cantor nasceu na Rússia"   *e*   *"T: Fermat era médico".*

A conjunção de R e T é a proposição

"$R \wedge T$: Cantor nasceu na Rússia e *Fermat era médico".*

A conjunção é falsa, pois R é verdadeira e T é falsa (Fermat foi matemático e cientista francês).

c) Considere as proposições

"S: A neve é branca"   *e*   *"K: O enxofre é amarelo".*

A conjunção de S e K é a proposição

"$S \wedge K$: A neve é branca e *o enxofre é amarelo".*

A conjunção é verdadeira, pois S é verdadeira e K é verdadeira.

Podemos resumir o conceito de conjunção de duas proposições na seguinte tabela que chamamos Tabela Verdade da Conjunção:

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Tabela 1.2: Tabela Verdade da Conjunção

Conjunção de Proposições Abertas

Considere A e B conjuntos e sejam $P(x)$ uma proposição aberta em A e $Q(y)$ uma proposição aberta em B. Chama-se conjunção de $P(x)$ e $Q(y)$ a proposição aberta em $A \times B$, representada por

$$P(x) \wedge Q(y),$$

cujo valor lógico é verdadeiro quando $P(a) \wedge Q(b)$ é verdadeira, para cada $a \in A$ e $b \in B$, e falsa caso contrário.

Exemplo 1.5.10. *Considere A o conjunto de todos os esportes, e B o conjunto de todas as cidades do Brasil. Considere ainda as proposições abertas*

"$P(x)$: x é um esporte coletivo" *e* *"$Q(y)$: y é uma capital de estado",*

onde o domínio das variáveis livres x e y, são os conjuntos A e B, respectivamente. Com essas proposições abertas, observe que podemos compor uma nova proposição aberta em $A \times B$, como segue:

"$P(x) \wedge Q(y)$: x é um esporte coletivo e *y é uma capital de estado".*

Temos $P(x) \wedge Q(y)$ verdadeira para os esportes que satisfazem $P(x)$ e para as cidades que satisfazem $Q(y)$. Por exemplo:

$$P(\textit{Futebol}) \wedge Q(\textit{Salvador}), \quad P(\textit{Basquete}) \wedge Q(\textit{São Paulo}), \ldots,$$

são proposições verdadeiras, enquanto

$$P(\textit{Futebol}) \wedge Q(\textit{Campinas}), \quad P(\textit{Tênis}) \wedge Q(\textit{São Paulo}),$$

$$P(\textit{Tênis}) \wedge Q(\textit{Campinas}), \ldots,$$

são proposições falsas.

Exemplo 1.5.11. *Considere A o conjunto de todos os países, e as proposições abertas*

"$P(x)$: x é um país desenvolvido" *e* *"$Q(y)$: y é um país europeu",*

onde o domínio das variáveis livres x e y, é o conjunto A de todos os países. Com essas proposições abertas, observe que podemos compor uma nova proposição aberta em $A \times A$, como segue:

$$\text{“}P(x) \wedge Q(y)\text{: } x \text{ é um país desenvolvido e } y \text{ é um país europeu”.}$$

Temos $P(x) \wedge Q(y)$ verdadeira para os países que satisfazem $P(x)$ e para os países que satisfazem $Q(y)$. Por exemplo:

$$P(\textit{Estados Unidos}) \wedge Q(\textit{Alemanha}), \quad P(\textit{França}) \wedge Q(\textit{França}), \ldots,$$

são proposições verdadeiras, enquanto

$$P(\textit{Estados Unidos}) \wedge Q(\textit{Estados Unidos}), \quad P(\textit{Angola}) \wedge Q(\textit{Itália}),$$

$$P(\textit{Angola}) \wedge Q(\textit{Estados Unidos}), \ldots,$$

são proposições falsas.

1.5.4 Interseção de Conjuntos

Dados dois conjuntos A e B, a *Interseção* desses conjuntos, denotado por

$$A \cap B,$$

é o conjunto dos elementos que pertencem a A e pertencem a B. Comumente lemos a notação $A \cap B$ por: “A interseção B” ou “A inter B”.

Exemplo 1.5.12. *Sendo $A = \{a, ?, y, u\}$ e $B = \{a, x, !, y, i\}$,*

$$A \cap B = \{a, y\}.$$

Exemplo 1.5.13. *Considere as duas proposições abertas*

$$\text{“}P(x)\text{: } x \text{ é médico”} \qquad \text{e} \qquad \text{“}Q(x)\text{: } x \text{ é professor”},$$

cujo domínio da variável livre x em cada uma delas é o conjunto H dos seres humanos. Assim, temos a proposição aberta (“conjunção”) em H:

$$\text{“}P(x) \wedge Q(x)\text{: } x \text{ é médico e professor”}.$$

Pela conjunção, a proposição aberta $P(x) \wedge Q(x)$ é verdadeira para os indivíduos que satisfazem ao mesmo tempo as duas proposições abertas $P(x)$ e $Q(x)$ dadas. Com isso, pela especificação de conjuntos (ver Seção 1.3), obtemos os conjuntos

$$A = \{x \in H : P(x)\} \qquad e \qquad B = \{x \in H : Q(x)\}.$$

Além disso, temos

$$\{x \in H : P(x) \wedge Q(x)\},$$

que é o conjunto formado por todos os x de H que pertencem a A e também a B, ou seja,[6]

$$A \cap B = \{x : x \in A \quad e \quad x \in B\} = \{x \in H : P(x) \wedge Q(x)\}.$$

De forma heurística, observe que podemos organizar a seguinte tabela

[6] Verificaremos as igualdades com maiores detalhes mais à frente.

$x \in A$ e $x \in B$	$x \in (A \cap B)$
$x \in A$ e $x \notin B$	$x \notin (A \cap B)$
$x \notin A$ e $x \in B$	$x \notin (A \cap B)$
$x \notin A$ e $x \notin B$	$x \notin (A \cap B)$

naturalmente semelhante à Tabela 1.2.

1.5.5 Disjunção

Definição 1.5.14. *Chama-se* Disjunção *de duas proposições P e Q, a proposição representada por "$P \vee Q$" e lida por "P ou Q", cujo valor lógico é verdadeiro, quando ao menos uma das proposições P e Q é verdadeira, e falso quando as proposições P e Q são ambas falsas.*

Exemplo 1.5.15. *Exemplos de disjunções:*

a) Considere as proposições

"*P: Roma é a capital da Rússia*" e "*Q: Paris é a capital da França*".

A disjunção de P e Q é a proposição

"*$P \vee Q$: Roma é a capital da Rússia* ou *Paris é a capital da França*".

A disjunção é verdadeira, pois embora P seja falsa (Roma é a capital da Itália), tem-se Q verdadeira.

b) Considere as proposições

"*R: Campinas é um estado brasileiro*" e "*T: O sol é um planeta*".

A disjunção de R e T é a proposição

"*$R \vee T$: Campinas é um estado brasileiro* ou *o sol é um planeta*".

A disjunção é falsa, pois R é falsa (Campinas é uma cidade brasileira) e T é falsa (O sol é uma estrela).

c) Considere as proposições

"*S: Cantor nasceu na Rússia*" e "*K: Fermat era médico*".

A disjunção de S e K é a proposição

"*$S \vee K$: Cantor nasceu na Rússia* ou *Fermat era médico*".

A disjunção é verdadeira, pois S é verdadeira e K é falsa. Observe que a mesma proposição no item b) do Exemplo 1.5.9, sendo uma conjunção, é falsa.

Podemos resumir o conceito de disjunção de duas proposições na tabela 1.3 que chamamos Tabela Verdade da Disjunção.

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Tabela 1.3: Tabela Verdade da Disjunção

Observação 1.5.16. *O uso do* "ou" *aqui tem o sentido de* inclusão, inclusive, *isto é, no sentido:* "a assinatura pode ser dada pelo marido, esposa ou pelos dois"*. Em linguagens, como o nosso português, o* ou *comumente tem o sentido* exclusivo, *somente um ou outro, no sentido:* "mais tarde será dia ou noite"*. No latim clássico havia duas palavras para distinguir o ou inclusivo do exclusivo, as palavras: vel e aut respectivamente (ver [7]).*

Disjunção de Proposições Abertas

Considere A e B conjuntos e sejam $P(x)$ uma proposição aberta em A e $Q(y)$ uma proposição aberta em B. Chama-se disjunção de $P(x)$ e $Q(y)$ a proposição aberta em $A \times B$, representada por

$$P(x) \vee Q(y),$$

cujo valor lógico é verdadeiro quando $P(a) \vee Q(b)$ é verdadeira, para cada $a \in A$ e $b \in B$, e falsa caso contrário.

Exemplo 1.5.17. *Considere A o conjunto de todos os esportes, e B o conjunto de todas as cidades do Brasil. Considere ainda as proposições abertas*

"$P(x)$: x é um esporte coletivo"   *e*   *"$Q(y)$: y é uma capital de estado",*

onde o domínio das variáveis livres x e y, são os conjuntos A e B, respectivamente. Com essas proposições abertas, observe que podemos compor uma nova proposição aberta em $A \times B$, como segue:

"$P(x) \vee Q(y)$: x é um esporte coletivo ou *y é uma capital de estado".*

Temos $P(x) \vee Q(y)$ verdadeira para os esportes que satisfazem $P(x)$ ou para as cidades que satisfazem $Q(y)$. Por exemplo:

$$P(\textit{Futebol}) \vee Q(\textit{São Cristóvão}), \quad P(\textit{Tênis}) \vee Q(\textit{São Paulo}),$$

$$P(\textit{Voleibol}) \vee Q(\textit{Aracaju}),\ldots,$$

são proposições verdadeiras, enquanto

$$P(\textit{Tênis}) \vee Q(\textit{São Cristóvão}), \quad P(\textit{Judô}) \vee Q(\textit{Campinas}), \ldots,$$

são proposições falsas.

Exemplo 1.5.18. *Considere A o conjunto de todos os países, e as proposições abertas*

"$P(x)$*: x é um país desenvolvido*" *e* "$Q(y)$*: y é um país europeu*",

onde o domínio das variáveis livres x e y, é o conjunto A de todos os países. Com essas proposições abertas, observe que podemos compor uma nova proposição aberta em $A \times A$, como segue:

"$P(x) \vee Q(y)$*: x é um país desenvolvido* ou *y é um país europeu*".

Temos $P(x) \vee Q(y)$ verdadeira para os países que satisfazem $P(x)$ ou para os países que satisfazem $Q(y)$. Por exemplo:

$$P(\textit{Japão}) \vee Q(\textit{Japão}), \quad P(\textit{Angola}) \vee Q(\textit{Itália}),$$

$$P(\textit{França}) \vee Q(\textit{França}),\ldots,$$

são proposições verdadeiras, enquanto

$$P(\textit{Egito}) \vee Q(\textit{Canadá}), \quad P(\textit{Angola}) \vee Q(\textit{Brasil}), \ldots,$$

são proposições falsas.

1.5.6 União de Conjuntos

Dados dois conjuntos A e B, a *União* desses conjuntos, denotado por

$$A \cup B,$$

é o conjunto dos elementos que pertencem a A ou pertencem a B. Comumente lemos a notação $A \cup B$ por: "A união B" ou "A unido a B".

Exemplo 1.5.19. *Sendo $A = \{a, ?, y, u\}$ e $B = \{a, x, !, y, i\}$,*

$$A \cup B = \{a, ?, y, u, x, !, i\}.$$

Exemplo 1.5.20. *Considere as duas proposições abertas*

"$P(x)$*: x é médico*" *e* "$Q(x)$*: x é professor*", *cujo domínio da variável livre x em cada uma delas é o conjunto H dos seres humanos. Assim, temos a proposição aberta ("disjunção") em H:*

"$P(x) \vee Q(x)$: x é médico ou *professor".*

Pela disjunção, a proposição aberta $P(x) \vee Q(x)$ é verdadeira para os indivíduos que satisfazem ao menos uma das proposições abertas dadas: $P(x)$ e $Q(x)$. Com isso, pela especificação de conjuntos (ver Seção 1.3), obtemos os conjuntos

$$A = \{x \in H : P(x)\} \qquad e \qquad B = \{x \in H : Q(x)\}.$$

Além disso, temos

$$\{x \in H : P(x) \vee Q(x)\},$$

que é o conjunto formado por todos os x de H que pertencem a A ou pertencem a B, ou seja,[7]

$$A \cup B = \{x : x \in A \quad ou \quad x \in B\} = \{x \in H : P(x) \vee Q(x)\}.$$

De forma heurística, observe que podemos organizar a seguinte tabela

$x \in A$ e $x \in B$	$x \in (A \cup B)$
$x \in A$ e $x \notin B$	$x \in (A \cup B)$
$x \notin A$ e $x \in B$	$x \in (A \cup B)$
$x \notin A$ e $x \notin B$	$x \notin (A \cup B)$

naturalmente semelhante à Tabela 1.3.

Observação 1.5.21. *Relacionando a Observação 1.5.16 para o caso da união, temos que cada elemento pode pertencer a somente A, somente B ou a ambos. A diferença entre o uso comum e o uso matemático do conectivo "ou" é ilustrada pela anedota do obstetra que também era matemático (ver [5, p.18]):*

> *"Ao sair da sala onde acabara de realizar um parto, foi abordado pelo pai da criança, que lhe perguntou: Foi menino ou menina, doutor? Resposta do médico: Sim!"*

Note que se A é o conjunto das meninas, B o conjunto dos meninos e x o recém-nascido, certamente tem-se $x \in A \cup B$.

1.5.7 Condicional e Implicação

Antes de definir o conectivo condicional, diferentemente da conjunção e disjunção, como forma de fixar e contextualizar o entendimento, consideremos a seguinte situação:

[7] As igualdades serão verificadas mais à frente.

Um aluno está com notas ruins na disciplina Biologia e seu professor fez-lhe a seguinte afirmação:

"Se estudar bastante, então será aprovado na disciplina".

Em que situação o professor mentirá? Observe que o professor mentirá somente no caso em que o aluno estude bastante e não consiga a aprovação. Note ainda que, se o aluno não estudar bastante e ainda assim for aprovado, o professor não mentiu. Essa situação motiva o conceito de condicional.

Condicional

Definição 1.5.22. *Chama-se* Proposição Condicional *(ou simplesmente* Condicional*) de duas proposições P e Q, a proposição representada por "$P \Rightarrow Q$", cujo valor lógico é* falso*, apenas quando P é verdadeira e Q é falsa, e* verdadeiro*, nos demais casos. A notação $P \Rightarrow Q$ é lida por*

"se P então Q".

Exemplo 1.5.23. *Exemplos de condicionais:*

a) Considere as proposições

"P: Roma é a capital da Rússia"   e   "Q: Paris é a capital da França".

A condicional de P e Q é a proposição

"$P \Rightarrow Q$: Se *Roma é a capital da Rússia,* então *Paris é a capital da França".*

A condicional é verdadeira, pois P é falsa (Roma é a capital da Itália) e Q é verdadeira.

b) Considere as proposições

"R: Campinas é um estado brasileiro"   e   "T: O sol é um planeta".

A condicional de R e T é a proposição

"$R \Rightarrow T$: Se *Campinas é um estado brasileiro,* então *o sol é um planeta".*

A condicional é verdadeira, pois R é falsa (Campinas é uma cidade brasileira) e T é falsa (O sol é uma estrela).

c) Considere as proposições

"S: Cantor nasceu na Rússia"   e   "K: Fermat era médico".

A condicional de S e K é a proposição

$$\text{“}S \Rightarrow K\text{: Se } \textit{Cantor nasceu na Rússia,} \text{ então } \textit{Fermat era médico”.}$$

A condicional é falsa, pois S é verdadeira e K é falsa.

Exemplo 1.5.24. *Considere as duas proposições:*

“P : Itamar Franco foi o primeiro presidente do Brasil”

e

“Q : O ex-presidente Collor sofreu um impeachment”.

Temos a condicional

“$P \Rightarrow Q$: Se *Itamar Franco foi o primeiro presidente do Brasil,* então *o ex-presidente Collor sofreu um impeachment”.*

Resumimos o conceito de condicional de duas proposições na Tabela 1.4, que chamamos Tabela Verdade da Condicional.

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Tabela 1.4: Tabela Verdade da Condicional

Notação 1.5.25. *Na condicional $P \Rightarrow Q$, geralmente o P é dito antecedente e Q o consequente.*

Conforme a Definição 1.5.22, o significado da proposição condicional

“$P \Rightarrow Q$”,

afasta-se radicalmente do nosso uso ordinário de interesse

“Se P então Q”.

A condicional “$P \Rightarrow Q$” **não afirma** que o consequente Q se **deduz** ou é **consequência** do antecedente P. Por exemplo, a condicional do Exemplo 1.5.24

“*Se* Itamar Franco foi o primeiro presidente do Brasil, *então* o ex-presidente Collor sofreu um impeachment”,

é verdadeira (pois P é falsa e Q é verdadeira), porém não tem sentido e nem interesse. A condicional não afirma, de modo nenhum, que do fato de

"O ex-presidente Collor ter sofrido um impeachment",

se deduz do fato de

"Itamar Franco não ter sido o primeiro presidente do Brasil".

Portanto, na linguagem lógica formal, as duas últimas linhas da Tabela Verdade da Condicional, tratam-se de uma convenção, pois foi preciso designar um valor lógico para cada uma das quatro possibilidades, mesmo que muito embora dois dos casos pareçam sem sentido (os casos em que P é falsa).

Diante do exposto, nos atentaremos ao caso das duas primeiras linhas da Tabela Verdade da Condicional.

Implicação

Definição 1.5.26. *Diz-se que uma proposição P* implica logicamente *uma proposição Q (ou simplesmente P* implica *Q), representada por $P \Rightarrow Q$, sempre que Q é verdadeira todas as vezes que P é verdadeira.*

Observação 1.5.27. *Podemos resumir o conceito de implicação lógica de duas proposições na seguinte tabela que chamamos Tabela Verdade da Implicação Lógica:*

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F

Tabela 1.5: Tabela Verdade da Implicação Lógica

Exemplo 1.5.28. *Exemplos de implicações:*

a) Considere as proposições

"P: Pedro é sergipano" *e* *"Q: Pedro é brasileiro".*

A proposição P implica Q é a proposição

"$P \Rightarrow Q$: Se *Pedro é sergipano,* então *Pedro é brasileiro".*

A implicação é verdadeira, de acordo com a Definição 1.5.26, pois Pedro será brasileiro, sempre que Pedro for sergipano.

b) Considere as proposições

"R: João trabalha bastante" *e* *"T: João é rico".*

A proposição R implica T é a proposição

"$R \Rightarrow T$: Se João trabalha bastante, *então* João é rico*".*

A implicação é falsa, pois João pode trabalhar bastante, e ainda assim não ser rico, visto que para ser rico depende de vários fatores, inclusive o tipo de trabalho que João exerce.

c) Considere as proposições

"S: Amanhã não irá chover" *e* *"K: Maria irá à praia".*

A proposição S implica K é a proposição

"$S \Rightarrow K$: Se *amanhã não chover,* então *Maria irá à praia".*

Observe que, no caso de $S \Rightarrow K$ verdadeira, concluímos que Maria irá à praia se não chover amanhã.

Observação 1.5.29. *Um modo de entender o conceito de "implicação", é pensar nela como uma obrigação ou um contrato.*

A implicação de duas proposições "*se P então Q*", denotada por

"$P \Rightarrow Q$",

também pode ser lida:

"P é condição *suficiente* para Q"

ou

"Q é condição *necessária* para P".

Observação 1.5.30. *Não é raro que pessoas confundam "necessário" com "suficiente". Geralmente os alunos têm mais facilidade de usar corretamente a palavra "suficiente" do que a "necessário", pois "suficiente" é sinonimo de "bastante". Talvez isso tenha a ver com o fato de que uma condição suficiente é geralmente mais forte do que a conclusão que se quer chegar. Por exemplo, para que um polígono seja um retângulo é suficiente que seja um quadrado. Por outro lado, uma condição necessária é, em geral, mais fraca do que a conclusão desejada. Assim, por exemplo, para que um polígono seja um quadrado, é necessário que seja um retângulo, mas esta propriedade somente não assegura que o polígono seja um quadrado (ver [5, p.11]).*

Notação 1.5.31. *Em uma implicação $P \Rightarrow Q$, a proposição P é dita hipótese (ou premissa) e a proposição Q é chamada conclusão (ou tese).*

Contrapositiva

Dadas proposições P e Q, chamamos de Contrapositiva da implicação $P \Rightarrow Q$, a proposição

$$(\sim Q) \Rightarrow (\sim P).$$

Exemplo 1.5.32. *Considere as proposições*

"P: eu sou sergipano" e "Q: eu sou brasileiro".

Temos a implicação

"$P \Rightarrow Q$: Se eu sou sergipano, então eu sou brasileiro".

A Contrapositiva da implicação "$P \Rightarrow Q$", é a proposição

"$(\sim Q) \Rightarrow (\sim P)$: Se eu não sou brasileiro, então eu não sou sergipano".

Inversa de uma Implicação

Dadas proposições P e Q, chamamos de Inversa da implicação $P \Rightarrow Q$, a proposição

$$(\sim P) \Rightarrow (\sim Q).$$

Exemplo 1.5.33. *Considere as proposições*

"P: eu sou sergipano" e "Q: eu sou brasileiro".

Temos a implicação

"$P \Rightarrow Q$: Se eu sou sergipano, então eu sou brasileiro".

A Inversa da implicação "$P \Rightarrow Q$", é a proposição

"$(\sim P) \Rightarrow (\sim Q)$: Se eu não sou sergipano, então eu não sou brasileiro".

Observação 1.5.34. *Note que a contrapositiva e a inversa de proposições são proposições bem distintas. Observe que, enquanto no Exemplo 1.5.32 temos a contrapositiva verdadeira, no Exemplo 1.5.33 a inversa é falsa.*

Recíproca de uma Implicação

Dadas duas proposições P e Q, considere a implicação $P \Rightarrow Q$. A proposição

$$Q \Rightarrow P,$$

é chamada Recíproca da implicação $P \Rightarrow Q$.

Exemplo 1.5.35. *Considere mais uma vez as proposições*

"P: eu sou sergipano" *e* *"Q: eu sou brasileiro".*

Temos a implicação

"$P \Rightarrow Q$: Se *eu sou sergipano,* então *eu sou brasileiro",*

cuja Recíproca é

"$Q \Rightarrow P$: Se *eu sou brasileiro,* então *eu sou sergipano".*

Observação 1.5.36. *É importante observar que o fato de uma implicação $P \Rightarrow Q$ ser uma proposição verdadeira, não garante que sua recíproca também seja verdadeira, conforme mostra o Exemplo 1.5.35.*

Implicação de Proposições Abertas

Considere A um conjunto e sejam $P(x)$ e $Q(x)$ proposições abertas em A. Diz-se que a proposição aberta $P(x)$ implica logicamente a proposição aberta $Q(x)$, representada por

$$P(x) \Rightarrow Q(x),$$

sempre que a implicação $P(a) \Rightarrow Q(a)$ é verdadeira, para cada $a \in A$, e falsa caso contrário.

Observação 1.5.37. *Como nos casos de conjunções e disjunções, poderíamos considerar duas proposições abertas com variáveis livres e domínios distintos. Porém, esse caso recairia na situação de "condicional aberta" que não é de interesse.*

Exemplo 1.5.38. *Seja C o conjunto de todos os elementos da natureza e as proposições abertas*

"$P(x)$: O x é um ser vivo" *e* *"$Q(x)$: O x é mortal",*

cujo domínio da variável livre x é o conjunto C. Com essas proposições abertas, observe que podemos compor uma nova proposição aberta em C, como segue:

"$P(x) \Rightarrow Q(x)$: Se *o x é um ser vivo,* então *o x é mortal".*

Observe por exemplo que:

$$P(humano) \Rightarrow Q(humano), \quad P(animal) \Rightarrow Q(animal),$$

$$P(vegetal) \Rightarrow Q(vegetal),...,$$

são implicações verdadeiras.

Exemplo 1.5.39. *Seja C o conjunto de todas as cidades e as proposições abertas*

"$P(x)$: x é uma cidade de Sergipe"; *e* *"$Q(x)$: x é uma cidade do Brasil",*

cujo domínio da variável livre x é C. Assim, temos a proposição aberta ("implicação") em C:

"$P(x) \Rightarrow Q(x)$: Se *x é uma cidade de Sergipe,* então *x é uma cidade do Brasil".*

Por exemplo, observe que:

- *$P(Lagarto) \Rightarrow Q(Lagarto)$ é uma implicação verdadeira;*
- *$P(Japaratuba) \Rightarrow Q(Japaratuba)$ é uma implicação verdadeira.*

1.5.8 Subconjuntos

Definição 1.5.40. *Dizemos que um conjunto A é* Subconjunto *de um conjunto B e denotamos por $A \subset B$ (ou $B \supset A$)*[8]*, quando todo elemento de A é também um elemento de B.*

Usando os conceitos de quantificador universal e implicação lógica, podemos reescrever a definição de subconjunto simbolicamente como segue: A é subconjunto de B quando

$$\forall\, x, (x \in A \Rightarrow x \in B) \tag{1.16}$$

é uma proposição verdadeira.

Exemplo 1.5.41. *Exemplos de subconjuntos:*

a) O conjunto das vogais $V = \{a, e, i, o, u\}$ é um subconjunto do conjunto das letras do alfabeto $A = \{a, b, c, \ldots, x, y, z\}$, pois todo elemento de V é também elemento de A. Logo, $V \subset A$ ou $A \supset V$.

b) Do exemplo 1.1.4 item c), onde

$$D = \{a, i, o, \{e, o, u\}, \{o, \{a, i\}\}, e\},$$

podemos destacar alguns subconjuntos, tais como:

[8]Quando $A \subset B$ dizemos também que "A está contido em B". A notação $B \supset A$ geralmente é lida como "B contém A".

$$\{a\} \subset D, \quad \{a,i\} \subset D, \quad \{\{e,o,u\}\} \subset D, \quad \{\{o,\{a,i\}\},o,e\} \subset D.$$

Aproveitando o Exemplo 1.5.39 e usando especificação de conjuntos (ver Seção 1.3), obtemos os conjuntos

$$A = \{x \in C : P(x)\} \qquad \text{e} \qquad B = \{x \in C : Q(x)\}.$$

Dessa forma, podemos observar que a seguinte implicação

"Se $\forall\, x \in C, P(x) \Rightarrow Q(x)$, então $A \subset B$",

é verdadeira[9].

Subconjunto Próprio

Definição 1.5.42. *Diz-se que A é um* subconjunto próprio *de B quando se tem $A \subset B$ e $A \neq B$.*

Exemplo 1.5.43. *O conjunto das vogais $V = \{a, e, i, o, u\}$ é um subconjunto próprio do conjunto das letras do alfabeto $A = \{a, b, c, \ldots, x, y, z\}$, pois $V \subset A$ e $V \neq A$.*

1.5.9 Bicondicional e Bi-implicação

Bicondicional

Definição 1.5.44. *Chama-se* Proposição Bicondicional *(ou apenas* Bicondicional*) de duas proposições P e Q, a proposição representada por "$P \Leftrightarrow Q$", cujo valor lógico é* verdadeiro*, quando P e Q são ambas verdadeiras ou ambas falsas, e* falso*, nos demais casos. A notação é lida por*

"P se, e somente se, Q".

Exemplo 1.5.45. *Exemplos de bicondicionais:*

a) Considere as proposições

"P: Roma é a capital da Itália" e *"Q: Paris é a capital da França".*

A bicondicional de P e Q é a proposição

"$P \Leftrightarrow Q$: Roma é a capital da Itália se, e somente se, *Paris é a capital da França".*

A bicondicional é verdadeira, pois P é verdadeira e Q é verdadeira.

b) Considere as proposições

[9] A veracidde da implicação será vista com mais detalhes na seção sobre métodos de prova.

"R: Campinas é um estado brasileiro" *e* *"T: O sol é um planeta".*

A bicondicional de R e T é a proposição

"$R \Leftrightarrow T$: Campinas é um estado brasileiro se, e somente se, *o sol é um planeta".*

A bicondicional é verdadeira, pois R é falsa (Campinas é uma cidade brasileira) e T é falsa (O sol é uma estrela).

c) Considere as proposições

"S: Cantor nasceu na Rússia" *e* *"K: Fermat era médico".*

A bicondicional de S e K é a proposição

"$S \Leftrightarrow K$: Cantor nasceu na Rússia se, e somente se, *Fermat era médico".*

A bicondicional é falsa, pois S é verdadeira e K é falsa.

Resumimos o conceito de bicondicional de duas proposições na Tabela 1.6, que chamamos Tabela Verdade da Bicondicional.

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Tabela 1.6: Tabela Verdade da Bicondicional

Assim como no caso da condicional, a bicondicional foge em parte ao interesse, pois o caso em que as duas proposições são ambas falsas tem essência dedutiva sem efeito, conforme pode ser obervado no item *c)* do Exemplo 1.5.45. Portanto, análogo ao caso da condicional, na linguagem lógica formal, a última linha da Tabela Verdade da Bicondicional, trata-se de uma convenção, pois foi preciso designar um valor lógico para cada uma das quatro possibilidades, mesmo que muito embora um dos casos pareça sem sentido (a saber, o caso em que P e Q são ambas falsas).

Bi-implicação

Definição 1.5.46. *Diz-se que a proposição P* equivale *a proposição Q, quando ambas as implicações: $P \Rightarrow Q$, e sua recíproca $Q \Rightarrow P$; são verdadeiras.*

Notação 1.5.47. *Usaremos também a notação $P \Leftrightarrow Q$ para representar que P equivale a Q, e o motivo de usar essa notação ficará claro na Seção 1.6. Quando P equivale a Q, é comum dizer que P e Q são equivalentes. Outra forma comum de leitura para "$P \Leftrightarrow Q$" é:*

"P é condição suficiente e necessária para Q"

ou

"Q é condição necessária e suficiente para P".

Exemplo 1.5.48. *Exemplos de bi-implicações:*

a) Considere as proposições

"P: O homem é um ser vivo" *e* *"Q: O homem é mortal".*

A proposição P equivale a Q, é a proposição

"$P \Leftrightarrow Q$: O homem é um ser vivo se, e somente se*, o homem é mortal".*

A bi-implicação é verdadeira, pois

"$P \Rightarrow Q$: Se *o homem é um ser vivo,* então *o homem é mortal"*

e

"$Q \Rightarrow P$: Se *o homem é mortal,* então *o homem é um ser vivo";*

são duas implicações verdadeiras.

b) Considere as proposições

"R: O polígono é um quadrado" *e* *"T: O polígono é um retângulo".*

A proposição R equivale a T, é a proposição

"$R \Leftrightarrow T$: O polígono é um quadrado se, e somente se*, o polígono é um retângulo".*

A bi-implicação é falsa, pois

"$R \Rightarrow T$: Se *o polígono é um quadrado,* então *é um retângulo"*

é uma implicação verdadeira, porém a implicação

"$T \Rightarrow R$: Se *o polígono é um retângulo,* então *é um quadrado"*

é uma implicação falsa.

Observação 1.5.49. *Talvez seja necessário atenção para entender a diferença entre Bicondicional e Bi-implicação, pois toda bi-implicação é uma bicondicional, como no exemplo 1.5.48 item a), mas nem toda bicondicional é uma bi-implicação, como no exemplo 1.5.45 item a).*

Bi-implicação de Proposições Abertas

Considere A um conjunto e sejam $P(x)$ e $Q(x)$ proposições abertas em A. Diz-se que a proposição aberta $P(x)$ equivale a proposição aberta $Q(x)$, representada por

$$P(x) \Leftrightarrow Q(x),$$

sempre que ambas as implicações: $P(a) \Rightarrow Q(a)$, e sua recíproca $Q(a) \Rightarrow P(a)$; são verdadeiras, para cada $a \in A$.

Exemplo 1.5.50. *Seja C o conjunto de todos os elementos da natureza, e as proposições abertas*

$$\text{“}P(x): \textit{O } x \textit{ é um ser vivo”} \qquad \textit{e} \qquad \text{“}Q(x)\textit{: O } x \textit{ é mortal”},$$

cujo domínio da variável livre x é o conjunto C. Com essas proposições abertas, observe que podemos compor uma nova proposição aberta em C, como segue:

$$\text{“}P(x) \Leftrightarrow Q(x) : \textit{O } x \textit{ é um ser vivo} \text{ se, e somente se}, \textit{ é mortal”}.$$

Observe por exemplo que:

$$P(humano) \Leftrightarrow Q(humano), \qquad P(animal) \Leftrightarrow Q(animal),$$

$$P(vegetal) \Leftrightarrow Q(vegetal), \ldots,$$

são bi-implicações verdadeiras.

Aproveitando o Exemplo 1.5.50 e usando especificação de conjuntos (ver Seção 1.3), obtemos os conjuntos

$$A = \{x \in C : P(x)\} \qquad \text{e} \qquad B = \{x \in C : Q(x)\}.$$

Dessa forma, podemos observar que a seguinte bi-implicação

$$\text{“}[\forall\ x \in C, P(x) \Leftrightarrow Q(x)] \text{ se, e somente se, } A \subset B \text{ e } B \subset A\text{”},$$

é verdadeira[10] (sempre que “um elemento da natureza for um ser vivo, será também um mortal”; e “sempre que um elemento da natureza for um mortal, será também um ser vivo”).

P	$\sim P$	$\sim (\sim P)$
V	F	V
F	V	F

1.6 Equivalências Lógicas

Definição 1.6.1. *Dizemos que duas proposições R e S são* Logicamente Equivalentes *quando possuem os mesmos valores lógicos, e representamos por $R \equiv S$.*

Exemplo 1.6.2. *Seja P uma proposição, tem-se a equivalência lógica*

$$\sim (\sim P) \equiv P.$$

Observação 1.6.3. *Note que é natural que a negação da negação de P 'é' a proposição P, pois pela definição, para $\sim (\sim P)$ ser* verdadeiro*, por exemplo, faz-se necessário que $(\sim P)$ seja falso, e esse por sua vez, requer um P* verdadeiro*. Portanto, $\sim (\sim P) \equiv P$.*

Exemplo 1.6.4. (Leis de De Morgan) *Dadas duas proposições P e Q, temos que*

$$\sim (P \wedge Q) \equiv (\sim P) \vee (\sim Q) \quad e \quad \sim (P \vee Q) \equiv (\sim P) \wedge (\sim Q).$$

Vamos verificar a primeira equivalência lógica; a segunda segue de forma análoga. Para comprovarmos que de fato as duas proposições

$$\sim (P \wedge Q) \qquad e \qquad (\sim P) \vee (\sim Q),$$

são logicamente equivalentes, precisamos comparar os valores lógicos de cada uma e verificar se são iguais. Observemos as tabelas verdade das proposições com os valores lógicos de $\sim (P \wedge Q)$ e $(\sim P) \vee (\sim Q)$, respectivamente. Conferindo as últimas colunas

P	Q	$P \wedge Q$	$(\sim P) \vee (\sim Q)$	$\sim (P \wedge Q)$
V	V	V	F	F
V	F	F	V	V
F	V	F	V	V
F	F	F	V	V

Tabela 1.7: Tabela com os valores lógicos de $\sim (P \wedge Q)$.

de cada uma das tabelas, linha a linha, temos comprovado que

$$\sim (P \wedge Q) \equiv (\sim P) \vee (\sim Q).$$

Para fixar o entendimento, vejamos como podemos utilizar as leis de De Morgan de forma prática:

[10] A veracidde da bi-implicação será vista com mais detalhes na seção sobre métodos de prova.

P	Q	$\sim P$	$\sim Q$	$(\sim P) \vee (\sim Q)$
V	V	F	F	F
V	F	F	V	V
F	V	V	F	V
F	F	V	V	V

Tabela 1.8: Tabela com os valores lógicos de $(\sim P) \vee (\sim Q)$.

Exemplo 1.6.5. *Sejam as proposições:*

"P: João foi à feira" *e* *"Q: Maria foi passear de avião".*

Podemos formar a conjunção "$P \wedge Q$",

"João foi à feira e *Maria foi passear de avião".*

Fazendo a negação de "$P \wedge Q$" utilizando as Leis de De Morgan, temos:

$$\text{“}(\sim P) \vee (\sim Q)\text{”},$$

ou seja,

$$\text{“}\underbrace{\textit{João}\ \text{não}\ \textit{foi à feira}}_{(\sim P)}\ \text{ou}\ \underbrace{\textit{Maria}\ \text{não}\ \textit{foi passear de avião}}_{(\sim Q)}\text{”}.$$

Observação 1.6.6. *As Leis de De Morgan, nos diz basicamente que:*

(I) Negar que duas proposições são verdadeiras ao mesmo tempo, equivale a afirmar que uma pelo menos é falsa.

(II) Negar que pelo menos uma de duas proposições é verdadeira, equivale a afirmar que ambas são falsas.

De forma intuitiva, as Leis de De Morgan exprimem que a negação transforma a conjunção em disjunção e a disjunção em conjunção.

Exemplo 1.6.7. ***Algumas Propriedades Básicas dos Conectivos***] *Dadas proposições P, Q e R, são verdadeiras as seguintes equivalência lógicas:*

a) $P \wedge Q \equiv Q \wedge P$ *(Comutatividade da Conjunção);*

b) $P \vee Q \equiv Q \vee P$ *(Comutatividade da Disjunção);*

c) $(P \wedge Q) \wedge R \equiv P \wedge (Q \wedge R)$ *(Associatividade da Conjunção);*

d) $(P \vee Q) \vee R \equiv P \vee (Q \vee R)$ *(Associatividade da Disjunção);*

e) $P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ *(Distributividade);*

P	Q	R	$P \wedge Q$	$P \wedge R$	$Q \vee R$	$P \wedge (Q \vee R)$	$(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	F	F	F	F
F	V	V	F	F	V	F	F
F	V	F	F	F	V	F	F
F	F	V	F	F	V	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

Tabela 1.9: Verificação do item *e)*.

f) $P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$.

Faremos a tabela verdade para verificar apenas a equivalência lógica do item e), pois os demais são verificados de forma similar.

Exemplo 1.6.8. (**Negação da Implicação**) *Dadas proposições P e Q, temos a seguinte equivalência:*

$$\sim (P \Rightarrow Q) \equiv P \wedge (\sim Q). \tag{1.17}$$

P	Q	$\sim P$	$\sim Q$	$P \Rightarrow Q$	$\sim (P \Rightarrow Q)$	$P \wedge (\sim Q)$
V	V	F	F	V	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	V	F	V	F	F
F	F	V	V	V	F	F

Tabela 1.10: Verificação de (1.17)

Observação 1.6.9. *Note que para um conjunto A não ser subconjunto de um conjunto B, é necessário existir $a \in A$ tal que $a \notin B$. Isso também pode ser entendido como a negação de (1.16),*

$$\exists\ x, (x \in A \wedge x \notin B). \tag{1.18}$$

Denotamos esse fato por $A \not\subset B$ ou $B \not\supset A$.[11]

Seja P o conjunto de todos os países. E sejam as proposições abertas

"$S(x)$: x é um país da América Latina" e "$T(x)$: x é um país da América do Sul".

Note que

$$\{x \in P : S(x)\} \not\subset \{x \in P : T(x)\},$$

pois, por exemplo, a proposição

[11] Quando $A \not\subset B$, dizemos que "A não está contido em B", e quando escrevemos a notação $B \not\supset A$, geralmente lemos "B não contém A".

$$S(México) \wedge \sim T(México)$$

é verdadeira, isto é, o país México pertence ao conjunto dos países da América Latina, porém não pertence ao conjunto dos países da América do Sul.

Exemplo 1.6.10 (Implicação e Contrapositiva). *Uma equivalência lógica muito importante na matemática é a equivalência entre uma implicação $P \Rightarrow Q$ e sua contrapositiva $(\sim Q) \Rightarrow (\sim P)$. Simbolicamente, temos*

$$(P \Rightarrow Q) \equiv (\sim Q) \Rightarrow (\sim P). \tag{1.19}$$

A comprovação da equivalência lógica pode ser observada na Tabela 1.11.

P	Q	$\sim P$	$\sim Q$	$P \Rightarrow Q$	$(\sim Q) \Rightarrow (\sim P)$
V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V

Tabela 1.11: Verificação de (1.19).

Exemplo 1.6.11 (Implicação e Inversa). *Dadas proposições P e Q, temos que as proposições*

$$P \Rightarrow Q \qquad e \qquad (\sim P) \Rightarrow (\sim Q),$$

não são equivalentes logicamente. De fato, a Tabela 1.12 mostra que as proposições possuem valores lógicos diferentes.

P	Q	$\sim P$	$\sim Q$	$P \Rightarrow Q$	$(\sim P) \Rightarrow (\sim Q)$
V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	F	V
F	V	V	F	V	F
F	F	V	V	V	V

Tabela 1.12: Valores lógicos de $P \Rightarrow Q$ e $(\sim P) \Rightarrow (\sim Q)$.

Exemplo 1.6.12 (Bi-implicação). *Dadas proposições P e Q, outra equivalência lógica muito importante na matemática é a seguinte:*

$$(P \Leftrightarrow Q) \equiv ((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)). \tag{1.20}$$

A Tabela 1.13 mostra a validade de (1.20).

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$P \Leftrightarrow Q$	$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	F	F
F	F	V	V	V	V

Tabela 1.13: Verificação de (1.20).

Exemplo 1.6.13 (Negação da Bi-implicação). *Vimos simbolicamente em (1.20), a equivalência lógica*

$$(P \Leftrightarrow Q) \equiv ((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)). \tag{1.21}$$

Vimos também no exemplo (1.6.8) a negação de $(P \Rightarrow Q)$,

$$\sim (P \Rightarrow Q) \equiv (P \wedge \sim Q).$$

E pelas Leis de De Morgan, temos a negação de 1.21

$$\sim (P \Leftrightarrow Q) \equiv (\sim (P \Rightarrow Q) \vee \sim (Q \Rightarrow P)).$$

Portanto, a negação de $(P \Leftrightarrow Q)$ *pode ser dada simbolicamente por*

$$\sim (P \Leftrightarrow Q) \equiv ((P \wedge \sim Q) \ \vee (Q \wedge \sim P)),$$

ou seja, basta pelo menos uma das proposições (implicação $P \Rightarrow Q$ *ou recíproca* $Q \Rightarrow P$*) ser falsa.*

1.7 Tautologia e Contradição

Tautologia

Definição 1.7.1. *Uma Tautologia é uma proposição composta que tem valor lógico sempre verdadeiro, quaisquer que sejam os valores lógicos das proposições que a compõem.*

Exemplo 1.7.2. *Considere uma proposição* P. *Temos que a proposição* $P \ \vee (\sim P)$ *é uma Tautologia.*

Exemplo 1.7.3 (Silogismo Hipotético ou "Transitividade"). *Dadas proposições* P, Q *e* R, *temos que a proposição*

$$\text{“}S : se\ (P \Rightarrow Q)\ e\ (Q \Rightarrow R),\ então\ (P \Rightarrow R)\text{”}$$

é uma Tautologia, ou seja, tem valor lógico sempre verdadeiro.

De fato, pois observando na tabela os possíveis valores lógicos da proposição, observamos apenas valor lógico verdadeiro.

P	$\sim P$	$P \vee (\sim P)$
V	F	V
V	F	V
F	V	V
F	V	V

Tabela 1.14: Tabela com valores lógicos de $P \vee (\sim P)$

P	Q	R	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow R$	$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)$	$P \Rightarrow R$	S
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	V
V	F	V	F	V	F	V	V
V	F	F	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

Tabela 1.15: Tabela com valores lógicos de $((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$

Contradição

Definição 1.7.4. *Uma Contradição é uma proposição composta que tem valor lógico sempre falso, quaisquer que sejam os valores lógicos das proposições que a compõem.*

Exemplo 1.7.5. *Considere uma proposição P. Temos que a proposição $P \wedge (\sim P)$ é uma Contradição.*

P	$\sim P$	$P \wedge (\sim P)$
V	F	F
V	F	F
F	V	F
F	V	F

Tabela 1.16: Tabela com valores lógicos de $P \wedge (\sim P)$

Observação 1.7.6. *O conceito de contradição pode ser entendido como a negação da tautologia.*

Capítulo 2

Teoremas e Técnicas de Prova

A construção e o desenvolvimento de uma teoria matemática começa com a adoção de conceitos Primitivos e Axiomas (ou *Postulados*). A partir dos termos primitivos e axiomas, passamos a definir novos conceitos e construir afirmações que se tornam *Conjecturas* e possivelmente *Teoremas.*

2.1 Conjecturas e Teoremas

Conjectura: Entende-se por Conjectura uma afirmação que acreditamos ser verdadeira, geralmente com base em evidência ou intuição, cuja falsidade ou veracidade ainda não foi possível comprovar.

Exemplo 2.1.1. *Exemplos de Conjecturas:*

a) Existe vida fora do planeta terra;

b) Existe vida após a morte.

2.1.1 Teoremas

Talvez uma das concepções mais gerais do que seja um teorema é a seguinte:

Teorema: Entende-se por Teorema uma afirmação verdadeira construída a partir dos termos primitivos, axiomas e outras afirmações verdadeiras.

Exemplo 2.1.2. *Exemplos de Teoremas:*

a) **Teorema:** *Sejam A, B e C conjuntos quaisquer. Se $A \subset B$ e $B \subset C$, então $A \subset C$.*

b) **Teorema:** *Sejam A e B conjuntos e $P(x)$ e $Q(x)$ proposições abertas. Temos que:*

i) $\{x \in A : P(x)\} \subset A$;

ii) *Se "$P(x) : x = x$", então* $\{x \in A : P(x)\} = A$;

iii) *Se* $A \subset B$, *então* $\{x \in A : P(x)\} \subset \{x \in B : Q(x)\}$;

c) **Teorema de Pitágoras:** *Se $\triangle ABC$ representa um triângulo retângulo, com catetos de comprimentos a e b e hipotenusa de comprimento c, então $c^2 = a^2+b^2$.*

Os teoremas quase sempre são implicações, conforme o item *a)* do exemplo anterior. Porém, podem ser apresentados sem estarem explicitamente na forma de implicação.

Exemplo 2.1.3. *Exemplo de teorema não apresentado em forma de implicação.*

Teorema: *O conjunto de todos os números naturais é infinito.*

Quando um teorema não está apresentado (enunciado) em forma implicação, em geral, é possível reescrevê-lo de modo equivalente em forma de implicação.

Exemplo 2.1.4. *Podemos reescrever o teorema do Exemplo 2.1.3 de modo equivalente na forma de implicação:*

Teorema: *Se $\mathbb{N}$ é o conjunto de todos os números naturais, então $\mathbb{N}$ é infinito.*[1]

Pode-se apresentar (enunciar) um teorema de várias formas conforme o próximo exemplo.

Exemplo 2.1.5. *Considere o seguinte teorema apresetado em uma primeira forma:*

Teorema (1^a Forma)**:** *A soma de dois números pares m e n é um número par.*

Esse teorema pode ser apresentado de diversas outras formas a exemplo de:

Teorema (2^a Forma)**:** *Se m e n são dois números naturais pares, então $m + n$ é par.*

e

Teorema (3^a Forma)**:** *Sejam m e n numéros naturais. Se m e n são pares, então $m + n$ é par.*

Ressaltamos que sempre devemos procurar apresentar um teorema na forma que melhor destaque (deixando claro) o que é Hipótese e o que é Tese. No caso do Exemplo 2.1.5 temos

Hipótese: *m e n são pares* e **Tese:** *$m + n$ é par.*

[1] O conjunto de todos os números naturais será construído no Capítulo 3 e denotado por $\mathbb{N}$.

Observe que a segunda forma de escrita no Exemplo 2.1.5 deixa claro que temos uma proposição da forma:

$$\forall\ m, n \in \mathbb{N}; [(m \text{ é par}) \wedge (n \text{ é par})] \Rightarrow (m + n \text{ é par}), \tag{2.1}$$

onde o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ é o domínio da proposição aberta

$$R(m, n) : [(m \text{ é par}) \wedge (n \text{ é par})] \Rightarrow (m + n \text{ é par}).$$

A forma (2.1) esclarece que a informação de que m e n são números naturais não faz parte da hipótese da implicação, mas que são as variáveis no domínio $\mathbb{N}$ das sentenças abertas

$$P(m, n) : (m \text{ é par}) \wedge (n \text{ é par}) \qquad \text{e} \qquad Q(m, n) : m + n \text{ é par}.$$

.

Observação 2.1.6. *Note que a maneira de apresentar (enunciar ou redigir) um teorema depende de uma opção pessoal. Porém, um teorema deve ter um enunciado claro e preciso, de preferência em forma de implicação, no qual a hipótese e a tese fiquem claramente apresentadas.*

2.1.2 Teoremas da Forma "se, e somente se,"

Para facilitar o entendimento de teoremas da Forma "se, e somente se,", consideremos os seguintes teoremas:[2]

Teorema: Se $A = B$, então $A \subset B$ e $B \subset A$.

e

Teorema: Se $A \subset B$ e $B \subset A$, então $A = B$.

Note que, embora não estejam enunciados na forma de implicação, o primeiro teorema é uma afirmação da forma $P \Rightarrow Q$ e o segundo uma afirmação da forma $Q \Rightarrow P$. Podemos enunciar os dois teoremas anteriores como duas sentenças equivalentes formando um único teorema, da seguinte maneira:

Teorema: $A = B$ se, e somente se, $A \subset B$ e $B \subset A$.

Desse modo, esse teorema é uma afirmação da forma $P \Leftrightarrow Q$, sendo que $P \Rightarrow Q$ e $Q \Rightarrow P$ são ambos teoremas válidos.

Como frisado no início da Seção 2.1.1, chama-se de teorema uma afirmação verdadeira construída de outras afirmações verdadeiras. Desse modo, quando enuncia-se um teorema da forma

$$P \Leftrightarrow Q,$$

ou "P se, e somente se, Q" e demais formas equivalentes de escrita, tem-se apresentado dois teoremas: o teorema $P \Rightarrow Q$ e o teorema *recíproco* $Q \Rightarrow P$.

[2]Provaremos os teoremas na seção que trata dos métodos de prova.

Exemplo 2.1.7. *Existem outras formas de apresentar teoremas da forma "se, e somente se". Por exemplo:*

> **Teorema:** *Seja A um conjunto e $P(x)$ e $Q(x)$ proposições abertas. Temos que:*
>
> *a)* $\forall\ x \in A, P(x) \Rightarrow Q(x)$ *é verdadeira se, e somente se,*
>
> $$\{x \in A : P(x)\} \subset \{x \in A : Q(x)\};$$
>
> *b)* $\forall\ x \in A, P(x) \Leftrightarrow Q(x)$ *é verdadeira se, e somente se,*
>
> $$\{x \in A : P(x)\} = \{x \in A : Q(x)\}.$$

Mais geralmente, é muito comum em matemática teoremas com uma afirmação envolvendo a equivalência de três ou mais proposições, ou seja, teoremas da forma, por exemplo,

$$P_1 \Leftrightarrow P_2 \Leftrightarrow P_3, \tag{2.2}$$

mesmo as vezes não estando apresentado dessa forma explicitamente. Nesse caso, o que se tem de fato são os três teoremas

$$P_1 \Leftrightarrow P_2, \qquad P_2 \Leftrightarrow P_3 \qquad \text{e} \qquad P_1 \Leftrightarrow P_3. \tag{2.3}$$

Exemplo 2.1.8. *Um exemplo de teorema com três afirmações equivalentes é o seguinte:*

> **Teorema:** *Para cada n inteiro, as seguintes afirmações são equivalentes:*
>
> *a)* n *é par;*
>
> *b)* $n + 1$ *é ímpar;*
>
> *c)* n^2 *é par.*

Observação 2.1.9. *Por simplicidade,* (2.2) *e* (2.3) *foram consideradas com três proposições. De modo similar, poderíamos apresentá-las com quatro ou mais proposições.*

2.1.3 Generalização de um Teorema

Suponhamos que temos dois teoremas denotados por Teorema 1 e Teorema 2. Dizemos que o Teorema 2 *Generaliza* o Teorema 1 quando o Teorema 1 é um caso particular do Teorema 2.

Exemplo 2.1.10. *Consideremos os seguintes teoremas:*

> **Teorema 1:** *A soma dos ângulos internos de um triângulo retângulo é* $180°$.
>
> **Teorema 2:** *A soma dos ângulos internos de um triângulo é* $180°$.

Embora as teses dos dois teoremas sejam a mesma (a soma dos ângulos internos é 180°*) observe que a hipótese do Teorema 1 (o triângulo é retângulo) é um caso particular da hipótese do Teorema 2 (um triângulo - "que pode ser qualquer"). Portanto, o Teorema 2 generaliza o Teorema 1.*

2.1.4 Lemas e Corolários

Muitas vezes, dependendo do contexto e para não fazer uso excessivo da palavra "teorema", que aparece com muita frequência nos textos matemáticos, alguns teoremas são chamados por outros nome, como por exemplo:

- **Lema:** um Lema é o termo usado para denotar um teorema que é visto como um teorema auxiliar, ou preparatório, que será utilizado na demonstração de outro teorema.

- **Corolário:** um Corolário é o termo usado para denotar um teorema que é obtido como consequência, relativamante direta, de um teorema recém demonstrado.

Também é comum o uso do termo **Proposição** para denotar um teorema que não tem muita importância no contexto em que está inserido.

2.2 Métodos de Prova

Grosso modo, uma prova é uma explicação (explanação) do porque uma afirmação matemática é verdadeira. Em termos mais formais, uma prova de que uma proposição T é deduzida de uma outra proposição H é uma cadeia de agumentações lógicas, válidas, para concluir os resultados apresentados em T. Nesse processo, H é chamada de *Hipótese* e T chama-se *Tese* ou *Conclusão*.

Infelizmente não existe procedimentos ou algoritmos de como se faz provas. Mas existem métodos (ou técnicas) que auxiliam e podem ser empregados.

2.2.1 Método Direto

O método direto de prova é um dos mais simples e mais usados não somente na matemática, mas também em ciências aplicadas a exemplo da computação.

O ***Método Direto*** para provar que uma implicação $H \Rightarrow T$ é verdadeira, consiste em supor que a hipótese H é verdadeira e, usando uma sequência de proposicões que são consequências lógicas das anteriores, concluir a tese T. Geralmente, as sequências lógicas possuem a forma

$$H \Rightarrow P_1, \quad P_1 \Rightarrow P_2, \quad P_2 \Rightarrow P_3, \ \cdots, \ P_{k-1} \Rightarrow P_k \quad \text{e} \quad P_k \Rightarrow T, \tag{2.4}$$

onde cada P_i é uma proposição verdadeira e todas as implicações também são verdadeiras.

Observação 2.2.1. *Note que, obtida uma sequência da forma* (2.4), *temos garantida pelo Silogismo Hipotético que $H \Rightarrow T$ é verdadeira.*

Exemplo 2.2.2. *Usando o método direto de prova, vamos provar o seguite teorema:*

> **Teorema:**(Transitividade) *Sejam A, B e C conjuntos quaisquer. Se $A \subset B$ e $B \subset C$, então $A \subset C$.*

Antes de buscar uma prova para uma afirmação, o primeiro passo deve ser o entendimento sobre o que deve ser provado. Para isto, até rescrever a afirmação pode ajudar. Neste exemplo, podemos reescrever a afirmação na forma:

$$\text{Se } \forall\ x,\ (x \in A \Rightarrow x \in B) \text{ e } \forall\ y,\ (y \in B \Rightarrow y \in C), \text{ então } \forall\ x,\ (x \in A \Rightarrow x \in C).$$

O passo seguinte, antes de iniciar a escrita da prova, é identificar o que é hipótese e o que é tese (conclusão).

Hipóteses:	***Tese:***
$H_1 : A \subset B$.	$T : A \subset C$.
H_2: $B \subset C$.	

Agora, faremos as deduções que servirão para escrever a prova:

1. *Pela hipótese H_1, $A \subset B$, significa dizer que $\forall\ x \in A,\ x \in B$.*

2. *Pela hipótese H_2, $B \subset C$, significa dizer que $\forall\ y \in B,\ y \in C$.*

3. *Por 1 e 2, para os casos em que $y = x$, $\forall\ x \in B,\ x \in C$.*

Finalmente, podemos escrever a prova.

Prova:
Note que se $A \subset B$ e $B \subset C$, temos pela definição de subconjuntos,

$$\forall\ x, x \in A \Rightarrow x \in B \qquad \text{e} \qquad x \in B \Rightarrow x \in C.$$

Assim,

$$x \in A \Rightarrow x \in C.$$

Então, $\forall\ x, (x \in A \Rightarrow x \in C)$. Portanto, $A \subset C$.

Exemplo 2.2.3. *Considere os conjuntos*

$$A = \{x \in C : P(x)\} \text{ e } B = \{x \in C : Q(x)\},$$

vistos no Exemplo 1.5.39. Temos que:

$$\text{“Se } \forall\ x \in C, P(x) \Rightarrow Q(x), \text{ então } A \subset B\text{”.}$$

Prova:
Suponha que a proposição $(\forall\ x \in C, P(x) \Rightarrow Q(x))$ é verdadeira. Então, sempre que $y \in C$ e $P(y)$ são verdadeiras, temos $y \in C$ e $Q(y)$ também verdadeiras. Assim,

$$\forall\ y,\ y \in \{x \in C : P(x)\}\ \Rightarrow\ y \in \{x \in C : Q(x)\}.$$

Portanto, $\{x \in C : P(x)\} \subset \{x \in C : Q(x)\}$, ou seja, $A \subset B$.

2.2.2 Método da Contrapositiva

O ***Método da Contrapositiva*** para provar que uma implicação $H \Rightarrow T$ é verdadeira, consiste em provar que $\sim T \Rightarrow \sim H$, pois já vimos que são duas proposições equivalentes. Como o próprio nome faz referência, o presente método é baseado na contrapositiva. Para provar que $\sim T \Rightarrow \sim H$ podemos, por exemplo, usar o método direto.

Exemplo 2.2.4. *Usando o método da contrapositiva, provaremos o seguinte teorema:*

Teorema: *Sejam A e B conjuntos quaisquer.*

Se $A \subset B$ e $B \subset A$, então $A = B$.

Observe que a contrapositiva da implicação é

$$\sim (A = B) \quad \Rightarrow \quad \sim (A \subset B \quad e \quad B \subset A),$$

ou seja,

$$A \neq B \quad \Rightarrow \quad A \not\subset B \quad ou \quad B \not\subset A. \tag{2.5}$$

Hipótese:	***Tese:***
$H : A \neq B.$	$T : A \not\subset B \quad ou \quad B \not\subset A.$

Sendo assim, suponha que $A \neq B$. Então, usando a Observação 1.1.11, existe algum elemento em A que é diferente de todos os elementos de B ou existe algum elemento em B que é diferente de todos os elementos de A. Assim, existe $a \in A$ tal que $a \notin B$ ou existe $b \in B$ tal que $b \notin A$. Logo,

$$A \not\subset B \quad ou \quad B \not\subset A.$$

Isso prova a implicação (2.5). Portanto, pela contrapositiva, temos

$$Se\ A \subset B\ e\ B \subset A,\ então\ A = B.$$

Observação 2.2.5. *O uso da Contrapositiva com quantificadores requer atenção. Observe que as Contrapositivas de*

$$\forall\, x \in D, P(x) \Rightarrow Q(x) \qquad e \qquad \exists\, y \in D, P(y) \Rightarrow Q(y) \tag{2.6}$$

são, respectivamente,

$$\forall\, x \in D, \sim Q(x) \Rightarrow \sim P(x) \qquad e \qquad \exists\, y \in D, \sim Q(y) \Rightarrow \sim P(y). \tag{2.7}$$

Para facilitar o entendimento (e o convencimento) de que a contrapositiva (2.7) mantém o mesmo quantificador da implicação, observe por exemplo que, se D possui dois elementos, digamos $D = \{x_1, x_2\}$, então a contrapositiva de $P(x_1) \Rightarrow Q(x_1)$ é $\sim Q(x_1) \Rightarrow \sim P(x_1)$. Logo,

$$\begin{aligned}
[\forall\, x \in D, P(x) \Rightarrow Q(x)] &\equiv [(P(x_1) \Rightarrow Q(x_1)) \wedge (P(x_2) \Rightarrow Q(x_2))] \\
&\equiv [(\sim Q(x_1) \Rightarrow \sim P(x_1)) \wedge (\sim Q(x_2) \Rightarrow \sim P(x_2))] \\
&\equiv [\forall\, x \in D, \sim Q(x) \Rightarrow \sim P(x)].
\end{aligned}$$

2.2.3 Método da Contradição

O Método da Contradição é também bastante conhecido por Método de Redução ao Absurdo ou Prova por Absurdo. Como a própria nomenclatura indica, o método está relacionado à contradição introduzida na Seção 1.7.

O ***Método da Contradição*** para provar que uma implicação $H \Rightarrow T$ é verdadeira, consiste em supor que $H \wedge (\sim T)$ é verdadeira e, usando uma sequência de proposições que são consequências lógicas das anteriores, obter uma proposição R falsa. Em termos simbólicos, devemos obter

$$H \wedge (\sim T) \Rightarrow P_1, \quad P_1 \Rightarrow P_2, \quad P_2 \Rightarrow P_3, \cdots, P_{k-1} \Rightarrow P_k \quad \text{e} \quad P_k \Rightarrow R, \tag{2.8}$$

onde $H \wedge (\sim T)$ é assumida verdadeira, cada P_i é uma proposição verdadeira, R é uma proposição falsa e todas as implicações são verdadeiras.

Observação 2.2.6. *O método da contradição é baseado na seguinte análise: se H é verdadeira, R é falsa e a implicação*

$$H \wedge (\sim T) \Rightarrow R$$

é verdadeira, resta para $\sim T$ apenas a alternativa de ser falsa e, portanto, T é verdadeira. Assim, temos uma prova para $H \Rightarrow T$.

O método da contradição é muito usado quando se precisa provar que uma proposição simples possui valor lógico verdadeiro. Nesse caso, nega-se a afirmação e, por dedução, busca-se uma afirmação sabidamente falsa, ou seja, uma contradição.

Exemplo 2.2.7. *Usando o método da contradição, vamos provar o seguinte teorema:*

> **Teorema:** *O conjunto $\varnothing$ é um subconjunto de qualquer conjunto.*
>
> ***Prova:*** *Considere A um conjunto qualquer. Suponha que $\varnothing \not\subset A$. Então,*
>
> $$\exists\ a,\ a \in \varnothing \quad e \quad a \notin A.$$
>
> *Vimos no Exemplo 1.5.4, que o conjunto vazio pode ser especificado como sendo $\varnothing = \{x \in A : x \neq x\}$. Assim, como $a \in \varnothing$, temos que $a \neq a$, o que é uma proposição falsa, ou seja, uma contradição. Portanto, $\varnothing \subset A$.*

Observação 2.2.8. *Se P é uma proposição falsa, então $P \Rightarrow Q$.*

"Se um professor disser à sua classe que todos os alunos que tiverem 5 metros de altura passarão com nota 10 sem precisar prestar exames, ele certamente estará falando a verdade, mesmo que corrija suas provas com o máximo de rigor. Com efeito, seja P a propriedade de um aluno ter 5 metros de altura e Q a de obter nota 10 sem prestar exames. Então $P \Rightarrow Q$ pois o conjunto definido pela propriedade P é vazio e o conjunto vazio está contido em qualquer outro. De um modo geral, a implicação $P \Rightarrow Q$ é verdadeira (vacuamente) sempre que não haja elementos com a propriedade P" (ver [5, p.9]).

2.2.4 Prova de Afirmações da Forma "se, e somente se"

Na Seção 2.1.2, apresentamos exemplos de teoremas com afirmações da forma "se, e somente se". Ressaltamos que teoremas da forma $P \Leftrightarrow Q$ são teoremas onde $P \Rightarrow Q$ e sua recíproca $Q \Rightarrow P$ são ambos teoremas válidos. Além disso, é conveniente lembrar, como verificamos no Exemplo 1.6.12 das Equivalências Lógicas, que

$$(P \Leftrightarrow Q) \equiv ((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)).$$

Então, para fazer uma prova de $P \Leftrightarrow Q$, podemos provar que $P \Rightarrow Q$ e $Q \Rightarrow P$.

Exemplo 2.2.9. *Usando o método de prova de afirmações da forma "se, e somente se", vamos provar o seguinte teorema:*

> **Teorema:** *Sejam A e B conjuntos quaisquer,*
>
> *$A = B$ se, e somente se, $A \subset B$ e $B \subset A$.*
>
> ***Prova:***
> *(Implicação): Suponha que $A = B$. Então, todo elemento de A é também elemento de B. Logo, $A \subset B$. De modo análogo, temos $B \subset A$. Isso prova a implicação.*
>
> *(Recíproca): Provado no Exemplo 2.2.4.*
> *Portanto,*
>
> $$A = B \quad \textit{se, e somente se,} \quad A \subset B \quad \textit{e} \quad B \subset A.$$

Exemplo 2.2.10 (Propriedade Idempotência da União)**.** *Seja A um conjunto qualquer,*

$$A \cup A = A.$$

> ***Prova:***
> *(Implicação)*
> *Se $x \in A \cup A$ é verdadeira, então $x \in A \vee x \in A$ é verdadeira.*
> *Pela definição de disjunção*
> *Se $x \in A \vee x \in A$ é verdadeira, então ao menos uma das proposições: $x \in A$ ou $x \in A$ é verdadeira.*
> *Logo, $x \in A$, o que implica $A \cup A \subset A$.*
> *(Recíproca)*
> *Se $x \in A$ é verdadeira, então $x \in A \vee x \in A$ é verdadeira.*
> *Pela definição de união,*
> *Se $x \in A \vee x \in A$ é verdadeira, então $x \in A \cup A$.*
> *Logo, $A \subset A \cup A$.*
> *Assim, pelo teorema do Exemplo 2.2.9, temos a igualdade*
>
> $$A \cup A = A.$$

Da mesma forma que foi provada a propriedade idempotência da União, prova-se a Propriedade Idempotência da Interseção

$$A \cap A = A.$$

Exemplo 2.2.11 (Propriedade Comutativa da Interseção). *Sejam A e B conjuntos quaisquer*

$$A \cap B = B \cap A.$$

Prova:
(Implicação)
Se $x \in A \cap B$, então $x \in A \wedge x \in B$.
Pela propriedade comutativa da conjunção, vista no Exemplo 1.6.7 da seção Equivalências Lógicas, temos
$(x \in A \wedge x \in B) \equiv (x \in B \wedge x \in A)$.
E pela definição de interseção, tem-se
Se $(x \in B \wedge x \in A)$, então $x \in (B \cap A)$.
Logo, $A \cap B \subset B \cap A$.
(Recíproca)
De forma análoga, prova-se $B \cap A \subset A \cap B$.
Assim, pelo teorema do Exemplo 2.2.9, temos a igualdade

$$A \cap B = B \cap A.$$

Da mesma forma que foi provada a propriedade comutativa da interseção, prova-se a Propriedade Comutativa da União

$$A \cup B = B \cup A.$$

Exemplo 2.2.12 (Propriedade Associativa da União). *Sejam A, B e C conjuntos quaisquer*

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C.$$

Prova:
(Implicação)
Se $x \in A \cup (B \cup C)$, então $x \in A \vee x \in (B \cup C)$.
Se $x \in A \vee x \in (B \cup C)$, então $x \in A \vee (x \in B \vee x \in C)$.
Pela propriedade associativa da disjunção, vista no Exemplo 1.6.7 da seção Equivalências Lógicas, temos
$[x \in A \vee (x \in B \vee x \in C)] \equiv [(x \in A \vee x \in B) \vee x \in C]$.
E pela definição de união,
Se $[(x \in A \vee x \in B) \vee x \in C]$, então $x \in (A \cup B) \vee x \in C$.
Se $x \in (A \cup B) \vee x \in C$, então $x \in (A \cup B) \cup C$.
Logo, $A \cup (B \cup C) \subset (A \cup B) \cup C$.
(Recíproca)

De forma análoga, prova-se que $(A \cup B) \cup C \subset A \cup (B \cup C)$.
Assim, pelo teorema do Exemplo 2.2.9, temos a igualdade

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C.$$

Da mesma forma que foi provada a propriedade associativa da união, prova-se a Propriedade Associativa da Interseção

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$$

Exemplo 2.2.13 (Propriedade Distributiva da Interseção em relação a União)**.** *Sejam* A*,* B *e* C *conjuntos quaisquer*

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Prova:
(Implicação)
Se $x \in A \cap (B \cup C)$*, então* $x \in A \wedge x \in (B \cup C)$.
Se $x \in A \wedge x \in (B \cup C)$*, então* $x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C)$.
Pela propriedade distributiva da conjunção em relação a disjunção, vista no Exemplo 1.6.7 da seção Equivalências Lógicas, tem-se
Se $x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C)$*, então* $(x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C)$.
Se $(x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C)$*, então* $(x \in A \cap B) \vee (x \in A \cap C)$.
Se $(x \in A \cap B) \vee (x \in A \cap C)$*, então* $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
Logo, $A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
(Recíproca)
De forma análoga, prova-se que $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C)$.
Assim, pelo teorema do Exemplo 2.2.9 , temos a igualdade

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Da mesma forma que foi provada a propriedade distributiva da interseção em relação a união, prova-se a Propriedade distributiva da União em relação a Interseção

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Exemplo 2.2.14. *Considere* $A = \{x \in C : P(x)\}$ *e* $B = \{x \in C : Q(x)\}$ *(conjuntos vistos no Exemplo 1.5.50). Temos que:*

"$\forall\ x \in C, P(x) \Leftrightarrow Q(x)$ *é verdadeira se, e somente se,* $A \subset B$ *e* $B \subset A$*".*

Prova:
Para provar essa equivalência, lembremos que a afirmação $\forall\ x \in C, P(x) \Leftrightarrow Q(x)$ *verdadeira equivale as afirmações*

$$\forall\ x \in C, P(x) \Rightarrow Q(x) \quad e \quad \forall\ x \in C, Q(x) \Rightarrow P(x) \tag{2.9}$$

verdadeiras. Com isso, podemos escrever a prova:

(Implicação):
Suponha que $\forall\, x \in C, P(x) \Leftrightarrow Q(x)$ *é verdadeira. Então, temos a validade de* (2.9). *Usando agora a implicação provada no Exemplo 2.2.3, obtemos*

$$\{x \in C : P(x)\} \subset \{x \in C : Q(x)\} \quad e \quad \{x \in C : Q(x)\} \subset \{x \in C : P(x)\}.$$

Dessa forma, pelo Teorema do Exemplo 2.2.9, concluímos que

$$\{x \in C : P(x)\} = \{x \in C : Q(x)\}, \text{ ou seja, } A = B.$$

(Recíproca):
Nossa hipótese agora é $A \subset B$ *e* $B \subset A$, *ou seja,* $\{x \in C : P(x)\} = \{x \in C : Q(x)\}$. *Assumindo a hipótese verdadeira, pelo Teorema do Exemplo 2.2.9, obtemos*

$$\{x \in C : P(x)\} \subset \{x \in C : Q(x)\} \quad e \quad \{x \in C : Q(x)\} \subset \{x \in C : P(x)\}.$$

Assim,

$$\forall\, y,\ y \in \{x \in C : P(x)\} \ \Rightarrow\ y \in \{x \in C : Q(x)\}.$$

Então, como as proposições $y \in C$ *e* $P(y)$ *são verdadeiras, temos que* $y \in C$ *e* $Q(y)$ *são verdadeiras. Dessa forma, a proposição*

$$\forall\, y \in C, P(y) \Rightarrow Q(y)$$

é verdadeira. De forma análoga, tem-se

$$\forall\, y \in C, Q(y) \Rightarrow P(y).$$

Concluímos que

$$\forall\, x \in C, P(x) \Rightarrow Q(x) \quad e \quad \forall\, x \in C, Q(x) \Rightarrow P(x)$$

são verdadeiras. Portanto, $\forall\, x \in C, P(x) \Leftrightarrow Q(x)$ *é verdadeira.*

2.3 Prova para Alguns Tipos de Afirmações

2.3.1 Prova de Implicações com Hipóteses Conjuntivas

Na matemática, são muito comuns implicações do tipo

$$(H_1 \wedge H_2) \Rightarrow T. \tag{2.10}$$

Para provar que uma implicação desse tipo é verdadeira, geralmente usamos os métodos direto e da contradição; sendo em geral mais complicado o uso da contrapositiva.

Exemplo 2.3.1. *(Considere os dados do Exemplo 1.5.13). Sejam A e B conjuntos e $P(x)$ e $Q(x)$ proposições abertas em H. Sejam ainda $A = \{x \in H : P(x)\}$ e $B = \{x \in H : Q(x)\}$.*

Se $\forall\ y,\ \ y \in A$ e $y \in B$, então $\forall\ y,\ y \in \{x \in H : P(x) \wedge Q(x)\}$.

Hipóteses:	***Tese:***
$H_1 : y \in A.$	$T : y \in \{x \in H : P(x) \wedge Q(x)\}.$
$H_2 : y \in B.$	

1. *Pela hipótese H_1, $\forall\ y \in A$, significa dizer que $y \in \{x \in H : P(x)\}$.*
2. *Pela hipótese H_2, $\forall\ y \in B$, significa dizer que $y \in \{x \in H : Q(x)\}$.*

Prova:
Como $y \in A$, tem-se que $y \in \{x \in H : P(x)\}$, ou seja, $y \in H, P(y)$. E como $y \in B$, tem-se que $y \in \{x \in H : Q(x)\}$, ou seja, $y \in H, Q(y)$. Sendo assim, $y \in H, P(y) \wedge Q(y)$. Portanto, $\forall\ y,\ \ y \in A$ e $y \in B$, tem-se $y \in \{x \in H : P(x) \wedge Q(x)\}$. Dessa forma, podemos escrever

$$A \cap B \subset \{x \in H : P(x) \wedge Q(x)\}.$$

Note que a recíproca

Se $\forall\ y,\ y \in \{x \in H : P(x) \wedge Q(x)\}$, então $\forall\ y,\ \ y \in A$ e $y \in B$,

também é verddeira.

Prova:
Como $y \in \{x \in H : P(x) \wedge Q(x)\}$, significa dizer que $\forall\ y,\ y \in H, P(y) \wedge Q(y)$, ou seja, $y \in H, P(y)$ e $y \in H, Q(y)$. Como $\forall\ y,\ y \in H, P(y)$, tem-se $y \in \{x \in H : P(x)\}$, e de forma análoga, $y \in \{x \in H : Q(x)\}$. Portanto, $\forall\ y, y \in A$ e $y \in B$. Dessa forma, podemos escrever

$$\{x \in H : P(x) \wedge Q(x)\} \subset A \cap B.$$

O que nos leva a escrever, de acordo com o teorema do Exemplo 2.2.9, a igualdade

$$A \cap B = \{x \in H : P(x) \wedge Q(x)\},$$

vista no Exemplo 1.5.13.

Observação 2.3.2. *Por simplicidade, a implicação* (2.10) *foi apresentada com uma hipótese composta pela conjunção de duas proposições. De modo similar, poderíamos apresentar uma hipótese composta pela conjunção de três ou mais proposições.*

2.3.2 Prova de Implicações com Teses Disjuntivas

Comumente encontramos, mesmo não estando as vezes apresentadas explicitamente, implicações da forma

$$H \Rightarrow (T_1 \vee T_2). \tag{2.11}$$

Para essa implicação, geralmente não é simples escrever uma prova usando o método direto. A sugestão inicial, para quando se deseja obter uma prova para uma implicação dessa forma, é usar o método da contrapositiva ou da contradição.

Exemplo 2.3.3. *Vide Exemplo 2.2.4.*

Observação 2.3.4. *Fazendo uso da contrapositiva, pode-se observar que* (2.10) *e* (2.11) *possuem uma relação de similaridade. De fato, note que*

$$[H \Rightarrow (T_1 \vee T_2)] \equiv [\sim (T_1 \vee T_2) \Rightarrow (\sim H)] \equiv [((\sim T_1) \wedge (\sim T_2)) \Rightarrow (\sim H)].$$

Observação 2.3.5. *Por simplicidade, a implicação* (2.11) *foi apresentada com uma tese composta pela disjunção de duas proposições. De modo similar, poderíamos apresentar uma tese composta pela disjunção de três ou mais proposições.*

2.3.3 Prova de Implicações com Hipóteses Disjuntivas

Mesmo também não sendo apresentadas muitas vezes de maneira explícita, várias afirmações matemáticas possuem uma estrutura lógica da forma

$$(H_1 \vee H_2) \Rightarrow T. \tag{2.12}$$

Para provar uma implicação desse tipo, podemos usar a equivalência lógica

$$[(H_1 \vee H_2) \Rightarrow T] \equiv [(H_1 \Rightarrow T) \wedge (H_2 \Rightarrow T)],$$

que nos permite provar $H_1 \Rightarrow T$ e $H_2 \Rightarrow T$ separadamente.

Exemplo 2.3.6. *(Considere os dados do Exemplo 1.5.20). Sejam A e B conjuntos e $P(x)$ e $Q(x)$ proposições abertas em H. Sejam ainda $A = \{x \in H : P(x)\}$ e $B = \{x \in H : Q(x)\}$.*

Se $\forall\, y,\ y \in A$ ou $y \in B$, então $\forall\, y,\ y \in \{x \in H : P(x) \vee Q(x)\}$.

Hipóteses:	***Tese:***
$H : y \in A$ *ou* $y \in B$.	$T : y \in \{x \in H : P(x) \vee Q(x)\}$.

1. *Pela hipótese H_1, $\forall\, y \in A$, significa dizer que $y \in \{x \in H : P(x)\}$.*
2. *Pela hipótese H_2, $\forall\, y \in B$, significa dizer que $y \in \{x \in H : Q(x)\}$.*

Prova:
Como $y \in A$ ou $y \in B$, tem-se que $y \in \{x \in H : P(x)\}$ ou $y \in \{x \in H : Q(x)\}$, respectivamente, o que implica $y \in H, P(y)$ ou $y \in H, Q(y)$, ou seja, $y \in H, P(y) \vee Q(y)$. Sendo assim, $y \in \{x \in H : P(x) \vee Q(x)\}$. Portanto, $\forall\ y,\ y \in A$ ou $y \in B$, tem-se $y \in \{x \in H : P(x) \vee Q(x)\}$. Dessa forma, podemos escrever

$$A \cup B \subset \{x \in H : P(x) \vee Q(x)\}.$$

Note que a recíproca

$$\textit{Se } \forall\ y,\ y \in \{x \in H : P(x) \vee Q(x)\}, \textit{ então } \forall\ y,\ \ y \in A \textit{ ou } y \in B,$$

também é verddeira.

Prova:
Como $y \in \{x \in H : P(x) \vee Q(x)\}$, significa dizer que $\forall\ y,\ y \in H, P(y) \vee Q(y)$, ou seja, $y \in H, P(y)$ ou $y \in H, Q(y)$. Como $\forall\ y,\ y \in H, P(y)$, tem-se $y \in \{x \in H : P(x)\}$, e de forma análoga, $y \in \{x \in H : Q(x)\}$. Portanto, $\forall\ y, y \in A$ ou $y \in B$. Dessa forma, podemos escrever

$$\{x \in H : P(x) \vee Q(x)\} \subset A \cup B.$$

O que nos leva a escrever também, de acordo com o teorema do Exemplo 2.2.9, a igualdade

$$A \cup B = \{x \in H : P(x) \vee Q(x)\},$$

vista no Exemplo 1.5.20.

Observação 2.3.7. *Provas de afirmações com hipóteses disjuntivas geralmente são mais conhecidas como **Provas por Casos**, devido a possibilidade de se fazer a prova dividindo em partes.*

Observação 2.3.8. *Por simplicidade, a implicação* (2.12) *foi apresentada com uma hipótese composta pela disjunção de duas proposições. De modo similar, poderíamos apresentar uma hipótese composta pela disjunção de três ou mais proposições.*

2.3.4 Prova de Implicações com Teses Conjuntivas

Uma implicação também muito comum em teoremas, mesmo muitas vezes não sendo apresentada explicitamente, tem a forma:

$$H \Rightarrow (T_1 \wedge T_2). \tag{2.13}$$

Para provar uma implicação desse tipo, podemos usar a equivalência lógica

$$[H \Rightarrow (T_1 \wedge T_2)] \equiv [(H \Rightarrow T_1) \wedge (H \Rightarrow T_2)],$$

que também nos permite provar $H \Rightarrow T_1$ e $H \Rightarrow T_2$ separadamente.

Observação 2.3.9. *Por simplicidade, a implicação* (2.13) *foi apresentada com uma tese composta pela conjunção de duas proposições. De modo similar, poderíamos apresentar uma tese composta pela conjunção de três ou mais proposições.*

Exemplo 2.3.10. *Usando o método de prova de implicações com teses conjuntivas, vamos provar o seguinte teorema:*

***Teorema**: Não existe um conjunto de todos os conjuntos.*

Primeiro caso) ***Lema 1.*** *Suponhamos que existe um conjunto U de todos os conjuntos. Se $R = \{S \in U : S \notin S\}$[3], então $R \notin R$.*

Prova:

Suponhamos que $R \in R$. Então, pela especificação do conjunto R, devemos ter $R \notin R$, o que contradiz a hipótese de que $R \in R$. A contradição prova que $R \notin R$.

Segundo caso) ***Lema 2.*** *Suponhamos que existe um conjunto U de todos os conjuntos. Se $R = \{S \in U : S \notin S\}$, então $R \in R$.*

Prova:

Suponhamos que $R \notin R$. Então, como $R \in U$, temos $R \in R$, pela definição de R. Isto é uma contradção. Assim, $R \in R$.

Portanto, de acordo com os Lemas 1 e 2, o conjunto de todos os conjuntos não pode existir. Pois, se existisse, levaria à contradição

$$\text{“}R \notin R \text{ e } R \in R\text{”}.$$

2.3.5 Prova de Afirmações de Existência

Nas diversas partes da matemática encontra-se teoremas que afirmam a existência de um ou mais objetos que satisfazem determinadas propriedades.

Os teoremas desse tipo são proposições da forma

$$\exists\, x \in D,\ P(x).$$

A maneira mais óbvia de provar um teorema desse tipo, é encontrar (ou “construir”) um elemento específico a que pertença a D para o qual $P(a)$ é verdadeira.

Exemplo 2.3.11. *Se V é o conjunto das vogais, então existe um conjunto B tal que $V \cup B = V$.*

Note que para provar essa afirmação, basta “encontrar” ou “construir” pelo menos um conjunto B, tal que $V \cup B = V$.

Logo, algumas possibilidades para o conjunto B, são

$$\varnothing, \quad \{a, u\}, \quad \{i, o, u\}, \quad \{e\}, \quad V, \ldots.$$

[3]Conforme a regra da especificação, R é um conjunto frequentemente chamado “o conjunto de Russel”.

2.3.6 Prova de Afirmações de Unicidade

Corriqueiramente em matemática, encontra-se afirmações ou teoremas que afirmam que *existe* um ***único*** elemento com certas propriedades que satisfaz determinadas condições. Por exemplo:

> "Se A é um conjunto qualquer não vazio, então existe um único conjunto B tal que $A \cap B = \varnothing$".

Observe que uma afirmação desse tipo pode ser dividida em duas: a primeira "*existe*", que é uma afirmação de existência estudada na seção anterior, e a segunda "*único*", que chamamos de Afirmação de Unicidade. Afirmações desse tipo são comumente chamadas de *Afirmações de Existência e Unicidade.*

Geralmente, para provar uma afirmação de existência e unicidade, separamos a prova em duas partes: a da existência estudada na seção anterior e a da unicidade que estudaremos agora. Para provar a unicidade usualmente usamos os métodos direto e da contradição.

Uso do Método Direto: supõe-se a existência de elementos x e y, com as propriedades requeridas e que satisfazem as condições dadas, e pelo método direto prova-se que $x = y$.

Exemplo 2.3.12. *Exemplo de prova de afirmações de unicidade utilizando o método direto.*

***Teorema**: O conjunto vazio é único.*

Prova:
Pela especificação de conjunto vazio, podemos determinar

$$\varnothing_A = \{x \in A : x \neq x\} \qquad e \qquad \varnothing_B = \{y \in B : y \neq y\}.$$

Suponha que $\varnothing_A \not\subset \varnothing_B$. Então,

$$\exists\ a,\ a \in \varnothing_A \quad e \quad a \notin \varnothing_B.$$

Assim, como $a \in \varnothing_A$, temos que $a \neq a$, o que é uma proposição falsa, ou seja, uma contradição. Portanto,

$$\varnothing_A \subset \varnothing_B.$$

Com o mesmo argumento, provamos que $\varnothing_B \subset \varnothing_A$. Logo, temos $\varnothing_A \subset \varnothing_B$ e $\varnothing_B \subset \varnothing_A$. Portanto, pelo Teorema do Exemplo 2.2.9, obtemos $\varnothing_A = \varnothing_B$.

Uso do Método da Contradição: supõe-se a existência de elementos x e y, com as propriedades requeridas e que satisfazem as condições dadas, e que $x \neq y$. Com isso, deduz-se alguma contradição. Dessa forma, garante-se $x = y$.

Exemplo 2.3.13. *Exemplo de prova de afirmações de unicidade utilizando o método da contradição.*

Teorema: *O conjunto vazio é único.*

Prova:
Pela especificação de conjunto vazio, podemos determinar

$$\varnothing_A = \{x \in A : x \neq x\} \qquad e \qquad \varnothing_B = \{y \in B : y \neq y\}.$$

Suponha que $\varnothing_A \neq \varnothing_B$. Então, tem-se dois casos possíveis:

Primeiro caso: *$\exists\ a \in \varnothing_A$ diferente de todos os $b \in \varnothing_B$,*

ou

Segundo caso: *$\exists\ b \in \varnothing_B$ diferente de todos os $a \in \varnothing_A$.*

Sem perda de generalidade, suponhamos que ocarra o primeiro caso. Sendo assim, $\exists\ a \in \varnothing_A$ diferente de todos os $b \in \varnothing_B$, o que é uma contradição, pois $\varnothing_A$ não possui elemento.

Portanto, $\varnothing_A = \varnothing_B$.

2.4 Prova de Falsidade de Afirmação

Quando estamos diante de uma afirmação, a iniciativa possivelmente natural é de analisá-la, afim de determinar seu valor lógico verdadeiro ou falso. Nessa análise é muito importante o entedimento dos quantificadores existêncial e universal.

2.4.1 Contra-exemplo

Para provar que uma afirmação da forma

$$\forall\ x \in D, P(x) \tag{2.14}$$

é falsa, basta provar que a sua negação

$$\exists\ x \in D, \sim P(x)$$

é verdadeira, ou seja, provar que existe pelo menos um elemento $a \in D$ tal que $\sim P(a)$ é verdadeira, que equivale a $P(a)$ falsa. Portanto, para provar que (2.14) é falsa, basta provar que existe $a \in D$ tal que $P(a)$ é falsa.

Definição 2.4.1. *Um elemento $a \in D$ é chamado um Contra-exemplo para a afirmação*
$$\forall\ x \in D, P(x)$$
quando $P(a)$ é falsa.

Exemplo 2.4.2. *Do Exemplo 2.4.10, considere U o conjunto de todas as capitais do mundo e a proposição aberta*

"$P(x)$: x não é a capital da Inglaterra".

A afirmação
$$\forall\ x \in U, P(x)$$
é falsa, pois
$$Londres \in U, \sim P(Londres),$$
ou seja, $\sim P(Londres)$ é verdadeiro, o que implica $P(Londres)$ falso.
Portanto, "Londres" é um contra-exemplo.

Observação 2.4.3. *Em geral, exemplos não provam uma afirmação com quantificador universal. Mas basta um contra-exemplo para desprová-la.*

Para provar a falsidade de uma afirmação implicativa
$$\forall\ x \in D, [P(x) \Rightarrow Q(x)],$$
deve-se encontrar um contra-exemplo, isto é, determinar um $a \in D$ tal que $P(a)$ é verdadeira e $Q(a)$ é falsa.

Exemplo 2.4.4. *Seja C o conjunto de todos os países e as proposições abertas*

"$P(x)$: O x é um país latino"   *e*   *"$Q(x)$: O x é um país sulamericano".*

A afirmação
$$\forall\ x \in C, [P(x) \Rightarrow Q(x)],$$
é falsa, pois "México" $\in C$ é um contra-exemplo, isto é, $P(México)$ é verdadeiro e $Q(México)$ é falso.

2.4.2 Falsidade de Afirmação Existencial

Para provar que uma afirmação da forma
$$\exists\ x \in D, P(x) \tag{2.15}$$
é falsa, basta provar que a sua negação
$$\forall\ x \in D, \sim P(x)$$
é verdadeira.

Observação 2.4.5. *Geralmente, para provar a falsidade de uma afirmação existencial, é útil o uso do método da contradição; supondo-se a afirmação verdadeira e obtendo-se uma contradição.*

Exemplo 2.4.6. *Existe um conjunto de todos os conjuntos.*
(Foi provado que tal conjunto não existe, vide Exemplo (2.3.10)).

O Paradoxo de Russel

Neste momento muitos de nós achamos que entendemos o significado de conjunto, pelo menos intuitivamente. A maioria de nós, fazendo um curso de teoria dos conjuntos pela primeira vez, não perceberia o que há de errado em considerar "o conjunto de todos os conjuntos" ou o assim chamado "conjunto universal" no sentido absoluto. Na verdade, por um período de tempo (pelo menos de 1895, quando Georg Cantor pioneiramente criou uma teoria dos conjuntos, até 1902, quando o Paradoxo de Russel apareceu), a existência de um tal conjunto universal era considerada como certa. Foi o famoso filósofo inglês Bertrand Russel (1872-1970) que chocou a comunidade matemática em 1902, declarando que a admissão de um conjunto de todos os conjuntos levaria a uma contradição. Esse é o famoso Paradoxo de Russel.

Embora o conjunto universo no sentido absoluto (conjunto de todos os conjuntos) não exista, em nosso contexto de interesse, não há problema em assumirmos temporariamente que todos os conjuntos mencionados no restante deste e do próximo capítulo são subconjuntos de um conjunto fixo U (considerado temporariamente um conjunto universo no sentido restrito).

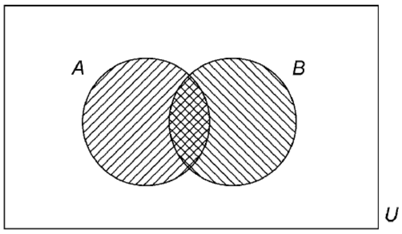
Conjunto Universo

Chamaremos de *conjunto universo* ou *universo do discurso*, representado por U, o conjunto que representa o assunto da discussão ou o tema em pauta, ou seja, estaremos falando somente dos elementos de U.

Uma vez fixado U, todos os elementos a serem considerados pertencerão a U e todos os conjuntos serão subconjuntos de U, ou derivados destes. Por exemplo, na Geometria Plana, U é o plano (ver [5]).

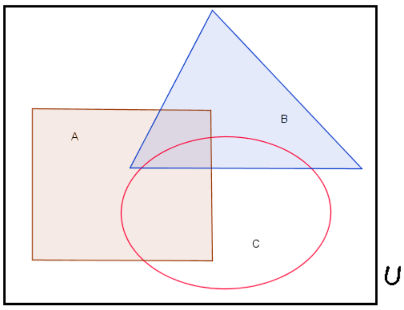
Diagramas de Venn

Como auxílio na vizualização de operações de conjuntos, introduziremos diagramas, chamados *Diagramas de Venn*, que representam conjuntos geometricamente. Representaremos o conjunto universal U por um retângulo, e os conjuntos de U por círculos desenhados dentro do retângulo. Por exemplo, na Figura abaixo, representamos dois conjuntos A e B como dois círculos sombreados; a parte duplamente hachurada é a interseção $A \cap B$, e a área sombreada total é a união $A \cup B$.



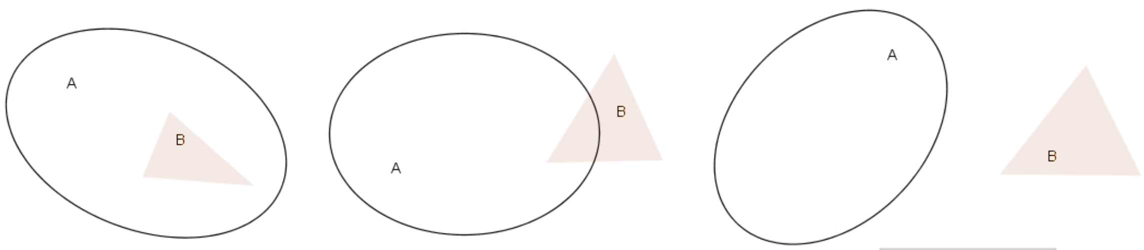
Apesar dos elementos caracterizarem um conjunto, na representação pelo *Diagrama de Venn*, é interessante por ser mais didático, representar conjuntos diferentes por figuras diferentes.

Dados três conjuntos A, B e C, diferentes entre si, podemos representá-los por:



A seguir, uma ilustração para ajudar no entendimento do conceito de "inclusão de conjuntos", ou seja, dados dois conjuntos A e B: A *está contido* em B, ou A *não está contido* em B.

Considere $a \in A$ e $b \in B$.



B⊂A (Todo "b" é "a") B⊄A (existe 'b" que não é "a") B⊄A (nenhum "b" é "a")

Observação 2.4.7. *Note que a relação de inclusão entre conjuntos está estreitamente relacionado com a implicação lógica. Vejamos: sejam P e Q propriedades referentes a um elemento genérico de um conjunto U. Essas propriedades definem os conjuntos A, formados pelos elementos de U que gozam de P, e B, conjunto formado pelos elementos de U que têm a propriedade Q. Diz-se então que a propiedade P implica (ou acarreta) a propriedade Q, e escreve-se $P \Rightarrow Q$, para significar que $A \subset B$. Por exemplo, seja U o conjunto dos quadriláteros convexos do plano. Designemos com P a propriedade de um quadrilátero ter seus quatro ângulos retos e por Q a propriedade* *de um quadrilátero ter seus lados opostos paralelos. Então podemos escrever $P \Rightarrow Q$. Com efeito, neste caso, A é o conjunto dos retângulos e B é o conjunto dos paralelogramos, logo $A \subset B$ (ver [5, p.6]).*

2.4.3 O Complementar de um Conjunto

Dado um conjunto A qualquer e o *conjunto universo* ou *universo do discurso* U (onde todos os elementos considerados pertencem a U inclusive todos os elementos de A), Chamamos de *complementar de* A ao conjunto A^c formado pelos elementos de U que não pertencem a A. Representação:

$$A^c = \{x : x \notin A\} \tag{2.16}$$

Exemplo 2.4.8. *Considere U o conjunto de todas as letras do alfabeto e a proposição aberta "$P(x)$: x é consoante". Se A é o conjunto das consoantes, vimos que podemos fazer a representação*

$$A = \{x \in U : P(x)\},$$

e como o complementar de A visto em (2.16) *é dado por*

$$\{x : x \notin A\}$$

podemos representar o conjunto complementar de A da seguinte maneira:

$$A^c = \{x \in U : \sim P(x)\} \text{ ou seja, } A^c = \{a, e, i, o, u\}$$

que é o conjunto das vogais.

Para cada elemento x em U, vale apenas uma das alternativas:

$$x \in A \text{ ou } x \notin A.$$

O fato de que para todo $x \in U$ não existir uma outra opção além de $x \in A$ ou $x \notin A$ é conhecido, como vimos nas proposições, como *o princípio do terceiro excluído*, e o fato de que as alternativas $x \in A$ e $x \notin A$ não poderem ser verdadeiras ao mesmo tempo, pois uma é a negação da outra, chama-se o *princípio da não-contradição.*

Sendo assim, podemos escrever:

$$x \textit{ pertence} \text{ a } A^c, \text{ se } x \textit{ não pertence} \text{ a } A;$$

e

$$x \textit{ não pertence} \text{ a } A^c, \text{ se } x \textit{ pertence} \text{ a } A.$$

Podemos resumir o conceito de complementar de um conjunto A para todo x em U, na seguinte tabela:

A	A^c
$\in$	$\notin$
$\notin$	$\in$

Tabela 2.1: *Complementar do Conjunto A, $\forall\ x \in U$.*

Observação 2.4.9. *Note a mesma relação entre: "uma proposição $\sim P$ ser* verdadeira *quando P é falsa, e $\sim P$ ser* falsa *quando P é verdadeira", visto na definição 1.5.1 e a "*pertinência *de um elemento x de U ao conjunto A^c, se x não pertence a A e a* não pertinência *de x ao conjunto A^c, se x pertence a A", visto acima.*

Do ponto de vista lógico, utilizando uma propriedade $P(x)$ para definir um conjunto A, esse é formado pelos elementos de U que gozam da propriedade $P(x)$. A propriedade que define o conjunto A^c, é a negação de $P(x)$, $\sim P(x)$. Assim, dizer que um elemento x goza da propriedade $\sim P(x)$ significa (por definição) afirmar que x não goza da propriedade $P(x)$.

Dessa forma, para cada proposição P *verdadeira*, podemos determinar um conjunto A de propriedade $P(x)$, onde $\exists\ a \in U$, tal que $P(a)$ é equivalente a P. E para cada proposição P *falsa*, tem-se o complementar do conjunto A, ou seja, A^c de propriedade $\sim P(x)$, tal que $\sim P(a)$ é equivalente a P, para algum a de U.

Exemplo 2.4.10. *Considere U o conjunto de todas as capitais do mundo. Para a proposição*

"P: Londres é a capital da Inglaterra",

que sabemos ser uma proposição verdadeira, podemos determinar um conjunto A de propriedade

"$P(x)$: x é a capital da Inglaterra",

tal que

$$Londres \in U,\ P(Londres).$$

Nesse caso, dizemos que A é um conjunto unitário, *por possuir apenas um elemento,*

$$A = \{Londres\}.$$

Note que a proposição P não pode ser falsa, pois como visto acima, existiria um conjunto complementar A^c de propriedade

"$\sim P(x)$: x não é a capital da Inglaterra",

tal que

$$Londres \in U,\ \sim P(Londres).$$

O que seria uma contradição, "Londres" pertencer a A e também pertencer a A^c, haja vista o que foi definido em (2.16), $A^c = \{x \in U : x \notin A\}$.

Exemplo 2.4.11. *Considere agora U o conjunto de todos os meses do ano e a proposição aberta em U,*

"$P(x)$: x é um mês do primeiro semestre do ano".

Para todas as proposições $P(a)$ verdadeiras, $\forall\ a \in U$, tem-se o conjunto

$$A = \{x \in U, P(x)\} = \{\textit{janeiro, fevereiro, março, abril, maio, junho}\}.$$

Já para todas as proposições $P(a)$ falsas, tem-se o conjunto A^c de propriedade

"$\sim P(x)$: x não é um mês do primeiro semestre do ano",

tal que

$$A^c = \{x \in U, \sim P(x)\} = \{\textit{julho, agosto, setembro, outubro, novembro, dezembro}\},$$

que são os meses do segundo semestre do ano.

Só para reforçar, sabemos que o ano possui dois semestres, e que o mesmo mês não pode pertencer a ambos os semestres. Portanto, x pertence somente *a A ou* somente *a A^c.*

Exemplo 2.4.12 (Propriedade)**.** *Todo conjunto é complementar do seu complementar,*

$$(A^c)^c = A.$$

Prova:
(Implicação)
Pela definição de conjunto complementar,
Se $x \in (A^c)^c$, então $x \notin (A^c)$. Se $x \notin (A^c)$, então $x \in A$.
Logo, $(A^c)^c \subset A$.
(Recíproca)
Se $x \in A$, então $x \notin (A^c)$. Se $x \notin (A^c)$, então $x \in (A^c)^c$.
Logo, $A \subset (A^c)^c$.
Assim, pelo teorema do Exemplo 2.2.9, temos

$$(A^c)^c = A.$$

Exemplo 2.4.13. *Usando o método de prova de afirmações da forma "se, e somente se", vamos provar o seguinte teorema:*

Teorema: *Sejam A e B conjuntos quaisquer,*

$A \subset B$ se, e somente se, $B^c \subset A^c$.

Prova:
(Implicação)
Se $A \subset B$*, então* $(x \in A) \Rightarrow (x \in B)$*;*
Pela equivalência lógica com a contrapositiva, visto no Exemplo 1.6.10 da seção Equivalências Lógicas, tem-se
$(x \in A) \Rightarrow (x \in B) \equiv (x \notin B) \Rightarrow (x \notin A)$*;*
Pela definição de complementar, tem-se,
Se $(x \notin B) \Rightarrow (x \notin A)$*, então* $(x \in B^c) \Rightarrow (x \in A^c)$*;*
E pela definição de subconjuntos, tem-se
Se $(x \in B^c) \Rightarrow (x \in A^c)$*, então* $B^c \subset A^c$*.*
Logo, $A \subset B \Rightarrow B^c \subset A^c$*.*
(Recíproca)
Se $B^c \subset A^c$*, então* $(x \in B^c) \Rightarrow (x \in A^c)$*;*
Pela equivalência lógica com a contrapositiva, visto no Exemplo 1.6.10 da seção Equivalências Lógicas, tem-se
$(x \in B^c) \Rightarrow (x \in A^c) \equiv (x \notin A^c) \Rightarrow (x \notin B^c)$*;*
Pela definição de complementar, tem-se,
Se $(x \notin A^c) \Rightarrow (x \notin B^c)$*, então* $(x \in A) \Rightarrow (x \in B)$*;*
E pela definição de subconjuntos, tem-se
Se $(x \in A) \Rightarrow (x \in B)$*, então* $A \subset B$*.*
Logo, $B^c \subset A^c \Rightarrow A \subset B$*.*
Assim, pelo teorema do Exemplo 2.2.9, temos

$A \subset B$ *se, e somente se,* $B^c \subset A^c$*.*

Exemplo 2.4.14. *Usando o método de prova de afirmações da forma "se, e somente se", vamos provar o seguinte teorema:*

Teorema: (Teorema de De Morgan) *Sejam* A *e* B *conjuntos quaisquer,*

$$(A \cup B)^c = (A^c \cap B^c)$$

Prova:
(Implicação)
Pela definição de conjunto complementar, tem-se,
Se $x \in (A \cup B)^c$*, então* $\sim [(x \in (A \cup B)]$*;*
Pela definição de união
Se $\sim [(x \in (A \cup B)]$*, então* $\sim [(x \in A) \vee (x \in B)]$*;*
Pelas leis de De Morgan nas proposições, vistas no Exemplo 1.6.4 da seção Equivalências Lógicas, tem-se $\sim [(x \in A) \vee (x \in B)] \equiv (x \notin A) \wedge (x \notin B)$*;*
Pela definição de conjunto complementar, tem-se,
Se $(x \notin A) \wedge (x \notin B)$*, então* $(x \in A^c) \wedge (x \in B^c)$*;*
E pela definição de interseção,

Se $(x \in A^c) \wedge (x \in B^c)$*, então* $x \in (A^c \cap B^c)$*.*
Logo, $(A \cup B)^c \subset (A^c \cap B^c)$*.*
(Recíproca)
Pela definição de Interseção
Se $x \in A^c \cap B^c$*, então* $(x \in A^c) \wedge (x \in B^c)$*;*
Pela definição de complementar
Se $(x \in A^c) \wedge (x \in B^c)$*, então* $(x \notin A) \wedge (x \notin B)$*;*
Se $(x \notin A) \wedge (x \notin B)$*, então* $x \notin A \cup B$*;*
E novamente pela definição de conjunto complementar
Se $x \notin A \cup B$*, então* $x \in (A \cup B)^c$*.*
Logo, $(A^c \cap B^c) \subset (A \cup B)^c$*.*
Assim, pelo teorema do Exemplo 2.2.9, temos

$$(A \cup B)^c = (A^c \cap B^c).$$

De forma análoga, prova-se

$$(A \cap B)^c = (A^c \cup B^c).$$

Capítulo 3

Números Naturais

Nos padrões atuais de rigor matemático, a construção e apresentação de uma Teoria Matemática consiste basicamente em:

1. Formular uma lista dos *Conceitos Primitivos*;
2. Formular os *Axiomas*;
3. Formular *Definições* de demais Conceitos fazendo uso de termos específicos a exemplo dos Termos Primitivos, dos Axiomas, de outras Definições, etc;
4. Deduzir (Provar ou Demonstrar) Afirmações e Resultados Subsequentes (*Teoremas*).

3.1 Os Números Naturais

Pode-se dizer que Números são entes abstratos, desenvolvidos pelo homem como modelos, que permitem contar e medir. Baseados em longas reflexões que se deram através de muitos séculos, podemos estudar hoje tudo que se conhece sobre os *Números Naturais* através dos chamados *Axiomas de Peano*, introduzido pelo matemático italiano Giuseppe Peano em 1891.

3.1.1 Os Axiomas de Peano

A pretexto de contextualizar a construção e exposição dos *Números Naturais* feita por Peano com o que apresetamos até o presente neste texto, vamos assumir como conceitos primitivos os seguintes conceitos:

Conceitos Primitivos de Peano:

- *Zero* (que é denotado por 0);
- *Número Natural*;
- *Sucessor*.

À medida que Peano considerou os termos primitivos ele formulou os seguintes axiomas:

Axiomas de Peano:

P_1) 0 é *número natural*;

P_2) Cada *número natural* tem um único *sucessor* que também é *número natural*;

P_3) 0 não é *sucessor* de nenhum *número natural*;

P_4) Dois *números naturais* que possuem *sucessores* iguais devem ser (eles próprios) iguais;

P_5) Se S é um conjunto de *números naturais* que contém 0 e contém o *sucessor* de cada um de seus elementos, então S é o conjunto de todos os *números naturais*.

Notação 3.1.1. *Adotaremos as seguintes notações:*

- *Usamos a expressão $s(n)$ para representar o sucessor do número natural n;*
- *Usamos a letra $\mathbb{N}$ para denotar o conjunto de todos os números naturais;*
- *O Axioma P_5) é conhecido como Axioma (Princípio) da Indução Completa.*

As vezes reescrevendo os Axiomas de Peano usando a simbologia matemática pode-se facilitar a compreensão e o uso do conceitos.

Axiomas de Peano (simbolicamente):

P_1) $0 \in \mathbb{N}$;

P_2) $n \in \mathbb{N} \ \Rightarrow$ existe único $s(n) \in \mathbb{N}$;

P_3) $\forall\ n, n \in \mathbb{N} \ \Rightarrow s(n) \neq 0$;

P_4) $s(m) = s(n) \ \Rightarrow \ m = n$;

P_5) Se $S \subset \mathbb{N}$ é um conjunto que

i) $0 \in S$;

ii) $n \in S \ \Rightarrow \ s(n) \in S$;

então $S = \mathbb{N}$.

Observação 3.1.2. *Temos as seguintes observações imediatas decorrentes dos Axiomas de Peano:*

i) $\mathbb{N} \neq \emptyset$ *($\emptyset$ representa o conjunto vazio), pois* 0 *é um número natural;*

ii) Temos que $m \neq n \ \Rightarrow \ s(m) \neq s(n)$*. Note que essa afirmação é a* contrapositiva *do Axioma* P_4*).*

Fazendo uso dos Axiomas de Peano, a primeira afirmação que conseguimos verificar é que cada número natural é diferente do seu sucessor.

Teorema 3.1.3. *Se* $n \in \mathbb{N}$*, então* $s(n) \neq n$*.*

Demonstração. Seja $S = \{a \in \mathbb{N} : s(a) \neq a\}$. Basta mostrar que $S = \mathbb{N}$. Os axiomas P_1) e P_3) garantem $0 \in S$, pois $0 \in \mathbb{N}$ e $\forall\ n \in \mathbb{N}$, tem-se $s(n) \neq 0$, logo $s(0) \neq 0$. Se $a \in S$, então $s(a) \neq a$ pela especificação do conjunto S. Pelo axioma P_4), tem-se $s(s(a)) \neq s(a)$. Logo, pela especificação do conjunto S, $s(a) \in S$. Portanto, pelo axioma P_5), como $0 \in S$ e $\forall\ a \in S \Rightarrow s(a) \in S$, $S = \mathbb{N}$. □

Com o Teorema 3.1.3 podemos deduzir que $\mathbb{N}$ possui muitos elementos. Vejamos a dedução:

- $0 \in \mathbb{N}$ e o chamamos de 'Número Zero' ou simplismente 'Zero';
- $1 = s(0) \in \mathbb{N}$ e o chamamos de 'Número Um' ou simplismente 'Um'.

Observe que $1 \neq 0$. Garantimos isso usando o Teorema 3.1.3.

- $2 = s(1) = s(s(0)) \in \mathbb{N}$ e o chamamos de 'Número Dois' ou simplismente 'Dois'.

  Observe que $2 \neq 0$ e $2 \neq 1$. De fato:

  Justificativa de $2 \neq 0$**:** Pelo Axioma P_3), temos $2 = s(1) \neq 0$.

  Justificativa de $2 \neq 1$**:** Pelo Teorema 3.1.3, temos $2 = s(1) \neq 1$.

- $3 = s(2) = s(s(s(0))) \in \mathbb{N}$ e o chamamos de 'Número Três' ou simplismente 'três'.

  Observe que $3 \neq 0$, $3 \neq 1$ e $3 \neq 2$. De fato:

  Justificativa de $3 \neq 0$**:** Pelo Axioma P_3), temos $3 = s(2) \neq 0$.

  Justificativa de $3 \neq 1$**:** Temos garantido que $2 \neq 0$. Então, pelo item *ii)* da Observação 3.1.2, tem-se $s(2) \neq s(0)$. Logo,

  $$3 = s(2) \neq s(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad 3 \neq 1.$$

  Justificativa de $3 \neq 2$**:** Pelo Teorema 3.1.3, temos $3 = s(2) \neq 2$.

- $4 = s(3) = s(s(s(s(1))))) \in \mathbb{N}$ e o chamamos de 'Número Quatro' ou simplismente 'Quatro'.

  Observe que $4 \neq 0$, $4 \neq 1$, $4 \neq 2$ e $4 \neq 3$. De fato:

  Justificativa de $4 \neq 0$**:** Pelo Axioma P_3), temos $4 = s(3) \neq 0$.

  Justificativa de $4 \neq 1$**:** Temos garantido que $3 \neq 0$. Então, pelo item *ii)* da Observação 3.1.2, tem-se $s(3) \neq s(0)$. Logo,

  $$4 = s(3) \neq s(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad 4 \neq 1.$$

  Justificativa de $4 \neq 2$**:** Temos garantido que $3 \neq 1$. Então, pelo item *ii)* da Observação 3.1.2, tem-se $s(3) \neq s(1)$. Logo,

  $$4 = s(3) \neq s(1) = 2 \quad \Rightarrow \quad 4 \neq 2.$$

  Justificativa de $4 \neq 3$**:** Pelo Teorema 3.1.3, temos $4 = s(3) \neq 3$.

Seguindo esse raciocínio construímos os números naturais

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, \cdots, 997, 998, 999, 1000, 1001, \cdots, 100000000000000,$$

por exemplo, sendo eles todos distintos. Observe que o número natural 100000000000000 não possui "nome", assim como "seus sucessores". Mas isso não tem a menor importância! O que realmente deve ser levado em consideração, e o que acabamos de apresentar ilustra bem, não são os "nomes" que conhecemos de alguns números naturais, mas sim as suas propriedades.

Após a recorrência na construção de alguns números, surge uma pergunta natural. Será que seguindo esse raciocínio indefinidamente consegue-se construir todos os números naturais? A resposta é sim! Vamos colocar isso como um teorema, pois a justificativa deve-se ao Axioma P_5).

Teorema 3.1.4. *Se* $\mathbb{N}$ *é o conjunto dos números naturais, então*

$$\boxed{\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \cdots\}.}$$

Demonstração. Para garantir a validade do teorema, consideramos o conjunto

$$S = \{0, 1, 2, 3, 4, \cdots\}.$$

Como cada elemento de S é um número natural, então $S \subset \mathbb{N}$. Agora, observe que:

i) $0 \in S$;

ii) $n \in S \;\Rightarrow\; s(n) \in S$.

Então, o Axioma P_5) garante que $S = \mathbb{N}$, ou seja,

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \cdots\}.$$

□

O Axioma P_5) dá origem a um método de demonstração de afirmações que dependem dos números naturais, conhecido como *Princípio de Indução*. Para apresentar esse método, vamos representar por $P(n)$ uma afirmação que dependa de cada número natural n.

3.2 Método de Indução Finita

Muitas afirmações em matemática envolve uma proposição com quantificador universal da forma

$$\forall\, n \in \mathbb{N}; P(n),$$

onde $P(n)$ é uma sentença aberta com variável n e domínio $\mathbb{N}$.

Teorema 3.2.1 (Princípio de Indução Finita - P.I.F.). *Seja* $P(n)$ *uma sentença aberta com domínio* $\mathbb{N}$*. Se valem as duas condições:*

(i) $P(1)$ *é uma afirmação verdadeira;*

(ii) $P(k)$ *verdadeira implica* $P(k+1)$ *verdadeira;*

então $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$[1].

Para provar uma afirmação da forma

$$\forall\, n \in \mathbb{N}; P(n)$$

usando o Teorema 3.2.1, devemos verificar que:

- $P(1)$ é válida.
- Supondo que $P(k)$ é válida, obtemos $P(k+1)$ válida.

Observação 3.2.2. *Usualmente chamamos a suposição de que $P(k)$ é válida de **Hipótese de Indução**.*

Teorema 3.2.3 (P.I.F.-2^a Forma). *Seja $P(n)$ uma sentença aberta com domínio $\mathbb{N}$. Se valem as duas condições:*

(i) *$P(1)$ é uma afirmação verdadeira;*

(ii) *Para cada $m \geq 2$, $P(k)$ verdadeira, para $k = 2, \cdots, k = m$, implica $P(m+1)$ verdadeira;*

então $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 3.2.4 (Princípio de Indução - PI). *Se $P(n)$ é uma afirmação que depende de cada número natural n e que:*

i) $P(1)$ é válida;

ii) para cada $n \in \mathbb{N}$, a validez de $P(n)$ implica a validez de $P(s(n))$ ($s(n)$ é o sucessor de n);

então $P(n)$ é válida para todos os números $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Seja $S = \{n \in \mathbb{N} : P(n)\}$. Vamos mostrar que $S = \mathbb{N}$. Da hipótese (i) temos que $1 \in S$. Supondo que $n \in S$, temos que $P(n)$ é verdadeira. Por (ii), $P(s(n))$ é verdadeira. Logo, $s(n) \in S$. Assim, $n \in S$ implica $s(n) \in S$. Pelo axioma P_5), $S = \mathbb{N}$. Logo, $P(n)$ é verdadeira, para todo $n \in \mathbb{N}$.

$\square$

Para apresentar as várias aplicações simples e interessantes que mostram a importância do Princípio de Indução, precisamos estudar as operações de *Soma* e *Multiplicação*, a *Relação de Ordem* dos números naturais e as propriedades que delas decorrem.

[1] A prova desse teorema será feita pelo método da contradição com o uso do Princípio da Boa Ordenação que veremos mais adiante.

3.2.1 Soma de Números Naturais

Possivelmente estejamos práticos com a soma de números naturais, pelo menos em relação a soma de uma parcela deles, que são aqueles suficientes ao nosso uso no cotidiano. Porém, quando estudamos os números naturais é necessário ir um pouco além. Para definir o conceito de soma, vamos primeiro observar que:

Soma com 0:

$$1+0=1, \qquad 2+0=2, \qquad 3+0=3, \qquad 4+0=4, \quad \cdots$$

Soma com 1:

$$\begin{aligned}1+1 &= 1+s(0)=s(1+0)=s(1)=2,\\ 2+1 &= 2+s(0)=s(2+0)=s(2)=3,\\ 3+1 &= 3+s(0)=s(3+0)=s(3)=4,\end{aligned}$$

Soma com 2:

$$\begin{aligned}1+2 &= 1+s(1)=s(1+1)=s(2)=3,\\ 2+2 &= 2+s(1)=s(2+1)=s(3)=4,\\ 3+2 &= 3+s(1)=s(3+1)=s(4)=5,\end{aligned}$$

Soma com 3:

$$\begin{aligned}1+3 &= 1+s(2)=s(1+2)=s(3)=4,\\ 2+3 &= 2+s(2)=s(2+2)=s(4)=5,\\ 3+3 &= 3+s(2)=s(3+2)=s(5)=6.\end{aligned}$$

Os casos particulares anteriores nos motivam a escrever, para qualquer número natural m:

$$m+0=m.$$

Eles também nos dão a soma de m com $s(0)=1$:

$$m+s(0)=s(m+0);$$

que por sua vez, também nos dão a soma de m com $s(s(0))=2$:

$$m+s(s(0))=s(m+s(0)); \tag{3.1}$$

e assim por diante. Isso motiva a definição de soma a seguir.

Soma de Números Naturais:

A *Soma* de dois números naturais m e n, representada por $m+n$, é definida recursivamente por

$$\begin{array}{rcl} m+0 & = & m \\ m+s(n) & = & s(m+n). \end{array}$$

Observação 3.2.5. *Como motivado, pela definição de soma, para cada* $m \in \mathbb{N}$, *temos*

$$m+s(0)=s(m+0)=s(m).$$

Como $s(0)=1$, *concluímos que o sucessor de qualquer* $m \in \mathbb{N}$ *é:*

$$s(m)=m+1. \tag{3.2}$$

Além disso, $s(s(m))=s(m+1)=((m+1)+1)$, *ou seja,*

$$s(s(m))=((m+1)+1).$$

De um modo geral, podemos entender a soma $m+n$, *para* $n \neq 0$, *como*

$$\boxed{m+n=((\cdots((m+1)+1)+\cdots+1),}$$

onde estamos obtendo o sucessor após n *vezes.*

A primeira coisa que podemos garantir com a definição de soma de números naturais é que a soma de dois deles é também um número natural, conforme a seguinte propriedade.

Propriedade 3.2.6 (Fechamento da Soma). *A soma de dois números naturais é um número natural. Simbolicamente:*

$$\boxed{m,n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad m+n \in \mathbb{N}.}$$

Demonstração. Se $n=0$ e $m \in \mathbb{N}$, temos $m+n=m+0=m \in \mathbb{N}$. Agora, se $n \neq 0$, podemos seguir (3.1) e obter

$$m+n=s(s(\cdots(s(m+s(0)))\cdots))$$

onde os três pontos "$\cdots$" indica que estamos obtendo o sucessor após n vezes. Como o Axioma P_2) garante que o sucessor é natural, concluímos que $m+n \in \mathbb{N}$. $\square$

Exemplo 3.2.7. *Determine a soma* $12 + 2$*,* $4 + 5$ *e* $973 + 3$*. Pela Observação 3.2.5 temos:*

$$\begin{aligned} 12 + 2 &= ((12 + 1) + 1) = 13 + 1 = 14, \\ \\ 4 + 5 &= (((((4 + 1) + 1) + 1) + 1) + 1) = ((((5 + 1) + 1) + 1) + 1) \\ &= (((6 + 1) + 1) + 1) = ((7 + 1) + 1) = 8 + 1 \\ &= 9 \end{aligned}$$

e

$$973 + 3 = (((973 + 1) + 1) + 1) = ((974 + 1) + 1) = 975 + 1 = 976.$$

Exemplo 3.2.8. *Para todo* $n \in \mathbb{N}$*, tem-se*

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (n - 1) + n = \frac{n(n + 1)}{2}. \tag{3.3}$$

Prova: *Na prova usamos o Princípio de Indução Finita. Considere*

$$P(n) : 1 + 2 + 3 + \cdots + (n - 1) + n = \frac{n(n + 1)}{2}.$$

Observe que

$$P(1) : 1 = \frac{1(1 + 1)}{2}.$$

Logo, $P(1)$ *é válida.*

Agora, suponha que

$$P(k) : 1 + 2 + 3 + \cdots + (k - 1) + k = \frac{k(k + 1)}{2}$$

é válida. Precisamos provar que

$$P(k + 1) : 1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k + 1) = \frac{(k + 1)((k + 1) + 1)}{2} \tag{3.4}$$

é válida. Para tanto, sendo $P(k)$ *válida, temos*

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (k - 1) + k = \frac{k(k + 1)}{2}.$$

Somando $(k + 1)$ *em ambos os lados da igualdade, obtemos*

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (k - 1) + k + (k + 1) = \frac{k(k + 1)}{2} + (k + 1). \tag{3.5}$$

Como

$$\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2}=\frac{(k+1)((k+1)+1)}{2},$$

substituindo isso em (3.5)*, tem-se*

$$1+2+3+\cdots+(k-1)+k+(k+1)=\frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}.$$

Então, $P(k+1)$ *é válida. Portanto, pelo Teorema 3.2.1, a formúla* (3.3) *é válida para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Propriedade 3.2.9. *Qualquer que seja* $m \in \mathbb{N}$, *temos*

$$\boxed{0+m=m \qquad e \qquad 0+m=m+0. \qquad (3.6)}$$

Demonstração. A justificativa é pelo Princípio de Indução. Considere $P(m)$ representando a afirmação $0+m=m$, ou seja,

$$P(m): 0+m=m.$$

Temos que:

i) $P(0)$ é válida, pois $0+0=0$;

ii) Vamos agora assumir a validez de $P(m)$, ou seja, vamos assumir que $0+m=m$ é verdade e devemos concluir que $P(s(m))$ também é verdade. Para concluir o que devemos, observemos nesse caso que temos

$$\begin{aligned} 0+s(m) &= s(0+m) && \text{(Definição de Soma)}\\ &= s(m) && \text{(Hipótese que } 0+m=m\text{);} \end{aligned}$$

e assim obtemos $P(s(m)): 0+s(m)=s(m)$ verdadeira.

Portanto, pelo Princípio de Indução, temos a validade da primeira igualdade de (3.6). Com a primeira igualdade de (3.6) garantida, podemos justificar a segunda observando que

$$0+m=m=m+0,$$

onde a segunda igualdade é a definição de soma. □

Propriedade 3.2.10. *Qualquer que seja* $m \in \mathbb{N}$, *temos*

$$\boxed{1+m=m+1. \qquad (3.7)}$$

Demonstração. A justificativa é pelo Princípio de Indução. Considere $P(m)$ representando a afirmação $1 + m = m + 1$, ou seja,

$$P(m) : 1 + m = m + 1.$$

Temos que:

i) $P(0)$ é válida, pois pela segunda igualdade de (3.6) obtemos $1 + 0 = 0 + 1$;

ii) Vamos agora assumir a validez de $P(m)$, ou seja, vamos assumir que $1 + m = m + 1$ é verdade e devemos concluir que $P(s(m))$ também é verdade. Para concluir o que devemos, observemos nesse caso que temos

$$\begin{aligned} 1 + s(m) &= s(1 + m) && \text{(Definição de Soma)} \\ &= s(m + 1) && \text{(Hipótese que } 1 + m = m + 1\text{)} \\ &= s(s(m)) && \text{(Garantida por (3.2))} \\ &= s(m) + 1 && \text{(Garantida por (3.2))} \end{aligned}$$

e assim obtemos $P(s(m)) : 1 + s(m) = s(m) + 1$ verdadeira.

Portanto, pelo Princípio de Indução, temos a validade da igualdade de (3.7). $\square$

Principais Propriedades da Soma de Números Naturais

Com a definição de soma de números naturais juntamente com o Princípio de Indução conseguimos justificar muitas propriedade dos números naturais. Apresentamos a seguir algumas das principais propriedades:

S_1 - **Associativa:** para quaisquer números $l, m, n \in \mathbb{N}$

$$\boxed{l + (m + n) = (l + m) + n.}$$

Justificativa: Vamos justificar usando o Princípio de Indução, considerando $P(n)$ representando a afirmação $l + (m + n) = (l + m) + n$, com $l, m \in \mathbb{N}$ dados, ou seja,

$$P(n) : l + (m + n) = (l + m) + n.$$

Temos que:

i) $P(0)$ é válida, pois

$$l + (m + 0) = l + m = (l + m) + 0;$$

ii) Vamos agora assumir a validez de $P(n)$, ou seja, vamos assumir que

$$l + (m + n) = (l + m) + n \tag{3.8}$$

é verdade e devemos concluir que $P(s(n))$ também é verdade. Para concluir o que devemos, observemos nesse caso que temos

$$\begin{aligned} (l+m)+s(n) &= s((l+m)+n) && \text{(Definição de Soma)} \\ &= s(l+(m+n)) && \text{(Hipótese (3.8))} \\ &= l+s(m+n) && \text{(Definição de Soma)} \\ &= l+(m+s(n)) && \text{(Definição de Soma)} \end{aligned}$$

e assim obtemos $P(s(n)) : (l + m) + s(n) = l + (m + s(n))$ verdadeira.

Portanto, pelo Princípio de Indução, temos a validade da Propriedade Associativa.

S_2 - **Comutativa:** para quaisquer números $m, n \in \mathbb{N}$

$$\boxed{m + n = n + m.}$$

Justificativa: Vamos justificar usando o Princípio de Indução, considerando $P(n)$ representando a afirmação $m + n = n + m$, com $m \in \mathbb{N}$ dado, ou seja,

$$P(n) : m + n = n + m.$$

Temos que:

i) $P(0)$ é válida, pois $m + 0 = 0 + m$, garantida por (3.6);

ii) Vamos agora assumir a validez de $P(n)$, ou seja, vamos assumir que

$$m + n = n + m$$

é verdade e devemos concluir que $P(s(n)) : m + s(n) = s(n) + m$ também é verdade. Para concluir o que devemos, observemos nesse caso que temos

$$\begin{aligned} m+s(n) &= s(m+n) && \text{(Definição de Soma)} \\ &= s(n+m) && \text{(Hipóetese que } m+n=n+m\text{)} \\ &= (n+m)+1 && \text{(Garantida por (3.2))} \\ &= n+(m+1) && \text{(Associatividade)} \\ &= n+(1+m) && \text{(Garantida por (3.7))} \\ &= (n+1)+m && \text{(Associatividade)} \\ &= s(n)+m; && \text{(Garantida por (3.2))} \end{aligned}$$

e assim obtemos $P(s(n)) : m + s(n) = s(n) + m$ verdadeira.

Portanto, pelo Princípio de Indução, temos a validade da Propriedade Comutativa.

S_3 - **Lei do Cancelamento:** para quaisquer números $l, m, n \in \mathbb{N}$

$$\boxed{m + l = n + l \quad \Rightarrow \quad m = n.}$$

Justificativa: Vamos justificar usando o Princípio de Indução Finita, considerando $P(l)$ representando a afirmação $m + l = n + l$, implica $m = n$, com $m, n \in \mathbb{N}$ dados, ou seja,

$$P(l) : m + l = n + l \Rightarrow m = n.$$

Temos que:

i) $P(1)$ é válida, pois $m + 1 = n + 1 \Rightarrow s(m) = s(n) \Rightarrow m = n$, garantida pelo axioma P_4) de Peano;

ii) Vamos agora assumir a validez de $P(k)$, ou seja, vamos assumir que

$$P(k) : m + k = n + k \Rightarrow m = n$$

é verdade e devemos concluir que $P(k+1)$ também é verdade. Para concluir o que devemos, observemos nesse caso que temos

$$\begin{array}{rcll} m + (k+1) & = & n + (k+1) & \text{(Hipótese)} \\ (m+k) + 1 & = & (n+k) + 1 & \text{(Propriedade Associativa da Soma)} \\ s(m+k) & = & s(n+k) & \text{(Definição de Sucessor)} \\ (m+k) & = & (n+k) & \text{(Garantida pelo Axioma } P_4 \text{ de Peano)} \\ m & = & n & \text{(Garantida pela Hipótese de Indução)} \end{array}$$

e assim obtemos $P(k) : m + k = n + k \Rightarrow m = n$ verdadeira.

Portanto, pelo Princípio de Indução Finita, temos a validade da Propriedade Lei do Cancelamento.

S_4 - Temos:

$$\boxed{m + n = 0 \quad \Rightarrow \quad m = 0 \quad \text{e} \quad n = 0.}$$

Justificativa: Vamos justificar usando o Método da Contradição. Se $m+n = 0$ e $n \neq 0$, então existe um natural c tal que $n = s(c)$ e $m + s(c) = 0$. Da definição de soma, $m + s(c) = 0 \Rightarrow s(m + c) = 0$, o que contradiz o axioma P_3) de Peano, $\forall\, n, n \in \mathbb{N} \ \Rightarrow s(n) \neq 0$. Analogamente, para $m \neq 0$, obtemos uma contradição. Portanto, $m = 0$ e $n = 0$.

3.2.2 Multiplicação de Números Naturais

Assim como no caso da soma, possivelmente estejamos práticos com a multiplicação de números naturais, pelo menos em relação a multiplicação de uma parcela deles. Para definir o conceito de multiplicação, devemos observar que:

Multiplicação por 0:

$$1 \cdot 0 = 0, \qquad 2 \cdot 0 = 0, \qquad 3 \cdot 0 = 0, \qquad 4 \cdot 0 = 0, \quad \cdots$$

Multiplicação por 1:

$$\begin{aligned} 1 \cdot 1 = 1 \cdot 0 + 1 = 1, \\ 2 \cdot 1 = 2 \cdot 0 + 2 = 2, \\ 3 \cdot 1 = 3 \cdot 0 + 3 = 3, \end{aligned}$$

Multiplicação por 2:

$$\begin{aligned} 1 \cdot 2 = 1 \cdot 1 + 1 = 2, \\ 2 \cdot 2 = 2 \cdot 1 + 2 = 4, \\ 3 \cdot 2 = 3 \cdot 1 + 3 = 6, \end{aligned}$$

Multiplicação por 3:

$$\begin{aligned} 1 \cdot 3 = 1 \cdot 2 + 1 = 3, \\ 2 \cdot 3 = 2 \cdot 2 + 2 = 6, \\ 3 \cdot 3 = 3 \cdot 2 + 3 = 9, \end{aligned}$$

Os casos particulares anteriores motivam a definição de multiplicação a seguir.

Multiplicação de Números Naturais:

A *Multiplicação* de dois números naturais m e n, representada por $m \cdot n$ ou simplesmente mn, é definida recursivamente por

$$\begin{array}{rcl} m \cdot 0 & = & 0 \\ m \cdot s(n) & = & m \cdot n + m. \end{array}$$

Observação 3.2.11. *Como por* (3.2) $s(n) = n + 1$, *a definição de multiplicação pode ser apresentada como*

$$m \cdot (n + 1) = m \cdot n + m. \tag{3.9}$$

Assim como o caso da soma, a primeira coisa que podemos garantir com a definição de multiplicação de núneros naturais é que a soma de dois deles é também um número natural.

Propriedade 3.2.12 (Fechamento da Multiplicação). *A Multiplicação de dois números naturais é um número natural. Simbolicamente:*

$$\boxed{m, n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad mn \in \mathbb{N}.}$$

Demonstração. A justificativa é pelo Princípio de Indução. Considere, para cada número natural dado m, $P(n)$ representando a afirmação $mn \in \mathbb{N}$, ou seja,

$$P(n) : mn \in \mathbb{N}.$$

Temos que:

i) $P(0)$ é válida, pois pela definição de multiplicação tem-se $m \cdot 0 = 0 \in \mathbb{N}$;

ii) Vamos agora assumir a validez de $P(k)$, ou seja, vamos assumir que $m \cdot k \in \mathbb{N}$ é verdade e devemos concluir que $P(s(k))$ também é verdade. Para concluir o que devemos, observemos nesse caso que temos

$$m \cdot s(k) \quad = \quad m \cdot k + m. \qquad \text{(Definição de Multiplicação)}$$

Como por hipótese $mk \in \mathbb{N}$, obtemos que $m \cdot k + m \in \mathbb{N}$ pois a soma de dois naturais é natural. Assim, temos $P(s(k)) : m \cdot s(k) \in \mathbb{N}$ verdadeira.

Portanto, pelo Princípio de Indução, temos que a multiplicação de dois números naturais é um número natural. □

Exemplo 3.2.13. *Determine as multiplicações* $12 \cdot 3$ *e* $973 \cdot 2$*. Pela definição de multiplicação, usada algumas vezes, temos:*

$$12 \cdot 3 = 12 \cdot 2 + 12 = (12 \cdot 1 + 12) + 12 = ((12 \cdot 0 + 12) + 12) + 12 = (12 + 12) + 12 = 36$$

e

$$973 \cdot 2 = 973 \cdot 1 + 973 = (973 \cdot 0 + 973) + 973 = 973 + 973 = 1946.$$

É preciso notar que, embora a definição diga que $m \cdot 0 = 0$ qualquer que seja $m \in \mathbb{N}$, não é óbviamente garantido que $0 \cdot m = 0$.

Propriedade 3.2.14. *Qualquer que seja* $m \in \mathbb{N}$*, temos*

$$\boxed{0 \cdot m = 0 \qquad e \qquad 0 \cdot m = m \cdot 0. \qquad (3.10)}$$

Demonstração. A justificativa é pelo Princípio de Indução. Considere $P(m)$ representando a afirmação $0 \cdot m = 0$, ou seja,

$$P(m) : 0 \cdot m = 0.$$

Temos que:

i) $P(0)$ é válida, pois pela definição de multiplicação $0 \cdot 0 = 0$;

ii) Vamos agora assumir a validez de $P(m)$, ou seja, vamos assumir que $0 \cdot m = 0$ é verdade e devemos concluir que $P(s(m))$ também é verdade. Para concluir o que devemos, observemos nesse caso que temos

$$\begin{aligned} 0 \cdot s(m) &= 0 \cdot m + 0 && \text{(Definição de Multiplicação)} \\ &= 0 + 0 && \text{(Hipótese que } 0 \cdot m = 0\text{)} \\ &= 0; \end{aligned}$$

e assim obtemos $P(s(m)) : 0 \cdot s(m) = 0$ verdadeira.

Portanto, pelo Princípio de Indução, temos a validade da primeira igualdade de (3.10). Com a primeira igualdade de (3.10) garantida, podemos justificar a segunda observando que

$$0 \cdot m = 0 = m \cdot 0,$$

onde a segunda igualdade é a definição de multiplicação. □

Propriedade 3.2.15. *Qualquer que seja $m \in \mathbb{N}$, temos*

$$\boxed{m \cdot 1 = m \qquad e \qquad 1 \cdot m = m.} \tag{3.11}$$

Demonstração. A justificativa da primeira igualdade de (3.11) é simples:

$$\begin{aligned} m \cdot 1 &= m \cdot s(0) && \text{(Definição de 1)} \\ &= m \cdot 0 + m && \text{(Definição de multiplicação)} \\ &= 0 + m && \text{(Garantida por (3.10))} \\ &= m. && \text{(Garantida por (3.6))} \end{aligned}$$

A justificativa da segunda igualdade de (3.11) é pelo Princípio de Indução. Considere $P(m)$ representando a afirmação $1 \cdot m = m$, ou seja,

$$P(m) : 1 \cdot m = m.$$

Temos que:

i) $P(0)$ é válida, pois pela definição de multiplicação tem-se $1 \cdot 0 = 0$;

ii) Vamos agora assumir a validez de $P(k)$, ou seja, vamos assumir que $1 \cdot k = k$ é verdade e devemos concluir que $P(s(k))$ também é verdade. Para concluir o que devemos, observemos nesse caso que temos

$$\begin{aligned}
1 \cdot s(k) &= 1 \cdot k + 1 && \text{(Definição de Multiplicação)}\\
&= k + 1 && \text{(Hipótese que } 1 \cdot k = k\text{)}\\
&= s(k), && \text{(Garantida por (3.2))}
\end{aligned}$$

e assim obtemos $P(s(k)) : 1 \cdot s(k) = s(k)$ verdadeira.

Portanto, pelo Princípio de Indução, temos a validade da segunda igualdade de (3.10).

□

Principais Propriedades da Multiplicação de Números Naturais

Análogo ao caso da definição de soma de números naturais, com a definição de multiplicação juntamente com as propriedades anteriores e o Princípio de Indução, conseguimos justificar muitas propriedades dos números naturais. Apresentamos a seguir algumas das principais propriedades, cujas justificativas são simples adaptações dos casos da soma:

M_1 - **Distributiva:** para quaisquer números $l, m, n \in \mathbb{N}$

$$\boxed{l(m+n) = lm + ln \qquad \text{e} \qquad (m+n)l = ml + nl.}$$

Justificativa: Vamos justificar a primeira das igualdades usando o Princípio de Indução, considerando $P(n)$ representando a afirmação $l(m+n) = lm + ln$, com $l, m \in \mathbb{N}$ dados, ou seja,

$$P(n) : l(m+n) = lm + ln.$$

Temos que:

i) $P(0)$ é válida, pois

$$l(m+0) = l(m) = lm = lm + l0,$$

onde usamos a definição de multiplicação e (3.6).

ii) Vamos agora assumir a validez de $P(k)$, ou seja, vamos assumir que

$$l(m+k) = lm + lk \tag{3.12}$$

é verdade e devemos concluir que $P(s(k))$ também é verdade. Para concluir o que devemos, observemos nesse caso que temos

$$\begin{aligned}
l(m+s(k)) &= l\cdot s(m+k) && \text{(Definição de Soma)}\\
&= l(m+k)+l && \text{(Definição de Multiplicação)}\\
&= (lm+lk)+l && \text{(Hipótese (3.13))}\\
&= lm+(lk+l) && \text{(Associativa da Soma)}\\
&= lm+l\cdot s(k). && \text{(Definição de Multiplicação)}
\end{aligned}$$

e assim obtemos $P(s(n)) : l(m+s(n)) = lm + ls(n)$ verdadeira.

Portanto, pelo Princípio de Indução, temos a validade da primeira igualdade da Propriedade Distributiva.

Justificativa: Vamos justificar a segunda das igualdades usando o Princípio de Indução Finita, considerando $P(l)$ representando a afirmação $(m+n)l = ml+nl$, com $m, n \in \mathbb{N}$ dados, ou seja,

$$P(l) : (m+n)l = ml + nl.$$

Temos que:

i) $P(1)$ é válida, pois pela propriedade (3.11)

$$(m+n)1 = m+n = m1+n1.$$

ii) Vamos agora assumir a validez de $P(k)$, ou seja, vamos assumir que

$$(m+n)k = mk+nk \tag{3.13}$$

é verdade e devemos concluir que $P(k+1)$ também é verdade. Para concluir o que devemos, observemos nesse caso que temos

$$\begin{aligned}
(m+n)(k+1) &= (m+n)s(k) && \text{(Hipótese)}\\
&= (m+n)k+m+n && \text{(Propriedade da Multiplicação)}\\
&= mk+nK+m+n && \text{(Hipótese de Indução)}\\
&= mk+m+nk+n && \text{(Comutativa da soma)}\\
&= ms(k)+ns(k) && \text{(Definição de Multiplicação)}\\
&= m(k+1)+n(k+1) && \text{(Definição de Sucessor)}
\end{aligned}$$

e assim obtemos $P(k+1) : (m+n)(k+1) = m(k+1)+n(k+1)$ verdadeira.

Portanto, pelo Princípio de Indução Finita, temos a validade da segunda igualdade da Propriedade Distributiva.

M_2 - **Associativa:** para quaisquer números $l, m, n \in \mathbb{N}$

$$\boxed{(mn)l = m(nl).}$$

Justificativa: Vamos justificar usando o Princípio de Indução Finita, considerando

$$P(l) : (mn)l = m(nl)$$

com $m, n \in \mathbb{N}$ dados.

Temos que:

i) $P(1)$ é válida, pois pela propriedade (3.11), $(mn)1 = mn$ e $n = (n1)$, e portanto, $(mn)1 = mn = m(n1)$.

ii) Vamos agora assumir a validez de $P(k)$, ou seja, vamos assumir que

$$P(k) : (mn)k = m(nk)$$

é verdade e devemos concluir que $P(k+1)$ também é verdade. Para concluir o que devemos, observemos nesse caso que temos

$$\begin{array}{rcll} (mn)(k+1) & = & (mn)k + mn & \text{(Propriedade Distributiva)} \\ & = & m(nk) + mn & \text{(Pela Hipótese de Indução)} \\ & = & m(nk+n) & \text{(Distributiva)} \\ & = & m[n(k+1)] & \text{(Distributiva)} \end{array}$$

ou seja, válido para $P(k+1)$.

Portanto, pelo Princípio de Indução Finita, temos a validade da Propriedade Associativa.

M_3 - **Comutativa:** para quaisquer números $m, n \in \mathbb{N}$

$$\boxed{mn = nm.}$$

Justificativa: Vamos justificar usando o Princípio de Indução Finita, considerando

$$P(n) : mn = nm$$

com $m \in \mathbb{N}$ dado.

Temos que:

i) $P(1)$ é válida, pois pela propriedade (3.11), $m1 = 1m$.

ii) Vamos agora assumir a validez de $P(k)$, ou seja, vamos assumir que

$$P(k) : mk = km$$

é verdade e devemos concluir que $P(k+1)$ também é verdade. Para concluir o que devemos, observemos nesse caso que temos

$$\begin{array}{rcll} m(k+1) & = & ms(k) & \text{(Definição de Sucessor)} \\ & = & mk+m & \text{(Propriedade da Multiplicação)} \\ & = & km+m & \text{(Pela Hipótese de Indução)} \\ & = & (k+1)m & \text{(Propriedade Distributiva)} \end{array}$$

ou seja, válido para $P(k+1)$.

Portanto, pelo Princípio de Indução Finita, temos a validade da Propriedade Comutativa.

M_4 - Temos:

$$\boxed{mn = 0 \quad \Rightarrow \quad m = 0 \quad \text{ou} \quad n = 0.}$$

Justificativa: Se $mn = 0$ e $n \neq 0$, então $n = s(p)$ para algum natural p e $mn = ms(p) = mp + m = 0$. Pela propriedade S_4 da soma, se $mp + m = 0$, então $mp = 0$ e $m = 0$. Analogamente, se $m \neq 0$, deduzimos que $n = 0$.

$$\boxed{mn = 1 \quad \Rightarrow \quad m = 1 \quad \text{e} \quad n = 1.}$$

Justificativa: Se $m = 0$ ou $n = 0$, então $mn = 0$ pela propriedade acima. Logo, existem naturais a e b tais que $m = s(a)$ e $n = s(b)$. Assim $s(a)s(b) = 1$, porém $1 = s(a)s(b) = (a+1)(b+1) = ab+a+b+1$. Usando a lei de cancelamento da soma, $ab+a+b = 0$ e portanto, $ab = a+b = 0$. De $a+b = 0$, temos $a = b = 0$. Portanto, $m = n = 1$.

M_5 - **Lei do Cancelamento:** quaisquer que sejam os números $l, m, n \in \mathbb{N}$, com $l \neq 0$, temos

$$\boxed{ml = nl \quad \Rightarrow \quad m = n.}$$

Justificativa: Vamos justificar usando o Princípio de Indução Finita, considerando $P(l)$ representando a afirmação $ml = nl$, implica $m = n$, com $m, n \in \mathbb{N}$ dados, ou seja,

$$P(l) : ml = nl \Rightarrow m = n.$$

Temos que:

i) $P(1)$ é válida, pois $m1 = n1 \Rightarrow m = n$, garantida pela propriedade (3.11);

ii) Vamos agora assumir a validez de $P(k)$, ou seja, vamos assumir que

$$P(k) : mk = nk \Rightarrow m = n$$

é verdade e devemos concluir que $P(k+1)$ também é verdade. Para concluir o que devemos, observemos nesse caso que temos

$$\begin{array}{rcll} m(k+1) & = & n(k+1) & \text{(Hipótese)} \\ mk+m & = & nk+n & \text{(Propriedade Distributiva)} \\ m & = & n & \text{(Lei de Cancelamento da Soma)} \end{array}$$

já que $mk = nk$ pela hipótese de indução. Assim, obtemos

$$P(l) : ml = nl \Rightarrow m = n \text{ verdadeira.}$$

Portanto, pelo Princípio de Indução Finita, temos a validade da Propriedade Lei do Cancelamento.

3.2.3 Relação de Ordem de Números Naturais

Relação de Ordem:

Dados números $m, n \in \mathbb{N}$, dizemos que *m é menor do que ou igual a n*, e representamos por $m \leq n$, quando existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$n = m + k. \tag{3.14}$$

Se $m \leq n$ e $m \neq n$, dizemos que *m é menor do que n*, e representamos por $m < n$.

Observação 3.2.16. i) *Observe que $m < n$ é equivalente a $n = m + k$, com $k \neq 0$.*

ii) *Dados $m, n \in \mathbb{N}$, também representamos $m \leq n$ por*

$$n \geq m$$

e dizemos que n é ***maior do que ou igual a*** *m. Do mesmo modo, também representamos $m < n$ por*

$$n > m$$

e dizemos que n é ***maior do que*** *m.*

iii) *O número k em (3.14) é chamado de* ***Diferença*** *de m por n e denotado por $k = m - n$.*

Exemplo 3.2.17. *Para fixar o entendimento da definição de ordem, vejamos alguns exemplos:*

- $8 \leq 8$, *pois existe o número* $0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $8 = 8 + 0$;
- $1 < 7$, *pois existe o número* $6 \in \mathbb{N}$ *tal que* $7 = 1 + 6$;
- $12 \geq 5$, *pois existe o número* $7 \in \mathbb{N}$ *tal que* $12 = 5 + 7$;
- $9 > 3$, *pois existe o número* $6 \in \mathbb{N}$ *tal que* $9 = 3 + 6$.

Exemplo 3.2.18. *As primeiras conclusões naturais que temos sobre a relação de ordem são:*

- $0 < 1$: *pois* $1 = 0 + 1$;
- $1 < 2$: *pois* $2 = 1 + 1$;
- $2 < 3$: *pois* $3 = 2 + 1$;

De modo geral, dado $m \in \mathbb{N}$, *temos*

$$m < s(m),$$

pois, por (3.2) $s(m) = m + 1$. *Assim, podemos escrever (abusando da notação) que*

$$1 < 2 < 3 < 4 < 5 < 6 < \cdots < m < s(m) < s(s(m)) < \cdots ,$$

ou mais usualmente

$$\boxed{1 < 2 < 3 < 4 < 5 < 6 < \cdots < m < m + 1 < m + 2 < \cdots .}$$

A seguir apresentamos e justificamos algumas das propriedades mais importantes da relação de ordem dos números naturais. Em seguida apresentamos uma lista com algumas das demais propriedades da relação de ordem dos números naturais.

Propriedade 3.2.19 (Relação de Ordem Total). *Quaisquer que sejam os números* $m, n \in \mathbb{N}$, *temos que*

$$\boxed{m \leq n \qquad ou \qquad m \geq n.}$$

Demonstração. Para justificar a propriedade, vamos usar o Axioma de Peano P_5). Para isso, considere $m \in \mathbb{N}$ e o subconjunto de $\mathbb{N}$:

$$S_m = \{n \in \mathbb{N} : m \leq n \quad \text{ou} \quad m \geq n\}.$$

Agora, observemos:

i) $0 \in S_m$, pois $m \geq 0$ devido a $m \in \mathbb{N}$ e $m = 0 + m$;

ii) Vamos agora supor que $t \in S_m$ e queremos concluir que $s(t) \in S_m$. Assumido que $t \in S_m$, para concluir o que queremos, observemos assim que temos:

- se $t = m$ então por (3.2)

$$s(t) = s(m) = m + 1$$

  e assim $m \leq s(t)$. Logo, temos a garantia que $s(t) \in S_m$.

- se $m < t$, então existe $u \in \mathbb{N}$ talque

$$t = m + u,$$

  com $u \neq 0$. Logo, pela definição de soma, obtemos

$$s(t) = s(m + u) = m + s(u),$$

  e assim $m \leq s(t)$. Portanto, temos a garantia que $s(t) \in S_m$.

- se $m > t$, então existe $v \in \mathbb{N}$ talque

$$m = t + v,$$

  com $v \neq 0$. Logo, pelo Teorema **??** e por (3.2), existe (o antecessor de v) $w \in \mathbb{N}$ tal que

$$v = s(w) = w + 1.$$

  Então, usando as Propriedade Comutativa e Associativa da Soma S_2 e S_1, respectivamente, obtemos

$$m = t + (w + 1) = t + (1 + w) = (t + 1) + w = s(t) + w,$$

  e assim $s(t) \leq m$. Portanto, também temos a garantia que $s(t) \in S_m$.

Então, em todo caso,

$$t \in S_m \qquad \Rightarrow \qquad s(t) \in S_m.$$

Assim, pelo Axioma de Peano P_5) temos $S_m = \mathbb{N}$. Portanto, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$, temos

$$m \leq n \qquad \text{ou} \qquad m \geq n.$$

□

A propriedade anterior serve como ponto de partida para o estudo da chamada Lei da Tricotomia dos números naturais.

Propriedade 3.2.20 (Lei da Tricotomia). *Quaisquer que sejam os números* $m, n \in \mathbb{N}$*, apenas uma das seguintes relações ocorre:*

$$\boxed{m < n, \qquad m = n \qquad \text{ou} \qquad m > n.}$$

Demonstração. Pela Propriedade 3.2.19 já sabemos que

$$m \leq n \quad \text{ou} \quad m \geq n.$$

Então, existem números $u, v \in \mathbb{N}$ tais que

$$n = m + u \quad \text{e} \quad m = n + v.$$

Observe que se $m = n$ então não temos mais o que justificar. Agora, se $m \neq n$, precisamos justificar que $m < n$ ou $m > n$. Para isso, note que se $m \neq n$ então devemos ter $u \neq 0$ e $v \neq 0$. Logo,

$$m < n \quad \text{ou} \quad m > n.$$

Para completar a justificativa, vamos verificar que não podemos ter $m < n$ e $m > n$ simultaneamente. De fato, se $m < n$ e $m > n$ simultaneamente, então

$$n = m + u \quad \text{e} \quad m = n + v,$$

com $u \neq 0$ e $v \neq 0$. Logo,

$$n = m + u = (n + v) + u = n + (v + u) \quad \Rightarrow \quad 0 = v + u.$$

Se $v + u = 0$, então pela Propriedade da Soma S_4 temos $u = 0$ e $v = 0$. Mas assim estamos obtendo $u \neq 0$ e $u = 0$ e $v \neq 0$ e $v = 0$, o que é uma contradição. Portanto, não podemos ter $m < n$ e $m > n$ simultaneamente e concluímos que podemos ter somente uma das seguintes relações:

$$m = n, \qquad m < n \qquad \text{ou} \qquad m > n.$$

□

Principais Propriedades da Relação de Ordem de Números Naturais

Apresentamos a seguir algumas das principais propriedades da relação de ordem de números naturais.

O_1 **- Reflexiva:** para qualquer número $m \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{m \leq m.}$$

Justificativa: Observe que temos $0 \in \mathbb{N}$ de forma que $m = m + 0$.

O_2 - **Antisimétrica:** para quaisquer números $m, n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{m \leq n \quad \text{e} \quad n \leq m \qquad \Rightarrow \qquad m = n.}$$

Justificativa: Se

$$m \leq n \quad \text{e} \quad n \leq m$$

então existem números $u, v \in \mathbb{N}$ de forma que

$$n = m + u \quad \text{e} \quad m = n + v.$$

Assim, substituindo a primeira igualdade na segunda e aplicando a Lei do Cancelamento da Soma, obtemos

$$m = (m + u) + v = m + (u + v) \quad \Rightarrow \quad 0 = u + v.$$

Se $v+u = 0$, então pela Propriedade da Soma S_4 temos $u = 0$ e $v = 0$. Portanto,

$$m = n + v = n + 0 \quad \Rightarrow \quad m = n.$$

O_3 - **Transitiva:** para quaisquer números $l, m, n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{l \leq m \quad \text{e} \quad m \leq n \qquad \Rightarrow \qquad l \leq n.}$$

Justificativa: Se $l \leq m$, então $\exists\ a \in \mathbb{N}$ tal que $m = l + a$. Assim como se $m \leq n$, então $\exists\ b \in \mathbb{N}$ tal que $n = m + b$. Portanto, $l + a + m + b = m + n$ que pela lei do corte da soma temos $l + a + b = n$, ou seja, $l + (a + b) = n$ que pela definição de $\leq$ implica $l \leq n$.

O_4 - **Compatibilidade com a Soma:** para quaisquer números $l, m, n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{l \leq m \qquad \Leftrightarrow \qquad l + n \leq m + n.}$$

Justificativa: Para justificar esta propriedade precisamos verificar a implicação "$\Rightarrow$" e a recíproca "$\Leftarrow$".
($\Rightarrow$): Se $l \leq m$ então existe números $u \in \mathbb{N}$ de forma que

$$m = l + u.$$

Assim, somando n na igualdade e aplicando as propriedades da soma, obtemos

$$m + n = (l + u) + n = l + (u + n) = l + (n + u) = (l + n) + u.$$

Portanto, por definição, temos

$$l + n \leq m + n.$$

($\Leftarrow$) Basta seguir os mesmos passos da justificativa da implicação anterior em ordem contrária.

O_5 **- Compatibilidade com a Multiplicação:** para quaisquer números $l, m, n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{l \leq m \qquad \Rightarrow \qquad ln \leq mn.}$$

Justificativa: Se $l \leq m$, então $\exists\ a \in \mathbb{N}$ tal que $m = l + a$. Multiplicando n na igualdade e aplicando a propriedade distributiva, obtemos $mn = (l + a)n = (ln) + an$. Portanto, por definição, temos

$$ln \leq mn.$$

O_6**:** para quaisquer números $m, n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{m < n \qquad \Leftrightarrow \qquad m + 1 \leq n.}$$

Justificativa: Para justificar esta propriedade precisamos verificar a implicação "$\Rightarrow$" e a recíproca "$\Leftarrow$".
($\Rightarrow$): Se $m < n$, então existe um número $u \in \mathbb{N}$ diferente de zero de forma que

$$n = m + u.$$

Assim, temos dois casos possíveis:

i) Se $u = 1$, então $n = m + 1$.

ii) Se $u > 1$, então existe um $a \in \mathbb{N}$ diferente de zero tal que $u = 1 + a$ e teremos $n = m+1+a$, ou seja, $n = (m+1)+a$ que por definição $n > m+1$.

Portanto, $m < n \Rightarrow m + 1 \leq n$.

($\Leftarrow$) Se $m + 1 \leq n$, então existe um número $a \in \mathbb{N}$ tal que $n = (m + 1) + a = m + (1 + a)$, que por definição implica $m < n$.

3.2.4 Subtração em $\mathbb{N}$

Subtração de Números Naturais:

Definimos $b - a = c$, sempre que $a \leq b$ em que c é o natural tal que $a + c = b$. Portanto, para quaisquer a, b, c com $a \leq b$

$$b - a = c \Leftrightarrow b = a + c. \tag{3.15}$$

Como $a \leq a$, está definido $a - a$ que, por (3.15), vale $a - a = 0$.

3.2.5 Princípio da Boa Ordenação

Para motivar o Pricípio da Boa Ordenação, por exemplo, observe que os seguintes subconjuntos do conjunto do números naturais

$$A = \{4, 5, 8, 9\}, \quad B = \{7, 9, 11, 13, 15, \cdots\} \quad \text{e} \quad C = \{2, 4, 6, 8, 10, \cdots\},$$

cada um possui um menor elemento entre todos os seus elementes. No caso de A o menor elemento é 4. O subconjunto B tem 7 como menor elemento e 2 é o menor elemento de C.

De modo geral, temos:

Elemento Mínimo:

Se S é um subconjunto não vazio de $\mathbb{N}$, dizemos que $m \in \mathbb{N}$ é um menor elemento (ou elemento mínimo) de S quando

$$m \leq x$$

qualquer que seja $x \in S$.

Teorema 3.2.21 (Princípio da Boa Ordenação-PBO). *Qualquer subconjunto $S \subset \mathbb{N}$, não vazio, possui um menor elemento. Além disso, S tem apenas um elemento mínimo; que representamos por*

$$\min S.$$

Demonstração. Primeiro vamos verificar que um subconjunto não vazio tem um menor elemento e depois justificamos que o menor elemento é único.

Existência: Considere S um subconjunto não vazio de $\mathbb{N}$ e o conjunto

$$M = \{n \in \mathbb{N} : n \leq x, \text{ qualquer que seja } x \in S\};$$

ou seja, em palavras, o conjunto M é formado pelos números naturais que são menores do que ou igual a qualquer elemento de S. Como $0 \leq n$, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$, em particular,

$$0 \leq s,$$

qualquer que seja $s \in S$. Dessa forma, $0 \in M$ e $M \neq \emptyset$. Agora, como $S \neq \emptyset$, podemos considerar um elemento $s \in S$. Observe que

$$s + 1 > s,$$

de modo que $s + 1 \notin M$. Assim, desde que $s + 1 \in \mathbb{N}$ e $s + 1 \notin M$, temos $M \neq \mathbb{N}$. Concluímos então que

$$0 \in M \quad \text{e} \quad M \neq \mathbb{N}.$$

Aplicando o Axioma de Peano P_5), devemos ter um número $m \in \mathbb{N}$ de forma que

$$m \in M \quad \text{e} \quad m+1 \notin M, \tag{3.16}$$

pois se não fosse assim o axioma garantia que $M = \mathbb{N}$, o que não é verdade. Vamos agora verificar que o m de (3.16) é o menor elemento de S. Para isso devemos primeiro observar que, como $m \in M$, temos

$$m \leq x, \text{ qualquer que seja } x \in S.$$

Agora, se supomos que $m \notin S$, temos

$$m < x, \text{ qualquer que seja } x \in S.$$

Logo, usando a Propriedade O_6 de ordem, obtemos

$$m+1 \leq x, \text{ qualquer que seja } x \in S.$$

Assim, $m+1 \in M$; e isso não pode acontecer devido a (3.16). Dessa forma, devemos ter $m \in S$ e

$$m \leq x, \text{ qualquer que seja } x \in S.$$

Portanto, m é um menor elemento de S.

Unicidade: Para verificar que S possui apenas um elemento mínimo, vamos supor que existam m e m' elementos mínimos em S. Então, em particular, temos

$$m \leq m' \qquad \text{e} \qquad m' \leq m.$$

Assim, pela Propriedade O_2 (Antisimétrica) de Ordem, $m = m'$. Portanto, temos apenas um elemento mínimo em S.

□

O Princípio de Boa Ordenação com certeza está entre as principais ferramentas para estudar números naturais. Aplicando o PBO é possível justificar um Segundo Princípio de Indução (mais geral do que o Teorema 3.2.4); esse também, sem dúvida, é outra das principais ferramentas no estudo dos números naturais.

Teorema 3.2.22 (Segundo Princípio de Indução - SPI). *Considere dados $l \in \mathbb{N}$ e $P(n)$ uma afirmação que depende de cada número natural $n \geq l$. Se for possível verificar que:*

i) $P(l)$ é válida;

ii) para cada $n \geq l$, a validez de $P(n)$ implica a validez de $P(n+1)$;

então $P(n)$ é válida qualquer que seja o número natural $n \geq l$.

A justificativa do Segundo Princípio de Indução é feita pelo método da contradição com o uso do Princípio da Boa Ordenação.

Demonstração. Para fazer uma justificativa usando o PBO precisamos considerar o subconjunto de $\mathbb{N}$:

$$S = \{k \in \mathbb{N} : \; k \geq l \quad \text{e} \quad P(k) \text{ é falsa}\}.$$

Observe que se S for vazio, então sempre que $k \geq l$, $P(k)$ é verdadeira; e assim o teorema está justificado. Para justificar que S deve ser vazio, vamos supor que não é e chegaremos a uma contradição. Suponha que $S \neq \emptyset$. Então, o Princípio da Boa Ordenação garante que existe um menor elemento, digamos m, em S. Logo,

$$m \geq l \qquad \text{e} \qquad P(m) \text{ é falsa.}$$

Sendo $P(m)$ falsa e $P(l)$ verdadeira (pela condição (i)), devemos ter que $m \neq l$. Assim, $m > l$ e, pela Propriedade O_6 de ordem, segue que

$$m > l \geq 0 \qquad \Rightarrow \qquad m \neq 0 \quad \text{e} \quad l + 1 \leq m.$$

Logo, existe um $u \in \mathbb{N}$ de forma que

$$m = s(u) = u + 1 \qquad \text{e} \qquad u < m.$$

Dessa forma,

$$l + 1 \leq m = u + 1 \qquad \Rightarrow \qquad l \leq u.$$

Então, concluímos que

$$u < m \qquad \text{e} \qquad u \geq l.$$

Agora, desde que m é o menor elemento de S, então u não pertence a S. Logo, $P(u)$ é verdadeira. Assim, pela condição (ii),

$$P(u + 1) = P(m)$$

é verdadeira. Isso contradiz o fato que $P(m)$ é falsa. Portanto, S é vazio e temos uma prova para o teorema. □

Observação 3.2.23. *Note que no caso particular em que $l = 0$, temos que o Teorema 3.2.22 é exatamente o Teorema 3.2.4.*

Exemplo 3.2.24. *Qualquer que seja o número natural $n \geq 2$, justifique que*

$$2n \leq nn. \tag{3.17}$$

Observe inicialmente que se $n = 1$ a desigualdade (3.17) não é verdadeira! Vamos justificar a desigualdade (3.17) aplicando o SPI com $l = 2$ (Teorema 3.2.22). Para isso, considerando $P(n)$ representando a afirmação

$$2n \leq nn,$$

temos que:

i) *$P(2)$ é válida, pois*

$$2 \cdot 2 \leq 2 \cdot 2;$$

ii) *Vamos agora assumir a validez de $P(k)$, com $k \geq 2$, ou seja, vamos assumir que*

$$2k \leq kk \tag{3.18}$$

é verdade e devemos concluir que $P(k+1)$ também é verdade. Para concluir o que precisamos, somando 2 em cada lado da desigualdade (3.18), e lembrando que $2 \leq 2k+1$, observamos que

$$\begin{aligned} 2k+2 &\leq kk+2 \\ &\leq kk+(2k+1) \\ &= (k+1)(k+1), \end{aligned}$$

ou seja,

$$2(k+1) \leq (k+1)(k+1);$$

e assim obtemos que $P(k+1)$ verdadeira.

Portanto, pelo Segundo Princípio de Indução, temos a fórmula (3.17) válida qualquer que seja $n \geq 2$.

Teorema 3.2.25 (Princípio de Indução Finita - P.I.F.). *Seja $P(n)$ uma sentença aberta com domínio $\mathbb{N}$. Se valem as duas condições:*

(i) *$P(1)$ é uma afirmação verdadeira;*

(ii) *$P(k)$ verdadeira implica $P(k+1)$ verdadeira;*

então $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Considere o subconjunto de $\mathbb{N}$:

$$S = \{k \in \mathbb{N} : P(k) \text{ é falsa}\}.$$

Observe que se S for vazio, então $P(k)$ é verdadeira para todo $k \in \mathbb{N}$; e o teorema está provado. Para provar que S é vazio, vamos supor que S é não vazio e chegar a uma contradição. Suponha que S é não vazio. Então, o Princípio da Boa Ordenação garante que existe um menor elemento, digamos m, em S. Logo, $P(m)$ é falsa. Sendo $P(m)$ falsa e $P(1)$ verdadeira (pela condição (i)), tem-se que $m \neq 1$. Assim, $m \geq 2$ e segue que $m-1 \geq 1$. Desde que m é o menor elemento de m de S, então $m-1$ não pertence a S. Logo, $P(m-1)$ é verdadeira. Assim, pela condição (ii),

$$P((m-1)+1) = P(m)$$

é verdadeira. Isso contradiz o fato que $P(m)$ é falsa. Portanto, S é vazio e temos uma prova para o teorema. □

3.2.6 Somatórios e Produtórios de Números Naturais

Como já adiantado na Propriedade Associativa da Soma e da Multiplicação de números naturais S_1 e M_2, respectivamente, muitas vezes temos a necessidade de somar ou multiplicar três ou mais números naturais. As definições de soma e multiplicação de três ou mais números naturais são formuladas de forma recursiva a partir das definições de soma e multiplicação (de dois números naturais):

Somatórios

Soma com 3 números: para números naturais m_1, m_2, m_3, temos

$$m_1 + m_2 + m_3 = (m_1 + m_2) + m_3.$$

Soma com 4 números: para números naturais m_1, m_2, m_3, m_4, temos

$$m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = (m_1 + m_2 + m_3) + m_4.$$

Seguindo a recorrência, temos de forma indutiva que a soma de k números naturais:

Soma com k números: para números naturais $m_1, m_2, \cdots, m_{k-1}, m_k$, temos

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_{k-1} + m_k = (m_1 + m_2 + \cdots + m_{k-1}) + m_k.$$

Para a soma de k números é usual a seguinte notação para representá-la:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{k} m_i = m_1 + m_2 + \cdots + m_k.}$$

Exemplo 3.2.26.

- $\displaystyle\sum_{i=1}^{5} 2i = 2 + 4 + 6 + 8 + 10 \qquad (= 30);$
- $\displaystyle\sum_{i=0}^{10} i = 0 + 1 + 2 + 3 + \cdots + 9 + 10 \qquad (= 55).$

Exemplo 3.2.27. *Qualquer que seja o número natural $n \geq 1$, justifique que*

$$\sum_{i=1}^{n} (2i - 1) = 1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n - 1) = nn. \tag{3.19}$$

Vamos justificar aplicando o SPI com $l = 1$ (Teorema 3.2.22). Para isso, considerando $P(n)$ representando a afirmação

$$1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n - 1) = nn,$$

temos que:

i) $P(1)$ é válida, pois

$$1 = 1 \cdot 1;$$

ii) Vamos agora assumir a validez de $P(k)$, ou seja, vamos assumir que

$$1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2k-1) = kk, \tag{3.20}$$

é verdade e devemos concluir que $P(k+1)$ também é verdade. Para concluir o que precisamos, somando $2(k+1)-1$ na igualdade (3.20), observamos que

$$\begin{aligned} 1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2k-1) + (2(k+1)-1) &= kk + (2(k+1)-1) \\ &= kk + (2k+2-1) \\ &= kk + (2k+1) \\ &= (k+1)(k+1), \end{aligned}$$

ou seja,

$$1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2k-1) + (2(k+1)-1) = (k+1)(k+1);$$

e assim obtemos que $P(k+1)$ verdadeira.

Portanto, pelo Segundo Princípio de Indução, temos a fórmula (3.19) válida qualquer que seja $n \geq 1$.

Produtórios

Multiplicação com 3 números: para números naturais m_1, m_2, m_3, temos

$$m_1 m_2 m_3 = (m_1 m_2) m_3.$$

Multiplicação com 4 números: para números naturais m_1, m_2, m_3, m_4, temos

$$m_1 m_2 m_3 m_4 = (m_1 m_2 m_3) m_4.$$

Seguindo a recorrência, temos de forma indutiva que a multiplicação de k números naturais:

Multiplicação com k números: para números naturais $m_1, m_2, \cdots, m_{k-1}, m_k$, temos

$$m_1 m_2 \cdots m_{k-1} m_k = (m_1 m_2 \cdots m_{k-1}) m_k.$$

Para a multiplicação de k números é usual a seguinte notação para representá-la:

$$\boxed{\prod_{i=1}^{k} m_i = m_1 m_2 \cdots m_k.}$$

Exemplo 3.2.28.

- $\prod_{i=0}^{4}(3i+1) = 1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 10 \cdot 13 \qquad (= 3640);$

- $\prod_{i=1}^{10} i = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot 9 \cdot 10.$

No próximo exemplo temos a definição de Fatorial de um número natural.

Exemplo 3.2.29 (Definição de Fatorial). *Dado $n \in \mathbb{N}, n \neq 0$, definimos o Fatorial de n como o produto $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$ e denotamos por $n!$, isto é,*

$$n! = \prod_{i=1}^{n} i = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n.$$

O caso do fatorial de 0 (zero), convencionamos que $0! = 1$.

Exemplo 3.2.30. *Verifique que*

$$nn \leq n!$$

qualquer que seja $n \geq 4$.

Para verificar a desigualdade, usamos o Segundo Princípio de Indução com $l = 4$ (Teorema 3.2.22). Para isso, represetamos por $P(n)$ a afirmação

$$n \cdot n \leq n!,$$

pois assim podemos usar o SPI sobre n. Dessa forma, temos que:

i) $P(4)$ é válida, pois

$$4 \cdot 4 = 16 \leq 24 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4!;$$

ii) Vamos agora assumir a validez de $P(k)$, ou seja, vamos assumir que

$$k \cdot k \leq k!, \tag{3.21}$$

é verdade e devemos concluir que $P(k+1)$ também é verdade. Para concluir o que precisamos, observando que $k+1 \leq k \cdot k$, temos

$$\begin{aligned} (k+1)(k+1) &\leq (k \cdot k) \cdot (k+1) && \\ &\leq k!(k+1) && (\textit{Hipótese } (3.21)) \\ &\leq 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k \cdot (k+1) && (\textit{Definição } k!) \\ &\leq (k+1)!, && (\textit{Definição } (k+1)!) \end{aligned}$$

ou seja,

$$(k+1)(k+1) = (k+1)!,$$

e assim obtemos que $P(k+1)$ verdadeira.

Portanto, pelo Segundo Princípio de Indução, temos a desigualdade válida qualquer que seja $n \geq 4$.

Potências

Como caso particular do produtório, introduzido por recorrência, temos o conceito de *Potência* de número natural.

Potencias de Números Naturais:

Dados números $a, n \in \mathbb{N}$, com $a \neq 0$, definimos a $n-$*ésima Potência* de a por

$$a^0 = 1, \qquad a^1 = a \qquad \text{e} \qquad a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ vezes}}, \quad n \geq 2.$$

Observação 3.2.31. *A potência para $a = 0$, é definido para $n \neq 0$ por*

$$0^n = 0.$$

O caso 0^0 é não definido.

Potências de números naturais têm duas principais propriedades que não podemos deixar de apresentar. A justificativa da validade delas pode ser feita por indução.

Propriedades de Potências de Números Naturais:

Dados números $a, m, n \in \mathbb{N}$, com $a \neq 0$, temos

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \qquad \text{e} \qquad (a^m)^n = a^{m \cdot n}. \tag{3.22}$$

Justificativa de $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$: Vamos justificar usando o Pricípio de Indução (Teorema 3.2.4). Para isso, considerando $m \in \mathbb{N}$ dado e $P(n)$ representando a afirmação

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n},$$

podemos fazer indução sobre n. Dessa forma, temos que:

i) $P(0)$ é válida, pois

$$a^m \cdot a^0 = a^m \cdot 1 = a^m = a^{m+0};$$

ii) Vamos agora assumir a validez de $P(k)$, ou seja, vamos assumir que

$$a^m \cdot a^k = a^{m+k} \tag{3.23}$$

é verdade e devemos concluir que $P(k+1)$ também é verdade. Para concluir o que precisamos,

$$\begin{aligned}
a^m \cdot a^{k+1} &= a^m \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdots a \cdot a)}_{k+1 \text{ vezes}} && \text{(Definição de Potência)}\\
&= a^m \cdot (\underbrace{(a \cdot a \cdots a)}_{k \text{ vezes}} \cdot a) && \text{(Associatividade)}\\
&= a^m \cdot (a^k \cdot a) && \text{(Definição de Potência)}\\
&= (a^m \cdot a^k) \cdot a && \text{(Associatividade)}\\
&= a^{m+k} \cdot a && \text{(Hipótese (3.23))}\\
&= a^{m+k+1}, && \text{(Definição de Potência)}
\end{aligned}$$

ou seja,

$$a^m \cdot a^{k+1} = a^{m+(k+1)},$$

e assim obtemos que $P(k+1)$ verdadeira.

Portanto, pelo Segundo Princípio de Indução, temos a primeira fórmula de (3.22) válida qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$.

Justificativa de $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$: Vamos justificar usando o Pricípio de Indução. Para isso, considerando $m \in \mathbb{N}$ dado e

$$P(n) : (a^m)^n = a^{m \cdot n}.$$

Dessa forma, temos que:

i) $P(0)$ é válida, pois

$$(a^m)^0 = 1 = 1^{m \cdot 0}.$$

ii) Vamos agora assumir a validez de $P(k)$, ou seja, vamos assumir que

$$(a^m)^k = a^{m \cdot k} \tag{3.24}$$

é verdade e devemos concluir que $P(k+1)$ também é verdade. Para concluir o que precisamos, observe que

$$\begin{aligned}
(a^m)^{k+1} &= (a^m)^k (a^m)^1 && \text{(Definição de Potência)}\\
&= a^{m \cdot k} a^m && \text{(Pela Hipótese de Indução)}\\
&= a^{mk+m} && \text{(Definição de Potência)}\\
&= a^{m(k+1)} && \text{(Propriedade Distributiva)}
\end{aligned}$$

ou seja,

$$(a^m)^{k+1} = a^{m(k+1)},$$

obtendo assim $P(k+1)$ verdadeira.

Exemplo 3.2.32. *Verifique que*

$$2n + 1 \leq 2^n$$

qualquer que seja $n \geq 3$.

Para verificar a desigualdade, usamos o Segundo Princípio de Indução com $l = 3$ *(Teorema 3.2.22). Para isso, represetamos por* $P(n)$ *a afirmação*

$$2n + 1 \leq 2^n,$$

pois assim podemos usar o SPI sobre n. *Dessa forma, temos que:*

i) $P(3)$ *é válida, pois*
$$7 = 2 \cdot 3 + 1 \leq 2^3 = 8,$$

ii) Vamos agora assumir a validez de $P(k)$*, ou seja, vamos assumir que*

$$2k + 1 \leq 2^k, \tag{3.25}$$

é verdade e devemos concluir que $P(k+1)$ *também é verdade. Para concluir o que precisamos, observando que* $2 \leq 2^k$*, temos*

$$\begin{array}{rcll} 2(k+1)+1 & = & (2k+2)+1 & \\ & = & (2k+1)+2 & \\ & \leq & 2^k + 2 & (\textit{Hipótese } (3.25)) \\ & \leq & 2^k + 2^k & (\textit{lembrando } 2 \leq 2^k) \\ & = & 2 \cdot 2^k, & \end{array}$$

ou seja,
$$2(k+1) + 1 \leq 2^{k+1},$$

e assim obtemos que $P(k+1)$ *verdadeira.*

Portanto, pelo Segundo Princípio de Indução, temos a desigualdade válida qualquer que seja $n \geq 3$.

3.3 Divisores e múltiplos

Começamos a presente seção apresentando o conceito de divisibilidade.

Divisibilidade de Números Naturais:

Dados números $a, b \in \mathbb{N}$, dizemos que a *Divide* de b quando existir $c \in \mathbb{N}$ de forma que
$$b = ac. \tag{3.26}$$

Representamos a divide b por $a|b$.

Quando um número a divide o número b, dizemos também que a é *divisor* de b ou que b é *múltiplo* de a. Caso a não divide b representamos por $a \nmid b$

Exemplo 3.3.1. *Temos:*

- $2|4$, *pois existe o número* $2 \in \mathbb{N}$ *de forma que* $4 = 2 \cdot 2$.
- $3|15$, *pois existe o número* $5 \in \mathbb{N}$ *de forma que* $15 = 3 \cdot 5$.
- $1|a$, *qualquer que seja* $a \in \mathbb{N}$, *pois existe o número* $a \in \mathbb{N}$ *de forma que* $a = a \cdot 1$.
- $0|0$, *pois qualquer que seja o número* $a \in \mathbb{N}$, *temos* $0 = 0 \cdot a$.
- $0 \nmid a$, *qualquer que seja o número* $a \in \mathbb{N}$, $a \neq 0$, *pois*

$$a \neq 0 = 0 \cdot c,$$

qualquer que seja $c \in \mathbb{N}$.

Observação 3.3.2. *Apesar de ser bom evitar o uso quando estamos estudando os números naturais (e também os inteiros), podemos representar o número* c *de* (3.26), *quando* $a \neq 0$, *por* $c = \frac{b}{a}$ *ou* $c = b/a$. *Em caso de uso, deve-se ter cuidado! Veja que, por exemplo,* $0|0$ *é uma relação verdadeira, porém* $\frac{0}{0}$ *é uma expressão indeterminada.*

Exemplo 3.3.3 (**Números Pares e Ímpares**). *Apresentado o conceito de divisibilidade, podemos definir números pares e ímpares. Dizemos que um número* $m \in \mathbb{N}$ *é* ***par*** *quando* m *é múltiplo de* 2*; ou seja, quando existir um* $k \in \mathbb{N}$ *de forma que* $m = 2k$. *Nesse caso, temos o conjunto de números pares:*

$$\{2 \cdot 0, 2 \cdot 1, 2 \cdot 2, 2 \cdot 3, 2 \cdot 4, \ldots, 2 \cdot k, \ldots\} = \{0, 2, 4, 6, \ldots, 2k, \ldots\}.$$

Dizemos que $n \in \mathbb{N}$ *é um número* ***ímpar*** *quando* n *não é par. Nesse caso, temos o conjunto dos números ímpares.*

$$\{1, 3, 5, 7, \ldots\}.$$

Teorema 3.3.4. *Se* a *e* b *são números naturais com* $b \neq 0$, *então para algum* $q \in \mathbb{N}$

$$bq \leq a < b(q+1). \tag{3.27}$$

Demonstração. Se $a < b$, então $q = 0$ é o único natural que satisfaz (3.27). Se $a \geq b$, então considere o conjunto $A = \{n \in \mathbb{N} : bn > a\}$ que é não vazio, pois $a + 1 \in A$. Portanto, A possui um menor elemento $m > 0$, pois $0 \notin A$. Como m é sucessor de algum natural q, $m = q + 1$ e $b(q+1) > a$ que, pela minimalidade de $q + 1$, temos que $bq \leq a$. $\square$

3.3.1 Algoritmo da Divisão de Euclides

A "operação de divisão" de números naturais é ensinada desde os primeiros anos escolares. Naturalmente, aprendemos um algoritmo e o aplicamos passo a passo até obter o resultado. Por exemplo, dividimos 225 por 7 com o algoritmo:

$$\begin{array}{rl} 225 & \underline{|\ 7\quad} \\ \underline{21} & \ 32 \\ 15 & \\ \underline{14} & \\ 1 & \end{array}$$

onde chamamos 225 de dividendo, 7 de divisor, 32 de quociente e 1 de resto. Apenas saber usar esse algoritmo é suficiente para os propósitos de muitas profissões. Porém, é interessante que um estudante de matemática saíba usá-lo e também entender o porquê do mesmo funcionar. Para ilustrar o porquê funciona nesse exemplo observe que primeiro temos

$$\begin{array}{rl} 22 & \underline{|\ 7\quad} \\ \underline{21} & \ 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \Leftrightarrow \qquad 22 = 3 \cdot 7 + 1.$$

Assim,

$$22 = 3 \cdot 7 + 1 \quad \Leftrightarrow \quad 220 = 30 \cdot 7 + 10 \quad \Leftrightarrow \quad 220 + 5 = 30 \cdot 7 + 10 + 5,$$

ou seja,

$$225 = 30 \cdot 7 + 15. \tag{3.28}$$

Agora, como $15 \geq 7$, temos

$$\begin{array}{rl} 15 & \underline{|\ 7\quad} \\ \underline{14} & \ 2 \\ 1 & \end{array} \qquad \Leftrightarrow \qquad 15 = 2 \cdot 7 + 1.$$

Logo, retornando a (3.28), obtemos

$$225 = 30 \cdot 7 + 2 \cdot 7 + 1 \quad \Leftrightarrow \quad 225 = 32 \cdot 7 + 1.$$

O algoritmo que acabamos de apresentar tem a validade garantida pelo seguinte teorema.

Teorema 3.3.5 (Algoritmo da Divisão de Euclides-ADE). *Dados $a, d \in \mathbb{N}$, existem únicos $q, r \in \mathbb{N}$, tais que*

$$a = qd + r \qquad e \qquad 0 \leq r < d.$$

Demonstração. Inicialmente mostraremos a existência de q e r. Em seguida mostraremos suas unicidades. Temos que a é um múltiplo de d ou a está situado entre os múltiplos qd e $(q+1)d$ de d, para algum $q \in \mathbb{N}$. Se a é múltiplo de d, digamos, $a = dp$, trivialmente temos $q = p$ e $r = 0$. Caso a não seja múltiplo de d, teremos $qd < a < (q+1)d$. Nesta desigualdade podemos subtrair qd de todos os membros, tendo assim, $0 < a - qd < d$. Tomemos $a - qd = r$ implicando em $a = qd + r$, daí $0 < r < d$. Segue que, quando $r = 0$, a é múltiplo de d.

Para provar a unicidade de q e r, suponhamos que existam outros naturais r' e q' tais que $a = dq' + r'$, com $0 \leq r' < d$. Desta forma temos que $a = dq + r = dq' + r'$, ou seja, $(r - r') = (q' - q)d$. Como $0 \leq r, r' < d$, temos que $0 \leq r - r' < d$, ou seja, $0 \leq d(q' - q) < d$ e como $d > 0$, podemos escrever $0 \leq q' - q < 1$. Sendo assim, $q' - q = 0$ o que implica $q = q'$ e $r = r'$.

□

Para finalizar, mostraremos a seguir, brevemente, uma representação do nosso sistema de numeração usado para expressar por exemplo: quantidades, medidas e códigos.

3.3.2 Sistema de Numeração

No ensino básico aprendemos que cada número natural pode ser escrito através de suas unidades, unidades de dezenas, unidades de centenas, etc. Por exemplo, o número 365 pode ser escrito na forma

$$365 = 300 + 60 + 5 = 5 + 6 \cdot 10 + 3 \cdot 10^2.$$

O 10 envolvido na escrita é o que motiva chamarmos o nosso sistema de numeração usual de *Decimal*. No sistema de numeração decimal, cada número $n \in \mathbb{N}$ pode ser escrito na forma

$$n = a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + \ldots + a_k \cdot 10^k,$$

onde $a_k, k \in \mathbb{N}$ e $0 \leq a_k \leq 9$.

Considerações Finais

Este trabalho é voltado para os alunos ingressantes no Ensino Médio e tem como objetivo contribuir para a literatura que versa sobre os fundamentos básicos da Lógica, os quais são fundamentais para o formalismo e a abstração, tão requeridos pela Matemática, porém tais fundamentos não estão presentes nos programas curriculares do Ensino Médio.

A construção do raciocínio matemático necessita das técnicas de um raciocínio lógico-dedutivo, que por sua vez necessita dos fundamentos da Lógica. Portanto, o presente trabalho abordou os fundamentos da Lógica em paralelo ao conceito de Conjuntos, pois decidimos abordar as duas literaturas, na medida do possível, conectadas, por ser oportuno para o aluno, visto que os símbolos e os conceitos da Lógica, como por exemplo: conectivos e equivalências, já estão presentes nos primeiros conteúdos das séries iniciais do Ensino Médio, tal qual Conjuntos, sem uma explicação prévia.

Os conceitos de Lógica e de Conjuntos foram apresentados da forma mais natural e elementar possível, utilizando um para explicar o outro, evitando assim o uso de expressões e equações numéricas, já que culminamos o nosso trabalho com a construção dos Números Naturais. Embora não seja imprescindível saber Lógica para responder uma questão de Conjuntos ou vice versa, ambos podem complementar-se. E foi justamente esse o nosso objetivo: usar os conhecimentos de Lógica para entender Conjuntos, bem como usar os conhecimentos de Conjuntos para entender Lógica.

Por fim, através das técnicas de um raciocínio lógico-dedutivo e dos conceitos de Conjuntos, oportunizamos ao aluno compreender, de forma mais rigorosa, a construção dos Números Naturais e algumas de suas propriedades abordadas no último capítulo.

Referências Bibliográficas

[1] Alencar Filho, E. de, *Iniciação à Lógica Matemática*, Editora Nobel, (2002).

[2] Dante, L. R., *Matemática: Contexto & Aplicações* - volume 1 - Editora Ática, 1ª Ed. - 1ª impressão (2010).

[3] Halmos, P. R., *Teoria Ingênua dos Conjuntos* - Editora Ciência Moderna (2001).

[4] Iezzi, G., Murakami, C., *Conjuntos e Funções*, Coleção Fundamentos de Matemática Elementar - Volume 1. Editora Atual, 8ª Ed.(2004).

[5] Lima, E. L., Carvalho, P. C. P., Wagner, E., Morgado, A. C., *A matemática do ensino médio - volume 1* - Editora SBM, 10ª Ed.(2012).

[6] Maio, W. de, *Fundamentos de Matemática* , Editora LTC (2009).

[7] Morais Filho, D. C. de, *Um Convite à Matemática*, Editora Fábrica de Ensino, 3ª Ed.(2010).