



PRÓ-REITORIA DE PÓS GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL-PROFMAT

Modelagem matemática de sistemas vibratórios
com aplicação de autovalores

Por:

Sheyla Maurício Maia Venceslau

Mestrado Profissional de Matemática - São Cristovão - SE

São Cristovão, 2015.



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL-PROFMAT

Modelagem matemática de sistemas vibratórios com aplicação de autovalores

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Sheyla Maurício Maia Venceslau

Orientador: Doutora Débora Lopes da Silva

São Cristovão, 2015.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

V451m Venceslau, Sheyla Maurício Maia
Modelagem matemática de sistemas vibratórios com aplicação
de autovalores / Sheyla Maurício Maia Venceslau ; orientador
Débora Lopes da Silva. – São Cristóvão, 2015.
94f. ; il.

Dissertação (mestrado em Ensino de Ciências Naturais e
Matemática) - Universidade Federal de Sergipe, 2015.

1. Mecânica. 2. Vibração 3. Autovalores. 4. Modelagem 5.
Equações diferenciais. I. Silva, Débora Lopes da, orient. II. Título

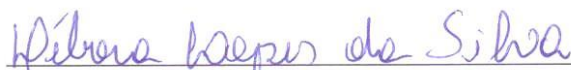
CDU 534-16:517.9

Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

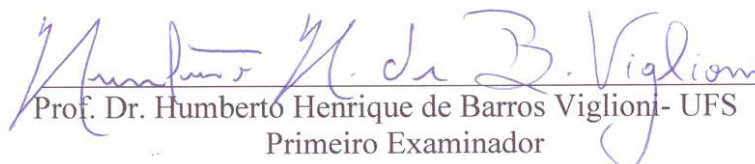
Modelagem matemática de sistemas vibratórios com aplicação de autovalores
por

Sheyla Maurício Maia

Aprovada pela Banca Examinadora:



Prof.^a. Dr.^a. Débora Lopes da Silva- UFS
Orientadora



Prof. Dr. Humberto Henrique de Barros Viglioni- UFS
Primeiro Examinador



Prof. Dr. Paulo de Souza Rabelo- UFS
Segundo Examinador

São Cristóvão, 30 de Maio de 2015.

Dedicatória

Com muito carinho dedico a meus pais, Luzinete e Clodoveu, pelo apoio e exemplo ao longo da vida, e ao meu esposo e filha, Allisson e Yasmin, pelo amor e compreensão.

Agradecimentos

À Deus por todas as graças em minha vida e por ter me concedido força, coragem e fé para chegar ao final de mais uma etapa.

À minha mãe por ter tornado tudo isso possível, pelo amor e generosidade.

Ao meu pai pelo apoio e palavras de bom senso.

À minha filha por ser tão amável e encher meu coração de orgulho.

Ao meu esposo pelo amor e proteção.

Aos meus irmãos e amigos por compreenderem minha ausência e me incentivarem.

À professora Débora, por quem tenho apreço e admiração, agradeço pela confiança, estímulo e ajuda, neste e em outro momento de minha vida.

Às amigas de graduação Danielle Peixoto e Maria de Andrade por tudo que me ensinaram.

Aos amigos de turma por toda alegria e inspiração.

Aos professores do PROFMAT pelos valiosos ensinamentos.

Aos professores que compuseram a banca examinadora.

"Crê em ti mesmo; o coração vibra sempre ao som desta corda".

(Ralph Waldo Emerson)

Resumo

O presente trabalho visa contribuir para o processo de ensino e aprendizagem de disciplinas como Álgebra Linear e Equações Diferenciais, sugerindo uma metodologia de ensino baseada na modelagem matemática de sistemas mecânicos e na aplicação do problema de autovalores, assim como, estimular alunos do ensino médio a explorar a matemática, uma ciência reveladora e essencial, mostrando que conteúdos como números complexos, determinantes, trigonometria, etc, alguns destes equivocadamente questionados quanto a utilidade prática, podem ser usados em benefício das pessoas, por exemplo, proporcionando mais segurança e estabilidade às edificações, fundamentais nos tempos atuais. Inicialmente, serão apresentados formalmente os conteúdos necessários ao entendimento de sistemas vibratórios com dois graus de liberdade, para posteriormente aplicá-los na determinação das frequências naturais de vibração de um edifício de dois andares. Além disso, será feita uma demonstração de como calcular os autovalores através de ferramentas computacionais, os softwares MATLAB e R. Com o uso do software, a determinação das frequências naturais torna-se ainda mais prática e, portanto, mostrar que a aplicação do referido problema é bastante simples e tem utilidade prática evidente.

Palavras chaves: Modelagem, Equações Diferenciais, Autovalores, Sistemas Vibratórios, Mecânica.

Abstract

The present work aims to contribute to the teaching and learning process of disciplines such as Linear Algebra and Differential Equations, suggesting a study methodology based on mathematical modeling of mechanical systems and application of eigenvalues of problem, as well as encourage high school students to explore mathematics, a revealing and essential science, showing that content such as complex numbers, determinants, trigonometry, etc., some of these mistakenly questioned about its practical utility, can be used for the benefit of people, for example, providing more security and stability to buildings , essential in modern times. Initially, the contents will be displayed formally required for the understanding of vibrating systems with two degrees of freedom to apply them subsequently in the determination of natural frequencies of vibration of a two storey building. Also, a demo will be made of how to calculate the eigenvalues through of computational tools, the softwares MATLAB and R. Using the softwares, the determination of natural frequencies becomes even more practical and thus shows that the application of the problem is quite simple and has obvious practical use.

Keywords: Modeling, Differential Equations, Eigenvalues, Vibratory Systems, Mechanical.

Lista de Figuras

| | | |
|-----|---|----|
| 1 | Propagação do som. | 16 |
| 2 | Luz visível - Onda eletromagnética. | 17 |
| 3 | Máquinas vibratórias usadas na indústria. | 17 |
| 4 | Corpo humano e respectivas frequências naturais. | 19 |
| 5 | Colapso da ponte de Tacoma Narrows devido a ressonância. | 19 |
| 1.1 | Os experimentos de Pitágoras representados em gravura da obra publicada em 1492, <i>Theorica musicae</i> , do influente teórico e músico italiano Franchino Gaffurio (1451-1522). | 20 |
| 1.2 | Monocórdio. | 21 |
| 1.3 | Sismógrafo de Zhang Heng. | 21 |
| 1.4 | Deformação de uma coluna elástica devido a uma força axial compressiva (Modelo matemático: $EI \frac{d^2y}{dx^2} + Py = 0$). | 23 |
| 2.1 | Representação gráfica da definição de limite. | 26 |
| 2.2 | Coeficiente angular de $s = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ | 27 |
| 2.3 | Reta s se aproximando da reta t | 28 |
| 2.4 | Gráfico da função exponencial $f(x) = e^x$ | 31 |
| 4.1 | Ilustração do físico Isaac Newton observando o movimento de uma maçã ao cair. | 46 |
| 4.2 | Movimento geral de um corpo rígido. | 47 |
| 4.3 | Translação de um corpo rígido. | 47 |
| 4.4 | Rotação de um corpo rígido. | 47 |
| 4.5 | (a) Sistema mecânico massa-mola-amortecedor com um grau de liberdade; e (b) Diagrama de corpo livre correspondente. | 49 |
| 4.6 | Posição de um sólido no espaço. | 50 |
| 4.7 | Sistema discreto com 2 GDL. | 51 |
| 4.8 | Sistema contínuo. | 51 |

| | | |
|------|---|----|
| 4.9 | Modelo simplificado do sistema mecânico que compõe a suspensão de um veículo. | 53 |
| 4.10 | Sistema físico composto por motocicleta com um motociclista e modelos sugeridos. | 53 |
| 4.11 | Idealização de um edifício de vários andares como um sistema com múltiplos graus de liberdade. | 54 |
| 5.1 | (a) Movimento de elétrons em torno do núcleo; (b) Oscilação das moléculas em um arranjo molecular; e, (c) Barco Viking de parques de diversão movendo-se como um pêndulo. | 55 |
| 5.2 | (a) Força gravitacional P no caso de um pêndulo; e, (b) Força elástica F_k no caso de massa-mola. | 56 |
| 5.3 | Corda vibrando. | 57 |
| 5.4 | Gráficos típicos da posição em função do tempo para vibrações livres amortecidas e não-amortecidas. | 58 |
| 5.5 | Sistema Massa-Mola Ideal (sem dissipação de energia). | 58 |
| 5.6 | A deformação (elongação) da mola elástica é diretamente proporcional ao peso colocado. | 60 |
| 5.7 | Faixa linear correspondente à região onde há proporcionalidade. | 61 |
| 5.8 | Rigidez de uma viga em balanço com massa na extremidade; (a) Sistema original; (b) Sistema massa-mola equivalente. | 62 |
| 5.9 | Viga bi-apoiada com carga transversal no centro da viga. | 62 |
| 5.10 | Viga bi-engastada com carga transversal no centro da viga. | 63 |
| 5.11 | Viga em balanço sujeita a força axial; (a) Sistema original; (b) Sistema massa mola equivalente. | 63 |
| 5.12 | MCU de uma partícula projetado em um eixo horizontal. | 64 |
| 5.13 | Posição da partícula no instante $t = 0$. | 65 |
| 5.14 | Partícula em MCU. | 65 |
| 5.15 | Representação gráfica do movimento harmônico simples descrito pela projeção da extremidade de um vetor girante sobre o eixo vertical. | 66 |
| 5.16 | Representação do vetor girante no plano complexo. | 67 |
| 5.17 | Gráfico de uma função periódica. | 68 |
| 5.18 | Período e período fundamental. | 68 |
| 5.19 | Gráficos das funções <i>seno</i> e <i>coseno</i> . | 69 |
| 6.1 | Estrutura do edifício. | 71 |
| 6.2 | Sistema massa-mola equivalente. | 71 |

| | | |
|-----|--|----|
| 6.3 | Sistema massa-mola horizontal. | 72 |
| 6.4 | Sistema massa-mola com dois graus de liberdade | 74 |
| 6.5 | Diagrama de corpo livre das massas m_1 e m_2 | 75 |
| 6.6 | Estutura de um edificio de dois andares. | 76 |
| 6.7 | Sistema massa-mola equivalente. | 77 |
| 6.8 | Ferramenta interativa (Oscilador Harmônico). | 91 |

Lista de Tabelas

| | | |
|---|---|----|
| 1 | Principais sintomas relacionados com a frequência da vibração | 18 |
|---|---|----|

Sumário

| | |
|--|-----------|
| Introdução | 16 |
| 1 História do estudo das vibrações | 20 |
| 2 Noções preliminares: Limites e Derivadas | 26 |
| 2.1 Limite de uma função | 26 |
| 2.2 Derivada de uma função | 27 |
| 2.2.1 Notações para derivadas | 29 |
| 2.2.2 Regras de derivação | 30 |
| 2.2.3 Derivadas de ordem superior | 33 |
| 2.2.4 Operadores diferenciais lineares | 34 |
| 3 Equações Diferenciais Ordinárias | 35 |
| 3.1 Conceitos fundamentais em Equações Diferenciais (ED) | 35 |
| 3.1.1 Classificação de uma ED por Tipo e Ordem | 35 |
| 3.2 Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) | 36 |
| 3.2.1 Solução de uma EDO | 36 |
| 3.2.2 Equações Diferenciais Ordinárias Lineares (EDOL) | 37 |
| 3.3 Problemas de Valor Inicial (PVI) | 38 |
| 3.3.1 Problemas de Valor Inicial e Problemas de Contorno (PVC) em EDOL's | 39 |
| 3.4 EDOL's Homogêneas | 40 |
| 3.4.1 Princípio da Superposição (Operador diferencial) | 40 |
| 3.5 EDOL's Homogêneas com coeficientes constantes | 41 |
| 3.6 Sistemas de EDOL's Homogêneas de 2ª ordem | 43 |
| 4 Sistemas Mecânicos | 46 |
| 4.1 Mecânica Clássica: Definições e terminologia | 46 |
| 4.2 Modelagem matemática de sistemas mecânicos | 52 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 5 | Vibrações Mecânicas | 55 |
| 5.1 | Definições e terminologia | 55 |
| 5.2 | Elementos de um sistema vibratório | 58 |
| 5.2.1 | Massas ou inércias | 59 |
| 5.2.2 | Mola | 59 |
| 5.2.3 | Elementos estruturais representados por molas | 61 |
| 5.3 | Movimento harmônico | 64 |
| 5.3.1 | Representação vetorial e complexa do movimento harmônico | 66 |
| 5.3.2 | Funções periódicas | 68 |
| 6 | Vibrações Livres não-Amortecidas | 71 |
| 6.1 | Sistemas com um grau de liberdade | 71 |
| 6.1.1 | Equação do movimento | 72 |
| 6.2 | Sistemas com dois graus de liberdade | 74 |
| 6.2.1 | Aplicação em um edifício de 2 andares | 76 |
| 6.2.2 | Usando o software R | 82 |
| 6.2.3 | <i>PhET</i> - Simuladores Interativos | 91 |
| | Considerações finais | 92 |
| | Referências | 94 |

Introdução

As oscilações e vibrações são fenômenos cotidianos e estão presentes em grande parte das atividades humanas. Vivemos cercados de corpos que oscilam e constantemente produzimos vibrações. Afinal, somos capazes de ouvir porque nossos tímpanos vibram, de enxergar, pois a luz se propaga em campos gerados por oscilações, e de falar, devido ao movimento vibratório das nossas cordas vocais. O som é uma onda mecânica, Figura 1, e se propaga através da vibração das partículas do meio material que pode ser sólido ou fluido, como ar e água. A luz visível é uma onda eletromagnética formada por campos eletromagnéticos oscilantes, podendo se propagar no vácuo, Figura 2. Nossa respiração e batimentos cardíacos estão associados a movimentos oscilatórios do pulmão e coração, respectivamente. Além disso, a vibração é responsável pelos *sismos* ou terremotos, um dos fenômenos da natureza mais grandiosos e devastadores. Em contrapartida, na natureza também encontramos oscilações na escala atômica e molecular, o que justifica diversas aplicações na química, nanotecnologia, biologia molecular, física quântica, física médica, eletrônica, etc.

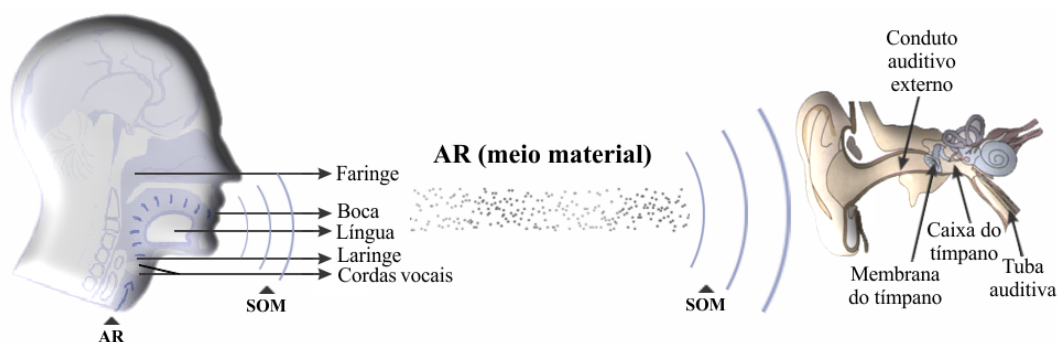


Figura 1: Propagação do som.

Fonte: Elaborada pela autora.

Apesar do efeito nocivo das vibrações em determinados casos, ela também pode ser utilizada para boas finalidades. Uma gama de produtos no mercado tem elementos vibratórios associados, diretamente ou indiretamente, ao seu funcionamento como máquina de lavar, bate-deira, microondas, massageadores, amplificadores de áudio, GPS, etc.

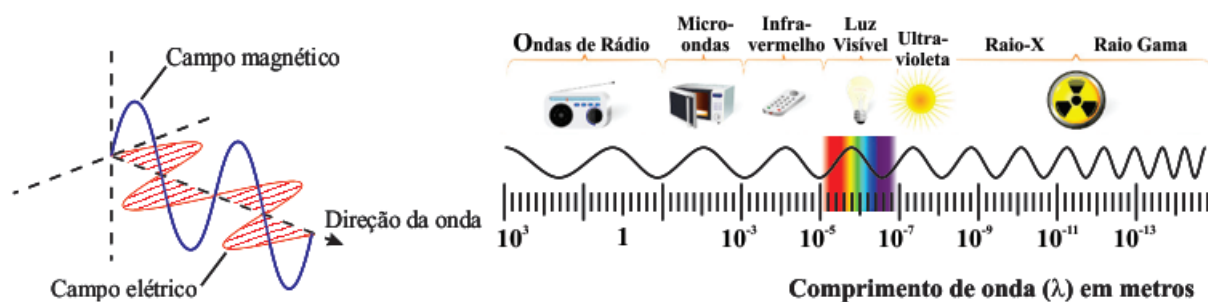


Figura 2: Luz visível - Onda eletromagnética.
 Fonte: Elaborada pela autora.

O movimento vibratório na indústria, Figura 3, é usado por exemplo em esteiras transportadoras, peneiras vibratórias, compactadores, testes de materiais, soldagem, etc. Diversos campos do conhecimento estudam comportamentos oscilatórios como economia, química, biologia, física, estatística, etc. Na área da nanotecnologia, estudos revelam como as vibrações podem ajudar na eficiência energética, retardando a transferência de calor entre os materiais.

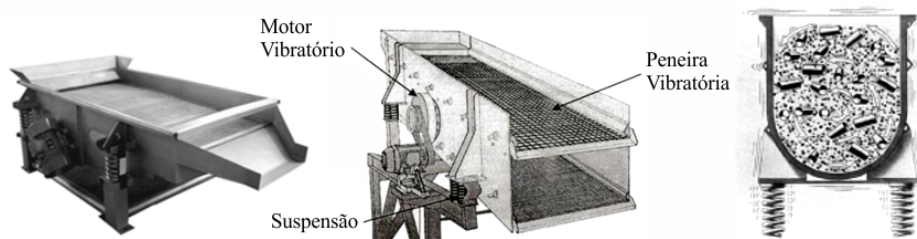


Figura 3: Máquinas vibratórias usadas na indústria.
 Fonte: Elaborada pela autora.

Os primeiros estudos de vibrações focaram principalmente na análise e representação de movimentos oscilatórios, na compreensão de fenômenos naturais relacionados e no desenvolvimento de teorias matemáticas para descrever a vibração de sistemas físicos. Embora esse tipo de movimento seja muito comum, na maioria das vezes é bastante complexo. Atualmente, muitos estudos verificam a relevância do tema e vêm fomentando aplicações da teoria de vibrações na engenharia moderna, pois frequentemente as vibrações estão entre as causas de falhas em estruturas, máquinas, etc. A ação de ventos e carregamentos dinâmicos, o desbalanceamento de motores e o aumento da esbeltez de estruturas são alguns dos fatores que favorecem a ocorrência de oscilações. Segundo Sommer (2002, p. 3 apud KORENEV & REZNIKOV, 1992): "Diversas são as fontes que podem ocasionar vibrações em estruturas, tais como a ação dinâmica do vento, ações sísmicas, carregamentos desbalanceados devido à instalação de equipamentos, carrega-

mentos devido ao tráfego de veículos, ação das ondas do mar, excitações de público devido ao caminhar, dançar". Cada vez mais torna-se necessário a análise de vibrações em projetos de máquinas, fundações, estruturas, pontes, automóveis, aviões, navios, motores, turbinas, entre tantos outros. O principal objetivo da análise dinâmica é projetar estruturas que sejam seguras, duráveis e estáveis. O controle de vibrações em estruturas durante a construção também merece atenção, uma vez que pode acarretar danos à saúde das pessoas, principalmente dos trabalhadores que ficam sujeitos aos malefícios por mais tempo. Como afirma Soeiro:

[...] Em muitos sistemas de engenharia, o ser humano atua como parte integrante do mesmo. A transmissão de vibração para o ser humano resulta em desconforto e perda de eficiência, podendo constituir um risco em potencial para os trabalhadores, uma vez que as vibrações podem desencadear perturbações neurológicas ou musculares, vasculares e lesões ósteo-articulares, no caso das vibrações transmitidas ao sistema mão-braço e patologias na região lombar e lesões da coluna vertebral, para o caso das vibrações transmitidas a todo o organismo. (SOEIRO, N. S. *Curso de Fundamentos de Vibração e Balanceamento de Rotores*, 2008).

A Tabela 1 apresenta os principais sintomas relacionados com a frequência da vibração a qual uma pessoa fica sujeita:

| SINTOMAS | FREQUÊNCIA (Hz) |
|---|-----------------|
| Sensação geral de desconforto | 4 - 9 |
| Sintomas na cabeça | 13 - 20 |
| Maxilar | 6 - 8 |
| Influência na linguagem | 13 - 20 |
| Garganta | 12 - 19 |
| Dor no peito | 5 - 7 |
| Dor abdominal | 4 - 10 |
| Desejo de urinar | 10 - 18 |
| Aumento do tonus muscular | 13 - 20 |
| Influência nos movimentos respiratórios | 4 - 8 |
| Contrações musculares | 4 - 9 |

Tabela 1: Principais sintomas relacionados com a frequência da vibração
 Fonte: Fernandes, J. C., *Segurança nas Vibrações sobre o Corpo Humano*, 2000).

De um modo geral, a vibração consiste em movimento inerente aos corpos dotados de massa e elasticidade. O corpo humano possui características de inércia e elasticidade que lhe conferem valores de frequência natural distintos, relativos a cada uma de suas partes, Figura 4.

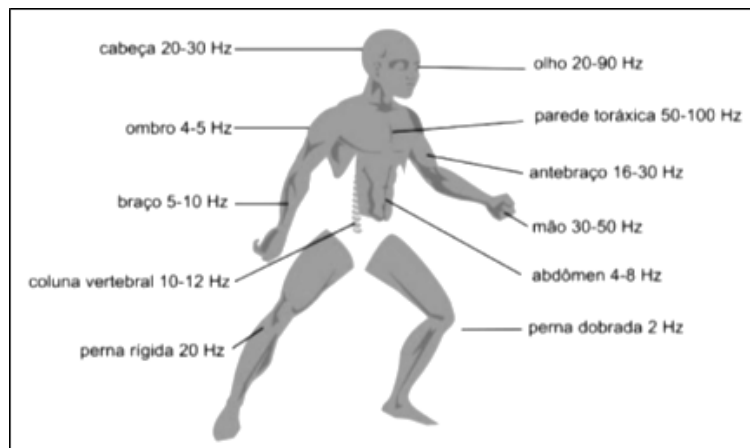


Figura 4: Corpo humano e respectivas frequências naturais.
 Fonte: SOEIRO, 2008.

A frequência externa quando coincide com a frequência natural do sistema provoca uma amplificação das oscilações, fenômeno físico conhecido por *ressonância*. No caso de sistemas estruturais, resulta em deflexões excessivas podendo levar a estrutura ao colapso. A literatura traz exemplos de falhas em estruturas causadas por vibrações excessivas em virtude da ressonância. Um destes exemplos é o da ponte de Tacoma Narrows, Figura 5, nos Estados Unidos, inaugurada em julho de 1940, colapsou em 7 de novembro do mesmo ano quando entrou em ressonância induzida pelo vento.



Figura 5: Colapso da ponte de Tacoma Narrows devido a ressonância.
 Fonte: Rao, 2008, p. 6.

Capítulo 1

História do estudo das vibrações

A invenção dos primeiros instrumentos musicais despertou o interesse por uma investigação mais aprofundada do fenômeno da vibração. Embora a música já fosse estudada e apreciada desde a antiguidade, o conhecimento produzido nessa época não alicerçava uma ciência. O filósofo e matemático grego Pitágoras (582-507 a.C.) é considerado pioneiro na investigação dos sons com base científica e criou o primeiro laboratório de pesquisas em vibrações, onde realizou experiências com martelos, cordas, tubos e placas, ver Figura (1.1). Com base nesses experimentos, ele estabeleceu um método racional de medição de frequências sonoras.



Figura 1.1: Os experimentos de Pitágoras representados em gravura da obra publicada em 1492, *Theorica musicae*, do influente teórico e músico italiano Franchino Gaffurio (1451-1522).

Entre tantos experimentos realizados por Pitágoras, um deles utilizava um instrumento chamado *monocórdio* que consistia em uma corda presa nas extremidades a um cavalete ou base de apoio, de modo que a tensão fosse mantida constante, e um dispositivo móvel que regulava o comprimento da corda vibrante, Figura (1.2). Com esse experimento ele concluiu que uma corda mais curta emite um som mais agudo que outra de maior comprimento sujeita a mesma tensão, e ainda, a mais curta sendo metade da mais longa emite uma nota uma oitava acima. Outro matemático que escreveu sobre música foi Euclides em 300 a.C., sem mencionar em momento algum a natureza física do som, em sua obra intitulada *Introdução aos Harmônicos*.

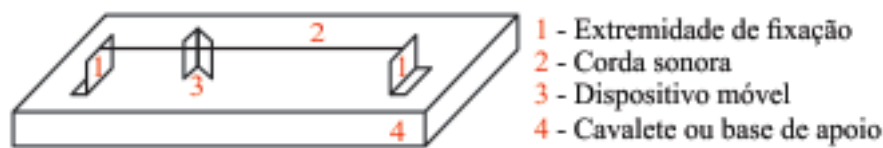


Figura 1.2: Monocórdio.
Fonte: Elaborada pela autora.

Durante a antiguidade, a China sofreu muitos abalos sísmicos o que motivou o historiador e astônomo chinês Zhang Heng a criar um instrumento para monitorar terremotos. Em 132 d.C, Zhang construiu o primeiro sismógrafo do mundo, ver Figura (1.3), feito de bronze fundido e formato de jarra de vinho, continha em seu interior um mecanismo composto por um pêndulo e oito alavancas.

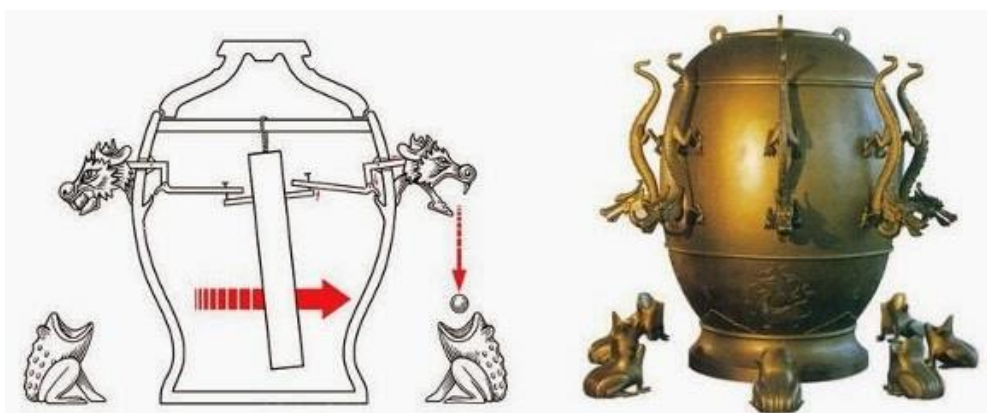


Figura 1.3: Sismógrafo de Zhang Heng.

Fonte: Disponível em <http://www.ilnavigatorecurioso.it/2014/02/26/tecnologia-antica-lincredibile-sismoscopio-inventato-2-mila-anni-fa-in-cina/>.

O terremoto deslocava o pêndulo que acionava a alavanca de mesma direção. Após a alavanca ser acionada, uma pequena esfera de bronze era liberada e ao cair emitia um som, permitindo saber o horário e em que direção ocorreu o terremoto. Há relatos que o sismógrafo de Zhang, instalado no Departamento de Astronomia e Calendário, registrou um terremoto ocorrido a cerca de 600 km de distância, constatando a utilidade do invento, uma vez que a essa distância o tremor é imperceptível ao ser humano.

Galileu Galilei (1564-1642), fundador da ciência experimental moderna, ao olhar para o teto durante um sermão na igreja de Pisa, percebeu que o movimento pendular de uma lâmpada suspensa por um cabo tinha propriedades interessantes e a partir deste episódio iniciou os estudos do movimento oscilatório de um pêndulo simples. Galileu estabeleceu formalmente a relação entre o comprimento do pêndulo e o seu período de oscilação e observou a ressonância entre dois corpos ligados por algum meio de transferência de energia e submetidos a uma mesma frequência natural. Em 1638, publicou *Discourses concerning two new sciences* onde discutiu corpos vibratórios e destacou a influência da frequência na vibração. Apesar de claramente Galileu indicar que havia uma relação entre frequência, comprimento, tensão e densidade de uma corda vibratória esticada, a publicação da primeira explicação correta acerca dessa relação ficou a cargo do matemático e teólogo francês Marin Mersenne (1588-1648) em sua obra *Harmonicorum Liber*.

Mais tarde em Londres, Robert Hooke (1635-1703) também fez experimentos para determinar a relação entre a tonalidade e a frequência de vibração de uma corda. Contudo, foi o francês Joseph Sauveur (1653-1716) quem investigou esses experimentos minuciosamente e consolidou a palavra “acústica” para a ciência do som (RAO, 2012, p. 2). Segundo Sauveur, certos pontos de uma corda esticada em vibração, denominados *nós*, possuem deslocamentos nulos enquanto outros pontos intermediários, denominados *ventres*, apresentam picos de deslocamento. Observou ainda que as frequências de vibrações da corda eram múltiplos inteiros das frequências associadas à vibração simples, isto é, sem nós intermediários. Tal observação sugere que as vibrações de um modo geral são composição de vibrações elementares. Chamou a frequência de vibração simples de *frequência fundamental* e suas variações, de *harmônicas*. Atribui-se ainda a Sauveur, as primeiras observações sobre o fenômeno de batimentos, assunto atualmente de interesse da engenharia mecânica.

O ilustre Isaac Newton (1642-1727) formulou as três leis do movimento em sua formidável obra *Philosophiae naturalis principia mathematica* publicada em 1686. Nessa mesma obra, Newton descreve a lei da gravitação universal. A segunda lei de Newton é frequentemente usada para determinar as equações de movimento de um corpo em vibração. A solução dinâmica do problema da corda vibratória foi descoberta pelo matemático inglês Brook Taylor (1685-1731) em 1713, também autor do famoso teorema de Taylor para séries infinitas. A solução teórica apresentada por Taylor era consonante com os resultados experimentais de Galileu e Mersenne. O aprimoramento do método usado por Taylor veio com a introdução de derivadas parciais nas equações de movimento por Daniel Bernoulli (1700-1782), Jean D'Alembert (1717-1783) e Leonard Euler (1707-1783). Os primeiros estudos de vibrações em vigas foram realizados por Euler em 1744 e Bernoulli em 1751. Baseados na Lei da Elasticidade, formulada por Hooke em 1676, Euler e Bernoulli determinaram a equação diferencial que governa a vibração de barras prismáticas e investigaram a sua solução para o caso de pequenas deformações. Euler foi um dos primeiros matemáticos a estudar um problema de autovalor quando analisava como uma coluna elástica fina se deforma sob uma força axial compressiva, Figura (1.4).

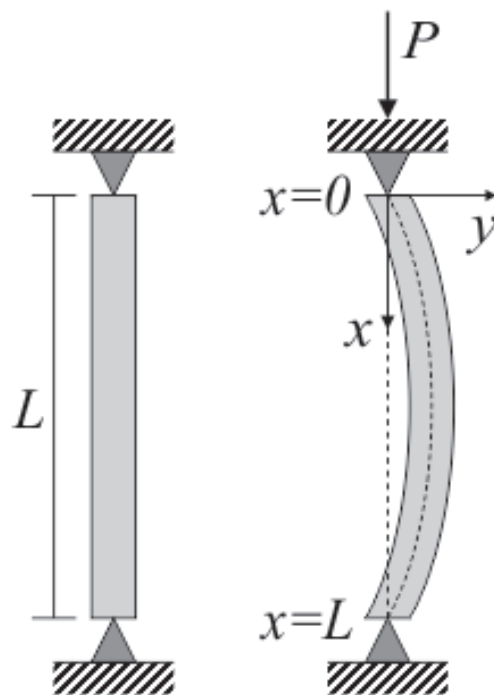


Figura 1.4: Deformação de uma coluna elástica devido a uma força axial compressiva (Modelo matemático: $EI \frac{d^2y}{dx^2} + Py = 0$).

Fonte: Elaborada pela autora.

Daniel Bernoulli, por meio de suas equações dinâmicas, em obra publicada pela Berlin Academy, em 1755, provou que a vibração em uma corda resulta da combinação de várias vibrações harmônicas. Dessa forma, o deslocamento de qualquer ponto em qualquer instante é igual à soma algébrica dos deslocamentos para cada harmônica. Essa propriedade, denominada originalmente de princípio da coexistência de pequenas oscilações, é na terminologia moderna, denominada *princípio da superposição*. O princípio da superposição impulsionou o desenvolvimento da teoria de vibrações e possibilitou expressar qualquer função arbitrária de vibração da corda através de uma série infinita de senos e cossenos. A validade da expansão foi provada por J. B. J. Fourier (1768-1830) em sua obra *Analytical theory of heat* (Teoria analítica do calor) em 1822. A solução analítica da corda vibratória foi apresentada por Joseph Lagrange (1736-1813) em suas memórias publicadas pela Academia de Turim em 1759. Lagrange admitiu que a corda era composta por um número finito de partículas de massas idênticas espaçadas igualmente e estabeleceu a existência de um número de frequências independentes igual ao número de partículas da massa (RAO, 2012). A veracidade da hipótese adotada por Lagrange se confirma ao fazer o número de partículas tender para infinito e constatar que as frequências resultantes coincidem com as frequências harmônicas da corda estirada.

Muitos estudos de vibração em vários sistemas mecânicos e estruturais usuais foram feitos e um método que tem sido bastante usado para a solução de problemas difíceis de vibração é o *Método da Energia*. Idealizado por Lord Baron Rayleigh e publicado em 1877, o *Método de Rayleigh* é um tipo de método da energia usado na determinação da frequência fundamental de vibração de um sistema conservativo e se sustenta no princípio da conservação de energia. Stephen Timoshenko (1878-1972) apresentou uma teoria aperfeiçoada de vibração de vigas que ficou conhecida como teoria de Timoshenko a qual considera os efeitos da inércia de rotação e da deformação por cisalhamento. A grande maioria dos problemas básicos de mecânica, incluindo os de vibrações, são não lineares. Embora os tratamentos lineares comumente adotados sejam bastante satisfatórios, não são adequados em todos os casos. A teoria matemática das vibrações não lineares começou a desenvolver-se com o trabalho de Jules Henri Poincaré (1854-1912) e Alexander Lyapunov (1857-1918) no final do século XIX d.C. Os estudos realizados por Duffing e van der Pol resultaram nas primeiras soluções definidas da teoria de vibrações não lineares e chamaram atenção para sua importância na Engenharia.

Há pelo menos três décadas, os estudos de vibrações baseavam-se em modelos grosseiros com um número reduzido de graus de liberdade. No entanto, a era da informática proporcionou uma análise mais refinada de sistemas complexos de engenharia com a possibilidade de fazer uma grande quantidade de cálculos em um curto tempo. Hoje, a engenharia utiliza modelos matemáticos de grande precisão para representar o comportamento de sistemas de grande porte aliado a métodos numéricos de análise de sistemas com múltiplos graus de liberdade. O avanço tecnológico também promoveu a evolução de instrumentos de medição de vibrações, como lasers, e de métodos experimentais que, associados aos métodos computacionais, tem contribuído significativamente no estudo de sistemas vibratórios.

Capítulo 2

Noções preliminares: Limites e Derivadas

2.1 Limite de uma função

Intuitivamente, dizemos que uma função $f(x)$ tem limite L quando x tende a x_0 se é possível tornar $f(x)$ arbitrariamente próximo de L , desde que tomemos valores de x ($x \neq x_0$) suficientemente próximos de x_0 por ambos lados, Figura (2.1).

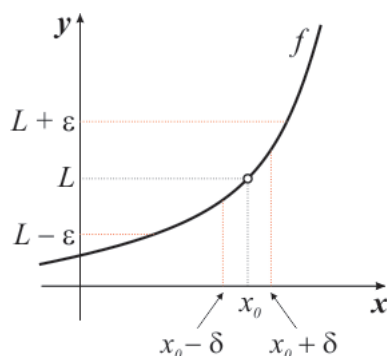


Figura 2.1: Representação gráfica da definição de limite.

Fonte: Elaborada pela autora.

Definição 2.1 (Limite de uma função). *Seja $f(x)$ definida num intervalo aberto I , contendo x_0 , exceto possivelmente no próprio x_0 . Dizemos que o limite de $f(x)$ quando x tende a x_0 é L e escrevemos*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

se para todo número $\epsilon > 0$ existir um número $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ então } |f(x) - L| < \epsilon$$

Definição 2.2 (Função contínua). Uma função f é *contínua no ponto* x_0 quando

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Equivalente a satisfazer as três condições seguintes:

(i) f é definida no ponto x_0 ;

(ii) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ existe;

(iii) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

2.2 Derivada de uma função

Considere o problema de definir a reta tangente ao gráfico de uma função f no ponto $(x_0, f(x_0))$. Evidentemente, tal reta deve passar pelo ponto $(x_0, f(x_0))$. Dessa forma, a reta tangente fica determinada se soubermos o seu coeficiente angular. Seja s a reta que passa pelos pontos $(x_0, f(x_0))$ e $(x, f(x))$ do gráfico de f , ver Figura (2.2).

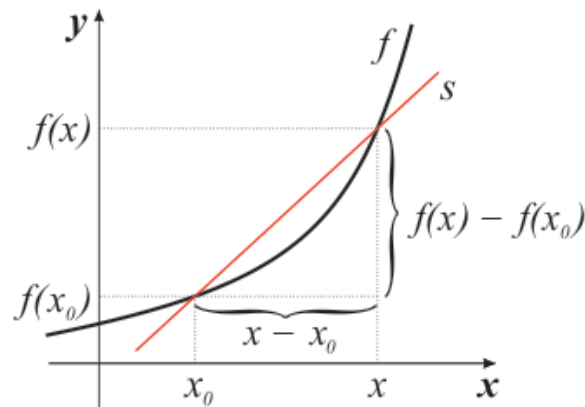


Figura 2.2: Coeficiente angular de $s = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Fonte: Elaborada pela autora.

Quando x se aproxima de x_0 , na notação usual $x \rightarrow x_0$ (leia: x tende a x_0), o coeficiente angular de s se aproxima de $f'(x_0)$, onde

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

caso o limite exista e seja calculado. Observe que $f'(x_0)$ é apenas uma notação para indicar o

valor do limite acima. Assim, à medida que x tende a x_0 , a reta s vai tendendo para a posição da reta t , Figura (2.3), de equação

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \quad (2.1)$$

É natural, então, definir a *reta tangente* t em $(x_0, f(x_0))$ como sendo a reta de equação (2.1). Portanto, a *derivada de f em x_0* é o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa x_0 .

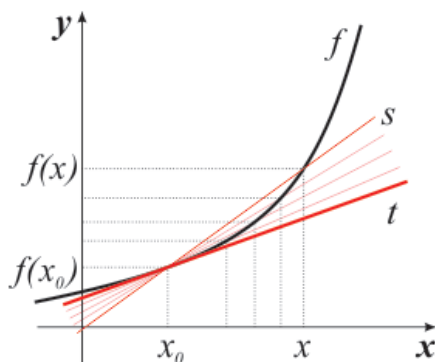


Figura 2.3: Reta s se aproximando da reta t .

Fonte: Elaborada pela autora.

Definição 2.3 (Derivada de uma função). *Sejam f uma função e x_0 um ponto de seu domínio. O limite*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

quando existe e é finito, denomina-se derivada de f em x_0 e indica-se por $f'(x_0)$ (leia: f linha de x_0). Assim

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Se f admite derivada em x_0 , então diremos que f é derivável ou diferenciável em x_0 .

Observação. Segue das propriedades de limites que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

onde $\Delta x = x - x_0$. Assim,

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Toda derivada pode ser interpretada como uma taxa de variação. Dada uma função $y = f(x)$, quando a variável independente varia de x a $x + \Delta x$, a correspondente variação de y será $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$. O quociente

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

representa a *taxa média de variação* de y em relação a x . A derivada

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

é a *taxa instantânea de variação* ou simplesmente *taxa de variação* de y em relação a x .

2.2.1 Notações para derivadas

Notação de Leibniz

Para $y = f(x)$, onde y é variável dependente e x é variável independente, temos

$$\boxed{f'(x) = \frac{dy}{dx}}$$

A notação, devida a Leibniz, $\frac{dy}{dx}$ (leia: derivada de y em relação a x) é usada para indicar a derivada de f em relação a x . A notação de Leibniz permite interpretar a derivada $\frac{dy}{dx}$ como a razão entre dois *incrementos* ou *acréscimos* (os diferenciais dy e dx). O símbolo $\frac{d}{dx}$, também indicado por D_x , é um *operador diferencial*.

Notação de Newton

Outra notação bastante empregada na física e engenharia para denotar derivadas temporais é a *notação de ponto* de Newton. Seja uma função $y = x(t)$, a derivada $x'(t) = \frac{dy}{dt}$ na notação de Newton fica $\dot{x}(t)$.

2.2.2 Regras de derivação

Todas as *regras de derivação* a seguir decorrem da definição e permitem determinar as derivadas de funções de modo mais prático.

Derivada de uma constante

Se c é uma constante e $f(x) = c$ para todo x , então $f'(x) = 0$.

Regra da potência

Se n é um número inteiro positivo e $f(x) = x^n$, então $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$.

Derivada do produto de uma constante por uma função

Sejam f uma função, c uma constante e g a função definida por $g(x) = cf(x)$. Se $f'(x)$ existe, então $g'(x) = cf'(x)$.

Derivada de uma soma

Sejam f e g funções deriváveis e h a função definida por $h(x) = f(x) + g(x)$, então $h'(x) = f'(x) + g'(x)$.

Derivada de um produto

Sejam f e g funções deriváveis e h a função definida por $h(x) = f(x) \cdot g(x)$, então $h'(x) = f(x) \cdot g'(x) + f'(x) \cdot g(x)$.

Derivada de um quociente

Sejam f e g funções deriváveis e h a função definida por $h(x) = f(x)/g(x)$, onde $g(x) \neq 0$. Então

$$h'(x) = \frac{g(x) \cdot f'(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

Regra da cadeia

Sejam f e g funções deriváveis, com $Im_g \subset D_f$. A função composta h definida por $h(x) = f(g(x))$ é derivável e vale a regra

$$h'(x) = f'(g(x))g'(x), \quad x \in D_g.$$

Derivada da função seno

Se $f(x) = \text{sen}x$, então $f'(x) = \text{cos}x$.

Derivada da função cosseno

Se $f(x) = \text{cos}x$, então $f'(x) = -\text{sen}x$.

Número e e Função exponencial de base e

Definição 2.4 (Número e).

$$e \text{ é um número tal que } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

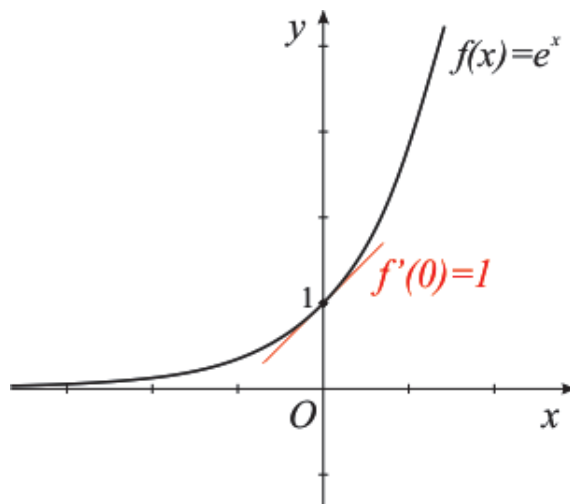


Figura 2.4: Gráfico da função exponencial $f(x) = e^x$.

Fonte: Elaborada pela autora.

Observação. A função $f(x) = e^x$ é aquela cuja reta tangente no ponto $(0, 1)$ tem inclinação igual a $f'(0) = 1$.

Derivada da função exponencial de base e

Se $f(x) = e^x$ então $f'(x) = e^x$, onde e é o número de euler ($e \approx 2,718282$).

Demonstração.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\left(\frac{e^h - 1}{h} \right) \cdot e^x \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} e^x = 1 \cdot \lim_{h \rightarrow 0} e^x = e^x.$$

□

Proposição 2.1 (Relação de Euler). *Seja e o número de euler e $x \in \mathbb{R}$, então valem as identidades*

$$e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x \quad e \quad e^{-ix} = \cos x - i \operatorname{sen} x$$

Demonstração. A relação de Euler $e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$ pode ser deduzida definindo uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ por $f(x) = (\cos x - i \operatorname{sen} x) \cdot e^{ix}$ e, em seguida, calculando sua derivada:

$$\begin{aligned} \frac{df}{dx} &= (\cos x - i \operatorname{sen} x) \frac{d}{dx}(e^{ix}) + \frac{d}{dx}(\cos x - i \operatorname{sen} x) \cdot e^{ix} \\ &= (\cos x - i \operatorname{sen} x) \cdot (ie^{ix}) + (-\operatorname{sen} x - i \cos x) \cdot e^{ix} \\ &= (i \cos x + \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x - i \cos x) \cdot e^{ix} \\ &= 0 \cdot e^{ix} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Logo, $f(x)$ é uma função constante. Observe que $f(0) = 1$:

$$f(0) = (\cos 0 - i \operatorname{sen} 0) \cdot e^{i \cdot 0} = (1 - i \cdot 0) \cdot e^0 = 1 \cdot 1 = 1$$

Então, $f(x) = 1$ qualquer que seja x . Assim:

$$1 = (\cos x - i \operatorname{sen} x) \cdot e^{ix}$$

Agora, multiplicando ambos membros da igualdade acima por $\cos x + i \operatorname{sen} x$, obtemos:

$$\begin{aligned}
 \cos x + i \operatorname{sen} x &= (\cos x + i \operatorname{sen} x)(\cos x - i \operatorname{sen} x) \cdot e^{ix} \\
 &= [(\cos x)^2 - (i \operatorname{sen} x)^2] \cdot e^{ix} \\
 &= (\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x) \cdot e^{ix} \\
 &= 1 \cdot e^{ix} \\
 &= e^{ix} \\
 \therefore &\boxed{\cos x + i \operatorname{sen} x = e^{ix}}
 \end{aligned}$$

As equações (2.2) decorrem do fato das funções *seno* e *coseno* serem par e ímpar respectivamente:

$$\cos x = \cos(-x) \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x \quad (2.2)$$

Substituindo x por $-x$ na equação $e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$ e usando as igualdades acima, obtemos a segunda relação:

$$\begin{aligned}
 e^{i(-x)} &= \cos(-x) + i \operatorname{sen}(-x) \\
 \therefore &\boxed{e^{-ix} = \cos x - i \operatorname{sen} x}
 \end{aligned}$$

□

2.2.3 Derivadas de ordem superior

Seja f uma função derivável. A derivada f' ou $f^{(1)}$ é a derivada de 1ª ordem de f . Suponha que f' também seja derivável, então sua derivada f'' ou $f^{(2)}$ é a derivada de 2ª ordem de f . Assim, $f'' = (f')'$. De modo análogo define-se as derivadas de ordens superiores $f^{(3)} = f'''$, $f^{(4)}$, \dots , $f^{(n)}$ de f .

Definição 2.5 (Classes de diferenciabilidade). Uma função $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pertence à classe de diferenciabilidade $C^n(I; \mathbb{R})$ quando:

(i) f é contínua em I ;

(ii) Todas as derivadas $f^{(k)}$ de ordem $k = 1, 2, 3, \dots, n$ são funções contínuas em I .

Observação. As funções $f_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2$ e 3 , definidas por $f_1(x) = e^x$, $f_2(x) = \cos x$ e $f_3(x) = \operatorname{sen} x$ pertencem à classe $C^\infty(\mathbb{R})$.

2.2.4 Operadores diferenciais lineares

Considere o conjunto $\mathcal{F} = C^n(\mathbb{R})$ de todas as funções reais com derivadas contínuas até a ordem n . Demonstra-se que $\mathcal{F} = C^n(\mathbb{R})$ é um **espaço vetorial** sobre \mathbb{R} . Para cada $f \in \mathcal{F}$, define-se o operador diferencial $D : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ por

$$D(f) = f'$$

sendo $D^0(f) = f$. Define-se por recorrência o operador diferencial $D^k : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ por

$$D^k(f) = f^{(k)} = D [D^{k-1}(f)]$$

para $k = 1, 2, 3, \dots, n$, sendo k a ordem da derivada da função $f \in \mathcal{F}$. Os operadores diferenciais $D^k : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ são *lineares*, isto é, para quaisquer $f_1, f_2 \in \mathcal{F}$ e quaisquer $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$:

$$D^k(c_1f_1 + c_2f_2) = c_1D^k(f_1) + c_2D^k(f_2).$$

Capítulo 3

Equações Diferenciais Ordinárias

3.1 Conceitos fundamentais em Equações Diferenciais (ED)

Uma equação que contém as derivadas (ou diferenciais) de uma ou mais variáveis dependentes em relação a uma ou mais variáveis independentes é chamada de **equação diferencial**.

3.1.1 Classificação de uma ED por Tipo e Ordem

Classificação por Tipo: Uma equação que contiver somente derivadas ordinárias, isto é, derivadas de uma ou mais variáveis dependentes em relação a uma única variável independente, será chamada de **equação diferencial ordinária (EDO¹)**. Por exemplo,

$$\frac{dy}{dx} + y = e^x, \quad \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 3y = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\downarrow dx}{dt} + \frac{\downarrow dy}{dt} = y^2 + x$$

são equações diferenciais ordinárias. Uma equação que envolve as derivadas parciais de uma ou mais variáveis dependentes em relação a duas ou mais variáveis independentes é chamada de **equação diferencial parcial (EDP)**. Por exemplo,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial u}{\partial t} + 2u \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

são equações diferenciais parciais.

¹Frequentemente é usado ED como abreviação de EDO.

Classificação por Ordem: A ordem de uma equação diferencial é a maior entre as ordens das derivadas presentes na equação. Por exemplo,

$$\begin{array}{ccc} \text{segunda ordem} & \text{---} & \text{primeira ordem} \\ & \downarrow & \downarrow \\ & \frac{d^2x}{dt^2} - 2 \left(\frac{dx}{dt} \right)^3 + y = e^x & \end{array}$$

é uma equação diferencial ordinária de segunda ordem.

3.2 Equações Diferenciais Ordinárias (EDO)

Definição 3.1 (Equação Diferencial Ordinária em uma variável dependente).

Uma equação diferencial ordinária (EDO) de ordem n na variável dependente $x = x(t)$ pode ser escrita na **forma geral**

$$F(t, x, x', \dots, x^{(n)}) = 0 \tag{3.1}$$

onde F é uma função de valores reais de $n + 2$ variáveis $t, x, x', \dots, x^{(n)}$, e onde $x^{(n)} = d^n x / dt^n$ é a derivada de ordem n da função $x = x(t)$. A equação diferencial

$$\frac{d^n x}{dt^n} = f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}) \tag{3.2}$$

onde f é uma função contínua de valores reais, é chamada **forma normal** da equação (3.1).

3.2.1 Solução de uma EDO

Uma *solução* para uma equação diferencial de ordem n no intervalo I é uma função ϕ definida em I , com $\phi \in C^n(I; \mathbb{R})$ (i.é, com pelo menos n derivadas contínuas em I), que após as devidas substituições reduzem a equação a uma identidade. Nesse caso, dizemos que ϕ satisfaz

a equação diferencial em I . Graficamente, as curvas que representam soluções de uma EDO são chamadas *curvas integrais*. A solução de uma EDO de ordem n é dita:

- **Solução geral:** quando depende de n constantes arbitrárias correspondente ao número de integrações.
- **Solução particular:** quando for deduzida da solução geral atribuindo-se valores particulares às constantes.

3.2.2 Equações Diferenciais Ordinárias Lineares (EDOL)

Definição 3.2 (Equação Diferencial Ordinária em uma variável dependente).

*Dizemos que uma equação diferencial ordinária de ordem n é **linear** quando a partir da forma geral, representada pela equação (3.1), obtém-se*

$$a_n(t)x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \dots + a_1(t)x' + a_0(t)x = g(t) \quad (3.3)$$

onde todos os coeficiente $g(t)$, $a_0(t)$, $a_1(t)$, \dots , $a_n(t)$ estão em função somente da variável independente t e $a_n(t)$ não é identicamente nula.

Especificamente, equações diferenciais lineares de primeira e segunda ordem são respectivamente escritas na forma

$$a_1(t)\frac{dx}{dt} + a_0(t)x = g(t) \quad \text{e} \quad a_2(t)\frac{d^2x}{dt^2} + a_1(t)\frac{dx}{dt} + a_0(t)x = g(t) \quad (3.4)$$

Uma equação diferencial ordinária **não linear** é simplesmente uma que não é linear. Funções não lineares da variável dependente ou de suas derivadas, como $e^{x'}$ ou $\cos y$, não podem aparecer em uma equação linear. Assim,

| | | | | |
|--|--|---|-------------------------------|-------|
| termo não linear: coeficiente depende de y ↓ $(1 - y)y' + 2y = e^t$ | termo não linear: função não linear de y ↓ $\frac{d^2y}{dx^2} + \cos y = 0$ | e | $\frac{d^4x}{dt^4} + x^2 = 0$ | (3.5) |
|--|--|---|-------------------------------|-------|

são exemplos de EDO's não lineares.

3.3 Problemas de Valor Inicial (PVI)

Uma *condição inicial* é uma condição da solução de uma equação diferencial num ponto. Dizemos *problema de valor inicial* (PVI) aquele cuja a equação diferencial de ordem n esteja sujeita a n condições particulares em um ponto específico. Caso as n condições particulares sejam dadas em pontos distintos dizemos *problema de contorno*.

Definição 3.3 (PVI ou Problema de Valor Inicial). *Em algum intervalo I contendo t_0 , um problema que consiste em resolver uma equação diferencial da forma*

$$\frac{d^n x}{dt^n} = f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)})$$

Sujeita às condições iniciais

$$x(t_0) = x_0, x'(t_0) = x_1, \dots, x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1}$$

*onde x_0, x_1, \dots, x_{n-1} são constantes especificadas é denominado **problema de valor inicial (PVI)**.*

Assim, os correspondentes **PVI's** de primeira ordem e de segunda ordem são:

$$\text{PVI de primeira ordem} \left\{ \begin{array}{l} \text{Resolver a EDO: } \frac{dx}{dt} = f(t, x) \\ \text{Dada a condição inicial: } x(t_0) = x_0 \end{array} \right.$$

$$\text{PVI de segunda ordem} \left\{ \begin{array}{l} \text{Resolver a EDO: } \frac{d^2x}{dt^2} = f(t, x, x') \\ \text{Dadas as condições iniciais: } x(t_0) = x_0, \quad x'(t_0) = x_1 \end{array} \right.$$

3.3.1 Problemas de Valor Inicial e Problemas de Contorno (PVC) em EDOL's

Definição 3.4 (Problema de Valor Inicial para EDOL). Para uma EDO linear, um *PVI de ordem n* é resolver

$$a_n(t) \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1}(t) \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1(t) \frac{dx}{dt} + a_0(t)x = g(t)$$

Sujeita às condições iniciais: $x(t_0) = x_0, x'(t_0) = x_1, x''(t_0) = x_2, \dots, x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1}$.

A solução é uma função definida em algum intervalo I , contendo t_0 , que satisfaça a equação diferencial e as n condições iniciais especificadas em t_0 : $x(t_0) = x_0, x'(t_0) = x_1, x''(t_0) = x_2, \dots, x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1}$.

Teorema 3.1 (Existência de uma solução única). Sejam $a_n(t), a_{n-1}(t), \dots, a_1(t), a_0(t)$ e $g(t)$ contínuas em um intervalo I e seja $a_n \neq 0$ para todo t nesse intervalo. Se $t = t_0$ for um ponto qualquer nesse intervalo, então existe uma única solução $x(t)$ do problema de valor inicial nesse intervalo.

Definição 3.5 (Problema de Contorno para EDOL). Para uma EDO linear de ordem n , resolver

$$a_n(t) \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1}(t) \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1(t) \frac{dx}{dt} + a_0(t)x = g(t)$$

Sujeita a n condições de contorno como

$$x^{(k_0)}(t_0) = x_0, x^{(k_1)}(t_1) = x_1, x^{(k_2)}(t_2) = x_2, \dots, x^{(k_{n-1})}(t_{n-1}) = x_{n-1}$$

onde $k_0, k_1, \dots, k_{n-1} \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ e x_0, x_1, \dots, x_{n-1} são constantes especificadas é denominado **problema de valor de contorno (PVC)**. A solução é uma função que satisfaça a equação diferencial em algum intervalo I , contendo t_0, t_1, \dots, t_{n-1} , e cujo gráfico passe pelos pontos $(t_0, x_0), (t_1, x_1), (t_2, x_2), \dots, (t_{n-1}, x_{n-1})$.

3.4 EDOL's Homogêneas

Definição 3.6 (EDOL Homogênea). *Uma equação diferencial ordinária linear de ordem n da forma*

$$a_n(t) \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1}(t) \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1(t) \frac{dx}{dt} + a_0(t)x = g(t)$$

*é denominada **homogênea** quando $g(t) = 0$, caso contrário é **não homogênea**.*

Definição 3.7 (EDOL homogênea de segunda ordem). *Uma EDO da forma*

$$a_2(t)x'' + a_1(t)x' + a_0(t)x = 0$$

é dita EDO linear homogênea de segunda ordem.

3.4.1 Princípio da Superposição (Operador diferencial)

Proposição 3.1 (Princípio da Superposição para EDOL Homogênea). *Sejam x_1, x_2, \dots, x_k soluções da EDOL homogênea de ordem n em um intervalo I . Então, a combinação linear*

$$x = c_1x_1(t) + c_2x_2(t) + \cdots + c_kx_k(t)$$

onde $c_i, i = 1, 2, 3, \dots, k$ são constantes arbitrárias, é também uma solução no intervalo.

Demonstração. Vamos provar para o caso $k = 2$, pois a mesma dedução pode ser estendida a qualquer $k \in \mathbb{N}$. Seja L um operador diferencial de ordem n definido por

$$L = a_n(t)D^n + a_{n-1}(t)D^{n-1} + \cdots + a_1(t)D^1 + a_0(t)$$

e sejam $x_1(t)$ e $x_2(t)$ soluções da equação homogênea $L(x) = 0$ onde $x = x(t) \in C^n(I; \mathbb{R})$ (i.é, suficientemente diferenciável). Se $x = c_1x_1 + c_2x_2$, então pela linearidade de L temos

$$L(x) = L(c_1x_1 + c_2x_2) = c_1L(x_1) + c_2L(x_2) = c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 = 0$$

□

3.5 EDOL's Homogêneas com coeficientes constantes

Seja uma EDOL Homogênea de segunda ordem da forma

$$ax'' + bx' + cx = 0 \quad (3.6)$$

onde a , b e c são constantes. Vamos mostrar que para esta equação existem valores constantes de s tais que $x(t) = e^{st}$ é uma solução. Substituindo $x(t) = e^{st}$, $x'(t) = se^{st}$ e $x''(t) = s^2e^{st}$ na equação (3.6) obtemos

$$as^2e^{st} + bse^{st} + ce^{st} = 0 \quad \text{ou} \quad e^{st}(as^2 + bs + c) = 0$$

Como $e^{st} \neq 0$, então $x = e^{st}$ é solução da EDO se, e somente se, s é raiz da equação quadrática

$$as^2 + bs + c = 0 \quad (3.7)$$

chamada de *equação auxiliar* ou *equação característica*. Observe que a equação característica correspondente à EDO (3.6) de coeficientes constantes pode ser obtida trocando x'' por s^2 , x' por $s^1(= s)$ e x por $s^0(= 1)$. Portanto, a solução da EDO (3.6) pode ser determinada através da equação característica correspondente e de suas raízes. As duas raízes da equação quadrática (3.7) são dadas por $s_1 = (-b + \sqrt{b^2 - 4ac})/2a$ e $s_2 = (-b - \sqrt{b^2 - 4ac})/2a$. De acordo com o discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$, temos três casos a considerar:

- *Caso 1:* s_1 e s_2 são raízes reais e distintas ($\Delta = b^2 - 4ac > 0$);
- *Caso 2:* s_1 e s_2 são raízes reais e iguais ($\Delta = b^2 - 4ac = 0$); e
- *Caso 3:* s_1 e s_2 são raízes complexas conjugadas ($\Delta = b^2 - 4ac < 0$).

Consideremos o caso particular da EDO de segunda ordem

$$mx'' + kx = 0 \quad (3.8)$$

onde m e k são constantes reais positivas. Assim, a equação característica correspondente à EDO (3.8) é

$$ms^2 + k = 0 \quad (3.9)$$

Como $\Delta < 0$ ($\Delta = 0^2 - 4mk = -4mk$; m e k positivos), a equação característica (3.9) possui duas raízes complexas conjugadas (*Caso 3*). Calculando as raízes obtemos

$$s = \pm \left(-\frac{k}{m} \right)^{1/2} = \pm \left[i \cdot \left(\frac{k}{m} \right)^{1/2} \right]$$

onde $i = (-1)^{1/2}$. Definindo

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (3.10)$$

segue que

$$s = \pm i\omega \quad (3.11)$$

Os dois valores de s dados pela equação (3.11) são conhecidos como os *eigenvalores*, *autovalores* ou *valores característicos*. Uma vez que ambos valores satisfazem a equação (3.9), a solução geral da EDO (3.8) é dada pela combinação linear das soluções obtidas $x_1(t) = e^{i\omega t}$ e $x_2(t) = e^{-i\omega t}$, logo

$$x(t) = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t} \quad (3.12)$$

onde C_1 e C_2 são constantes.

Observação. As soluções $x_1(t) = e^{i\omega t}$ e $x_2(t) = e^{-i\omega t}$ da EDO (3.8) são *linearmente independentes* (ou seja, $C_1 \cdot e^{i\omega t} + C_2 \cdot e^{-i\omega t} = 0 \iff C_1 = C_2 = 0$). Isto é facilmente verificado usando as identidades $e^{\pm i\alpha} = \cos \alpha \pm i \sin \alpha$. Portanto, $\{e^{i\omega t}, e^{-i\omega t}\}$ formam um conjunto fundamental de soluções e a equação (3.12) é a solução mais geral da EDO linear homogênea de segunda ordem (3.8).

3.6 Sistemas de EDOL's Homogêneas de 2ª ordem

Frequentemente o modelo matemático de um sistema físico dinâmico é um sistema de EDOL's de segunda ordem homogêneas, denominado simplesmente por *sistema linear*, cuja **forma normal** é

$$\begin{aligned}\frac{d^2x_1}{dt^2} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \frac{d^2x_2}{dt^2} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ &\vdots \\ \frac{d^2x_n}{dt^2} &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n\end{aligned}$$

Expresso matricialmente por

$$\boxed{\mathbf{X}'' = \mathbf{A}\mathbf{X}} \quad (3.13)$$

onde

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{X}'' = \begin{bmatrix} x_1''(t) \\ x_2''(t) \\ \vdots \\ x_n''(t) \end{bmatrix}$$

Considere o caso particular de um sistema linear homogêneo de segunda ordem dado por

$$\mathbf{M}\mathbf{X}'' + \mathbf{K}\mathbf{X} = \mathbf{0} \quad (3.14)$$

onde \mathbf{M} é uma matriz inversível (i.é, não singular) da forma

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & m_n \end{bmatrix}$$

cuja matriz inversa é

$$\mathbf{M}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/m_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/m_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1/m_n \end{bmatrix}$$

e \mathbf{K} é uma matriz quadrada de ordem n . Multiplicando a equação matricial (3.14) por \mathbf{M}^{-1} obtemos

$$\mathbf{X}'' + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{X} = \mathbf{0} \quad (3.15)$$

Considerando $\mathbf{A} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$ fica

$$\mathbf{X}'' + \mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{0} \quad (3.16)$$

Com base na solução obtida para a EDO (3.8), propomos uma solução do tipo

$$\mathbf{X} = \mathbf{D}e^{i\omega t} \quad (3.17)$$

em que \mathbf{D} é uma matriz de valores constantes cuja ordem é $n \times 1$, donde

$$\mathbf{X}' = i\omega\mathbf{D}e^{i\omega t} \quad (3.18)$$

e

$$\mathbf{X}'' = (i\omega)^2\mathbf{D}e^{i\omega t} = -\omega^2\mathbf{D}e^{i\omega t} \quad (3.19)$$

Substituindo as equações (3.17) e (3.19) em (3.16) segue

$$-\omega^2 \mathbf{D} e^{i\omega t} + \mathbf{A} \mathbf{D} e^{i\omega t} = \mathbf{0}$$

então

$$(-\omega^2 \mathbf{I} + \mathbf{A}) \mathbf{D} e^{i\omega t} = \mathbf{0} \tag{3.20}$$

onde \mathbf{I} é a matriz identidade. Observe que o escalar $e^{i\omega t}$ é não-nulo qualquer que seja t , logo podemos eliminá-lo da equação (3.20)

$$(-\omega^2 \mathbf{I} + \mathbf{A}) \mathbf{D} = \mathbf{0} \tag{3.21}$$

e substituindo ω^2 por λ em (3.21)

$$(-\lambda \mathbf{I} + \mathbf{A}) \mathbf{D} = \mathbf{0} \tag{3.22}$$

rearrajando os termos da equação (3.22)

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{D} = \mathbf{0} \tag{3.23}$$

Assim, o sistema linear (3.14) admite uma solução não trivial $\mathbf{X} \neq \mathbf{0}$ se, e somente se, o sistema (3.23) admite uma solução não trivial (se $\mathbf{D} = \mathbf{0}$, então $\mathbf{X} = \mathbf{0}$, para todo t), contudo a matriz $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})$ não pode ser inversível e portanto

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0 \tag{3.24}$$

denominada *equação característica* de \mathbf{A} . Os valores de $\lambda = \omega^2$ que satisfazem a equação (3.24) são denominados *autovalores* da matriz \mathbf{A} .

Capítulo 4

Sistemas Mecânicos

4.1 Mecânica Clássica: Definições e terminologia

A Mecânica Clássica é a área da Física que estuda corpos materiais em movimento ou na condição de repouso. É comum dividi-la em três subáreas: a estática, que estuda as condições de equilíbrio dos corpos, a cinemática, que descreve o movimento por meio de equações matemáticas e de conceitos geométricos, e a dinâmica, que estuda as relações entre o movimento e as ações que o provocam.



Figura 4.1: Ilustração do físico Isaac Newton observando o movimento de uma maçã ao cair.

Os corpos cujas dimensões são desprezíveis, quando comparadas ao movimento estudado, são denominados *partículas*. Uma partícula também pode ser chamada de *ponto material* ou *massa pontual*. Um corpo rígido é um conjunto de partículas no qual a distância entre duas

quaisquer permanece constante no tempo. A rigor, não existe o corpo perfeitamente rígido, uma vez que todos os materiais quando submetidos à ação de forças sofrem deformação elástica ou plástica. A *deformação elástica* é transitória e desaparece quando as forças que a originaram cessam, enquanto que a *deformação plástica* persiste mesmo após as forças deformadoras se anularem.

O movimento de qualquer corpo ou sistema de partículas pode ser descrito em função do movimento do centro de massa representado pela linha vermelha pontilhada na Figura (4.2). Um corpo rígido pode executar movimentos de rotação e translação, de forma isolada ou combinada.

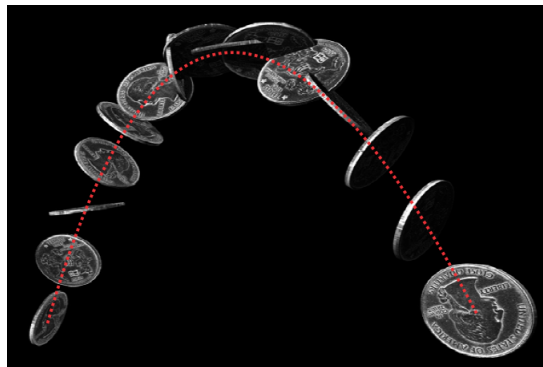


Figura 4.2: Movimento geral de um corpo rígido.

Translação de um corpo rígido é um deslocamento desse corpo no qual todas as suas partículas sofrem o mesmo deslocamento em módulo, direção e sentido, Figura (4.3). *Rotação* de um corpo rígido em torno de um eixo é um deslocamento desse corpo no qual somente os pontos do eixo não se deslocam, Figura (4.4). Pelo *teorema de rotação de Euler*, todo movimento de rotação de um sólido num dado instante é um movimento de rotação em torno de um eixo chamado *eixo instantâneo de rotação*.

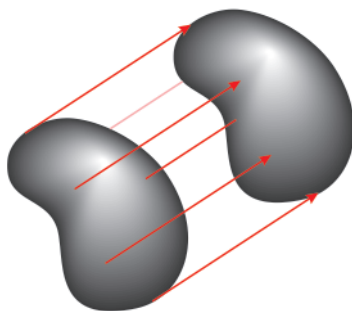


Figura 4.3: Translação de um corpo rígido.

Fonte: Elaborada pela autora.

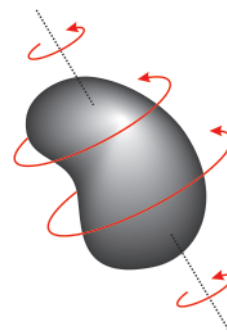


Figura 4.4: Rotação de um corpo rígido.

Fonte: Elaborada pela autora.

O movimento de uma partícula ou corpo rígido em uma certa direção, relativo a um referencial O , é uma função contínua que associa cada valor real t num dado intervalo de tempo à posição da partícula nesse instante. Portanto, um movimento é uma função:

$$\begin{aligned} f : [T_i, T_f] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto x \end{aligned} \quad , \quad [T_i, T_f] \subset \mathbb{R}_+$$

Em que $[T_i, T_f]$ é o intervalo de tempo no qual ocorre o movimento. O movimento sendo uma função que depende da variável tempo é também chamado de *função horária* e pode ser expressa por:

$$x = x(t) \quad , \quad t \in [T_i, T_f]$$

A *velocidade instantânea* é a derivada da função horária no instante t dado

$$v(t) = \frac{d}{dt}x(t)$$

ou, na notação de Newton, $v = \dot{x}$.

A *aceleração instantânea* é a derivada da velocidade no instante t dado,

$$a(t) = \frac{d}{dt}v(t) = \frac{d}{dt} \left[\frac{d}{dt}x(t) \right] = \frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

ou, na notação de Newton, $a = \dot{v} = \ddot{x}$.

Os sistemas mecânicos são formados por elementos físicos atuando em conjunto para satisfazer um objetivo ou simular um determinado fenômeno. Nesses sistemas, os elementos são agrupamentos de inúmeras partículas. Os elementos cuja deformação é desprezível são tratados como corpos rígidos e os que apresentam deformação linear em função da força aplicada são tratados como corpos elásticos. A massa total de um *corpo* ou *elemento* resulta do somatório das massas de todas as partículas nele agrupadas. Muitos sistemas mecânicos analisados são constituídos de elementos rígidos e/ou elásticos interligados, Figura (4.5), regidos pelas leis da mecânica. As ligações externas entre elementos de um sistema e as ligações internas entre partículas num corpo recebem o nome genérico de *vínculos*.

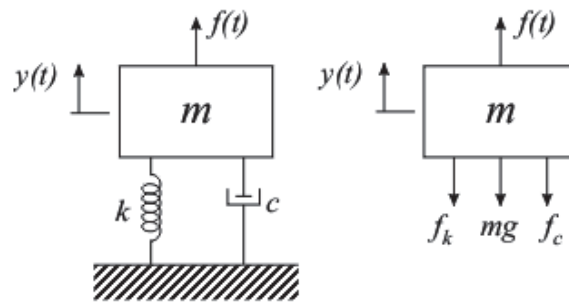


Figura 4.5: (a) Sistema mecânico massa-mola-amortecedor com um grau de liberdade; e (b) Diagrama de corpo livre correspondente.

Fonte: Elaborada pela autora.

O *diagrama de corpo livre* é um esquema usado para que seja feita a análise do corpo isoladamente, ou seja, livre de vínculos externos. Para isso, devem ser representadas todas as forças e torque que atuam sobre o corpo a ser estudado. *Força* é um conceito fundamental para o estudo de sistemas mecânicos e pode ser definida como a causa que tende a produzir uma mudança na posição de um corpo. As forças podem ser classificadas em *forças de contato* e *forças de campo*. As forças de contato são aplicadas diretamente no corpo, enquanto as forças de campo atuam numa região onde o corpo está inserido, por exemplo, a força magnética e a força gravitacional. As forças que tendem a provocar a rotação de um corpo são necessárias ao cálculo do *momento de força* ou *torque*.

Nos materiais sólidos, os vínculos representam as forças atrativas interatômicas que restringem o movimento de suas partículas conferindo-lhes propriedade de corpo rígido. Os vínculos são restrições ao movimento e fornecem condições auxiliares na determinação do número de variáveis necessárias para descrever completamente as posições das partículas de um sistema ao longo do tempo. Por exemplo, as posições de todas as partículas de um corpo rígido ficam completamente definidas pela posição de um ponto do corpo, opta-se pelo centro de massa, e pela orientação do corpo sendo necessária apenas 6 variáveis para se determinar a posição de todas as partículas nesse corpo, Figura (4.6). Portanto, quanto mais partículas puderem ser agrupadas em corpos rígidos menor a quantidade de *variáveis* e *equações* necessárias para descrever o movimento do sistema. O processo de definição dessas variáveis é chamado *parametrização* do sistema.

O número mínimo de variáveis independentes necessárias para determinar completamente a posição e orientação de todos os elementos de um sistema define o *grau de liberdade* (GDL).

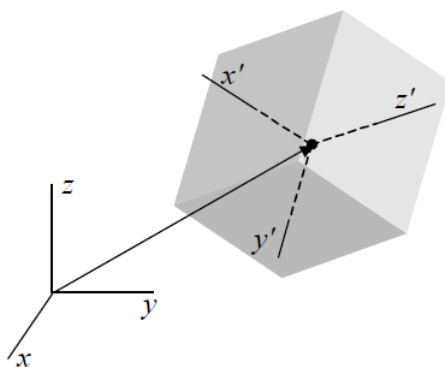


Figura 4.6: Posição de um sólido no espaço.

As variáveis são designadas *coordenadas generalizadas* e denotadas por uma *upla* de coordenadas. Considere um sistema composto por N partículas e sujeito a m vínculos. No espaço tridimensional o número n de graus de liberdade desse sistema é dado por

$$n = 3N - m$$

Assim, é possível descrever o movimento do sistema em função de n coordenadas generalizadas q_i , com $i = 1, 2, \dots, n$, de tal modo que as coordenadas cartesianas sejam funções destas novas coordenadas:

$$x_k = x_k(q_1, q_2, \dots, q_n), y_k = y_k(q_1, q_2, \dots, q_n), z_k = z_k(q_1, q_2, \dots, q_n), \text{ para } k = 1, 2, \dots, N$$

ou, usando uma notação mais reduzida

$$x_r = x_r(q), \text{ para } r = 1, 2, \dots, 3N$$

onde $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$. Na mecânica analítica o mundo físico é traduzido em relações matemáticas com a ajuda de coordenadas generalizadas, uma generalização do conceito de coordenadas cartesianas sem a necessidade de um significado geométrico associado. Contudo é necessário que as $3N$ coordenadas cartesianas estejam associadas as n coordenadas generalizadas por funções deriváveis e invertíveis. Embora a escolha das coordenadas generalizadas não seja única, feita de maneira adequada torna mais simples o processo matemático para determinação das equações do modelo.

Os sistemas que podem ser subdivididos em um número finito de elementos apresentam um número finito de GDL e são classificados em sistemas discretos ou de parâmetros concentrados. Na Figura (4.7), temos um sistema discreto no qual as coordenadas X e θ são suficientes para determinar a posição de cada massa do sistema e, portanto, trata-se de um sistema com dois graus de liberdade. Já os sistemas que não podem ser subdivididos devem ser analisados continuamente e, portanto, apresentam infinitos graus de liberdade sendo classificados em sistemas contínuos ou de parâmetros distribuídos, Figura (4.8).

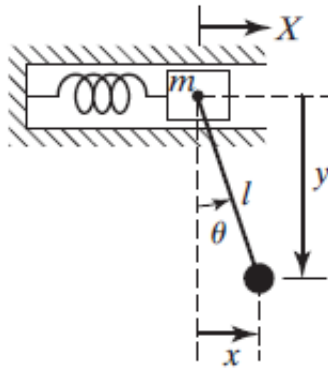


Figura 4.7: Sistema discreto com 2 GDL.

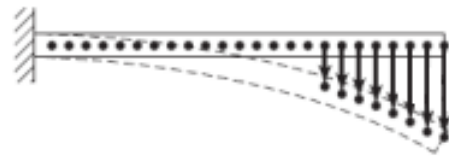


Figura 4.8: Sistema contínuo.

4.2 Modelagem matemática de sistemas mecânicos

A descrição do movimento de determinado sistema físico por meio de um sistema de equações é chamado de *modelagem matemática do sistema*. O modelo matemático de um dado sistema não é único, isto é, um sistema pode ser representado por diferentes modelos dependendo da análise que se deseja fazer. A finalidade da modelagem matemática é representar todos os aspectos importantes do sistema com o propósito de obter as equações matemáticas (ou analíticas) que governam o comportamento do sistema. O modelo matemático deve incluir detalhes suficientes para conseguir descrever o sistema em termos de equações sem torná-lo muito complexo; deve-se ter um compromisso entre a simplicidade do modelo e a sua precisão. Nenhum modelo matemático, por mais preciso que seja, consegue representar completamente um sistema (RAO, 2012).

O modelo matemático pode ser *linear* ou *não linear*, dependendo do comportamento dos componentes do sistema. Modelos lineares permitem soluções rápidas e são simples de manipular; contudo, modelos não lineares às vezes revelam certas características do sistema que não podem ser previstas usando modelos lineares. Assim, é preciso ter uma boa capacidade de discernimento para propor um modelo matemático adequado de um sistema.

Em geral, deve-se obter um modelo matemático que seja adequado para solucionar o problema específico que está em análise. Porém, é importante ressaltar que os resultados obtidos desta análise serão válidos somente para os casos em que o modelo é válido. Quando vamos obter um modelo simplificado de um sistema, geralmente ignoramos algumas propriedades físicas deste sistema. Se os efeitos que estas propriedades causam na resposta do sistema são pequenos, então uma boa semelhança entre os resultados da análise matemática e os resultados práticos do sistema é obtido.

Muitas vezes, o modelo matemático de um sistema é aperfeiçoado gradativamente para obter resultados mais precisos. Inicialmente, um modelo elementar é usado para ter uma idéia do comportamento global do sistema. Na sequência, o modelo é refinado com a inclusão de mais componentes e/ou detalhes de modo que o comportamento do sistema possa ser observado com mais rigor. A Figura (4.9) representa um modelo simplificado da suspensão independente de um carro considerando apenas o movimento de uma das rodas do veículo.

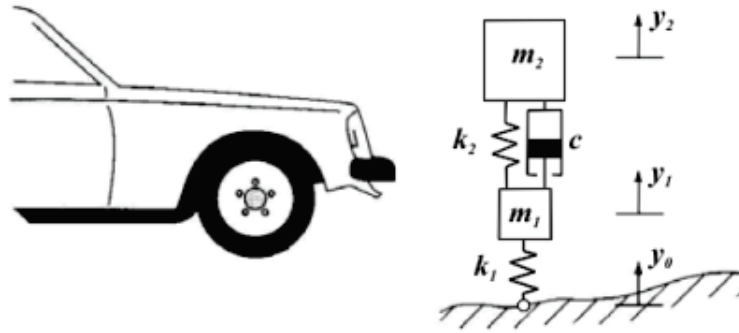


Figura 4.9: Modelo simplificado do sistema mecânico que compõe a suspensão de um veículo.

No modelo apresentado acima, a rigidez do pneu é modelada pela mola k_1 . As massas do pneu, roda, eixo e demais peças “não suspensas”, são modeladas pela massa m_1 . O coeficiente de amortecimento do amortecedor viscoso e a rigidez da mola da suspensão são modelados, respectivamente, por c e k_2 . Já a massa suspensa correspondente a 1/4 da massa total em suspensão é modelada pela massa m_2 . Foram adotadas as coordenadas y_1 e y_2 , medidas a partir da posição de equilíbrio estático do sistema, para descreverem os movimentos das massas m_1 e m_2 , respectivamente. A coordenada y_0 descreve o movimento sobre o solo, devido às irregularidades do terreno.

A Figura (4.10) mostra quatro modelos físicos para um mesmo sistema (moto+motociclista).

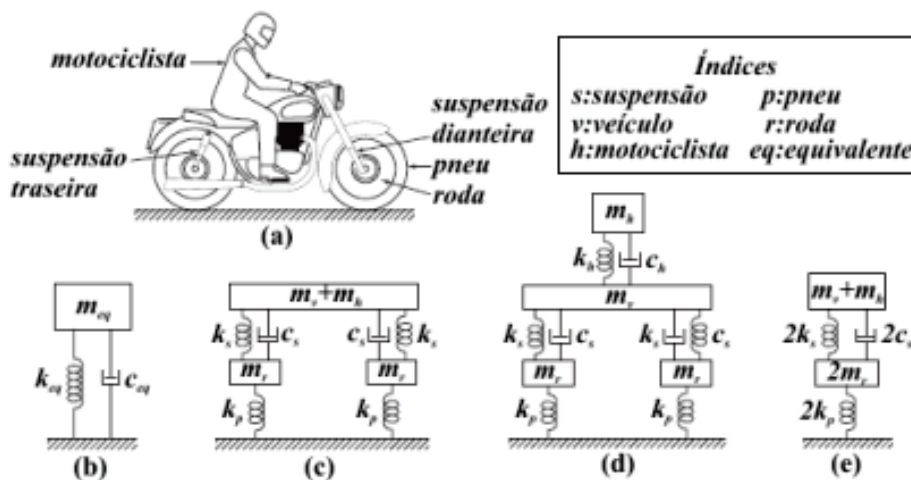


Figura 4.10: Sistema físico composto por motocicleta com um motociclista e modelos sugeridos.

Na letra (b) temos um modelo bastante simplificado com apenas 1 GDL, na letra (c) o

modelo apresenta mais elementos e possui 3 GDL (ou 4 GDL se formos considerar a rotação da massa que engloba a moto+motociclista em torno de um eixo horizontal perpendicular ao plano do papel e passando pelo centro de massa do conjunto. Combinando as constantes elásticas dos dois pneus, as massas das duas rodas e as constantes elásticas e de amortecimento da suspensão, pode-se obter o modelo da letra (e) mais simplificado do que o mostrado na letra (d) porém mais distante da realidade.

Considere um Edifício de vários andares sujeito a um abalo. Admitindo que a massa da estrutura seja desprezível em comparação com a massa dos pisos, o edifício pode ser modelado como um sistema com vários graus de liberdade, Figura (4.11).

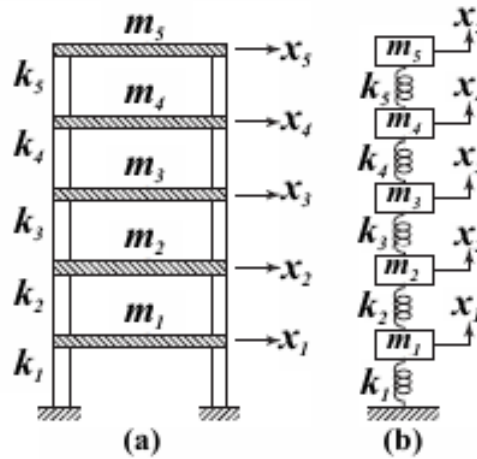


Figura 4.11: Idealização de um edifício de vários andares como um sistema com múltiplos graus de liberdade.

Fonte: Elaborada pela autora.

A obtenção dos modelos que representam um dado sistema, são baseados nas leis que regem aquele sistema. A modelagem de sistemas mecânicos frequentemente baseia-se nas leis de Newton. Das três leis que foram formuladas por Newton, a segunda lei é a mais importante para a obtenção de modelos matemáticos de sistemas mecânicos. Eis: “A *aceleração adquirida por qualquer corpo rígido é diretamente proporcional às forças que atuam neste corpo, e inversamente proporcional à massa deste corpo*”. Matematicamente expressa por:

$$a = \ddot{x} = \frac{F}{m} \quad \therefore \quad F = m\ddot{x}$$

onde $a = \ddot{x}$ é a aceleração.

Capítulo 5

Vibrações Mecânicas

5.1 Definições e terminologia

A teoria das vibrações trata do estudo dos movimentos oscilatórios dos corpos e das forças associadas aos mesmos. *Vibração* ou *oscilação* é o movimento de uma partícula ou de um sistema de partículas em torno de um ponto de referência. Em geral, este ponto de referência representa a *posição de equilíbrio estático* do sistema mecânico, na qual o sistema permanece em repouso quando não há oscilações. Oscilações e vibrações são comuns nos objetos que nos rodeiam, quer nas estruturas e máquinas que construímos, quer ao nível microscópico, nos átomos e nas moléculas, Figura (5.1). Geralmente o movimento oscilatório ocorre quando se emprega um deslocamento inicial em relação à posição de equilíbrio, como também, devido a ação de forças externas (forças de excitação) ou choques com outros corpos.

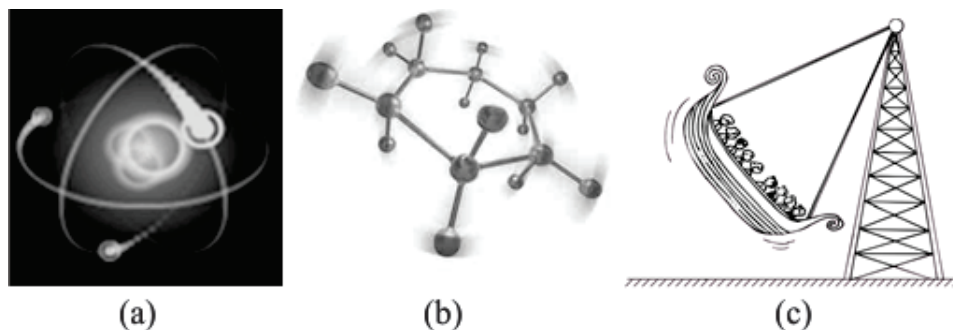


Figura 5.1: (a) Movimento de elétrons em torno do núcleo; (b) Oscilação das moléculas em um arranjo molecular; e, (c) Barco Viking de parques de diversão movendo-se como um pêndulo.

O modelo vibratório é caracterizado pelo deslocamento ao longo do tempo, com a transferência de energia potencial por cinética e vice-versa, resultando em movimento oscilatório. As forças atuantes no corpo, responsáveis pela tendência do sistema retornar a sua configuração inicial, são denominadas *forças de restituição* ou *forças restauradoras*, Figura (5.2).

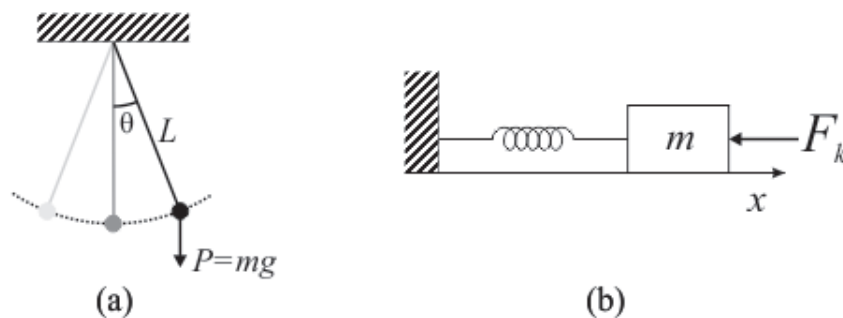


Figura 5.2: (a) Força gravitacional P no caso de um pêndulo; e, (b) Força elástica F_k no caso de massa-mola.

Fonte: Elaborada pela autora.

O movimento oscilatório pode repetir-se regularmente, como no caso do pêndulo ideal, ou pode apresentar irregularidade, como acontece com o movimento do solo durante um terremoto. Em muitos casos, o sentido do movimento é alternado periodicamente, porém a trajetória é preservada em ambos sentidos. Se o movimento repete um padrão em intervalos de tempo iguais, é denominado movimento periódico. Por exemplo, um pêndulo que oscila de um lado para o outro passando por sua posição de equilíbrio na vertical, o movimento das cordas de guitarras e violões após serem puxadas, etc. A Figura (5.3) mostra uma corda vibrando que se desloca para cima e para baixo da posição original, linha vermelha tracejada, e mantendo distâncias iguais de afastamento em relação ao mesmo referencial. Cada ponto da corda executa um movimento de ida e volta denominado *movimento harmônico simples* (MHS). Esse é o tipo mais simples de movimento periódico .

O movimento de um corpo vibratório de sua posição de equilíbrio até sua posição extrema em um sentido, então até a posição de equilíbrio, daí até sua posição extrema no outro sentido e retornando à posição de equilíbrio é denominado *ciclo de oscilação* ou *ciclo de vibração*. O intervalo de tempo necessário para o movimento completar um ciclo é o *período de vibração* (T). O deslocamento máximo do sistema medido a partir da sua posição de equilíbrio é a *amplitude do movimento*.

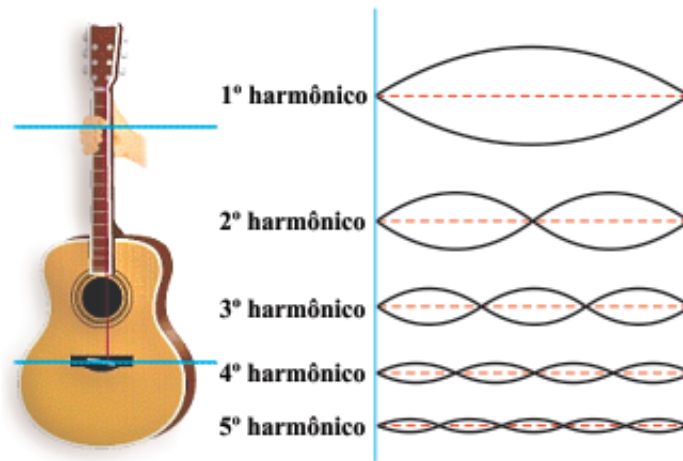


Figura 5.3: Corda vibrando.

Fonte: Elaborada pela autora.

A *frequência de vibração* (f) é o inverso do período, equação 5.1, e corresponde ao número de ciclos por unidade de tempo. A unidade usual de frequência é *hertz* ($Hz = s^{-1}$) e indica o inverso do segundo.

$$f = \frac{1}{T} \quad (5.1)$$

Sendo um ciclo correspondente a um ângulo de 2π radianos, define-se a *frequência circular ou angular* ω por:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad (5.2)$$

Considere um sistema que após sofrer uma perturbação inicial continue vibrando por si próprio sem a ação de forças externas. Neste caso, a frequência com que oscila é conhecida como *frequência natural*, descrita em termos de f ou ω . Veremos adiante que um sistema vibratório com n graus de liberdade terá, em geral, n frequências naturais de vibração. Quando a frequência externa coincide com uma das frequências naturais de um sistema ocorre a *ressonância*, fenômeno físico responsável pelo aumento considerável na amplitude das vibrações.

Uma vibração pode ser classificada como *livre*, quando o movimento se mantém apenas devido às forças restituidoras, ou *forçada*, quando se aplica uma força de excitação que pode variar no tempo. Pode ainda ser *amortecida*, quando os efeitos do atrito não são desprezíveis, ou *não amortecida*, quando esses efeitos podem ser desprezados. Em sistemas livres não-amortecidos, o sistema oscila de acordo com frequência natural e sua amplitude de vibração é preservada no decorrer do tempo.

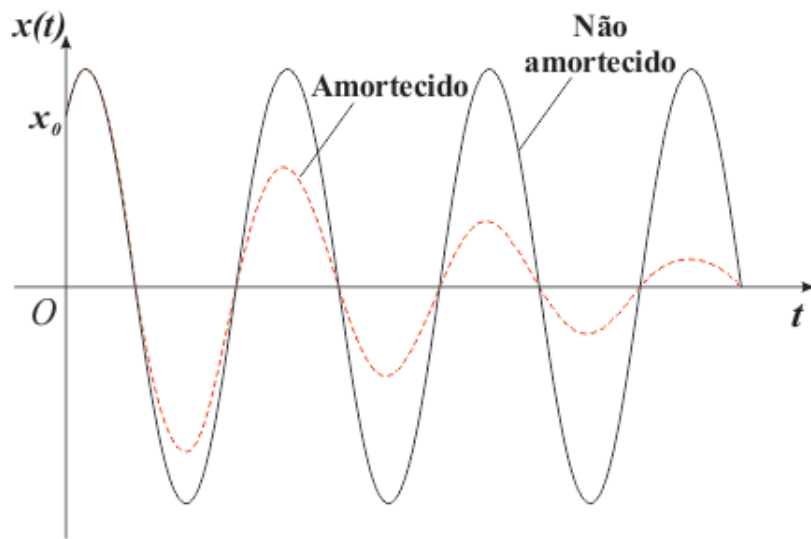


Figura 5.4: Gráficos típicos da posição em função do tempo para vibrações livres amortecidas e não-amortecidas.

Fonte: Elaborada pela autora.

5.2 Elementos de um sistema vibratório

Um sistema vibratório inclui um meio de armazenar energia potencial (mola ou elasticidade dos materiais), um meio de armazenar energia cinética (massa ou inércia) e um meio pelo qual a energia é dissipada (amortecedor ou atrito). Em um sistema conservativo, a soma das energias cinética e potencial é igual a uma constante desde que a energia mecânica ou total do sistema seja representada somente em função destes dois tipos de energia.

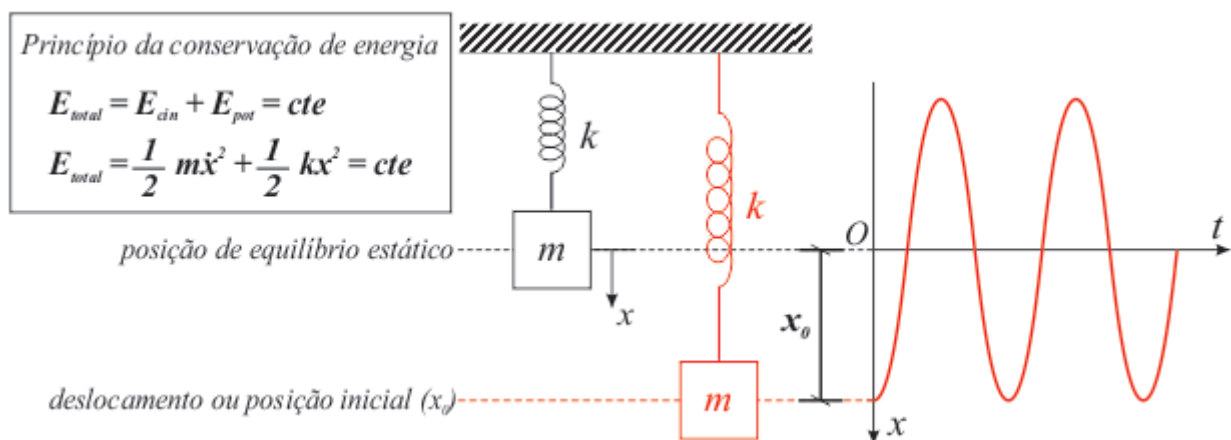


Figura 5.5: Sistema Massa-Mola Ideal (sem dissipação de energia).

Fonte: Elaborada pela autora.

5.2.1 Massas ou inércias

A *massa* de um corpo é a quantidade de matéria que ele possui. Corpos com mais massa são mais resistentes à mudança de movimento, ou seja, possuem maior inércia. Em geral, admite-se que elemento de massa ou inércia em um sistema mecânico tem comportamento de corpo rígido, isto é, tem massa constante. As massas armazenam energia potencial gravitacional (associada à posição) e energia cinética (associada à velocidade), podendo esta última ser de translação e/ou de rotação. Em muitos casos, a energia potencial gravitacional pode ser desprezada em comparação com a energia cinética. Pela segunda lei do movimento de Newton, o produto da massa por sua aceleração é igual à força aplicada à massa:

$$F = m \ddot{x}$$

O *peso* de um corpo é a força de atração exercida pela terra sobre o corpo e é numericamente igual ao produto da massa pela aceleração da gravidade ($g = 9,8m/s^2$).

Os elementos de massa podem ganhar ou perder energia cinética sempre que a velocidade do corpo mudar. Quando aplicamos uma força em uma massa provocando deslocamento ocorre variação de energia cinética. A integral da força em relação ao deslocamento fornece esta variação de energia cinética da massa em movimento que é igual ao trabalho W realizado pela força F , logo

$$\Delta E_{cin} = W = \int_a^b F dx = \int_a^b m \frac{d\dot{x}}{dt} dx = \int_a^b m \frac{dx}{dt} d\dot{x} = \int_a^b m \dot{x} d\dot{x} = \frac{1}{2} m_b \dot{x}^2 - \frac{1}{2} m_a \dot{x}^2$$

e, dessa forma, a energia cinética (T) no instante t de um corpo a uma velocidade instantânea $v = \dot{x}(t)$ é por definição:

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

5.2.2 Mola

Uma mola é uma ligação flexível entre duas massas de um sistema mecânico. Normalmente despreza-se sua massa. Se a massa da mola não for muito menor que a massa do bloco, então a energia cinética da mola não pode ser desprezada. O elemento mola representa a capacidade que o sistema físico tem em armazenar energia potencial associada à deformação e

pode aparecer nos modelos substituindo elementos com comportamento elástico. As molas são classificadas em lineares, quando obedecem a *Lei de Hooke*, e não-lineares, caso contrário. A energia potencial elástica (U_k) é por definição:

$$U_k = \frac{1}{2}kx^2$$

LEI DE HOOKE

O físico inglês Robert Hooke, observando o comportamento mecânico de uma mola, descobriu que as deformações elásticas e forças restauradoras estão relacionadas por uma regra matemática muito simples. A lei de Hooke, publicada em 1676, é a seguinte:

“As forças deformantes são proporcionais às deformações elásticas produzidas.”

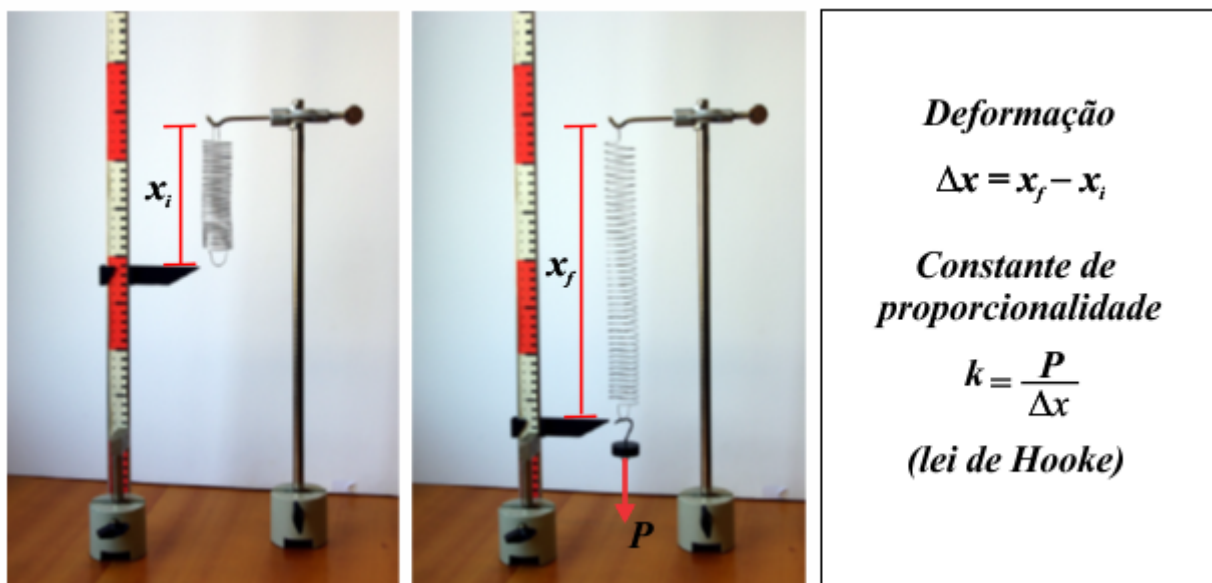


Figura 5.6: A deformação (alongação) da mola elástica é diretamente proporcional ao peso colocado.

A Lei de Hooke é um caso especial de uma relação mais geral, que descreve a deformação elástica dos corpos, descoberta por Robert Hooke (1635-1703). As molas e os outros corpos elásticos obedecem a tal lei, desde que sua deformação não seja excessivamente grande. Se o sólido (ou mola) for deformado além de certo ponto, denominado *limite elástico* ou *de escoamento*, ele não retornará a sua forma inicial quando suprimirmos a força aplicada. Ocorre que a lei de Hooke é válida quase até o limite elástico, para a maioria dos materiais comuns. O

intervalo de valores das forças aplicadas para os quais é válida a lei de Hooke denomina-se *faixa linear* ou *zona elástica*. Além do limite elástico, a força não pode mais ser especificada por uma função energia potencial ($F(x) \neq -\frac{dU}{dx}$), pois a força dependerá de muitos fatores. Molas reais não são lineares e seguem a lei de Hooke até certa deformação. A Figura (5.7) mostra uma curva *força* \times *deformação* típica de uma mola comum.

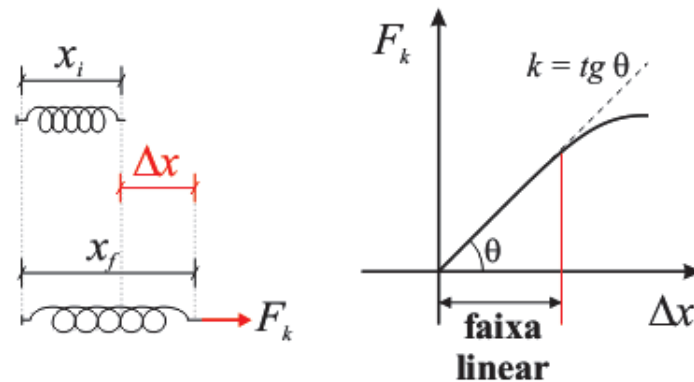


Figura 5.7: Faixa linear correspondente à região onde há proporcionalidade.

Fonte: Elaborada pela autora.

Uma mola elástica esticada ou comprimida exerce uma força de sentido oposto ao deslocamento, o que justifica a tendência que a mola tem de retornar à sua condição de equilíbrio. Adotando como positivo o sentido do deslocamento, a lei de Hooke é uma equação empírica matematicamente expressa por:

$$F_k = -k\Delta x$$

Onde:

- F_k : Força elástica ou restauradora;
- k : Rigidez ou constante elástica;
- $\Delta x = x_f - x_i$: Deformação da mola.

5.2.3 Elementos estruturais representados por molas

Elementos estruturais elásticos como vigas também comportam-se como molas. Considere uma viga em balanço com uma massa m na extremidade, Figura (5.8-a). Para uma análise rápida e de razoável precisão, a massa e o amortecimento da viga podem ser desprezados e o sistema passa a ser modelado como um sistema massa-mola, Figura (5.8-b).

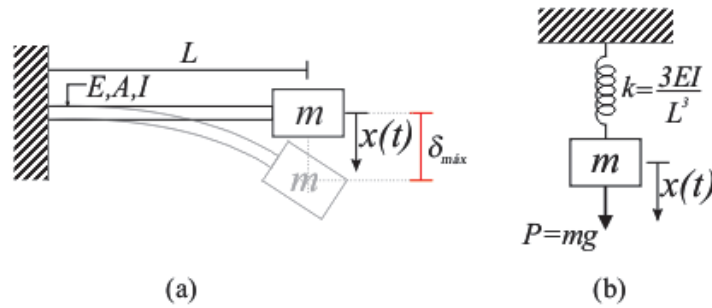


Figura 5.8: Rigidez de uma viga em balanço com massa na extremidade; (a) Sistema original; (b) Sistema massa-mola equivalente.

Fonte: Elaborada pela autora.

No sistema equivalente, a elasticidade da viga está representada pela rigidez da mola e o elemento de massa denota o carregamento na extremidade livre. Pela resistência dos materiais, sabe-se que a deflexão estática da viga na extremidade livre é dada por

$$\delta_{m\acute{a}x} = \frac{Pl^3}{3EI}$$

onde P é o peso da massa m , E é o módulo de elasticidade do material ou *módulo de Young* e I é o momento de inércia da seção transversal da viga. Assim, a *constante elástica* ou *rigidez* para viga em balanço sujeita a carregamento concentrado na extremidade livre é:

$$k = \frac{P}{\delta_{m\acute{a}x}} = \frac{3EI}{L^3}$$

Outros exemplos de vigas sujeitas a carregamentos transversais funcionando como mola podem ser vistos nas Figuras (5.9) e (5.10). Em ambos casos, se a massa da viga for muito pequena em relação a m , os sistema podem ser modelados como um sistema massa-mola, onde a mola equivalente terá constante elástica igual a $k = 48EI/L^3$ para a viga bi-apoiada e $k = 192EI/L^3$ para viga bi-engastada.

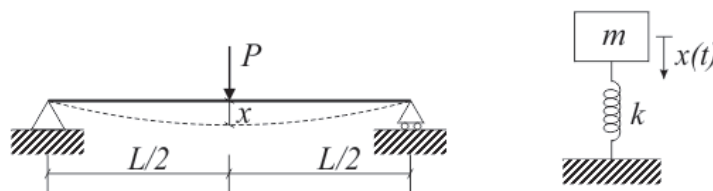


Figura 5.9: Viga bi-apoiada com carga transversal no centro da viga.

Fonte: Elaborada pela autora.

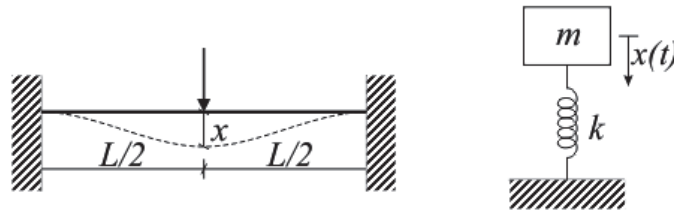


Figura 5.10: Viga bi-engastada com carga transversal no centro da viga.
 Fonte: Elaborada pela autora.

A vibração em algumas estruturas pode envolver a tração ou compressão axial de barras ou vigas, como é mostrado na Figura (5.11).

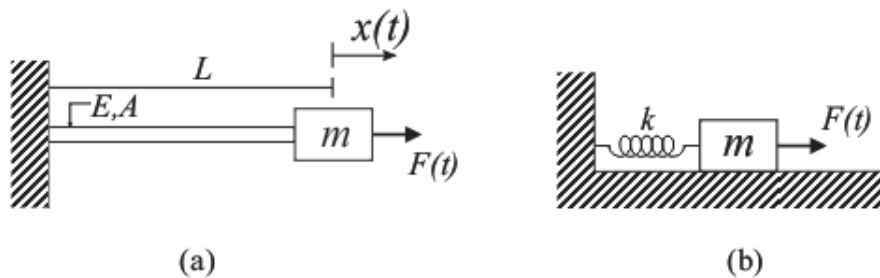


Figura 5.11: Viga em balanço sujeita a força axial; (a) Sistema original; (b) Sistema massa mola equivalente.

Fonte: Elaborada pela autora.

Sabe-se que para pequenas deformações, uma barra sujeita a uma força axial apresenta deformações lineares e portanto é válida a lei de Hooke. Utiliza-se a expressão de Hooke para obter a relação entre força e deslocamento:

$$\sigma = E\varepsilon \implies \frac{F}{A} = E \frac{x}{L} \implies F = \frac{AE}{L} x$$

Na equação acima, \$E\$ é o módulo de elasticidade do material, \$A\$ é a área da seção transversal da barra e \$L\$ é o comprimento anterior à deformação. Comparando a equação obtida com a equação da mola, tem-se que:

$$k = \frac{AE}{L}$$

Se a massa da barra for pequena em relação a massa do bloco, o sistema axial acima é modelado como um sistema massa-mola equivalente.

5.3 Movimento harmônico

O *movimento harmônico simples* (MHS) é um tipo de movimento oscilatório periódico no qual a partícula se move numa trajetória retilínea devido a uma força restauradora linear dirigida para um ponto fixo, posição de equilíbrio estático, adotado como origem do sistema de coordenadas. A força restauradora mencionada pode ser exercida por uma corda elástica, uma mola linear, etc. Embora o movimento de muitos sistemas vibratórios não seja harmônico, em muitos casos as vibrações são periódicas e podem ser tratadas como uma *superposição* de movimentos harmônicos. Isto se deve ao fato de toda função periódica poder ser representada por uma combinação linear de outras funções também periódicas através da série de Fourier.

A projeção ortogonal das posições ocupadas por uma partícula em movimento circular uniforme (MCU) sobre um diâmetro qualquer ou sobre qualquer reta paralela a um diâmetro descreve um movimento harmônico simples. A Figura (5.12) ilustra este fato considerando uma partícula em MCU num plano vertical com luz incidindo verticalmente de cima para baixo. A sombra da partícula sobre o eixo x descreve um MHS.



Figura 5.12: MCU de uma partícula projetado em um eixo horizontal.

Fonte: Elaborada pela autora.

Podemos usar tal analogia para obter as equações matemáticas que descrevem o MHS. Considere o movimento circular uniforme (MCU) de uma partícula em torno do centro O . A partícula está no ponto M no instante $t = 0$, Figura (5.13). Sua posição nesse instante em relação a O é dada pela distância A e pelo ângulo φ que faz com eixo de coordenadas Ox , denominado *ângulo de fase inicial* e medido em radianos.

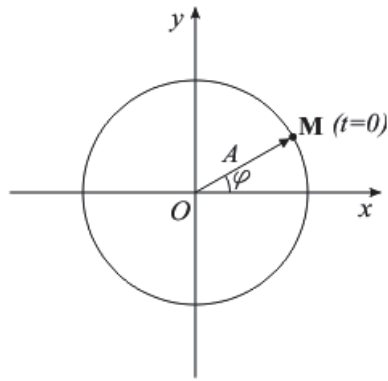


Figura 5.13: Posição da partícula no instante $t = 0$.

Fonte: Elaborada pela autora.

Suponha que a partícula tenha partido do ponto **M** no sentido anti-horário e, após t segundos, ocupe o ponto **P**, ver Figura (5.14).

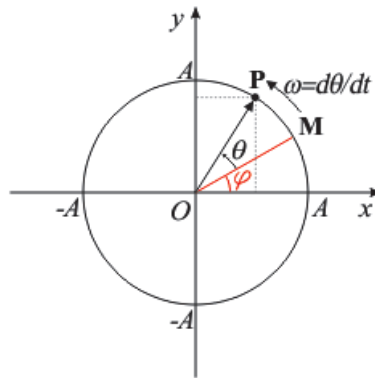


Figura 5.14: Partícula em MCU.

Fonte: Elaborada pela autora.

Assim, o arco descrito pela partícula durante o movimento é $\widehat{MP} = \theta$, com θ em radianos. Seja ω a taxa de variação instantânea do ângulo em relação ao tempo. Dizemos que ω é a velocidade angular empregada pela partícula durante o MCU. Como o movimento é uniforme, $\omega = d\theta/dt$ é constante, logo:

$$\int_0^\theta d\theta = \omega \int_0^t dt \implies \theta = \omega t$$

Portanto, ωt é o ângulo correspondente ao arco descrito pela partícula após t segundos. Seja α o ângulo compreendido entre o eixo x e o vetor \vec{OP} , temos:

$$\alpha = \theta + \varphi \implies \alpha = \omega t + \varphi$$

As componentes horizontal e vertical da posição da partícula em cada instante são dadas pelas equações:

$$x(t) = A \cos \alpha \implies x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

$$y(t) = A \operatorname{sen} \alpha \implies y(t) = A \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)$$

Ambas equações acima descrevem o MHS. Se uma partícula está em MHS com equação do movimento dada por $y(t) = A \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)$, a velocidade e a aceleração da partícula são dadas pelas equações:

$$\dot{y}(t) = \omega A \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\ddot{y}(t) = -\omega^2 A \operatorname{sen}(\omega t + \varphi) = -\omega^2 y(t)$$

Portanto, a aceleração e o deslocamento da partícula no MHS são proporcionais, porém com sinais contrários. Isto também se verifica quando a equação do movimento é dada por $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$.

5.3.1 Representação vetorial e complexa do movimento harmônico

Vimos que o movimento harmônico pode ser representado convenientemente por meio de um vetor-posição \vec{OP} de magnitude A girando a uma velocidade angular constante ω . Considere o vetor \vec{OP} da Figura (5.15) cujo ângulo de fase inicial é nulo ($\varphi = 0$). Traçando o gráfico da componente vertical $y(t)$ em função do ângulo de fase θ obtemos uma *senóide*.

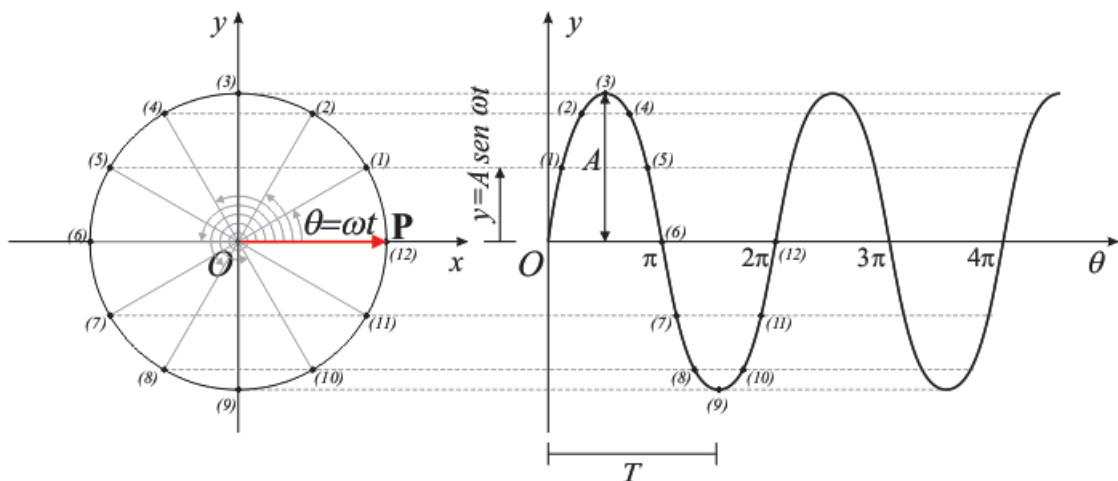


Figura 5.15: Representação gráfica do movimento harmônico simples descrito pela projeção da extremidade de um vetor girante sobre o eixo vertical.

Fonte: Elaborada pela autora.

O vetor posição \vec{OP} também pode ser representado no plano complexo:

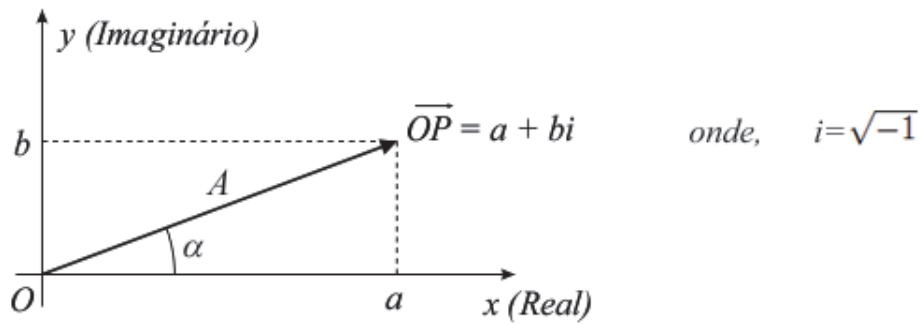


Figura 5.16: Representação do vetor girante no plano complexo.
Fonte: Elaborada pela autora.

Utilizando as relações trigonométricas, escreve-se:

$$a = A \cos \alpha \quad e \quad b = A \operatorname{sen} \alpha$$

com

$$A = \sqrt{a^2 + b^2} \quad e \quad \alpha = \operatorname{tg}^{-1}(b/a), \quad a \neq 0. \quad (5.3)$$

Portanto,

$$\vec{OP} = A \cos \alpha + iA \operatorname{sen} \alpha, \quad \text{com } \alpha = \omega t + \varphi.$$

Usando a relação de Euler expressa por $e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha$ (**Proposição 2.1**, p. 31), é possível ainda representar o vetor \vec{OP} por um número complexo da forma

$$\vec{OP} = A e^{i(\omega t + \varphi)}$$

cujas componentes descrevem movimentos hamônicos simples (MHS) sobre os *eixos Real e Imaginário*.

5.3.2 Funções periódicas

Definição 5.1. Uma função $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dita periódica se existe um número real positivo P , chamado período de g , tal que

$$g(x) = g(x + P) \quad (5.4)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. O gráfico de uma função periódica é obtido pela repetição de qualquer intervalo de comprimento P , Figura (5.17).

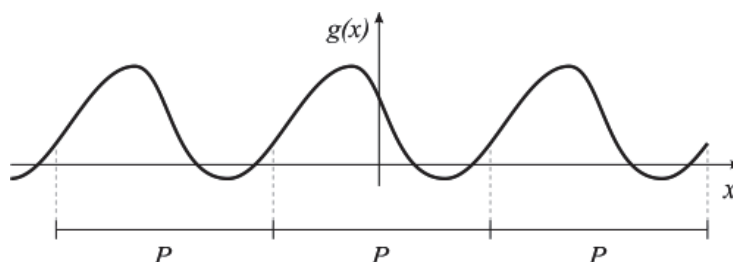


Figura 5.17: Gráfico de uma função periódica.

Fonte: Elaborada pela autora.

Conseqüentemente, se g é periódica de período P então para qualquer n inteiro positivo temos

$$g(x) = g(x + nP),$$

ou seja, qualquer múltiplo inteiro positivo nP de P também é um período de g . O menor valor de P que satisfaz a equação (5.4) é chamado período fundamental de g e será denotado por T . Qualquer outro período de g será um múltiplo inteiro do período fundamental. A Figura (5.18) ilustra tal conceito.

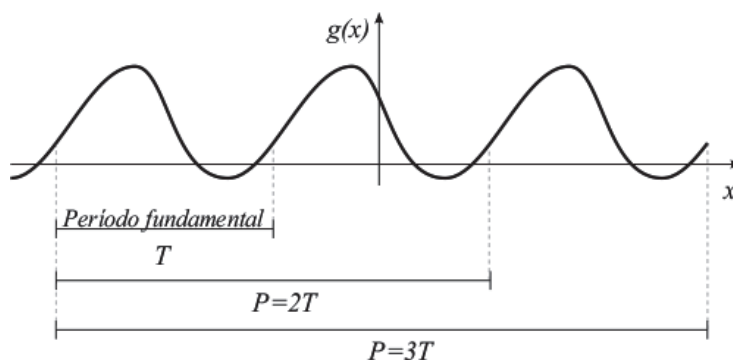


Figura 5.18: Período e período fundamental.

Fonte: Elaborada pela autora.

Adotando uma unidade de medida para o período T de uma função periódica, a frequência f é definida como o número de repetições ou *ciclos* ocorridos em um intervalo de comprimento unitário e resulta do inverso do período, equação (5.5).

$$f = \frac{1}{T} \quad (5.5)$$

As funções trigonométricas $y = \text{sen } x$ e $y = \text{cos } x$ são exemplos de funções periódicas cujo período é igual a 2π , Figura (5.19).

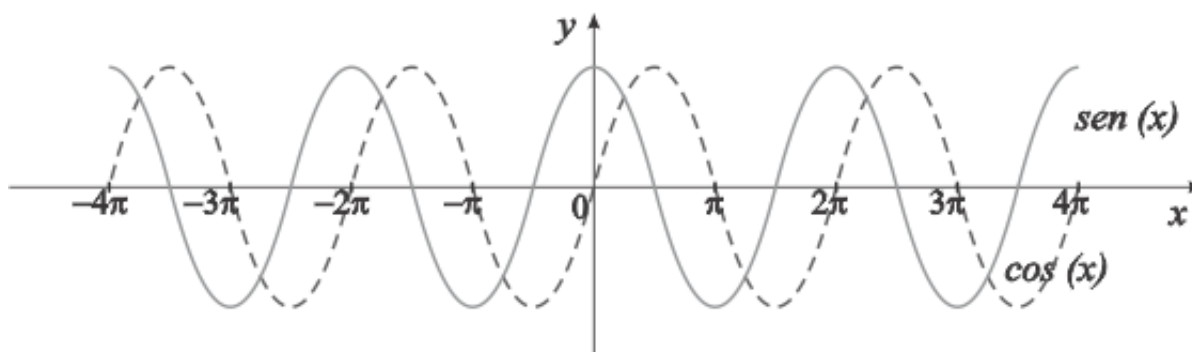


Figura 5.19: Gráficos das funções *seno* e *cosseno*.

Fonte: Elaborada pela autora.

As duas proposições a seguir nos dão duas propriedades importantes das funções periódicas.

Proposição 5.1. *Seja g uma função periódica de período T , então:*

- (i) $g(ax)$, $a \neq 0$, é periódica de período $\frac{T}{a}$;
- (ii) $g\left(\frac{x}{b}\right)$, $b \neq 0$, é periódica de período bT .

Demonstração. (i) Suponha que P é o período de $g(ax)$, de modo que $g(ax) = g[a(x + P)] = g(ax + aP)$. Fazendo $u = ax$, obtemos $g(u) = g(u + aP)$. Por hipótese, g é periódica de período T , então

$$T = aP \iff P = \frac{T}{a}.$$

(ii) Suponha que P é o período de $g\left(\frac{x}{b}\right)$, de modo que

$$g\left(\frac{x}{b}\right) = g\left[\frac{1}{b}(x + P)\right] = g\left(\frac{x}{b} + \frac{P}{b}\right)$$

Fazendo $u = \frac{x}{b}$, obtemos

$$g(u) = g\left(u + \frac{P}{b}\right)$$

Por hipótese, o período de g é T , então

$$T = \frac{P}{b} \iff P = bT.$$

□

De acordo com **Proposição 5.1(i)**, as funções $y = \text{sen}(\omega t)$ e $y = \text{cos}(\omega t)$ são periódicas de período:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

em que ω representa a frequência angular ou circular definida como a taxa de variação angular em relação ao tempo, isto é, $\omega = d\theta/dt$.

Proposição 5.2. *Sejam g_1 e g_2 duas funções periódicas de mesmo período T ; C_1 e C_2 duas constantes reais quaisquer. A função g definida por*

$$g(x) = C_1g_1(x) + C_2g_2(x)$$

também é periódica de período T , isto é, a combinação linear de funções periódicas de mesmo período também é periódica e com mesmo período das funções que foram combinadas.

Demonstração.

$$g(x + T) = C_1g_1(x + T) + C_2g_2(x + T) = C_1g_1(x) + C_2g_2(x) = g(x).$$

□

Capítulo 6

Vibrações Livres não-Amortecidas

6.1 Sistemas com um grau de liberdade

O conjunto massa-mola representa o sistema vibratório mais simples possível e é útil como modelo simplificado para diversas situações de vibrações. Por exemplo, a estrutura de edifício mostrada na Figura (6.1) pode ser idealizada como o sistema massa-mola da Figura (6.2).

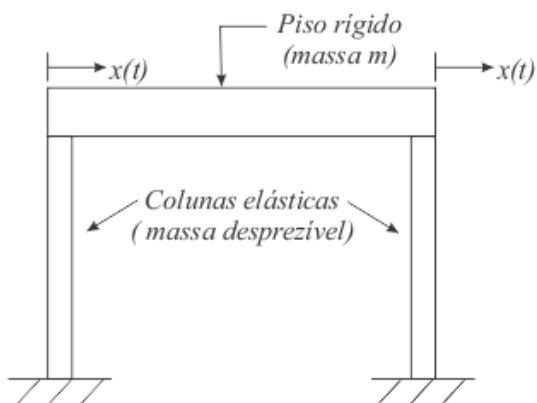


Figura 6.1: Estrutura do edifício.
Fonte: Elaborada pela autora.

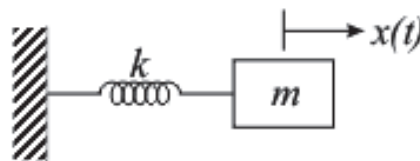


Figura 6.2: Sistema massa-mola equivalente.
Fonte: Elaborada pela autora.

Considere o sistema vibratório da Figura (6.3) composto por uma mola com uma das extremidades fixa e, presa a outra extremidade, uma massa sujeita a um deslocamento inicial. Nesse sistema, a coordenada x é suficiente para determinar a posição da massa em qualquer instante, trata-se de um sistema com um grau de liberdade (1GDL).

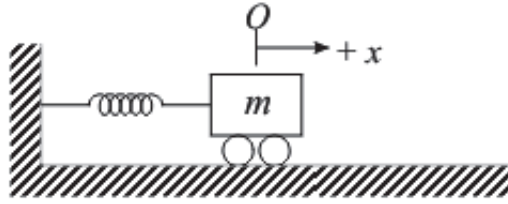


Figura 6.3: Sistema massa-mola horizontal.
 Fonte: Elaborada pela autora.

6.1.1 Equação do movimento

Considere o sistema da Figura (6.3) como modelo de vibração de um sistema livre não-amortecido. O sistema é conservativo, não há fornecimento nem dissipação de energia, portanto a energia total do sistema é constante (princípio da conservação de energia). Sendo a energia mecânica desse sistema vibratório parcialmente potencial e parcialmente cinética temos

$$U + T = \text{constante}. \quad (6.1)$$

Onde:

U é a energia potencial armazenada na mola devido à deformação elástica.

T é a energia cinética armazenada na massa em virtude da velocidade.

As energias cinética e potencial são dadas por

$$T = \frac{1}{2}m \dot{x}^2 \quad \text{e} \quad U = \frac{1}{2}kx^2. \quad (6.2)$$

Das equações (6.1) e (6.2) segue que

$$0 = \frac{d}{dt}(U + T) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}m \dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 \right) = (m \ddot{x} + kx) \dot{x}$$

Mas $\dot{x} \neq 0$, senão o sistema estaria em repouso. Então

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (6.3)$$

é a equação de movimento para um sistema livre não-amortecido.

Conforme visto na seção (3.5), a solução geral da EDO (6.3) é dada por

$$x(t) = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t} \quad (6.4)$$

onde C_1 e C_2 são constantes quaisquer e a *frequência natural do sistema* ω é dada por

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (6.5)$$

Agora, sejam A_1 e A_2 tais que

$$A_1 = C_1 + C_2$$

$$A_2 = i(C_1 - C_2)$$

Usando as identidades

$$e^{\pm i\omega t} = \cos \omega t \pm i \operatorname{sen} \omega t$$

a equação (6.4) pode ser reescrita como

$$x(t) = A_1 \cos \omega t + A_2 \operatorname{sen} \omega t \quad (6.6)$$

Sejam

$$A_1 = A \operatorname{sen} \varphi \quad (6.7)$$

$$A_2 = A \cos \varphi$$

onde A e φ são novas constantes determinadas por

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$$

$$\phi = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{A_1}{A_2} \right)$$

Substituindo as equações (6.7) em (6.6) obtemos

$$x(t) = A \operatorname{sen} \varphi \cos \omega t + A \cos \varphi \operatorname{sen} \omega t.$$

Logo, usando a relação $\operatorname{sen}(x + y) = \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y$, referente ao seno da soma de dois ângulos, temos que

$$x(t) = A \operatorname{sen}(\omega t + \varphi).$$

A solução da EDO (6.3) é a equação que descreve o MHS e, por isso, o sistema massa-mola também é denominado *Oscilador Harmônico*. Dadas duas condições iniciais do sistema, as constantes que aparecem em qualquer uma das formas usadas anteriormente para escrever a solução da EDO (6.3) ficam determinadas.

6.2 Sistemas com dois graus de liberdade

Sistemas que requerem duas coordenadas independentes para descrever seu movimento são denominados *sistemas com dois graus de liberdade*. Neste caso, o modelo matemático é composto por duas equações de movimento, uma para cada grau de liberdade. Em geral, se apresentam na forma de *equações diferenciais acopladas* devido as interações dos movimentos das massas ocorridas no sistema. Matematicamente, isto significa que as duas equações não podem ser resolvidas independentemente. Considere um sistema massa-mola não-amortecido com duas massa interligadas, ver Figura (6.4).

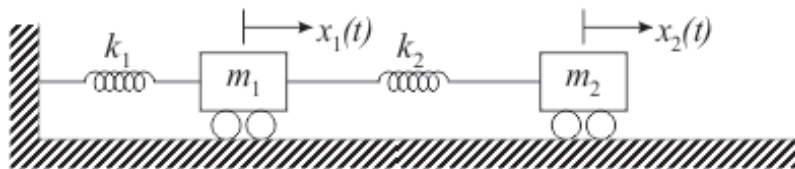


Figura 6.4: Sistema massa-mola com dois graus de liberdade

Fonte: Elaborada pela autora.

O movimento do sistema é descrito completamente pelas coordenadas $x_1(t)$ e $x_2(t)$ que definem as posições das massas m_1 e m_2 em relação às respectivas posições de equilíbrio para qualquer tempo t . A Figura (6.5) mostra os diagramas de corpo livre das massas m_1 e m_2 .

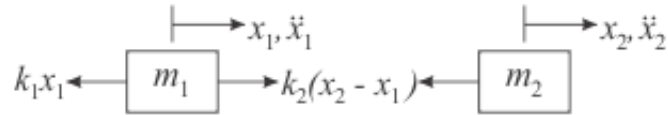


Figura 6.5: Diagrama de corpo livre das massas m_1 e m_2

Fonte: Elaborada pela autora.

A aplicação da segunda lei do movimento de Newton a cada uma das massas fornece as seguintes equações de movimento:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = -k_1 x_1 + k_2(x_2 - x_1) \\ m_2 \ddot{x}_2 = -k_2(x_2 - x_1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 = 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 - k_2 x_1 + k_2 x_2 = 0 \end{cases} \quad (6.8)$$

O sistema acima é composto por duas EDOL's homogêneas de segunda ordem acopladas e, para cada uma delas, são necessárias 2 condições iniciais. Observe que as equações do sistema (6.8) não podem ser resolvidas separadamente pois ambas contêm termos que dependem tanto de x_1 como de x_2 . Fisicamente, significa que o movimento da massa m_1 interfere no movimento da massa m_2 e vice-versa. Podemos escrever o sistema de equações acopladas (6.4) na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (6.9)$$

Normalmente, admite-se que o instante inicial t_0 é igual a zero e condições iniciais dadas por:

$$\mathbf{X}_0 = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{X}}_0 = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(0) \\ \dot{x}_2(0) \end{bmatrix}. \quad (6.10)$$

De forma abreviada,

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}\mathbf{X} = 0, \quad (6.11)$$

onde \mathbf{M} e \mathbf{K} são, respectivamente, as matrizes de *massa* e *rigidez* e $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ é o *vetor deslocamento*.

6.2.1 Aplicação em um edifício de 2 andares

A estrutura de um edifício de dois andares é modelada como mostra a Figura (6.6). Considere que as vigas (elementos horizontais) sejam rígidas e que as colunas (elementos verticais) tenham resistência à flexão EI_1 e EI_2 com massas desprezíveis. Admita ainda que a rigidez em cada coluna seja dada por

$$\frac{24EI_i}{h_i^3}, \quad i = 1, 2.$$

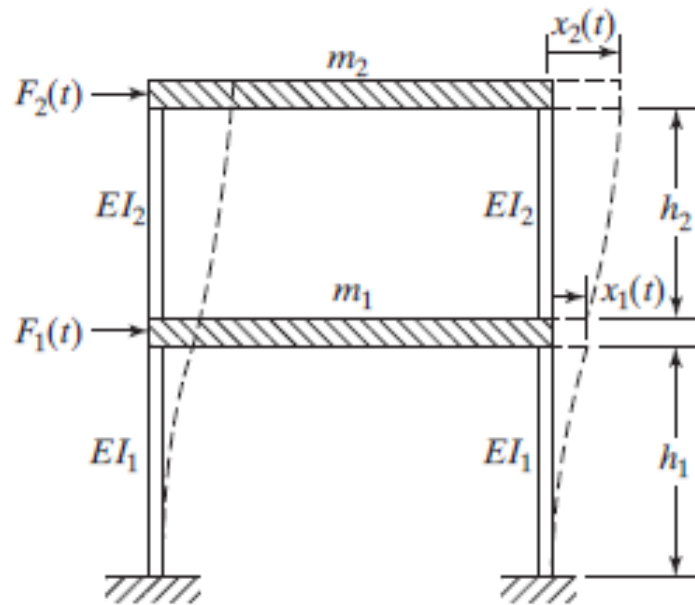


Figura 6.6: Estrutura de um edifício de dois andares.

Para $m_1 = 2m$, $m_2 = m$, $h_1 = h_2 = h$ e $EI_1 = EI_2 = EI$, determinaremos as frequências naturais e modos normais de vibração dessa estrutura. Em cada andar do edifício, a rigidez de ambas colunas combinadas resulta em

$$k_1 = k_2 = k = \frac{48EI}{h^3}. \quad (6.12)$$

O sistema massa-mola equivalente é mostrado na Figura (6.7).

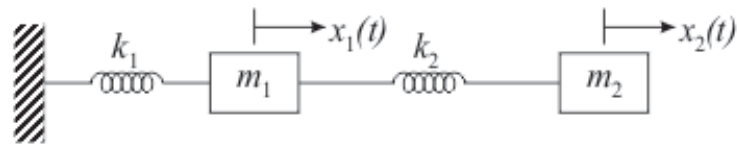


Figura 6.7: Sistema massa-mola equivalente.

Fonte: Elaborada pela autora.

Conforme vimos, o modelo matemático referente a este sistema é

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}\mathbf{X} = \mathbf{0}, \quad (6.13)$$

onde

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \iff \mathbf{M}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2m} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m} \end{bmatrix}$$

Calculando $\mathbf{A} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$ obtemos

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{k}{m} & -\frac{k}{2m} \\ -\frac{k}{m} & \frac{k}{m} \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \mathbf{A} = \frac{k}{m} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (6.14)$$

Assim, a equação característica da matriz \mathbf{A} é dada por

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0, \quad (6.15)$$

de forma que

$$\begin{vmatrix} \frac{k}{m} - \lambda & -\frac{k}{2m} \\ -\frac{k}{m} & \frac{k}{m} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Assim,

$$\left(\frac{k}{m} - \lambda\right)^2 - \left(-\frac{k}{2m}\right) \cdot \left(-\frac{k}{m}\right) = 0$$

e

$$\left(\lambda - \frac{k}{m}\right)^2 = \frac{k^2}{2m^2}.$$

Logo,

$$\lambda = \left(1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \frac{k}{m}.$$

Os autovalores correspondentes a matriz \mathbf{A} são

$$\lambda_1 = \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \frac{k}{m} = 1.7071 \frac{k}{m} \quad \text{e} \quad \lambda_2 = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \frac{k}{m} = 0.2929 \frac{k}{m}, \quad (6.16)$$

ou ainda, substituindo a equação (6.12) nas equações (6.17) segue que

$$\lambda_1 = \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \frac{48EI}{mh^3} \quad \text{e} \quad \lambda_2 = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \frac{48EI}{mh^3}. \quad (6.17)$$

Como $\lambda = \omega^2$, temos que as **frequências naturais** do sistema são

$$\omega_1 = \sqrt{\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \frac{48EI}{mh^3}} \quad \text{e} \quad \omega_2 = \sqrt{\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \frac{48EI}{mh^3}}.$$

Os **modos normais** de vibração ou autovetores podem ser obtidos por meio da equação

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{X} = 0 \quad (6.18)$$

que é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} \left(\frac{k}{m} - \lambda_1\right) X_1 - \left(\frac{k}{2m}\right) X_2 = 0, \\ \left(-\frac{k}{m}\right) X_1 + \left(\frac{k}{m} - \lambda_2\right) X_2 = 0. \end{cases}$$

donde

$$\frac{X_2^{(1)}}{X_1^{(1)}} = \frac{\frac{k}{m} - \lambda_1}{-\frac{k}{2m}} = \frac{2k - 2m\lambda_1}{k} = \frac{(2 + \sqrt{2})k - 2k}{k} = \sqrt{2}$$

$$\frac{X_2^{(2)}}{X_1^{(2)}} = \frac{-\frac{k}{m}}{\frac{k}{m} - \lambda_2} = \frac{k}{-k + \lambda_2 m} = \frac{2k}{-k + (2 - \sqrt{2})k} = -\sqrt{2}$$

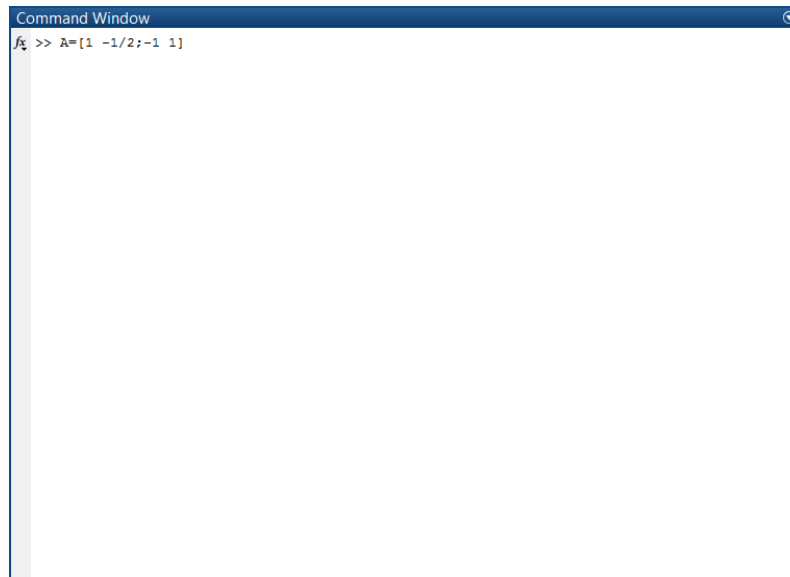
Portanto, os autovetores são:

$$\vec{X}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} X_1^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1.414 \end{bmatrix} X_1^{(1)},$$

$$\vec{X}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{bmatrix} X_1^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1.414 \end{bmatrix} X_1^{(2)}.$$

Usando o software MATLAB

Passo 1 Na janela de comando digite: $A = [1 \quad -1/2; -1 \quad 1]$.



```
Command Window
fx >> A=[1 -1/2;-1 1]
```

Passo 2 Em seguida aperte "ENTER".



```
Command Window
>> A=[1 -1/2;-1 1]
A =
    1.0000   -0.5000
   -1.0000    1.0000
fx >>
```


Passo 3 Agora digite: $[V, D] = \text{eig}(A)$.

```
Command Window
>> A=[1 -1/2;-1 1]

A =

    1.0000   -0.5000
   -1.0000    1.0000

fx >> [V, D]=eig(A)
```

Passo 4 Em seguida aperte "ENTER".

```
Command Window
>> A=[1 -1/2;-1 1]

A =

    1.0000   -0.5000
   -1.0000    1.0000

>> [V, D]=eig(A)

V =

    0.5774    0.5774
   -0.8165    0.8165

D =

    1.7071         0
         0    0.2929

fx >>
```

Portanto:

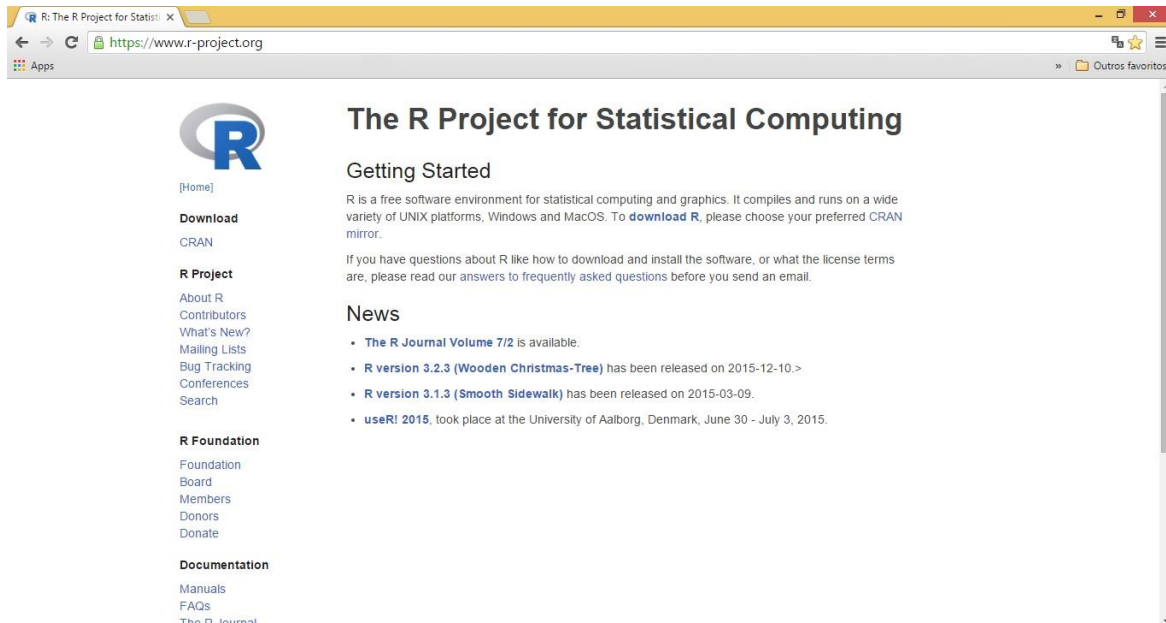
$$\lambda_1 = 1.7071 \frac{k}{m}; \vec{X}^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{0.5774}{0.5774} \\ \frac{0.5774}{0.8165} \\ \frac{0.5774}{0.5774} \end{bmatrix} X_1^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1.414 \end{bmatrix} X_1^{(1)};$$
$$\lambda_2 = 0.2929 \frac{k}{m}; \vec{X}^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{0.5774}{0.5774} \\ \frac{0.5774}{-0.8165} \\ \frac{0.5774}{0.5774} \end{bmatrix} X_1^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1.414 \end{bmatrix} X_1^{(2)}.$$

6.2.2 Usando o software R

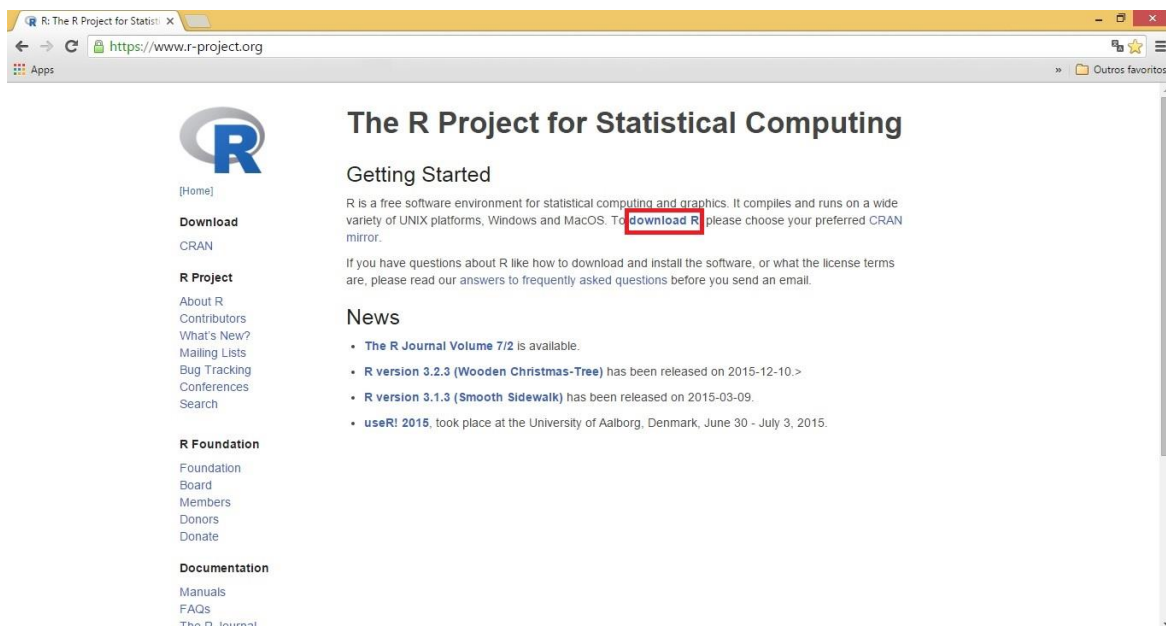
Inicialmente, veremos como instalar o R.

Passo 1 Acessar a página oficial do software através do link

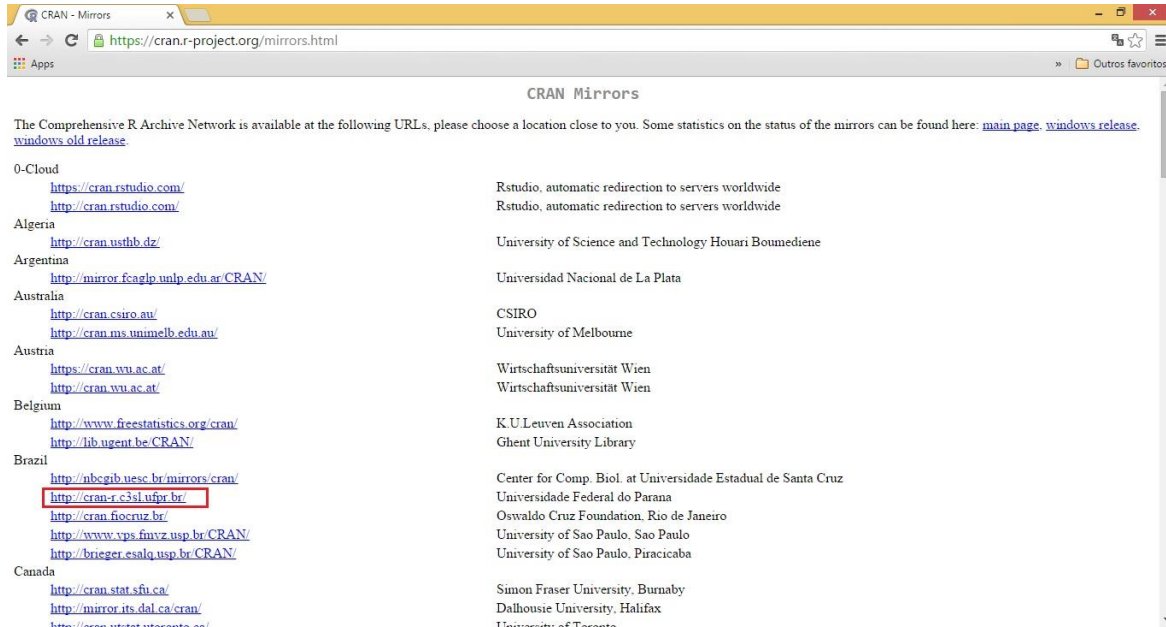
<https://www.r-project.org>.



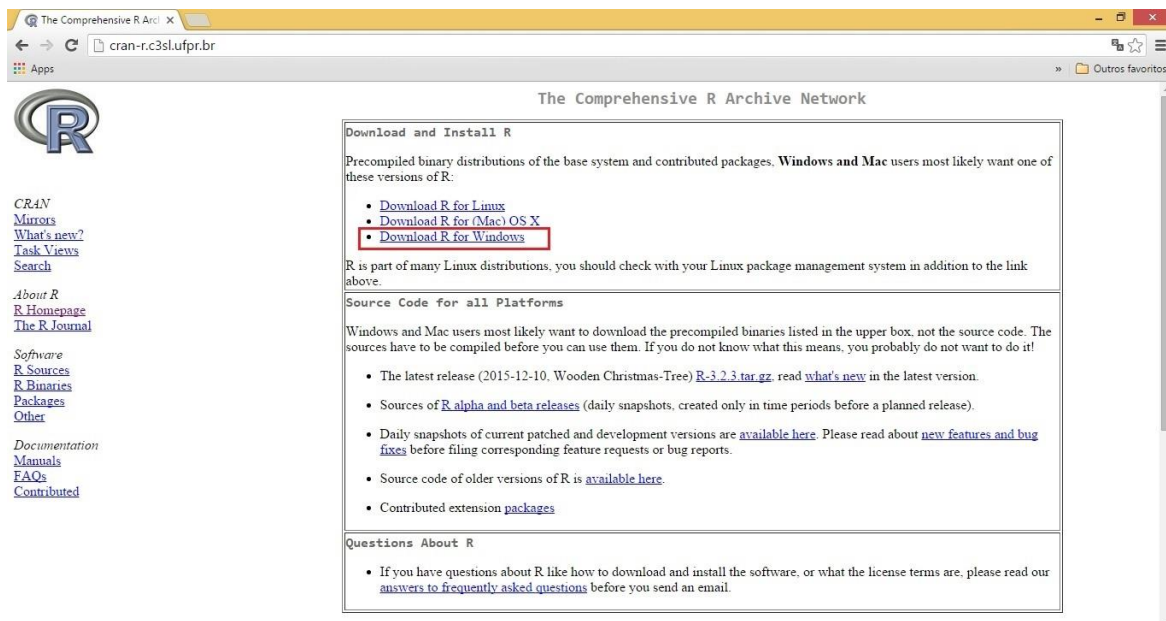
Passo 2 Clicar em [download R](#).



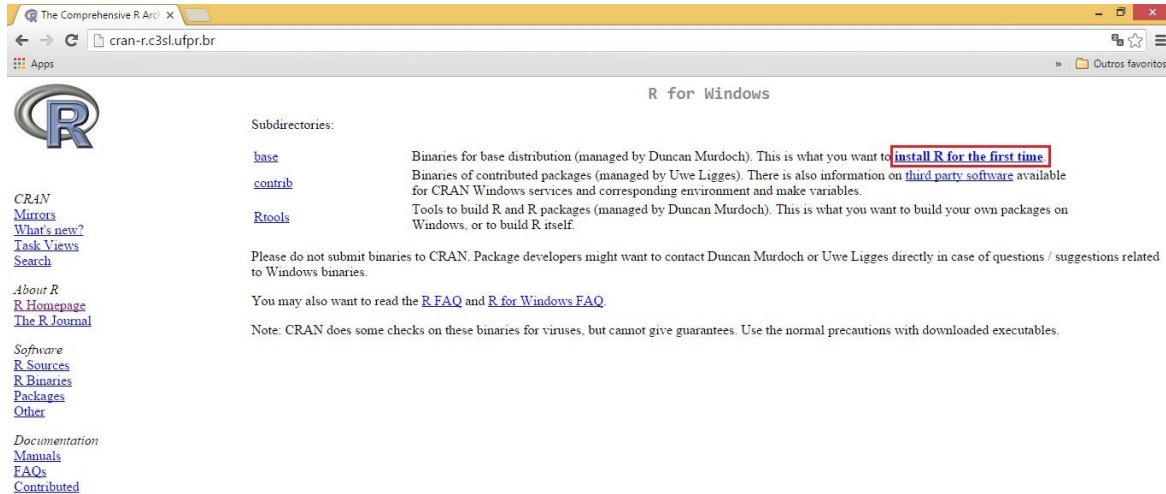
Passo 3 Clicar em <http://cran-r.c3sl.ufpr.br/>.



Passo 4 Selecionar a opção correspondente ao sistema operacional instalado na máquina.

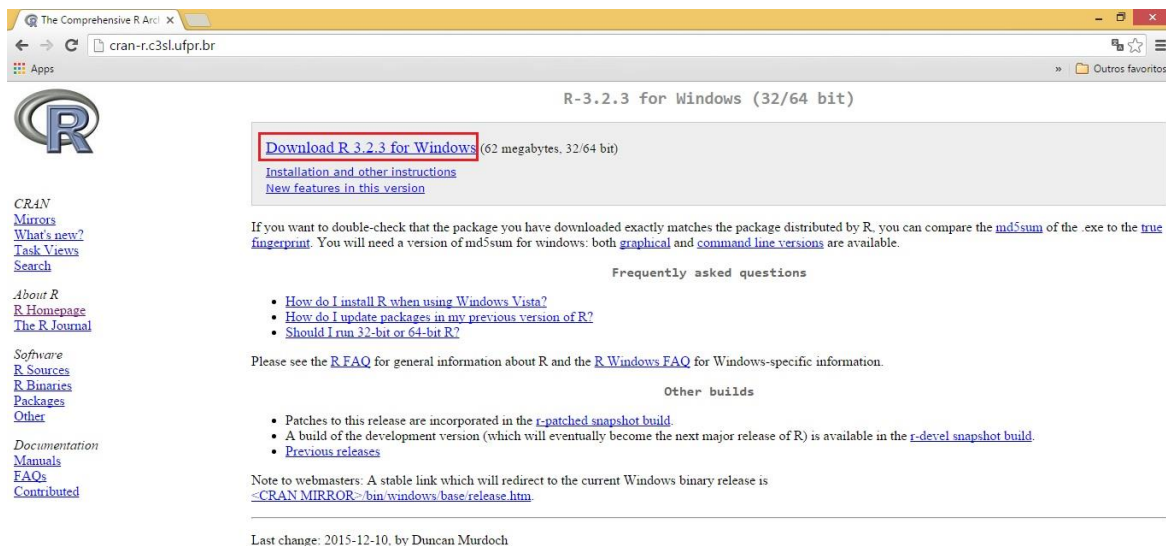


Passo 5 Clicar em [install R for the first time](#).



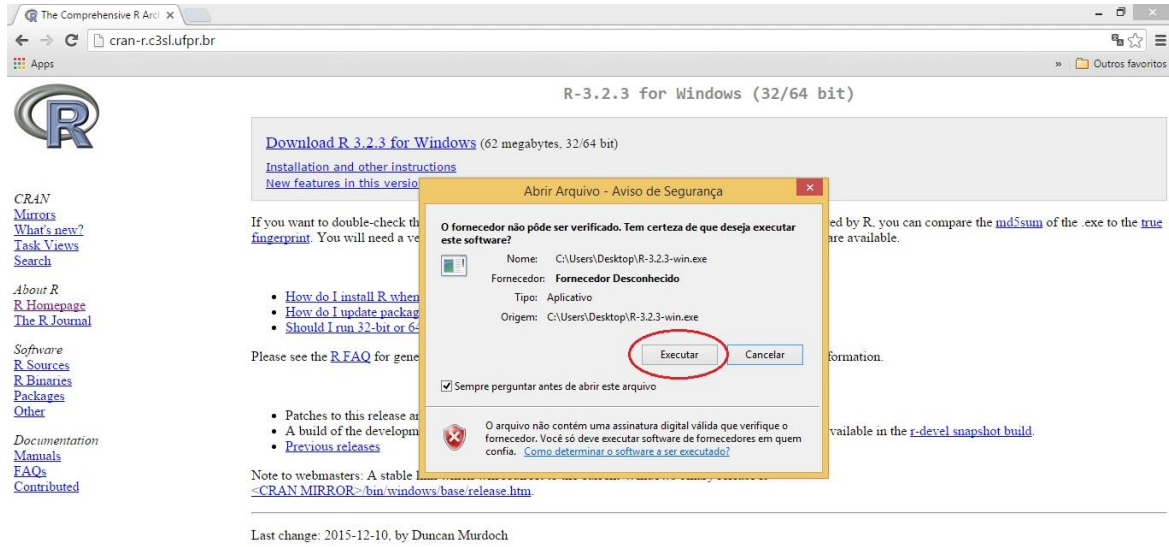
The screenshot shows a web browser window with the address bar displaying 'cran-r.c3sl.ufpr.br'. The page title is 'R for Windows'. On the left side, there is a navigation menu with links for 'CRAN', 'Mirrors', 'What's new?', 'Task Views', 'Search', 'About R', 'R Homepage', 'The R Journal', 'Software', 'R Sources', 'R Binaries', 'Packages', 'Other', 'Documentation', 'Manuals', 'FAQs', and 'Contributed'. The main content area is titled 'Subdirectories:' and lists three categories: 'base' (Binaries for base distribution), 'contrib' (Binaries of contributed packages), and 'Rtools' (Tools to build R and R packages). A red box highlights the link 'install R for the first time' under the 'base' subdirectory. Below this, there is a paragraph asking not to submit binaries to CRAN and a link to 'R FAQ and R for Windows FAQ'. A note at the bottom states that CRAN does some checks for viruses but cannot guarantee safety.

Passo 6 Clicar em [Download R 3.2.3 for Windows](#).

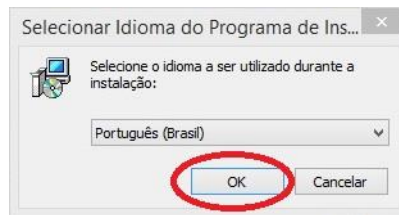


The screenshot shows the 'R-3.2.3 for Windows (32/64 bit)' page on the CRAN website. The main heading is 'R-3.2.3 for Windows (32/64 bit)'. A prominent link 'Download R 3.2.3 for Windows' is highlighted with a red box, followed by '(62 megabytes, 32/64 bit)'. Below this, there are links for 'Installation and other instructions' and 'New features in this version'. A paragraph explains how to verify the downloaded package using md5sum and provides links for 'graphical' and 'command line versions'. A section titled 'Frequently asked questions' lists three questions: 'How do I install R when using Windows Vista?', 'How do I update packages in my previous version of R?', and 'Should I run 32-bit or 64-bit R?'. Below this, there is a link to the 'R Windows FAQ'. A section titled 'Other builds' lists 'r-patched snapshot build' and 'r-devel snapshot build'. A note for webmasters provides a stable link to the current Windows binary release: '<CRAN MIRROR>/bin/windows/base/release.htm'. At the bottom, it states 'Last change: 2015-12-10, by Duncan Murdoch'.

Passo 7 Executar instalação.

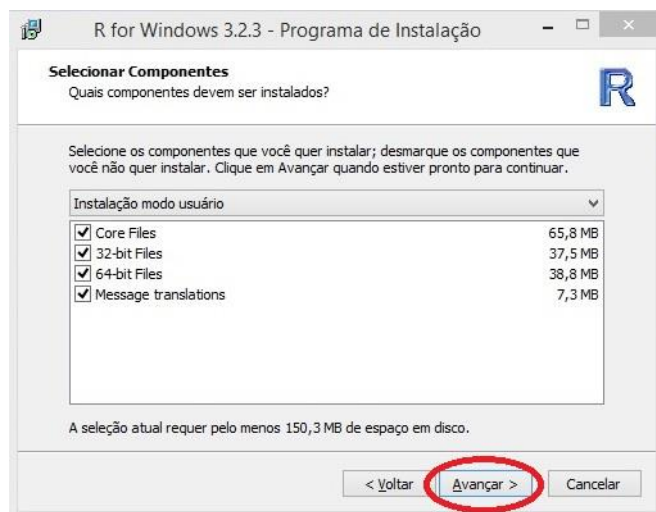
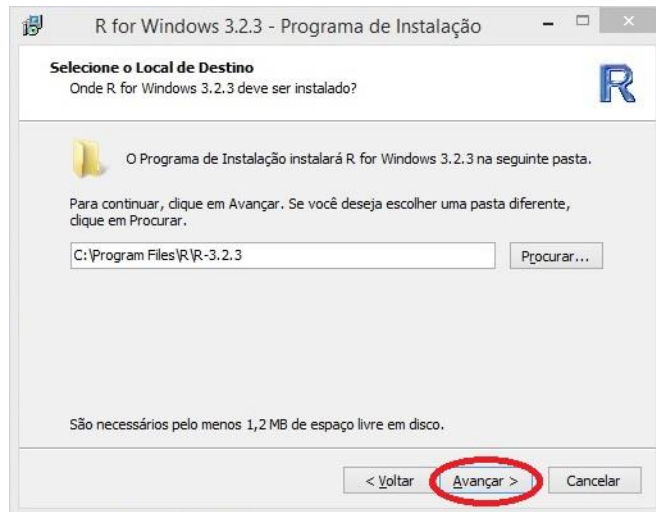
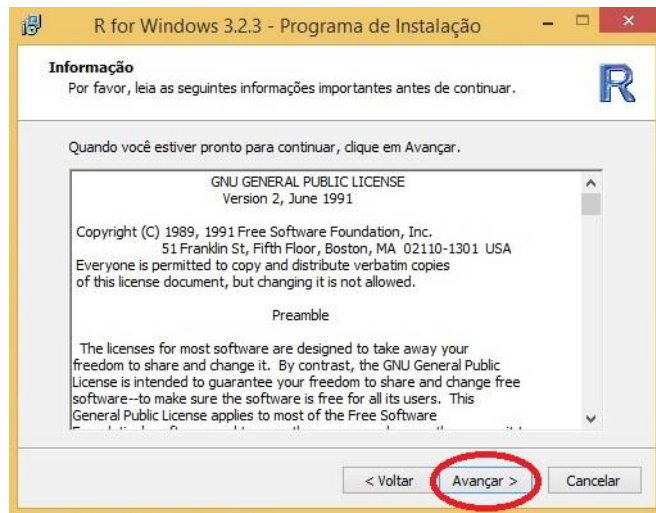


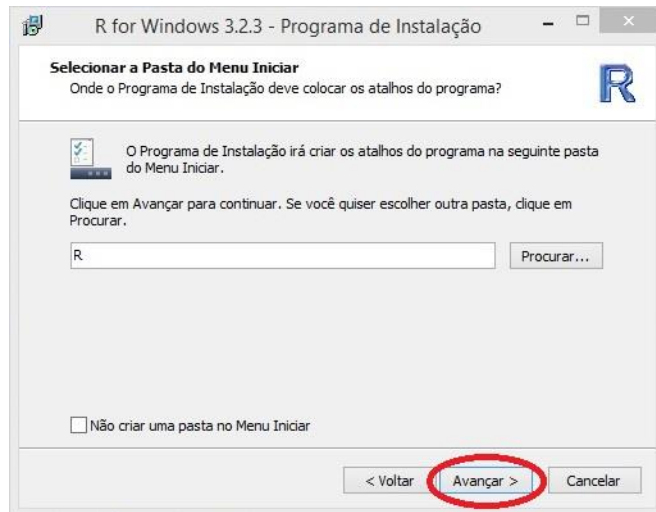
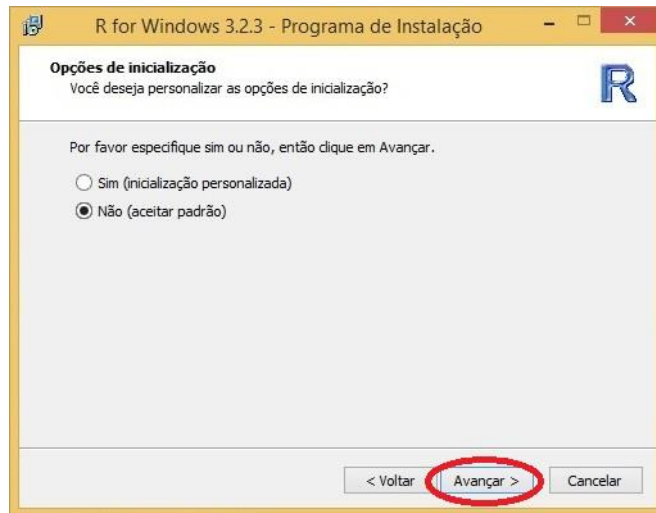
Passo 8 Selecionar idioma.



Passo 9 Prosseguir clicando em Avançar.







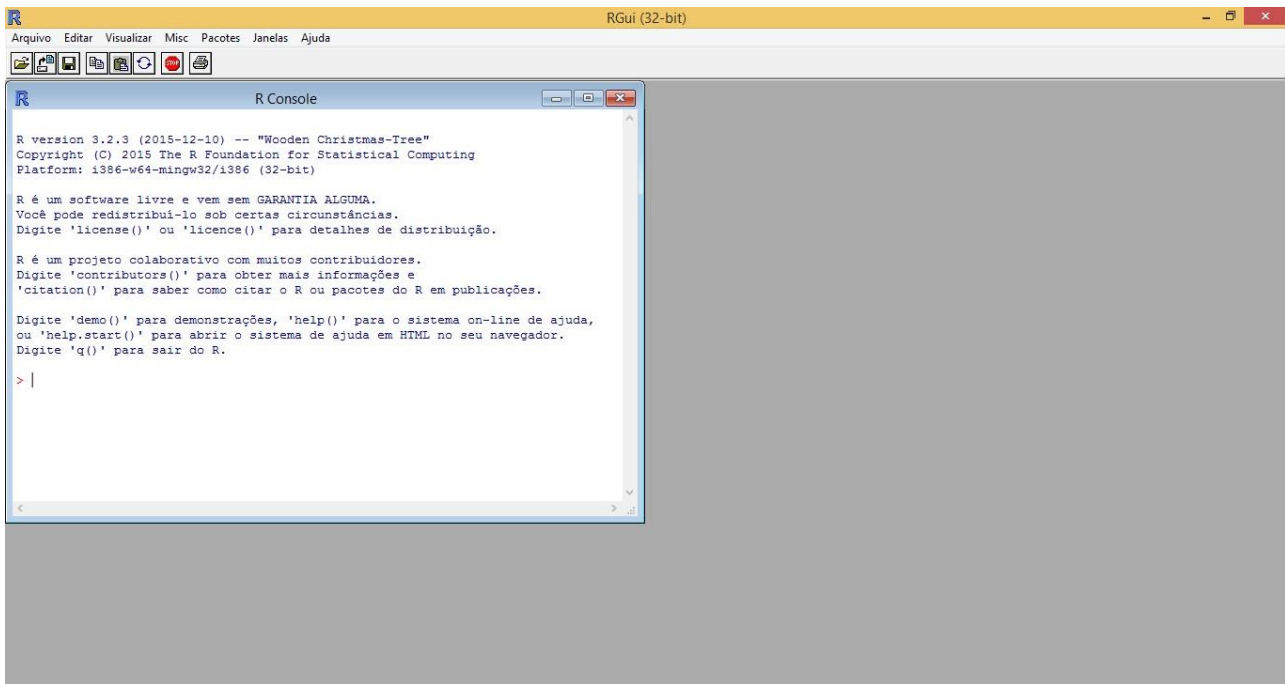
Passo 10 Aguardar a conclusão da instalação.



Passo 11 Clicar em concluir.

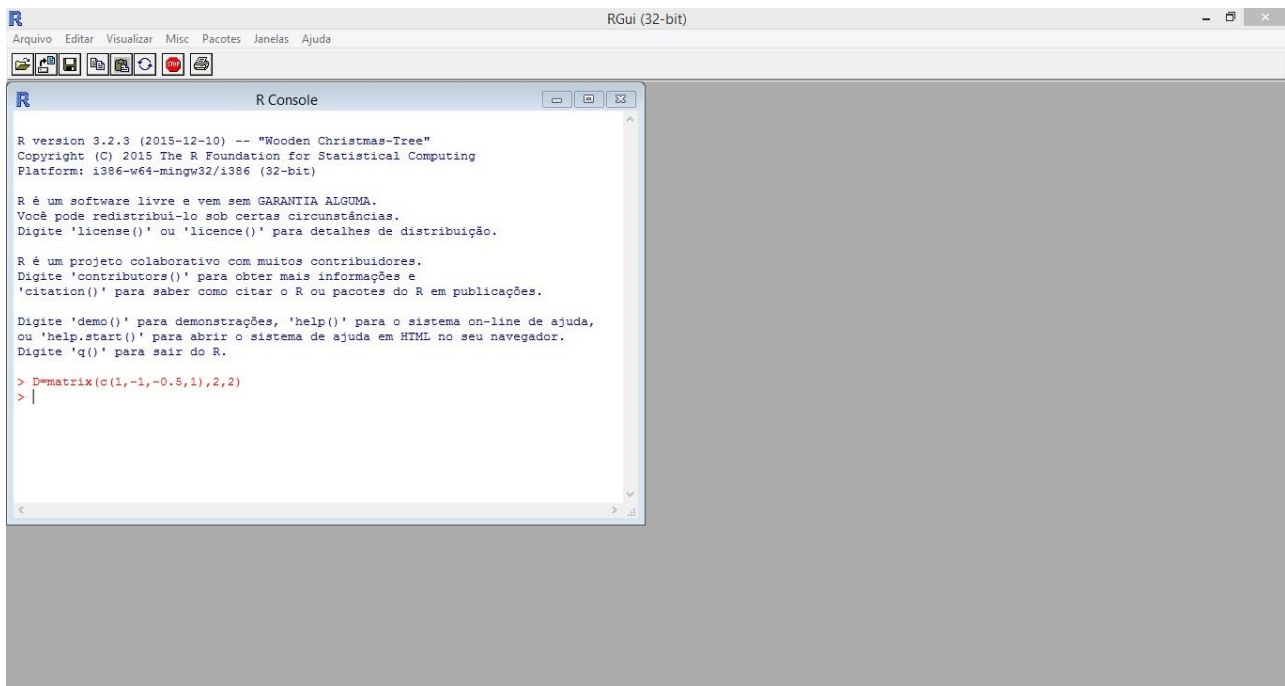


Instalação concluída com sucesso! O software R está pronto para ser usado.

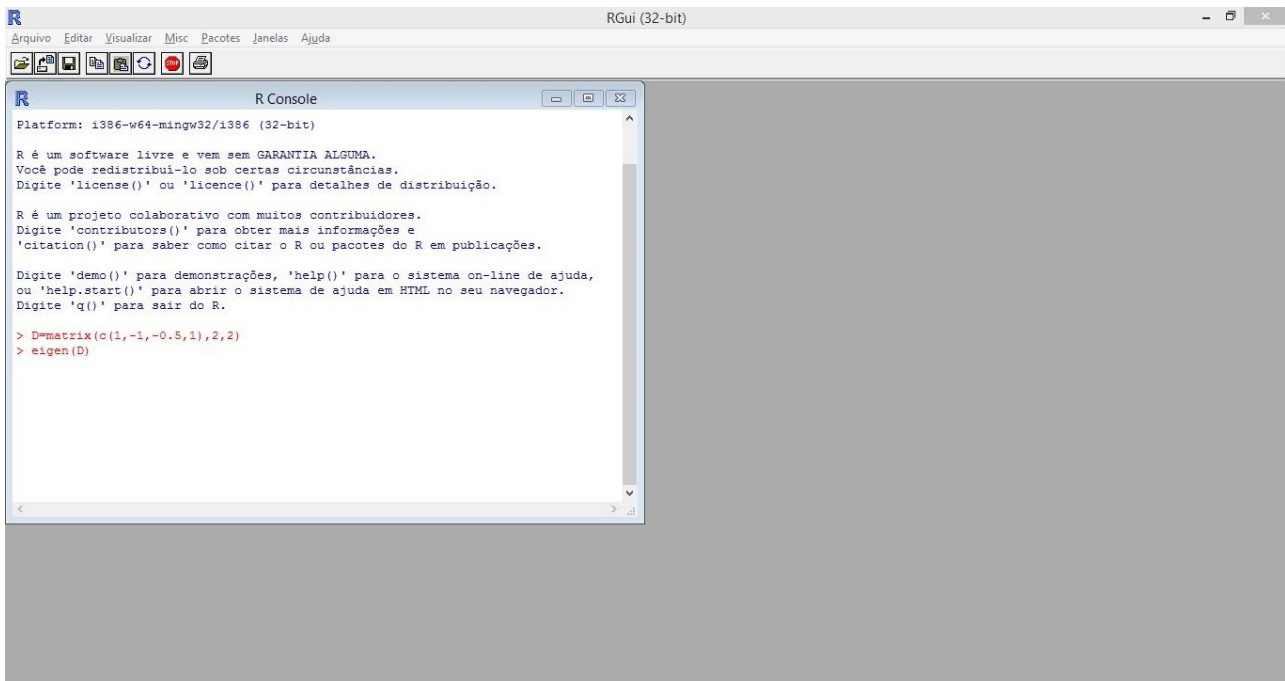


Calculando os autovalores e autovetores a partir do software R:

Passo 1 Digite: $D=matrix(c(1,-1,-0.5,1),2,2)$, em seguida aperte ENTER.



Passo 2 Digite: `eigen(D)`.



The screenshot shows the RGui (32-bit) window. The R Console is open and displays the following text:

```
Platform: i386-w64-mingw32/i386 (32-bit)

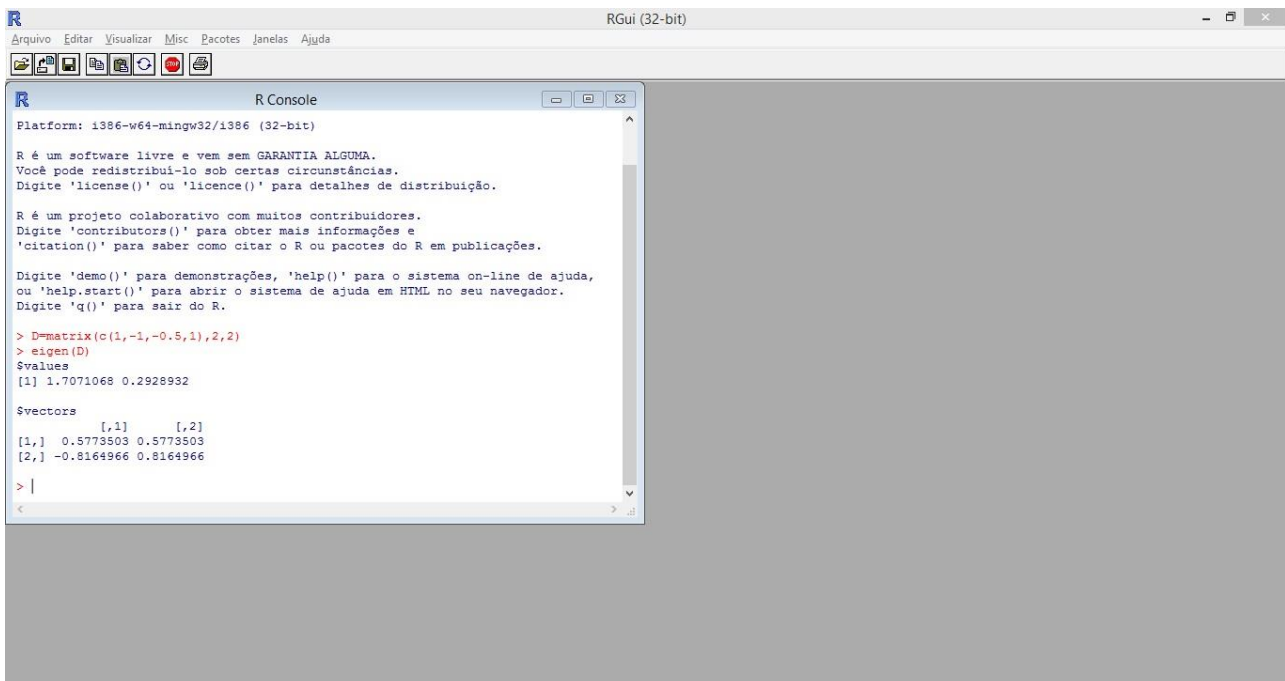
R é um software livre e vem sem GARANTIA ALGUMA.
Você pode redistribuí-lo sob certas circunstâncias.
Digite 'license()' ou 'licence()' para detalhes de distribuição.

R é um projeto colaborativo com muitos contribuidores.
Digite 'contributors()' para obter mais informações e
'citation()' para saber como citar o R ou pacotes do R em publicações.

Digite 'demo()' para demonstrações, 'help()' para o sistema on-line de ajuda,
ou 'help.start()' para abrir o sistema de ajuda em HTML no seu navegador.
Digite 'q()' para sair do R.

> D=matrix(c(1,-1,-0.5,1),2,2)
> eigen(D)
```

Passo 3 Aperte ENTER.



The screenshot shows the RGui (32-bit) window. The R Console is open and displays the following text:

```
Platform: i386-w64-mingw32/i386 (32-bit)

R é um software livre e vem sem GARANTIA ALGUMA.
Você pode redistribuí-lo sob certas circunstâncias.
Digite 'license()' ou 'licence()' para detalhes de distribuição.

R é um projeto colaborativo com muitos contribuidores.
Digite 'contributors()' para obter mais informações e
'citation()' para saber como citar o R ou pacotes do R em publicações.

Digite 'demo()' para demonstrações, 'help()' para o sistema on-line de ajuda,
ou 'help.start()' para abrir o sistema de ajuda em HTML no seu navegador.
Digite 'q()' para sair do R.

> D=matrix(c(1,-1,-0.5,1),2,2)
> eigen(D)
$values
[1] 1.7071068 0.2928932

$vectors
      [,1]      [,2]
[1,] 0.5773503 0.5773503
[2,] -0.8164966 0.8164966

> |
```

6.2.3 PhET - Simuladores Interativos

Desenvolvido pela University of Colorado Boulder, o site <http://phet.colorado.edu/> possui uma coleção de simulações interativas para ensino e aprendizagem de ciências naturais e matemática. Os simuladores disponíveis são extensivamente testados e avaliados para assegurar a eficácia educacional. Estes testes incluem entrevistas de estudantes e observação do uso de simulação em sala de aula. As simulações são feitas em Java, Flash ou HTML5, e podem ser executadas *online* ou baixadas para o computador. Vários patrocinadores apoiam o projeto PhET, entre eles a editora Pearson, permitindo que estes recursos possam ser livres para todos os estudantes e professores. No link <http://phet.colorado.edu/en/simulation/legacy/resonance> encontra-se disponível um oscilador harmônico. Através dessa ferramenta interativa é possível uma maior compreensão acerca do fenômeno da ressonância.

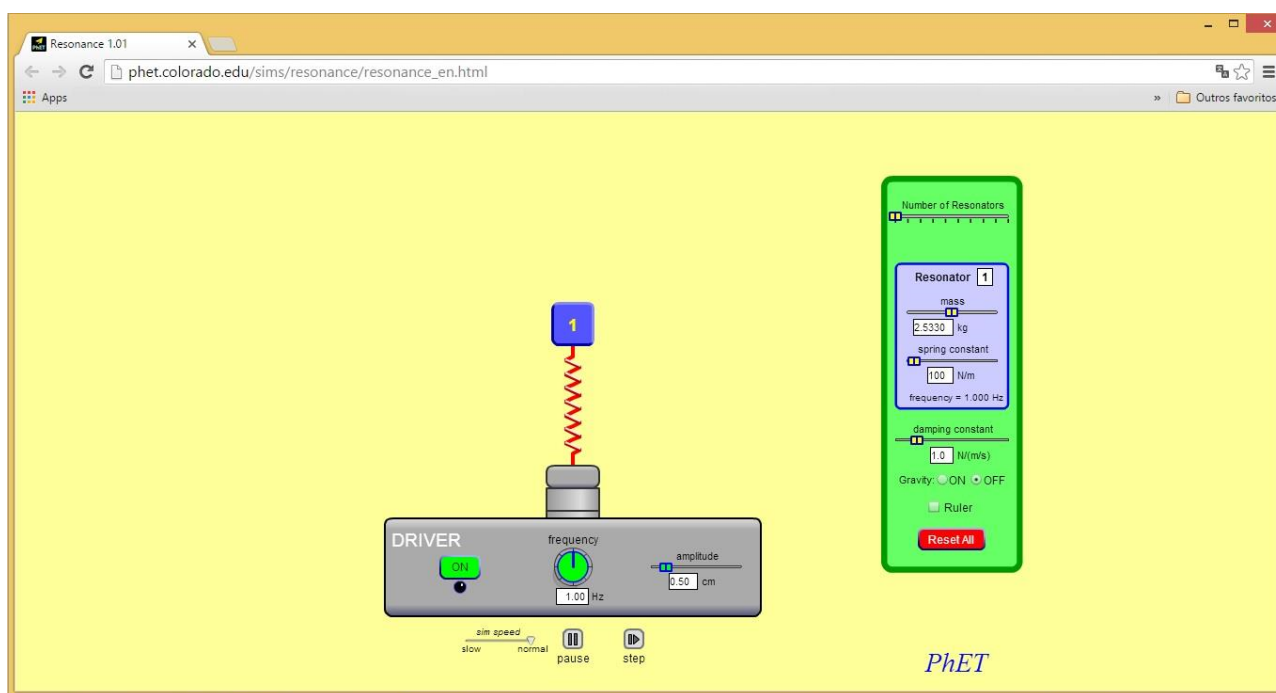


Figura 6.8: Ferramenta interativa (Oscilador Harmônico).

Considerações finais

A modelagem de sistemas vibratórios mostra-se rica em aplicações de conteúdos de matemática do ensino médio como trigonometria, números complexos, matrizes, determinantes, sistemas lineares e funções. Também cria oportunidade para explorar conteúdos introdutórios nos cursos de ciências exatas como limites e derivadas, ajudando a reduzir as dificuldades que normalmente os alunos apresentam quando ingressam nestes cursos por não estarem habituados a linguagem formal adotada na graduação.

Além disso, há diversos softwares e simuladores disponíveis em sites educativos que contribuem para um aprendizado dinâmico e motivador. Dessa forma, mais alunos com aptidão podem ser atraídos para a área das exatas, pois, infelizmente, para muitos alunos, os cursos de exatas não estão entre as primeiras opções no momento em que pleiteiam uma vaga em uma universidade, normalmente por acharem que a matemática é difícil e distante da realidade. Tal constatação não se limita aos alunos do ensino médio. Por exemplo, na graduação, disciplinas como Cálculo, Equações Diferenciais e Álgebra Linear, normalmente estão entre os componentes curriculares básicos, na área das ciências exatas, entretanto a pouca interação entre estas disciplinas básicas e as específicas dos mais diversos cursos desmotiva os alunos, razão pela qual muitos estudantes questionam a importância delas na sua formação.

Todavia, os conceitos teóricos adquiridos nas disciplinas mencionadas são fundamentais entre tantas outras aplicações para a compreensão do comportamento de sistemas mecânicos e estruturais nas engenharias. Por exemplo, o estudo do comportamento dinâmico de estruturas, mais especificamente de vibrações, muitas vezes consiste em obter um sistema de equações diferenciais através da modelagem matemática do problema e resolver a equação característica associada para determinação e avaliação das frequências naturais (autovalores) e dos modos de vibração (autovetores). Conhecer as frequências naturais de um sistema mecânico ou de uma estrutura sujeita a vibrações mecânicas é muito útil na verificação da possibilidade de ocorrência

da ressonância que pode causar grandes deformações e/ou falhas mecânicas comprometendo a durabilidade e segurança.

A abordagem baseada em métodos estritamente conceituais e matemáticos de conteúdos como o problema clássico de autovalores, dando menor importância a sua aplicação prática, dificulta a assimilação desse conceito importante para o futuro profissional. Ao associar o termo autovalor às frequências naturais de um sistema estrutural qualquer, dando ênfase a aplicação deste conceito, estimulamos o interesse dos alunos pela disciplina por perceberem que estão adquirindo um conhecimento útil, aguçando a curiosidade e a busca por mais aplicações.

O cálculo dos autovalores é aplicado na análise dinâmica de estruturas simples (treliças, vigas, pórticos, etc) como também de sistemas estruturais mais complexos (pontes, torres de aço de telecomunicações e de transmissão de energia, passarelas de pedestres, edifícios altos, etc). A evolução dos sistemas de transportes com veículos mais rápidos e pesados tornou indispensável o estudo do comportamento dinâmico de pontes, no entanto, ainda hoje se desenvolvem projetos sem proceder uma análise, mesmo que preliminar, acerca dos efeitos dinâmicos associados a oscilação dos veículos ao transitar pela estrutura. É de suma importância que um aluno de engenharia tenha domínio desses conteúdos e efetivamente utilize-os na modelagem de problemas reais.

De um modo geral, a modelagem matemática é desafiadora e útil no desenvolvimento da capacidade investigativa de qualquer estudante, em qualquer nível de escolaridade, e portanto, é uma excelente ferramenta para os professores trabalharem conteúdos vistos erroneamente sem utilidade prática e demonstrarem a utilidade destes de forma criativa e estimulante, aliando teoria e prática com o uso de tecnologias disponíveis visando uma formação plena e de qualidade.

Referências Bibliográficas

- [1] Bernardes, E. S., *Mecânica Clássica*. USP, São Paulo, 2002.
- [2] Boyer, Carl B.; Merzbach, Uta C., *História da Matemática*. Editora Blucher. 3ed. São Paulo, 2012.
- [3] Dias, Jorge L. G., *Idealizações em Mecânica Newtoniana e Violações do Determinismo*. Dissertação: Mestrado em Ensino de Física, Orientador: Prof. Dr. Marcus Venicius Cougo Pinto, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2011.
- [4] Fernandes , João C., *Segurança nas Vibrações sobre o Corpo Humano*, FEB - Unesp, São Paulo, 2000. Disponível em: <http://www.feb.unesp.br/jcandido/vib/index.htm>. Acesso em: Dezembro de 2014.
- [5] Figueiredo, Djairo G., *Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais*. Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1977 (Projeto Euclides).
- [6] Flemming, Diva Marília, *Cálculo A*. Editora Pearson. 6ed. São Paulo, 2006.
- [7] Guidorizzi, Hamilton L., *Um curso de Cálculo, vol. 1*. Editora LTC. 5ed. Rio de Janeiro, 2012.
- [8] Leon, Steven J., *Álgebra Linear com aplicações*. Editora LTC. 8ed. Rio de Janeiro, 2013.
- [9] Rao, Singiresu, *Vibrações Mecânicas*. Editora Pearson. 4ed. São Paulo, 2008.
- [10] Santos , Fabiano J., *Introdução às Séries de Fourier*, PUC, Minas Gerais, 2004. Disponível em: http://www.matematica.pucminas.br/profs/web_fabiano/calculo4/sf.pdf. Acesso em: Dezembro de 2014.

- [11] Silva, Renato M., *Modelagem Matemática de Sistemas Mecânicos Translacionais pela Mecânica Newtoniana*, Instituto de Matemática e Estatística - USP, São Paulo, 2004. Disponível em: <http://www.ime.usp.br/~oda/contents/01Matem%e1tica/01Sistemas%20Din%e2micos/>. Acesso em: Dezembro de 2014.
- [12] Sommer, Rosana M. R., *Análise de vibrações em pisos mistos Aço/Concreto*. Dissertação: Mestrado em Engenharia de Estruturas, Orientador: Prof. Dr. Fernando Amorim de Paula, Universidade Federal de Minas Gerais, 2002.
- [13] Soeiro, N. S., *Vibrações e o Corpo Humano: uma avaliação ocupacional*. I Workshop de Vibrações e Acústica – UFPA, 2011.
- [14] Soeiro, N. S., *Curso de Fundamentos de Vibração e Balanceamento de Rotores*. UFPA, Belém, 2008.
- [15] Stewart, James, *Cálculo, vol. 1*. Editora CENGAGE Learning. 7ed. São Paulo, 2013.
- [16] Zill, Dennis G., *Equações Diferenciais com aplicações em modelagem*. Editora CENGAGE Learning. 2ed. São Paulo, 2014.