

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO

INSTITUTO DE MATEMÁTICA – IM/UFRJ

PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL
EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

Claudio Melo da Cruz

Congruência de Polígonos em Geometria Neutra: o caso dos
quadriláteros.

Dissertação de Mestrado apresentada ao
Programa DE MESTRADO
PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM
REDE NACIONAL – PROFMAT, do
Instituto de Matemática, Universidade
Federal do Rio de Janeiro-UFRJ, como
parte dos requisitos necessários à obtenção
do título de Mestre, no Mestrado
Profissional em Rede Nacional em
Matemática.

Orientadora: Professora Walcy Santos

Rio de Janeiro
2015

Claudio Melo da Cruz

Congruência de Polígonos em Geometria Neutra: o caso dos
quadriláteros.

Dissertação submetida ao corpo docente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional-PROFMAT da Universidade Federal do Rio de Janeiro como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Aprovada por:

Walcy Santos (orientadora)

Victor Augusto Giraldo

Aline Mauricio Barbosa

Fernando Villar Marinho

Aprovado em: 01 de junho de 2015

Local de defesa: Sala C-116, bloco C – Instituto de Matemática,

Universidade Federal do Rio de Janeiro.

Dedicatória

Dedico este trabalho a toda minha família, em especial à: minha mãe Maria Helena pela sua importância em todas as minhas escolhas na vida, Aline Tinoco minha esposa e Ana Lua minha filha.

Agradecimentos

Esta Dissertação de Mestrado foi possível ser realizada graças à amabilidade e disponibilidade de vários amigos do PROFMAT, as quais manifesto os meus sinceros e reconhecidos agradecimentos, em particular à Prof.^a Dra. Walcy Santos, a quem devo a orientação da mesma. Agradeço também a bolsa recebida por mim da CAPES.

A todos um Muito Obrigado!

RESUMO

Neste trabalho serão apresentados e demonstrados os casos de congruência de quadriláteros em uma geometria neutra, ou seja, sem assumir como verdade o quinto postulado de Euclides. Para tais demonstrações serem feitas, este trabalho se inicia demonstrando os casos de congruência de triângulos, que são fundamentais nas demonstrações dos casos de congruência de quadriláteros. No final do trabalho há sugestões de atividades com alunos do nono ano e/ou ensino médio.

Palavras-chave: congruência de triângulos, congruência de quadriláteros, geometria neutra.

ABSTRACT

This work will present and demonstrate cases of quads congruence in a neutral geometry, ie, without assuming as true the Euclid's fifth postulate. For such statements to be made, this work begins showing cases of triangle's congruence, which are fundamental in the statements of quad's congruence cases. At the end of the work there suggestions for activities with students from ninth grade and / or high school.

Key-words: triangle's congruence, quad's congruence, neutral geometry

Sumário

INTRODUÇÃO	8
CAPÍTULO 1: CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS	14
CAPÍTULO 2: CONGRUÊNCIA DE POLÍGONOS: DOIS CASOS GERAIS	29
CAPÍTULO 3: CONGRUÊNCIAS DE QUADRILÁTEROS.....	33
CAPÍTULO 4: UMA PROPOSTA PARA SALA DE AULA.....	59
CONSIDERAÇÕES.....	63

INTRODUÇÃO

É impossível falar de geometria sem citar Euclides e seu livro Os Elementos. Euclides foi o primeiro matemático a apresentar, de maneira sistemática, a matemática como uma ciência dedutiva, ou seja, toda afirmação deve ser deduzida de afirmações mais simples. No início de uma teoria existem as afirmações não demonstradas, as quais Euclides chamou de postulados. Postulados são afirmações aceitas como verdade por todos.

Os quatro primeiros postulados de Euclides satisfazem essa simplicidade. Eram eles:

(01) *Dois pontos distintos determinam uma única reta.*

(02) *A partir de qualquer ponto de uma reta dada é possível marcar um segmento de comprimento arbitrário.*

(03) *É possível construir um círculo de centro e raio arbitrários.*

(04) *Todos os ângulos retos são iguais.*

Já o quinto postulado não era tão simples e evidente, que vamos enunciar a seguir:

(05) *Se uma reta r corta duas outras retas r_1 e r_2 (no mesmo plano) de modo que a soma das medidas dos ângulos interiores de mesmo lado de r seja menor que a medida de dois ângulos retos, então r_1 e r_2 , quando prolongados suficientemente, se cortam daquele lado de r .*

Existem versões mais simples e equivalentes desse postulado, como a que foi dada por John Playfair (1748-1819):

Teorema (Playfair): *Dado uma reta r e um ponto P fora dela, existe uma única reta t paralela a reta r que contém ponto P .*

O quinto postulado é equivalente também a dizer que em um triângulo a soma das medidas de seus ângulos internos vale a soma das medidas de dois ângulos retos.

Euclides fez as 26 primeiras demonstrações de seu livro Os Elementos sem usar o quinto postulado. O que mostra que provavelmente o próprio Euclides desconfiava se quinto postulado era realmente um postulado ou se poderia ser provado a partir dos postulados anteriores.

Ao longo da história, vários matemáticos tentaram demonstrar o quinto postulado, como: G Saccheri (1667 – 1733), Lambert (1728 – 1777), Gauss (1777 – 1855), Lobachevskii (1792 – 1856) e não conseguiram, mas dessas tentativas nasceu a Geometria não Euclidiana. Assim a Geometria não Euclidiana considera verdadeiros os quatro primeiros postulados e nega o quinto postulado, também chamado de postulado das Paralelas.

Desta forma modificando o postulado das paralelas, obtêm-se as geometrias elíptica e hiperbólica. Na geometria elíptica o quinto postulado é substituído por

Postulado (05´): *Existe uma reta r e existe um ponto P fora dela de modo que nenhuma reta passando por P é paralela à reta inicial.*

Na geometria hiperbólica o Postulado das Paralelas é trocado pelo seguinte postulado:

Postulado (05´´): *Existe uma reta r e existe um ponto P fora dela de modo que pelo menos duas retas passando por P são paralelas à reta r .*

Na Geometria Euclidiana, o postulado das Paralelas é equivalente que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual a soma das medidas de dois ângulos retos. Na geometria elíptica a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é maior do que a soma das medidas de dois ângulos retos, enquanto na geometria hiperbólica esta soma é menor do que dois ângulos reto



figura 1:

Um triângulo nas geometrias elíptica, hiperbólica e euclidiana, respectivamente.

A criação das Geometrias Não Euclidianas, motivada pela tentativa de se obter um exemplo que indicasse a necessidade do quinto postulado ser um axioma e não decorrer dos quatro primeiros, promoveu o aparecimento de geometrias diferentes. Sua importância viria a ser reconhecida mais tarde.

O primeiro grande matemático a reconhecer a sua importância foi Georg Riemann (1826/1866), quando desenvolveu a teoria geral das variedades, em 1854, legitimando, de uma maneira muito clara, não só os vários tipos de Geometrias Não Euclidianas, mas também as chamadas Geometrias Riemannianas.

A aceitação total da Geometria Não Euclidiana só se estabeleceu após a morte de Riemann.

Foi David Hilbert (1862-1943) que em *The Foundations of Geometry*, denominou de Geometria Neutra à geometria que é comum a Geometria Euclidiana e a Geometria Hiperbólica. Hilbert elaborou uma série de axiomas para a geometria Euclidiana. Ele os dividiu em cinco grupos, eram eles:

1. *Axiomas de Incidência,*

Axioma 1. Dados quaisquer dois pontos distintos, A e B, existe uma única reta que os contém.

Axioma 2. Em cada reta existem ao menos dois pontos distintos e existem três pontos distintos que não pertencem a uma mesma reta.

2. *Axiomas de Ordem,*

Axioma 3. Para quaisquer três pontos distintos colineares, apenas um deles está entre os outros dois.

Axioma 4. Se A, B e C são pontos tais que C está entre A e B então estes três pontos são distintos, colineares e C está entre B e A.

Axioma 5. Dados dois pontos distintos, A e B, existem um ponto C entre A e B e um ponto D tal que B está entre A e D.

Axioma 6 (Separação do plano). Uma reta r determina somente dois semiplanos distintos, cuja interseção é a própria reta r.

3. Axiomas de Continuidade

Axioma 7. A cada segmento AB está associado um único número real positivo, e ao segmento nulo está associado o número zero.

Axioma 8. Se um ponto C está entre dois pontos A e B então $AB = AC + CB$.

Axioma 9. A todo número real positivo fica associado um segmento, cuja medida é igual ao número dado, sendo que ao número zero fica associado o segmento nulo.

Axioma 10 (Transporte de segmento). Fixado um segmento arbitrário AB, para qualquer segmento CD, existe um único ponto E pertencente à semirreta SCD tal que $AB = CE$.

Axioma 11. A todo ângulo está associado um único número real positivo. Este número é zero se, e somente se, o ângulo é constituído por duas semirretas coincidentes. O número dado pelo Axioma 11 é chamado de medida do ângulo.

Axioma 12. Dado um número real $r > 0$, é possível colocar em correspondência biunívoca os números reais entre 0 e r e as semirretas de mesma origem que dividem um dado semiplano, de modo que a diferença entres estes números seja a medida do ângulo formado pelas semirretas correspondentes. Aos ângulos raso e nulo ficam associados os números r e zero, respectivamente, e reciprocamente.

Axioma 13. Se uma semirreta S_{OC} divide um ângulo \widehat{AOB} , então

$$\widehat{AOB} = \widehat{AOC} + \widehat{COB}.$$

4. Axiomas de Congruência.

Axioma 14. Esse axioma é o caso *LAL* de congruência de triângulos, o qual está enunciado no próximo capítulo.

5. Axioma das Paralelas.

Axioma 15. Seja l uma reta e A um ponto não em l . Então existe no máximo uma reta no plano que passa por A e não intercepta l .

Assim a geometria neutra é aquela que pode ser desenvolvida com os quatro primeiros grupos de axiomas.

É devido a essa importância da Geometria Neutra que neste trabalho iremos apresentar e demonstrar os casos de congruência de quadriláteros com os axiomas da Geometria Neutra. E no final apresentaremos uma proposta de atividades para alunos do nono ano e/ou ensino médio.

Repare que a geometria elíptica não é Geometria Neutra, uma vez que as retas são os grandes círculos e, portanto os axiomas de ordem propostos por Hilbert não são válidos.

Dizemos que dois quadriláteros são congruentes se 4 lados correspondentes e 4 ângulos interiores correspondentes tem a mesma medida, assim há um total de 8 informações sobre as medidas dos quadriláteros. Já sabemos e iremos demonstrar no capítulo 1 que, no caso de congruência de triângulos, existem 6 informações (3 lados e 3 ângulos), mas conseguimos garantir a congruência com três elementos (casos de congruência *LAL*, *ALA* e *LLL*).

No caso dos quadriláteros, 4 informações sobre medidas correspondentemente iguais são insuficientes para garantir a congruência. De fato, apresentaremos contraexemplos nesses casos. Consequentemente, 3 medidas correspondentemente iguais também são insuficientes para implicar a congruência de quadriláteros.

Estendendo o conceito de congruência de quadriláteros para polígonos de n lados temos a seguinte definição:

Definição: *Dois polígonos de n lados são congruentes se n lados correspondentes e n ângulos interiores correspondentes tem a mesma medida.*

Assim há um total de $2n$ informações sobre as medidas dos polígonos com n lados.

No capítulo 1 estão os casos de congruência de triângulos, que são de grande importância para a demonstração de dois casos gerais de congruência de polígonos do capítulo 2 e também são usados nas demonstrações dos casos de congruência de quadriláteros do capítulo 3. Encerramos o capítulo 4 com uma proposta de atividade voltada para o nono ano e ensino médio com o tema: Congruência de Quadriláteros.

Os casos de congruência de quadrilátero em geometria neutra, motivação deste trabalho, foi baseado no capítulo 4 do livro de [MM] Marvey, Matthew. - Geometry Illuminated an Illustrated Introduction to Euclidean & non-Euclidean Geometry. Disponível em <http://www.mcs.uvawise.edu/msh3e/resources/geometryBook/illuminationNeutralGeometry.pdf>

Como vamos ver ao longo do trabalho, este tema é uma ótima alternativa para professores do ensino básico para trabalhar congruência.

CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS

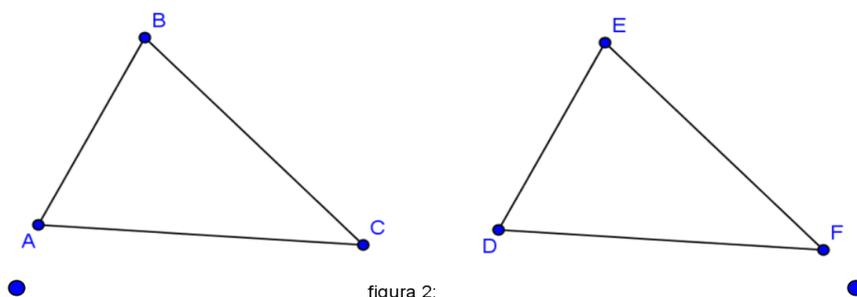
Neste capítulo iremos demonstrar os casos de congruência de triângulos. Como não iremos usar o axioma das paralelas, todas as demonstrações são validas em Geometria Neutra. Algumas demonstrações ficam mais fáceis em geometria Euclidiana. Os casos de congruência de triângulos são ferramentas muito eficiente na demonstração de alguns teoremas da geometria. Porém há a necessidade de um caso ser considerado um axioma e daí conseguimos demonstrar os outros casos.

2.1 Definição. Dizemos que dois segmentos AB e CD são congruentes se ambos têm a mesma medida. Dizemos que dois ângulos \hat{A} e \hat{B} são congruentes se ambos têm a mesma medida. No primeiro caso denotamos $AB \cong CD$ e no segundo $\hat{A} \cong \hat{B}$. Quando necessário usaremos a notação $\sphericalangle ACB$ para representar o ângulo com vértice C e laterais as semirretas com origem C e passando por A e B , respectivamente, sendo $\sphericalangle ACB$ o menor ângulo do plano.

Como conseqüências da Definição 2.1, temos que um segmento é sempre congruente a ele mesmo e se $AB = CD$ e $CD = EF$ então $AB = EF$. Valem conseqüências análogas para ângulos.

Agora que já definimos congruência de segmentos e de ângulos, podemos definir congruência de triângulos.

2.2 Definição. Dados dois triângulos ABC e DEF , eles são ditos congruentes se existir uma correspondência biunívoca entre seus vértices de maneira que lados e ângulos correspondentes sejam congruentes.



Se $AB \cong DE, BC \cong EF, AC \cong DF, \hat{A} \cong \hat{D}, \hat{B} \cong \hat{E}$ e $\hat{C} \cong \hat{D}$, então os triângulos são congruentes.

Observamos que no livro Elementos de Euclides este axioma não aparece e Euclides usava frequentemente em suas provas que dois triângulos são iguais se conseguirmos sobrepor um no outro perfeitamente através de rotações, translações e reflexões. Euclides também usava que quando dois triângulos são sobrepostos de modo que dois de seus lados e o ângulo entre eles coincidam, então eles eram iguais. Desta forma, mesmo sem enunciar este axioma, usava este resultado como verdadeiro, visto que a definição de congruência que fizemos acima é equivalente a que Euclides usava.

Como dito no início deste capítulo, iremos supor um caso de congruência como verdadeiro (um axioma), o caso *LAL*, justamente o caso que Euclides usava como verdadeiro.

2.3 Axioma: *Dados dois triângulos ABC e DEF , se $AB \cong DE, AC \cong DF$ e $\hat{A} \cong \hat{D}$ então $ABC \cong DEF$.*

Este resultado é conhecido como caso *LAL* de congruência de triângulos.

Uma pergunta natural é se este deve ser de fato um axioma ou se poderia ser provado a partir dos outros postulados. O exemplo da Geometria do Taxista nos mostra que de fato ele não é verdadeiro sempre. A Geometria do Taxista é um modelo de Geometria plana onde o espaço total é o plano \mathbb{R}^2 , munido da seguinte função distância: $\forall A = (x, y), B = (z, w)$, a distância $D(A, B)$ é dada por:

$$D(A, B) = |x - z| + |y - w|$$

Neste modelo, temos que os triângulos DEF e IJK na figura abaixo tem os lados $DE \cong EF \cong IJ \cong JK$ e todos têm medida 4. Repare que $\hat{E} \cong \hat{J}$ e são retos. Porém, os triângulos não são congruentes, pois as hipotenusas têm medidas 4 e 8.

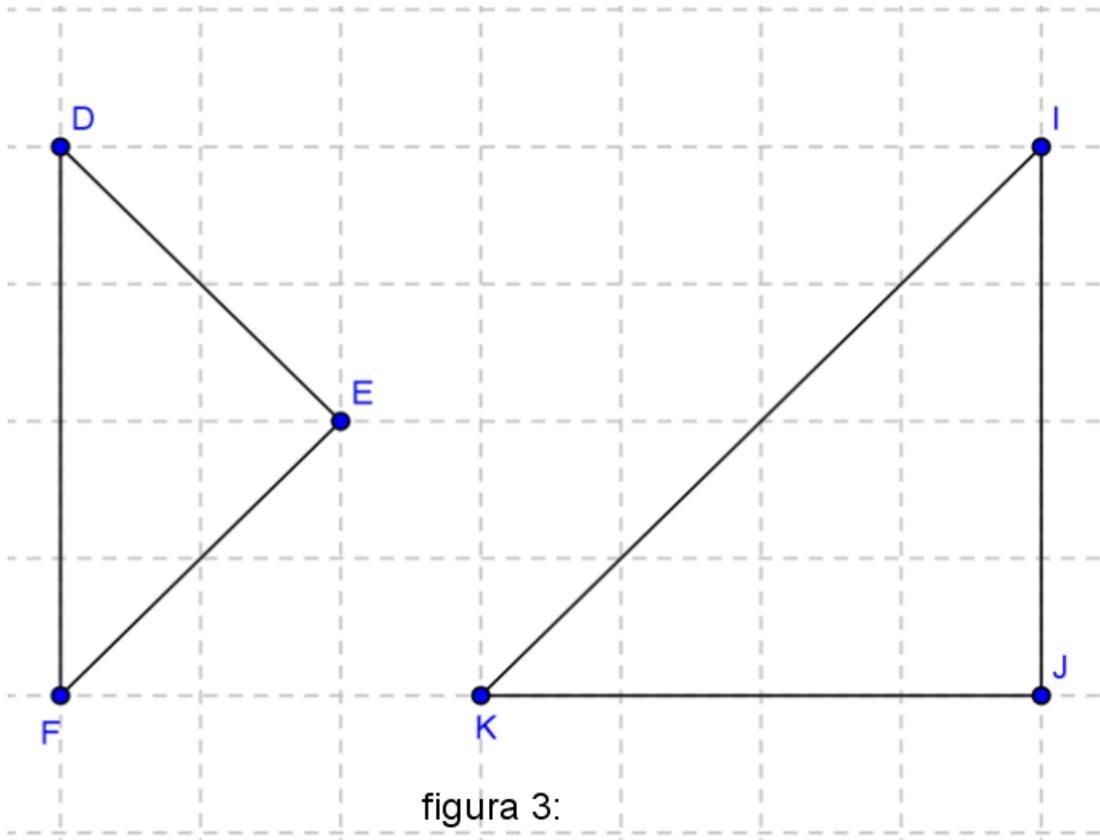
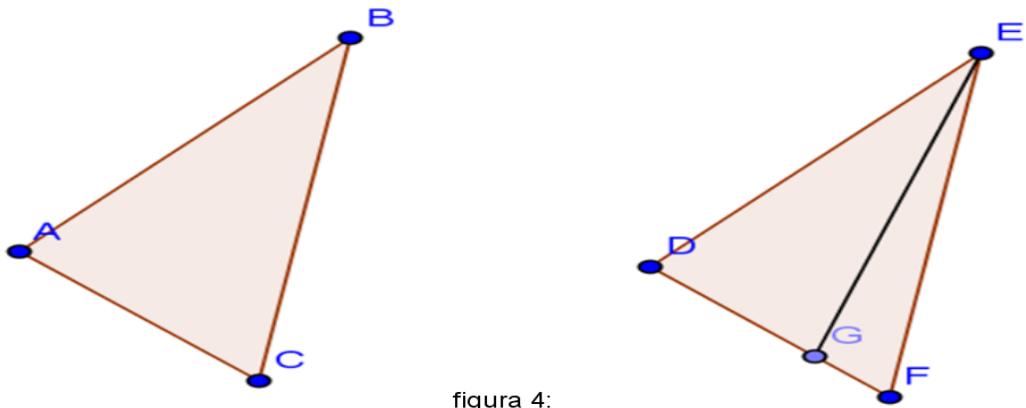


figura 3:

Com este axioma *LAL* conseguimos provar outros casos de congruência. O primeiro que iremos demonstrar é o caso *ALA*, que ocorre quando temos dois triângulos e conseguimos sobrepor dois ângulos e o lado subentendido por eles. Abaixo segue a prova deste caso.

2.4 Teorema. (Caso *ALA* de congruência): *Sejam dados dois triângulos ABC e DEF, se $\hat{A} \cong \hat{D}, \hat{B} \cong \hat{E}$, e $AB \cong DE$ então $ABC \cong DEF$.*

Demonstração:



Sejam ABC e DEF triângulos com as hipóteses do teorema. Se $AC \cong DF$ o axioma 2.3 garante que os triângulos ABC e DEF são congruentes. Suponha agora $AC < DF$, o caso contrário é análogo. Marque um ponto G interior do segmento DF de modo que $AC \cong DG$. Assim pelo caso LAL os triângulos ABC e DEG são congruentes e dessa congruência temos que $\angle ABC \cong \angle DEG$, mas por hipótese temos $\angle ABC \cong \angle DEF$ e, portanto $\angle DEF \cong \angle DEG$ desta maneira os pontos F e G coincidem contradizendo o fato que G está no interior de DF .

2.5 Definição. Um triângulo é chamado de isósceles se ele possui dois lados congruentes; o terceiro lado não necessariamente congruente é chamado de base deste triângulo.

Para demonstrarmos o terceiro caso de congruência de triângulos, necessitamos de um resultado referente a triângulos isósceles.

2.6 Proposição. Um triângulo é isósceles se, somente se, os dois ângulos da base são congruentes.

Demonstração: Suponha inicialmente ABC isósceles com $AB \cong AC$. Devemos provar que $\hat{B} \cong \hat{C}$. Para isso considere uma “cópia” do triângulo ABC , isto é, um triângulo EFG congruente a ABC , com eles temos:

$$EF \cong AB$$

$$EG \cong AC$$

$$\hat{B} \cong \hat{F}$$

$$\hat{C} \cong \hat{G}$$

$$\hat{A} \cong \hat{E}$$

Observe os triângulos ABC e EGF são congruentes por LAL , de fato: $AB \cong AC \cong EG$, $AC \cong AB \cong EF$ e $\hat{A} \cong \hat{E}$ daí pelo axioma (2.3) eles são congruentes. E dessa congruência temos que $\hat{B} \cong \hat{G}$ e $\hat{C} \cong \hat{F}$, como na primeira congruência tínhamos $\hat{B} \cong \hat{F}$ e $\hat{C} \cong \hat{G}$ podemos concluir que $\hat{B} \cong \hat{C}$.

Agora suponha um triângulo ABC onde $\hat{B} \cong \hat{C}$, devemos mostrar que ele é isósceles com $AB \cong AC$.

Considere um triângulo EFG congruente ao triângulo ABC . Dessa congruência temos: $AB \cong EF$, $AC \cong EG$, $BC \cong FG$, $\hat{B} \cong \hat{F}$ e $\hat{C} \cong \hat{G}$. Mas os triângulos ABC e EGF também são congruentes por ALA , pois $\hat{B} \cong \hat{C} \cong \hat{G}$, $BC \cong FG$ e $\hat{C} \cong \hat{B} \cong \hat{F}$ e dessa congruência podemos concluir que $AB \cong EG$ e $AC \cong EF$, como na primeira congruência tínhamos que $AB \cong EF$ e $AC \cong EG$ concluímos que $AB \cong AC$ sendo o triângulo ABC isósceles de base BC .

Essa proposição será útil para o teorema que segue abaixo, que é o terceiro caso de congruência envolvendo a hipótese sobre os 3 lados.

2.7 Teorema. (Caso LLL de congruência) *Se dois triângulos tem três lados correspondentes congruentes, então os triângulos também são congruentes.*

Demonstração:

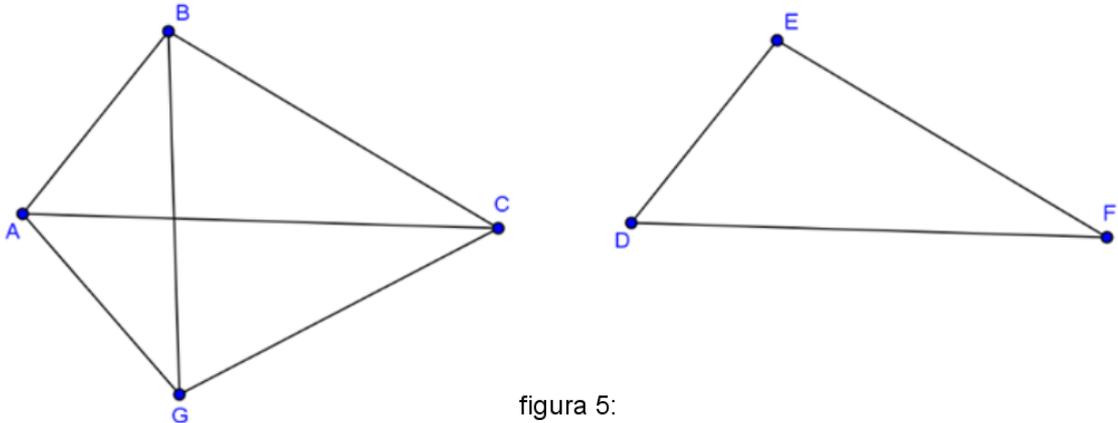


figura 5:

Considere os triângulos ABC e DEF tais que, $AB \cong DE$, $BC \cong EF$ e $AC \cong DF$. Essa demonstração requer uma construção. Marcamos o ponto G no semiplano determinado pela reta AC que não contém o vértice B do triângulo ABC de modo que $\angle CAG \cong \angle EDF$ e $AG = DE$, assim os triângulos ACG e DFE são congruentes por LAL , pois $AC \cong DE$ (por hipótese), $\angle CAG \cong \angle EDF$ e $AG = DE$ (os dois últimos por construção). Agora vamos mostrar que $ABC \cong AGC$. Para isso ligue os vértices B e G , como $AG \cong DE \cong AB$ e $GC \cong EF \cong BC$ os triângulos ABG e CBG são isósceles de base comum BG , daí segue da proposição (2.6) as congruências $\angle ABG \cong \angle AGB$ e $\angle CBG \cong \angle CGB$ onde podemos concluir que $\angle ABC \cong \angle AGC$, visto que $\angle ABC = \angle ABG + \angle GBC$ e $\angle AGC = \angle AGB + \angle BGC$, por outro lado já sabemos que $AG \cong DE \cong AB$ e $GC \cong EF \cong BC$ assim os triângulos ABC e AGC são congruentes por LAL . Como os triângulos DEF e AGC são congruentes, segue que ABC e DEF são triângulos congruentes.

Existem outras duas possíveis construções que nos levam ao mesmo resultado final, uma delas é apresentada na figura a seguir:

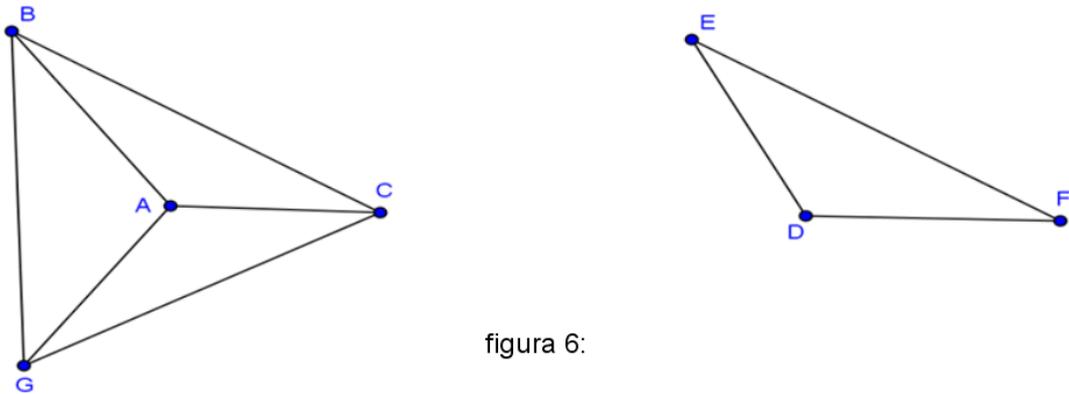


figura 6:

A demonstração é bem análoga, mudando apenas uma passagem em que aparece uma soma de ângulos por uma diferença, de fato:

Considere os triângulos ABC e DEF tais que, $AB \cong DE$, $BC \cong EF$ e $AC \cong DF$. Essa demonstração requer uma construção. Marcamos o ponto G no semiplano determinado pela reta AC e oposto ao vértice B do triângulo ABC de modo que $\angle CAG \cong \angle EDF$ e $AG = DE$, assim os triângulos ACG e DFE são congruentes por LAL , pois $AC \cong DF$ (por hipótese), $\angle CAG \cong \angle EDF$ e $AG = DE$ (os dois últimos por construção). Agora vamos mostrar que $ABC \cong AGC$. Para isso ligue os vértices B e G , como $AG \cong DE \cong AB$ e $GC \cong EF \cong BC$ os triângulos ABG e CBG são isósceles de base comum BG , daí segue da proposição (2.6) as congruências $\angle ABG \cong \angle AGB$ e $\angle CBG \cong \angle CGB$ onde podemos concluir que $\angle ABC \cong \angle AGC$, visto que $\angle ABC = \angle CBG - \angle ABG$ e $\angle AGC = \angle BGC - \angle AGB$, por outro lado já sabemos que $AG \cong DE \cong AB$ e $GC \cong EF \cong BC$ assim os triângulos ABC e AGC são congruentes por LAL . Como os triângulos DEF e AGC são congruentes, segue que ABC e DEF são triângulos congruentes.

Outro caso a se considerar é quando o ponto G pertence à reta AB . Como na figura abaixo.

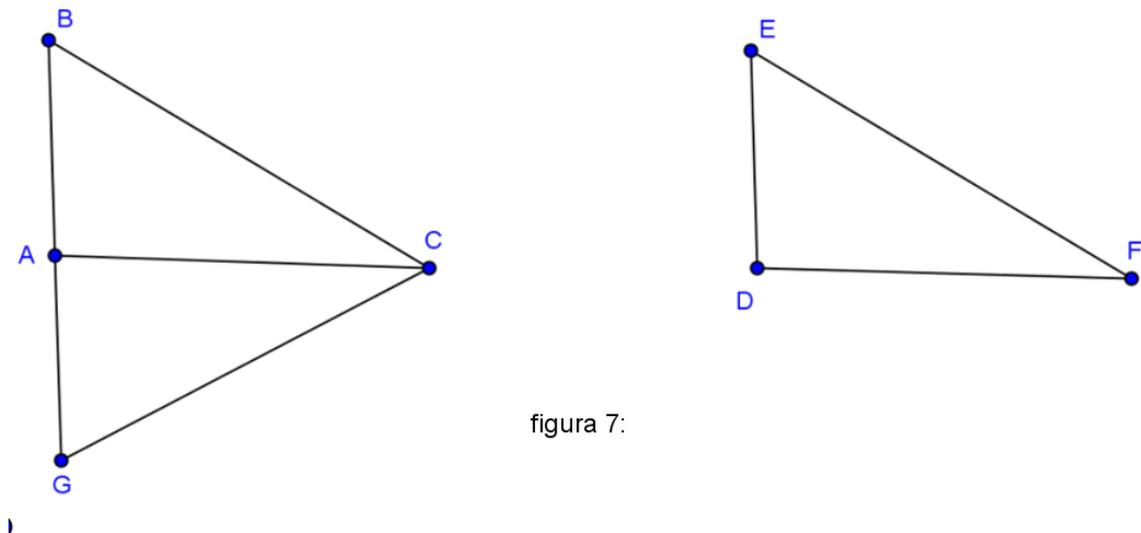


figura 7:

Nos 3 casos a argumentação é bem parecida. Neste caso temos os triângulos ABC e DEF tais que, $AB \cong DE$, $BC \cong EF$ e $AC \cong DF$. Marcamos o ponto G no semiplano determinado pela reta AC e oposto ao vértice B do triângulo ABC de modo que $\angle CAG \cong \angle EDF$ e $AG = DE$, assim os triângulos ACG e DFE são congruentes por LAL , pois $AC \cong DF$ (por hipótese), $\angle CAG \cong \angle EDF$ e $AG = DE$ (os dois últimos por construção). Agora vamos mostrar que $ABC \cong AGC$. Para isso ligue os vértices B e G , lembrando que aqui os pontos A, B e G estão alinhados, como $GC \cong EF \cong BC$ o triângulo CBG é isósceles de base BG , daí segue da proposição (2.6) a congruência $\angle ABC \cong \angle AGC$, por outro lado já sabemos que $AG \cong DE \cong AB$ e $GC \cong EF \cong BC$ assim os triângulos ABC e AGC são congruentes por LAL . Como os triângulos DEF e AGC são congruentes, segue que ABC e DEF são triângulos congruentes.

2.8 Definição. *Dois ângulos são suplementares se a soma das medidas dos dois é igual a 180° e os ângulos $\angle BAC$, $\angle ACB$ e $\angle ABC$ são ângulos chamados de internos do triângulo. O ângulo externo localizado no vértice A é o suplemento do ângulo $\angle BAC$.*

Abaixo iremos provar o Teorema do Ângulo Externo, que é fundamental nas proposições que se seguem.

2.9 Teorema (do Ângulo Externo). *Um ângulo externo de um triângulo é maior que qualquer um dos dois ângulos internos não adjacentes a ele.*

Demonstração: Dado um triângulo ABC seja D um ponto da reta AC tal que o ponto A fique entre C e D . Devemos mostrar que $\angle DAB$ é maior que $\angle ACB$ e maior também que $\angle ABC$.

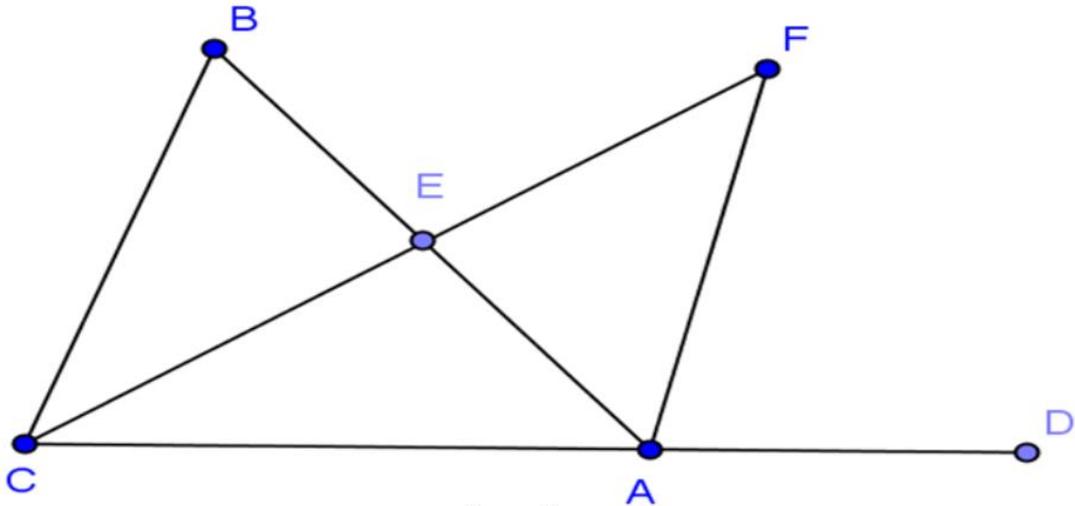


figura 8:

Vamos provar que $\angle DAB$ é maior que $\angle ABC$. Para isso seja o ponto E médio de AB e o ponto F pertencente à reta CE , tal que $CE \cong EF$ e $C \neq F$. Assim, pelo axioma (2.3), os triângulos BCE e AFE são congruentes, pois $BE \cong EA$ (ponto médio) $CE \cong EF$ (por construção) e $\angle BEC \cong \angle FEA$ (opostos pelo vértice). Desta maneira $\angle ABC \cong \angle EAF$ e como o segmento AF é interno ao ângulo $\angle DAB$ temos que $\angle EAF$ é menor que $\angle DAB$, mas $\angle ABC \cong \angle EAF$ daí temos que $\angle ABC$ é menor que $\angle DAB$.

Observe que o ponto F na demonstração acima é interior ao ângulo $\angle BAD$, pois a reta AB determina dois semiplanos, F está no semiplano oposto ao ponto C por construção. A reta CAD determina dois semiplanos, F está no mesmo semiplano do ponto E , caso contrário o segmento EF cortaria a reta CAD e os pontos C, E e F não estariam alinhados. Assim o ponto F pertence ao interior do ângulo $\angle BAD$.

Para provarmos que $\angle DAB$ é maior que $\angle ACB$ a construção é análoga. Devemos marcar o ponto E médio de AC e o ponto D deve ficar na reta AB de modo que A fique entre B e D .

2.10 Proposição. *A soma das medidas de dois ângulos internos de um triângulo é sempre menor que 180° .*

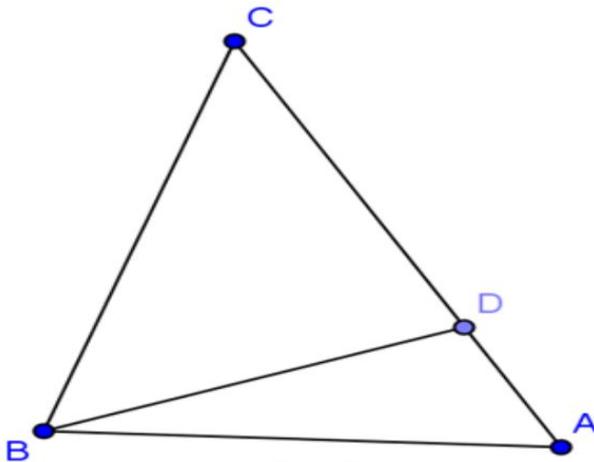
Demonstração: Dado um triângulo ABC , vamos mostrar que $\hat{A} + \hat{B} < 180^\circ$. Seja α a medida do ângulo externo com vértice em A . Então por (2.9) e pelo fato de \hat{A} e α serem suplementares temos que $\hat{B} < \alpha$ e $\alpha + \hat{A} = 180^\circ$, somando \hat{A} nos dois lados da inequação temos $\hat{A} + \hat{B} < \alpha + \hat{A} = 180^\circ$.

Essa proposição nos diz que em qualquer triângulo temos no máximo um ângulo reto assim como no máximo um ângulo obtuso.

A proposição abaixo compara medidas de lados e medidas de ângulos e as posições destes lados e ângulos no triângulo.

2.11 Proposição. *Se dois lados de um triângulo têm medidas diferentes então os ângulos opostos a cada um desses lados também são diferentes e o maior ângulo fica oposto ao maior lado.*

Demonstração: A primeira parte é consequência direta da Proposição (2.6). Devemos mostrar então que o maior lado é oposto ao maior ângulo. Considere um triângulo ABC em que $BC < AC$ assim devemos concluir que $\angle BAC$ é menor que $\angle CBA$. Para isso tomemos um ponto D sobre o segmento AC de modo que $CD \cong CB$.



Temos que $\angle CBD \cong \angle CDB$, pois por construção o triângulo BCD é isósceles. Como BD divide o ângulo $\angle ABC$ temos que $\angle CBD$ é menor que $\angle CBA$. Por outro lado $\angle CDB$ é externo do triângulo ABD , assim por (2.9) temos $\angle CDB$ é maior que $\angle CAB$. Como $\angle CBD \cong \angle CDB$, segue que $\angle CBD$ é maior que $\angle CAB$. Essa informação

junto com o fato de $\angle CBD$ ser menor que $\angle CBA$ nos dá o que queríamos mostrar, que $\angle BAC$ é menor que $\angle CBA$.

A próxima proposição é de fundamental importância na demonstração do último caso de congruência de quadriláteros que veremos no próximo capítulo.

2.12 Proposição. *Dado uma reta s e um ponto P fora da reta, existe uma única reta r perpendicular à s passando por P e, chamando o ponto de intersecção de s e r de Q , temos que o ponto Q está mais próximo de P do que qualquer outro ponto de s .*

Demonstração:

Parte 1. Inicialmente iremos mostrar que existe uma reta r com as propriedades desejadas. Para isso considere a reta s e o ponto P fora dela e tome um ponto B pertencente à reta s . Se PB for perpendicular à reta s já teremos achado uma reta perpendicular a s passando por P . Caso contrário marque o ponto P' no semi plano oposto ao que contém o ponto P , de modo que: $BP \cong BP'$ e os ângulos agudos que BP e BP' formam com a reta s sejam congruentes. Seja Q o ponto de intersecção de PP' com a reta s . Assim pelo axioma (2.3) os triângulos BQP e BQP' são congruentes. Desta congruência temos que os ângulos suplementares $\angle BQP$ e $\angle BQP'$ são congruentes e, portanto cada um mede um ângulo reto.

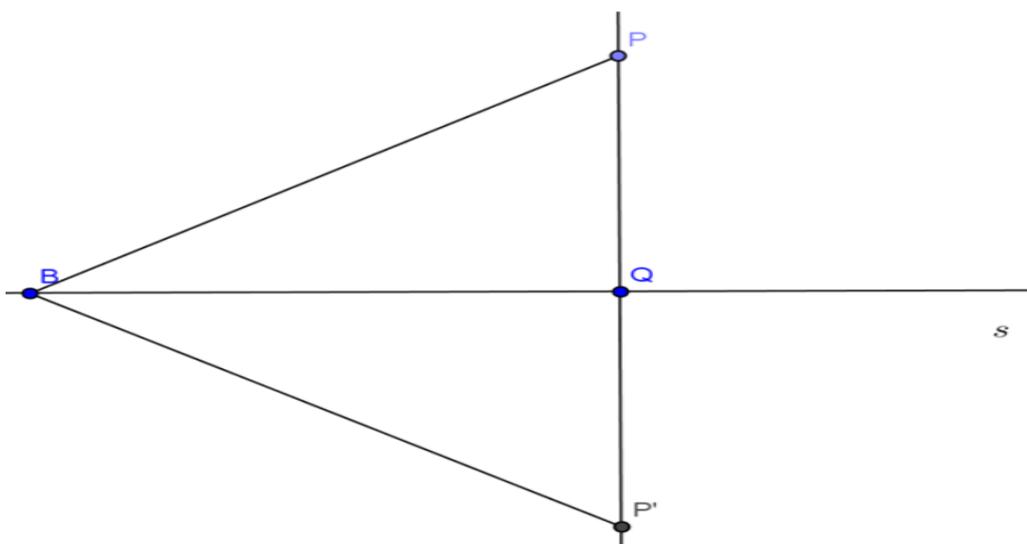
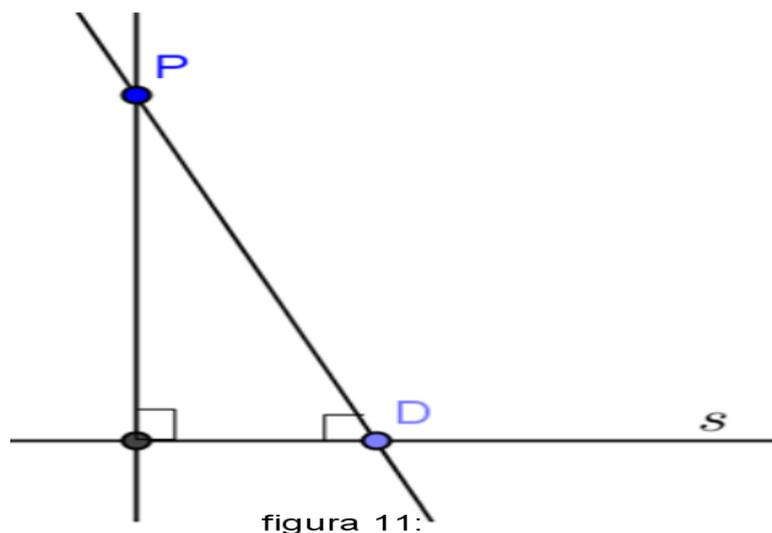


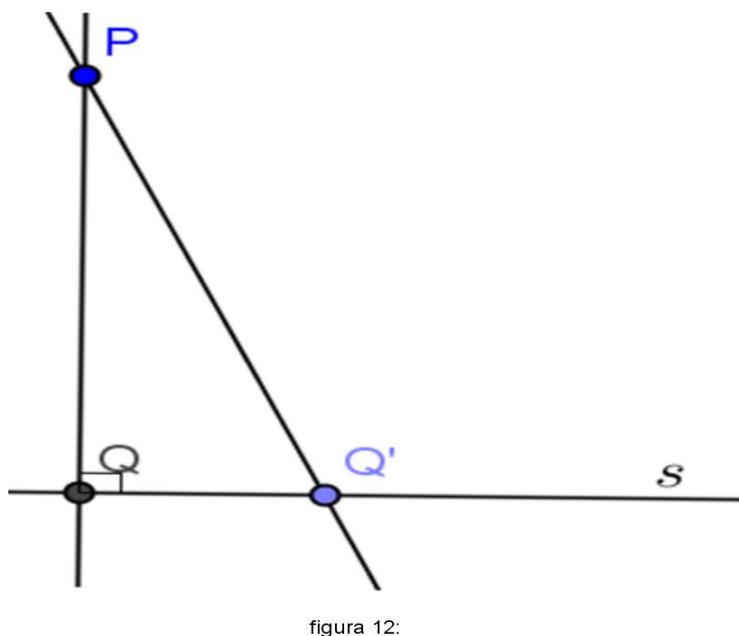
figura 10:

Parte 2. Agora devemos mostrar que a reta PP' acima é única. Suponha que pelo ponto P passe duas retas perpendiculares a reta s como mostra a figura a seguir.



Desse modo teríamos um triângulo dois ângulos retos, o que por (2.10) é um absurdo. Portanto reta PP' é única e a chamamos de reta r no enunciado da proposição.

Parte 3. Agora temos que mostrar que o ponto Q está mais próximo de P do que qualquer outro ponto da reta s .



Para isso suponha que existe um ponto Q' pertencente à reta s de modo que $PQ' < PQ$. Como o triângulo PQQ' tem um ângulo reto em Q , sabemos por (2.10) que cada um dos outros dois ângulos do triângulo medem menos que um ângulo reto, assim temos que o triângulo PQQ' não é isósceles de base QQ' sendo $PQ \neq PQ'$. Desta forma temos por (2.11) que PQ' é o maior lado do triângulo, por ficar oposto ao maior ângulo do triângulo. Contradição.

2.13 Definição: Um triângulo é chamado de triângulo retângulo quando um de seus ângulos internos for igual a um ângulo reto. O lado oposto ao ângulo reto chama se hipotenusa e os outros dois lados são chamados de catetos.

Iremos demonstrar a seguir um caso particular de congruência de triângulos. É o caso de congruência entre dois triângulos retângulos que possuem hipotenusa e um cateto congruentes. Repare que a demonstração não usará como argumento o teorema de Pitágoras e nem o fato da soma dos ângulos internos ser igual a 180° , vamos lembrar que as proposições e teorema estão sendo feitos em um ambiente de geometria neutra, ou seja, não estamos admitindo como verdade o 5º postulado de Euclides.

2.14 Proposição. Se dois triângulos retângulos ABC e $A'B'C'$ com ângulos retos em A e A' , têm hipotenusas $BC \cong B'C'$ e catetos $AB \cong A'B'$, então eles são congruentes.

Demonstração: Se $AC \cong A'C'$ então os triângulos são congruentes por (2.7). Caso contrário, suponha $AC > A'C'$, seja o ponto D sobre o lado AC de modo que $AD \cong A'C'$. Desta forma os triângulos ADB e $A'C'B'$ são congruentes pelo axioma (1.3), visto que $AB \cong A'B'$, $\hat{A} \cong \hat{A}'$ e $AD \cong A'C'$. Assim temos que $BD \cong B'C' \cong BC$, repare que o triângulo BDC é isósceles de base CD e conseqüentemente ângulos $\angle BDC$ e $\angle DCB$ são congruentes. O ângulo $\angle BDC$ é externo do triângulo ADB , assim por (2.9) ele vale mais que um reto, desta forma o triângulo isósceles BDC teria dois ângulos maiores que um reto, o que por (2.10) é um absurdo. Assim provamos que AC não é maior que $A'C'$. Analogamente podemos provar que AC não é menor que $A'C'$, portanto só resta $AC \cong A'C'$.

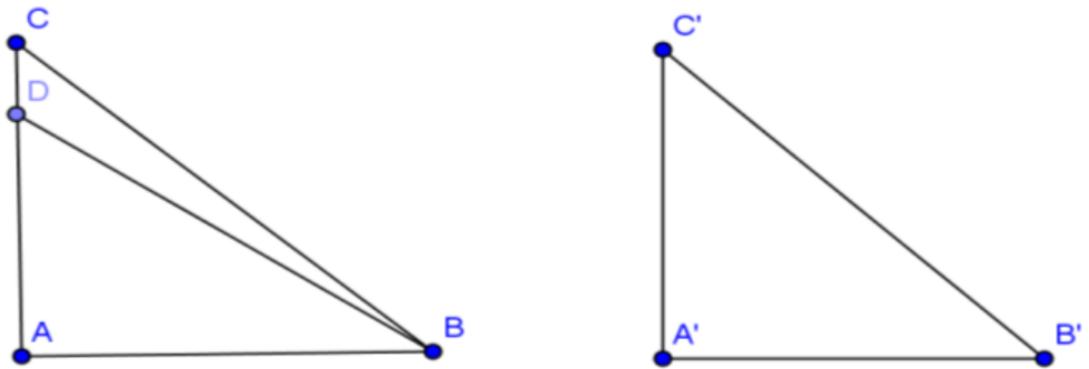


figura 13:

2.15 **Teorema.** (Caso AAL_0 de congruência) *Se dois triângulos ABC e DEF tem as seguintes congruências: $\hat{A} \cong \hat{D}$, $\hat{B} \cong \hat{E}$ e $AC \cong DF$ então eles são congruentes.*

Demonstração:

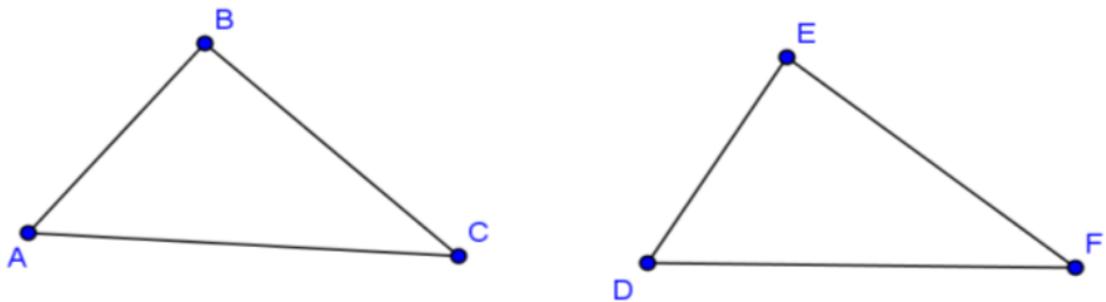


figura 14:

Em relação aos lados AB e DE temos 3 possibilidades:

$$AB < DE \text{ ou } AB > DE \text{ ou } AB \cong DE$$

suponha que $AB < DE$, então podemos marcar um ponto G sobre o lado DE de modo que se tenha $AB \cong DG$ e assim por LAL temos a congruência dos triângulos ABC e DGF . Desta forma temos as congruências: $\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle DGF \cong \sphericalangle GEF$ o que é um

absurdo, pois $\angle DGF$ é ângulo externo do triângulo GEF e, portanto deve ser maior que o ângulo $\angle GEF$.

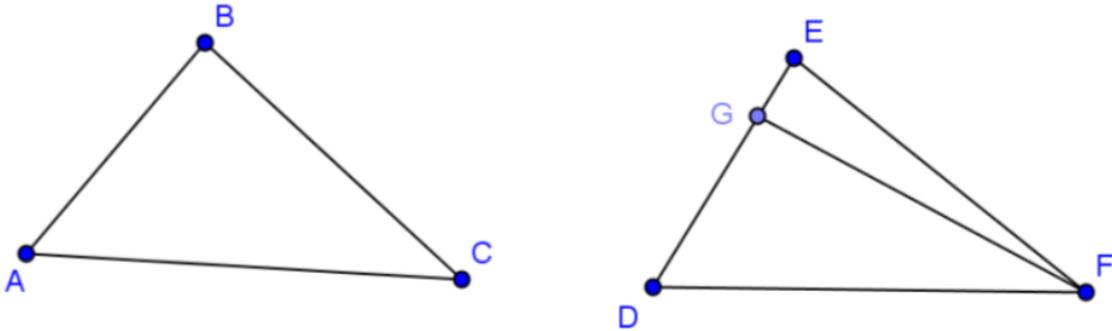


figura 15:

suponha que $AB > DE$, então podemos marcar um ponto G sobre o prolongamento do lado DE de modo que se tenha $AB \cong DG$ e assim por LAL temos a congruência dos triângulos ABC e DGF . Desta forma temos as congruências: $\angle ABC \cong \angle DGF \cong \angle DEF$ o que é um absurdo, pois $\angle DEF$ é ângulo externo do triângulo GEF e, portanto deve ser maior que o ângulo $\angle DGF$.

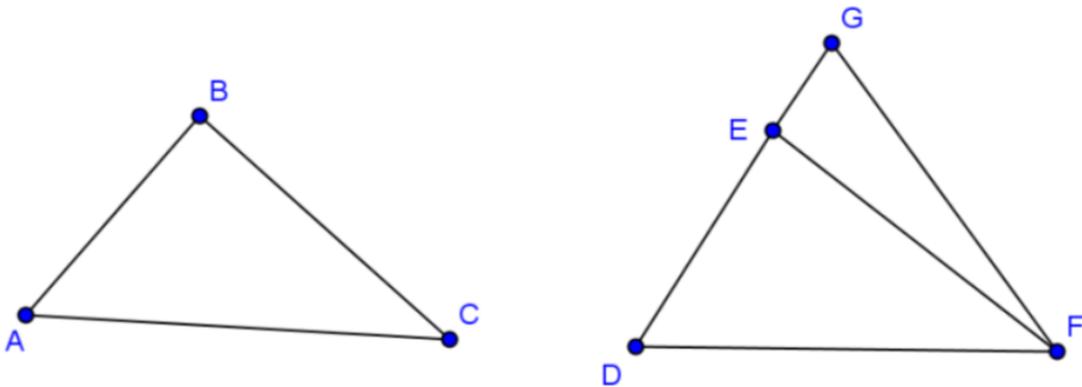


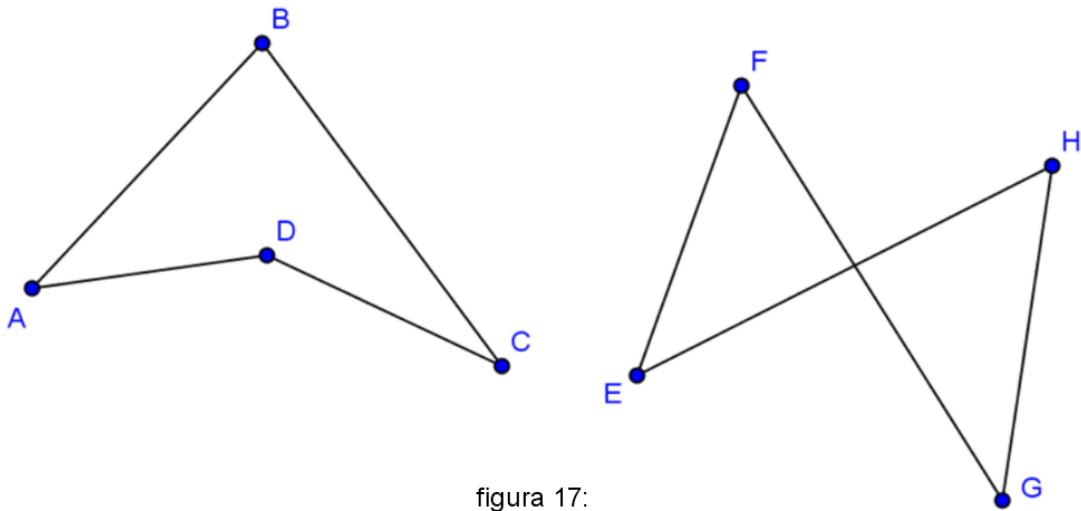
figura 16:

CONGRUÊNCIA DE POLÍGONOS: DOIS CASOS GERAIS

Neste capítulo iremos demonstrar dois casos de congruência que valem para polígonos de n lados, estes casos envolvem congruências alternadas de lados e ângulos ou ângulos e lados. A prova será por indução e usaremos os casos de congruência de triângulos já demonstrados.

Primeiro uma definição sobre polígonos.

Definição: Um polígono é dito simples quando não há intersecções entre seus lados, exceto intersecção de dois lados consecutivos em um vértice do polígono.



Na figura acima temos que $ABCD$ é quadrilátero simples e $EFGH$ é quadrilátero não simples.

Proposição: Dados dois polígonos simples de n lados, então os dois casos abaixo de congruência são sempre válidos:

- 1) LALAL ... LAL com $2n - 3$ congruências.
- 2) ALALA ... ALA com $2n - 3$ congruência.

Vale lembrar que se os polígonos têm n lados então há $2n$ congruências, ou seja, n lados e n ângulos congruentes.

Demonstração: Vamos fazer a demonstração por indução. Inicialmente vamos verificar o caso 1, que se dá obviamente com $n = 3$. Com esse valor de n temos os casos LAL e ALA . O primeiro já foi postulado e o segundo demonstrado no capítulo anterior. Usando $n = 3$ na expressão $2n - 3$ temos 3 como resultado. Portanto o caso 1 é válido. A demonstração que segue abaixo necessita que $n \geq 5$, quando $n = 4$ os casos $LALAL$ e $ALALA$ estão demonstrados no próximo capítulo.

Agora vamos supor que dados dois polígonos simples de n lados onde se tenha as congruências

$LALAL \dots LAL$ com $2n - 3$ congruências ou $ALALA \dots ALA$ com $2n - 3$ congruência, sejam sempre congruentes.

Assim devemos mostrar que dados dois polígonos simples de $(n + 1)$ lados onde se tenha as congruências

$LALAL \dots LAL$ com $2n - 1$ congruências ou $ALALA \dots ALA$ com $2n - 1$ congruências, sejam sempre congruentes. Vamos chamá-los de $pol\ 1$ e $pol\ 2$.

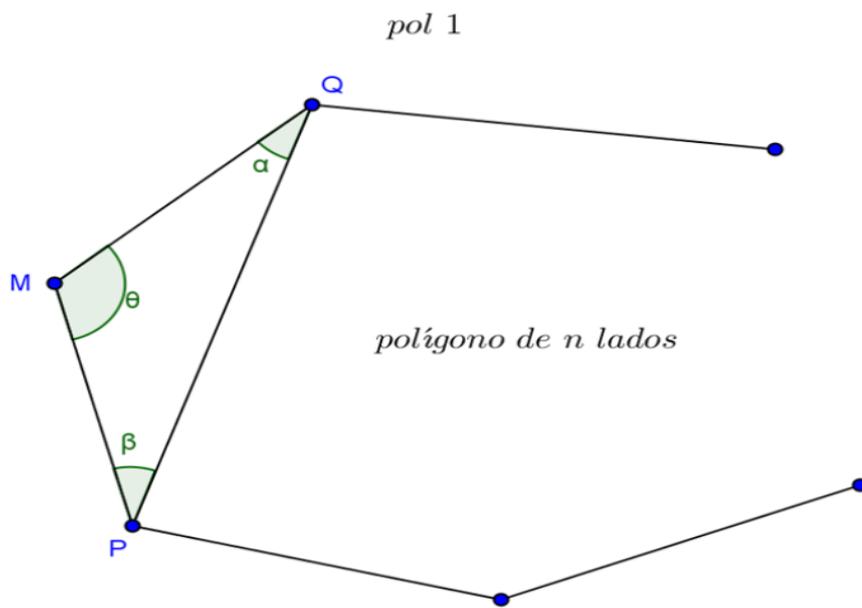


figura 18:

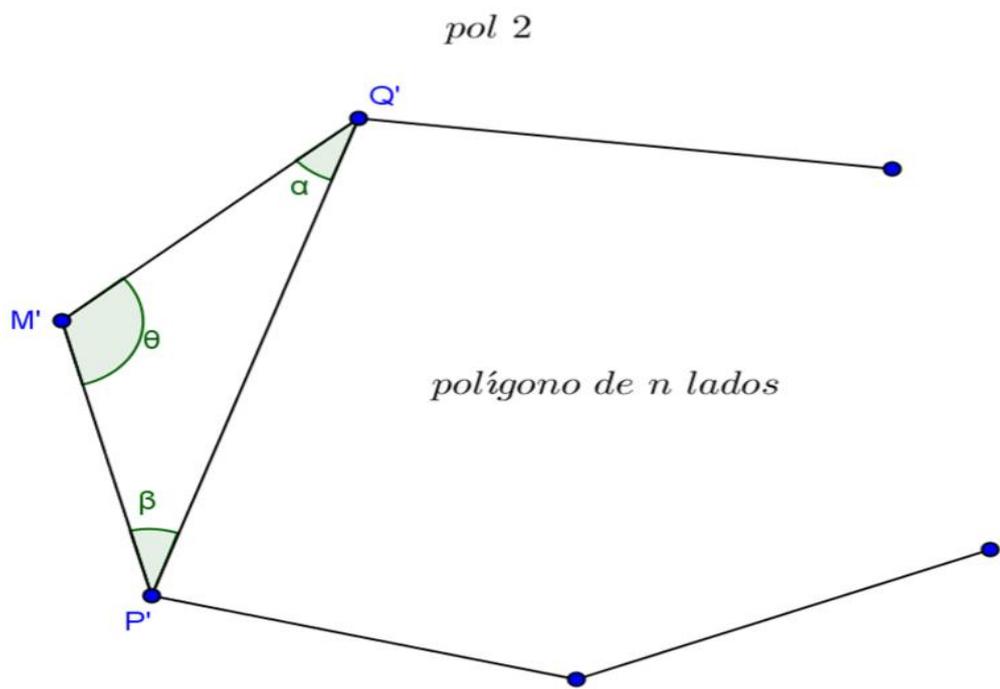


figura 19:

Como $n \geq 5$ é possível escolhermos um vértice M do $pol\ 1$ e seus dois vértices adjacentes P e Q , e no $pol\ 2$, localizamos os correspondentes M', P' e Q' de modo que se tenha, por hipótese, as congruências: $QM \cong Q'M'$, $PM \cong P'M'$, $\widehat{M} \cong \widehat{M'}$, $\widehat{Q} \cong \widehat{Q'}$ e $\widehat{P} \cong \widehat{P'}$ e portanto, por LAL , os triângulos PQM e $P'Q'M'$ são congruentes, fazendo com que $PQ \cong P'Q'$.

Os dois polígonos de n lados obtidos ao retirarmos dos $pol\ 1$ e $pol\ 2$ os triângulos PQM e $P'Q'M'$, são congruentes. De fato, pois tínhamos por hipótese que $\widehat{Q} \cong \widehat{Q'}$ e como os triângulos PQM e $P'Q'M'$ são congruentes os novos ângulos \widehat{Q} e $\widehat{Q'}$, dos polígonos de n lados também são congruentes. Analogamente os novos ângulos \widehat{P} e $\widehat{P'}$ também são congruentes.

Como já vimos $PQ \cong P'Q'$, daí concluímos que os polígonos de n lados satisfazem as congruências $LALAL \dots LAL$ com $2n - 3$ congruências e $ALALA \dots ALA$ com $2n - 3$ congruência, visto que retiramos dois lados e um ângulo (PM, QM e \widehat{M}) e acrescentamos um lado (PQ). Assim por hipótese de indução os polígonos de n lados são congruentes e portanto os $pol\ 1$ e $pol\ 2$ também são congruentes.

CONGRUÊNCIAS DE QUADRILÁTEROS

Antes de demonstrarmos os casos de congruência de quadriláteros vamos fazer uma definição.

. Um polígono é dito *convexo* se dados quaisquer pontos M e N em seu interior então o segmento MN também está todo contido em seu interior. Um polígono é dito *côncavo* quando existirem pontos M e N em seu interior tais que algum ponto do segmento MN esteja exterior ao polígono.

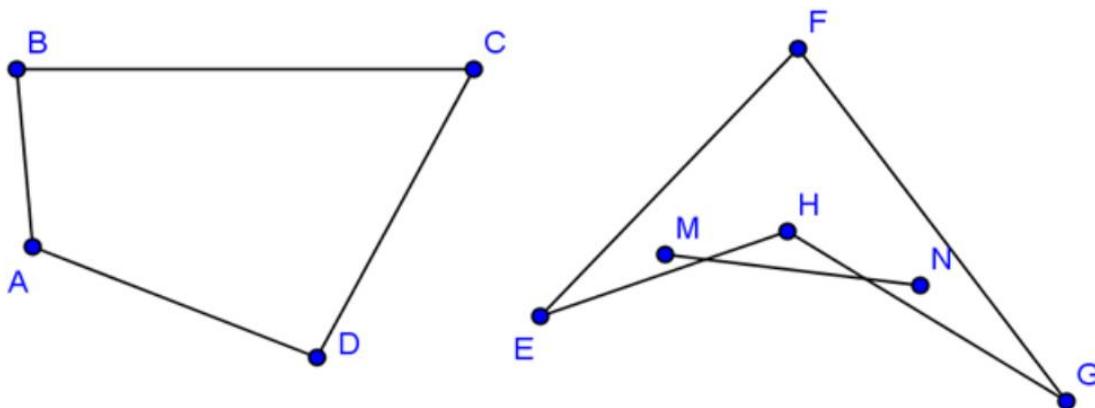


figura 20:

Acima temos $ABCD$ quadrilátero convexo e $EFGH$ quadrilátero côncavo.

Vamos lembrar que, dois quadriláteros são congruentes se quatro lados correspondentes e quatro ângulos interiores correspondentes são congruentes, assim há um total de oito congruências a serem verificadas. Porém cada teorema nos diz que podemos garantir a congruência com cinco dos oito elementos citados, vale a pena lembrar que nos triângulos necessitávamos três dos seis elementos congruentes.

Antes de enunciar e demonstrar os casos de congruência de quadriláteros com cinco das oito medidas correspondentemente iguais em um par de quadriláteros, vamos apresentar os contraexemplos que nos garantem que de fato cinco é o menor número de hipótese de medidas correspondentemente iguais para garantirmos a congruência.

Vamos construir contraexemplos para todas as possibilidades de quatro medidas correspondente iguais em quadriláteros não congruentes. Abaixo o quadro mostra dez combinações possíveis e suas combinações equivalentes, totalizando os 16 casos.

COMBINAÇÕES	COMBINAÇÕES EQUIVALENTES
AAAA	----- ----
AAAL	LAAA
AAAL	ALAA
AALL	LLAA
ALAL	LALA
LAAL	----- -----
ALLA	----- ----
LLLA	ALLL
LLAL	LALL
LLLL	----- ----

Assim, temos um total de 10 contraexemplos para construir. Seguem abaixo

Contraexemplo 1

No retângulo e trapézio retângulo abaixo temos que:

AD e *EF* têm mesma medida assim como *DC* e *FG*.

\widehat{D} , \widehat{F} , \widehat{A} e \widehat{E} também têm a mesma medida, visto que são retos.

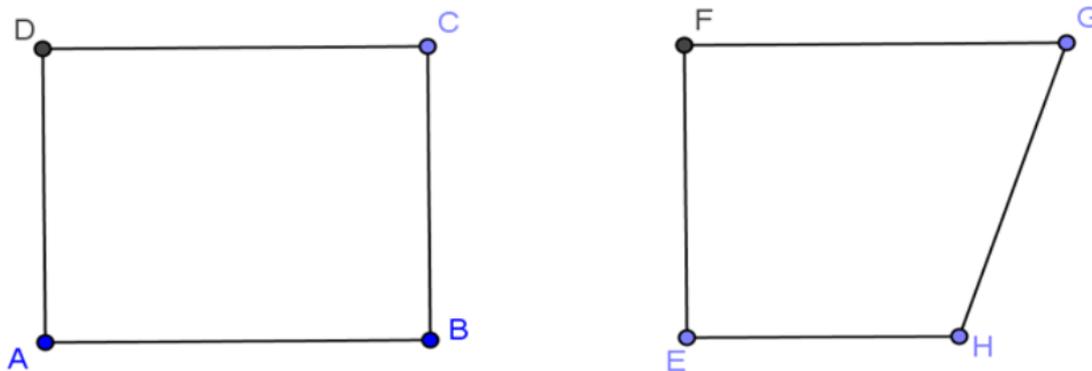


figura 21:

Observe que o exemplo acima mostra que *ALAL* não é caso de congruência de quadriláteros.

Contraexemplo 2

Se considerarmos um losango de lado medindo a com ângulos internos diferentes de um reto e um quadrado de lado medindo a , verificamos que *LLLL* não é caso de congruência de quadriláteros.

Contra exemplo 3

E se considerarmos um quadrado de lado medindo a e um retângulo com um lado diferente de a e o outro lado de medida a , verificamos que *AAAA*, *AAAL*, *AALA*, *LAAL* não são casos de congruência de quadriláteros.

Contraexemplo 4

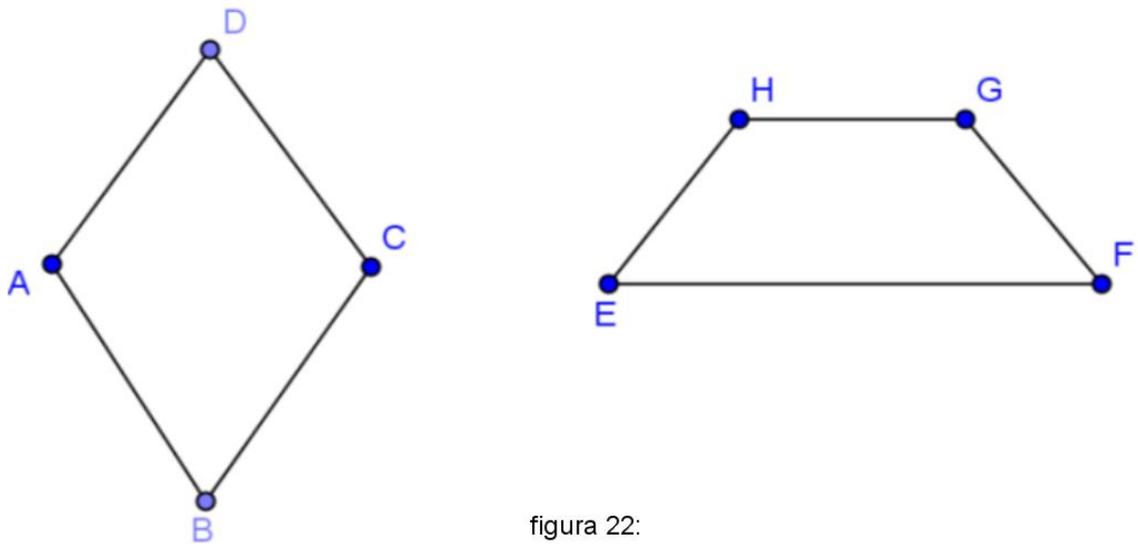
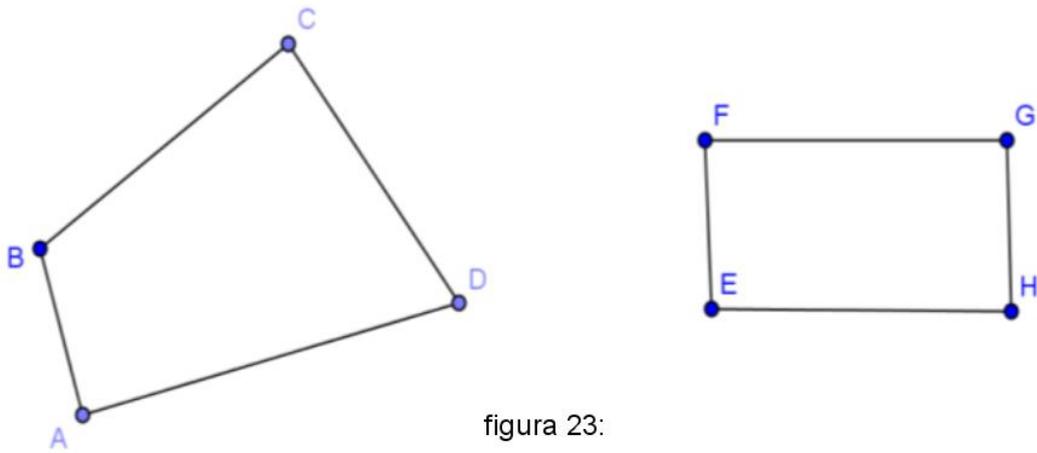


figura 22:

Acima temos um losango de lado medindo a e um trapézio isósceles com lados EH, HG e GF medindo a . Considere ainda que os ângulos agudos do losango são congruentes aos ângulos agudos do trapézio e que os ângulos obtusos do losango são congruentes aos ângulos obtusos do trapézio. Assim temos que os casos

$LLA, LLAL$ e $AALL$ não são casos de congruência

Contraexemplo 5



Nos quadriláteros acima temos que $EFGH$ é um retângulo de lado EF medindo b e lado FG medindo a . No quadrilátero $ABCD$ temos que \hat{A} e \hat{C} são retos e os lados BC e CD medem a e o lado AB mede b . Isso mostra que $ALLA$ não é um caso de congruência de quadriláteros.

Com isso temos os 10 contraexemplos no caso de 4 informações. Se 4 informações são insuficientes para garantir a congruência, 3 informações também são insuficientes.

.Com um pouco de combinatória básica, concluímos que temos 32 maneiras de escrevermos uma sequência de 5 letras onde temos duas opções para cada letra (A ou L). Desses 32 casos temos dois que não fazem sentido, são eles $LLLLL$ e $AAAAA$. Dos outros 30 casos restantes alguns formam congruência e outros não e há ainda casos equivalentes. Por exemplo, $LLALA$ e $ALALL$ representam as mesmas informações, sendo um e não dois casos a se estudar a congruência. Agrupando devidamente esses casos equivalentes e desprezado os dois que não fazem sentido temos dez casos para verificar. Observe o quadro a seguir:

COMBINAÇÕES	COMBINAÇÕES EQUIVALENTES	É CASO DE CONGRUÊNCIA?
<i>LALAL</i>		SIM
<i>ALALA</i>		SIM
<i>AALAL</i>	<i>LALAA</i>	SIM
<i>LLLLA</i>	<i>LLLAL, LLALL, LALLL, ALLLL</i>	NÃO EM GERAL, SÓ É VÁLIDA EM QUADRILÁTEROS CONVEXOS.
<i>ALAAL</i>	<i>LAALA</i>	NÃO
<i>ALALL</i>	<i>LLALA</i>	NÃO
<i>ALLAL</i>	<i>LALLA</i>	NÃO
<i>AAAAL</i>	<i>AAALA, AALAA</i> <i>ALAAA, LAAAA</i>	NÃO
<i>LLLAA</i>	<i>AALLL, ALLLA</i> <i>LAALL, LLAAL</i>	NÃO
<i>AAALL</i>	<i>LAAAL, LLAAA</i> <i>ALLAA, AALLA</i>	SIM

Agora vamos demonstrar os casos em que há congruência ,e no final, construiremos contraexemplos para os casos em que não há congruência.

Como vimos na tabela, no caso *LLLLA* só há congruência quando os quadriláteros são convexos, no final mostraremos um contraexemplo quando um deles é côncavo.

Teorema 3.1: (caso *L LLLA* de congruência) *Dados dois quadriláteros convexos $ABCD$ e $A'B'C'D'$ com $AB \cong A'B'$, $BC \cong B'C'$, $CD \cong C'D'$, $AD \cong A'D'$ e $\hat{A} \cong \hat{A}'$ então eles são congruentes.*

Demonstração:

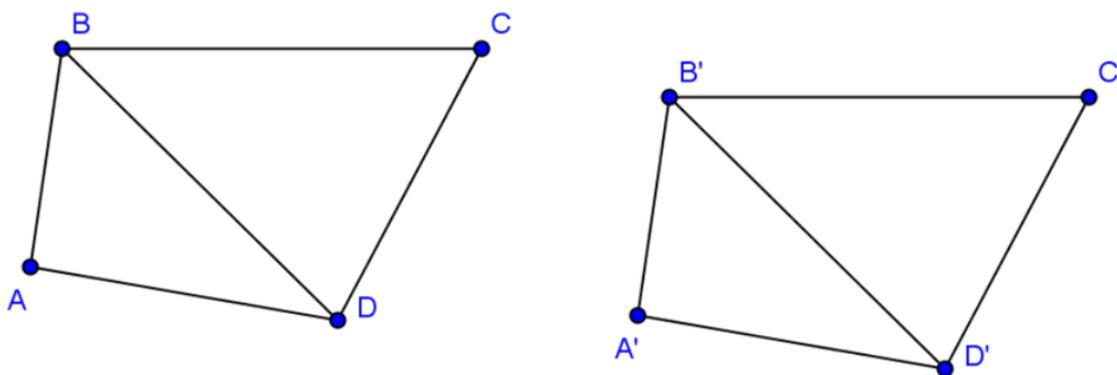


figura 24:

Como já sabemos que ambos os quadriláteros são convexos, vamos usar a diagonal BD e $B'D'$ onde, devido à convexidade, ambas são internas aos quadriláteros. Os triângulos ABD e $A'B'D'$ são congruentes por *LAL* visto que por hipótese $AB \cong A'B'$, $AD \cong A'D'$ e $\hat{A} \cong \hat{A}'$, assim $BD \cong B'D'$ e por *LLL* os triângulos BCD e $B'C'D'$ são congruentes. Desta forma, os quadriláteros têm 4 lados correspondentes e 4 ângulos correspondentes congruentes, sendo eles então também congruentes, o que termina a demonstração.

O próximo caso de congruência de quadrilátero é o um dos casos de congruência de polígonos quando $n = 4$, no capítulo anterior provamos para $n \geq 5$.

Teorema 3.2: (caso *LALAL* de congruência) *Se dois quadriláteros simples $ABCD$ e $A'B'C'D'$ têm $AB \cong A'B'$, $\hat{B} \cong \hat{B}'$, $BC \cong B'C'$, $\hat{C} \cong \hat{C}'$ e $CD \cong C'D'$ então eles são congruentes.*

Demonstração: Vamos inicialmente provar que se a diagonal AC for interna ao quadrilátero $ABCD$ a diagonal $A'C'$ também será interna ao quadrilátero $A'B'C'D'$. Os triângulos ABC e $A'B'C'$ são congruentes devido ao caso *LAL*, assim se AC está no interior do quadrilátero, então ela está no interior do ângulo $\angle BCD$ e isso significa que $\angle BCA$ é menor que $\angle BCD$. Então, já que o $\angle B'C'A' \cong \angle BCA$ e $\angle B'C'D' \cong \angle BCD$

BCD temos que $\angle B'C'A'$ é menor que $\angle B'C'D'$. Portanto, $A'C'$ obrigatoriamente está no interior do $\angle B'C'D'$. De maneira análoga temos que se AC não está no interior do quadrilátero $ABCD$, $A'C'$ também não estará no interior do quadrilátero $A'B'C'D'$.

Dois polígonos simples com as condições iniciais do teorema, ou são ambos convexos ou ambos côncavos. De fato, suponha $ABCD$ convexo e $A'B'C'D'$ côncavo.

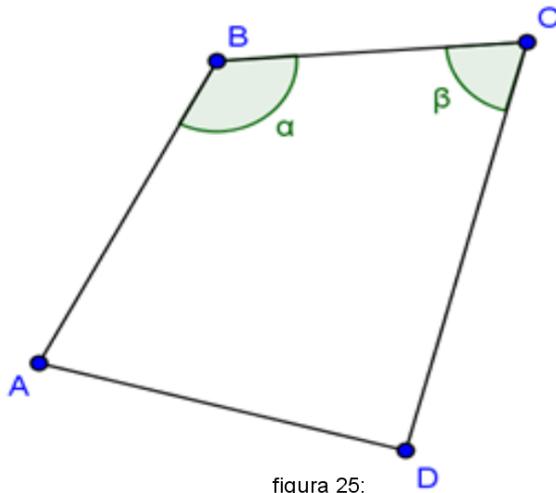


figura 25:

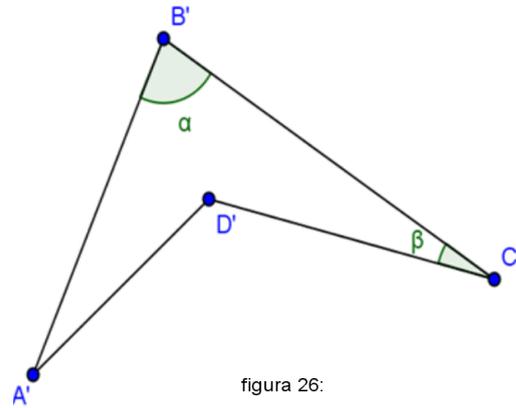


figura 26:

Temos que os triângulos ABC e $A'B'C'$ são congruentes pelo caso LAL , pois por hipótese, $AB \cong A'B'$, $\widehat{B} \cong \widehat{B'}$ e $BC \cong B'C'$, assim temos que $\angle ACB \cong \angle A'C'B'$. Os ângulos $\angle BCD = \beta$ e $\angle B'C'D' = \beta$ são congruentes também por hipótese, mas $\angle ACB$ é menor que β e $\angle A'C'B'$ é maior que β , sendo uma contradição. Fazendo o vértice A' variar de posição no polígono côncavo, chegaremos a contradições semelhantes.

Agora vamos considerar ambos os polígonos convexos.

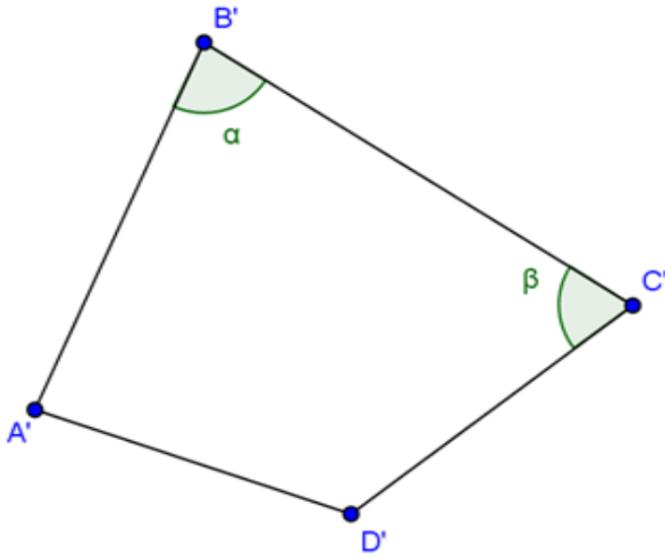


figura 27:

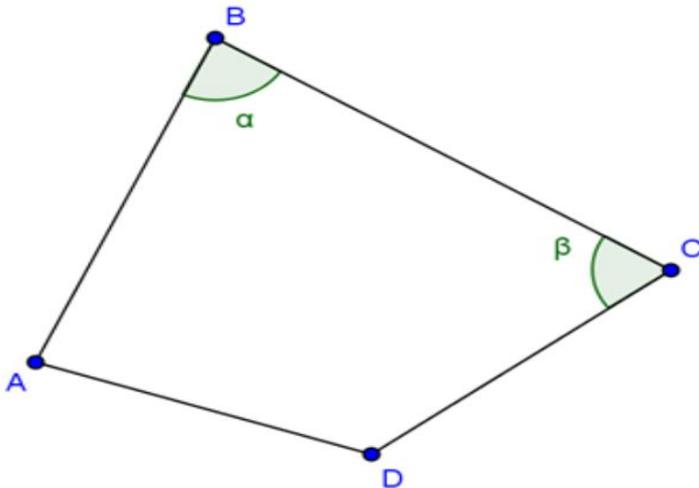


figura 28

Como os triângulos ABC e $A'B'C'$ são congruentes (caso LAL) daí temos que $AC \cong A'C'$ $\angle BCD \cong \angle B'C'D'$, $\angle BCA \cong \angle B'C'A'$ e $\angle ACD \cong \angle A'C'D'$ pois $\angle ACD \cong \angle BCD - \angle BCA$ e $\angle A'C'D' \cong \angle B'C'D' - \angle B'C'A'$. Assim pelo caso LAL os triângulos ACD e $A'C'D'$ são congruentes e os quadriláteros $ABCD$ e $A'B'C'D'$ tem 4 lados e 4 ângulos em seu interior correspondentes e congruentes fazendo com que os quadriláteros sejam congruentes.

Sejam agora ambos côncavos com diagonal AC em seu interior e vértice C no ângulo côncavo, o caso em que o vértice A fica no ângulo côncavo é análogo.

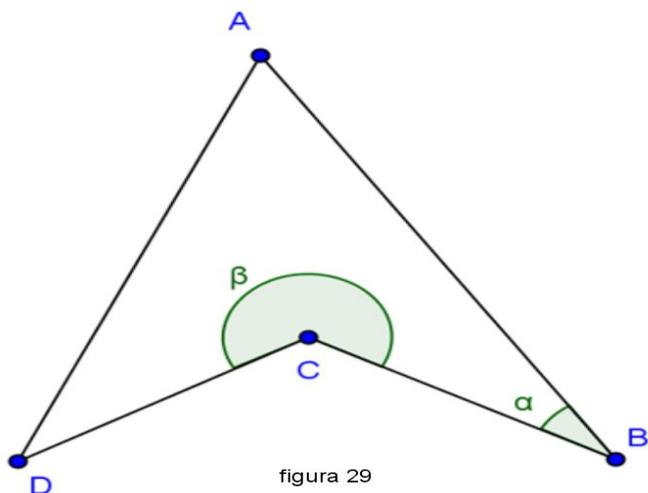


figura 29

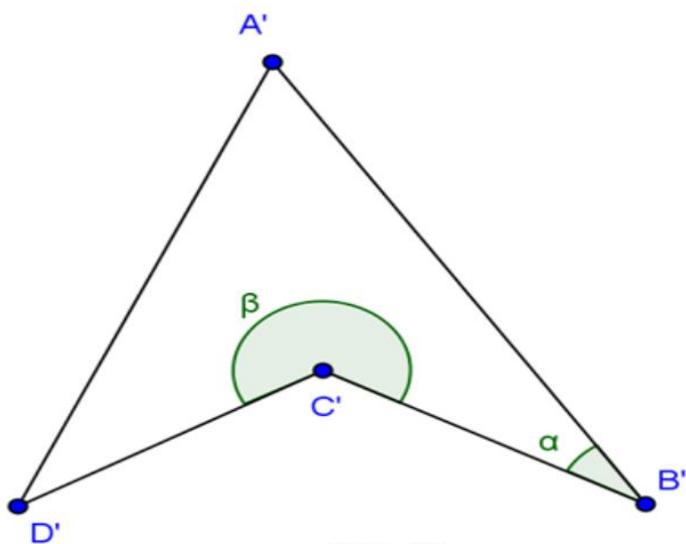
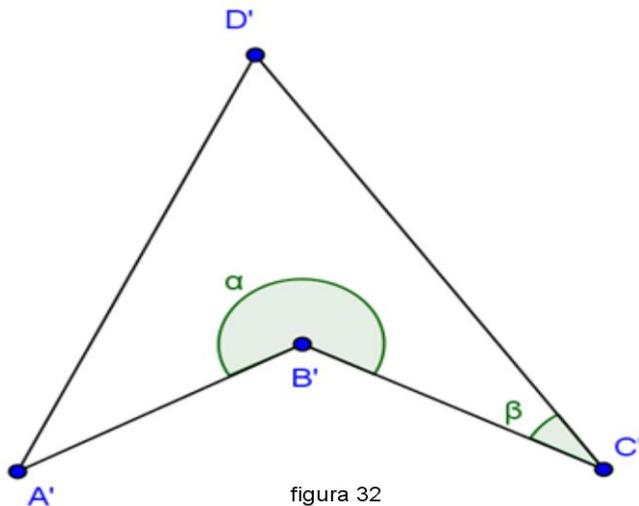
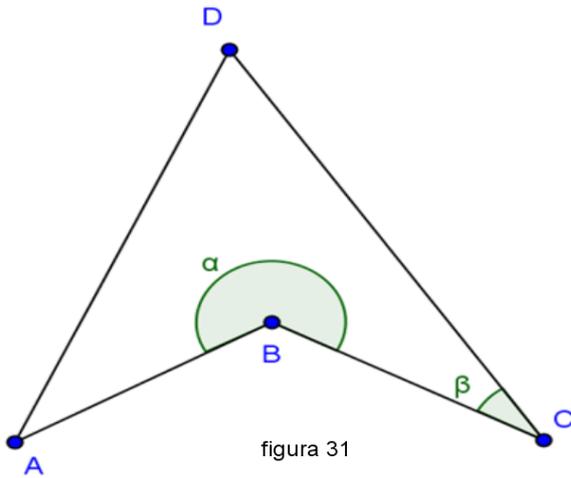


figura 30

Como os triângulos ABC e $A'B'C'$ são congruentes pelo caso LAL daí temos que $AC \cong A'C'$, $\angle ACB \cong \angle A'B'C'$ e $\angle CAB \cong \angle C'A'B'$. Temos também

$\angle ACD \cong \beta - \angle ACB$ e $\angle A'C'D' \cong \beta - \angle A'C'B'$ daí temos que $\angle ACD \cong \angle A'C'D'$ visto que $\angle ACB \cong \angle A'C'B'$. Assim pelo caso *LAL* os triângulos ACD e $A'C'D'$ são congruentes, fazendo com que os quadriláteros $ABCD$ e $A'B'C'D'$ também sejam.

Suponha ambos côncavo com diagonal AC exterior. Faremos o vértice B no ângulo côncavo, o caso em que o vértice D fica no ângulo côncavo é análogo.



Novamente pelo caso *LAL* os triângulos ABC e $A'B'C'$ são congruentes, assim: $AC \cong A'C'$, $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$ e $\angle ACB \cong \angle A'C'B'$. Os triângulos ADC e $A'D'C'$ são congruentes pelo caso *LAL*, pois $DC \cong D'C'$, $AC \cong A'C'$ e os ângulos $\angle ACD \cong \angle A'C'D'$

$\angle ACB + \beta$ e $\angle A'C'D' \cong \angle A'C'B' + \beta$ são congruentes. Assim $AD \cong A'D'$ o que implica que os quadriláteros $ABCD$ e $A'B'C'D'$ são congruentes, como queríamos demonstrar.

O caso de congruência abaixo também é o segundo caso de congruência de polígonos com $n = 4$, citado no final do capítulo anterior.

Teorema 3.3: (caso *ALALA* de congruência) *Se dois quadriláteros simples $ABCD$ e $A'B'C'D'$ têm $\hat{A} \cong \hat{A}'$, $AB \cong A'B'$, $\hat{B} \cong \hat{B}'$, $BC \cong B'C'$ e $\hat{C} \cong \hat{C}'$ então eles são congruentes.*

Demonstração: Vamos inicialmente provar que se a diagonal AC for interna ao quadrilátero $ABCD$ a diagonal $A'C'$ também será interna ao quadrilátero $A'B'C'D'$. Os triângulos ABC e $A'B'C'$ são congruentes devido ao caso *LAL*, assim se AC está no interior do quadrilátero, então ela está no interior do ângulo $\angle BCD$ e isso significa que $\angle BCA$ é menor que $\angle BCD$. Então, já que o $\angle B'C'A' \cong \angle BCA$ e $\angle B'C'D' \cong \angle BCD$ temos que $\angle B'C'A'$ é menor que $\angle B'C'D'$. Portanto, $A'C'$ obrigatoriamente está no interior do $\angle B'C'D'$. De maneira análoga temos que se AC não está no interior do quadrilátero $ABCD$, $A'C'$ também não estará no interior do quadrilátero $A'B'C'D'$.

Agora iremos mostrar que dois polígonos com as congruências acima são ambos convexos ou ambos côncavos. Para isso suponha um convexo e o outro côncavo, como mostra a figura.

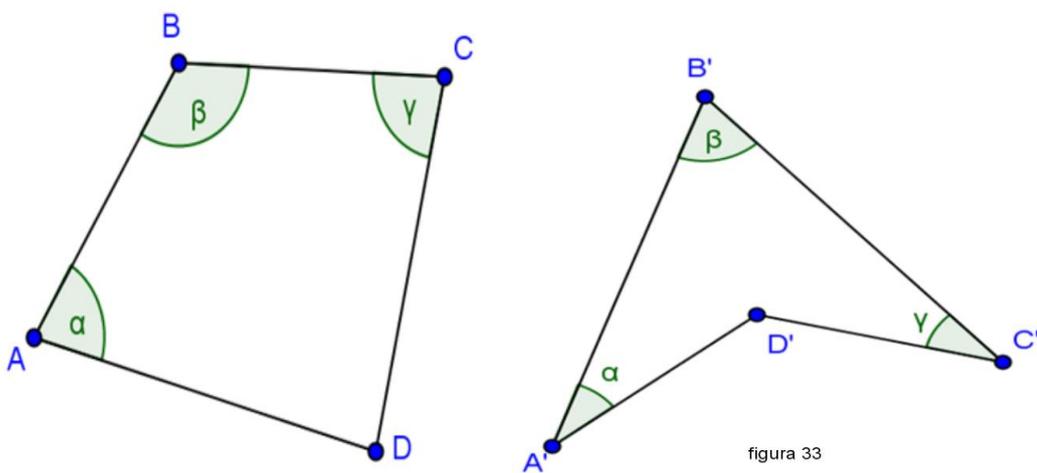


figura 33

figura 33

Como $AB \cong A'B'$, $\widehat{B} \cong \widehat{B}'$ e $BC \cong B'C'$ os triângulos ABC e $A'B'C'$ são congruentes por LAL , assim $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$. Mas $\angle BAC$ é menor que α e $\angle B'A'C'$ é maior que α , portanto os quadriláteros com as congruências dadas não podem ser um convexo e outro côncavo. Fazendo o vértice A' variar de posição no quadrilátero côncavo teria um dos ângulos α, β , ou γ caindo no ângulo côncavo do quadrilátero $A'B'C'D'$, que seria um absurdo, visto que α, β , e γ são ângulos de medidas menores que 180° enquanto o ângulo côncavo mede mais que 180° .

Consideremos então ambos os polígonos convexos como na figura abaixo:

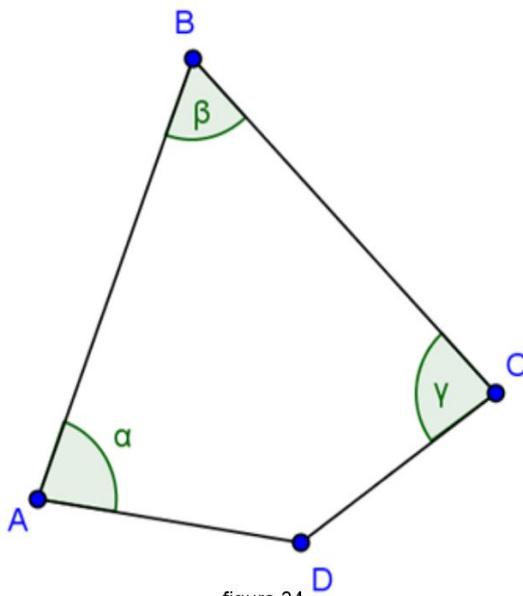


figura 34

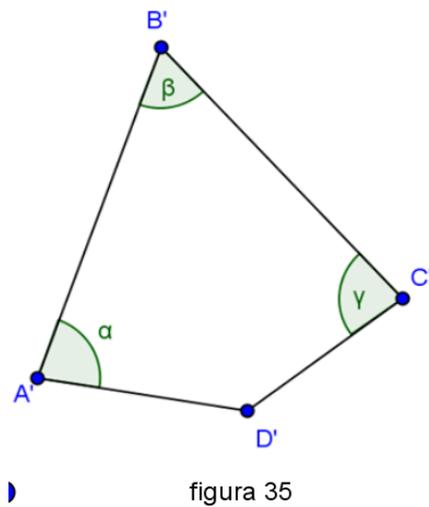


figura 35

Os triângulos ABC e $A'B'C'$ são congruentes por LAL , pois $AB \cong A'B'$, $\widehat{B} \cong \widehat{B}'$ e $BC \cong B'C'$. Assim $AC \cong A'C'$, $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$ e $\angle BCA \cong \angle B'C'A'$. Como $\angle DAC \cong \alpha - \angle BAC$ e $\angle D'A'C' \cong \alpha - \angle B'A'C'$ temos que $\angle DAC \cong \angle D'A'C'$ e analogamente temos $\angle DCA \cong \angle D'C'A'$. Desta forma os triângulos ADC e $A'D'C'$ são congruentes por ALA , e conseqüentemente os quadriláteros acima também são congruentes.

Sejam agora ambos os polígonos côncavos com diagonal AC em seu interior e vértice C no ângulo côncavo, o caso em que o vértice A fica no ângulo côncavo é análogo.

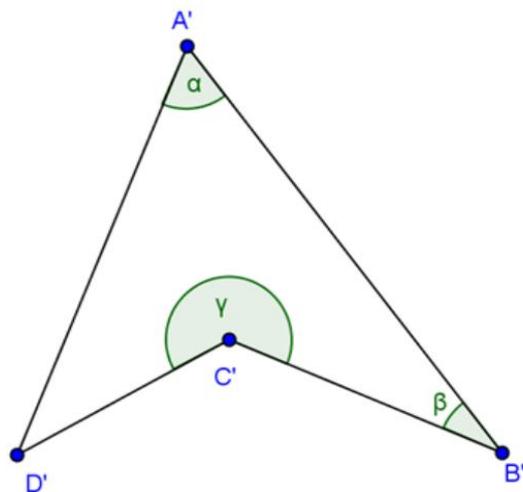


figura 36

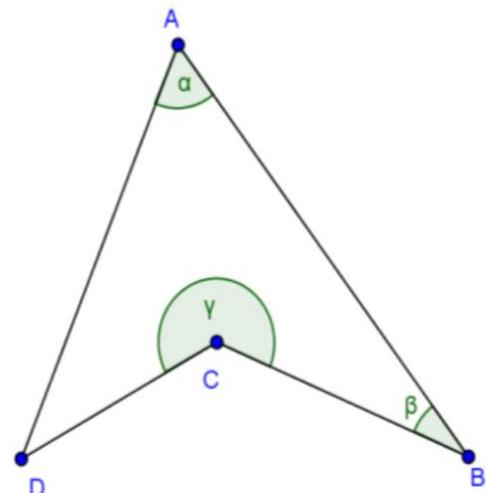
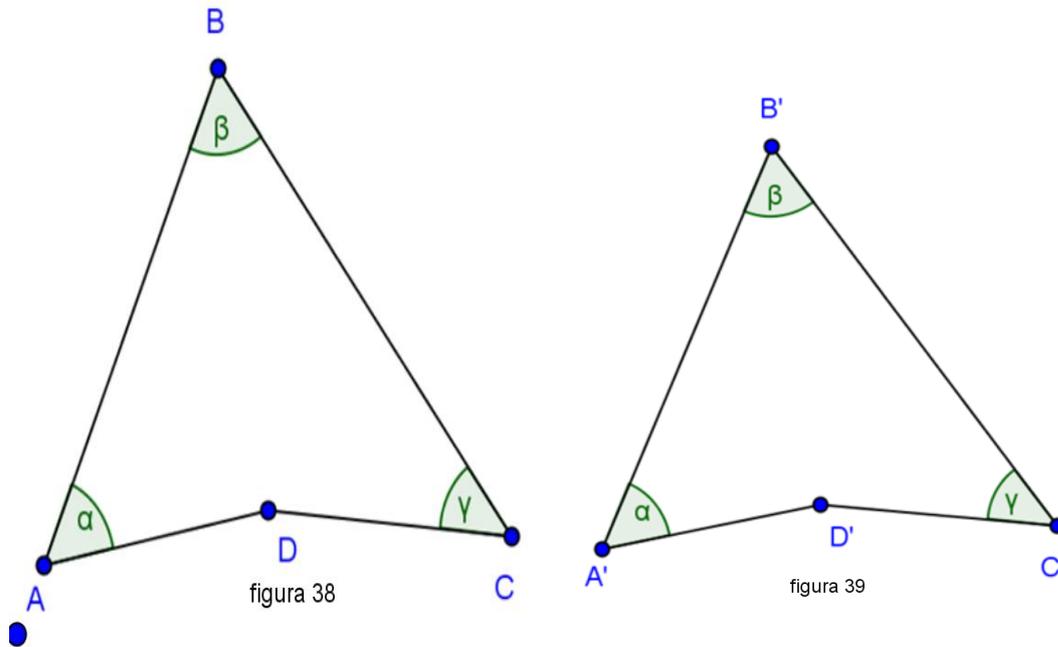


figura 37

A prova deste caso é a mesma que quando ambos são convexos, veja:

Os triângulos ABC e $A'B'C'$ são congruentes por LAL , pois $AB \cong A'B'$, $\widehat{B} \cong \widehat{B}'$ e $BC \cong B'C'$. Assim $AC \cong A'C'$, $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$ e $\angle BCA \cong \angle B'C'A'$. Como $\angle DAC \cong \alpha - \angle BAC$ e $\angle D'A'C' \cong \alpha - \angle B'A'C'$ temos que $\angle DAC \cong \angle D'A'C'$ e analogamente temos $\angle DCA \cong \angle D'C'A'$. Desta forma os triângulos ADC e $A'D'C'$ são congruentes por ALA , e conseqüentemente os quadriláteros acima também são congruentes.

Para finalizar falta considerarmos ambos côncavos com diagonal AC exterior. Faremos o vértice D no ângulo côncavo, o caso em que o vértice B fica no ângulo côncavo é análogo, mudando apenas uma diferença de ângulos para uma adição de ângulos.



Os triângulos ABC e $A'B'C'$ são congruentes por LAL , pois $AB \cong A'B'$, $\widehat{B} \cong \widehat{B}'$ e $BC \cong B'C'$. Assim $AC \cong A'C'$, $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$ e $\angle BCA \cong \angle B'C'A'$. Como $\angle DAC \cong \angle BAC - \alpha$ e $\angle D'A'C' \cong \angle B'A'C' - \alpha$ temos que $\angle DAC \cong \angle D'A'C'$ e analogamente temos $\angle DCA \cong \angle D'C'A'$. Desta forma os triângulos ADC e $A'D'C'$ são congruentes por ALA , e conseqüentemente os quadriláteros acima também são congruentes, o que termina a demonstração.

Abaixo segue mais um caso de congruência de quadriláteros, neste caso ainda será possível a utilização das diagonais AC e $A'C'$ e assim dividir os quadriláteros em triângulos e usarmos os casos de congruência de triângulos. O último caso isso não será possível.

Teorema 3.4: (caso $AALAL$ de congruência) *Se dois quadriláteros simples $ABCD$ e $A'B'C'D'$ têm $\widehat{D} \cong \widehat{D}'$, $A \cong A'$, $AB \cong A'B'$, $\widehat{B} \cong \widehat{B}'$ e $BC \cong B'C'$ então eles são congruentes.*

Demonstração: A estrutura da demonstração é a mesma que os dois casos anteriores. Vamos inicialmente provar que se a diagonal AC for interna ao quadrilátero $ABCD$ a diagonal $A'C'$ também será interna ao quadrilátero $A'B'C'D'$. Os triângulos ABC e $A'B'C'$ são congruentes devido ao caso LAL , assim se AC está no interior do quadrilátero, então ela está no interior do ângulo $\angle BCD$ e isso significa que $\angle BCA$ é menor que $\angle BCD$.

Então, já que $\angle B'C'A' \cong \angle BCA$ e $\angle B'C'D' \cong \angle BCD$ temos que $\angle B'C'A'$ é menor que $\angle B'C'D'$. Portanto, $A'C'$ obrigatoriamente está no interior do $\angle B'C'D'$. De maneira análoga temos que se AC não está no interior do quadrilátero $ABCD$, $A'C'$ também não estará no interior do quadrilátero $A'B'C'D'$.

Agora iremos mostrar que dois polígonos com as congruências acima são ambos convexos ou ambos côncavos. Para isso suponha um convexo e o outro côncavo, como mostra a figura.

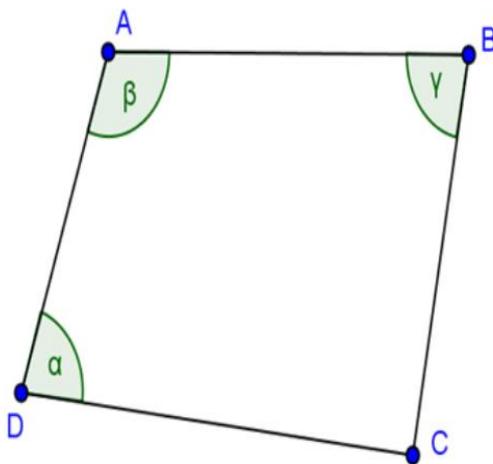


figura 40

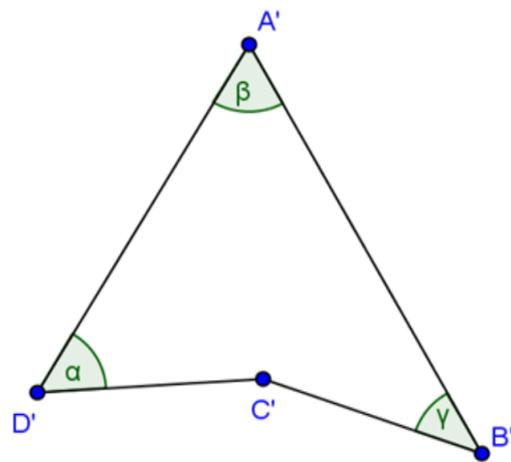


figura 41

Os triângulos ABC e $A'B'C'$ são congruentes por LAL , pois $AB \cong A'B'$, $\hat{B} \cong \hat{B}'$ e $BC \cong B'C'$. Assim $AC \cong A'C'$, $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$ e $\angle BCA \cong \angle B'C'A'$. Também temos $\angle DAC \cong \beta - \angle BAC$ e $\angle D'A'C' \cong \beta - \angle B'A'C'$ e, portanto os ângulos $\angle DAC$ e $\angle D'A'C'$ são congruentes. Observe que os triângulos ADC e $A'D'C'$ são congruentes por AAL_0 e como consequência temos $\hat{C} \cong \hat{C}'$, o que é uma contradição, visto que C é menor que 180° e C' é maior que 180° . Fazendo o vértice A' variar de posição no quadrilátero côncavo teria um dos ângulos α, β , ou γ caindo no ângulo côncavo do quadrilátero $A'B'C'D'$, que seria um absurdo, visto que α, β , e γ são ângulos de medidas menores que 180° enquanto o ângulo côncavo mede mais que 180° .

Consideremos então ambos os polígonos convexos como na figura abaixo:

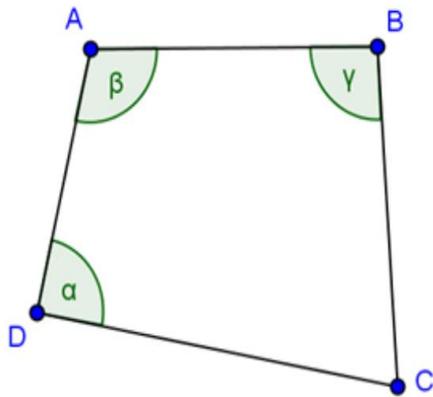


figura 42

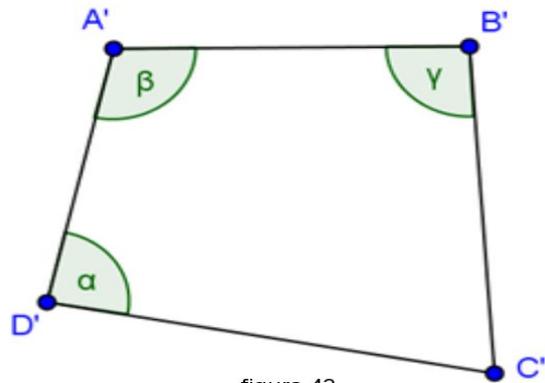


figura 43

Os triângulos ABC e $A'B'C'$ são congruentes por LAL , pois $AB \cong A'B'$, $\widehat{B} \cong \widehat{B}'$ e $BC \cong B'C'$. Assim $AC \cong A'C'$, $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$ e $\angle BCA \cong \angle B'C'A'$. Também temos $\angle DAC \cong \beta - \angle BAC$ e $\angle D'A'C' \cong \beta - \angle B'A'C'$ e, portanto os ângulos $\angle DAC$ e $\angle D'A'C'$ são congruentes. Observe que os triângulos ADC e $A'D'C'$ são congruentes por AAL_0 e como consequência temos $\widehat{C} \cong \widehat{C}'$, $AD \cong A'D'$ e $CD \cong C'D'$ o que torna os quadriláteros acima congruentes.

Sejam agora ambos os polígonos côncavos com diagonal AC em seu interior e vértice C no ângulo côncavo, o caso em que o vértice A fica no ângulo côncavo é análogo.

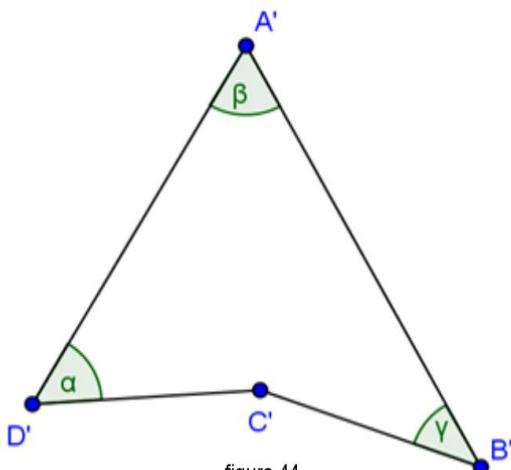


figura 44

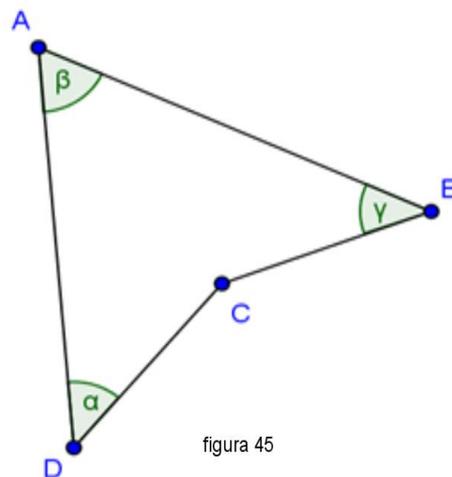


figura 45

A prova deste caso é a mesma que quando ambos são convexos, veja:

Os triângulos ABC e $A'B'C'$ são congruentes por LAL , pois $AB \cong A'B'$, $\widehat{B} \cong \widehat{B}'$ e $BC \cong B'C'$. Assim $AC \cong A'C'$, $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$ e $\angle BCA \cong \angle B'C'A'$. Também temos $\angle DAC \cong \beta - \angle BAC$ e $\angle D'A'C' \cong \beta - \angle B'A'C'$ e, portanto os ângulos $\angle DAC$ e $\angle D'A'C'$ são congruentes. Observe que os triângulos ADC e $A'D'C'$ são congruentes por AAL_0 e como consequência temos $\widehat{C} \cong \widehat{C}'$, $AD \cong A'D'$ e $CD \cong C'D'$, o que torna os quadriláteros acima congruentes.

Falta considerarmos ambos côncavos com diagonal AC exterior. Faremos o vértice D no ângulo côncavo, o caso em que o vértice B fica no ângulo côncavo é análogo, mudando apenas uma diferença de ângulos para uma adição de ângulos.

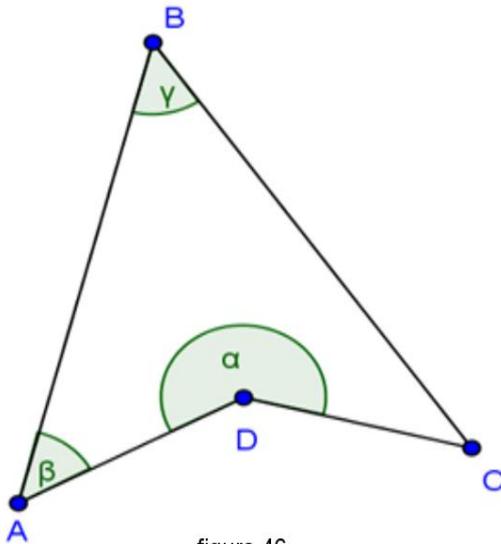


figura 46

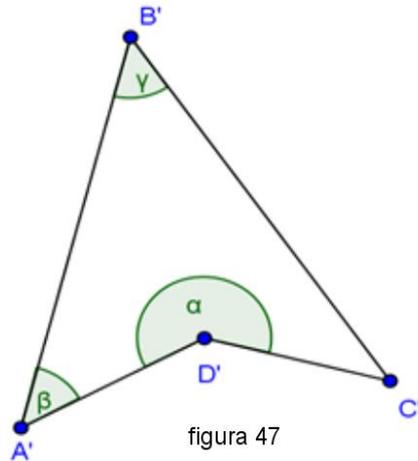


figura 47

Os triângulos ABC e $A'B'C'$ são congruentes por LAL , pois $AB \cong A'B'$, $\widehat{B} \cong \widehat{B}'$ e $BC \cong B'C'$. Assim $AC \cong A'C'$, $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$ e $\angle BCA \cong \angle B'C'A'$. Também temos $\angle DAC \cong \angle BAC - \beta$ e $\angle D'A'C' \cong \angle B'A'C' - \beta$ e, portanto os ângulos $\angle DAC$ e $\angle D'A'C'$ são congruentes. Observe que os triângulos ADC e $A'D'C'$ são congruentes por AAL_0 e como consequência temos $\widehat{C} \cong \widehat{C}'$, $AD \cong A'D'$ e $CD \cong C'D'$ o que torna os quadriláteros acima congruentes e termina a demonstração.

A seguir vamos provar mais um caso de congruência:

Teorema 3.5: (congruência caso: AAALL) Se dois quadriláteros $ABCD$ e $A'B'C'D'$ são simples e $\angle A \cong \angle A'$, $\angle B \cong \angle B'$, $\angle C \cong \angle C'$, $CD \cong C'D'$ e $DA \cong D'A'$ então eles são congruentes.

Demonstração: Vamos fazer a demonstração por contradição. Suponha que dois quadriláteros com as condições dadas acima não são congruentes.

1º Passo: Construindo linhas paralelas.

Vamos construir um novo quadrilátero A_1B_1CD que irá sobrepor-se ao máximo com $ABCD$ e será congruente a $A'B'C'D'$. Construção:

a) Localizar B_1 sobre CB de modo que $CB_1 \cong C'B'$, observe que BC e $B'C'$ não podem ser congruentes, caso contrario os quadriláteros $ABCD$ e $A'B'C'D'$ seriam congruentes por AALAL. Assim $B \neq B_1$

b) O vértice A_1 deve estar do mesmo lado BC com A , $\angle A_1B_1C \cong \angle A'B'C'$ e $A_1B_1 \cong A'B'$. Os axiomas de construção de segmentos garantem à existência de um único ponto A_1 com essas propriedades. Desta forma A_1B_1CD e $A'B'C'D'$ são congruentes por LALAL e como $\angle A_1B_1C \cong \angle A'B'C' \cong \angle ABC$ as linhas A_1B_1 e AB são paralelas, visto que se não forem paralelas existira um triângulo em que o ângulo A_1B_1C será ângulo externo do triângulo com medida igual ao ângulo ABC interno do triângulo e não adjacente ao ângulo externo, isso é uma contradição pelo teorema do ângulo externo.

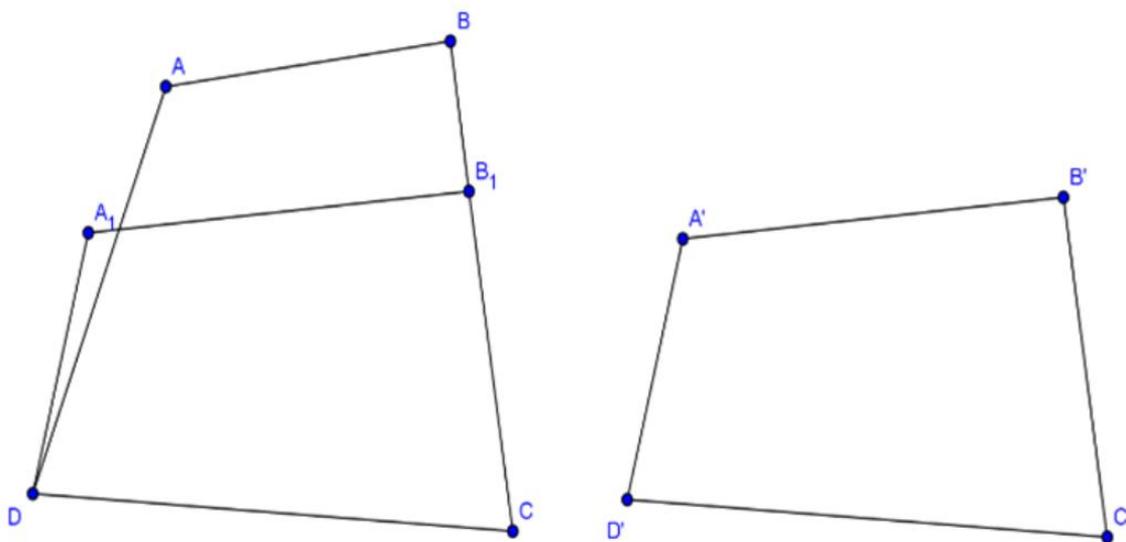


figura 48

2º Passo: Localizando o vértice D .

As linhas paralelas AB e A_1B_1 dividem o plano em 3 regiões como mostra a figura



figura 49

Vamos mostrar que D não pode estar na região 2. Se ambos os quadriláteros forem convexos, é trivial que D não esteja na região 2. Se os quadriláteros são côncavos, vamos supor que D esteja na região 2. Com base em nossa construção C não está na região 2, pois temos CBB_1 ou CB_1B , assim uma das linhas AB ou A_1B_1 fica entre C e D e a outra não. Vamos considerar que A_1B_1 separa D e C , o outro caso é análogo.

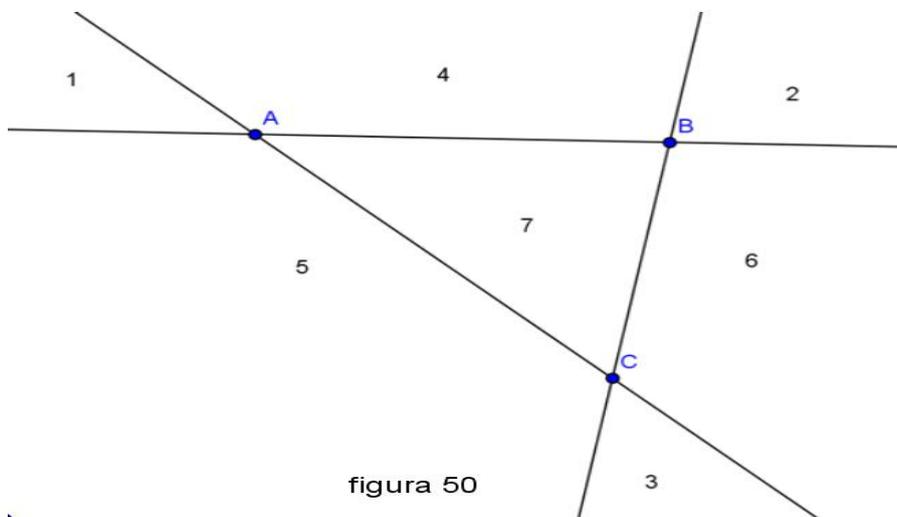


figura 50

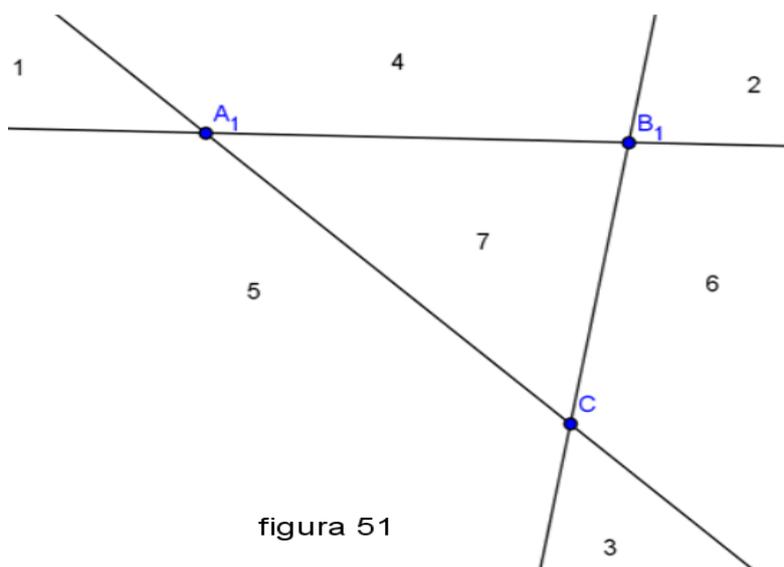


figura 51

Como C e D estão do mesmo lado de em relação a reta AB , D tem de estar na região 3, 7 ou 5. Note que se D esta na região 6 $ABCD$ não será simples. Se D esta na região 3 então há um ângulo côncavo em C . Se D esta na região 5 então $ABCD$ é convexo e se D esta na região 7 há um ângulo côncavo em D .

Por outro lado, como C e D estão em lados opostos em relação a reta A_1B_1 temos que D deve estar na área 1 ou 2, se ele estiver na área 4 A_1B_1CD não seria simples. Se D esta na região 1 há um ângulo côncavo em A_1 e se estiver na região 2 há um ângulo côncavo em B_1

No quadrilátero $ABCD$, nem \hat{A} nem \hat{B} são côncavos. Já no quadrilátero A_1B_1CD , ou \hat{A}_1 ou \hat{B}_1 são côncavos, mas lembre-se que $\hat{A} \cong \hat{A}_1$ e $\hat{B} \cong \hat{B}_1$ sendo assim uma contradição, visto que um ângulo côncavo mede mais que 180° e um não côncavo mede menos que 180° .

Assim D não esta na região entre as retas AB e A_1B_1 .

3º Passo. Medindo distâncias.



figura 52

Agora vamos considerar os ângulos \hat{A} e \hat{A}_1 retos. Assim como D e A estão em lados opostos em relação a reta A_1B_1 , há um ponto P entre A e D que esta sobre a reta A_1B_1 . Daí

$DP < DA \cong DA_1$, mas isso é uma contradição, pois por (1.12) A_1 deveria ser o ponto da reta A_1B_1 mais próximo de D .

Sejam \hat{A} e \hat{A}_1 não retos agora, como na figura abaixo.

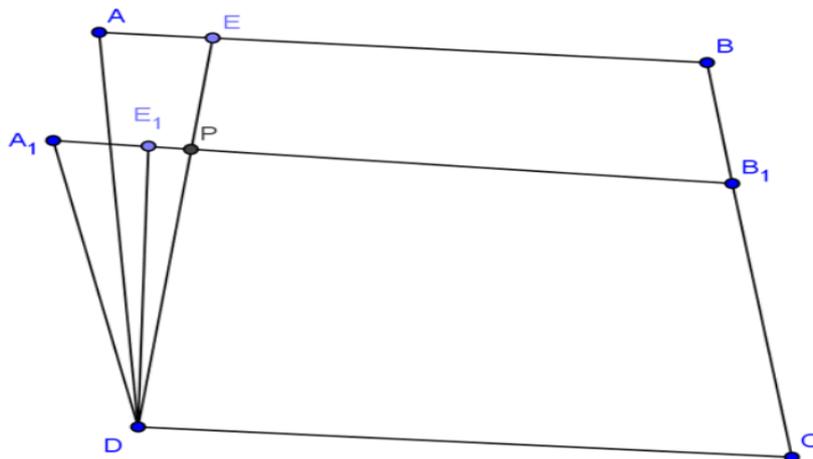


figura 53

Novamente por (1.12) podemos localizar E e E_1 bases das perpendiculares as retas AB e A_1B_1 passando pelo ponto D respectivamente. Como $AD = A_1D$, $\hat{A} \cong \hat{A}_1$ e $\hat{E} \cong \hat{E}_1$, os triângulos DAE e DAE_1 são congruentes por AAL_0 , assim $DE \cong DE_1$. Mas já que D e E estão em lados opostos em relação a reta A_1B_1 , há um ponto P entre D e E

que esta sobre a reta A_1E_1 e daí $DP < DE = DE_1$ mas isso é uma contradição, pois E_1 deveria ser o ponto da reta A_1E_1 mais perto do ponto D . Desta forma nossa suposição inicial de que os quadriláteros não eram congruentes é falsa. Assim os quadriláteros são congruentes e terminamos a prova.

Agora seguem os contraexemplos dos casos citados em que não há informações suficientes que possam garantir a congruência.

Contraexemplo *LLLLA*

Os quadriláteros $ABCD$ e $ABC'D$ abaixo tem 4 lados congruentes ($BC \cong BC'$ e $CD \cong C'D$) e ângulo \hat{A} comum e não são congruentes, visto que $ABCD$ é convexo enquanto $ABC'D$ é côncavo.

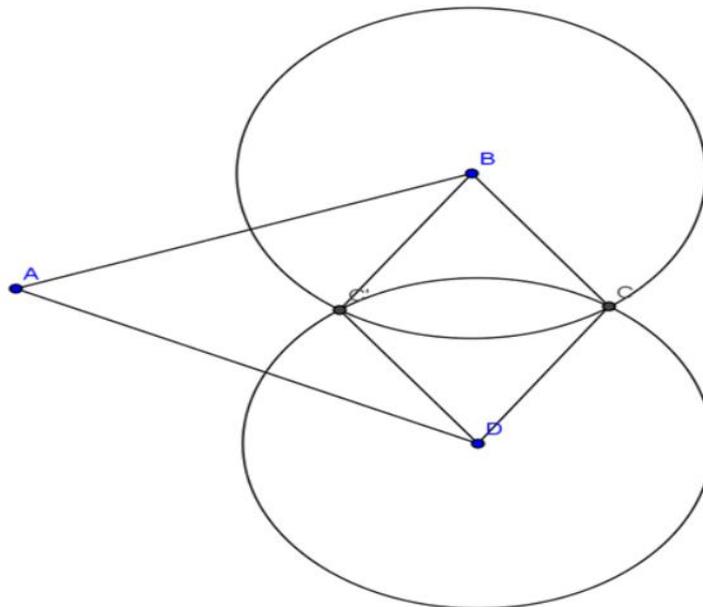


figura 54

Contraexemplo *ALAAL*

Os quadriláteros $ABCD$ e $ABC'D'$ têm as condições iniciais do caso *ALAAL* e não são congruentes, repare que $C'D'$ é congruente a CD , pois pela construção $C'CDD'$ é um paralelogramo.

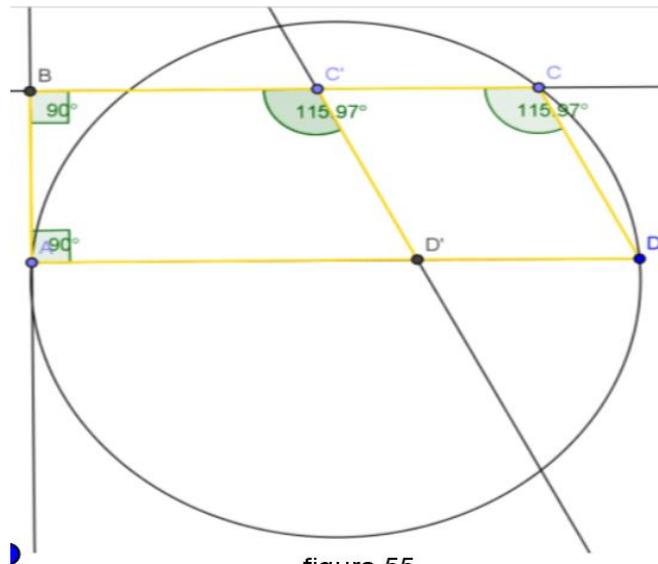


figura 55

Contraexemplo *ALALL*

Os quadriláteros $ABCD$ e $ABC'D$ têm as condições iniciais do caso *ALALL* e não são congruentes, repare que BC é congruente a BC' pois são raios de um mesmo círculo.

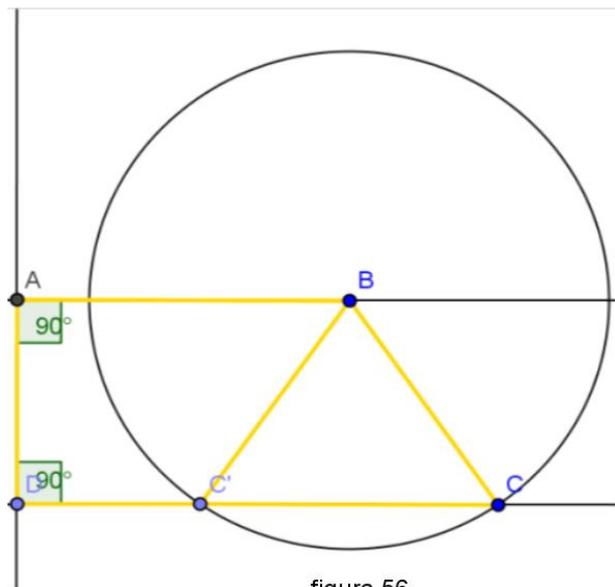


figura 56

Contraexemplo *ALLAL*

Os quadriláteros $ABCD$ e $ABC'D'$ têm as condições iniciais do caso *ALLAL* e não são congruentes, repare que BC é congruente a BC' pois são raios do mesmo círculo, BD' é congruente a BD pois são raios do mesmo círculo, os ângulos $\angle BC'D'$ e $\angle BCD$ são retos pois estão inscritos em uma semicircunferência, assim os triângulos BCD e

$BC'D'$ são congruentes pelo caso de congruência de triângulos retângulos (hipotenusa $BD \cong BD'$ e cateto $BC \cong BC'$) fazendo com que CD seja congruente a $C'D'$

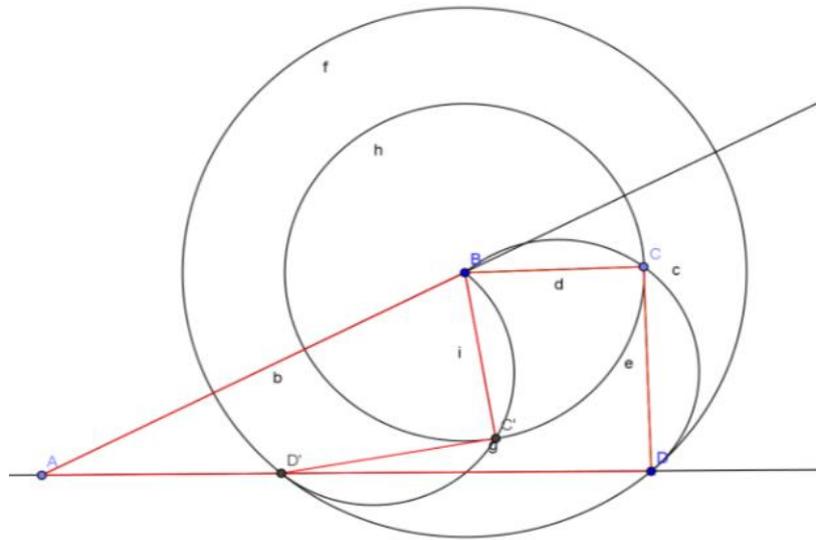


figura 57

Contraexemplo AAAAL

Esse é bem trivial, basta pensarmos em dois retângulos o primeiro de dimensões a por b e o segundo com dimensões a por c onde c deve ser diferente de b .

Contraexemplo LLLAA

Os quadriláteros $ABCD$ e $ABC'D'$ têm as condições iniciais do caso $LLLAA$, repare que por construção $D'C'CD$ é um paralelogramo assim $CD \cong C'D'$ e ângulo $\widehat{D} \cong \widehat{D'}$ por outro lado como $BC' \cong BC$ pois são raios do mesmo círculo.

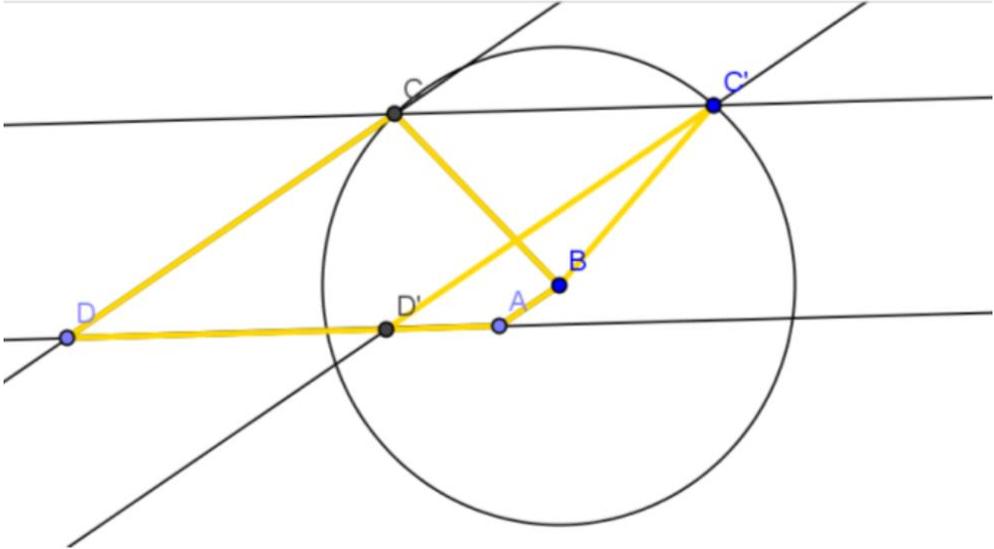


figura 58

Capítulo IV

UMA PROPOSTA PARA SALA DE AULA

Vamos finalizar com uma proposta de trabalho para alunos do nono ano do ensino fundamental e primeiro ano do ensino médio com alguns casos de congruência e alguns contraexemplos.

Proposta:

ROTEIRO DO ALUNO

Atividade 1

A) Construa dois quadriláteros convexos nas quais ocorram as congruências *LLLLA*.

B) Eles são congruentes? Você seria capaz de construir dois quadriláteros nesse caso sem serem congruentes?

C) *LLLLA* configura um caso de congruência de quadriláteros? Justifique sua resposta.

Atividade 2

A) Construa dois quadriláteros convexos nas quais ocorram as congruências *AAAAL*.

B) Eles são congruentes?

C) *AAAAL* configura um caso de congruência de quadriláteros? Justifique sua resposta.

Atividade 3

A) Construa dois quadriláteros convexos nas quais ocorram as congruências *LALAL*.

B) Eles são congruentes?

C) *LALAL* configura um caso de congruência de quadriláteros? Justifique sua resposta.

Atividade 4

- A) Construa dois quadriláteros convexos nas quais ocorram as congruências *ALAAL*.
- B) Eles são congruentes?
- C) *ALAAL* configura um caso de congruência de quadriláteros? Justifique sua resposta.

Atividade 5

- A) Pense com seu grupo em outros casos e tente encontrar contraexemplos que mostrem que não são casos de congruência ou tente dividir o quadrilátero em triângulos e mostrar que são casos de congruência.

APRESENTAÇÃO AO PROFESSOR

1 Objetivos:

- Incentivar o uso de raciocínio lógico dedutivo na prática de demonstração de proposições, algo que não é muito usado no ensino médio.
- utilizar ambiente de geometria dinâmica, principalmente na construção de contraexemplos.
- investigar novos casos de congruência, não citados no enunciado.

2 Público - Alvo:

Alunos do ensino médio.

3 Pré-requisitos:

- Ter conhecimento das figuras e construções básicas com régua e compasso.
- Preferencialmente já tenha tido contato com Geogebra.
- Já tenha visto e demonstrado em aula os casos de congruência de triângulos.

4 Material e Tecnologia.

- Computadores com o *software Geogebra*
- Projetor para que o professor possa melhor orientar os alunos durante as atividades.

5 Recomendações Metodológicas:

- As atividades preferencialmente devem ser feitas em duplas ou no máximo em trio, proporcionando assim que todos os alunos tenham contato com o *software Geogebra* e que também possam debater em conjunto as soluções das atividades. Três tempos de 50min cada, proporcional uma boa discussão sobre o tema.
- Segue uma possível construção da atividade 1, onde a congruência é válida para quadriláteros convexos:

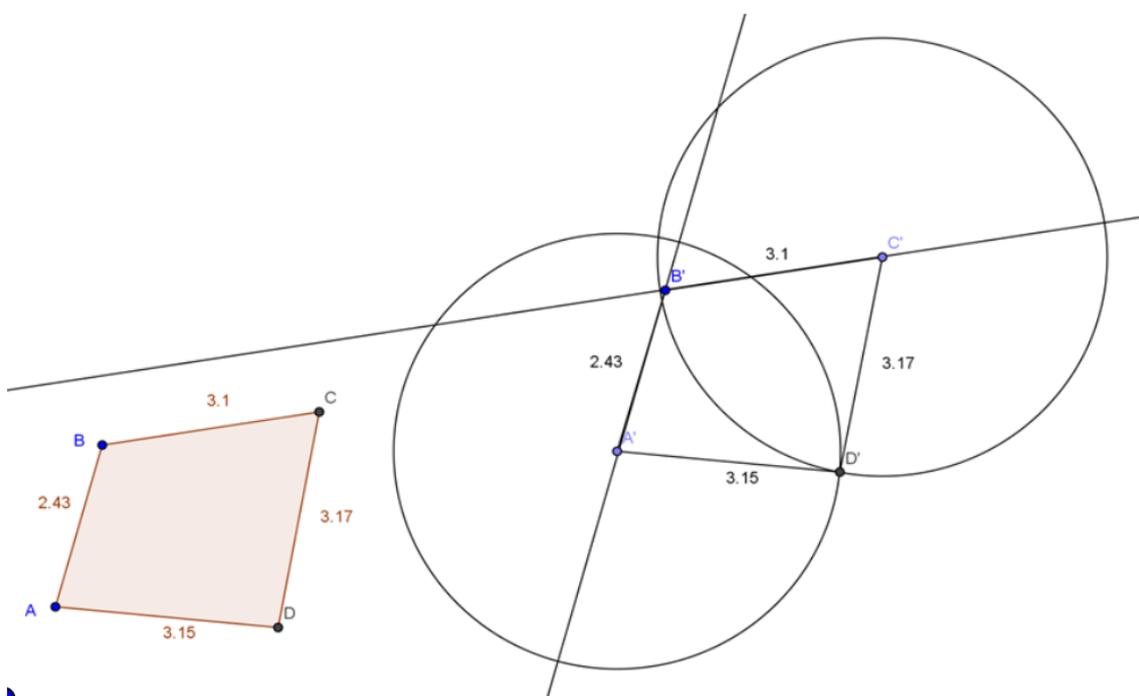


figura 59

O quadrilátero $ABCD$ é rígido, assim, ao término da construção, o aluno poderá sobrepor os quadriláteros $ABCD$ e $A'B'C'D'$, percebendo assim a congruência e posteriormente fazer a demonstração formal.

- Os casos pedidos nas atividades 2 e 4 não formam congruência e os contraexemplos estão no capítulo anterior.

- os casos 1 e 3 formam congruência. Vale lembrar que esta atividade é para alunos do nono ano do ensino fundamental e primeiro ano do ensino médio, assim as demonstrações ficam simples, uma vez que a soma dos 4 ângulos internos vale 360° e podemos dividir os quadriláteros em dois triângulos e trabalhar com congruência de triângulos.

- Na atividade, o professor poderá incentivar seus alunos a pensar em todas as possibilidades de congruência. Usando análise combinatória chegaria a 32 possibilidades, algumas impossíveis e outras repetidas (representando o mesmo caso). A ideia é construir com os alunos uma tabela como aquela que está feita no início do capítulo 3. O professor poderá pedir a seus alunos, na construção dessa tabela, que façam no Geogebra as construções dos contraexemplos quando não for um caso de congruência e que façam a demonstração quando for um caso de congruência. O professor poderá também questionar se os casos também são válidos para quadriláteros côncavos. No final capítulo 3 pode se encontrar todos os contraexemplos.

6 Dificuldades Previstas:

Os alunos poderão encontrar dificuldades na utilização do *software*, e o professor para evitar que tal situação desestime o aluno, deve seguir passo a passo com a turma em suas construções e intervir quando necessário. Dificuldades em justificar as respostas, uma vez que se trabalha com poucas ou nenhuma demonstrações no ensino básico. Pode se ter outras dificuldades. Uma delas pode ser na demonstração de casos de congruências, uma vez que alunos do ensino médio raramente são desafiados a demonstrar resultados, mesmo que os mais simples... Sem contar que muitos ainda não desenvolveram adequadamente o raciocínio dedutivo.

7 Análise Geral.

Essa é uma proposta de trabalho que mescla a prática de demonstrações com construções de régua e compasso com auxílio do *software Geogebra*.

O recurso digital tem papel fundamental, pois com a visualização, o aluno tem uma maior compreensão do que está sendo trabalhado. O principal ganho com o *software* é o poder da interação entre aluno e a situação problema. Contudo, o *software* se mal usado torna-se uma desvantagem, por exemplo: se for simplesmente utilizado para projetar imagens, como se fosse um Power Point, sem levar o aluno a pensar a interagir com problema real. Com o auxílio do Geogebra podemos testar hipóteses, o que seria inviável com régua e compasso.

Esta é apenas uma proposta de trabalho, pode ser adaptada, retirada ou acrescentada atividades de acordo com a realidade de cada turma.

CONSIDERAÇÕES

Esta dissertação se propôs a demonstrar os casos de congruência de quadriláteros em uma geometria neutra. Para isso no capítulo I construímos, de forma sistemática e axiomática, a geometria necessária para demonstrar os casos de congruência de triângulos, que são de fundamental importância na demonstração dos casos de congruência de quadriláteros. Essa abordagem axiomática da geometria tem um efeito indireto na sala de aula do ensino básico, uma vez que ajuda ao professor a “organizar as ideias” sobre conceitos que serão ensinados.

No capítulo III construímos uma tabela com os casos em que há e os que não há congruência de quadriláteros, demonstramos alguns casos e indicamos os casos análogos.

Na demonstração do caso AAALL (o mais delicado), onde não é possível dividir o quadrilátero em dois triângulos, um passo fundamental da demonstração é chamado de “deixar cair a perpendicular”, este fato está demonstrado no capítulo II em 2.12.

Ainda no capítulo III, construímos, contraexemplos para os casos em que não há congruência de quadriláteros.

Este trabalho contribui na formação do professor do ensino básico, uma vez que oferece uma abordagem factível para congruência, que foge a aplicação dos casos de congruências de triângulos como são tratados em sala, ou seja, decora se os casos de congruência e resoluções de exercícios que pouco acrescenta ao aluno.

Contribui também com uma proposta de atividade com uso de tecnologia para alunos do nono ano do ensino fundamental e primeiro ano do ensino médio.

APÊNDICE

Seguem abaixo o passo a passo das construções dos contra exemplos.

Contraexemplo LLLA:

Traçar dois círculos de mesmo raio que se interceptem em dois pontos C e C' , denominar um centro de ponto B e o outro centro de ponto D . Marcar um ponto A externo as circunferências de forma que $ABCD$ seja um quadrilátero convexo e $ABC'D$ seja um quadrilátero côncavo. Para traçar os lados usar na barra de ferramenta a opção traçar segmento.

Contraexemplo ALAAL

Traçar uma reta definida por dois pontos, sejam eles A e D . Traçar uma perpendicular ao segmento AD passando por A . Marcar um ponto B sobre essa perpendicular. Traçar uma reta perpendicular ao segmento AB passando por B . Marcar um ponto C nessa ultima perpendicular de modo que $ABCD$ seja um trapézio retângulo. Marcar o ponto C' interno ao segmento BC e traçar uma paralela ao segmento CD passando por C' . Seja D' a interseção dessa paralela com o segmento AD .

Contraexemplo ALALL:

Traçar uma reta definida por dois pontos sejam eles D e C . Traçar uma perpendicular ao segmento CD passando por D . Marcar o ponto B e traçar a circunferência de centro em B e raio BC de modo que ela intercepte o segmento CD em dois pontos distintos, C e C' , e não intercepte a perpendicular ao segmento DC . Traçar uma paralela a CD passando por B . Seja A o ponto de interseção da paralela a CD com a perpendicular a CD .

Contraexemplo ALLAL

Traçar duas circunferências concêntricas com raios distintos. Traçar uma secante a circunferência maior que seja externa a circunferência menor. Marcar um ponto A na secante externo as duas circunferências. Seja D' o ponto de interseção entre a secante e a circunferência mais próximo de A e D o outro ponto de interseção. Seja B o centro das circunferências. Traçar uma semicircunferência com extremidades em B e D e obter o ponto C , interseção entre a circunferência menor e a semicircunferência

traçada. Traçar a semicircunferência de extremidades em B e D' e obter o ponto C' , interseção da semicircunferência e a circunferência menor.

Contraexemplo AAAAL

Traçar uma circunferência de raio arbitrário e centro B . Traçar uma secante onde C e C' sejam os pontos de interseção com a circunferência. Traçar uma segunda secante de modo que o centro fique entre as duas secantes. Marcar D' na segunda secante e interior a circunferência, traçar uma paralela a reta $C'D'$ passando por C , obtendo o ponto D , interseção da paralela com a segunda secante. Para finalizar localiza o ponto A pertencente a segunda secante de modo que $ABCD$ e $ABC'D'$ sejam convexos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[BJ] Barbosa, - João Lucas Marques. Geometria Euclidiana Plana. Coleção do Professor de Matemática - Editora Sociedade Brasileira de Matemática.

[dCM] – do Carmo, Manfredo Perdigão. Geometrias Não-Euclidianas. Matemática Universitária, no. 6, 25-48 (1987).

[H] – Hilbert, David. The Foundations of Geometry, The Open Court Publishing Co, 2005.

[MM] Marvey, Matthew. - Geometry Illuminated an Illustrated Introduction to Euclidean & non-Euclidean Geometry. Disponível em <http://www.mcs.uvawise.edu/msh3e/resources/geometryBook/illuminationNeutralGeometry.pdf>