

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA**

Aralan Gessé Ribeiro de Jesus

**“PITÁGORAS: ESTENDENDO A DIMENSÃO DO
TEOREMA.”**

Florianópolis

2016

Aralan Gessé Ribeiro de Jesus

**“PITÁGORAS: ESTENDENDO A DIMENSÃO DO
TEOREMA.”**

Dissertação submetido ao Programa
de Mestrado Profissional em Matemática
para a obtenção do Grau de mestre.
Universidade Federal de Santa Cata-
rina
Orientador: Prof. Dr. Fernando de
Lacerda Mortari

Florianópolis

2016

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Ribeiro de Jesus , Aralan Gessé

Pitágoras: estendendo a dimensão do teorema. / Aralan
Gessé Ribeiro de Jesus ; orientador, Fernando de Lacerda
Mortari - Florianópolis, SC, 2016.
63 p.

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade
Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e
Matemáticas. Programa de Pós-Graduação em Matemática.

Inclui referências

1. Matemática. 2. Teorema de Pitágoras . 3. Álgebra
Linear . 4. Geometria Analítica . I. Mortari , Fernando de
Lacerda . II. Universidade Federal de Santa Catarina.
Programa de Pós-Graduação em Matemática. III. Título.

Aralan Gessé Ribeiro de Jesus

**“PITÁGORAS: ESTENDENDO A DIMENSÃO DO
TEOREMA.”**

Esta Dissertação foi julgada aprovada para a obtenção do Título de “mestre”, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática.

Florianópolis, 25 de Fevereiro 2016.

Prof. Dr. Celso Melchiades Doria
Coordenador
Universidade Federal de Santa Catarina

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Fernando de Lacerda Mortari
Universidade Federal de Santa Catarina
Orientador

Prof. Dr. Eliezer Batista
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Dr. Leonardo Koller Sacht
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Dr. Fabiano Carlos Cidral
Instituto Federal de Santa Catarina

Este trabalho é dedicado à minha querida e saudosa avó Erondina, que sempre me amou e, agora, descansa em um plano superior ao nosso.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, por sempre ter me protegido e me guiado e porque sem Ele nada seria possível.

À minha mãe Sara que, mesmo sem muito estudo, foi a melhor pedagoga da minha infância, pois conseguiu mostrar pra mim e para minhas irmãs a importância do conhecimento.

Ao meu pai Antônio Sadir, pela pessoa amorosa, compreensiva, paciente e bem humorada que foi. Queria poder dizer que sinto orgulho toda vez que olham pra mim e lembram dele.

A meu orientador Prof. Dr. Fernando Mortari, os meus mais sinceros agradecimentos, por sua paciência, dedicação, colaboração, pelo modo que me ajudou a desenvolver este trabalho, por suas dicas, ideias e, principalmente, por ser um exemplo de profissional a ser seguido.

Aos que foram mais que colegas de mestrado e se tornaram amigos. Em especial, à Ranúzy e ao Guilherme, que leram o trabalho em desenvolvimento e contribuíram para que ele fosse melhorado.

Aos professores Dr. Eliezer Batista, Dr. Leonardo Koller Sacht e Dr. Fabiano Carlos Cidral, que aceitaram compor a Banca Examinadora do trabalho e também contribuíram com correções e sugestões muito importantes.

A meus irmãos Éder, Deise, Denise, Aline, Salete e João e à toda minha família por todo incentivo e por sempre acreditarem em mim.

À Ana Águila, Ana Aline, Maria de Lurdes e à toda família Mendes, por todo apoio e pela diferença que causaram em minha vida desde o momento em que começaram a fazer parte dela.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pelo apoio financeiro.

E a todos, que de alguma maneira contribuíram na realização desse trabalho, o meu muito obrigado.

“Aprender é a única coisa de que a mente nunca se cansa, nunca tem medo e nunca se arrepende.”

(Leonardo da Vinci)

RESUMO

Conforme relatos históricos, é sabido que o Teorema de Pitágoras já era utilizado antes mesmo do nascimento do famoso matemático e filósofo grego. Neste trabalho, com auxílio de ferramentas da Álgebra Linear e da Geometria Analítica, será investigada uma generalização desse importante Teorema. O caso mais conhecido é o do \mathbb{R}^2 (em correspondência com o plano euclidiano), entretanto, será visto que existe um certo padrão matemático também para o \mathbb{R}^3 e \mathbb{R}^4 . Ainda, será apresentado um plano de aula, em que o “Teorema de Pitágoras no \mathbb{R}^3 ” poderá ser visualizado e compreendido por estudantes do Ensino Médio, através do software *GeoGebra* e conceitos da Geometria Analítica, estudados em sala.

Palavras-chave: Teorema de Pitágoras. Álgebra Linear. Geometria Analítica.

ABSTRACT

According to historical accounts, it is known that the Pythagorean theorem was already used even before the birth of the famous mathematician and Greek philosopher. In this paper, with the aid of the tools Linear Algebra and Analytic Geometry, a generalization of this important theorem will be investigated. The best known case is that of \mathbb{R}^2 (corresponding to the Euclidean plane), however, it will be seen that there is a certain mathematical pattern also for \mathbb{R}^3 and \mathbb{R}^4 . It will also be presented in the “Pythagoras’ theorem in \mathbb{R}^3 ” a lesson that can be understood by high school students through the software *GeoGebra* and concepts of analytic geometry , studied in class.

Keywords: Pythagorean theorem. Linear algebra. Analytic Geometry.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Pitágoras no plano	20
Figura 2	Ângulo entre dois vetores do \mathbb{R}^2	23
Figura 3	Ângulo entre dois vetores do \mathbb{R}^3	23
Figura 4	Cálculo do ângulo entre dois vetores do \mathbb{R}^2	24
Figura 5	Paralelogramo determinado por dois vetores de \mathbb{R}^2	27
Figura 6	Paralelogramo determinado por dois vetores de \mathbb{R}^3	27
Figura 7	Área do paralelogramo determinado por dois vetores de \mathbb{R}^2	28
Figura 8	Pitágoras em \mathbb{R}^2	33
Figura 9	Projeções de u sobre os planos coordenados	34
Figura 10	“Pitágoras” em \mathbb{R}^3	37
Figura 11	Paralelepípedo gerado por três vetores de \mathbb{R}^3	40
Figura 12	Paralelogramo e suas projeções, em \mathbb{R}^3	56
Figura 13	Áreas dos paralelogramos, em \mathbb{R}^3	57

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	19
2	CONCEITOS BÁSICOS	23
2.1	PARALELOGRAMO DETERMINADO POR DOIS VETORES	26
3	UMA GENERALIZAÇÃO PARA \mathbb{R}^3 DO TEOREMA DE PITÁGORAS	33
4	UMA GENERALIZAÇÃO PARA \mathbb{R}^4 DO TEOREMA DE PITÁGORAS	39
4.1	PARALELEPÍEDOS EM \mathbb{R}^3	39
4.2	PARALELEPÍEDOS EM \mathbb{R}^4	44
5	APLICAÇÃO NO ENSINO MÉDIO	55
5.1	A IDEIA DO TEOREMA DE PITÁGORAS (EM \mathbb{R}^3) ATRAVÉS DO GEOGEBRA	55
6	CONCLUSÃO	59
	REFERÊNCIAS	61

1 INTRODUÇÃO

Quando criança, enquanto cantava o trecho da música “Uma Arlinda mulher” dos “Mamonas Assassinas”, que diz que a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa, nem imaginava estar enunciando o Teorema de Pitágoras, teorema que abalou a filosofia pitagórica segundo a qual tudo dependia dos números inteiros e, ainda, contrariava o senso comum de que toda grandeza poderia ser expressa através de um número racional.

Pitágoras de Samos (572 a.C. – 496 a.C.), matemático grego nascido na ilha de Samos, parece que residiu por algum tempo no Egito e terminou por estabelecer-se na cidade de Crotona, na costa sudeste da Itália. Formou-se em torno de Pitágoras uma irmandade religiosa, filosófica e científica, uma escola de pensadores com elementos de misticismo.

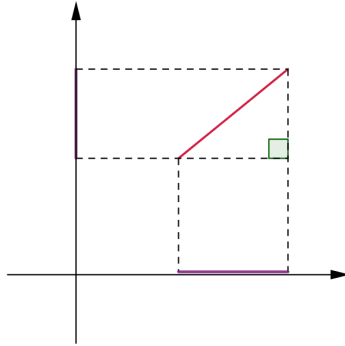
Tradicionalmente é comum atribuir a Pitágoras a descoberta do teorema que relaciona os lados de um triângulo retângulo, conhecido universalmente pelo seu nome. Contudo, esse teorema já era aplicado por civilizações anteriores há mais de um milênio antes dos primeiros trabalhos gregos nessa área serem desenvolvidos. Existem muitas evidências de que matemáticos babilônicos conheciam algoritmos para calcular os lados em casos específicos, mas não se sabe se conheciam um algoritmo tão geral quanto o teorema de Pitágoras. Esses dados históricos bem como a História de Pitágoras podem ser encontrados, de maneira mais detalhada, em (BOYER, 1974).

Os casos mais comuns da aplicação do teorema de Pitágoras são aqueles em que temos um triângulo retângulo, conhecemos a medida de dois de seus lados e queremos calcular a medida do terceiro. Porém, uma aplicação muito conhecida entre os pedreiros, é aquela em que a partir de um ponto a na quina entre o piso e a parede, medem por exemplo, 40 cm sobre a parede e marcam um ponto b , 30 cm sobre o piso e marcam um ponto c , então verificam se a distância entre os pontos b e c é de 50 cm. Isso mostra de, de fato, a parede está “no prumo”. Você teve que pensar para ver como a recíproca do teorema de Pitágoras foi aplicada nesse método utilizado pelos pedreiros? Pois é, muitas vezes eles não percebiam a recíproca ou até mesmo desconhecem o próprio Teorema, entretanto, usam um exemplo de terno pitagórico conhecido para verificar se a parede está perpendicular ao piso.

É intuitivo o fato de que um triângulo possui duas dimensões, ou seja, ao aplicarmos o teorema de Pitágoras da maneira em que está

posto, estamos trabalhando sobre um espaço bidimensional. Por exemplo, note que um segmento no *plano* faz sombras sobre eixos coordenados, e o Teorema de Pitágoras nos dá uma relação entre o comprimento do segmento e o comprimento de suas sombras, conforme a Figura 1.

Figura 1 – Pitágoras no plano



E no *espaço*, será que se tomarmos um objeto haverá uma relação entre o tamanho desse objeto e o tamanho de suas sombras nos planos coordenados?

No *plano*, conforme vimos acima, o teorema de Pitágoras é válido para segmentos, mas não teria sua relação respeitada se utilizássemos um quadrado ou um círculo. Isso nos faz pensar que, caso essa relação exista no *espaço*, ela também não será válida para qualquer objeto.

Tomemos, por exemplo, um cubo cujas faces são paralelas aos planos coordenados, no qual as sombras projetadas ortogonalmente sobre os planos coordenados serão quadrados. Agora, tome uma esfera, então as sombras ortogonais projetadas sobre os planos coordenados serão círculos e, visivelmente, a relação entre esses dois sólidos geométricos e suas sombras não tem como ser a mesma, bem como, se tomarmos um segmento, no espaço, o padrão da soma das sombras desse segmento sobre os planos coordenados pode variar de acordo com que sua posição varia. Assim, é possível perceber que não podemos tomar *qualquer* objeto a fim de obtermos a relação que procuramos.

Neste trabalho, vamos generalizar o teorema de Pitágoras para dimensões maiores. Como o público alvo dos leitores não são apenas os matemáticos (ou de áreas afins), buscaremos utilizar uma linguagem matemática simples e concisa, tanto quanto possível.

Para este fim, no capítulo 2, solicitaremos ao leitor que relembre os conceitos básicos da Álgebra Linear e da Geometria Analítica, para que possamos introduzir alguns resultados que utilizaremos no decorrer do trabalho. No capítulo 3 faremos a generalização do Teorema de Pitágoras em \mathbb{R}^3 e, no capítulo 4, será feita a generalização em \mathbb{R}^4 . Por fim, no capítulo 5, daremos uma sugestão de como abordar o tema do trabalho, em particular a generalização do teorema de Pitágoras em \mathbb{R}^3 , no Ensino Médio. Faremos isso através de um plano de aula.

2 CONCEITOS BÁSICOS

Como pré requisito para uma boa compreensão deste trabalho, precisaremos do conhecimento prévio de alguns conceitos básicos de Álgebra Linear e Geometria Analítica. Destacamos: segmento de reta, segmento orientado, relação de equipolência, matrizes, determinantes, vetor, dependência e independência linear, espaços vetoriais, transformações lineares, isomorfismo.

Caso o leitor veja a necessidade de lembrá-los, estes conceitos bem como outros que utilizaremos no decorrer do texto, podem ser encontrados em livros de Álgebra Linear e Geometria Analítica, como por exemplo os livros de (STEINBRUCH A.;WINTERLE, 1987) e (BOULOS P.;CAMARGO E OLIVEIRA, 2005) que tratam dos temas utilizando uma linguagem clara e objetiva.

Definição 2.0.1. *Dados dois vetores não nulos u e v , de \mathbb{R}^2 (ou de \mathbb{R}^3), definimos o ângulo entre u e v como o número real θ tal que $0 \leq \theta \leq \pi$, que representa o menor ângulo entre as semirretas \overrightarrow{Ou} e \overrightarrow{Ov} , conforme ilustramos abaixo na Figuras 2 e na Figura 3.*

Figura 2 – Ângulo entre dois vetores do \mathbb{R}^2

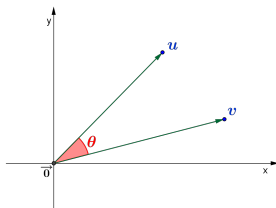
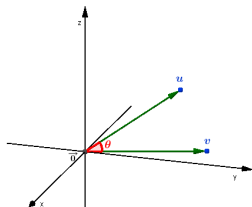


Figura 3 – Ângulo entre dois vetores do \mathbb{R}^3

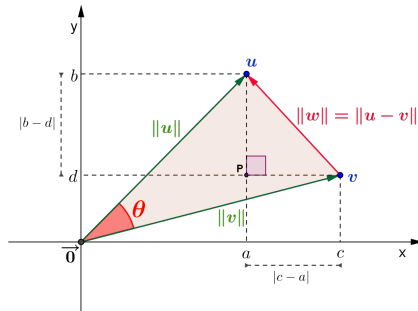


Percebemos que todo vetor de \mathbb{R}^2 (ou \mathbb{R}^3) é unicamente determinado por suas entradas. (Por exemplo, entradas 2 e 3, nesta ordem, especificam um único vetor de \mathbb{R}^2 , a saber, o ponto (2,3)).

Como vetores de \mathbb{R}^2 (ou \mathbb{R}^3) são determinados por suas entradas, dados os vetores não nulos u e v de \mathbb{R}^2 (ou \mathbb{R}^3), perguntamos ao leitor, será que o *ângulo* entre u e v pode ser determinado utilizando-se apenas as entradas de u e de v ?

Para responder essa pergunta, primeiramente considere u e v não nulos, pertencentes ao \mathbb{R}^2 , tais que $u = (a, b)$, $v = (c, d)$, e denotaremos como w o vetor obtido pela diferença entre os vetores u e v , ou seja, $w = u - v$ e portanto $\|w\| = \|u - v\|$, em que $\|w\|$ é a norma (ou comprimento), do vetor w . Conforme podemos observar na Figura 4.

Figura 4 – Cálculo do ângulo entre dois vetores do \mathbb{R}^2



Veja que, aplicando a lei dos cossenos no triângulo cujos vértices são os pontos \vec{O} , u e v , obtemos que:

$$\|w\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\|u\|\|v\|\cos\theta. \quad (2.1)$$

Por outro lado, utilizando o teorema de Pitágoras no triângulo de vértices P, u e v , percebemos que:

$$\begin{aligned} \|w\|^2 &= (|c - a|)^2 + (|b - d|)^2 \\ &= a^2 - 2ac + c^2 + b^2 - 2bd + d^2 \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2(ac + bd) \\ &= \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2(ac + bd). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Comparando as equações (2.1) e (2.2) temos que

$$\|u\|\|v\| \cos \theta = ac + bd.$$

Note que, como u e v são ambos não nulos, $\|u\|\|v\| > 0$. Além disso, conforme vimos na Definição 2.0.1, $0 \leq \theta \leq \pi$, e como $\cos \alpha$ assume, uma única vez, cada valor no intervalo $[-1, 1]$ quando α varia no intervalo $[0, \pi]$. Concluimos que, nesse intervalo, “não existem dois ângulos com o mesmo cosseno”, e portanto a expressão

$$\cos \theta = \frac{ac + bd}{\|u\|\|v\|}$$

determina, de modo único, o ângulo θ entre os vetores u e v .

O processo para determinarmos o ângulo θ entre dois vetores do \mathbb{R}^3 é análogo ao que acabamos de fazer em \mathbb{R}^2 . Nesse caso, basta tomarmos u e v não nulos, pertencentes ao \mathbb{R}^3 , tais que $u = (a, b, c)$, $v = (d, e, f)$ e, obteremos que

$$\cos \theta = \frac{ad + be + cf}{\|u\|\|v\|}.$$

Definição 2.0.2. *Sejam u e v vetores pertencentes ao \mathbb{R}^2 , em que $u = (a, b)$ e $v = (c, d)$, definimos o produto escalar de u e v , denotado por $\langle u, v \rangle$, como o número real*

$$\langle u, v \rangle = ac + bd.$$

Conforme vimos anteriormente, se u e v são vetores não nulos, temos que

$$\cos \theta = \frac{ac + bd}{\|u\|\|v\|},$$

então, pela Definição 2.0.2,

$$\cos = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\|\|v\|}.$$

Portanto,

$$\langle u, v \rangle = \|u\|\|v\| \cos \theta.$$

Analogamente ao modo em que obtemos o resultado acima, também podemos fazê-lo para dois vetores do \mathbb{R}^3 . Primeiramente, dados u e v vetores de \mathbb{R}^3 , tais que $u = (a, b, c)$ e $v = (d, e, f)$, então definimos o *produto escalar entre u e v* como o número real

$$\langle u, v \rangle = ad + be + cf.$$

Portanto, um argumento similar, utilizando a definição de produto escalar, mostra-nos que para vetores não nulos u e v de \mathbb{R}^3 também é válida a expressão

$$\langle u, v \rangle = \|u\| \|v\| \cos \theta.$$

2.1 PARALELOGRAMO DETERMINADO POR DOIS VETORES

Observe que uma consequência da maneira como a soma de vetores é definida, consiste no fato de que, se u e v são dois vetores linearmente independentes de \mathbb{R}^2 (ou de \mathbb{R}^3), então os vetores $\vec{0}$, u , v e $u+v$ são vértices de um paralelogramo. Isso motiva a definição a seguir.

Definição 2.1.1. *Dados vetores u e v de \mathbb{R}^2 (ou \mathbb{R}^3), com u , v e $\vec{0}$ não colineares, definimos o paralelogramo determinado pelos vetores u e v , como o paralelogramo cujos vértices são $\vec{0}$, u , v e $u+v$. Ou seja, dados vetores u e v pertencentes ao \mathbb{R}^2 (ou \mathbb{R}^3), o paralelogramo determinado por eles é o subconjunto de \mathbb{R}^2 (ou \mathbb{R}^3) dado por*

$$P = \{\alpha u + \beta v \mid \alpha, \beta \in [0, 1]\},$$

conforme a Figura 5 (e a Figura 6).

Note que mesmo no caso em que u , v e $\vec{0}$ são colineares, o conjunto P , como acima definido, ainda será chamado de “Paralelogramo” (degenerado) determinado por u e v .

Haja vista que temos a definição precisa de um paralelogramo determinado por dois vetores de \mathbb{R}^2 e como sabemos, da geometria plana, que a área de um paralelogramo se dá pelo produto da medida de sua base e de sua altura, na sequência vamos buscar uma maneira

Figura 5 – Paralelogramo determinado por dois vetores de \mathbb{R}^2 .

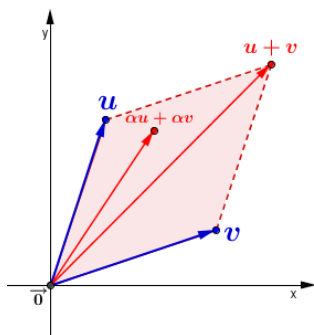
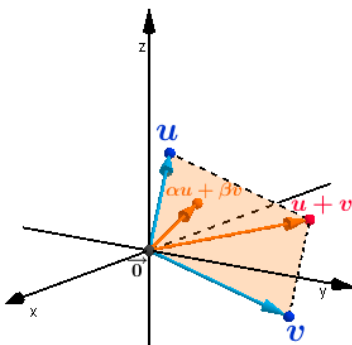


Figura 6 – Paralelogramo determinado por dois vetores de \mathbb{R}^3 .



de calcular a área desse paralelogramo utilizando apenas as entradas dos vetores u e v .

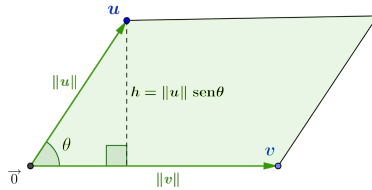
De acordo com a Definição 2.1.1, podemos perceber que o paralelogramo determinado por dois vetores u e v , de \mathbb{R}^2 , depende das entradas dos vetores u e v , ou seja, se alterarmos os vetores u e/ou v estaremos concomitantemente modificando o paralelogramo por eles determinado e, provavelmente, sua área também será modificada. Sendo assim, novamente questionamos ao leitor, será que podemos calcular a área A do paralelogramo determinado pelos vetores u e v , de \mathbb{R}^2 , conhecendo apenas as entradas desses vetores?

Para respondermos à essa nova questão, sejam $u = (a, b)$ e $v = (c, d)$ vetores não nulos de \mathbb{R}^2 . Se considerarmos θ o ângulo entre u e v , e tomarmos $\|v\|$ como medida da base do paralelogramo determinado

por u e v , então a medida de sua altura h será dada por $h = \|u\|\text{sen}\theta$, conforme a Figura 7. Portanto, obtemos que

$$\begin{aligned} A &= \|v\|h \\ &= \|v\|\|u\|\text{sen}\theta. \end{aligned}$$

Figura 7 – Área do paralelogramo determinado por dois vetores de \mathbb{R}^2 .



Utilizando uma linguagem vetorial e o produto escalar da Definição 2.0.2, obteremos uma expressão muito simples para calcular a área desse paralelogramo. De fato, se $u = (a, b)$, $v = (c, d)$ e θ é o ângulo entre u e v então:

$$A = \|v\|\|u\|\text{sen}\theta,$$

e ainda

$$A^2 = \|v\|^2\|u\|^2\text{sen}^2\theta.$$

Pela relação fundamental da trigonometria

$$\text{sen}^2\theta = 1 - \cos^2\theta,$$

segue que:

$$\begin{aligned} A^2 &= \|v\|^2\|u\|^2\text{sen}^2\theta \\ &= \|v\|^2\|u\|^2(1 - \cos^2\theta) \\ &= \|v\|^2\|u\|^2 - (\|v\|\|u\|\cos\theta)^2 \\ &= \|u\|^2\|v\|^2 - \langle u, v \rangle^2 \\ &= (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) - (ac + bd)^2 \\ &= (ad)^2 - 2acbd + (bc)^2 \\ &= (ad - bc)^2. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{(ad - bc)^2} \\ &= |ad - bc| \\ &= \left| \det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \right|. \end{aligned}$$

Logo, podemos concluir que para calcular a área do paralelogramo determinado por dois vetores u e v de \mathbb{R}^2 , basta tomarmos o módulo do determinante de uma certa matriz de ordem 2, cujas colunas contêm as entradas ordenadas de u e de v .

A seguir, definiremos de modo preciso, uma operação entre vetores que terá grande utilidade em nosso trabalho, denominada como produto vetorial.

Definição 2.1.2. *Dados vetores $u = (u_1, u_2, u_3)$ e $v = (v_1, v_2, v_3)$ em \mathbb{R}^3 , definimos o produto vetorial entre u e v , denotado por $u \times v$, como o vetor do \mathbb{R}^3 dado por*

$$u \times v = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1)$$

Proposição 2.1.1. *Para quaisquer $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ e $\kappa \in \mathbb{R}$, temos que o produto vetorial possui as seguintes propriedades:*

- (i) $u \times v = -v \times u$;
- (ii) $u \times (v + w) = (u \times v) + (u \times w)$;
- (iii) $(\kappa u) \times v = \kappa(u \times v) = u \times (\kappa v)$;
- (iv) $(u \times v) \perp u$ e $(u \times v) \perp v$, ou seja, o vetor obtido pelo produto vetorial de u e v é perpendicular a u e a v .

A demonstração da Proposição 2.1.1 pode ser encontrada, por exemplo, em (STEINBRUCH A.; WINTERLE, 1987).

Proposição 2.1.2. *Sejam u e v vetores de \mathbb{R}^3 . Temos que:*

- (i) $\|u \times v\|^2 = \|u\|^2\|v\|^2 - \langle u, v \rangle^2$;
- (ii) $\|u \times v\| = \|u\|\|v\|\text{sen}\theta$, em que θ é o ângulo entre u e v , com u e v não nulos.

Demonstração. (i): Sejam $u = (x_1, y_1, z_1)$ e $v = (x_2, y_2, z_2)$. Pela definição de produto vetorial, sabemos que

$$u \times v = (y_1 z_2 - z_1 y_2, z_1 x_2 - x_1 z_2, x_1 y_2 - y_1 x_2),$$

então,

$$\begin{aligned} \|u \times v\|^2 &= (y_1 z_2 - z_1 y_2)^2 + (-x_1 z_2 + z_1 x_2)^2 + (x_1 y_2 - y_1 x_2)^2 \\ &= y_1^2 z_2^2 - 2y_1 z_2 z_1 y_2 + z_1^2 y_2^2 + x_1^2 z_2^2 - 2x_1 z_2 z_1 x_2 + z_1^2 x_2^2 + x_1^2 y_2^2 - 2x_1 y_2 y_1 x_2 + y_1^2 x_2^2 \\ &= (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) - (x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2)^2 \end{aligned}$$

Observando que

$$(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) = \|u\|^2 \|v\|^2$$

e

$$(x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2)^2 = \langle u, v \rangle^2,$$

podemos concluir que

$$\|u \times v\|^2 = \|u\|^2 \|v\|^2 - \langle u, v \rangle^2.$$

(ii): Sabemos que

$$\langle u, v \rangle = \|u\| \|v\| \cos \theta.$$

Então, de (i) segue que

$$\|u \times v\|^2 = \|u\|^2 \|v\|^2 - (\|u\| \|v\| \cos \theta)^2.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \|u \times v\|^2 &= \|u\|^2 \|v\|^2 - \|u\|^2 \|v\|^2 \cos^2 \theta \\ &= \|u\|^2 \|v\|^2 (1 - \cos^2 \theta) \\ &= \|u\|^2 \|v\|^2 \sin^2 \theta, \end{aligned}$$

mostrando que

$$\|u \times v\| = \|u\| \|v\| \sin \theta.$$

■

Proposição 2.1.3. *A norma do produto vetorial de dois vetores não nulos u e v em \mathbb{R}^3 mede a área do paralelogramo determinado por esses vetores.*

Demonstração. De fato, denotando a área do paralelogramo por $A(P)$, e tomando a medida da base b do paralelogramo como $b = \|u\|$, teremos que a medida da altura h é dada por $h = \|v\|\text{sen}\theta$. Assim, temos que

$$\begin{aligned} A(P) &= bh \\ &= \|u\|\|v\|\text{sen}\theta. \end{aligned}$$

Logo, pela Proposição 2.1.2, podemos concluir que

$$A(P) = \|u \times v\|.$$



3 UMA GENERALIZAÇÃO PARA \mathbb{R}^3 DO TEOREMA DE PITÁGORAS

Nesse momento, para motivar e facilitar a compreensão do nosso trabalho, voltaremos a abordar, agora de uma maneira mais precisa, o exemplo utilizado na introdução.

Dado um vetor não nulo $v = (a, b)$, $v \in \mathbb{R}^2$, temos que v não determina um paralelogramo, mas um segmento de reta, que denotaremos por S , tal que

$$S = \{\alpha v \mid \alpha \in [0, 1]\}.$$

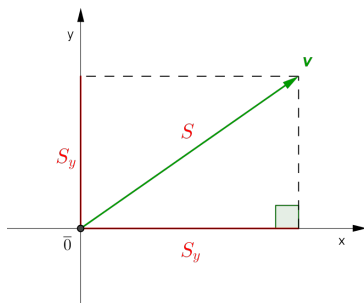
Projetando S ortogonalmente nos *eixos coordenados* Ox e Oy teremos que as sombras (projeções) de S serão os segmentos

$$S_x = \{(\alpha a, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha \in [0, 1]\}, \text{ e}$$

$$S_y = \{(0, \alpha b) \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha \in [0, 1]\}.$$

Sejam s , s_x e s_y os comprimentos dos segmentos S , S_x e S_y , respectivamente. Pelo Teorema de Pitágoras, como podemos observar na Figura 8, segue que $s^2 = s_x^2 + s_y^2$.

Figura 8 – Pitágoras em \mathbb{R}^2 .



Ou seja, vimos que um segmento determinado por um vetor v , em \mathbb{R}^2 , projeta ortogonalmente sombras nos eixos coordenados, em que a soma dos quadrados dos comprimentos das sombras do segmento é igual ao quadrado do comprimento do segmento determinado por v .

Queremos transportar a ideia acima para \mathbb{R}^3 , na qual estaremos “somando uma dimensão”; para isso, observe que na construção feita em \mathbb{R}^2 , temos:

- um *segmento* determinado por 1 vetor;
- projeções ortogonais sobre *eixos coordenados*;
- relação entre o *comprimento* do segmento e os comprimentos de suas “sombras” sobre os eixos coordenados.

Portanto, seguindo a ideia de “somar um”, ao levarmos para uma situação uma dimensão maior, queremos:

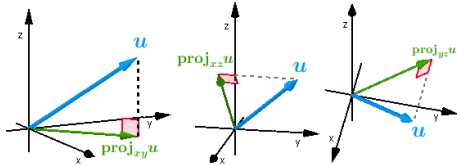
- um *paralelogramo* determinado por 2 vetores;
- projeções ortogonais sobre *planos coordenados*;
- relação entre a *área* do paralelogramo e as áreas de suas “sombras” sobre os planos coordenados.

Será que nesse caso o padrão se mantém? Ou seja, será que a soma dos quadrados das áreas das sombras do paralelogramo será igual ao quadrado da área do paralelogramo?

Para respondermos à essa intrigante pergunta, na sequência, começaremos definindo as “sombras” de um vetor do \mathbb{R}^3 , nos planos coordenados.

Definição 3.0.1. *Seja u um vetor de \mathbb{R}^3 , tal que $u = (u_1, u_2, u_3)$, definimos a projeção ortogonal de u sobre o plano xy , denotada por $\text{proj}_{xy} u$, como o vetor $(u_1, u_2, 0)$. De maneira análoga, definimos as projeções do vetor $u = (u_1, u_2, u_3)$ sobre os planos xz e yz , respectivamente, por $\text{proj}_{xz} u = (u_1, 0, u_3)$ e $\text{proj}_{yz} u = (0, u_2, u_3)$, conforme a Figura 9.*

Figura 9 – Projeções de u sobre os planos coordenados.



Proposição 3.0.1. *A função $\text{proj}_{xy} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, que associa a cada vetor u de \mathbb{R}^3 sua projeção no plano xy , é uma transformação linear.*

Demonstração. De fato, sejam $u, v \in \mathbb{R}^3$ e $\kappa \in \mathbb{R}$ quaisquer, com $u = (u_1, u_2, u_3)$ e $v = (v_1, v_2, v_3)$; temos que:

(i)

$$\begin{aligned} \text{proj}_{xy}(u + v) &= \text{proj}_{xy}[(u_1, u_2, u_3) + (v_1, v_2, v_3)] \\ &= \text{proj}_{xy}(u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3) \\ &= (u_1 + v_1, u_2 + v_2, 0) \\ &= (u_1, u_2, 0) + (v_1, v_2, 0) \\ &= \text{proj}_{xy}u + \text{proj}_{xy}v. \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} \text{proj}_{xy}(\kappa u) &= \text{proj}_{xy}[\kappa(u_1, u_2, u_3)] \\ &= \text{proj}_{xy}(\kappa u_1, \kappa u_2, \kappa u_3) \\ &= (\kappa u_1, \kappa u_2, 0) \\ &= \kappa(u_1, u_2, 0) \\ &= \kappa \text{proj}_{xy}(u). \end{aligned}$$

Segue que proj_{xy} é uma transformação linear. ■

De maneira análoga, podemos mostrar que proj_{xz} e proj_{yz} , definidas similarmente, também são transformações lineares.

Seja P o paralelogramo determinado por $u, v \in \mathbb{R}^3$. Questionamos ao leitor, quem é geometricamente a projeção de P sobre o plano xy , definida por $\text{proj}_{xy}(P) = \{\text{proj}_{xy}(w) \mid w \in P\}$?

Primeiro veja que, se $w \in P$, então existem $\alpha, \beta \in [0, 1]$ tais que $w = \alpha u + \beta v$. Como, pela Proposição 3.0.1, proj_{xy} é transformação linear,

$$\begin{aligned} \text{proj}_{xy}(w) &= (\alpha u + \beta v) \\ &= \alpha \text{proj}_{xy}u + \beta \text{proj}_{xy}v. \end{aligned}$$

Logo, $\text{proj}_{xy}(w)$ é combinação linear dos vetores $u' = \text{proj}_{xy}u$ e $v' = \text{proj}_{xy}v$.

Seja P_{xy} o paralelogramo em \mathbb{R}^3 determinado por u' e v' . Pelo que vimos acima, $\text{proj}_{xy}(w) \in P_{xy}$, logo $\text{proj}_{xy}(P) \subseteq P_{xy}$.

Observe ainda que, se $w' \in P_{xy}$, então existem $\alpha, \beta \in [0, 1]$ tais que $w' = \alpha u' + \beta v'$, ou seja,

$$\begin{aligned} w' &= \alpha u' + \beta v' \\ &= \alpha \text{proj}_{xy} u + \beta \text{proj}_{xy} v \\ &= \text{proj}_{xy}(\alpha u + \beta v). \end{aligned}$$

Note que, como $\alpha u + \beta v \in P$, obtemos que $w' \in \text{proj}_{xy}(P)$ e, portanto, $P_{xy} \subseteq \text{proj}_{xy}(P)$. Dessa forma podemos concluir que $\text{proj}_{xy}(P) = P_{xy}$, ou seja, geometricamente a projeção do paralelogramo determinado por dois vetores u e v de \mathbb{R}^3 sobre o plano xy é igual ao paralelogramo determinado pelos vetores que são as projeções de u e v sobre o plano xy .

Temos resultados análogos para os paralelogramos P_{xz} e P_{yz} , dados pelas projeções ortogonais de P sobre os planos xz e yz , respectivamente.

Digamos que $u = (u_1, u_2, u_3)$ e $v = (v_1, v_2, v_3)$. Agora vamos calcular a área dos paralelogramos P_{xy} , P_{xz} e P_{yz} .

Começaremos encontrando a área de P_{xy} , que é determinado por $\text{proj}_{xy} u = (u_1, u_2, 0)$ e $\text{proj}_{xy} v = (v_1, v_2, 0)$. Deste modo, note que

$$\begin{aligned} \text{proj}_{xy} u \times \text{proj}_{xy} v &= (u_2 \cdot 0 - 0 \cdot v_2, 0 \cdot v_1 - u_1 \cdot 0, u_1 v_2 - u_2 v_1) \\ &= (0, 0, u_1 v_2 - u_2 v_1), \end{aligned}$$

logo, pela Proposição 2.1.3, temos que a área de P_{xy} , que denotaremos por $A(P_{xy})$, é dada por

$$\begin{aligned} A(P_{xy}) &= \|\text{proj}_{xy} u \times \text{proj}_{xy} v\| \\ &= \|(0, 0, u_1 v_2 - u_2 v_1)\| \\ &= \sqrt{(u_1 v_2 - u_2 v_1)^2} \\ &= |u_1 v_2 - u_2 v_1|. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Utilizando um raciocínio análogo ao que acabamos de desenvolver para calcular a área $A(P_{xy})$ de P_{xy} , calculamos a área $A(P_{xz})$ do paralelogramo P_{xz} , determinado por $\text{proj}_{xz} u = (u_1, 0, u_3)$ e $\text{proj}_{xz} v = (v_1, 0, v_3)$, bem como a área $A(P_{yz})$ de P_{yz} , determinado por $\text{proj}_{yz} u = (0, u_2, u_3)$ e $\text{proj}_{yz} v = (0, v_2, v_3)$, obtendo que

$$A(P_{xz}) = |u_3 v_1 - u_1 v_3| \tag{3.2}$$

e

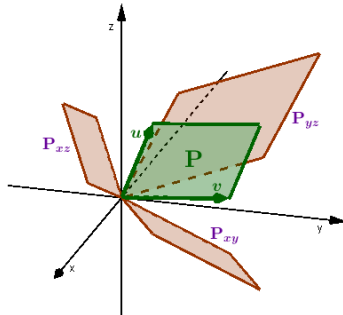
$$A(P_{yz}) = |u_2v_3 - u_3v_2|. \quad (3.3)$$

Finalmente, combinando os resultados obtidos em 3.1, 3.2 e 3.3 podemos verificar que:

$$\begin{aligned} & [A(P_{xy})]^2 + [A(P_{xz})]^2 + [A(P_{yz})]^2 = \\ & = |u_1v_2 - u_2v_1|^2 + |u_3v_1 - u_1v_3|^2 + |u_2v_3 - u_3v_2|^2 \\ & = (u_2v_3 - u_3v_2)^2 + (u_3v_1 - u_1v_3)^2 + (u_1v_2 - u_2v_1)^2 \\ & = \left(\sqrt{(u_2v_3 - v_2u_3)^2 + (u_3v_1 - v_3u_1)^2 + (u_1v_2 - u_2v_1)^2} \right)^2 \\ & = \|(u_2v_3 - v_2u_3, u_3v_1 - v_3u_1, u_1v_2 - u_2v_1)\|^2 \\ & = \|u \times v\|^2 \\ & = [A(P)]^2. \end{aligned}$$

Observe que, de acordo com o que acabamos de provar e conforme podemos observar na Figura 10, o quadrado da área de um paralelogramo P em \mathbb{R}^3 é igual a soma dos quadrados das áreas das projeções ortogonais de P sobre os planos coordenados.

Figura 10 – “Pitágoras” em \mathbb{R}^3 .



4 UMA GENERALIZAÇÃO PARA \mathbb{R}^4 DO TEOREMA DE PITÁGORAS.

Nesse capítulo, estaremos “somando mais uma dimensão”; a fim de transportarmos a ideia do Teorema de Pitágoras para o \mathbb{R}^4 . Para isso, note que na construção feita no capítulo anterior, em \mathbb{R}^3 , trabalhamos com:

- um *paralelogramo* determinado por 2 vetores;
- um projeções ortogonais sobre *planos coordenados*;
- relação entre a *área* do paralelogramo e as áreas de suas sombras sobre os planos coordenados.

Agora, seguindo a ideia de “somar um”, ao levarmos para uma situação uma dimensão maior, queremos:

- um *paralelepípedo* determinado por 3 vetores;
- projeções ortogonais sobre *hiperplanos tridimensionais coordenados*;
- relação entre o *volume* do paralelepípedo e os volumes de suas sombras sobre os hiperplanos tridimensionais coordenados.

4.1 PARALELEPÍPEDOS EM \mathbb{R}^3

Começaremos definindo um paralelepípedo determinado por três vetores em \mathbb{R}^3 e, logo após, enunciaremos um teorema que trata do cálculo do volume desse paralelepípedo.

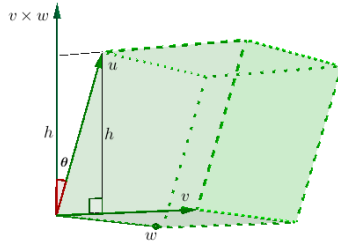
Definição 4.1.1. *Sejam $u = (x_1, y_1, z_1)$, $v = (x_2, y_2, z_2)$ e $w = (x_3, y_3, z_3)$, vetores de \mathbb{R}^3 . Definimos o paralelepípedo determinado por u , v e w , como*

$$P = \{\alpha_1 u + \alpha_2 v + \alpha_3 w \mid \alpha_1, \alpha_2 \text{ e } \alpha_3 \in [0, 1]\}.$$

Teorema 4.1.1. *Sejam u , v e w vetores de \mathbb{R}^3 e a matriz $A = \begin{bmatrix} | & | & | \\ u & v & w \\ | & | & | \end{bmatrix}$.*

O volume do paralelepípedo P gerado pelos vetores u , v e w , que denotaremos por $\text{Vol}(P)$, é dado por $\sqrt{\det A^T \cdot A}$.

Figura 11 – Paralelepípedo gerado por três vetores de \mathbb{R}^3 .



Demonstração. Sem perda de generalidade, tomemos um paralelepípedo disposto conforme o da Figura 11. Então, h denota a altura do paralelepípedo e θ é o ângulo entre u e $v \times w$. Como, pela Proposição 2.1.2 sabemos que, $u \times w$ é um vetor perpendicular aos vetores u e w temos que

$$h = \|u\| \cos \theta.$$

Perceba que área da base do paralelepípedo é a área do paralelogramo determinado por v e w , ou seja, é dada por

$$\|v \times w\|.$$

Logo, se $\text{Vol}(P)$ representa o volume do paralelepípedo, obtemos

$$\begin{aligned} \text{Vol}(P) &= \|v \times w\| \|u\| \cos \theta \\ &= \langle u, (v \times w) \rangle. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Utilizando as definições de produto interno e produto vetorial em \mathbb{R}^3 , pode-se verificar que

$$\langle u, (v \times w) \rangle = \det \begin{bmatrix} | & | & | \\ u & v & w \\ | & | & | \end{bmatrix}. \quad (4.2)$$

Denotando a matriz

$$A = \begin{bmatrix} | & | & | \\ u & v & w \\ | & | & | \end{bmatrix}$$

e, utilizando as equações 4.1 e 4.2, podemos concluir que o volume do paralelepípedo gerado pelos vetores u , v e w é dado por

$$\begin{aligned} \text{Vol(P)} &= |\langle u, (v \times w) \rangle| \\ &= |\det A| \\ &= \sqrt{(\det A)^2} \\ &= \sqrt{\det A \cdot \det A} \\ &= \sqrt{\det A^T \cdot \det A} \\ &= \sqrt{\det A^T \cdot A}. \end{aligned}$$

■

Com isso, ainda podemos observar que $\text{Vol(P)} = 0 \Leftrightarrow \det A = 0$, ou seja, $\text{Vol(P)} = 0$ se, e somente se, os vetores u, v, w são linearmente dependentes.

Nosso próximo passo consistirá em trabalharmos com um paralelepípedo gerado por três vetores de \mathbb{R}^4 , então, precisamos definir o *volume* deste objeto. Para obtermos uma definição precisa necessitamos de uma preparação, que faremos na sequência, enunciando alguns resultados importantes. Para isso, consideramos que o leitor já está familiarizado com a Álgebra Linear.

Definição 4.1.2. *Sejam V e W espaços vetoriais com produto interno, ambos com dimensão n . Uma isometria de V em W é uma transformação linear $T : V \rightarrow W$ que preserva o produto interno:*

$$\langle T(v_1), T(v_2) \rangle_W = \langle v_1, v_2 \rangle_V, \forall v_1, v_2 \in V.$$

Proposição 4.1.2. *Sejam V e W espaços vetoriais com produto interno, ambos com dimensão n . Se a transformação linear $T : V \rightarrow W$ é uma isometria, então T é um isomorfismo.*

Demonstração. É suficiente mostrarmos que T é uma aplicação injetiva, uma vez que a transformação linear T está definida em dois espaços vetoriais de mesma dimensão n . Para isto, consideremos um vetor arbitrário $u \in \text{Ker}(T)$. Então, usando que $\langle T(u), T(u) \rangle_W = \langle u, u \rangle_V$, temos que

$$\begin{aligned} T(u) = 0 &\Leftrightarrow \|T(u)\| = 0 \\ &\Leftrightarrow \|T(u)\|^2 = \langle T(u), T(u) \rangle_W = 0 \\ &\Leftrightarrow \langle u, u \rangle_V = \|u\|^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \|u\| = 0 \\ &\Leftrightarrow u = 0 \end{aligned}$$

Assim, $\text{Ker}(T) = \{\vec{0}_V\}$.

Logo, T é injetora e, portanto, isomorfismo. ■

Uma consequência imediata da Proposição 4.1.2 é o fato de que toda isometria é invertível e, além disso, na sequência vamos provar que a inversa de uma isometria também é uma isometria.

Proposição 4.1.3. *Sejam V e W espaços vetoriais, de dimensão n , e $T : V \rightarrow W$ isometria. Então $T^{-1} : W \rightarrow V$, em que T^{-1} é a inversa de T , também é isometria.*

Demonstração. Sejam $w_1, w_2 \in W$ quaisquer. Sabemos que T é isometria, logo é isomorfismo e, em particular, sobrejetora. Desse modo, existem $v_1, v_2 \in V$, tais que, $w_1 = T(v_1), w_2 = T(v_2)$, e temos que

$$\begin{aligned} \langle T^{-1}(w_1), T^{-1}(w_2) \rangle_V &= \langle T^{-1}(T(v_1)), T^{-1}(T(v_2)) \rangle_V \\ &= \langle v_1, v_2 \rangle_V \\ &= \langle T(v_1), T(v_2) \rangle_W \\ &= \langle w_1, w_2 \rangle_W. \end{aligned}$$

Portanto, temos o resultado. ■

O próximo resultado nos dá caracterizações equivalentes de isometrias.

Proposição 4.1.4. *Sejam V e W espaços vetoriais com produto interno de mesma dimensão n , e $T : V \rightarrow W$ uma transformação linear.*

São equivalentes:

- 1) T é isometria.
- 2) Se $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é base ortonormal de V então $\{T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_n)\}$ é base ortonormal de W .
- 3) Existe uma base ortonormal $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ de V tal que $\{T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_n)\}$ é base ortonormal de W .

Demonstração.

1) \Rightarrow 2) Seja $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ uma base ortonormal de V . Como, pela Proposição 4.1.2, T é um isomorfismo e, desse modo já sabemos que $T(B) = \{T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_n)\}$ é uma base de W .

Agora, pelo fato de T ser isometria, temos que

$$\langle T(v_i), T(v_j) \rangle = \langle v_i, v_j \rangle, \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\},$$

e como $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é uma base ortonormal de V , segue que $\{T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_n)\}$ é uma base ortonormal de W .

2) \Rightarrow 3) Seja $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ uma base de V . Sendo assim basta aplicarmos o processo de ortonormalização de Gram-Schmidt para obtermos uma base $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ ortonormal.

Então, pelo item 2), $\{T(w_1), T(w_2), \dots, T(w_n)\}$ é uma base ortonormal de W .

3) \Rightarrow 1) Como, $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ é uma base ortonormal de V e $\{T(w_1), T(w_2), \dots, T(w_n)\}$ é uma base ortonormal de W , temos que

$$\begin{aligned} \langle w_i, w_j \rangle &= \langle T(w_i), T(w_j) \rangle = 1, \text{ se } i = j, \text{ ou} \\ \langle w_i, w_j \rangle &= \langle T(w_i), T(w_j) \rangle = 0, \text{ se } i \neq j, \text{ assim} \\ \langle w_i, w_j \rangle &= \langle T(w_i), T(w_j) \rangle, \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}. \end{aligned}$$

Portanto, T é isometria. ■

A próxima proposição nos diz que a composição de isometrias também é isometria.

Proposição 4.1.5. *Sejam U , V e W espaços vetoriais com produto interno, ambos com dimensão n , e $T : U \rightarrow V$ e $S : V \rightarrow W$ isometrias. Então, a composição $S \circ T$ é isometria.*

Demonstração. Sejam as isometrias $T : U \rightarrow V$ e $S : V \rightarrow W$ e a composição $S \circ T$. Dados $u, v \in U$ quaisquer, temos que

$$\begin{aligned} \langle S \circ T(u), S \circ T(v) \rangle_W &= \langle S(T(u)), S(T(v)) \rangle_W \\ &= \langle T(u), T(v) \rangle_W \\ &= \langle u, v \rangle_U \end{aligned}$$

Logo, a composição $S \circ T$ é isometria. ■

4.2 PARALELEPÍPEDOS EM \mathbb{R}^4

A seguir definiremos de maneira precisa um paralelepípedo determinado por três vetores em \mathbb{R}^4 .

Definição 4.2.1. *Dados vetores $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^4$, definimos o paralelepípedo determinado por v_1, v_2 e v_3 , é o conjunto*

$$P = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 \mid \alpha_1, \alpha_2 \text{ e } \alpha_3 \in [0, 1]\}.$$

Queremos definir o *volume* de P , que denotaremos por $\text{Vol}(P)$.

Caso o conjunto $\{v_1, v_2, v_3\}$ seja linearmente dependente, definimos $\text{Vol}(P) = 0$.

Porém, se $\{v_1, v_2, v_3\}$ for linearmente independente, então o subespaço vetorial de \mathbb{R}^4 gerado pelos vetores v_1, v_2 e v_3 , digamos V , terá dimensão 3, e $\{v_1, v_2, v_3\}$ é uma base de V . Podemos utilizar o processo de ortonormalização de Gram-Schmidt em $\{v_1, v_2, v_3\}$ para obtermos uma base ortonormal $\{u_1, u_2, u_3\}$ para V (considerando o produto interno usual, tanto em \mathbb{R}^3 quanto em \mathbb{R}^4).

Seja $T : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ a transformação linear determinada por seus

valores na base ortonormal $\{u_1, u_2, u_3\}$, dados por

$$\begin{aligned} T(u_1) &= e_1 = (1, 0, 0), \\ T(u_2) &= e_2 = (0, 1, 0), \\ T(u_3) &= e_3 = (0, 0, 1). \end{aligned}$$

Note que T leva uma base ortonormal de V em uma base ortonormal de \mathbb{R}^3 , logo, pela Proposição 4.1.4 temos que T é uma isometria.

Proposição 4.2.1. *Com a notação acima $T(P) = \{T(v) \mid v \in P\}$ é o paralelepípedo em \mathbb{R}^3 gerado pelos vetores $T(v_1), T(v_2)$ e $T(v_3)$.*

Demonstração. De fato, sejam $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^4$, pela Definição 4.2.1, temos que

$$\begin{aligned} P &= \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 \mid \alpha_1, \alpha_2 \text{ e } \alpha_3 \in [0, 1]\}. \text{ Então,} \\ T(P) &= \{T(\alpha_1 v_1) + T(\alpha_2 v_2) + T(\alpha_3 v_3) \mid \alpha_1, \alpha_2 \text{ e } \alpha_3 \in [0, 1]\} \\ &= \{\alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) + \alpha_3 T(v_3) \mid \alpha_1, \alpha_2 \text{ e } \alpha_3 \in [0, 1]\}. \end{aligned}$$

Como $T(v_1), T(v_2)$ e $T(v_3)$ são vetores de \mathbb{R}^3 , pela Definição 4.1.1, temos o resultado. ■

Conforme acabamos de ver na Proposição 4.2.1, $T(P)$ é um paralelepípedo em \mathbb{R}^3 , desse modo, pelo Teorema 4.1.1, sabemos calcular seu volume.

Definição 4.2.2. *Sejam $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^4$ vetores linearmente independentes, V o subespaço gerado por $\{v_1, v_2, v_3\}$, $\{u_1, u_2, u_3\}$ uma base ortonormal de V e $T : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ a transformação linear em que $\{T(u_1), T(u_2), T(u_3)\}$ é a base canônica de \mathbb{R}^3 . Então, se P e $T(P)$ são os paralelepípedos determinados, respectivamente, pelos vetores u_1, u_2, u_3 em \mathbb{R}^4 e $T(u_1), T(u_2), T(u_3)$ em \mathbb{R}^3 , definimos $\text{Vol}(P)$ como sendo o volume do paralelepípedo $T(P)$, isto é,*

$$\text{Vol}(P) = \text{Vol}(T(P)).$$

Aqui, surge-nos um problema, pois a princípio nossa definição dependeu da escolha de uma base ortonormal de V . Se tomássemos uma outra base ortonormal, ela produziria um outro paralelepípedo $T(P)$ em \mathbb{R}^3 que, talvez, poderia ter um volume diferente.

Apesar disso, mostraremos que o volume não se altera, independentemente da base ortonormal escolhida.

De fato, tome outra base ortonormal para V , dada por $\{w_1, w_2, w_3\}$. Seja $S : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ a isometria determinada por $S(w_1) = e_1$, $S(w_2) = e_2$ e $S(w_3) = e_3$. Pela Proposição 4.1.3 sabemos que S^{-1} é isometria, além disso, pela Proposição 4.1.5, $R : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada pela composição $R = T \circ S^{-1}$ também é isometria; desse modo temos que $T = R \circ S$. Se B é a matriz tal que

$$B = \left[\begin{array}{c|c|c} T(v_1) & T(v_2) & T(v_3) \\ \hline & & \end{array} \right], \text{ temos que}$$

$$\begin{aligned} \text{Vol}(T(P)) &= |\det B| \\ &= \sqrt{\det B^t B} \\ &= \sqrt{\det \left[\begin{array}{ccc|ccc} - & R \circ S(v_1) & - & R \circ S(v_1) & R \circ S(v_2) & R \circ S(v_3) \\ - & R \circ S(v_2) & - & | & | & | \\ - & R \circ S(v_3) & - & | & | & | \end{array} \right]} \\ &= \sqrt{\det \left[\begin{array}{ccc|ccc} \langle R \circ S(v_1), R \circ S(v_1) \rangle & \langle R \circ S(v_1), R \circ S(v_2) \rangle & \langle R \circ S(v_1), R \circ S(v_3) \rangle \\ \langle R \circ S(v_2), R \circ S(v_1) \rangle & \langle R \circ S(v_2), R \circ S(v_2) \rangle & \langle R \circ S(v_2), R \circ S(v_3) \rangle \\ \langle R \circ S(v_3), R \circ S(v_1) \rangle & \langle R \circ S(v_3), R \circ S(v_2) \rangle & \langle R \circ S(v_3), R \circ S(v_3) \rangle \end{array} \right]} \\ &= \sqrt{\det \left[\begin{array}{ccc|ccc} \langle S(v_1), S(v_1) \rangle & \langle S(v_1), S(v_2) \rangle & \langle S(v_1), S(v_3) \rangle \\ \langle S(v_2), S(v_1) \rangle & \langle S(v_2), S(v_2) \rangle & \langle S(v_2), S(v_3) \rangle \\ \langle S(v_3), S(v_1) \rangle & \langle S(v_3), S(v_2) \rangle & \langle S(v_3), S(v_3) \rangle \end{array} \right]} \\ &= \sqrt{\det \left[\begin{array}{ccc|ccc} - & S(v_1) & - & S(v_1) & S(v_2) & S(v_3) \\ - & S(v_2) & - & | & | & | \\ - & S(v_3) & - & | & | & | \end{array} \right]} \\ &= \left| \det \left[\begin{array}{c|c|c} S(v_1) & S(v_2) & S(v_3) \\ \hline & & \end{array} \right] \right| \\ &= \text{Vol}(S(P)). \end{aligned}$$

Assim, concluímos que $\text{Vol}(P)$ independe da base ortonormal escolhida e, portanto, está bem definido.

Antes de enunciarmos o próximo teorema, note que para calcularmos o volume de P , não podemos simplesmente utilizar $\det A$, já que A não é uma matriz quadrada e, desse modo, não possui determi-

nante. Entretanto, mostraremos que a expressão $\sqrt{\det A^T A}$, vista no Teorema 4.1.1, ainda faz sentido e continua funcionando.

Teorema 4.2.2. *Seja P o paralelepípedo em \mathbb{R}^4 gerado pelos vetores $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^4$. Se A é a matriz 4×3 cujas colunas são formadas pelas entradas dos vetores v_1, v_2 e v_3 , ou seja, $v_j = (v_{1j}, v_{2j}, v_{3j}, v_{4j})$, e*

$$A = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} \\ v_{41} & v_{42} & v_{43} \end{bmatrix}, \text{ então } \text{Vol}(P) = \sqrt{\det(A^T A)}.$$

Demonstração. Temos dois casos:

i) $\{v_1, v_2, v_3\}$ é um conjunto linearmente dependente.

Sem perda de generalidade, v_3 é combinação linear de v_1 e v_2 , (se necessário podemos reordenar os vetores), desse modo $v_3 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$ para $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ adequados.

Então,

$$\begin{aligned} \langle v_1, v_3 \rangle &= \langle v_1, \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \rangle \\ &= \langle v_1, \alpha_1 v_1 \rangle + \langle v_1, \alpha_2 v_2 \rangle \\ &= \alpha_1 \langle v_1, v_1 \rangle + \alpha_2 \langle v_1, v_2 \rangle, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle v_2, v_3 \rangle &= \langle v_2, \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \rangle \\ &= \langle v_2, \alpha_1 v_1 \rangle + \langle v_2, \alpha_2 v_2 \rangle \\ &= \alpha_1 \langle v_2, v_1 \rangle + \alpha_2 \langle v_2, v_2 \rangle, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle v_3, v_3 \rangle &= \langle v_3, \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \rangle \\ &= \langle v_3, \alpha_1 v_1 \rangle + \langle v_3, \alpha_2 v_2 \rangle \\ &= \alpha_1 \langle v_3, v_1 \rangle + \alpha_2 \langle v_3, v_2 \rangle, \text{ e} \end{aligned}$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \langle v_1, v_2 \rangle & \langle v_1, v_3 \rangle \\ \langle v_2, v_1 \rangle & \langle v_2, v_2 \rangle & \langle v_2, v_3 \rangle \\ \langle v_3, v_1 \rangle & \langle v_3, v_2 \rangle & \langle v_3, v_3 \rangle \end{bmatrix}.$$

Note que, conforme os cálculos desenvolvidos acima, a terceira coluna de $A^T A$ é combinação linear das duas primeiras colunas de $A^T A$, logo, $\det(A^T A) = 0$.

Como $\text{Vol}(P) = 0$, pois os vetores são linearmente dependentes, segue que $\text{Vol}(P) = 0 = \sqrt{0} = \sqrt{\det(A^T A)}$.

ii) $\{v_1, v_2, v_3\}$ é um conjunto linearmente independente.

Seja W o subespaço de \mathbb{R}^4 gerado por $\{v_1, v_2, v_3\}$, então $\dim W = 3$, pois $\{v_1, v_2, v_3\}$ é LI. Seja $\{w_1, w_2, w_3\}$ uma base ortonormal de W .

Seja ainda $T : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ a isometria determinada por $T(w_1) = e_1$, $T(w_2) = e_2$, $T(w_3) = e_3$.

$$\text{Se } B = \left[\begin{array}{c|c|c} & & \\ T(v_1) & T(v_2) & T(v_3) \\ & & \end{array} \right], \text{ então,}$$

$\text{Vol}(P) = \text{Vol}(T(P))$, por definição,

$$= \sqrt{\det(B^T B)}, \text{ pelo Teorema 4.1.1,}$$

$$= \sqrt{\det \begin{bmatrix} \langle T(v_1), T(v_1) \rangle & \langle T(v_1), T(v_2) \rangle & \langle T(v_1), T(v_3) \rangle \\ \langle T(v_2), T(v_1) \rangle & \langle T(v_2), T(v_2) \rangle & \langle T(v_2), T(v_3) \rangle \\ \langle T(v_3), T(v_1) \rangle & \langle T(v_3), T(v_2) \rangle & \langle T(v_3), T(v_3) \rangle \end{bmatrix}}$$

$$= \sqrt{\det \begin{bmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \langle v_1, v_2 \rangle & \langle v_1, v_3 \rangle \\ \langle v_2, v_1 \rangle & \langle v_2, v_2 \rangle & \langle v_2, v_3 \rangle \\ \langle v_3, v_1 \rangle & \langle v_3, v_2 \rangle & \langle v_3, v_3 \rangle \end{bmatrix}}, \text{ pois } T \text{ é isometria,}$$

$$= \sqrt{\det(A^T A)}.$$

Como desejado. ■

Agora que já sabemos como calcular o volume de um paralelepípedo em \mathbb{R}^4 , vamos investigar se temos uma generalização do teorema de Pitágoras. Para isso utilizaremos um teorema que generaliza as propriedades do determinante do produto de duas matrizes, no caso em que elas não são quadradas (mas seu produto é uma matriz quadrada), o teorema em questão é conhecido como *Fórmula de Cauchy-Binet* e, para enunciá-lo, precisamos de algumas notações e conceitos preliminares que veremos na sequência.

Definição 4.2.3. *Sejam $n, k \in \mathbb{N}$ com $1 \leq k \leq n$. Uma k-upla crescente em n é uma k-upla ordenada*

$$I = (i_1, i_2, i_3, \dots, i_k) \text{ com } 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n.$$

Note que, de acordo com a Definição 4.2.2, existem exatamente $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ k-uplas crescentes em n .

Por exemplo, se $n = 4$ e $k = 3$, a quantidade de k-uplas crescentes em n , nesse caso, é dado por $\binom{4}{3} = 4$, sendo elas $(1, 2, 3)$, $(1, 2, 4)$, $(1, 3, 4)$ e $(2, 3, 4)$.

Dada uma matriz $A_{n \times k}$, podemos utilizar as k-uplas para obtermos matrizes quadradas de ordem k , a partir das n linhas de A . Em particular, tomando $n = 4$ e $k = 3$ a partir da matriz $A_{4 \times 3}$, temos que

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix}.$$

Como já vimos que as k-uplas obtidas nesse caso serão $(1, 2, 3)$, $(1, 2, 4)$, $(1, 3, 4)$ e $(2, 3, 4)$. Segue abaixo, cada uma das matrizes formadas a partir das linhas indicadas em sua k-upla “ I ” correspondente:

$$\text{Para } I = (1, 2, 3) \text{ temos que } A_I = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

$$\text{Para } I = (1, 2, 4) \text{ temos que } A_I = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix}.$$

$$\text{Para } I = (1, 3, 4) \text{ temos que } A_I = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix}.$$

$$\text{Para } I = (2, 3, 4) \text{ temos que } A_I = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix}.$$

Generalizando o caso particular acima, temos que, dada uma matriz $A_{n \times k}$, com $1 \leq k \leq n$, e $I = (i_1, i_2, i_3, \dots, i_k)$ uma k -upla crescente em \mathbb{N} , a saber $(1, 2, 3, \dots, n)$, seja A_I a matriz $k \times k$ formada a partir de A tomando apenas as linhas indicadas na k -upla, ou seja,

$$\begin{aligned} \text{linha 1 de } A_I &= \text{linha } i_1 \text{ de } A \\ \text{linha 2 de } A_I &= \text{linha } i_2 \text{ de } A \\ &\vdots \\ \text{linha } k \text{ de } A_I &= \text{linha } i_k \text{ de } A \end{aligned}$$

Teorema 4.2.3. (*Fórmula de Cauchy-Binet*) *Sejam $k, n \in \mathbb{N}$ com $1 \leq k \leq n$, A uma matriz $k \times n$ e B uma matriz $n \times k$. Então,*

$$\det(AB) = \sum_{[I]} \det((A_I)^T) \cdot \det(B_I),$$

em que a soma envolve todas as k -uplas crescentes em n .

Não faremos aqui a demonstração do Teorema 4.2.3. Não obstante, sua demonstração pode ser encontrada, por exemplo, em (EDWARDS, 1994).

Contudo, é importante observarmos que no caso em que $k = n$ existe apenas uma k -upla crescente em $(1, 2, 3, \dots, n)$ e, desse modo, $A_I = A$, $B_I = B$. Como A e B são matrizes quadradas de ordem n , temos que

$$\det(AB) = \det(A_I)^T \det(B_I) = \det(A^T) \det B = \det A \det B,$$

que é a regra conhecida para o determinante do produto de matrizes quadradas.

Corolário 4.2.4. *Tomando $A = B^T$, temos que $\det(B^T B) = \sum_{[I]} (\det(B_I))^2$.*

Demonstração. De fato, se tomarmos $A = B^T$, pelo Teorema 4.2.3, temos que

$$\begin{aligned}\det(B^T B) &= \sum_{[I]} \det(((B_I)^T)^T) \cdot \det(B_I) \\ &= \sum_{[I]} \det(B_I) \cdot \det(B_I) \\ &= \sum_{[I]} (\det(B_I))^2.\end{aligned}$$

■

Utilizando esse Corolário 4.2.4, juntamente com o Teorema 4.1.1 podemos concluir que

$$(\text{Vol}(P))^2 = \det(A^T A) = \sum_{[I]} (\det A_I)^2.$$

Em particular, para $n = 4$ e $k = 3$, temos que

$$\begin{aligned}(\text{Vol}(P))^2 &= \sum_{[I]} (\det A_I)^2 \\ &= (\det A_{(1,2,3)})^2 + (\det A_{(1,2,4)})^2 + (\det A_{(1,3,4)})^2 + (\det A_{(2,3,4)})^2.\end{aligned}$$

Para interpretarmos geometricamente o que acabamos de calcular, vamos começar definindo a projeção de um vetor de \mathbb{R}^4 sobre um espaço coordenado.

Definição 4.2.4. *Seja $v = (a, b, c, d)$ um vetor do \mathbb{R}^4 . A projeção ortogonal $\text{proj}_{xyz} : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ de v sobre o espaço coordenado xyz em \mathbb{R}^4 , é o vetor*

$$\text{proj}_{xyz} v = (a, b, c, 0), \quad \forall v \in \mathbb{R}^4.$$

Similarmente ao que foi feito na Proposição 3.0.1, prova-se que proj_{xyz} é uma transformação linear. Além disso, dados vetores $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^4$, a imagem por proj_{xyz} do paralelepípedo P gerado por v_1, v_2 e v_3 é igual ao paralelepípedo P_{xyz} gerado pelos vetores $\text{proj}_{xyz} v_1, \text{proj}_{xyz} v_2$ e $\text{proj}_{xyz} v_3$. A verificação desse fato é análoga ao que foi feito na seção 2.3.

Queremos calcular o volume do paralelepípedo P_{xyz} . Desse modo, sejam

$$b_1 = \text{proj}_{xyz}(v_1) = (a_{11}, a_{21}, a_{31}, 0)$$

$$b_2 = \text{proj}_{xyz}(v_2) = (a_{12}, a_{22}, a_{32}, 0)$$

$$b_3 = \text{proj}_{xyz}(v_3) = (a_{13}, a_{23}, a_{33}, 0)$$

e, sejam ainda,

$$c_1 = (a_{11}, a_{21}, a_{31}),$$

$$c_2 = (a_{12}, a_{22}, a_{32}),$$

$$c_3 = (a_{13}, a_{23}, a_{33}).$$

Observe que, se a matriz A é a matriz cujas colunas são os vetores b_1 , b_2 e b_3 , respectivamente, assim,

$$A_{(1,2,3)} = \begin{bmatrix} | & | & | \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ | & | & | \end{bmatrix}.$$

Note que para quaisquer $i, j \in \{1, 2, 3\}$, $\langle b_i, b_j \rangle = \langle c_i, c_j \rangle$, pois

$$\langle b_i, b_j \rangle = a_{1i}a_{1j} + a_{2i}a_{2j} + a_{3i}a_{3j} + 0 \cdot 0 = a_{1i}a_{1j} + a_{2i}a_{2j} + a_{3i}a_{3j} = \langle c_i, c_j \rangle.$$

Portanto, como $A = \begin{bmatrix} | & | & | \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ | & | & | \end{bmatrix}$, segue que

$$\begin{aligned} A^T A &= \begin{bmatrix} \langle b_1, b_1 \rangle & \langle b_1, b_2 \rangle & \langle b_1, b_3 \rangle \\ \langle b_2, b_1 \rangle & \langle b_2, b_2 \rangle & \langle b_2, b_3 \rangle \\ \langle b_3, b_1 \rangle & \langle b_3, b_2 \rangle & \langle b_3, b_3 \rangle \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \langle c_1, c_1 \rangle & \langle c_1, c_2 \rangle & \langle c_1, c_3 \rangle \\ \langle c_2, c_1 \rangle & \langle c_2, c_2 \rangle & \langle c_2, c_3 \rangle \\ \langle c_3, c_1 \rangle & \langle c_3, c_2 \rangle & \langle c_3, c_3 \rangle \end{bmatrix} \\ &= A_{(1,2,3)}^T A_{(1,2,3)}. \end{aligned}$$

Assim, pelo Teorema 4.2.2, temos que

$$\text{Vol}P_{xyz} = \sqrt{\det(A^T A)}, \text{ isto é,}$$

$$\begin{aligned} (\text{Vol}P_{xyz})^2 &= \det(A^T A) \\ &= \det(A_{(1,2,3)}^T A_{(1,2,3)}) \\ &= \det(A_{(1,2,3)})^2. \end{aligned}$$

Logo,

$$\text{Vol}P_{xyz} = |\det A_{(1,2,3)}|.$$

De maneira similar, podemos verificar que

$$\begin{aligned} (\text{Vol}P_{xyw})^2 &= (\det A_{(1,2,4)})^2, \text{ logo } \text{Vol}P_{xyw} = |\det A_{(1,2,4)}| \\ (\text{Vol}P_{xzw})^2 &= (\det A_{(1,3,4)})^2, \text{ logo } \text{Vol}P_{xzw} = |\det A_{(1,3,4)}| \text{ e,} \\ (\text{Vol}P_{yzw})^2 &= (\det A_{(2,3,4)})^2, \text{ logo } \text{Vol}P_{yzw} = |\det A_{(2,3,4)}|. \end{aligned}$$

Enfim, mostramos que o quadrado do volume de um paralelepípedo em \mathbb{R}^4 é igual a soma dos quadrados dos volumes das projeções ortogonais deste paralelepípedo sobre os espaços coordenados, ou seja, temos aqui uma generalização do Teorema de Pitágoras em \mathbb{R}^4 .

5 APLICAÇÃO NO ENSINO MÉDIO

Nesse capítulo apresentaremos um roteiro de aula. Trata-se de uma aplicação, em uma turma do terceiro ano do ensino médio, em que a ideia do nosso trabalho (em \mathbb{R}^3) é exposta de forma intuitiva, com o auxílio do software livre *GeoGebra* e serve como uma motivação para concluir e revisar o tema que trabalha as projeções ortogonais sobre um plano, conforme (SOUZA, 2013). Para isso, deve-se utilizar o conhecimento prévio dos estudantes sobre determinantes de matrizes de ordem 3, para calcular as áreas dos paralelogramos (em \mathbb{R}^3).

5.1 A IDEIA DO TEOREMA DE PITÁGORAS (EM \mathbb{R}^3) ATRAVÉS DO GEOGEBRA

1. Objetivos:

- Criar, no GeoGebra, um paralelogramo P determinado por dois vetores de \mathbb{R}^3 , conforme a Definição 2.1.1.
- Projetar ortogonalmente o paralelogramo P criado sobre os planos coordenados, conforme a Definição 3.0.1.
- Calcular a área do Paralelogramo P e a área dos paralelogramos P_{xy} , P_{xz} e P_{yz} obtidos por suas projeções ortogonais sobre os planos coordenados, utilizando a Proposição 2.1.3.
- Perceber a relação entre a área do paralelogramo P e as áreas de suas “sombras” P_{xy} , P_{xz} e P_{yz} , como foi feito no capítulo 3.

2. Duração:

- Duas aulas.

3. Recursos Didáticos:

- Lousa digital e notebook.
- *GeoGebra*.

4. Ambiente de aprendizagem:

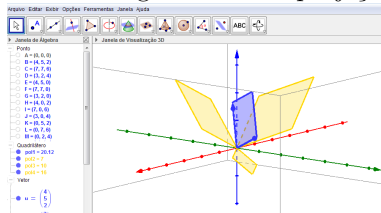
- Laboratório equipado com computadores que possuam o software livre *GeoGebra* instalado.

5. Metodologia:

- Primeiro Momento:

O professor, escolherá dois vetores linearmente independentes com o auxílio da lousa digital e de um notebook, construirá na janela 3D do *GeoGebra*, um exemplo de paralelogramo em \mathbb{R}^3 , além disso, mostrará como encontrar suas projeções nos planos coordenados, conforme feito na Figura 12.

Figura 12 – Paralelogramo e suas projeções, em \mathbb{R}^3 .



- Segundo momento:

De acordo com a explanação do exemplo dado pelo professor, cada estudante deverá desenvolver seu próprio exemplo, nesse momento o professor poderá auxiliar alguns alunos individualmente, caso haja necessidade.

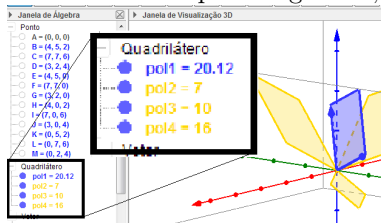
- Terceiro momento:

Cada estudante, através da Proposição 2.1.3, deve calcular as áreas dos paralelogramos obtidos em seu próprio exemplo. Os resultados obtidos podem ser verificados com as áreas calculadas (automaticamente) pelo *GeoGebra* conforme a Figura 13.

- Quarto momento:

Os estudantes deverão verificar, utilizando as áreas calculadas no momento anterior, que o quadrado da área de um paralelogramo P em \mathbb{R}^3 é igual a soma dos quadrados das áreas das projeções ortogonais de P sobre os planos coordenados.

Figura 13 – Áreas dos paralelogramos, em \mathbb{R}^3 .



6. Verificação da aprendizagem:

- A avaliação dos alunos será realizada durante o processo e andamento da aula, utilizando alguns critérios como: iniciativa, participação, interesse pelo assunto e a realização da atividade proposta.

6 CONCLUSÃO

Segundo César Coll, “Tão importante quanto o que se ensina e se aprende é como se ensina e como se aprende.” Uma vez, ao aplicar um teste de sondagem para estudantes do Ensino Médio, deparei-me com alunos que ao aplicar o Teorema de Pitágoras, em um caso particular em que as medidas dos lados do triângulo retângulo eram denotadas por a , b e c , utilizavam a como sendo a medida da hipotenusa, mesmo que não fosse. Assim, percebi que eles simplesmente haviam decorado o Teorema na forma $a^2=b^2+c^2$, entretanto, não entenderam seu enunciado nem como utilizá-lo. Então, a partir dessa percepção, criei uma estratégia com a qual pude sanar um erro corriqueiro.

Neste trabalho, desenvolvemos nossas ideias de maneira simples, sempre exemplificando e motivando o leitor a fim de que, mesmo não tendo um embasamento teórico para compreender a demonstração de algum teorema ou proposição, ele possa acompanhar e entender sua ideia central. Investigamos o Teorema de Pitágoras em algumas dimensões “maiores” da que estamos habituados, trabalhando com áreas de paralelogramos em \mathbb{R}^3 e volumes de paralelepípedos em \mathbb{R}^4 .

Uma sugestão que podemos deixar como proposta para trabalhos futuros é a generalização do Teorema de Pitágoras em \mathbb{R}^n , com $n > 4$, que seria como uma “continuação” do que desenvolvemos aqui, porém, o problema de se definir o volume de um paralelepípedo em \mathbb{R}^4 foi solucionado usando como ferramenta o produto vetorial em \mathbb{R}^3 . Sabemos que o produto vetorial é definido apenas para vetores de \mathbb{R}^3 , logo não podemos usá-lo diretamente para ajudar a definir volume de um objeto em \mathbb{R}^n com $n > 4$. Uma solução para este problema envolve generalizar o próprio conceito de produto vetorial, algo que pode ser feito, por exemplo, com auxílio da Álgebra Multilinear, como apresentado em (EDWARDS, 1994).

REFERÊNCIAS

BOULOS P.;CAMARGO E OLIVEIRA, I. **Geometria Analítica: um tratamento vetorial**. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2005.

BOYER, C. **História da Matemática**. São Paulo: E. Blucher, 1974.

DELGADO J.; FRENSEL, K. L. **Geometria Analítica**. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

EDWARDS, C. **Advanced Calculus Of Several Variables**. New York: Dover, 1994.

HEFEZ A.; FERNANDEZ, C. **Introdução à Álgebra Linear**. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

SOUZA, J. **Novo Olhar Matemática**. São Paulo: FTD, 2013.

STEINBRUCH A.; WINTERLE, P. **Álgebra Linear**. São Paulo: Pearson Makron Books, 1987.