UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS GRADUAÇÃO
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
(PROFMAT)

UMA INTRODUÇÃO AO ESTUDO DE DERIVADAS NO ENSINO MÉDIO.

SILVIA XAVIER SARAIVA ARAÚJO

MOSSORÓ- RN
2016

SILVIA XAVIER SARAIVA ARAÚJO

UMA INTRODUÇÃO AO ESTUDO DE DERIVADAS NO ENSINO MÉDIO.

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática (PROFMAT) da Universidade Federal Rural do Semi-Árido, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Flávio Alexandre Falcão Nascimento

Este trabalho contou com o apoio financeiro da CAPES.

MOSSORÓ- RN

2016

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
BIBLIOTECA CENTRAL ORLANDO TEIXEIRA - CAMPUS MOSSORÓ
Setor de Informação e Referência

A658u Araujo, Silvia Xavier Saraiva.

Uma introdução ao estudo de derivadas no Ensino Médio. / Silvia Xavier Saraiva Araujo. - Mossoró, 2016.
74f: il.

Orientador:Flávio Alexandre Falcão Nascimento.

Dissertação (MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA) - Universidade Federal Rural do Semi-Árido. Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação

1. Cálculo. 2. Funções do 1º e 2º graus. 3. Derivadas. 4. Ensino Médio. I. Título

RN/UFERSA/BOT/025 CDD 515.33

SILVIA XAVIER SARAIVA ARAÚJO

UMA INTRODUÇÃO AO ESTUDO DE DERIVADAS NO ENSINO MÉDIO.

Dissertação apresentada a Universidade Federal Rural do Semi-árido – UFERSA, campus Mossoró como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

APROVADA EM: 15/02/2016

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr Flávio Alexandre Falcão do Nascimento – FAFIDAM/UECE

Presidente

Prof. Dr. Antonio Ronaldo Gomes Garcia– UFERSA

Primeiro membro

Prof. Dr. Maria Cristiane Magalhães Brandão – FAFIDAM/UECE

Segundo membro

MOSSORÓ- RN

2016

Dedico este trabalho a meu amado esposo Weder Fábio de Oliveira Araújo.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por me conceder a oportunidade de cursar o PROFMAT, capacitando-me e me fortalecendo para cumprir todas as etapas.

Ao meu esposo Weder Fábio de Oliveira Araújo, pela cumplicidade, encorajamento e apoio durante todo o percurso.

Aos meus pais Maria do Socorro Nobre Xavier e Francisco Silva Saraiva que, embora não tenham estudado, fizeram todo o possível para me proporcionar a oportunidade de estudar, a minha irmã Maria Gabriela Nobre Xavier por sempre me incentivar e apoiar em minha carreira acadêmica.

Ao meu orientador, Flávio Alexandre Falcão do Nascimento, pela dedicação, paciência e compromisso.

Ao corpo docente do PROFMAT/UFERSA pela contribuição à minha formação.

Aos meus colegas da turma PROFMAT 2014, pela amizade e companheirismo durante o todo o curso.

ARAÚJO, S. X. S. **Uma introdução ao estudo de Derivadas no Ensino Médio.** Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática- PROFMAT)- Universidade Federal Rural do Semi-Árido- UFERSA, Mossoró, RN.

RESUMO

O presente trabalho se constitui em uma proposta didática para o ensino introdutório de derivadas, atrelado ao ensino de funções no 1º ano do Ensino Médio, com ênfase nas funções do 1° e 2º graus. Para isso, buscou-se analisar a viabilidade da introdução do ensino de Cálculo nessa fase escolar, tendo em vista as dificuldades inerentes a esta disciplina e o extenso currículo do Ensino Médio. A partir de um levantamento bibliográfico, descreveu-se um breve histórico sobre o surgimento do cálculo como conhecimento matemático, apontando os principais problemas que desencadearam tal estudo e sobre o ensino de Cálculo no Ensino Médio no Brasil, ressaltando os motivos que levaram a retirada de tópicos de cálculo dos programas de Matemática. Também foi realizada uma pesquisa na base de dados do IFCE- campus Limoeiro do Norte, a fim de investigar quantos cursos superiores contém a disciplina de Cálculo em seus programas e quais os índices de aprovação/reprovação em tais disciplinas nos semestres 2014.1 e 2015.1. Baseado nos alarmantes resultados da referida pesquisa, os quais variam de 33% a 90% de reprovação,propusemonos a elaborar uma sequência didática sobre derivadas das funções do 1º e 2º graus de forma contextualizada e interdisciplinar, com ênfase na resolução de problemas e aplicações, objetivando disponibilizar um material que possa ser testado em sala de aula e que seja útil para melhorar o ensino de cálculo no ensino superior. Observa-se que o Cálculo sempre foi uma importante ferramenta para o desenvolvimento científico e tecnológico e que, atualmente, desempenha um papel fundamental em várias áreas do conhecimento. Portanto, a necessidade da inserção de tópicos de cálculo no Ensino Médio é inegável, tendo em vista a formação continuada desses alunos e o papel facilitador que o cálculo desempenha em outros conteúdos matemáticos e outras áreas do conhecimento. Além disso, nota-se que é totalmente viável inserir o conceito de derivadas logo no 1º ano do Ensino Médio, desde que o rigor matemático e o excesso de formalismos não sejam demasiadamente explorados, mas que ao invés disso, sejam destacadas a interpretação geométrica e as aplicações. Dessa forma, é necessário que mais pesquisas sejam realizadas neste âmbito, fornecendo suporte para os professores do Ensino Médio introduzirem noções intuitivas do Cálculo de forma apropriada ao seu público.

Palavras-chave: Derivadas. Funções do 1º e 2º graus. Ensino Médio.

ARAÚJO, S. X. S. **An introduction to Derivatives study in High School.** Dissertation (Professional Masters in Mathematics - PROFMAT) - Federal Rural University of the Semi-Arid- UFERSA, Mossoró, RN.

ABSTRAT

This work is a didactic proposal for introductory teaching of derivative, linked to the functions of teaching first and second grades. For this, we sought to examine the feasibility of introducing Calculus education this school phase in view of the difficulties inherent in this discipline and extensive high school curriculum.From a literature review, described a brief history of the appearance of the Calculus as mathematical knowledge, pointing out the main problems that triggered such a study, and the calculation of teaching in high school in Brazil highlighting the reasons why the withdrawal of Calculus topics of math programs. Also a survey was conducted on the campus database IFCE of Limoeiro do Norte to investigate how higher education contains the Calcukus discipline in their programs and what are the rates of the approval indexes / reproof in these subjects in semesters 2014.1 and 2015.1. Based on the alarming results of that research, which vary from 33% to 90% disapproval, we propose to draw up a teaching sequence on derivatives of functions of the 1st and 2nd grades in context and interdisciplinary manner, with an emphasis on problem solving and applications , aiming to provide a material that can be tested in the classroom and it will be useful to improve the Calculus teaching in higher education. It is observed that the Calculus has always been an important tool for scientific and technological development and that currently plays a key role in various areas of knowledge. Therefore, the need to insert topics of Calculus in high school is undeniable in view of the continuing education of these students and the facilitating role that the Calculus plays in other mathematical content and other areas of knowledge. In addition, it is noted that it is entirely feasible to insert the concept of derived soon in the 1st year of high school, provided the mathematical rigor and excessive formalities are not overly exploited but which, instead, are highlighted in geometric interpretation and applications. Thus, it is imperative that more research be done in this area by providing support for high school teachers introduce intuitive notions of properly Calculus to your audience.

Keywords: Derivatives. Functions of the 1st and 2nd degrees. High school.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE SIGLAS

CECIBA – Centro de Estudos de Ciências da Bahia
GEEM – Grupo de Estudos do Ensino de Matemática
GEEMPA – Grupo de Estudos sobre Ensino de Matemática de Porto Alegre
GEPMAT – Grupo de Ensino e Pesquisa em Educação Matemática
IFCE – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará
IMURN – Instituto de matemática do Rio Grande do Norte
LDB – Lei de Diretrizes e Bases
MMM – Movimento da Matemática Moderna
NEDEM – Núcleo de Estudos e Difusão do Ensino de Matemática
PCNs+ – Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais
UFF – Universidade Federal de Fluminense
UFRJ – Universidade Federal do Rio de Janeiro

Sumário

INTRODUÇÃO

O ensino de Cálculo no Ensino Médio tem sido alvo de várias pesquisas como, por exemplo, Rezende (2003), Ávila (1991, 1993, 2006), Duclos (1992), Machado (2008), Amorim (2013), Vianna (2013), Molon (2013) entre outros. Essas pesquisas discutem se é viável a inserção do ensino das noções de Limites, Derivadas e Integrais no Ensino Médio e qual seria a forma mais adequada para tal inclusão. Os autores concordam que há um fracasso no ensino de Cálculo no Ensino Superior, com altos índices de reprovações, e entendem que ensinar Cálculo de forma introdutória no Ensino Médio seria parte da solução para esse problema.

De acordo com Rezende (2003) os índices de reprovações nas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral nas universidades variam entre 45% e 95%, um índice muito alto que ressalta a necessidade de pesquisas que busquem descobrir a raiz do problema e, consequentemente, apontem soluções.

Julgamos ser relevante ressaltar que o ensino de Cálculo já fez parte do currículo do Ensino Médio na 3ª série do antigo Curso Científico. Constava neste currículo o ensino de derivadas e aplicações especialmente aos problemas de máximos e mínimos, entre outros. O ensino de Cálculo foi abolido na década de 60 com o advento da Matemática Moderna que reformulou o currículo do Ensino Médio trazendo formalismo e rigor para o ensino da Matemática. Tal rigor impossibilitou o estudo de Cálculo e prejudicou o ensino de Geometria, pois tais conteúdos com o rigor exigido tornam-se inviáveis para o Ensino Médio. Mas descartar o ensino de Cálculo é um erro grave segundo Ávila (1991), pois o "Cálculo vem desenvolvendo um papel de grande relevância em todo o desenvolvimento científico-tecnológico "(Ávila,1991, p.3).

Como então resolver este dilema? Não podemos negligenciar o ensino de Cálculo no Ensino Médio, mas por outro lado como inseri-lo num currículo tão extenso e cheio de formalismos?

Ávila (1991, p.8) responde: "seria muito mais proveitoso que todo tempo que se gasta, no 2º grau, ensinando formalismo e longa terminologia sobre funções, que todo esse tempo fosse utilizado com o ensino das noções básicas do Cálculo e suas aplicações ".

Concordamos com tal afirmação de Ávila, pois podemos observar que há um desperdício de tempo ensinando regras e fórmulas que devem ser decoradas pelos alunos, não somente referente ao estudo de funções, mas também de outros conteúdos como, por exemplo: sequências numéricas; em especial progressões geométricas, conteúdos estes que poderiam ser atrelados ao estudo de Cálculo trazendo aplicações e mais significado para os mesmos. Tal metodologia de ensino torna o aluno desestimulado, pois faz com que a Matemática seja ensinada sem contextualização e interdisciplinaridade.

Portanto, este trabalho se constitui em uma proposta de inserção das noções básicas de derivadas logo no 1º ano do Ensino Médio atrelado ao estudo de funções, em especial funções do 1º e 2º graus. Nossa proposta não é inserir uma longa teoria de Cálculo, cheia de terminologias e formalismos, mas sim inserir os conceitos de forma intuitiva aproveitando exemplos práticos e aplicações importantes da teoria de derivadas como: problemas de máximos e mínimos, crescimento e decrescimento de funções, cinemática, entre outros. Vale ressaltar que não pretendemos aplicar a teoria de derivadas a todas as funções estudadas no 1º ano do Ensino Médio visto que se torna inviável estudar as derivadas de algumas dessas funções sem primeiramente estudar limites. Então porque não estudar limites a priori? A resposta a esta pergunta é que a derivada tem várias aplicações úteis nessa fase de escolaridade o que facilitaria o entendimento de alguns conteúdos, trazendo significado, contextualização e interdisciplinaridade. Enquanto que a teoria de limites não tem tantas aplicações nesse momento e atrasaria o ensino de derivadas que deve ser paralelo ao de funções, como também de cinemática.

A fim de embasar essa pesquisa, no primeiro Capítulo será abordado um pouco da história do Cálculo mostrando quais os principais problemas que desencadearam o estudo dessa teoria, possibilitando assim refletir sobre como inserir o ensino de Cálculo no Ensino Médio através de suas aplicações.

No segundo Capítulo, faremos uma retrospectiva do ensino de Cálculo no Ensino Médio no Brasil ao longo da História, buscando descobrir quais motivos levaram a retirada desse importante conteúdo dos currículos do Ensino Médio. Também discutiremos dados do IFCE campus Limoeiro do Norte concernente à quantidade de cursos superiores que contem a disciplina de Cálculo em seu currículo bem como os índices de reprovação em tais disciplinas. Dessa forma, buscamos ressaltar a importância do ensino de Cálculo para o desenvolvimento científico e tecnológico assim como a necessidade da melhoria da qualidade desse ensino.

Finalmente, o terceiro Capítulo trará uma sequência didática sobre derivadas e suas aplicações, seguindo o estudo de funções no 1º ano do Ensino Médio. Iniciaremos com a função do 1º grau introduzindo o conceito de derivada como taxa de variação. Depois trabalharemos o problema da reta tangente a uma curva através da função do 2º grau aplicando a problemas de máximos e mínimos. Também será introduzido o conceito de derivada como velocidade instantânea trazendo aplicações na Física. Por fim, estudaremos derivadas de funções polinomiais.

Dessa forma, procuramos introduzir o conceito de derivadas através de conteúdos que os alunos já estudariam; é o caso das funções mencionadas acima, aproveitando a grande aplicabilidade que as derivadas trazem a tais conteúdos.

1 DESENVOLVIMENTO DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL AO LONGO DA HISTÓRIA

Newton e Leibniz frequentemente são citados como os inventores do Cálculo Diferencial e Integral. Entretanto, alguns dos problemas que deram origem ao estudo das ideias centrais do Cálculo foram desenvolvidos por alguns matemáticos que viveram antes de Newton e Leibniz. Abordaremos neste capítulo o desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral desde os primeiros problemas que deram origem ao seu estudo até os dias atuais; destacando os principais matemáticos e suas respectivas obras que contribuíram para isto.

1.1 Problemas propulsores do Cálculo

Um dos problemas que sempre instigou a curiosidade dos matemáticos foi o cálculo de áreas e volumes. Os gregos por volta de 200 A.C realizavam cálculos de áreas pelo método conhecido como quadratura. Este método consistia em encontrar um quadrado de mesma área que a figura poligonal da qual desejava calcular a área. O grande problema estava em encontrar a quadratura de figuras curvas.

Por algum tempo os matemáticos tentaram desenvolver um método de encontrar a quadratura da curva mais simples: o círculo. Foi Arquimedes (287 – 212 A.C) o primeiro a desenvolver um método para isso que ficou conhecido como método da exaustão. Mas os matemáticos continuaram seus estudos afim de encontrar um método mais simples, o que desencadeou uma grande quantidade de trabalhos.

Outro problema que surgiu na época foi o de encontrar a reta tangente a uma curva. Embora esses dois problemas fossem estudados separadamente, alguns matemáticos procuravam uma ligação entre os dois.

Em 1612 Kepler (1571-1630) se interessou por calcular o volume dos tonéis de vinhos, visto que nesta época a safra de vinho foi muito boa, pois os métodos existentes não eram muito eficazes. Então Kepler estudou sobre os métodos de Arquimedes e desenvolveu métodos para calcular volumes de sólidos de revolução não considerados por Arquimedes. Seus estudos deram origem ao livro *Stereometria Doliorium Vinariorum* (Medidas de volumes de barris).

Enquanto Kepler trabalhava com os volumes dos barris, Galileu (1564-1642) estudava astronomia e Física, sempre necessitando da Matemática em seus estudos. Foi então que surgiram os primeiros estudos sobre infinitesimal. Segundo Boyer (1974, p. 241)

> "Galilei tinha tido a intenção de escrever um tratado sobre o infinito em Matemática, mas ele não foi encontrado. Enquanto isso seu discípulo Cavalieri fora estimulado pela Stereometria de Kepler, bem como por ideias antigas e medievais e pelo encorajamento de Galileu, a organizar seus pensamentos sobre infinitésimos em forma de livro".

A ideia de Cavaliere era que "uma área pode ser pensada como sendo formada de segmentos ou 'indivisíveis' e que um volume pode ser pensado como composto de áreas que são volumes indivisíveis ou quase-atômicos"(BOYER, 1974, p. 241). Ora, mas essa ideia é semelhante a que conhecemos hoje como integral.

Os estudos sobre infinitesimais continuaram interessando os matemáticos da época. A mais importante descoberta neste sentido foi realizada por Fermat (1607-1665) em 1629, mas só foi publicado após sua morte, em um tratado. Fermat desenvolveu um método para achar máximos e mínimos.

> "Ele comparou o valor de $f(x)$ num ponto com o valor $f(x+E)$ num ponto vizinho. Em geral esses valores serão bem diferentes, mas num alto ou num baixo de uma curva lisa a variação será quase imperceptível. Portanto para achar os pontos de máximo e mínimo Fermat igualava $f(x)$ e $f(x+E)$, percebendo que os valores, embora não são exatamente iguais, são quase iguais. Quanto menor o intervalo E entre os dois pontos mais perto chega a pseudo-equação de ser uma verdadeira equação; por isso Fermat, depois de dividir tudo por E fazia $E = 0$."(BOYER, 1974, p. 255)

Notem que o método desenvolvido por Fermat é o que conhecemos hoje por diferenciação. Por esse motivo, para Laplace, Fermat é o verdadeiro inventor do Cálculo. Fermat também utilizou seu método para achar a tangente a uma curva. Além disso, Fermat chegou a um teorema para calcular áreas sob curvas muito semelhante ao que chamamos de integração. Acredita-se que os trabalhos sobre integral surgiram antes que os sobre derivadas. Pena que Fermat não publicou seus trabalhos, por isso não teve o reconhecimento que merecia.

Dessa forma, concluímos que os problemas propulsores do Cálculo foram o problema de calcular áreas sob curvas e de achar a reta tangente. É importante ressaltar que na ordem cronológica o desenvolvimento do Cálculo se deu por integração -diferenciação-limites. Sendo que, até então, nenhuma teoria sobre limites tinha sido desenvolvida.

1.2 O Cálculo de Newton e Leibniz

Em 1665 Newton (1642-1727) já exprimia funções em termos de séries infinitas e estudava sobre taxa de variação. No período compreendido entre 1665 e 1666 Newton fez suas maiores descobertas, entre elas o Cálculo, pois ele estava com bastante tempo para pensar nos problemas matemáticos visto que a escola em que estudava estava fechada, devido uma peste. Mas apenas em 1711 Newton publicou sua primeira obra sobre análise infinita intitulada de *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas.*

Newton ficou conhecido como um dos inventores do Cálculo porque percebeu o que Fermat e outros matemáticos que estudaram os problemas de área sob uma curva e reta tangente não perceberam, a relação inversa entre integração e diferenciação. De acordo com Boyer (1974, p. 292)

> "Newton não foi o primeiro a diferenciar ou integrar, nem a ver a relação entre essas operações no teorema fundamental do cálculo. Sua descoberta consistiu na consolidação desses elementos num algoritmo geral aplicável a todas as funções, sejam algébricas, sejam transcendentes."

Em 1671 Newton escreveu (mas só veio a ser publicada em 1742) sua obra *Methodus fluxionum et serierum infinitorum* que popularizou seus métodos infinitesimais, em que ele usou as variáveis x e y para representar quantidades que fluem, os quais chamou de fluentes (o que conhecemos como taxas de variações). Já em 1676, Newton publica outra obra sobre Cálculo cujo título era *De quadratura curvarum.*

Cerca de dez anos depois da descoberta do cálculo por Newton, Leibniz (1646-1716) também faz a mesma descoberta independentemente de Newton. Entretanto Leibniz publicou seus trabalhos antes de Newton em 1684 na *Acta Eruditorum.*

Em 1676, quando Leibniz visita londres, Huygens (matemático holandês) propôs que Leibniz resolvesse o problema de achar a soma dos recíprocos números triangulares, em linguagem atual seria calcular

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)}.$$

Leibniz resolveu o problema escrevendo $\frac{2}{n(n+1)} = 2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n-1}\right)$ concluindo que a soma da série infinita é 2. Dessa forma, Leibniz aplicou seu método a várias séries infinitas e pensava que poderia estender para todas elas, mas logo constatou que para algumas séries não era possível.

Então ele resolveu utilizar suas ideias para resolver o problema da área sob uma curva e da reta tangente. A partir daí Leibniz

> "Percebeu então, em 1673, que a determinação da tangente a uma curva dependia da razão das diferenças das ordenadas e das abcissas, quando essas se tornavam infinitamente pequenas, e que as quadraturas dependiam das soma das ordenadas dos retângulos infinitamente finos que formam a área."(BOYER, 1974, p. 295).

Por conseguinte percebeu a relação inversa entre área sob uma curva e retas tangentes, descoberta que já tinha sido feita por Newton alguns anos antes sem o conhecimento de Leibniz.

Uma importante contribuição de Leibniz foi em relação as notações, foi ele que inseriu as notações dx e dy para as diferencias e o símbolo $\int$ para integrais.

O primeiro trabalho publicado de Leibniz sobre diferencial cujo título era *Nova Methodus Pro Maximis Et Minimis, Itemque Tangentibus, Qua Nec Irrationales Quantitates Moratur* (Um novo método para máximos e mínimos, e também para tangentes, que não é obstruído por quantidades irracionais) tratou das fórmulas para derivadas de produtos, quocientes e potências, bem como aplicações na geometria.

Sabemos que outros matemáticos também deram suas contribuições para o estudo do Cálculo, porém nenhum deles desenvolveu trabalhos tão relevantes quanto os de Newton e Leibniz nesta área, o que os fazem serem reconhecidos como os invetores do Cálculo.

1.3 O Cálculo contemporâneo

Os cálculos de Newton e Leibniz passaram por muitas mudanças até chegar nos dias atuais. Novos conceitos foram inseridos e outros reformulados. O conceito de limites, por exemplo, não existia na época de Newton e leibniz o que prejudicava a publicação dos seus trabalhos, tendo em vista a dificuldade de provar a existência de quantidades infinitamente pequenas. O conceito de limites só surgiu em 1765 com o matemático francês Le Rond D'Alembert (1717-1783).

As quantidades variáveis que Newton e Leibniz relacionavam com tangentes e quadraturas atualmente são compreendidas através do conceito de função que relacionou conjuntos com funções contínuas e descontínuas.

De acordo com Carvalho (2007, p. 50)

> "São inúmeras as modificações sofridas pelo cálculo desde o século XVII até o século XXI. Portanto podemos perceber que aquele cálculo desenvolvido por Leibniz e Newton já não se usa mais. O que restou de seus trabalhos são alguns algoritmos ainda empregados no cálculo moderno e muito da notação adotada por Leibniz."

No que diz respeito ao ensino de Cálculo na modernidade podemos notar duas principais diferenças quanto ao Cálculo desenvolvido po Newton e Leibniz. A primeira delas é em relação a ordem em que se é ensinado o Cálculo: limites-derivadas-integrais. Como vimos a ordem cronológica foi integrais-derivadas-limites. Isso se deve ao fato de que as ideias centrais do Cálculo foram desenvolvidas através de problemas concretos como encontrar a área sob uma curva e achar a reta tangente. A segunda diferença é que o Cálculo ganhou uma forma puramente algébrica, em que conceitos, teoremas e demonstrações são ensinados sem nenhuma ligação, a priore, com os problemas que impulsionaram o desenvolvimento do Cálculo, só depois é dada uma interpretação geométrica para derivadas e integrais de forma quase que insignificante.

2 CÁLCULO NO ENSINO MÉDIO?

Neste capítulo abordaremos as duas principais reformas referentes ao ensino de Matemática no Ensino Médio, destacando a inclusão e a exclusão de tópicos do Cálculo nos respectivos programas, bem como os motivos que desencadearam essas mudanças. Além disso, trataremos sobre o ensino de Cálculo no Ensino Superior ressaltando sua importância e dificuldades inerentes ao seu ensino/aprendizagem. Com isso, objetivamos discutir sobre a viabilidade de haver um retorno ao ensino de Cálculo no Ensino Médio.

2.1 O ensino de Cálculo no Ensino Médio no Brasil

Poucas pessoas sabem que o ensino de Cálculo já fez parte dos currículos do Ensino Médio (antes chamado Ensino Secundário). Este tema foi incluído através da Reforma Capanema, em 1942, que recebeu este nome em homenagem ao seu fundador, o ministro de educação na época, Gustavo Capanema.

Antes da reforma, o ensino era dividido em dois ciclos: Curso Fundamental, com duração de 5 anos, e o Curso Complementar com duração de dois anos. O Curso Complementar tinha como principal objetivo preparar os alunos para o Ensino Superior. Para tanto, existiam três opções de Cursos Complementares: Curso Pré-Jurídico, Curso Pré-Médico e Curso Pré-Político.

Referente ao ensino de Matemática nestes cursos Ribeiro e Valente (2007, p. 1557) destaca que

> "...eram organizados com a finalidade de adaptar os jovens à prestação de exames para os cursos superiores e as finalidades destes ensinos tinham por objetivo desenvolver a cultura espiritual do aluno pelo conhecimento dos processos matemáticos, habilitando-o ao mesmo tempo à concisão e ao rigor do raciocínio pela exposição clara do pensamento em linguagem precisa."

Dessa forma, não haviam programas de matemática oficiais nos Cursos Complementares, pois cada curso buscava preparar os alunos para as especificidades da faculdade. No Curso Pré- Jurídico, por exemplo, não haviam conteúdos de Matemática com exceção da matéria "Noções de Economia e Estatística". Com a reforma Capanema esta realidade mudou. Foram criados os cursos Clássicos e Científicos, com duração de três anos, em substituição dos Cursos Complementares. Agora existia regulamentação para os programas de Matemática.

Ribeiro e Valente (2007) fizeram uma pesquisa comparando os conteúdos de Matemática nos livros didáticos utilizados no curso Clássico e no curso Científico. Observamos a presença expressiva de tópicos de Cálculo no curso Clássico e com mais intensidade no Curso Científico. Organizamos esse comparativo na tabela abaixo com base nas pesquisas dos autores supracitados.

Tabela 2.1 - Tópicos de Cálculo nos cursos Clássico e Cientifico

CURSO CLÁSSICO	**CURSO CIENTÍFICO**
Noção de função de variável real	Função de variável real
Noção de limite e de continuidade	Continuidade; pontos de descontinuidade; descontinuidade de uma função racional
Derivada: definição, interpretação geométrica e cinemática	Derivada: definição, interpretação geométrica e cinemática
Cálculo das derivadas	Cálculo das derivadas
Derivadas de funções elementares	Derivadas de funções elementares
Aplicações das derivadas à determinação dos máximos e mínimos e ao estudo da variação de algumas funções simples	Aplicações das derivadas à determinação dos máximos e mínimos e ao estudo da variação de algumas funções simples
	Séries: sucessões
	Séries: cálculo aritmético dos limites
	Séries numéricas
	Principais caracteres de convergência
	Equações diferenciais, ordinárias e de derivadas parciais; equações diferenciais ordinárias lineares de coeficientes constantes

Fonte: Elaborada pelo autor

A principal diferença entre os cursos Clássico e Científico era que o primeiro era destinado aos alunos que desejavam ingressar nos cursos superiores nas áreas de humanas, já o segundo para aqueles que optavam pelas ciências naturais, isso explica o fato de ter menos ênfase no estudo de Cálculo no curso Clássico.

Não podemos desprezar a importância dada ao Cálculo nos cursos Clássicos e Científicos. Resta-nos questionar: porque não temos mais o ensino de Cálculo nos currículos do Ensino Médio? Quais motivos levaram a sua extinção? Será que o Cálculo perdeu sua relevância para o desenvolvimento científico e tecnológico? Seria possível um retorno desta disciplina no Ensino Médio?

2.2 O Movimento da Matemática Moderna

Foi entre as décadas de 1950 e 1960 que desencadeou, em vários países, o que conhecemos hoje como Movimento da Matemática Moderna (MMM) que objetivava aproximar a Matemática que era ensinada na escola básica com a que era pesquisada. Esperava-se que as pessoas que saíssem da escola pudessem acompanhar o desenvolvimento tecnológico presente na sociedade; almejando alcançar tal objetivo, os precursores do MMM propuseram a inserção de alguns conteúdos do currículo do Ensino Médio e retirada de outros.

No Brasil, o MMM ganhou força através dos grupos de pesquisas formados entre as décadas de 1960 e 1970, dos quais destacamos o GEEM (Grupo de Estudo do Ensino de Matemática), NEDEM (Núcleo de Estudos e Difusão do Ensino de Matemática), GEEMPA (Grupo de Estudos sobre o Ensino de Matemática de Porto Alegre), GEPEMAT (Grupo de Ensino e Pesquisa em Educação Matemática), CECIBA (Centro de Estudos de Ciências da Bahia) e IMURN (Instituto de Matemática do Rio Grande do Norte) com sedes nos estados de São Paulo, Paraná, Rio Grande do Sul, Mato Grosso, Bahia e Rio Grande do Norte, respectivamente. Esses grupos contavam com professores de todos os níveis de ensino; primário, secundário e superior, pois desejavam uniformizar o ensino de Matemática. Entre as ações desenvolvidas pelos grupos destacamos a realização de cursos, a elaboração de livros didáticos, seminários e palestras. Tais ações propiciaram a disseminação do MMM por todo país, que aos poucos foi aderindo ao movimento.

A grande desvantagem desse movimento foi a inserção do excesso de rigor e formalismos, um exemplo disso é a teoria dos conjuntos, culminando na retirada de importantes componentes do ensino de Matemática como a Geometria e o Cálculo, pois, segundo Ávila (1991, p. 2), "não haveria mesmo espaço para tanta coisa nos programas, já que o rigor e o formalismo exigiam o ensino da teoria dos conjuntos e vários detalhamentos axiomáticos que tomam tempo". Dessa forma, continuar ensinando Cálculo no Ensino Médio se tornou inviável, pois além da falta de espaço nos programas esbarramos na dificuldade de se ensinar Cálculo com todo o formalismo, teoremas e demonstrações que o rigor matemático exige.

Parece contraditório que um movimento que pretendia modernizar a matemática, relacionando o conteúdo ensinado em sala de aula com o existente no desenvolvimento tecnológico, deixe de fora o que existe de mais moderno e com importantes aplicações nas mais diversas áreas científicas. Muitos pesquisadores como por exemplo: Rezende (2003), Ávila (1991, 1993, 2006), Duclos (1992) e Machado (2008), têm proposto um retorno ao ensino de Cálculo no Ensino Médio tendo em vista sua grande relevância no desenvolvimento tecnológico.

O que fazer diante dessa realidade? Seria necessário uma nova reforma nos currículos do Ensino Médio, ou daria para conciliar o ensino de Cálculo com os currículos já tão extensos? Discutiremos essas questões na seção 2.4.

2.3 O ensino de Cálculo no Nível Superior

Um dos principais objetivos do Ensino Médio sempre foi preparar o estudante para o Ensino Superior. Segundo o artigo 22 da Lei de Diretrizes e Bases (LDB)

> "A educação básica tem por finalidade desenvolver o educando, assegurar-lhe a formação comum indispensável para o exercício da cidadania e fornecer-lhe meios para progredir no trabalho e em estudos posteriores"(BRASIL, 1996).

Todavia, observamos hoje uma realidade bem diferente. Temos visto alunos chegando ao Ensino Superior sem o embasamento necessário (que deveria ser adquirido no Ensino Médio) para prosseguir seus estudos, ocasionando grandes dificuldades de acompanhar algumas disciplinas e culminando em altos índices de reprovação nas mesmas.

Um claro exemplo dessa realidade são as disciplinas de Cálculo que fazem parte dos currículos de muitos cursos superiores. Uma pesquisa realizada por Amorim (2013) na Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ) aponta que quase 50% das vagas ofertadas destinam-se a turmas que cursarão a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral ao longo do curso.

Com relação aos índices de reprovação nas disciplinas de Cálculo, Rezende (2003) realizou uma pesquisa na Universidade Federal de Fluminense (UFF) com dados relativos ao período de 1996 a 2000 e constatou que o índice de reprovação varia entre 45% e 95%. Esses dados são alarmantes, o que nos faz refletir sobre o que Rezende (2003) chama de "fracasso no ensino de Cálculo".

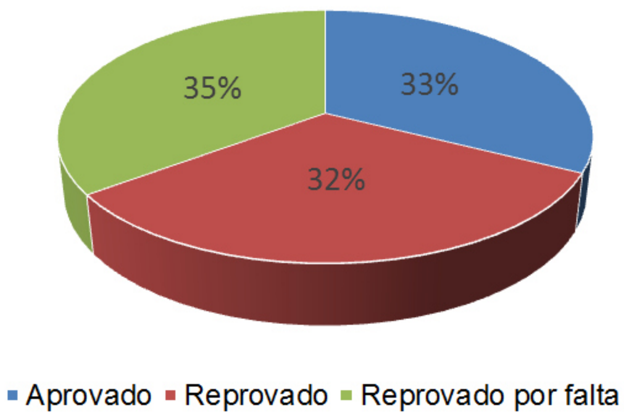
Realizamos uma pesquisa no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia (IFCE) Câmpus Limoeiro do Norte e constatamos que dos oito cursos superiores existentes nesse câmpus, três deles possuem a disciplina de Cálculo em estrutura curricular, isto equivale 37,5% dos cursos. Considerando que é ofertada a mesma quantidade de vagas para todos os cursos, então podemos inferir que quase 40% dos alunos que ingressam nos cursos superiores do IFCE- Câmpus Limoeiro do Norte cursarão a disciplina de Cálculo.

Estes dados mostram a importância do Cálculo para as mais diversas áreas do conhecimento. Ora, se o Cálculo é tão importante para o Ensino Superior e um dos objetivos do Ensino Médio é preparar o aluno para estudos posteriores porque não ensinamos Cálculo no Ensino Médio? Alguém poderá questionar: mas os 62,5% dos alunos que não cursarão a disciplina de Cálculo no Ensino Superior? Se raciocinarmos dessa forma, então não ensinaremos Matemática no Ensino Médio, pois alguns cursos superiores não possuem nenhuma disciplina que contemple conteúdos matemáticos em seus currículos.

Além disso, analisamos os índices de aprovação e reprovação em quatro disciplinas de Cálculo ofertadas para os cursos de Agronomia e Saneamento Ambiental durante os semestres 2014.1 e 2015.1. Constatamos um alto índice de reprovação chegando até 90% em uma dessas disciplinas. Os resultados estão organizados nos gráficos abaixo.

No semestre 2015.1, no curso de Agronomia, o índice de reprovação chegou a 67%, sendo que 35% dos alunos reprovaram por falta, o que revela um alto índice de desistência.

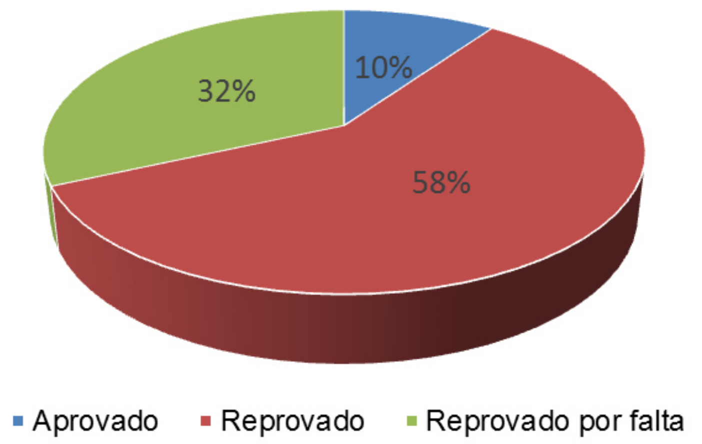
Figura 2.1 - Índices de aprovação e reprovação na disciplina de Cálculo do curso de Agronomia semestre 2015.1



Fonte: Elaborada pelo autor

Já no curso de Saneamento Ambiental, no mesmo semestre, a situação foi ainda mais preocupante, pois a reprovação foi de 90% incluindo reprovações por nota e por falta.

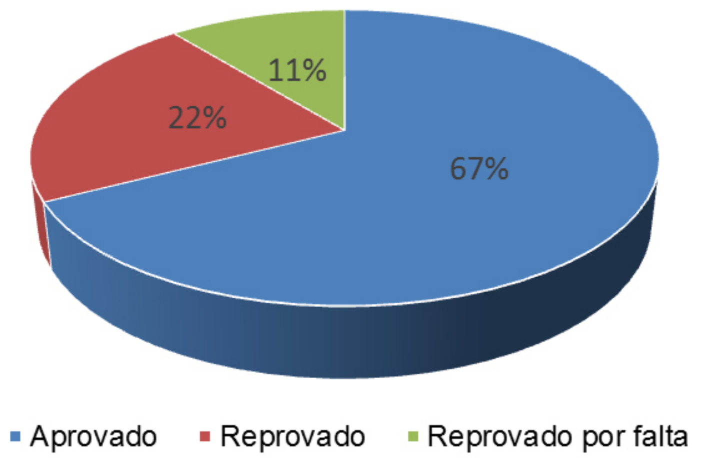
Figura 2.2 - Índices de aprovação e reprovação na disciplina de Cálculo do curso de Saneamento Ambiental semestre 2015.1



Fonte: Elaborada pelo autor

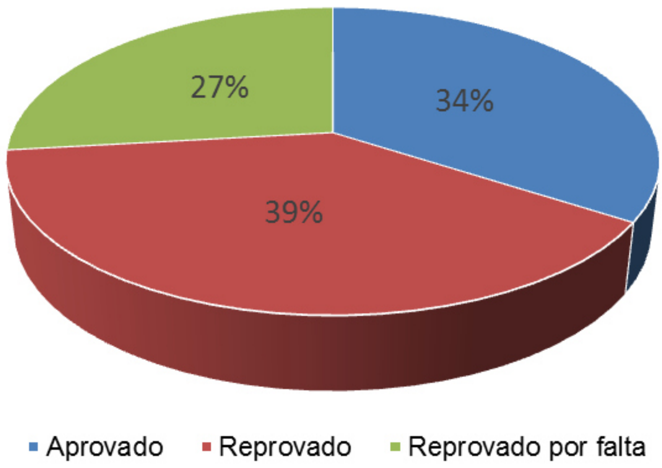
No semestre 2014.1 os índices de reprovações foram 33% e 66% para os cursos de Agronomia e Saneamento Ambiental respectivamente.

Figura 2.3 - Índices de aprovação e reprovação na disciplina de Cálculo do curso de Agronomia semestre 2014.1



Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 2.4 - Índices de aprovação e reprovação na disciplina de Cálculo do curso de Saneamento Ambiental semestre 2014.1



Fonte: Elaborada pelo autor

Estes índices revelam que há uma grande dificuldade de aprendizagem por parte dos alunos nas disciplinas de Cálculo. Acreditamos que a inserção de tópicos de Cálculo durante o Ensino Médio de maneira apropriada para essa fase, prepararia os alunos para ter um melhor aproveitamento no Ensino Superior, contribuindo assim para reduzir os altos índices de reprovações.

2.4 Currículo do Ensino Médio

Diante do que foi exposto não podemos negar que há uma necessidade de se ensinar noções de Cálculo no Ensino Médio. Entretanto, sabemos que os programas de Matemática nessa fase escolar são repletos de conteúdos e que muitas vezes os professores não conseguem esgotar o programa em tempo hábil, deixando de lado assuntos importantes para formação do aluno. Como então seria possível inserir o ensino de Cálculo nesses programas? Para Ávila (1991, p. 4) é só "...uma questão de arrumar os programas adequadamente". De fato, notamos que a falta de tempo não está relacionada diretamente a quantidade de conteúdos, mas a maneira com que eles são ensinados.

> "É importante evitar detalhamentos ou nomenclaturas excessivos. Por exemplo, se o único caso de funções inversas que os alunos verão no Ensino Médio forem as funções exponencial e logaritmo, não há necessidade de todo o estudo sobre funções injetoras, sobrejetoras e inversíveis, assim como se o foco do estudo estiver na análise de gráficos e nas aplicações da função logarítmica, podemos questionar por que estudar cologaritmos, característica e mantissa."(Brasil, 2002, p.120).

Outro exemplo dessa falta de adequação dos conteúdos que comumente acontece está relacionado ao ensino de funções que toma quase que o 1º ano inteiro.

> "Tradicionalmente o ensino de funções estabelece como pré-requisito o estudo dos números reais e de conjuntos e suas operações, para depois definir relações e a partir daí identificar as funções como particulares relações. Todo esse percurso é, então, abandonado assim que a definição de função é estabelecida, pois para a análise dos diferentes tipos de funções todo o estudo relativo a conjuntos e relações é desnecessário. Assim, o ensino pode ser iniciado diretamente pela noção de função para descrever situações de dependência entre duas grandezas, o que permite o estudo a partir de situações contextualizadas, descritas algébrica e graficamente. Toda a linguagem excessivamente formal que cerca esse tema deve ser relativizada e em parte deixada de lado, juntamente com os estudos sobre funções injetoras, sobrejetoras, compostas e modulares."(Brasil, 2002, p.121).

Dessa forma, percebemos que há sim bastante espaço nos programas de Matemática do Ensino Médio para a inserção de noções de Cálculo, como destaca Ávila (1991, p. 5) "A ideia de que os programas de Matemática são extensos e não comportariam a inclusão do Cálculo é um equívoco. Os atuais programas estão, isto sim, mal estruturados". É importante ressaltar que nossa proposta não é ensinar Cálculo com o rigor e formalismo com que é visto no Ensino Superior, caso contrário cairíamos no mesmo erro dos exemplos citados acima.

Além disso, as Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs+) propõem a unidade temática taxas de variação de grandezas dentro do tema Álgebra: números e funções. Entretanto, a proposta é que essa temática seja trabalhada no 3º ano do Ensino Médio. Acreditamos que seria mais proveitoso trabalhar as taxas de variações de grandezas paralelamente ao estudo de funções no 1º ano. Dessa forma, estaríamos inserindo noções de derivadas logo no 1º ano possibilitando explorar melhor o estudo das funções, especialmente funções do 1º e 2º grau, visto que as derivadas das funções modulares, logaritmos, exponenciais e trigonométricas necessitariam de um conhecimento prévio de limites. Alguém poderá questionar: então porque não se ensina logo a teoria de limites antes de derivadas, já que essa é a sequência adotada no Ensino Superior? Cabe-nos lembrar que essa não é a sequência histórica, na verdade a sequência na ordem cronológica foi Cálculo Integral, Cálculo Diferencial e Cálculo Infinitesimal. Além disso, a teoria de limites não teria muito proveito nessa fase, pois gastaríamos muito tempo ensinando técnicas de resolução de limites para abandonarmos seu ensino logo depois de definirmos derivadas.

Um fator relevante para a inserção do ensino de derivadas no 1º ano é sua grande aplicabilidade a outros conteúdos. Podemos aplicar, por exemplo, o conceito de derivada como taxa de variação da função do primeiro grau para estudar o crescimento e decrescimento de tais funções, assim como utilizar o apelo geométrico da derivada como inclinação da reta tangente para problemas de máximos e mínimos, relacionando principalmente com o vértice da parábola. Outra aplicação importante da derivada é na cinemática,em que a derivada é definida como a velocidade instantânea o que possibilita o estudo dos movimentos uniformemente variados sem muitas dificuldades. Poderíamos citar inúmeras outras aplicações, mas entendemos que essas são suficientes para convencer o leitor da importância do estudo da derivada para o desenvolvimento da Matemática.

Portanto, nesse trabalho, propomos uma sequência didática para o ensino de derivadas no 1º ano do Ensino Médio de forma intuitiva e acompanhada de suas aplicações, deixando o excesso de notações e demonstrações para o Ensino Superior.

3 DERIVADAS NO ENSINO MÉDIO: UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Neste capítulo traremos uma sequência didática destinada aos professores de Matemática do 1º ano do Ensino Médio afim de equipá-los para inserir o conceito de derivadas e algumas de suas aplicações através das funções do 1º e 2º graus e funções polinomiais. Cabe ressaltar que a sequência aqui proposta poderá ser adequada a realidade de cada um.

3.1 AULA 1: A derivada como taxa de variação

3.1.1 Objetivo:

Inserir o conceito de derivada da função do 1º grau como taxa de variação.

3.1.2 Duração:

2h/a

3.1.3 Público alvo:

1º ano do Ensino Médio

3.1.4 Pré-requisitos:

Função do 1º grau, relações trigonométricas no triângulo retângulo.

3.1.5 Desenvolvimento:

Considere o seguinte exemplo:

Obs: Prezado professor, utilize o exemplo a seguir para inserir o conceito de taxa de variação, começando com uma função linear e posteriormente uma função do 1º grau completa.

Exemplo 3.1 Um botânico mede o crescimento de um planta numa determinada hora do dia e observa que a lei que relaciona a altura (h) em função do tempo t é $h = 5t$, onde h é medido em centímetros e t em dias. Qual a variação de h quando t varia:

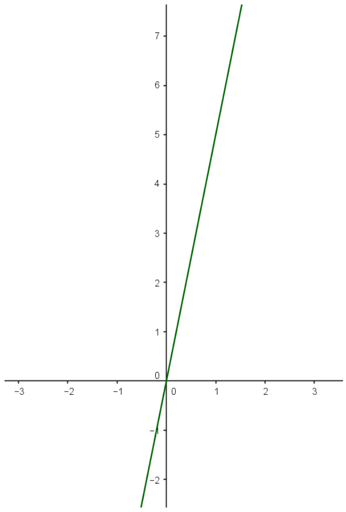
a) De 1 para 2 dias?

b) De 2 para 3 dias?

c) De 5 para 6 dias?

Observe o gráfico da função

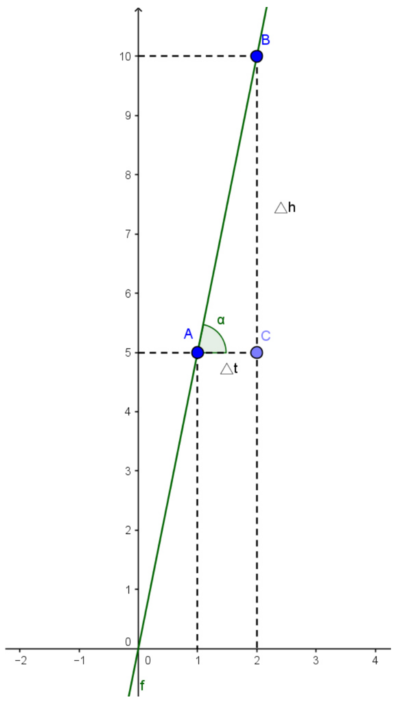
Figura 3.1 - Gráfico da função $h = 5t$



Fonte: Elaborada pelo autor

Quando o tempo $t = 1$ a altura é $h = 5 \cdot 1 = 5$ e quando $t = 2 \Rightarrow h = 5 \cdot 2 = 10$. Quando o tempo varia de 1 dia para 2 dias dizemos que houve um acréscimo de 1 dia ou que o tempo t sofreu uma variação de 1 dia e escrevemos $\Delta t = 1$ dia. Por outro lado, a altura variou de $5\,cm$ para $10\,cm$, isto é, sofreu uma variação $\Delta h = 5\,cm$. Observe a figura abaixo.

Figura 3.2 - Gráfico da função $h = 5t$



Fonte: Elaborada pelo autor

Se α é a inclinação (ou declive) da reta cuja equação é $h = 5t$ então pelo triângulo ABC temos:

$$\text{tg}\alpha = \frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{5}{1} = 5.$$

A razão $\frac{\Delta h}{\Delta t}$ é chamada razão incremental ou taxa de variação.

Obs: Professor, peça aos alunos para calcularem a taxa de variação de t variando de 2 para 3 dias e de 5 para 6 dias.

Quando t varia de 2 para 3 dias, temos:

$$h(2) = 5 \cdot 2 = 10;$$

$$h(3) = 5 \cdot 3 = 15.$$

Logo,

$$\Delta t = 3 - 2 = 1$$

e

$$\Delta h = 15 - 10 = 5.$$

Portanto, $\dfrac{\Delta h}{\Delta t} = 5.$

Por outro lado, quando t varia de 5 para 6 dias, temos:

$$h(5) = 5 \cdot 5 = 25;$$

$$h(6) = 5 \cdot 6 = 30.$$

Logo,

$$\Delta t = 6 - 5 = 1$$

e

$$\Delta h = 30 - 25 = 5.$$

Portanto, $\dfrac{\Delta h}{\Delta t} = 5.$

Obs: Professor faça a pergunta abaixo aos alunos levando-os a refletir que a taxa de variação da função do 1° grau é sempre constante

O que você pode observar com relação as taxas de variações quando t varia de 1

para 2 dias, de 2 para 3 dias e de 5 para 6 dias?
R: São iguais.

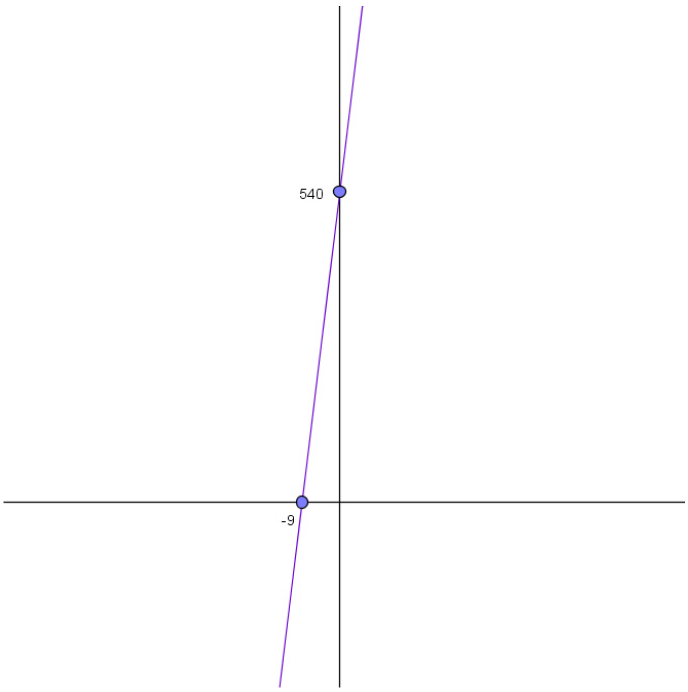
Obs: Agora, procedendo de modo análogo ao feito no exemplo anterior, peça aos alunos para resolverem o seguinte problema.

Exemplo 3.2 O salário fixo mensal de um segurança é de R$ 540,00. Para aumentar sua renda ele faz plantões noturnos em uma boate e recebe R$ 60,00 por noite de trabalho.

a) Escreva a lei que associa o salário y do segurança em função da quantidade x de plantões noturnos que ele faz.
R: $y = 60x + 540$.

b) Esboce o gráfico dessa função.
R:

Figura 3.3 - Gráfico da função $y = 60x + 540$



Fonte: Elaborada pelo autor

c) Qual é a taxa de variação $\frac{\Delta y}{\Delta x}$?

$$\text{R: } \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$
$$= \frac{60(x + \Delta x) + 540 - (60x + 540)}{\Delta x}$$

$$= \frac{60x + 60\Delta x + 540 - 60x - 540}{\Delta x}$$

$$= \frac{60\Delta x}{\Delta x}, (\Delta x \neq 0)$$

=60.

d) Qual a relação entre o coeficiente angular da reta e a taxa de variação $\frac{\Delta y}{\Delta x}$?

R: São iguais

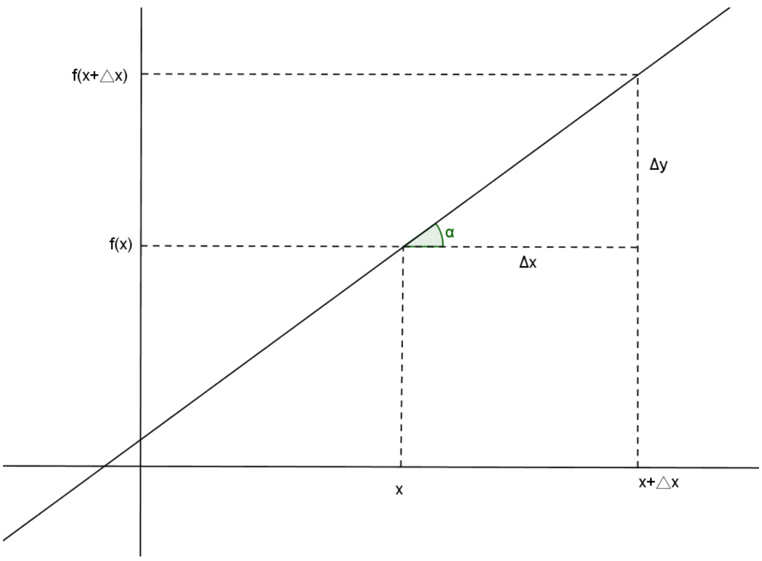
A taxa de variação de uma função $y = f(x)$ do 1º grau é também denominada derivada dessa função e é denotada por $f'(x)$

Obs: Professor, neste momento iremos calcular a derivada de uma função qualquer do 1º grau. Desenhe o gráfico com um acréscimo Δx em x e o respectivo acréscimo em y, mas deixe que os alunos façam os cálculos. Caso eles não consigam faça no quadro branco, mas sempre instigando a participação dos alunos. Certifique-se que eles estão entendendo.

Exemplo 3.3 Mostre que a derivada da função $f(x) = ax + b$ é $f'(x) = a$.

R:

Figura3.4 - Gráfico da função $f(x) = ax + b$



Fonte: Elaborada pelo autor

$$f'(x) = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$= \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \frac{a(x+\Delta x)+b-(ax+b)}{\Delta x}$$
$$= \frac{ax+a\Delta x+b-ax-b}{\Delta x}$$
$$= \frac{a\Delta x}{\Delta x}, (\Delta x \neq 0)$$
$$= a$$

Obs: Peça aos alunos para resolverem o exemplo seguinte sem realizar cálculos.

Exemplo 3.4 Com base nos exemplos anteriores, qual a derivada das seguintes funções?

a) $f(x) = 2x + 3$;

R: $f'(x) = 2$.

b) $f(x) = 4 + 5x$;

R: $f'(x) = 5$.

c) $f(x) = -6x + 15$;

R: $f'(x) = -6$.

d) $f(x) = -5x$.

R: $f'(x) = -5$.

Obs: Caro professor, caso ache necessário, recomende que os alunos façam os seguintes exercícios extraclasse para aprofundar seus conhecimentos

Exercícios propostos

1. Calcule a derivada da função $f(x) = 5$.

   R: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{5-5}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0, (\Delta x \neq 0)$

2. Qual a derivada da função $f(x) = c$, onde c é uma constante qualquer.

   R: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{c-c}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0, (\Delta x \neq 0)$

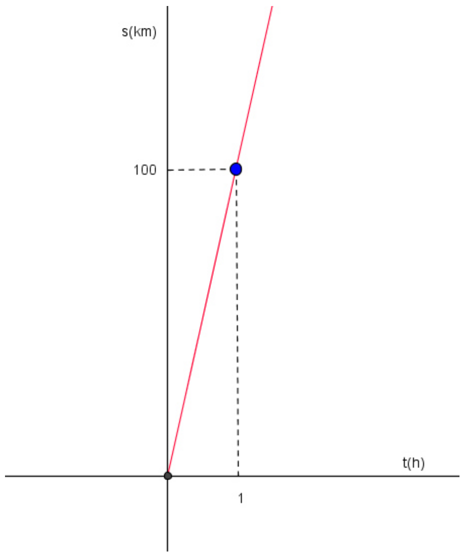
3. A família Souza, que vive em Campos dos Goytacazes, pretende viajar nas férias para uma cidade do estado do Rio de Janeiro que fica a 400 km de distância de Campos. O gráfico a seguir representa a distância (em km) em relação ao tempo (em horas) de viagem.

Nota: A velocidade média é calculada pela fórmula:

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s - s_0}{t - t_0}$$

onde Δs é a variação do espaço e Δt é a variação do tempo.

Figura 3.5 - Gráfico da função $f(x) = 100x$



Fonte: Elaborada pelo autor

a) Quantos quilômetros a família percorre em 1 hora?

R: 100 km.

b) A que velocidade média a família viaja?

R:$v_m = \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \dfrac{100}{1} = 100\text{km/h}.$

c) Encontre a lei de formação da função representada no gráfico.
R: $f(x) = 100x$.

d) Determine a derivada da função representada no gráfico.
R: $f'(x) = 100$.

e) Qual a relação entre a derivada da função e a velocidade média?
R: São iguais.

3.2 AULA 2: Crescimento e decrescimento da função do 1º grau

3.2.1 Objetivo:

Aplicar o conceito de derivada ao crescimento e decrescimento da função do 1º grau.

3.2.2 Duração:

1h/a

3.2.3 Público alvo:

1º ano do Ensino Médio

3.2.4 Pré-requisitos:

Função do 1º grau.

3.2.5 Desenvolvimento:

Obs: Prezado professor, inicie a aula definindo função crescente e função decrescente a partir dos exemplos abaixo. Em seguida relacione esses conceitos com a taxa de variação da função.

Exemplo 3.5 Na produção de peças, uma fábrica tem um custo fixo de R$ 16,00 mais um custo variável de R$ 1,50 por unidade produzida. Sendo x o número de peças unitárias produzidas, determine:

a) A lei da função que fornece o custo da produção de x peças.

R: $y = 1,5x + 16$.

b) Calcule o custo y para o número de peças x especificados na tabela abaixo.

R:

x	y
5	23,5
7	26,5
10	31

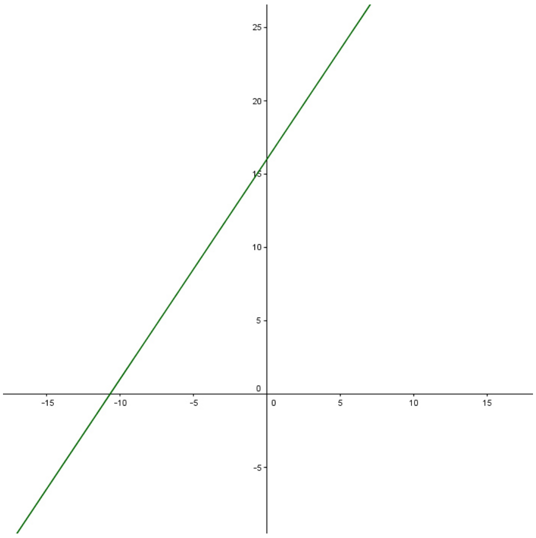
c) A medida que o número de peças cresce o que acontece com o custo?

R: O custo cresce.

d) Esboce o gráfico dessa função.

R:

Figura 3.6 - Gráfico da função $y = 1,5x + 16$



Fonte: Elaborada pelo autor

Exemplo 3.6 Seja a demanda d e o preço p de um produto que se relacionam por meio da fórmula $d = -2p + 10$.

a) Calcule o valor da demanda para os diferentes preços especificados na tabela abaixo, completando-a.

R:

p	d
2	6
5	0
9	-8

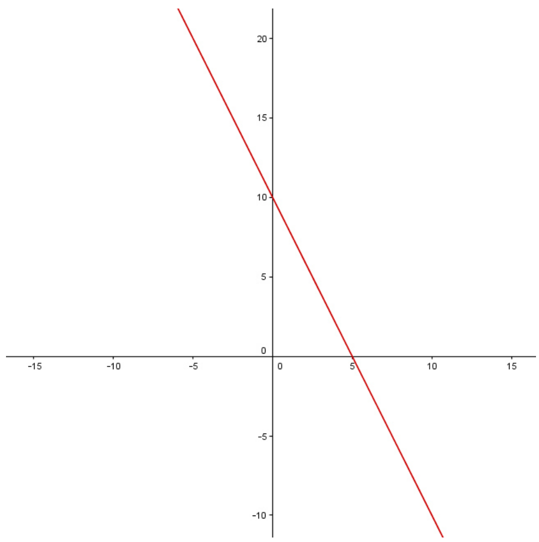
b) O que acontece com a demanda a medida que o preço cresce?

R: Decresce.

c) Esboce o gráfico dessa função.

R:

Figura 3.7 - Gráfico da função $d = -2p + 10$



Fonte: Elaborada pelo autor

Definição: Uma função $y = f(x)$ é dita crescente se quando x cresce, y também cresce e é decrescente se quando x cresce y decresce.

Obs: Professor, proponha as seguintes questões para os alunos.

Exercícios propostos

1. A função do exemplo 3.5 é crescente ou decrescente? E a função do exemplo 3.6?

   R: Crescente. Decrescente.

2. Calcule a taxa de variação das funções dos exemplos 3.5 e 3.6 utilizando dois pontos quaisquer das tabelas.

   R: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{26,5 - 23,5}{7 - 5} = \dfrac{3}{2} = 1,5;$

   $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{0 - 6}{5 - 2} = \dfrac{-6}{3} = -2.$

Note que se (x_1, y_1) e (x_2, y_2) são pontos de uma reta cuja equação é $y = f(x)$ e além disso,
$x_1 < x_2$ e $y_1 < y_2$ então $x_2 - x_1 > 0$ e $y_2 - y_1 > 0 \Rightarrow \Delta x > 0$ e $\Delta y > 0 \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} > 0$.
Por outro lado se
$x_1 < x_2$ e $y_1 > y_2$ então $x_2 - x_1 > 0$ e $y_2 - y_1 < 0 \Rightarrow \Delta x > 0$ e $\Delta y < 0 \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} < 0$.

Portanto, a função f é crescente se $\frac{\Delta y}{\Delta x} > 0$, isto é, se a derivada f' é positiva e é decrescente se $\frac{\Delta y}{\Delta x} < 0$, respectivamente se a derivada f' é negativa.

3.3 AULA 3: A derivada como inclinação da reta tangente

3.3.1 Objetivo:

Inserir o conceito de derivada para função do 2º grau como inclinação da reta tangente.

3.3.2 Duração:

2h/a

3.3.3 Público alvo:

1º ano do Ensino Médio

3.3.4 Pré-requisitos:

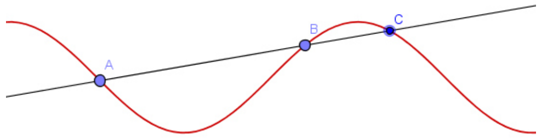
Função do 2º grau.

3.3.5 Desenvolvimento:

Obs: Prezado professor, inicie a aula lembrando (ou definindo, caso os alunos ainda não tenham conhecimento) o conceito de reta secante a uma curva, em seguida introduza o conceito de reta tangente a uma curva.

Definição: Uma reta secante a uma curva é qualquer reta que intercepte dois ou mais de seus pontos.

Figura 3.8 - Reta secante a uma curva



Fonte: Elaborada pelo autor

Exemplo 3.7 Dada a função $f(x) = x^2$, com o auxilio de uma calculadora, ache a inclinação da reta secante à curva $y = x^2$ que passa pelos pontos:

Nota: Dados dois pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ pertencentes a curva $y = f(x)$, a inclinação da reta secante a esta curva é dada por:
$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

a) $A(2,4)$ e $B(3,9)$;

R:$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{9-4}{3-2} = \frac{5}{1} = 5;$

b) $A(2,4)$ e $B(2,1;4,41)$;

R:$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4,41-4}{2,1-2} = \frac{0,41}{0,1} = 4,1;$

c) $A(2,4)$ e $B(2,01;4,0401)$;

R:$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4,0401-4}{2,01-2} = \frac{0,0401}{0,01} = 4,01.$

Exercícios propostos

De acordo com as respostas dos itens a), b) e c) do exemplo acima responda as seguintes perguntas:

1. De que valor a inclinação da reta secante à curva está se aproximando?
   R: 4.

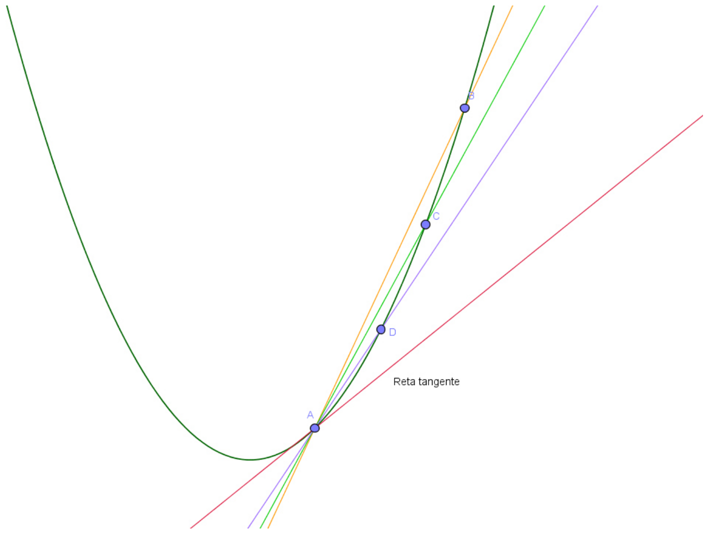
2. Quais os acréscimos Δx dados a x nos itens a), b) e c)? De que valor esses acréscimos se aproximam?

   R:a)1; b)0,1; c)0,01. De zero.

   Obs: Se necessario utilize mais pontos com Δx cada vez mais proximo de zero.

Fixando o ponto $A = (2,4)$ e tomando valores para Δx cada vez mais próximos de zero a reta secante que passa pelos pontos $(2,4)$ e $(2 + \Delta x, f(2 + \Delta x))$ se aproxima de uma reta limite a qual denominamos de reta tangente à curva no ponto (2,4) conforme ilustra a figura abaixo:

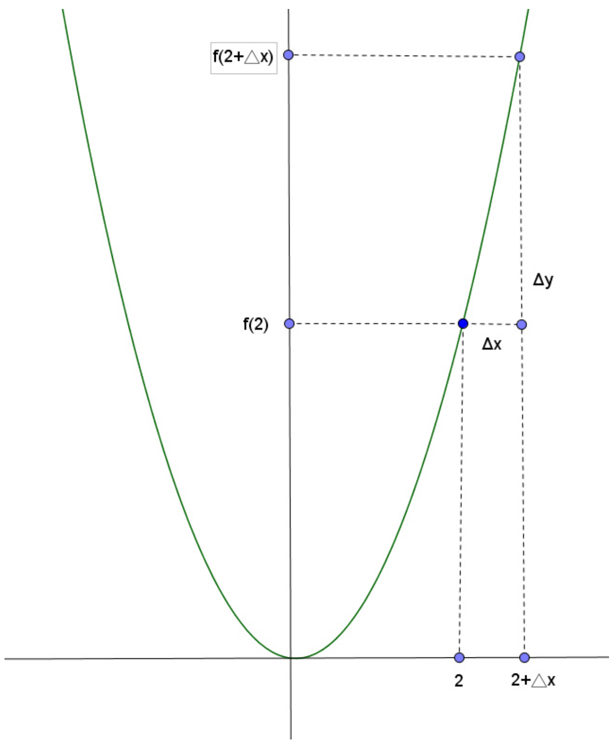
Figura 3.9 - Reta tangente à curva $y = x^2$ no ponto A(2,4)



Fonte: Elaborada pelo autor

Observe a figura abaixo:

Figura 3.10 - Gráfico da função $y = x^2$



Fonte: Elaborada pelo autor

Temos que:

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(2+\Delta x) - f(2)\\ &= (2+\Delta x)^2 - 2^2\\ &= 4 + 4\Delta x + (\Delta x)^2 - 4\\ &= \Delta x(4+\Delta x)\end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x(4+\Delta x)}{\Delta x} = 4 + \Delta x$$

A medida que Δx se aproxima de zero, a razão $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ se aproxima de 4, esse valor $(\frac{\Delta y}{\Delta x} = 4)$ é a inclinação da reta tangente a curva $y = x^2$ no ponto (2,4), o qual também denominamos derivada da função $y = x^2$ no ponto (2,4) e escrevemos $f'(x) = 4$.

Exemplo 3.8 Calcule a derivada da função $f(x) = x^2$ nos pontos (3,9), (4,16) e (5,25). Em seguida complete a tabela abaixo.

R:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(3+\Delta x) - f(3)}{\Delta x}\\ &= \frac{(3-\Delta x)^2 - 9}{\Delta x}\\ &= \frac{9 + 6\Delta x + (\Delta x)^2 - 9}{\Delta x}\\ &= \frac{\Delta x(6+\Delta x)}{\Delta x}, (\Delta x \neq 0)\\ &= 6 + \Delta x.\end{aligned}$$

Quando Δx se aproxima de zero $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ se aproxima de 6. Logo a derivada de f no ponto (3,9) é 6

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(4+\Delta x) - f(4)}{\Delta x}\\ &= \frac{(4+\Delta x)^2 - 4^2}{\Delta x}\\ &= \frac{16 + 8\Delta x + (\Delta x)^2 - 16}{\Delta x}\\ &= \frac{\Delta x(8+\Delta x)}{\Delta x}, (\Delta x \neq 0)\\ &= 8 + \Delta x.\end{aligned}$$

Quando Δx se aproxima de zero, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ se aproxima de 8. Logo a derivada de f no ponto (4,16) é 8.

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(5+\Delta x)-(5)}{\Delta x} \\
&= \frac{(5+\Delta x)^2-5^2}{\Delta x} \\
&= \frac{25+10\Delta x+(\Delta x)^2-25}{\Delta x} \\
&= \frac{\Delta x(10+\Delta x)}{\Delta x}, (\Delta x \neq 0) \\
&= 10+\Delta x.
\end{aligned}$$

Quando Δx se aproxima de zero, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ se aproxima de 10. Logo a derivada de f no ponto (5,25) é 10.

x	$f'(x)$
3	6
4	8
5	10

a) Qual relação você observa entre x e $f'(x)$?

R: $f'(x)$ é o dobro de x.

b) Qual a derivada de $f(x) = x^2$ para qualquer x?

$f'(x) = 2x$.

Exemplo 3.9 Mostre que a derivada da função $f(x) = x^2$ é $2x$.
R:

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \\
&= \frac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x} \\
&= \frac{x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2-x^2}{\Delta x} \\
&= \frac{\Delta x(2x+\Delta x)}{\Delta x}, (\Delta x \neq 0) \\
&= 2x+\Delta x.
\end{aligned}$$

Quando Δx se aproxima de zero, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ se aproxima de $2x$. Logo $f' = 2x$.

Exercício para casa

Desafio: Qual a derivada da função $f(x) = ax^2 + bx + c$, onde a, b e $c \in \mathbb{R}$?

R:

$$
\begin{aligned}
\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\
&= \frac{a(x+\Delta x)^2 + b(x+\Delta x) + c - (ax^2 + bx + c)}{\Delta x} \\
&= \frac{a(x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2) + bx + b\Delta x + c - ax^2 - bx - c}{\Delta x} \\
&= \frac{ax^2 + 2ax\Delta x + a(\Delta x)^2 + bx + b\Delta x + c - ax^2 - bx - c}{\Delta x} \\
&= \frac{2ax\Delta x + a(\Delta x)^2 + b\Delta x}{\Delta x} \\
&= \frac{\Delta x(2ax + a\Delta x + b)}{\Delta x}, (\Delta x \neq 0) \\
&= 2ax + a\Delta x + b.
\end{aligned}
$$

Quando Δx se aproxima de zero, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ se aproxima de $2ax+b$. Logo $f'(x) = 2ax+b$.

3.4 AULA 4: Máximos e mínimos da função do 2º grau.

3.4.1 Objetivo:

Aplicar a derivada a problemas de máximos e mínimos da função do 2º grau.

3.4.2 Duração:

2h/a

3.4.3 Público alvo:

1º ano do Ensino Médio

3.4.4 Pré-requisitos:

Função do 2º grau.

3.4.5 Desenvolvimento:

Exemplo 3.10 Um avião de 100 lugares foi fretado para uma excursão. A companhia exigiu, de cada passageiro, R$ 800,00 mais R$ 10,00 por cada lugar vago. Para que número de passageiros a rentabilidade da empresa é máxima?

Obs: Caro professor, antes de resolver o exemplo com variáveis aplique valores numéricos para que os alunos entendam o problema e depois possam generalizar.

Para entender o nosso problema vamos preencher a seguinte tabela para alguns valores de passageiros.

Número de passageiros	Número de lugares vagos	Valor pago por cada passageiro	Rentabilidade da empresa
10	90	$800 + 10.90 = 1700$	$10(800 + 10.90) = 17000$
20	80	$800 + 10.80 = 1600$	$20(800 + 10.80) = 32000$
30	70	$800 + 10.70 = 1500$	$30(800 + 10.70) = 45000$
40	60	$800 + 10.60 = 1400$	$40(800 + 10.60) = 56000$
50	50	$800 + 10.50 = 1300$	$50(800 + 10.50) = 65000$
60	40	$800 + 10.40 = 1200$	$60(800 + 10.40) = 72000$
70	30	$800 + 10.30 = 1100$	$70(800 + 10.30) = 77000$
80	20	$800 + 10.20 = 1000$	$80(800 + 10.20) = 80000$
90	10	$800 + 10.10 = 900$	$90(800 + 10.10) = 81000$
100	0	$800 + 10.0 = 800$	$100(800 + 10.0) = 80000$
x	$100 - x$	$800 + 10(100 - x)$	$x[800 + 10(100 - x)]$

Observe que a rentabilidade da empresa é máxima quando o número de passageiros é 90. Chamando a rentabilidade da empresa de y podemos expressar o problema através da equação:

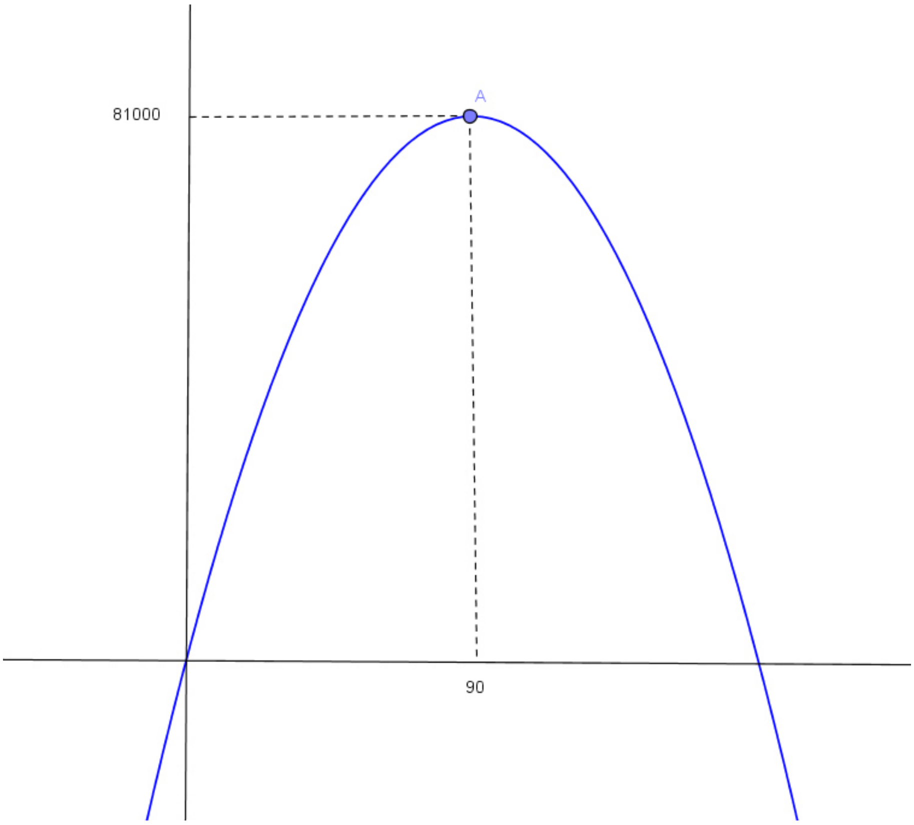
$$y = x[800 + 10(100 - x)];$$

$$y = x[800 + 1000 - 10x];$$

$$y = 1800x - 10x^2.$$

Note que a equação acima representa uma função do segundo grau cujo gráfico encontra-se abaixo.

Figura 3.11 - Gráfico da função $y = 1800x - 10x^2$

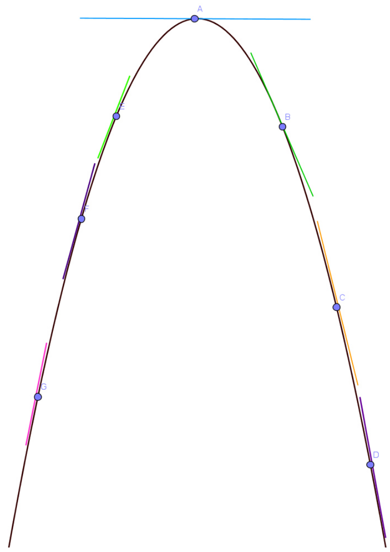


Fonte: Elaborada pelo autor

> Chamamos de valor máximo de uma função o maior valor que ela assume e de valor mínimo o menor valor.
> No caso da função do segundo grau o valor máximo ou mínimo ocorre no vértice da parábola. Será máximo quando a concavidade da parábola estiver voltada para baixo ($a < 0$) e mínimo quando a concavidade estiver voltada para cima ($a > 0$).

Observe no gráfico abaixo que à medida que as retas tangentes se aproximam do vértice da parábola, a reta tangente vai ficando cada vez mais horizontal, isso significa que a inclinação da reta tangente vai se aproximando de zero, ocorrendo a anulação exatamente no vértice da parábola.

Figura 3.12 - Retas tangentes à curva $y = 1800x - 10x^2$



Fonte: Elaborada pelo autor

No exemplo anterior, temos que a derivada da função $f(x) = 1800x - 10x^2$ é $f'(x) = -20x + 1800$ (peça para os alunos verificarem). Observe que $f'(90) = -20 \cdot 90 + 1800 = 0$, ou seja a derivada se anula exatamente onde ocorre o valor máximo da função. Portanto para encontrarmos o ponto onde ocorre o valor máximo ou mínimo de uma função do segundo grau basta calcular sua derivada, igualar a zero e resolver a equação.

Exemplo 3.11 O custo C, em reais, para se produzir n unidades de determinado produto é dado por $C = n^2 - 110n + 2510$. Quantas unidades deverão ser produzidas para se obter o custo minimo?

Obs: Como na aula 3 mostramos que a derivada da função$f(x) = ax^2 + bx + c$ é $f'(x) = 2ax + b$, não é necessário calcular a derivada através da definição. Caso necessário relembre isso para os alunos.

R: Temos que

$$C' = 2n - 110.$$

Daí segue-se que

$$2n - 110 = 0 \Leftrightarrow 2n = 110 \Leftrightarrow n = 55.$$

Logo o custo será mínimo se forem produzidas 5 unidades e o custo séra $C = 55^2 - 110 \cdot 55 + 2510 = 3025 - 6050 + 2510 = -515$.

Exemplo 3.12 Mostre que o vértice da parábola cuja equação é $y = ax^2 + bx + c$ é dado por $\left(\dfrac{-b}{2a}, \dfrac{-\Delta x}{4a}\right)$.

R: Sabemos que o vértice da parábola ocorre no ponto onde a derivada se anula. Dessa forma temos:

$$y' = 2ax + b$$

$$2ax + b = 0$$

$$\Leftrightarrow 2ax = -b$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-b}{2a}.$$

Substituindo o valor de $x = \dfrac{-b}{2a}$ na equação $y = ax^2 + bx + c$, obtemos:

$$\begin{aligned}
& y = a\left(\frac{-b}{2a}\right)^2 + b\left(\frac{-b}{2a}\right) + c \\
& \Rightarrow y = a\left(\frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{2a} + c \\
& \Rightarrow y = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c \\
& \Rightarrow y = \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a} \\
& \Rightarrow y = \frac{-b^2 + 4ac}{4a} \\
& \Rightarrow y = \frac{-\Delta}{4a}.
\end{aligned}$$

Portanto o máximo ou mínimo é $y = \dfrac{-\Delta}{4a}$ e ocorre quando $x = \dfrac{-b}{2a}$.

Obs: Professor, proponha os seguintes exercícios para os alunos resolverem em sala de aula.

Exercicios propostos

1. O lucro mensal de uma empresa é dado por $L = -x^2 + 30x - 5$, onde x é a quantidade mensal vendida. Qual o lucro mensal máximo possível? Esboce o gráfico dessa função.

   R:Temos que

$$L' = -2x + 30$$

$$\Rightarrow L' = 0 \Leftrightarrow -2x + 30 = 0$$

$$\Leftrightarrow -2x = -30$$

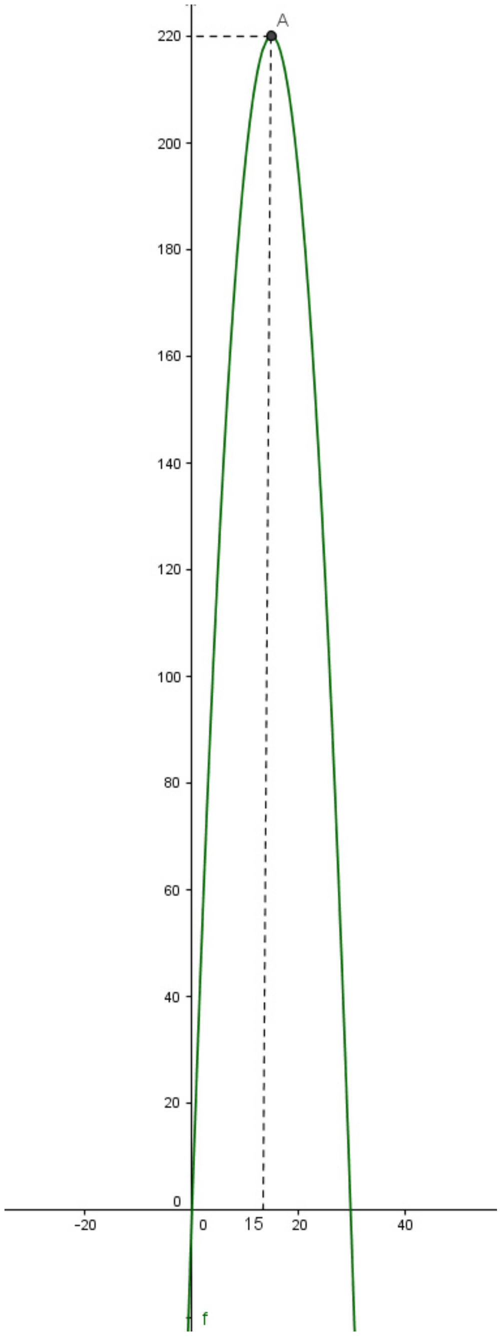
$$\Leftrightarrow x = \frac{30}{2} = 15.$$

Logo, o lucro máximo ocorre quando $x = 15$.

Portanto,

$$L = -(15)^2 + 30 \cdot 15 - 5 = -225 + 450 - 5 = 220.$$

Figura 3.13 - Gráfico da função $L = -x^2 + 30x - 5$



Fonte: Elaborada pelo autor

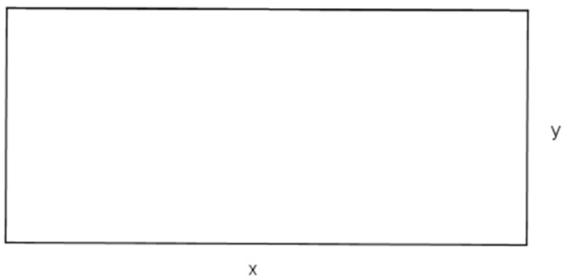
2. Com 80 metros de cerca um fazendeiro deseja circundar uma área retangular junto

a um rio para confinar alguns animais. Quais devem ser as medidas do retângulo para que a área cercada seja a maior possível?

Obs: Lembre aos alunos que a área do retângulo é dada pelo produto da largura pelo comprimento e o perímetro é a soma das medidas de todos os lados do retângulo.

R: Sejam x e y as medidas do comprimento e da largura respectivamente. Então a área do retângulo é dada por $A = xy$. O fazendeiro deve cercar todo o terreno com 80 metros de cerca, logo $2x + 2y = 80 \Rightarrow x + y = 40 \Rightarrow y = 40 - x$. Substituindo o valor de $y = 40 - x$ na área obtemos:

$$A(x) = x(40 - x) = -x^2 + 40x.$$



Dai, segue que $A'(x) = -2x+40$. Portanto, a área será máxima no ponto máximo da função $A'(x) = -2x + 40$, isto é quando $-2x + 40 = 0 \Rightarrow -2x = -40 \Rightarrow x = 20$ Concluímos que as medidas do retângulo são $x = 20$ e $y = 40 - 20 = 20$.

3. O custo de produção de um determinado artigo é dado por $C(x) = 3x^2 - 15x + 21$. Se a venda de x unidades é dada por $V(x) = 2x^2 + x$, para que o lucro $L(x) = V(x) - C(x)$ seja máximo, quantas unidades devem ser vendidas?
R:

$$\begin{aligned} L(x) &= V(x) - C(x) \\ &= 2x^2 + x - (3x^2 - 15x + 21) \\ &= 2x^2 + x - 3x^2 + 15x - 21 \\ &= -x^2 + 16x - 21 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow L'(x) = -2x + 16.$$

Logo,

$$L'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x + 16 = 0 \Leftrightarrow -2x = -16 \Leftrightarrow x = 8.$$

Portanto, para que o lucro seja máximo devem ser vendidas 8 unidades.

4. Sabe-se que o custo C para produzir x unidades de certo produto é dado por $C = x^2 - 80x + 3000$. Nessas condições, calcule:

a) a quantidade de unidades produzidas para que o custo seja mínimo;
R:

$$C' = 2x - 80;$$

$$C' = 0 \Leftrightarrow 2x - 80 = 0 \Leftrightarrow 2x = 80 \Leftrightarrow x = 40.$$

Logo, a quantidade de unidades produzidas para que o custo seja mínimo é 40.

b) o valor mínimo do custo.
R: O valor mínimo do custo ocorre quando $x = 40$. Portanto $C = 40^2 - 80.40 + 3000 = 1600 - 3200 + 3000 = 1400$.

3.5 AULA 5: A derivada e a velocidade instantânea

3.5.1 Objetivo:

Relacionar a derivada com a velocidade instantânea de um móvel.

3.5.2 Duração:

2h/a

3.5.3 Público alvo:

1º ano do Ensino Médio

3.5.4 Pré-requisitos:

Aulas 1,2,3 e 4

3.5.5 Desenvolvimento:

Nas aulas anteriores vimos que a derivada de uma função f pode ser interpretada como taxa de variação. No caso da função do 2º grau a taxa de variação é calculada em cada ponto x_1 a qual chamamos de taxa de variação instantânea de f em x_1.

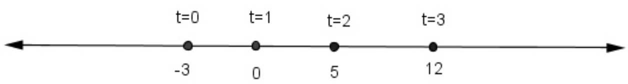
Considere uma partícula se movendo em movimento retilíneo, isto é, movendo-se ao longo de uma reta. Seja O a origem dessa reta, s a distância orientada da partícula medida em centímetros e t o tempo em segundos. Então f será a função que relaciona o espaço s em função do tempo t, ou seja, $s = f(t)$.

Exemplo 3.13 Seja $s = t^2 + 2t - 3$. Preenchendo a tabela abaixo obteremos as posições da partícula em cada instante.

t	$s = t^2 + 2t - 3$
0	$s = 0^2 + 2 \cdot 0 - 3 = -3$
1	$s = 1^2 + 2 \cdot 1 - 3 = 0$
2	$s = 2^2 + 2 \cdot 2 - 3 = 5$
3	$s = 3^2 + 2 \cdot 3 - 3 = 12$

A figura abaixo ilustra as posições especificadas na tabela.

Figura 3.14 - Posições de uma partícula



Fonte: Elaborada pelo autor

Calculemos as taxas de variações $\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ entre os instantes:

a) 0 e 1;

R:$\dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \dfrac{0-(-3)}{1-0} = \dfrac{3}{1} = 3;$

b) 1 e 2;

R:$\dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \dfrac{5-0}{2-1} = \dfrac{5}{1} = 5;$

c) 2 e 3;

R:$\dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \dfrac{12-5}{3-2} = \dfrac{7}{1} = 7;$

d) 0 e 4;

R:$\dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \dfrac{12-(-3)}{3-0} = \dfrac{15}{3} = 15.$

Lembre-se que a velocidade média é dada por $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$, dessa forma as taxas de variações encontradas são as velocidades médias para cada intervalo de tempo. Considere que no instante $t = t_1$ o espaço seja $s = s_1$. Assim temos:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s - s_1}{t - t_1} \tag{1}$$

Como $s = f(t)$ e $s_1 = f(t_1)$, então de (3.1) segue que

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t) - f(t_1)}{t - t_1} \tag{2}$$

A equação (3.2) representa a velocidade média da partícula entre os instantes t e t_1. Quanto menor for o intervalo de t_1 até t, mais próxima estará a velocidade média do que chamamos velocidade instantânea em t_1. A velocidade instantânea pode ser definida como o valor do qual se aproxima o quociente $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ quando Δt se aproxima de zero, isto é, quando t_1 se aproxima t. Dessa forma podemos concluir que a velocidade instantânea é igual a derivada da função $s = f(t)$.

No exemplo 3.13 temos que $s = f(t) = t^2 + 2t - 3$. Assim, $f'(t) = 2t + 2$. Para sabermos a velocidade instantânea no instante $t = 3$ basta calcularmos $f'(3)$.

$$f'(3) = 2 \cdot 3 + 2 = 8.$$

Exemplo 3.14 Em um tempo de t segundos, um objeto se move s metros de sua posição inicial, sendo s dado por $s = 2t^2$. Estime a velocidade do objeto em $t = 2\,s$, calculando sua velocidade média entre $t = 2\,s$ e $t = 2,1\,s$.

R:
$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(2,1) - f(2)}{2,1 - 2} = \frac{2(2,1)^2 - 2(2)}{0,1} = \frac{8,82 - 8}{0,1} = \frac{0,82}{0,1} = 8,2.$$

Exemplo 3.15 Uma bola é atirada verticalmente para cima a partir do chão, com uma velocidade inicial de $64\,m/s$. Se o sentido positivo da distância do ponto de partida for para cima, a equação do movimento será $s = -16t^2 + 64t$.

a) Ache a velocidade instantânea da bola ao fim de 1s.

R:

$$s'(t) = -32t + 64;$$

$$s'(1) = -32 \cdot 1 + 64 = 32\,m/s.$$

b) Ache a velocidade instantânea da bola depois de 3s.

R:

$$s'(3) = -32 \cdot 3 + 64 = -32\,m/s.$$

c) Quantos segundos a bola leva para atingir seu ponto mais alto?

R: O ponto mais alto (máximo da função) ocorre quando $s'(t) = 0$. Dessa forma temos,

$$-32 \cdot t + 64 = 0 \Rightarrow t = \frac{-64}{-32} = 2\,s.$$

d) Qual a altura máxima atingida pela bola?

R: A altura máxima atingida pela bola ocorre quando $t = 2s$. Logo, temos

$$s = -16 \cdot 2^2 + 64 \cdot 2 = 64\,m.$$

e) Decorridos quantos segundos a bola atinge o solo?

R: A bola atinge o solo quando $s = 0$. Assim temos,

$$-16t^2 + 64t = 0.$$

$$\Rightarrow 16t(-t+4)=0;$$

$$t=0 \; ou \; t=4.$$

Portanto a bola atinge o solo depois de 4 segundos.

f) Ache a velocidade instantânea da bola quando ela atinge o solo.
R: $s'(4)=-32\cdot 4+64=-64\,m/s.$

Exemplo 3.16 Se uma bola for impulsionada de tal forma que ela adquira uma velocidade inicial de 24 cm/s ao descer um certo plano inclinado, então $s=24t+10t^2$, onde s é a distância da bola em cm ao ponto inicial em t segundos e o sentido positivo é o de descida do plano inclinado.

a) Qual será a velocidade instantânea da bola em t_1 segundos?
R:

$$s'(t)=24+20t;$$

$$s'(t_1)=24+20t_1.$$

b) Quanto tempo levará para que a velocidade aumente para $48cm/s$?
R: Como $s'(t_1)$ é a velocidade no instante t_1 basta fazer

$$\begin{aligned}
& s'(t_1)=48\\
& \Rightarrow 24+20t_1=48\\
& \Rightarrow 20t_1=48-24\\
& \Rightarrow 20t_1=24\\
& \Rightarrow t_1=\frac{24}{20}=1,2\,s.
\end{aligned}$$

Exemplo 3.17 Um foguete é lançado verticalmente para cima e após t segundos ele está a s metros do solo, onde $s=560t-16t^2$ e o sentido positivo é para cima.

a) Ache a velocidade do foguete $2s$ após o lançamento.
R:

$$s'(t)=560-32t;$$

$$s'(2)=560-32\cdot 2=496m/s.$$

b) Quanto tempo levará para o foguete atingir sua altura máxima?
R: A altura máxima ocorre quando $s'(t)=0$. Assim temos que

$$560-32t=0 \Leftrightarrow -32t=-560 \Leftrightarrow t=\frac{-560}{-32}=17,5\,s.$$

3.6 AULA 6: A derivada de funções polinomiais

3.6.1 Objetivo:

Calcular a derivada de funções polinomiais.

3.6.2 Duração:

1h/a

3.6.3 Público alvo:

1º ano do Ensino Médio

3.6.4 Pré-requisitos:

Aulas 1,2,3 e 4

3.6.5 Desenvolvimento:

Definição: Toda função na forma

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0$$

é denominada função polinomial, onde $n \in \mathbb{N}$ e $a_n \in \mathbb{R}$.

São exemplos de funções polinomiais as seguintes funções:

1. $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + x^2 + 5$
2. $g(x) = -x^5 + 6x + 4$
3. $h(x) = 7x^2 - 2$

Obs: Professor, utilize o exemplo a seguir para que, intuitivamente, os alunos percebam que a derivada da função $f(x) = x^n$ é $f'(x) = nx^{n-1}$, pois a demonstração dessa derivada necessita do binômio de Newton e eles só estudarão este conteúdo no 2º ano.

Exemplo 3.18 Calcule a derivada das seguintes funções polinomiais.

a) $f(x) = x^2$
R:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\\ &= \frac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}\\ &= \frac{x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}\\ &= \frac{\Delta x(2x+\Delta x)}{\Delta x}, (\Delta x \neq 0)\\ &= 2x+\Delta x.\end{aligned}$$

Quando Δx se aproxima de zero, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ se aproxima de $2x$. Logo $f'(x) = 2x$.

b) $g(x) = x^3$

R: Para resolver este exercícios lembremos do seguinte produto notável:
$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$$\begin{aligned}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x} &= \frac{(x+\Delta x)^3-x^3}{\Delta x}\\ &= \frac{x^3+3x^2\Delta x+3(\Delta x)^2x+\Delta x^3-x^3}{\Delta x}\\ &= \frac{\Delta x(3x^2+3x\Delta x+(\Delta x)^2)}{\Delta x}, (\Delta x \neq 0)\\ &= 3x^2+3x\Delta x+(\Delta x)^2.\end{aligned}$$

Quando Δx se aproxima de zero, $\dfrac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}$ se aproxima de $3x^2$. Logo $f'(x) = 3x^2$.

c) $h(x) = x^4$

R:

$$\frac{h(x+\Delta x)-h(x)}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^4-x^4}{\Delta x}$$
$$= \frac{(x+\Delta x)^2(x+\Delta x)^2-x^4}{\Delta x}$$
$$= \frac{(x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2)(x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2)-x^4}{\Delta x}$$
$$= \frac{x^4+4x^3\Delta x+6x^2(\Delta x)^2+4x(\Delta x)^3+(\Delta x)^4-x^4}{\Delta x}$$
$$= \frac{\Delta x(4x^3+6x^2\Delta x+4x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3)}{\Delta x}, (\Delta x \neq 0)$$
$$= 4x^3+6x^2\Delta x+4x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3.$$

Quando Δx se aproxima de zero $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ se aproxima de $4x^3$. Logo, $h'(x) = 4x^3$.

Observe a tabela com os resultados das derivadas.

Função	Derivada
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$
x^4	$4x^3$

Com base na tabela responda qual a derivada das seguintes funções.

a) $f(x) = x^5$;

R:$f'(x) = 5x^4$;

b) $f(x) = x^6$;

R:$f'(x) = 6x^5$;

c) $f(x) = 2x^3$;

R:$f'(x) = 6x^2$;

d) $f(x) = 3x^4$;

R:$f'(x) = 12x^3$.

Obs: Professor, utilize o exemplo seguinte para mostrar que a derivada da soma de funções é igual a soma das derivadas de cada função. Ressaltamos que o objetivo aqui é apenas inserir o conceito de derivada de funções polinomiais de forma intuitiva, deixando o rigor das demonstrações para o ensino superior. Explique para os alunos que as funções do 1º e 2º grau, já estudadas anteriormente, são casos particulares de funções polinomiais.

Exemplo 3.19 Calcule a derivada das seguintes funções polinomiais.

a) $f(x) = x^3$;

R:$f'(x) = 3x^2$;

b) $g(x) = 3x^2$;

R:$g'(x) = 6x$;

c) $h(x) = 1$;

R:$h'(x) = 0$;

d) $l(x) = x^3 + 3x^2 + 1$.

R:

$$\frac{l(x+\Delta x)-l(x)}{\Delta x}=$$

$$=\frac{(x+\Delta x)^3+3(x+\Delta x)^2+1-(x^3+3x^2+1)}{\Delta x}$$

$$=\frac{x^3+3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3+3x^2+6x\Delta x+3(\Delta x)^2+1-x^3-3x^2-1}{\Delta x}$$

$$=\frac{\Delta x(3x^2+3x\Delta x+(\Delta x)^2+6x+3\Delta x)}{\Delta x},(\Delta x\neq 0)$$

$$=3x^2+3x\Delta x+(\Delta x)^2+6x+3\Delta x.$$

Logo, $l'(x)=3x^2+6x$.

Note que $l'(x)=f'(x)+g'(x)+h'(x)$. Isso significa que tanto faz calcularmos primeiramente a derivada de cada função e depois somarmos os resultados ou somarmos as funções e em seguida calcularmos a derivada desta soma, em ambos os casos os resultados são os mesmos.

Exemplo 3.20 Com base no que foi aprendido até aqui, calcule as derivadas das seguintes funções.

a) $f(x)=x^4-4x^3+5x^2-4x+7$;

R: $f'(x)=4x^3-12x^2+10x-4$;

b) $f(x)=x^6-2x^4+6x-2$;

R: $f'(x)=6x^5-8x^3+6$;

c) $f(x)=2x^7+x$;

R: $f'(x)=14x^6+1$;

d) $f(x)=x^5-6x^4+2x^3+x^2-8x+1$;

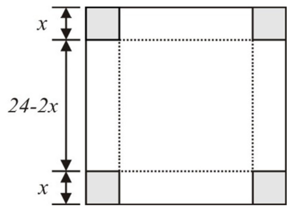
R: $f'(x)=5x^4-24x^3+6x^2+2x-8$.

Obs: Professor, proponha os seguintes exercícios de aprofundamento para os alunos resolverem em equipes. Auxilie-os no que for necessário, pois os exercícios trazem conceitos aprendidos nas aulas anteriores, se necessário revise os pontos mais importantes.

Exercícios propostos

1. Um fabricante de caixas de papelão pretende fazer caixas sem tampas a partir de folhas quadradas de cartão com área igual a 576 cm^2, cortando quadrados iguais

nos quatro cantos e dobrando os lados para cima. Determinar o lado do quadrado que deve ser cortado para se obter uma caixa com o maior volume possível.



R: Como a área total é de 576 cm^2, se l é a medida do lado da folha, então

$$l^2 = 576;$$

$$l = \sqrt{576} = 24cm.$$

O volume da cixa será dado por $v = l^2 \cdot x$, onde x é a altura da caixa. daí, segue que

$$v = (24 - 2x)^2 \cdot x;$$

$$v = (576 - 96x + 4x^2) \cdot x;$$

$$v = 576x - 96x^2 + 4x^3.$$

Como queremos encontrar o volume máximo da caixa, devemos calcular o ponto máximo da função $v(x) = 576x - 96x^2 + 4x^3$. Sabendo que no ponto máximo de uma função a derivada se anula, logo

$$v' = 576 - 96 + 12x^2 = 0;$$

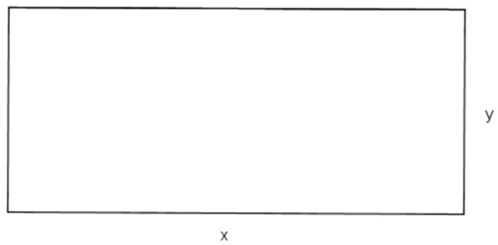
$$x^2 - 16x + 48 = 0;$$

$$(x - 4)(x - 12) = 0;$$

$$x = 4 \;\; ou \;\; x = 12.$$

Como $l = 24 - 2x$, então l não pode ser igual a 12, caso contrário teríamos $l = 0$. Logo $x = 4 \Rightarrow l = 24 - 2 \cdot 4 = 24 - 8 = 16$. Portanto a caixa mede $16cm$ de lado e $4cm$ de altura.

2. Dentre todos os retângulos de perímetro 64 cm, encontre as medidas de um em que sua área seja máxima.



Seja x e y as medidas do retângulo. Logo o perímetro do retângulo é $p = 2x + 2y = 64 \Rightarrow x + y = 32$. Sabemos que a área de um retangulo é dada pelo produto de sua base por sua altura, assim temos $A = xy$. Mas $x + y = 32 \Rightarrow y = 32 - x$. Substituindo este resultdo em $A = xy$, obtemos

$$A = xy = x(32 - x) = 32x - x^2.$$

Como queremos encontrar a área máxima, basta calcularmos a derivada de A é igualarmos a zero.

$$A' = 32 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 16.$$

Portanto, $x = 16cm$ e $y = 32 - 16 = 16cm$.

3. A posição de uma partícula é dada por $s = t^3 + 3t^2 + 5t + 1$, com t em segundos e s em cm. Determine a velocidade da partícula no instante $t = 2s$.
A velocidade da partícula é dada por $v = s'(t)$, assim temos

$$v = s'(t) = 3t^2 + 6t + 5.$$

No instante $t = 2s$ temos que

$$v = 3 \cdot 2^2 + 6 \cdot 2 + 5 = 3 \cdot 4 + 12 + 5 = 12 + 12 + 5 = 29cm/s.$$

4. Determine a inclinação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 4$ que passa pelo ponto em que $x = 3$.
A inclinação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 4$ é dada por

$$f'(x) = 6x^2 + 6x.$$

Para $x = 3$ temos que

$$f'(3) = 6 \cdot 3^2 + 6 \cdot 3 = 6 \cdot 9 + 18 = 72.$$

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho propôs discutir a possibilidade de ensinar noções de Cálculo no Ensino Médio e elaborar uma sequência didática para este fim. Devido a necessidade de delimitação do tema, trabalhamos especificamente com noções de derivadas de funções do 1º e 2º graus.

Acreditamos que é possível aplicar esta proposta sem muitas dificuldades, pois nos propomos a tratar o conceito de derivada de forma simples e intuitiva. Não utilizamos o conceito de limite na definição de derivadas, pois isso exigiria um estudo prévio de definições, propriedades e teoremas sobre limites; o que não seria apropriado para o 1º ano do Ensino Médio. Para a função do 1º grau definimos a derivada como a taxa de variação e em seguida aplicamos ao crescimento e decrescimento de tais funções. Já para função do 2º grau utilizamos a noção de reta tangente a uma curva, o que possibilitou aplicar esse conceito a problemas de máximos e mínimos. Também inserimos o conceito de derivada como velocidade instantânea com aplicações na Física. Dessa forma, a partir de problemas simples e contextualizados fornecemos ao aluno do Ensino Médio a possibilidade de conhecer, pelo menos de forma introdutória, esta importante ferramenta matemática e algumas de suas aplicações.

Ressaltamos que o emprego deste trabalho de forma alguma compromete o tempo dispensado para os demais conteúdos, visto que os mesmos assuntos já estudados antes apenas serão explorados de outra maneira: através das derivadas, procurando eliminar o excesso de formalismo e rigor para dar espaço aos novos conceitos.

A ideia de inserir noções de Cálculo no Ensino Médio surgiu como uma tentativa de amenizar os altos índices de reprovações nas disciplinas de Cálculo nos cursos superiores o que foi constatado em nossa pesquisa no banco de dados do IFCE – Câmpus Limoeiro do Norte, que revelou índices alarmantes que vão desde 33% e chegam a 90%.

Percebemos que a maioria das pesquisas realizadas neste sentido preocupam-se em analisar a necessidade e a viabilidade de ensinar noções básicas de Cálculo no Ensino Médio, mas poucas delas trazem uma sequência organizada e direcionada para os professores que desejam inserir tal ensino. Devido à escassez de literatura que tragam essa abordagem, nossa principal dificuldade foi adaptar o conceito de derivadas de modo que fosse apropriado para nosso público alvo. Dessa forma, ressaltamos a necessidade da realização de mais pesquisas trazendo este enfoque, pois este trabalho de forma alguma esgota as discussões acerca desta temática. Existem inúmeros conteúdos do Ensino Médio que podem se utilizar de noções do Cálculo para facilitar e ao mesmo tempo aprofundar seu estudo, como é o caso de progressões geométricas, áreas e volumes, construções de gráficos, dentre outros, os quais podem ser explorados em outros trabalhos seguindo a proposta aqui apresentada.

É importante frisar que as atividades aqui propostas não foram ainda aplicadas em sala de aula, pois elas são direcionadas para o início do 1º ano do Ensino Médio. Portanto incentivamos aos professores de matemática do Ensino Médio a aceitarem o desafio de ministrar as aulas aqui propostas e escrever relatos dessa experiência afim de contribuir para discussão dessa temática.

APÊNDICE

AULA 1: A derivada como taxa de variação

Exemplo 3.1 Um botânico mede o crescimento de um planta numa determinada hora do dia e observa que a lei que relaciona a altura (h) em função do tempo t é $h = 5t$, onde h é medido em centímetros e t em dias. Qual a variação de h quando t varia:

a) De 1 para 2 dias?

b) De 2 para 3 dias?

c) De 5 para 6 dias?

Exemplo 3.2 O salário fixo mensal de um segurança é de R$ 540,00. Para aumentar sua renda ele faz plantões noturnos em uma boate e recebe R$ 60,00 por noite de trabalho.

a) Escreva a lei que associa o salário y do segurança em função da quantidade x de plantões noturnos que ele faz.

b) Esboce o gráfico dessa função.

c) Qual é a taxa de variação $\frac{\Delta y}{\Delta x}$?

d) Qual a relação entre o coeficiente angular da reta e a taxa de variação $\frac{\Delta y}{\Delta x}$?

Exemplo 3.3 Mostre que a derivada da função $f(x) = ax + b$ é $f'(x) = a$.

Exemplo 3.4 Com base nos exemplos anteriores, qual a derivada das seguintes funções?

a) $f(x) = 2x + 3$

b) $f(x) = 4 + 5x$

c) $f(x) = -6x + 15$

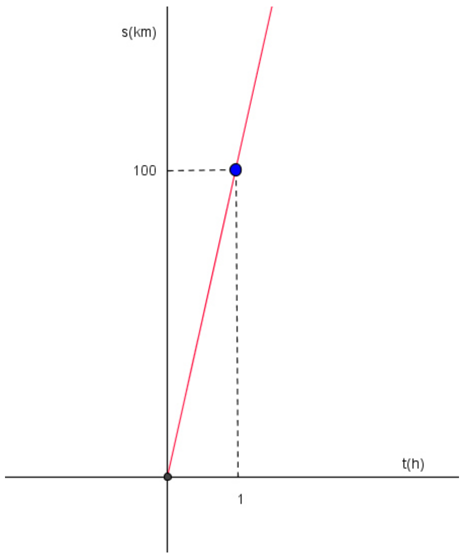
d) $f(x) = -5x$

Exercícios propostos

1. Calcule a derivada da função $f(x) = 5$.

2. Qual a derivada da função $f(x) = c$, onde c é uma constante qualquer.

3. A família Souza, que vive em Campos dos Goytacazes, pretende viajar nas férias para uma cidade do estado do Rio de Janeiro que fica a 400 km de distância de Campos. O gráfico a seguir representa a distância (em km) em relação ao tempo (em horas) de viagem.



a) Quantos quilômetros a família percorre em 1 hora?

b) A que velocidade média a família viaja?

c) Encontre a lei de formação da função representada no gráfico.

d) Determine a derivada da função representada no gráfico.

e) Qual a relação entre a derivada da função e a velocidade média?

AULA 2: Crescimento e decrescimento da função do 1º grau

Exemplo 3.5 Na produção de peças, uma fábrica tem um custo fixo de R$ 16,00 mais um custo variável de R$ 1,50 por unidade produzida. Sendo x o número de peças unitárias produzidas, determine:

a) A lei da função que fornece o custo da produção de x peças.

b) Calcule o custo y para o números de peças x especificados na tabela abaixo.

x	y
5	
7	
10	

c) A medida que o número de peças cresce o que acontece com custo?

d) Esboce o gráfico dessa função.

Exemplo 3.6 Seja d a demanda e o preço p de um produto se relacionam por meio da fórmula $d = -2p + 10$

a) Calcule o valor da demanda para os diferentes preços especificados na tabela abaixo completando-a.

p	d
2	
5	
9	

b) O que acontece com a demanda a medida que o preço cresce?

c) Esboce o gráfico dessa função.

Exercícios propostos

1. A função do exemplo 3.5 é crescente ou decrescente? E a função do exemplo 3.6?

2. Calcule a taxa de variação das funções dos exemplos 3.5 e 3.6 utilizando dois pontos quaisquer das tabelas.

AULA 3: A derivada como inclinação da reta tangente

Exemplo 3.7 Dada a função $f(x) = x^2$, com o auxilio de uma calculadora, ache a inclinação da reta secante á curva $y = x^2$ que passa pelos pontos:

Nota: Dados dois pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ pertencentes a curva $y = f(x)$, a inclinação da reta secante a esta curva é dada por: $$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

a) $A(2, 4)$ e $B(3, 9)$

b) $A(2, 4)$ e $B(2.1, 4.41)$

c) $A(2, 4)$ e $B(2.01, 4.0401)$

Exercicios protostos

De acordo com as respostas dos itens a), b) e c) do exemplo acima responda as seguintes perguntas:

1. De que valor a inclinação da reta secante à curva está se aproximando?
2. Quais os acréscimos Δx dados a x comparando nos itens a), b) e c)? De que valor esses acréscimos se aproximam?

Exemplo 3.8 Calcule a derivada da função $f(x) = x^2$ nos pontos (3,9), (4,16) e (5,25). Em seguida complete a tabela abaixo.

x	$f'(x)$
3	
4	
5	

a) Qual relação você observa entre x e $f'(x)$?

b) Qual a derivada de $f(x) = x^2$ para qualquer x?

Exemplo 3.9 Mostre que a derivada da função $f(x) = x^2$ é $2x$.

Desafio: Qual a derivada da função $f(x) = ax^2 + bx + c$, onde a, be $c \in \mathbb{R}$?

AULA 4: Máximos e mínimos da função do 2º grau.

Exemplo 3.10 Um avião de 100 lugares foi fretado para uma excursão. A companhia exigiu, de cada passageiro, R$ 800,00 mais R$ 10,00 por cada lugar vago. Para que número de passageiros a rentabilidade da empresa é máxima?

Exemplo 3.11 O custo C, em reais, para se produzir n unidades de determinado produto é dado por $C = n^2 - 110n + 2510$. Quantas unidades deverão ser produzidas para se obter o custo minimo?

Exemplo 3.12 Mostre que o vértice da parábola cuja equação é $y = ax^2 + bx + c$ é dado por $\left(\dfrac{-b}{2a}, \dfrac{-\Delta x}{4a}\right)$.

Exercicios propostos

1. O lucro mensal de uma empresa é dado por $L = -x^2+30x-5$, onde x é a quantidade mensal vendida. Qual o lucro mensal máximo possível? Esboce o gráfico dessa função.

2. Com 80 metros de cerca um fazendeiro deseja circundar uma área retangular junto a um rio para confinar alguns animais. Quais devem ser as medidas do retângulo para que a área cercada seja a maior possível?

3. O custo de produção de um determinado artigo é dado por $C(x) = 3x^2 - 15x + 21$. Se a venda de x unidades é dada por $V(x) = 2x2 + x$, para que o lucro $L(x) = V(x) - C(x)$ seja máximo, quantas unidades devem ser vendidas?

4. Sabe-se que o custo C para produzir x unidades de certo produto é dado por $C = x^2 - 80x + 3000$. Nessas condições, calcule:

a) a quantidade de unidades produzidas para que o custo seja mínimo;

b) o valor mínimo do custo.

AULA 5: A derivada e a velocidade instantânea

Exemplo 3.13 Seja $s = t^2 + 2t - 3$. Preenchendo a tabela abaixo obteremos as posições da partícula em cada instante.

t	$s = t^2 + 2t - 3$
0	
1	
2	
3	

Calculemos as taxas de variações $\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ entre os instantes:

a) 0 e 1

b) 1 e 2

c) 2 e 3

d) 0 e 4

Exemplo 3.14 Em um tempo de t segundos, um objeto se move s metros de sua posição inicial, sendo s dado por $s = 2t^2$. Estime a velocidade do objeto em $t = 2\,s$, calculando sua velocidade média entre $t = 2\,s$ e $t = 2,1\,s$.

Exemplo 3.15 Uma bola é atirada verticalmente para cima a partir do chão, com uma velocidade inicial de $64\,m/s$. Se o sentido positivo da distância do ponto de partida for para cima, a equação do movimento será $s = -16t^2 + 64t$.

a) Ache a velocidade instantânea da bola ao fim de 1s.

b) Ache a velocidade instantânea da bola depois de 3s.

c) Quantos segundos a bola leva para atingir seu ponto mais alto?

d) Qual a altura máxima atingida pela bola?

e) Decorridos quantos segundos a bola atinge o solo?

f) Ache a velocidade instantânea da bola quando ela atinge o solo.

Exemplo 3.16 Se uma bola for impulsionada de tal forma que ela adquira uma velocidade inicial de 24 cm/s ao descer um certo plano inclinado, então $s = 24t + 10t^2$, onde s é a distância da bola em cm ao ponto inicial em t segundos e o sentido positivo é o de descida do plano inclinado.

a) Qual será a velocidade instantânea da bola em t_1 segundos?

b) Quanto tempo levará para que a velocidade aumente para $48cm/s$?

Exemplo 3.17 Um foguete é lançado verticalmente para cima e após t segundos ele está a s metros do solo, onde $s = 560t - 16t^2$ e o sentido positivo é para cima.

a) Ache a velocidade do foguete $2s$ após o lançamento.

b) Quanto tempo levará para o foguete atingir sua altura máxima?

AULA 6: A derivada de funções polinomiais

Exemplo 3.18 Calcule a derivada das seguintes funções polinomiais.

a) $f(x) = x^2$

b) $g(x) = x^3$

c) $h(x) = x^4$

Observe a tabela com os resultados das derivadas.

Função	Derivada
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$
x^4	$4x^3$

Com base na tabela responda qual a derivada das seguintes funções.

a) $f(x) = x^5$

b) $f(x) = x^6$

c) $f(x) = 2x^3$

d) $f(x) = 3x^4$

Exemplo 3.19 Calcule a derivada das seguintes funções polinomiais.

a) $f(x) = x^3$

b) $g(x) = 3x^2$

c) $h(x) = 1$

d) $l(x) = x^3 + 3x^2 + 1$

Exemplo 3.20 Com base no que foi aprendido até aqui, calcule as derivadas das seguintes funções.

a) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 7$

b) $f(x) = x^6 - 2x^4 + 6x - 2$

c) $f(x) = 2x^7 + x$

d) $f(x) = x^5 - 6x^4 + 2x^3 + x^2 - 8x + 1$

Exercícios propostos

1. Um fabricante de caixas de papelão pretende fazer caixas sem tampas a partir de folhas quadradas de cartão com área igual a $576cm^2$, cortando quadrados iguais nos quatro cantos e dobrando os lados para cima. Determinar o lado do quadrado que deve ser cortado para se obter uma caixa com o maior volume possível.

2. Dentre todos os retângulos de perímetro 64cm, encontre as medidas de um em que sua área seja máxima.

3. A posição de uma partícula é dada por $s = t^3 + 3t^2 + 5t + 1$, com t em segundos e s em cm. Determine a velocidade da partícula no instante $t = 2s$.

4. Determine a inclinação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 4$ que passa pelo ponto em que $x = 3$.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AMORIM, Luíz. **Cálculo no Ensino Médio:** Progressões Geométricas e o que vai para baixo do tapete. Dissertação de mestrado. PROFMAT, SBM, 2013.

ÁVILA, Geraldo. **Cálculo 1**. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora, 4ª edição, 1981.

____________. Limites e Derivadas no Ensino Médio? *In:* **Revista do Professor de Matemática**, nº60. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 2006, p. 30-38.

____________. O ensino de Cálculo no 2ºgrau. *In:* **Revista do Professor de Matemática**, nº18. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 1991, p. 1-9.

____________. O ensino de Matemática. *In:* **Revista do Professor de Matemática**, no 23. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 1993, p. 1-7.

BOYER, Carl Benjamim. **História da matemática.** Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blucher, Ed. da Universidade de São Paulo, 1974.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educção Média e Tecnológica. Parâmetros Curriculares Nacionais + (PCNs+) - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC, 2002.

CARNEIRO, José Paulo; WAGNER, Eduardo. Vale a pena estudar cálculo?. *In:* **Revista do Professor de Matemática**, nº53. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 2004, p. 19-21.

CARVALHO, Romeu Manoel de. **A invenção do Cálculo por Newton e Leibniz e sua evolução para o Cálculo Contemporâneo.** Belorizonte, 2007.

DUCLOS, Robert Costallat. Cálculo no 2ºgrau. *In:* **Revista do Professor de Matemática**, nº20. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 1992, p.26-30.

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um curso de cálculo**, vol.1. 5ºed. Rio de Janeiro: LTC, 2011.

IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos; MACHADO, Nilson José. **Fundamentos de Matemática Elementar**, 8: limites, derivadas, noções de integral, 6ªed. São Paulo: Atual, 2005.

MACHADO, Nílson José. **Cálculo Diferencial e Integral na Escola Básica: possível e necessário**. São Paulo: USP, 2008. Disponível em *http://www.nilsonmachado.net/sema20080311.pdf*. Acesso em: 11 de nov de 2015.

MOLON, Jaqueline. **CÁLCULO NO ENSINO MÉDIO: UMA ABORDAGEM POSSÍVEL E NECESSÁRIA COM AUXÍLIO DO SOFTWARE GEOGE-**

BRA. Dissertação de mestrado. PROFMAT, SBM, 2013.

REZENDE, Wanderley Moura. O ensino de Cálculo: dificuldades de natureza epistemológica, *In:* MACHADO, N.; CUNHA, M. (org). **Linguagem, Conhecimento, Ação – ensaios epistemologia e didática.** Escrituras: São Paulo, 2003. Disponível em: *http://www.nilsonmachado.net/lca19.pdf.* Acesso em: 11 de nov de 2015.

RIBEIRO, D.F.C; VALENTE, W.R. A MATEMÁTICA DOS CURSOS CLÁSSICO E CIENTÍFICO DA REFORMA GUSTAVO CAPANEMA E OS LIVROS DIDáTICOS. *In:* **CONGRESSO NACIONAL DE EDUCAçãO – EDUCERE "SABERES DOCENTES"**, 7., 2007. Curitiba. Anais VII Congresso Nacional de Educação. Curitiba: Champagnat, 2007, 1556-1597.

VIANNA, Bruno. **Cálculo no Ensino Médio: Despertando Ideias Sobre Infinito.** Dissertação de Mestrado. PROFMAT, SBM, 2013.

VIANNA, Marcelo. **Noções de Cálculo**. Coleção PROFMAT, Rio de Janeiro: SBM, 2013.