UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

BRALDO SILVEIRA BRITO

O PROBLEMA DA DUPLICAÇÃO DO CUBO

BELÉM-PA
MARÇO-2016

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

BRALDO SILVEIRA BRITO

O PROBLEMA DA DUPLICAÇÃO DO CUBO

Trabalho de conclusão de curso apresentado como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática pelo programa de Mestrado Profissional em Rede Nacional (PROFMAT) da UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ.

Orientador: Prof. Dr. Anderson David de Souza Campelo

BELÉM-PA
MARÇO-2016

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da UFPA

Brito, Braldo Silveira, 1979-
O problema da duplicação do cubo / Braldo Silveira Brito. - 2016.

Orientador: Anderson David de Souza Campelo.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Programa de Pós-Graduação em Matemática (Mestrado Profissional), Belém, 2016.

1. Geometria sólida. 2. Geometria-Software-Educação. 3. Duplicação do cubo. 4. Geogebra-Software. 5. Tecnologia educacional-Matemática. I. Título.

CDD 22. ed. 516.156

FOLHA DE APROVAÇÃO

BRALDO SILVEIRA BRITO

O PROBLEMA DA DUPLICAÇÃO DO CUBO

Trabalho de conclusão de curso apresentado como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática pelo Programa de Mestrado Profissional em Rede Nacional(PROFMAT) da UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ, avaliado pela seguinte banca examinadora:

____
Prof.Dr.Anderson David de Souza Campelo
Universidade Federal do Pará - PPGME/UFPA
Orientador

____
Prof.Dr. Valcir João da Cunha Farias
Universidade Federal do Pará - PROFMAT/PPGME/UFPA

____
Prof.Dr.Anderson de Jesus Araújo Ramos
Universidade Federal do Pará - Campus Salinópolis/UFPA

Gesson José Mendes Lima
____
Prof.Dr.Gesson José Mendes Lima
Secretaria de Estado de Educação - SEDUC-Pa

DATA DA AVALIAÇÃO: 28/03/2016

Dedico essa trabalho aos meus queridos pais, a minha esposa, ao meu amor Beatriz e a todo corpo docente que participou dessa etapa da minha formação.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, pela minha vida, pelo dom da sabedoria e força espiritual para a realização desse objetivo profissional.

Aos meus pais, Maria e Raimundo, que não tiveram oportunidade de prosseguir nos estudos,mas fizeram o possível para que os filhos fossem além. Pelo eterno orgulho de nossa caminhada, pelo apoio, compreensão, ajuda e carinho ao longo deste percurso.

A minha filha, Beatriz, pela compreensão e responsabilidades assumidas,quando não pude estar tão presente.

A Universidade Federal do Pará, pela possibilidade em realizar o curso

Aos meus amigos e colegas de curso, pela cumplicidade, troca de conhecimentos e experiências.

A todos os mestres com carinho.

"A matemática é o alfabeto com o qual Deus escreveu o universo."

Galileu Galilei, físico e matemático, século XVI e XVII

Resumo

Durante o século V a.C, na Grécia, o surgimento de um problema aparentemente "inocente", provocou verdadeira mudança na geometria grega, e muito contribuiu para avanços no estudo da matemática, a duplicação do cubo, um dos três problemas clássicos, que deveria ser solucionado com régua não graduada e compasso. Durante séculos vários matemáticos buscaram soluções dentre eles podemos citar Hipócrates, com a inserção de meias proporcionais, Arquitas, com a interseção de superfícies sólidas, Platão, com sua ferramenta esquadro, Menecmo, com interseções cônicas, Eratóstenes com a construção de um mesolabo e Diocles, com a curva cissóide, através destes estudos foram desenvolvidos outros conceitos dentro de uma nova geometria na época, chamada de geometria superior que trabalhava com curvas que não eram círculos e não limitava-se ao plano, contudo nenhuma satisfazia a condição de ser com régua não graduada e compasso. Somente com o desenvolvimento da álgebra por volta do século XIX, é que foi possível provar de uma vez por todas que a duplicação do cubo não pode ser resolvida apenas com instrumentos euclidianos. Embora sem solução pelas limitações impostas, três matemáticos italianos, Gaetano Buonafalce, Giuseppe Vargiù e Gaetano Boccali apresentaram construções com régua e compasso, que nos dão boa aproximação da solução do problema. Hoje com o advento da informática, surgiram novas ferramentas para auxiliar as tarefas de construção do conhecimento matemático, e uma delas são os softwares de geometria, álgebra e cálculo dos quais destacamos o Geogebra que foi utilizado para reproduzir de forma dinâmica as ferramentas mecânicas de Platão e Eratóstenes para o problema da duplicação do cubo.

Palavras Chave: Duplicação, Cubo, régua, compasso, geometria.

Abstract

During the fifth century BC in Greece, the emergence of an apparently problem "innocent", brought real change in Greek geometry, and contributed to advances in the study of mathematics, doubling the cube to one of the three classic problems, which should be solved with non-graded and compass ruler. for centuries various mathematical sought solutions among which we can mention Hippocrates, with the inclusion of proportional socks, Archytas, with the intersection of solid surfaces, Plato, with his square tool, Menecmo with conical intersections, Erathostenes with the construction of a mesolabo and Diocles, with cissóide curve through these studies were developed other concepts into a new geometry at the time, called the upper geometry working with curves that were not circles and is not limited to the plane, however no satisfying the condition of being with non-graded and compass ruler. only with the development of algebra by the nineteenth century, it was possible to prove once and for all that doubling the cube can not be solved only with Euclidean tools. Although unsolved by limitations imposed three Italian mathematicians, Gaetano Buonafalce, Giuseppe Vargiu and Gaetano Boccali presented constructions with ruler and compass, which give us good approximation of the solution. Today with the advent of computer technology, there were new tools to assist the construction tasks of mathematical knowledge, and one of them is the geometry software, algebra and calculus of which we highlight the Geogebra that was used to play dynamically mechanical tools Plato and Eratosthenes for doubling the cube problem.

Keywords: Doubling, Cube, ruler, compass, geometry.

Lista de Figuras

Sumário

Introdução

A Matemática vem sendo construída ao longo de muitos anos, desde o homem primitivo, que se centrava na idéia de número e no processo de contagem, até os dias atuais com todo o aparato tecnológico que a sociedade moderna dispõe. O desenvolvimento do conhecimento matemático se deu ao longo dos anos, tanto pela necessidade cotidiana de se efetuar medidas e contagens mais extensas, quanto pelos homens que se dedicaram a estudar e desvendar os mistérios naturais que apareciam. Alguns Axiomas e Teoremas que foram propostos a milhares de anos ainda hoje se mantém válidos e úteis e, assim, a Matemática continua a desenvolver-se permanentemente.

Este estudo volta-se para um assunto que é considerado como um marco no desenvolvimento da Geometria, o problema da duplicação do cubo, um problema antigo surgido na Grécia por volta do século V a.C. Século ao qual segundo Boyer (1974), é chamado de "Idade Heróica da Matemática".

O problema da duplicação do cubo, se dá a partir de um cubo de aresta dada, construir somente com régua, não graduada, e compasso um segundo cubo com o dobro do volume do primeiro. Não se sabe ao certo o que gerou este problema, mas temos pelo menos três possibilidades, uma delas é sobre as dimensões do túmulo do Rei Glauco no Egito, o segundo sobre uma peste que assolou a ilha de Delos ou Atenas, cuja solução para o fim da peste era a duplicação de um altar em formato cúbico (BOYER, 1974, p.48) e a terceira motivada pela solução de achar um quadrado com o dobro da área de um outro quadrado dado (CAJORI, 2007).

Este trabalho reúne diferentes pensamentos de matemáticos que se debruçaram na tentativa de achar soluções para o problema, resultando em novas descobertas na matemática. O primeiro deles foi Hipócrates que utilizando-se da idéia de inserir duas médias proporcionais entre dois segmentos dados, transformou um problema em outro que serviu de base para as soluções seguintes. Arquitas de Tarento utilizou a interseção de elementos de geometria sólida. Menecmo, em seus estudos, descobriu as cônicas, elipse, hipérbole e parábola. Platão, lhe foi atribuído a construção de um esquadro. Eratóstenes, com a construção de calhas móveis que quando devidamente alinhadas dão a solução e Diocles, com a descoberta de uma outra curva que mais tarde recebeu o nome de cissóide. Embora as soluções apresentassem diferentes idéias, todas recaíam nas proporções inicialmente pensadas por Hipócrates. (EVES, 2011).

Embora todos os esforços de grande valia para o desenvolvimento da matemática, no século XIX provou-se que o problema não tem solução.

Assim, pelas curiosidades e estudos que envolvem o problema da duplicação do cubo, a utilização desse assunto na sala de aula da educação básica é um meio de despertar o interesse dos alunos para as aulas de Geometria, destacando, inclusive, o uso de softwares educacionais nesse processo.

Analisar a utilização de recursos tecnológicos com a pretensão de aperfeiçoar o ensino e a aprendizagem de nossos estudantes é importante, assim se faz necessárias experiências inovadoras, para que esses recursos possam ser bem compreendidos assim como bem aplicados no ensino de Matemática. Segundo Borba (1999), no contexto da Educação Matemática, os ambientes de aprendizagem gerados por aplicativos informáticos podem dinamizar os conteúdos curriculares e potencializar o processo de ensino e da aprendizagem voltados à "Experimentação Matemática"com possibilidades do surgimento de novos conceitos e novas teorias matemáticas.

Nesse contexto, o trabalho tem o intuito de analisar o conteúdo do problema da duplicação do cubo. Para facilitar o desenvolvimento da pesquisa considera-se como objetivos: descrever sobre a história do problema, os diferentes métodos geométricos e algébricos empregados, destacando sua importância para o desenvolvimento da Matemática e a capacidade de compreender a natureza das construções mecânicas e reproduzi-las em sistema computacional.

Como metodologia utilizou-se uma pesquisa bibliográfica e reprodução de soluções mecânicas encontradas para o problema da duplicação do cubo no geogebra, que é um software matemático gratuito e bem difundido no âmbito educacional.

Capítulo 1

Aspectos Históricos

Durante o Século V e VI a.C. Período que medeia de Pitágoras a Platão, a geometria se debruça sobre o problema de construir, com régua e compasso, ideais[1], objetos geométricos a partir de certos elementos conhecidos, muitos desses problemas foram tratados com sucesso. Contudo, a duplicação do cubo um dos três problemas clássicos da geometria não foi resolvido pelos gregos e tornou-se desafio para as gerações posteriores.

1.1 Sobre a construção com régua e compasso

Proclus, diretor da academia de Atenas no século V d.C, é autor de um comentário sobre *Os elementos* de Euclides, um importante repositório de referências históricas. Ele sumariza este período da seguinte forma "Depois dele (Pitágoras), Anaxágoras de Clezômenas lidou com muitas questões geométricas, e também o fez Oenopides de Chios, que era um pouco mais jovem que Anaxágoras; o próprio Platão alude a ambos no "Rivais", como tendo adquirido reputação em matemática. Depois deles veio Hipócrates de Chios, descobridor da quadratura das lúnuas (superfícies geométricas planas e fechadas compreendidas entre ascos de círculo) e Teodoro de Cirene, os quais distinguiram como geômetra. De fato, Hipócrates foi o primeiro de quem se sabe ter recompilado *Os elementos*. Platão, que foi o próximo, fez com que a matemática em geral e a geometria em

[1]Na antiga Grécia os elementos considerados ideais eram a régua não graduada usada somente para traçar retas e o compasso não fixo usado para fazer arcos e círculos

particular experimentassem um grande progresso, devido ao seu próprio zelo, por estes estudos; pois todos sabem que ele recheou seus escritos com dircursos matemáticos e lutou em todas ocasiões para despertar o entusiasmo pela matemática entre os que estudavam filosofia. nesta época viveram também Leodamos de Tasso, Arquitas de Tarento e Teeteto de Atenas, que contribuíram para aumentar o número de teoremas e um novo avanço foi alcançado no sentido de agrupá-los de uma forma mais científica"(MILIES; BUSSAB, 1999, p. 34-35).

Proclus, raramente menciona em seus comentários sobre o livro *Os elementos* de Euclides, os nomes dos descobridores dos resultados geométricos ali expostos. Porém, duas construções são atribuídas explicitamente a Onópedes de Chios: A construção de uma perpendicular a uma reta dada que passa por um ponto situado fora dela e a construção de um ângulo a partir de um ponto dado em uma reta, e que seja igual a um dado ângulo.

A reputação de Oenópedes não pode ter sido obtida por resolver problemas tão simples como estes, mas por ter sido o primeiro a formular tais soluções com o uso de régua e compasso apenas, enquanto seus antecessores utilizavam livremente qualquer instrumento de desenho.

A importância de Oenópedes seria então de caráter teórico, por ter sido o primeiro a fixar as regras que obrigavam ao uso tão somente de régua e compasso para a elaboração de construções geométricas no plano, e que se tornou cânone da geometria grega.

Estas regras eram as seguintes:

- Dados dois pontos no plano é permitido construir, com a régua, uma reta de comprimento arbitrário e que passe pelos dois pontos;
- É permitido desenhar no plano, com compasso, uma circunferência com centro em um ponto dado e que passe por outro ponto conhecido
- A régua não possui escalas, isto é, não serve para medir comprimentos
- O compasso não pode ser levantado do papel, isto é, não é permitido transferir distâncias com as pontas do compasso como fazem os marceneiros e funileiros.

A interseção de retas e circunferências determina pontos que podem ser utilizados nas construções geométricas.

Esses dois instrumentos, “régua não graduada”e “compasso”, são geralmente denominados ideais e também euclidianos, pois Euclides em sua obra *Os elementos*, reproduziu os princípios acima para uso da régua e do compasso.

Com régua e compasso ideais, os gregos construíram um monumento para a humanidade. Pois não foi apenas a geometria que foi construída com eles e sim toda a ciência que conhecemos. A obrigação de construir qualquer figura com estes instrumentos tão simples possibilitou o desenvolvimento de um extraordinário espírito analítico e de regras de raciocínio muito precisos, condições indispensáveis para a pesquisa e o saber. Havia, porém, alguns problemas, aparentemente inocentes em sua formulação, que desafiaram todas as inteligências da Grécia clássica e não puderam ser resolvidas (MILIES; BUSSAB, 1999).

1.2 Algumas construções elementares com régua e compasso

Vejamos alguns exemplos de construções geométricas básicas somente com uso de régua e compasso.

1.2.1 Retas Perpendiculares

Seja uma reta r, desejamos construir uma reta perpendicular a ela, primeiramente escolhemos um ponto P fora dela e com compasso em P, marcamos um arco que corte a reta r em dois pontos A e B. Ver Figura 1.1, em seguida desenhe dois arcos com o mesmo raio de centros nos pontos A e B, a interseção desses arcos determina o ponto Q. Deste modo a reta que passa por PQ é perpendicular a reta r, pois a distância de A ao ponto P é a mesma de B ao ponto P, devido P ser centro de uma circunferência que contém os pontos A e B, de outro modo, as distância AQ e BQ são iguais, pois por construção os raios AQ e BQ são congruentes.

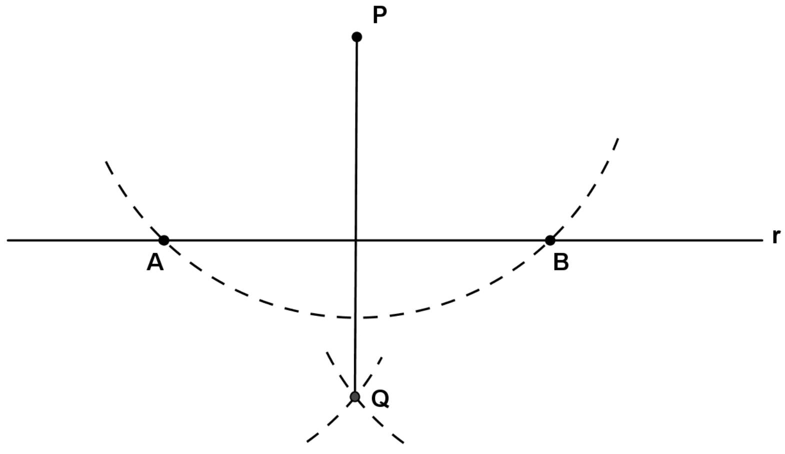


Figura 1.1: Construção de retas perpendiculares.

1.2.2 Retas paralelas

Seja uma reta r e um ponto P fora dela, traça-se uma circunferência de centro em P, que passe pela reta r, determinando o ponto A, com o mesmo raio AP, trace outra circunferência, com centro em A cortando a reta r no ponto B, e por fim traçamos uma terceira circunferência com centro em B e o mesmo raio das anteriores, determinando o ponto Q. Figura 1.2. Note que os segmentos AP, AB, BQ e QP formam um paralelogramo pois todos tem a mesma medida.

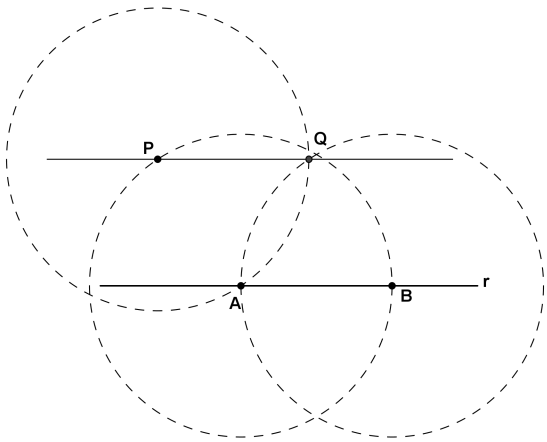


Figura 1.2: Construção de retas paralelas.

1.2.3 Triângulo equilátero

Seja um segmento AB, lado do triângulo equilátero, façamos uma circunferência de raio AB e centro em B e novamente outra circunferência de raio AB de centro em A, a interseção das circunferências determinam os pontos P e Q. Figura 1.3. cujo triângulo ABP é equilátero e a reta que passa por PQ é a mediatriz do segmento AB.

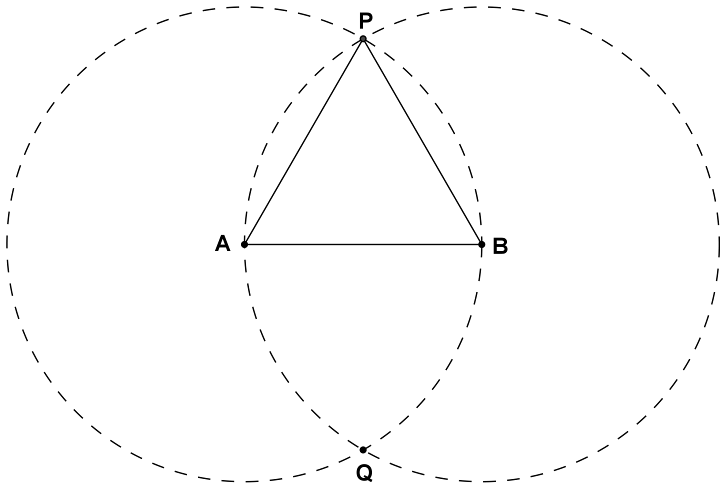


Figura 1.3: Construção de um triângulo equilátero.

1.2.4 Construção de um ângulo com valor dado

Para realizar esta construção com compasso euclidiano, podemos utilizar uma propriedade conhecida como ângulo capaz, que se dá da seguinte maneira: Prolongue um dos lados do ângulo dado até que ele encontre a reta AB num ponto P, trace a circunferência que passe por V, A e P (o centro da circunferência é o encontro das mediatrizes dos segmentos VA e AP). O outro lado do ângulo dado intercepta esta circunferência em Q. O ângulo pedido é QAB. Figura 1.4

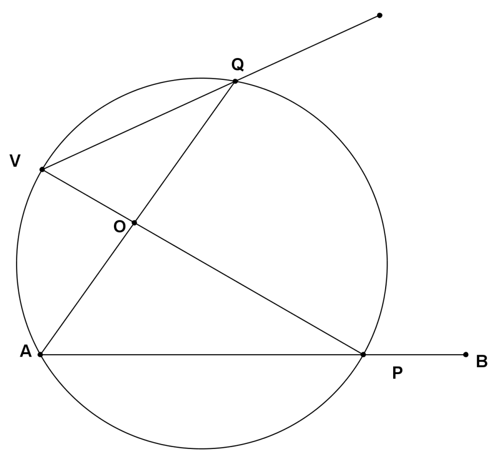


Figura 1.4: Construção de um segundo ângulo a partir de um ângulo dado.

1.2.5 Divisão de um segmento em partes iguais

Essa construção teve importância fundamental no desenvolvimento da geometria, porque veio a sugerir a teoria das proporções e que hoje é conhecida como Teorema de Tales. (BUSSAB, 1999).

Dado o segmento AB. Figura 1.5. Trace uma reta qualquer passando por A, com o compasso, em uma abertura conveniente, marque tantos segmentos iguais e sucessivos AP_1, quantos pretendemos dividir o segmento dado (seis em nosso exemplo). Una P_6 com B e trace em cada ponto P uma paralela a BP_6.

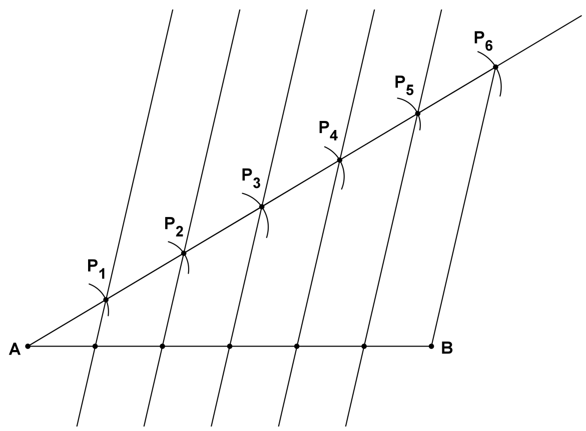


Figura 1.5: Divisão de um segmento em partes iguais.

1.3 A origem do problema da duplicação do cubo

Segundo Fontes (1968), uma das fontes da origem desse problema é a carta enviada ao rei do Egito, Ptolomeu III, atribuída a Eratóstenes, o célebre matemático e astrônomo do século III a.C.

Naquele documento o matemático narrava que, segundo a lenda, o rei Minos, ao verificar as dimensões exíguas do túmulo que encomendara para seu filho Glauco, dissera: *"Pequeno espaço para sepulcro de um rei! Dupliquem-no, conservando-lhe a forma!"*. E imperativamente, ordenou que se dobrassem as arestas do sepulcro.

Contudo, como Eratóstenes comenta, Minos errava, pois ao fazer a duplicação da aresta o volume do cubo octuplicaria em vez de duplicá-lo.

Observa-se também, na própria carta, que Hipócrates de Chios, após diversas tentativas sem resultados positivos, descobriu "que se entre duas linhas retas, das quais a maior seja o dobro da menor, forem inscritas duas médias em proporção contínua, o cubo será duplicado". Comenta ainda Eratóstenes que Hipócrates apenas transformava um problema em outro de não menor dificuldade.

Prosseguindo em sua carta a Ptolomeu III, diz que os habitantes de Delos, instados pelo oráculo a duplicar um certo altar tiveram a mesma dificuldade. É que ocorrera uma epidemia da peste na cidade e seus moradores consultaram o oráculo de Delos. Ele declarou que Apolo[2] exigia que se duplicasse um dos seus altares, o que tinha a forma cúbica. Figura 1.6. Construiu-se, então, um altar de aresta dupla.

Depois de todos os esforços a peste continuava e novamente consultado, o oráculo declarou que Apolo não estava satisfeito pois desejava um altar que fosse exatamente do volume duplo do antigo. Diz Eratóstenes que foram enviados mensageiros aos geômetras que conviviam com Platão na Academia, em busca de uma solução.

[2]Um dos mais importantes deuses gregos e representa o modelo do ideal helênico, também conhecido como Deus do sol. fonte:O Hino Homérico a Apolo, por Luiz Alberto Machado Cabral

Figura 1.6: Ruínas do Templo de Apolo.

$Fonte : Delphitemple - 650px, porStanShebs.LicenciadosobCCBY -$

$SA3.0, viaWikimediaCommons - https : //commons.wikimedia.org/wiki/File :$

$Delphi_temple - 650px.jpg/media/File : Delphi_temple - 650px.jpg$

Arquitas de Tarento, conseguiu resolver o problema, inscrevendo duas médias entre duas retas, seguido por Eudóxio que, utilizando linhas curvas, igualmente apresentou uma solução, fatos de que Eratóstenes nos dá notícia, acrescentando, ainda, que esses dois geômetras foram seguidos por outros no objetivo de uma solução mais adequada, o que não foi conseguido, uma vez que não puderam efetuar a construção e realizá-la na prática, com exceção de Menecmo, que o fez com grande dificuldade.

Por outro lado Philoponos, filósofo de Alexandria do século V e princípio do VI da nossa era, o comentador de Aristóteles e de suas obras matemáticas, divulga outra versão da segunda lenda. Atribuindo aos atenienses e não aos habitantes de Delos o fato narrado por Eratóstenes, mantém, por outro lado, a referência a Platão, o que não deve ser válido, porquanto a peste grassada em Atenas foi anterior ao nascimento do filósofo grego.

Boyer (1974, p.48), cita que uma peste assolou Atenas e matou um quarto de sua população, incluindo Péricles, a partir daí uma comissão dirigiu-se ao oráculo de Apolo em Delos a fim de obter solução para o fim da peste e recebera como resposta do oráculo que o altar de Apolo de formato cúbico deveria ser duplicado, então os atenienses dobraram as medidas do altar e a peste não passou pois ao fazer isso o volume do cubo ficou oito vezes maior. Por isso,esse problema também ficou conhecido “o problema de Delos”ou "problema deliano".

Ainda em Fontes (1968), existe outra variância dessa curiosa lenda referenciada a Platão, é a que propalou no Oriente, segundo a qual, o fato teria ocorrido com os habitantes de Israel. Contava-se que uma peste na época em que vivia Platão teria atingido as crianças israelenses. Um profeta ouviu uma voz celeste aconselhando a **duplicar** o altar dos sacrifícios, de forma cúbica, para parar o flagelo, o que da mesma forma das versões de Delos e Atenas não se concretizou, por isso o flagelo continuou. Consultado Platão, assim se teria manifestado o sábio grego: *"Negligenciastes a ciência da geometria e Deus vos castigou, pois é a ciência sublime por excelência"*.

Outra possibilidade para o surgimento do problema segundo Cajori (2007), é de que os pitagóricos mostraram que a diagonal de um quadrado é o lado de um outro quadrado com o dobro da área do primeiro.

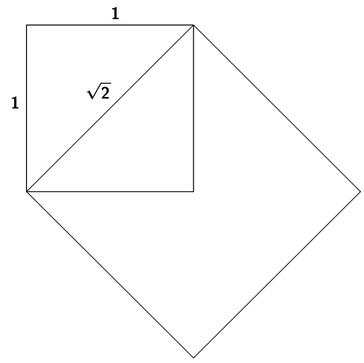


Figura 1.7: Duplicação do Quadrado.

Na duplicação do quadrado, dado um quadrado de aresta unitária, ver Figura 1.7, traça-se a diagonal, logo pelo teorema de pitágoras temos que a diagonal mede $\sqrt{2}$, que é o lado de um quadrado que tem o dobro da área do primeiro, pois $(\sqrt{2})^2 = 2(un)^2$. De modo geral, para duplicar um quadrado de aresta a basta construir um quadrado de aresta $a\sqrt{2}$. Isso teria sido transposto para as figuras sólidas, só que nesse caso ao volume, dado um cubo de aresta a encontrar um outro cubo que seja o dobro do primeiro.

A verdade é que, com Hipócrates o notável geômetra grego do século V a.C., autor do famoso tratado sobre a quadratura das lúnulas, a dificuldade não trocou apenas de forma, mas sim abriu caminho para várias soluções e conseguiu a vantagem de substituir a questão primitiva por um problema de geometria plana de profundas consequências geométricas.

Como vemos em Garbi (2006) “O problema da duplicação do cubo, assim como os outros dois problemas clássicos, geraram uma infinidade de estudos que ajudaram a promover avanços na geometria, por exemplo dois grandes discípulos de Platão na academia foram os irmãos Menecmo e Dinostrato. O primeiro, enquanto tentava resolver o problema da duplicação do cubo acabou descobrindo as cônicas (elipse, hipérbole e parábola), sobre as quais escreveu um livro mostrando muitas de suas propriedades. Em 180 a.C, o geômetra Diocles inventou a curva cissoide, com a qual se pode realizar a duplicação do cubo. No entanto, esta curva não é construtível com régua e compasso, dessa forma não resolvendo o problema.”

Estes novos estudos colocaram em questão os instrumentos até então utilizados régua e compasso, os quais tinham sido suficientes para realizar todas as construções geométricas anteriores, como por exemplo, a duplicação do quadrado e a determinação de uma média proporcional.

Capítulo 2

Soluções Apresentadas para o Problema

Ao longo dos anos desde a origem do problema da duplicação do cubo por volta do século V a.C. muitas soluções foram apresentadas, neste trabalho apresentamos as soluções de Hipócrates, Arquitas, Menecmo, Platão, Eratóstenes e Diocles.

2.1 A solução de Hipócrates

Parece que foi Hipócrates de Quios, matemático do século V a.C. quem deu os primeiros passos na tentativa de solucionar o problema, na verdade ao tentar achar a solução ele reduziu o problema anterior a um outro não menos difícil. O que Hipócrates afirma é que, se dado um cubo de aresta a, encontramos dois segmentos x e y tais que $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$, isto é, encontrar duas médias proporcionais entre os segmentos a e $2a$. Da primeira igualdade temos que $x^2 = ay$, chamemos esta equação de(I) e da segunda $y^2 = 2ax$, a qual chamaremos de (II), em (I), podemos isolar y em função de x e a, o que resulta em $y = \frac{x^2}{a}$, agora substituindo o valor de y em (II), temos que $\left(\frac{x^2}{a}\right)^2 = 2ax \Rightarrow \frac{x^4}{a^2} = 2ax \Rightarrow x^3 = 2a^3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{2a^3}$ e portanto, $x = a\sqrt[3]{2}$, ou seja, a aresta x do cubo com o dobro do volume do cubo de aresta a é igual ao valor da aresta a multiplicado por $\sqrt[3]{2}$. Depois de Hipócrates fazer sua redução, as tentativas subsequentes de duplicação do cubo, tomaram como caminho a construção de duas médias proporcionais entre dois segmentos de reta dados.

2.2 A solução de Arquitas

O pitagórico Arquitas de Tarento, filósofo, matemático, general e estadista (400 a.C), foi um dos mais respeitados e influentes cidadãos de Tarento, Itália. Consta que ele foi eleito sete vezes general das forças tarentinas e que se destacou pela preocupação dispensada à educação e bem-estar das crianças de Tarento. Morreu tragicamente em um naufrágio perto de sua cidade. (EVES, 2011).

Arquitas propôs uma solução muito engenhosa principalmente a considerar a época em que fora realizada, trata-se de procurar um ponto de interseção entre três superfícies de revolução, um cone reto, um cilindro e um toro e utilizando-se das médias proporcionais determinar a aresta do cubo duplo. Podemos claramente observar que esta solução não limita-se ao plano.

Seja OAB o diâmetro da base de um cilindro, seja uma corda OB no mesmo plano da base do cilindro e OA um arco perpendicular a base do cilindro. Figura 2.1

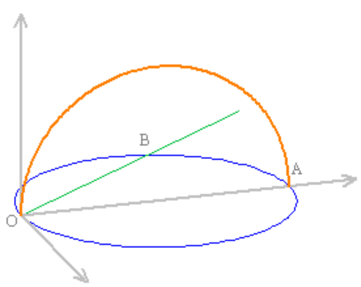


Figura 2.1: Traçado dos segmentos OA e OB.

Imagem retirada do site gaussianos.com

Utilizando-se da redução de Hipócrates, o método de Arquitas consiste em mostrar que através de rotações convenientes do arco perpendicular OA e da reta OB, é possível determinar um ponto de interseção P fora do plano OAB, entre as superfícies formadas por estas rotações e sendo T a projeção do ponto P no plano OAB, estabelecer a relação $\frac{OB}{OT} = \frac{OT}{OP} = \frac{OP}{OA}$, sendo OT a aresta procurada.

Primeiramente, girando o arco OA perpendicularmente a base do cilindro OAB em torno do ponto O, tem-se a formação de um toro de raio nulo. Ao girar o segmento OB em torno do eixo OA, temos a formação de um cone, cuja interseção das três superfícies é o ponto P. Figura 2.2

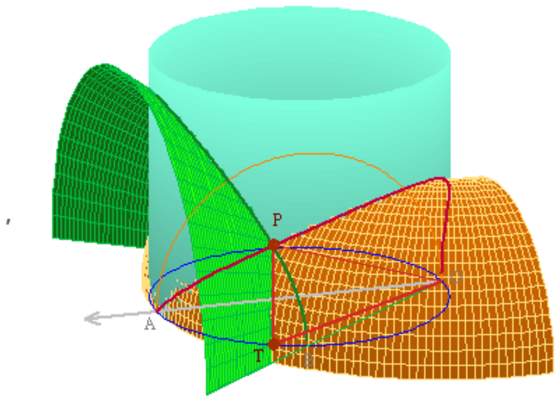


Figura 2.2: Interseção das superfícies de revolução.

Imagem retirada do site gaussianos.com

Na figura 2.3, construímos uma semiesfera sobre a circunferência base OBA. As curvas em roxo e verde são as interseções do cilindro com o toro e com o cone respectivamente. Se P é ponto de interseção do cone, toro e cilindro e T a projeção de P sobre a circunferência da base. Ao girar a reta OB ao redor de OA, o ponto B descreverá una semicircunferência BGF, perpendicular a OA, que é a interseção da semiesfera com o cone.

Os pontos da circunferência BGF estarão todos na mesma distância OB=b do ponto O.

O plano OPT corta o semitoro em uma semicircunferência OPR e o cone na reta OP, que cortará a semicircunferência BGF, interseção da semiesfera com o cone, em um ponto G.

Esse plano OPT cortará também a semiesfera em uma semicircunferência OGT, que passará por G, porque G está na semiesfera e no plano OPT.

Os ângulos $\angle$ RPO, $\angle$ TGO são retos por estarem inscritos em semicircunferências e o ângulo $\angle$ PTO é reto por construção e então, pelo teorema do cateto implica imediatamente:

$$\frac{OG}{OT} = \frac{OT}{OP} = \frac{OP}{OR}.$$

Logo OT e OP são as médias proporcionais entre OR=OA=a y OG=OB=b, e fazendo com que OT seja a aresta do cubo procurado.

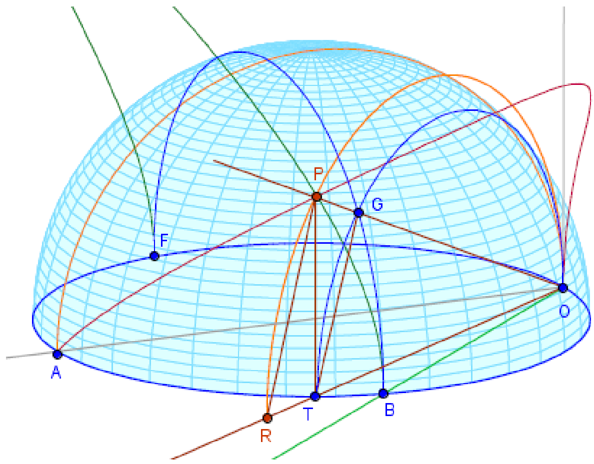


Figura 2.3: Interseção das superfícies de revolução e suas projeções.

Imagem retirada do site gaussianos.com

2.3 A solução de Menecmo

A fama de Menecmo, matemático do século IV a.C, está relacionada às curvas que hoje conhecemos como cônicas - elipse, parábola e hipérbole; nomeadamente com a descoberta de que estas curvas se podem obter por interseção de um cone reto de base circular, com o plano perpendicular a uma geratriz.

As descobertas de Menecmo adviram da sua procura de uma solução para o problema da duplicação do cubo, mais propriamente, da procura de curvas que possuíssem as propriedades adequadas à resolução do problema de encontrar as duas médias proporcionais da redução de Hipócrates. As soluções de Menecmo, preservadas por Eutócio [1], têm por

[1]Eutócio de Ascalão (ca. 480 - ca. 540) foi um matemático grego que escreveu comentários sobre vários tratados de Arquimedes e sobre a "Cônica"de Apolônio. Fonte wikipédia.

base a construção de um certo ponto como a intersecção de duas cônicas, num dos casos uma parábola e uma hipérbole equilátera, $x^2 = a.y$ e $xy = a.b$, no outro caso duas parábolas $x^2 = a.y$ e $y^2 = b.x$.

De fato, utilizando-se da atual geometria analítica, sejam as proporções $\dfrac{a}{x} = \dfrac{x}{y} = \dfrac{y}{b}$. Sendo a a aresta do cubo dado, vamos considerar que a tem valor unitário, logo, $a = 1$, e por consequência b=2, pois b=2a, e sejam x e y as duas médias proporcionais entre a e b (veja a solução de Hipócrates), logo, teremos as parábolas de equações $x^2 = a.y$ e $y^2 = b.x$, mas como $a = 1$ e $b = 2$, temos, $y = x^2$ e $x = \dfrac{y^2}{2}$, cuja interseção em x do ponto P, interseção fora da origem entre as cônicas, é o valor procurado como mostra a figura 2.4.

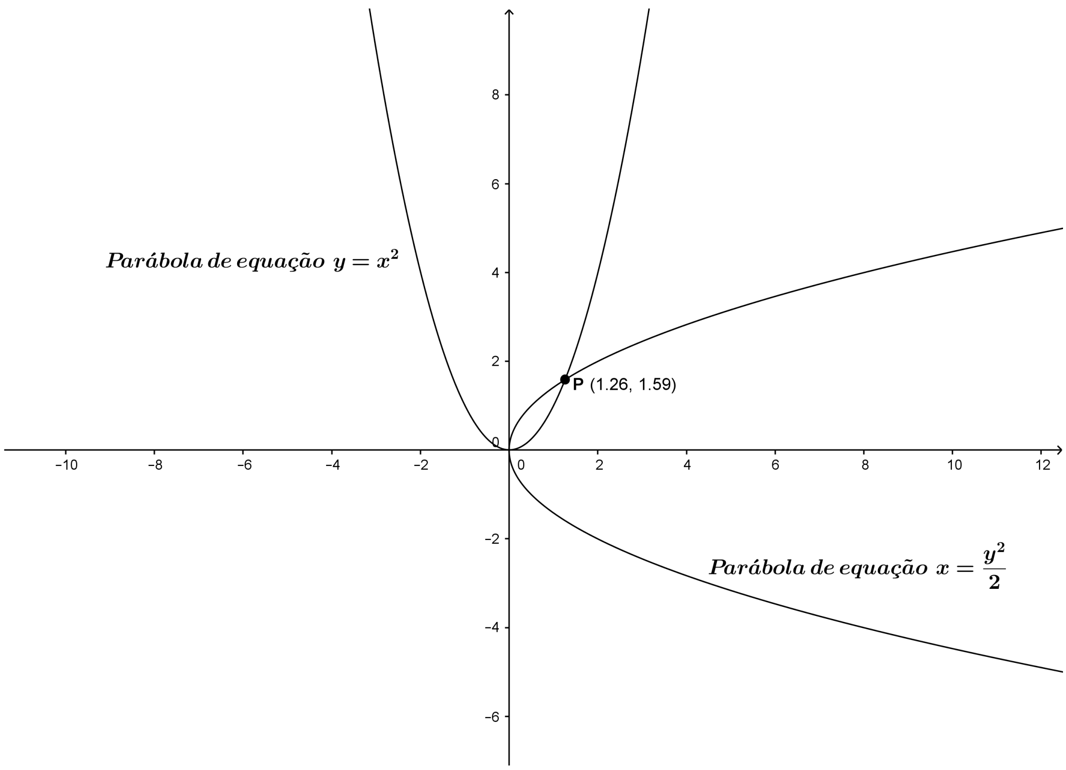


Figura 2.4: Inteseção de duas Parábolas.

Reprodução das cônicas em software Geogebra v.5.0

Por outro lado, sejam $x^2 = a.y$ e $xy = a.b$, pelas mesmas condições das médias proporcionais e valor unitário de a, temos que, as equações reduzem-se a $y = x^2$ e $xy = 2$, cuja solução é o valor x do ponto P, figura 2.5.

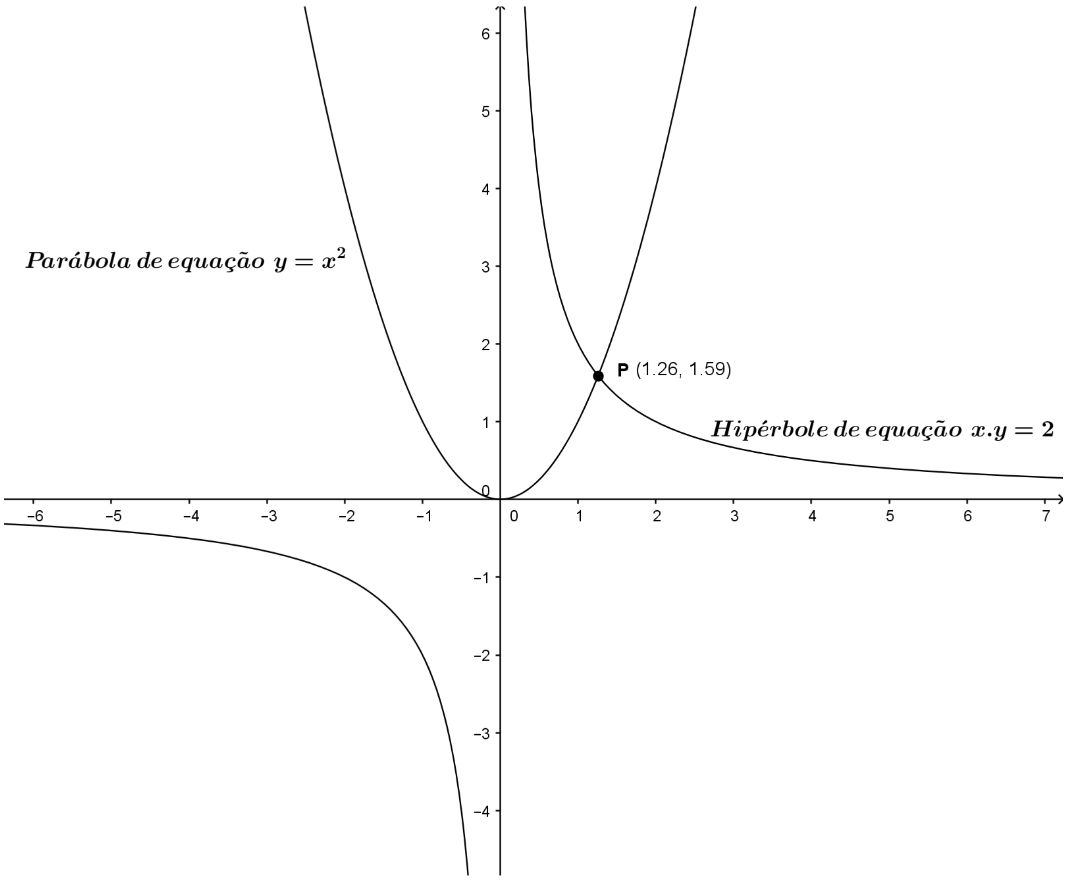
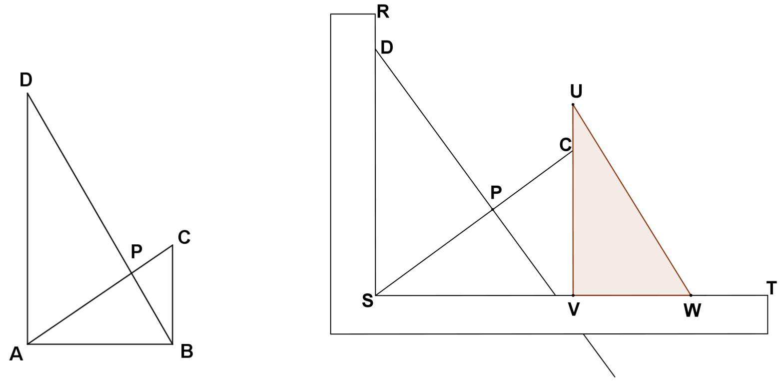


Figura 2.5: Interseção de uma parábola e uma hipérbole.

Reprodução das cônicas em software Geogebra v.5.0

2.4 A solução atribuída a Platão

Para ilustrar o espírito das tentativas, reproduzamos aquela atribuída a Platão por Eutócio. Como essa solução usa meios mecânicos e estes eram reprovados por Platão, percebe-se que a atribuição é errada. (EVES, 2011, p.135).



(a) Triângulos retângulos (b) Esquadro de Platão

Figura 2.6: Esquadro de Platão

Considere dois triângulos (ver figura 2.6. (a)), CBA e DAB, retos em B e A, respectivamente, de maneira que o cateto AB seja comum. Suponhamos que as hipotenusas AC e BD se interceptem perpendicularmente em P. Sendo semelhantes os triângulos CPB, BPA e APD, segue-se que $\dfrac{PC}{PB} = \dfrac{PB}{PA} = \dfrac{PA}{PD}$.

Logo, PB e PA são duas médias proporcionais entre PC e PD. Daí que o problema fica resolvido desde que se possa construir uma figura em que PD = 2(PC). A figura 2.6. (b) mostra como se pode traçar essa figura por meios mecânicos. Trace duas retas perpendiculares interceptando-se em P e marque PC e PD sobre elas, com PD = 2(PC). A seguir coloque um esquadro de carpinteiro, de lados internos RS e WS, sobre a figura de modo que SR passe por D e o vértice S do ângulo reto fique no prolongamento de CP. Faça escorregar sobre ST um triângulo retângulo UVW com o cateto VW no lado ST, até que VU passe por C. A seguir manipule o aparato até que V esteja no prolongamento de DP.

2.5 A solução de Eratóstenes

Eratóstenes (276 a.C. - 196 a.C) foi criado em Cirene, cidade grega ao norte da África. Estudou em Alexandria, no Egito, e depois em Atenas, retornando a Alexandria em 255 a.C., onde se estabeleceu. Com tantos escritos importantes, seu nome era a escolha óbvia para a administração da biblioteca de Alexandria, cargo que aceitou em 240 a.C.

Eratóstenes concebeu um descobridor de médias, que consiste em formar calhas retangulares com a marcação de suas respectivas diagonais, agrupando-as por sulcos que permitam que a segunda deslize sob a primeira e a terceira sob a segunda, como mostra a figura 2.7.

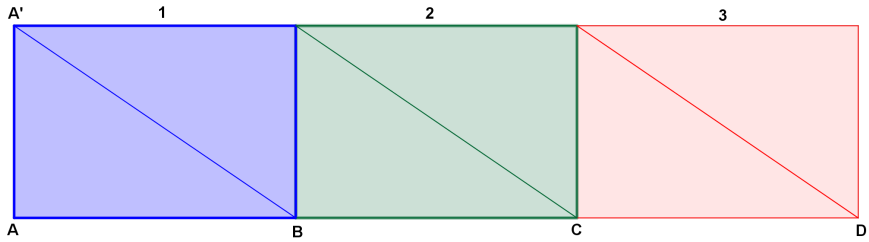


Figura 2.7: Simulação planificada das calhas móveis.

Supondo que as calhas 2 e 3 foram movidas de forma que os pontos A', B', C' e D' estejam alinhados e estendendo o segmento que passa pelos pontos A'B' até o segmento que passa por AB, temos o ponto P. Ver figura 2.8.

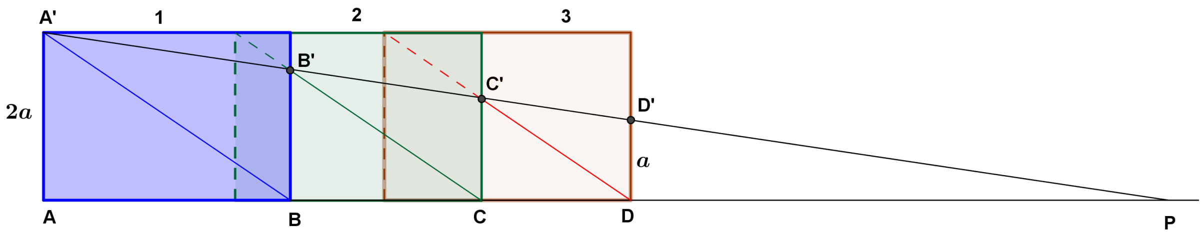


Figura 2.8: Simulação planificado das calhas móveis.

Do fato de que se quer a duplicação do cubo, então, fixa o segmento D'D = a, de forma que A'A = $2a$.

Na figura 2.8, os triângulos A'AP, B'BP, C'CP e D'DP, são todos semelhantes, pois possuem dois ângulos ordenadamente congruentes, um reto e um ângulo comum, os triângulos A'BP, B'CP, C'DP, são semelhantes, pois possuem dois ângulos ordenadamente congruentes. daí tem-se:

$\dfrac{B'B}{A'A} = \dfrac{B'P}{A'P}$ (triângulos A'AP e B'BP)

$\dfrac{B'P}{A'P} = \dfrac{B'C}{A'B}$ (triângulos B'CP e A'BP)

$\dfrac{B'C}{A'B} = \dfrac{CP}{BP}$ (triângulos B'CP e A'BP)

$\dfrac{CP}{BP} = \dfrac{C'C}{B'B}$ (triângulos B'BP e C'CP)

logo das igualdades acima temos:

$\dfrac{C'C}{B'B} = \dfrac{CP}{BP} = \dfrac{B'C}{A'B} = \dfrac{B'P}{A'P} = \dfrac{B'B}{A'A}$, vamos chamar as proporções de I.

De maneira análoga, obtemos:

$\dfrac{C'C}{B'B} = \dfrac{C'P}{B'P} = \dfrac{C'D}{B'C} = \dfrac{DP}{CP} = \dfrac{D'D}{C'C}$, vamos chamar de II.

De I e II, chegamos a:

$\dfrac{D'D}{C'C} = \dfrac{C'C}{B'B} = \dfrac{B'B}{A'A}$, ou seja, $\dfrac{a}{C'C} = \dfrac{C'C}{B'B} = \dfrac{B'B}{2a}$, concluímos assim, que B'B e C'C são duas meias proporcionais entre a e $2a$, e o segmento B'B é a aresta do cubo procurado.

Observe que poderíamos aumentar a quantidade de "placas"e com isso inserirmos n meias proporcionais entre dois segmentos dados.

2.6 A solução de Diocles

Diocles, matemático grego do século II a.C, na tentativa de solucionar o problema da duplicação do cubo, descobriu uma curva a qual mais tarde foi chamada de cissoide, cuja equação é $y^2 = \dfrac{x^3}{2a - x}$.

A solução que Diocles sugere é transmitida por Eutócio. Pappus dá o mesmo método nas suas *Coleções Matemáticas*, porém não faz menção do nome de Diocles, nem a nenhuma curva, sendo sua solução determinada por tentativas.

O traçado da cissoide por movimento contínuo somente foi possível séculos mais tarde, quando Newton imaginou a geração mecânica da curva.

Uma cissoide geral pode ser definida como se segue: Sejam C_1 e C_2 duas curvas dadas e seja O um ponto fixo. Sejam P_1 e P_2 as interseções de uma reta variável por O com as curvas dadas. O lugar dos pontos P da reta tais que $OP = OP_2 - OP_1 = P_1P_2$ chama-se cissoide de C_1 e C_2 para o polo O. Se C1 é uma circunferência, C_2 é a reta tangente a C_1

num ponto A e O é o ponto de C_1 diametralmente oposto a A, então a cissoide de C_1 e C_2 para o polo O é a cissoide de Dioclés.

No artigo publicado na revista Famat (2008, n. 11), encontramos uma solução nos moldes da geometria analítica atual, sobre a determinação da aresta do cubo com o volume duplo em relação a um outro cubo dado.

Dada a aresta de um cubo, digamos de comprimento d, construir a aresta do cubo de volume duplo, ou seja, construir a aresta de comprimento $\sqrt[3]{2}d$, usando uma cissóide de Diocles, da seguinte maneira. Construimos a cissóide de Diocles de equação cartesiana $y^2(d-x) = x^3$, isto é, a cissóide de Diocles da circunferência C_1 de dentro C$\left(\frac{d}{2}, 0\right)$ e raio $\frac{d}{2}$ e da reta tangente C_2 dada por $x = d$, portanto, com pólo na origem. Construa a reta r que passa pelos pontos A(d,0) e B$\left(0, \frac{d}{2}\right)$, portanto r é a reta dada pela equação cartesiana $2y = d - x$. Determine o ponto P, ponto de interseção da reta r com a cissóide de Diocles construída anteriormente. Construa a reta s que passa pela origem do sistema de coordenadas e pelo ponto P. Determine o ponto Q, ponto de interseção da reta s com a reta $y = d$. Afirmamos que o segmento QE, sendo E o ponto de coordenadas $E(0, d)$, possui comprimento $\sqrt[3]{2}d$, portanto é a aresta do cubo que duplica o volume do cubo dado. Veja Figura 2.9.

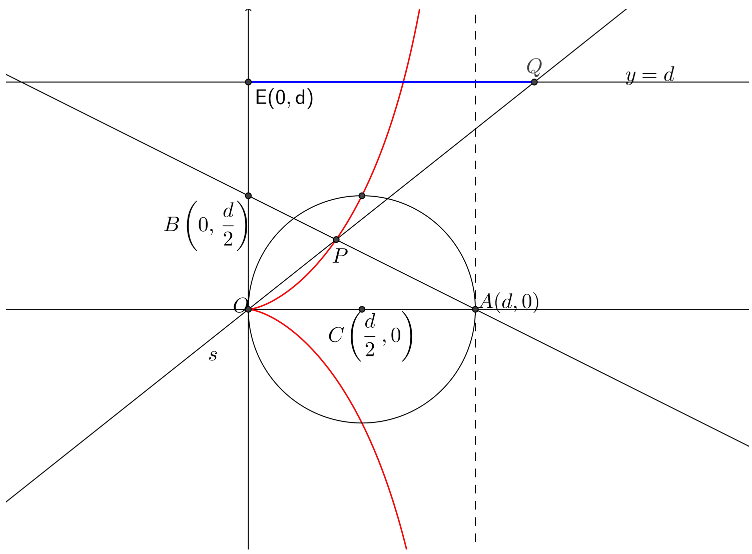


Figura 2.9: Cissóide de Diocles. Reproduzida no Geogebra 5.0

De fato: Denotemos o ponto P em coordenadas por $P(a, b)$. Por construção temos que (a,b) é solução simultânea das equações $(d-x)y^2 = x^3$ e $d-x = 2y$, portanto satisfaz a relação $\left(\dfrac{a}{b}\right)^3 = 2$. Segue daí que a equação cartesiana da reta s que passa pela origem e pelo ponto P é dada por $x = \sqrt[3]{2}y$ e portanto, o ponto Q, ponto de interseção da reta s com a reta $y = d$, em coordenadas é dado por $Q(\sqrt[3]{2}d, d)$. Assim sendo, $QE = \sqrt[3]{2}d$ como afirmado, uma vez que $E(0,d)$.

Capítulo 3

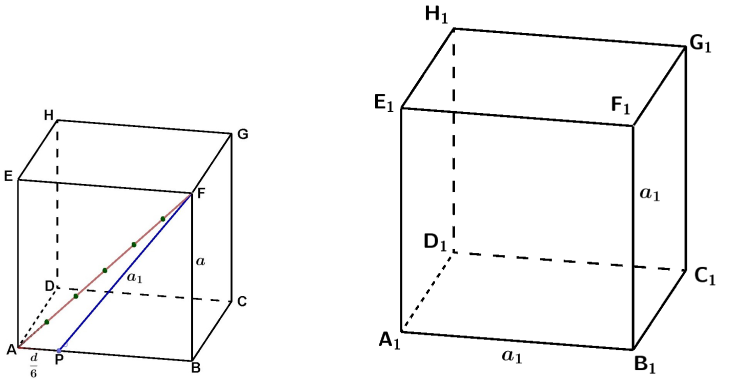
Tentativas de solucionar o problema com régua e compasso

Desde o surgimento do problema da duplicação do cubo, por volta do século V a.C, várias tentativas de solucioná-lo foram propostas, muitas com êxito, contudo sem o uso da régua não graduada e compasso. No final do século XIX, três matemáticos italianos apresentaram soluções bastante curiosas que, se não solucionaram definitivamente, pelo menos dão boas aproximações (SOUZA; ARAÚJO; ANDRADE, 2007) .

3.1 O método de Gaetano Buonafalce

O método apresentado por Gaetano Buonafalce é o mais simples entre os três apresentados, consiste em: "Se tirarmos da aresta de um cubo a sexta parte da diagonal da face, o segmento desta face que liga o vértice oposto a esse ponto é a aresta do cubo de volume duplo com erro inferior a 0,002"(FONTES, 1968, p. 104).

Em termos de construção temos:



(a) Cubo de aresta $a = 1$, $V = 1(un)^3$.

(b) Cubo de volume duplo aresta a_1, $V_1 = 2(un)^3$.

Figura 3.1: Cubos com volume $1(un)^3$ e $2(un)^3$

Demonstração Algébrica da construção.

Na Figura 3.1(a), se a aresta do cubo é $a = 1$, então a diagonal da face é $d = \sqrt{2}$. Portanto a sexta parte da diagonal é, $\dfrac{\sqrt{2}}{6}$. Observa-se ainda que, sobre a aresta $\overline{AB}$ marcou-se o segmento de reta $\overline{AP}$ igual a sexta parte da diagonal, ou seja, $\overline{AP} = \dfrac{\sqrt{2}}{6}$.

No triângulo retângulo $P\hat{B}F$, a medida do cateto $\overline{BF}$ é igual a aresta do cubo, ou seja, $\overline{BF}$=a=1. A medida do cateto $\overline{PB}$ é igual a aresta menos a sexta parte da diagonal, ou seja, $\overline{PB} = 1 - \dfrac{\sqrt{2}}{6}$. Como $\overline{PF}^2 = \overline{PB}^2 + \overline{BF}^2$ isso implica que:

$$(a_1)^2 = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{6}\right)^2 + 1^2 = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{18}\right) + 1 = \frac{18 - 6\sqrt{2} + 1 + 18}{18} = \frac{37 - 6\sqrt{2}}{18}$$
$$= 1,5841 = \sqrt{1,5841} = 1,25863$$

Agora comparando os resultados para um cubo com aresta $a = 1$, seu volume é $V = 1(un)^3$, para um cubo com o dobro de seu volume temos temos $V_1 = 2(un)^3$ e portanto sua aresta é $a_1 = \sqrt[3]{2} = 1,25992$, dessa forma o erro ϵ = 1,25992 - 1,25863 = 0,00129, inferior a 0,002.

3.2 O método de Giuseppe Vargiù

Giuseppe Vargiù apresenta um método baseado na média geométrica ou média proporcional entre duas grandezas, que é solucionada com régua e compasso através da construção do arco capaz de um ângulo de 90^o. Segundo Vargiù, seu método consiste em:

...calcular a média proporcional entre a aresta e a diagonal da face. Em seguida, entre a diagonal e a média encontrada; depois, entre a primeira e segunda média, e assim, sucessivamente. A sétima média calculada por esse processo dá a aresta do cubo duplo com erro inferior a 0,002 (FONTES, 1967, p.104).

Demonstração.

Para essa demonstração utilizaremos o mesmo cubo (a) da Figura 3.1.

Na Figura 3.2, o triângulo MÔN é retângulo e sendo $\overline{OP}$ = x, a altura desse triângulo, então $x^2 = a.d$, e daí, x = $\sqrt{a.d}$.

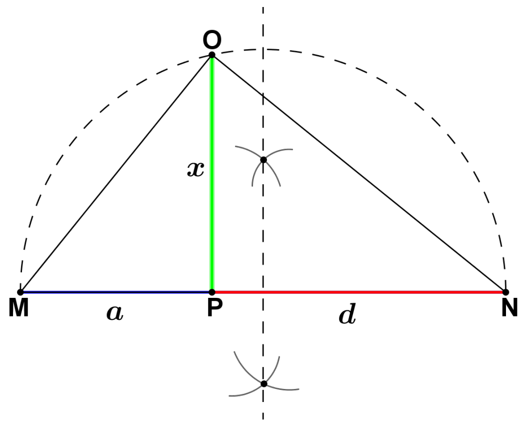


Figura 3.2: Média proporcional entre a diagonal da face e a aresta do cubo (a) da figura 3.1

Fonte: Reproduzida de (SOUZA; ARAÚJO; ANDRADE, 2007)

Calcularemos agora a média proporcional entre a diagonal d e a média encontrada x. Na Figura 3.3, note que o triângulo M'ÔN' é retângulo, assim temos que $(x_1)^2 = \text{x}.d$, isto implica que $x_1 = \sqrt{x.d}$. Portanto x_1 é a média proporcional entre a média anterior x e a diagonal da face do cubo.

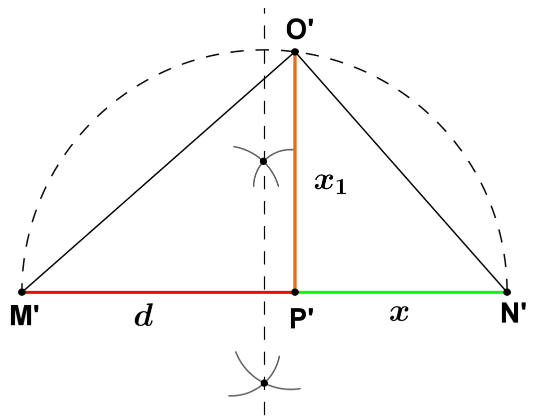


Figura 3.3: Cálculo da média proporcional entre a média x (figura 3.2) e a diagonal d da face do cubo.

Fonte: Reproduzida de (SOUZA; ARAÚJO; ANDRADE, 2007)

Na figura 3.4, o triângulo M"Ô"N" é triângulo retângulo e $x_2^2 = a.x_1 \Rightarrow x_2 = \sqrt{a.x_1}$ e, portanto, x_2 é a média proporcional entre a média x_1 e a aresta a do cubo.

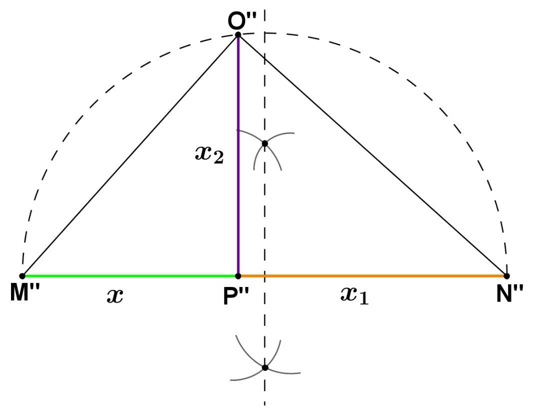


Figura 3.4: Cálculo da média proporcional entre as médias x (Figura 3.2) e x_1 (Figura 3.3).

Fonte: Reproduzida de (SOUZA; ARAÚJO; ANDRADE, 2007)

Segundo Vargiù, se repetirmos esse processo sete vezes encontramos a aresta do cubo duplo com erro inferior a 0,002.

Como vimos anteriormente nas figuras 3.2, 3.3 e 3.4, é possível determinar com régua e compasso as médias $x, x_1, x_2, ..., x_n$.

Vejamos agora o cálculo algébrico dessas médias. É claro que o cubo pode ter aresta qualquer, entretanto, como foi dito no início, vamos considerar a aresta $a = 1$ e, portanto, a diagonal da face será $d = \sqrt{2}$. Então:

1. $x = \sqrt{a.d} = \sqrt{\sqrt{2}} = 1,189207.$
2. $x_1 = \sqrt{x.d} = \sqrt{1,189207.\sqrt{2}} = 1,296839.$
3. $x_2 = \sqrt{x.x_1} = \sqrt{(1,189201).(1,296839)} = 1,241857.$
4. $x_3 = \sqrt{x_1.x_2} = \sqrt{(1,296839).(1,241857)} = 1,269050.$
5. $x_4 = \sqrt{x_2.x_3} = \sqrt{(1,241857).(1,269050)} = 1,255379.$
6. $x_5 = \sqrt{x_3.x_4} = \sqrt{(1,269050).(1,255379)} = 1,262195.$
7. $x_6 = \sqrt{x_4.x_5} = \sqrt{(1,255379).(1,262195)} = 1,258782.$

Comparando-se os valores da aresta $\sqrt[3]{2}$, que é a aresta de um cubo duplo em relação ao cubo de aresta a=1, e do cubo de aresta x_6, obtemos um erro inferior a 0,002, como afirmou Vargiù:

$\epsilon = |x_6 - \sqrt[3]{2}| = |1,258782 - 1,259921| = 0,001139.$

Entretanto, fica a pergunta, porque Vargiù não prosseguiu extraindo as médias e diminuindo o erro? Vejamos o que acontece quando prosseguimos com este processo.

$x_7 = \sqrt{x_5.x_6} = \sqrt{(1,262195).(1,258782)} = 1,260487.$

$x_8 = 1,259634.$

$x_9 = 1,260060.$

$x_{10} = 1,259847.$

$x_{11} = 1,259954.$

$x_{12} = 1,259901.$

$x_{13} = 1,259927.$

$x_{14} = 1,259914.$

$x_{15} = 1,259920.$

Para $x_{15} = 1,259920$ ó erro $\epsilon = 0,000001.$

Se prosseguirmos calculando $x, x_1, x_2, x_3, ...$ com régua e compasso, temos que $\epsilon \to 0$? Se esta afirmação for verdadeira, Giuseppe Vargiù resolveu o problema da duplicação do cubo com régua e compasso?

A resposta é não, pois pelas condições impostas pelos *Elementos* de Euclides as construções com régua e compasso tem um número finito de passos.

3.3 O método de Gaetano Boccali

A solução apresentada por Gaetano Boccali, consiste em:

Construir um triângulo retângulo de hipotenusa igual ao lado do decágono regular estrelado, inscrito num círculo de raio igual à aresta do cubo, tendo a projeção de um dos catetos sobre a hipotenusa medida igual a essa aresta. Os dois terços da soma do cateto considerado com a projeção do outro cateto dão a aresta do cubo duplo com erro inferior a 0,0001. (FONTES, 1967, p.104-5).

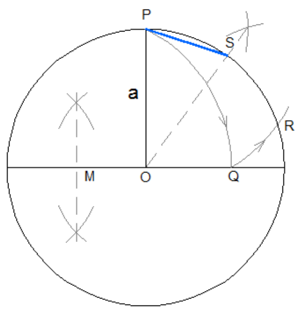


Figura 3.5: Divisão de circunferência em 10 partes com régua e compasso

Considerando o cubo da figura 3.2 (a), onde a aresta $a = 1$ e traçamos uma circunferência de raio igual à aresta do cubo.

Por um processo geométrico dividimos a circunferência em 5 partes iguais e em seguida em 10 partes iguais, através da bissetriz do ângulo central do pentágono regular. Assim, $\overline{PS} = \dfrac{1}{10}$ da circunferência de Centro O.

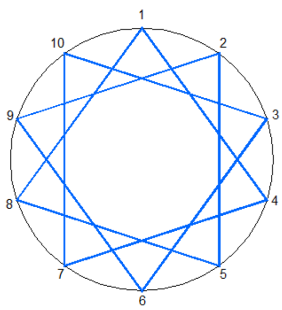


Figura 3.6: Decágono regular estrelado construído com régua e compasso.

Construamos agora o decágono regular estrelado, conforme propõe Boccali, a partir da circunferência da figura 3.5.

Construamos agora o triângulo retângulo de hipotenusa igual ao lado do decágono da Figura 3.6.

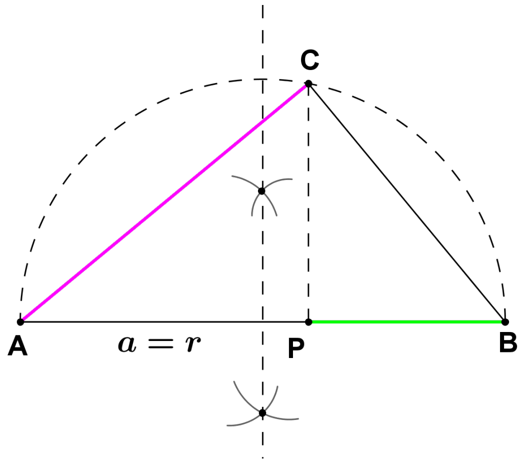


Figura 3.7: Construção do triângulo de Boccali.

Fonte: Reproduzida de (SOUZA; ARAÚJO; ANDRADE, 2007)

No triângulo da figura 3.7, $\overline{AP}$=a=r, que é igual a projeção do cateto $\overline{AC}$ e $\overline{PB}$ é a projeção do cateto $\overline{BC}$.

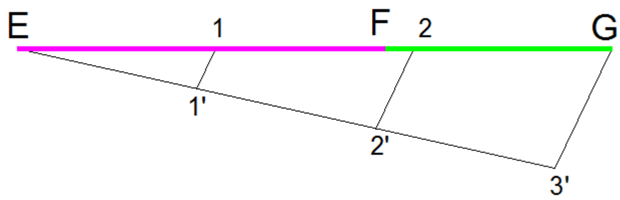


Figura 3.8: Divisão do segmento $\overline{EG}$ em três partes iguais usando o teorema de Talles.

Fonte: (SOUZA; ARAÚJO; ANDRADE, 2007)

Na figura 3.8, $\overline{EF} = \overline{AC}$ e $\overline{FG} = \overline{PB}$. e $\overline{E2} = \dfrac{2\overline{EG}}{3}$, que é a aresta do cubo duplo com o erro inferior a 0,0001.

Demonstração.

O lado do decágono estrelado é igual a corda da circunferência cujo ângulo central correspondente mede 108^o ($3x36^o$). Figura 3.9.

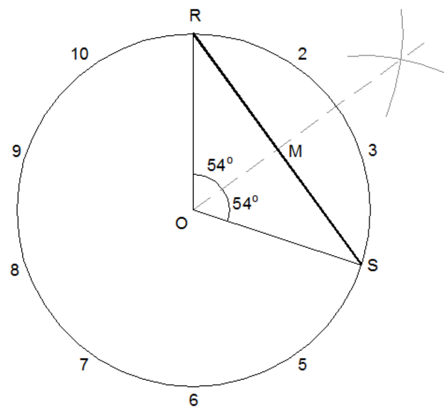


Figura 3.9: $\overline{OM}$ é a altura do triângulo ORS.

Fonte: (SOUZA; ARAÚJO; ANDRADE, 2007)

$sen 54^o = \dfrac{\overline{MS}}{\overline{OS}} = \dfrac{\overline{MS}}{1}$= 0,8090, logo $\overline{RS} = 2\overline{MS}$= 1,6180.

Observe que na Figura 3.7, $\overline{AB} = \overline{AP} + \overline{PB}$ e sendo $\overline{AB}$ o lado do decágono regular estrelado $\overline{AB} = \overline{RS}$ = 1,6180. Logo, $\overline{PB} = \overline{AB} - \overline{AP}$ = 1,6180 - 1 = 0,6180.

Observe ainda, que o ponto P da figura 3.7 divide o segmento $\overline{AB}$ em uma razão áurea, desta forma, o cateto $\overline{AC} = \sqrt{\overline{AP}.\overline{AB}} = \sqrt{(1).(1,618)}$ = 1,2720.

A medida de $\overline{EG} = \overline{AC} + \overline{PB} \therefore \overline{EG}$ = 1,2720 + 0,618 = 1,8900536.

$\dfrac{2\overline{EG}}{3} = \dfrac{2(1,890053639)}{3}$ = 1,260035759.

Comparando-se os valores encontrados temos:

ϵ = 1,260035795 - 1,25992105 = 0,0000114.

Capítulo 4

O Problema não tem solução com régua e compasso.

Vimos que o problema da duplicação do cubo, juntamente com os outros dois problemas clássicos, ocuparam vários geômetras, a restrição do uso de régua e compasso não limitou as tentativas de solucionar o problema, pois soluções surgiram utilizando-se de outras ferramentas. Contudo somente com o desenvolvimento da álgebra e sua aproximação da geometria é que foi possível provar que de fato tal problema não poderia ser solúvel com as limitações impostas.

Foi só no século XIX que finalmente se provou a impossibilidade da resolução da duplicação do cubo com instrumentos euclidianos, sendo a primeira demonstração devida ao matemático francês Pierre Laurent Wantzel (1814-1848), em artigos publicados no ano de 1837 no Journal, de Liouville, nos quais mostrou que todos os problemas desse tipo correspondem a uma equação cuja raiz se exprime por uma série finita de operações elementares (adição, subtração, multiplicação, divisão e extração de raiz quadrada). Posteriormente surgiram outras demonstrações desse fato em muitos dos textos atuais sobre teoria das equações, onde se mostra que as condições de construbilidade são de natureza essencialmente algébrica. Em particular, estabeleceram-se os dois teoremas seguintes :

Teorema 4.1 . *O número que expressa o comprimento de um segmento construtível em relação a uma dada unidade é necessariamente algébrico.*

Teorema 4.2 . *A partir de uma dada unidade de comprimento é impossível construir com os instrumentos euclidianos um segmento cuja medida é a raiz de uma equação cúbica de coeficientes racionais mas sem raízes racionais.*

O segundo teorema elimina a solução da duplicação do cubo com régua não graduada e compasso. Para o problema da duplicação tome como unidade de comprimento a aresta do cubo dado e denote por x a aresta do cubo procurado. Devemos ter então $x^3 = 2$. Se o problema fosse resolúvel com os instrumentos euclidianos, seria possível construir um segmento de comprimento x a partir do segmento unitário. Mas isso é impossível, visto que $x^3 = 2$ é uma equação cúbica de coeficientes racionais que não tem nenhuma raiz racional.

Lembre-se de que se o número racional irredutível $\frac{a}{b}$ é raiz da equação polinomial $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_n = 0$, onde $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ são números inteiros, então a é fator de a_n e b é fator de a_0. Assim as eventuais raízes racionais de x^3 -2 = 0 estariam entre os números 1, -1, 2, -2. Como uma verificação direta mostra que nenhum desses números satisfaz a equação, esta não tem raízes racionais. (EVES, 2011, p. 586).

4.1 A prova da impossibilidade pela teoria de corpos numéricos

Um corpo numérico é um conjunto fechado com as quatro operações fundamentais, soma, subtração, multiplicação e divisão, é claro excluindo-se a divisão por zero, ou seja, dados dois números a e b, ambos pertencentes a um conjunto C, logo se $(a + b) \in$ C, $(a - b) \in$ C, ab $\in$ C e $\frac{a}{b} \in$ C, neste último caso com b $\neq$ 0. Dizemos que C é um corpo.

Analisemos outros exemplos de corpos numéricos que serão importantes para compreensão da impossibilidade da construção de alguns segmentos com régua e compasso.

Da teoria dos corpos numéricos, decorre o seguinte teorema:

Teorema 4.3 . *Se F é um corpo numérico, $a \in F$, $b \in F$, $\mu \notin F$ mas com $\mu^2 = v \in F$, se x é um elemento de um conjunto F' definido por F'= $x = a + b\mu$, então F' também é um corpo numérico.*

A prova consiste em mostrar que dados dois elementos arbitrários de F', $x_1 = c+d\mu$ e $x_2 = e+f\mu$, a soma $x_1 + x_2$, subtração x_1 - x_2, multiplicação $x_1.x_2$ e divisão $\dfrac{x_1}{x_2}$, com $x_2 \neq 0$, pode ser reduzido a forma geral x = a + $b\mu$, ou seja, o conjunto é fechado para as operações fundamentais $\blacksquare$.

Um dos exemplos clássicos desse teorema é o corpo dos números reais, pois tomando $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $i = \sqrt{-1} \notin \mathbb{R}$ mas $i^2 \in \mathbb{R}$. Temos um conjunto $\mathbb{C}$ definido pelos números z, tal que z = $a+bi$, que formam o corpo dos números complexos ou imaginários, note também que existe a relação de que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Para estudo das construções geométricas, podemos usar como corpo numérico inicial o conjunto dos números racionais, $F_0 = \mathbb{Q}$, e para algum número positivo t, $t \in \mathbb{Q}=F_0$, façamos o número $\mu_0 = \sqrt{t}$, de forma que $\mu_0 \notin F_0$, mas $(\mu_0)^2 \in F_0$. Assim, podemos construir uma cadeia de corpos numéricos, nos moldes do teorema visto, ou seja.

$F_1 = \{x = a_0 + b_0\mu_0 | a_0 \in F_0, b_0 \in F_0, \mu_0 \notin F_0, \mu_0^2 \in F_0\}$.

$F_2 = \{x = a_1 + b_1\mu_1 | a_1 \in F_1, b_1 \in F_1, \mu_1 \notin F_1, \mu_1^2 \in F_1\}$.

$\vdots$

$F_k = \{x = a_{k-1} + b_{k-1}\mu_{k-1} | a_{k-1} \in F_{k-1}, b_{k-1} \in F_{k-1}, \mu_{k-1} \notin F_{k-1}, \mu_{k-1}^2 \in F_{k-1}\}$.

Nesta cadeia verifica-se $\mathbb{Q} = F_0 \subset F_1 \subset F_2 \subset F_3 \subset \ldots \subset F_k$.

Assim como na álgebra, com os equipamentos euclidianos na geometria podemos a partir de um valor dado, encontrar outro valor desconhecido, utilizando-se para isso das operações de soma, subtração, multiplicação e divisão de segmentos, e com a combinação dessas operações podemos construir qualquer elemento v $\in \mathbb{Q} = F_0$, corpo numérico dos números racionais. Podemos também construir a raiz quadrada $\sqrt{v}$ de um não quadrado perfeito v, o que possibilita a construção dos corpos numéricos $F_1, F_2, F_3, ..., F_{k-1}, F_k$.

Equacionando o problema da duplicação do cubo, aliás o que já foi feito na seção 2.1, seja um cubo de aresta a e seja x a aresta de um outro cubo com o dobro do volume do primeiro, então $x^3 = 2a^3$, considerando a um valor unitário, temos que, $x = \sqrt[3]{2}$. A princípio o problema parece de fato não ter solução, pois com as operações fundamentais só podemos efetuar somas, diferenças, multiplicações, divisões e extrair raiz quadrada, mas neste caso temos uma raiz cúbica. Mas é necessário provar que $x = \sqrt[3]{2}$ não pertença a nenhum corpo F_k com essas cinco operações que determinam a construbilidade dos segmentos.

Sabemos que $\sqrt[3]{2} \notin F_0 = \mathbb{Q}$, por ser irracional. Logo, se este número for construtível, ele deve pertencer a algum corpo numérico de índice k ≥ 1, então x tem que ser da forma $\sqrt[3]{2} = a + b\mu_{k-1} \in F_k$.

O valor do nosso segmento procurado é a raiz ou zero da função definida por U(x) = x^3-2 = $x.x.x$-2 (I).

Seja F_k um corpo numérico de ordem k, o domínio dessa função, ou seja, $x \in F_k$ e dessa forma como no segundo membro temos apenas as operações fundamentais de multiplicação e subtração, e como $2 \in F_k$, logo os valores de U(x) estão contidos em F_k, pela propriedade de fechamento dos corpos numéricos.

Daí resulta que $x = a + b\mu_{k-1} \in F_k$ (II) e $U(x) = c + d\mu_{k-1} \in F_k$ (III), com $\mu_{k-1} \notin F_{k-1}, \mu_{k-1}^2 = v \in F_{k-1}$ e $a, b, c, d \in F_{k-1}$

Substituindo (II) e (III) em (I), obtemos,

$(a + b\mu_{k-1})^3 - 2 = c + d\mu_{k-1}$

$a^3 + 3a^2b\mu_{k-1} + 3ab^2\mu_{k-1}^2 + b^3\mu_{k-1}^3 - 2 = c + d\mu_{k-1}$

$a^3 + 3a^2b\mu_{k-1} + 3ab^2v + b^3v\mu_{k-1} - 2 = c + d\mu_{k-1}$

$a^3 + 3ab^2v - 2 + (3a^2b + b^3v)\mu_{k-1} = c + d\mu_{k-1}$

$c = a^3 + 3ab^2v - 2$

$d = 3a^2b + b^3v$

Agora nas expressões de c e d, se trocarmos b por -b, temos,

c' = c e d' = -d, de forma que,

$(a + b\mu_{k-1})^3 - 2 = c + d\mu_{k-1}$

$(a - b\mu_{k-1})^3 - 2 = c - d\mu_{k-1}$ (IV)

supondo $x = a + b\mu_{k-1} = \sqrt[3]{2}$ o zero de $U(x)$, temos que

$c + d\mu_{k-1} = 0 \Rightarrow \mu_{k-1} = -\dfrac{c}{d}$.

Mas como $c, d \in F_{k-1}$, isto implica que $\mu_{k-1} \in F_{k-1}$ mas sabemos que apenas $\mu_{k-1}^2 \in$

F_{k-1}. Logo, para $c + d\mu_{k-1}$=0, só resta concluir que $c = d = 0$. Decorre imediatamente que $c - d\mu_{k-1}$=0, o que implica que $a - b\mu_{k-1}$ é também zero de U(x).

A última etapa é mostrar que os dois zeros são diferentes, ou seja, $a+b\mu_{k-1} \neq a-b\mu_{k-1}$. De fato, pois $(a + b\mu_{k-1}) - (a - b\mu_{k-1}) = 2b\mu_{k-1}$ e esta expressão só se anulará se $b = 0$. Mas então, $x = a + b\mu_{k-1} = a$ e por consequência teremos $a = \sqrt[3]{2}$ e como $a \in F_{k-1}$ temos que $\sqrt[3]{2} \in F_{k-1}$ o que contraria a nossa hipótese inicial de que $\sqrt[3]{2} \in F_k$. Para manter tal hipótese, aceitaremos que $a + b\mu_{k-1} \neq a - b\mu_{k-1}$ mas aí vem outro absurdo pois U(x) possui uma única raiz real, sendo que as outras duas são imaginárias.

Logo $\sqrt[3]{2}$ não se sustenta em nenhum corpo F_k, portanto, é um número não construtível e a duplicação do cubo é impossível com os instrumentos euclidianos (COURANT, 2000) e (Teixeira, 2013).

Capítulo 5

Construções no Geogebra

O Geogebra é um software livre, ou seja, gratuito que reúne geometria, álgebra e cálculo. Ele foi desenvolvido por Markus Hohenwarter da Universidade de Salzburg para educação matemática nas escolas, é uma excelente ferramenta no auxílio de estudantes da educação básica à superior. Tem uma interface intuitiva, e diversas ferramentas pré configuradas, além de possuir versões em diversos idiomas, dentre eles o português, facilitando o seu uso e manuseio. É neste contexto que escolhi este software para simular de forma dinâmica duas construções mecânicas para solução do problema da duplicação do cubo, as soluções de Eratóstenes, que ficou conhecida como mesolabo de Eratóstenes e a atribuída a Platão, também chamada de esquadro de Platão, ambas utilizando a idéia das médias proporcionais propostas por Hipócrates.

Primeiro vamos começar conhecendo um pouco do Geogebra em sua versão 5.0.

Em sua tela inicial temos o menu principal, a barra de ferramentas onde aparecem os botões com ícones referenciais, janela de álgebra, janela de visualização que por padrão já nos apresenta o eixo cartesiano XOY, e logo na parte inferior o campo de entrada, local em que podemos digitar fórmulas e comandos.

Para essas construções, vamos utilizar principalmente as funções da barra de ferramentas, pois nela estão todos os elementos que necessitaremos como por exemplo, pontos, retas e segmentos.

Toda referência que fizermos sobre a utilização do Geogebra, será com base nas configurações padrões em sua versão 5.0.

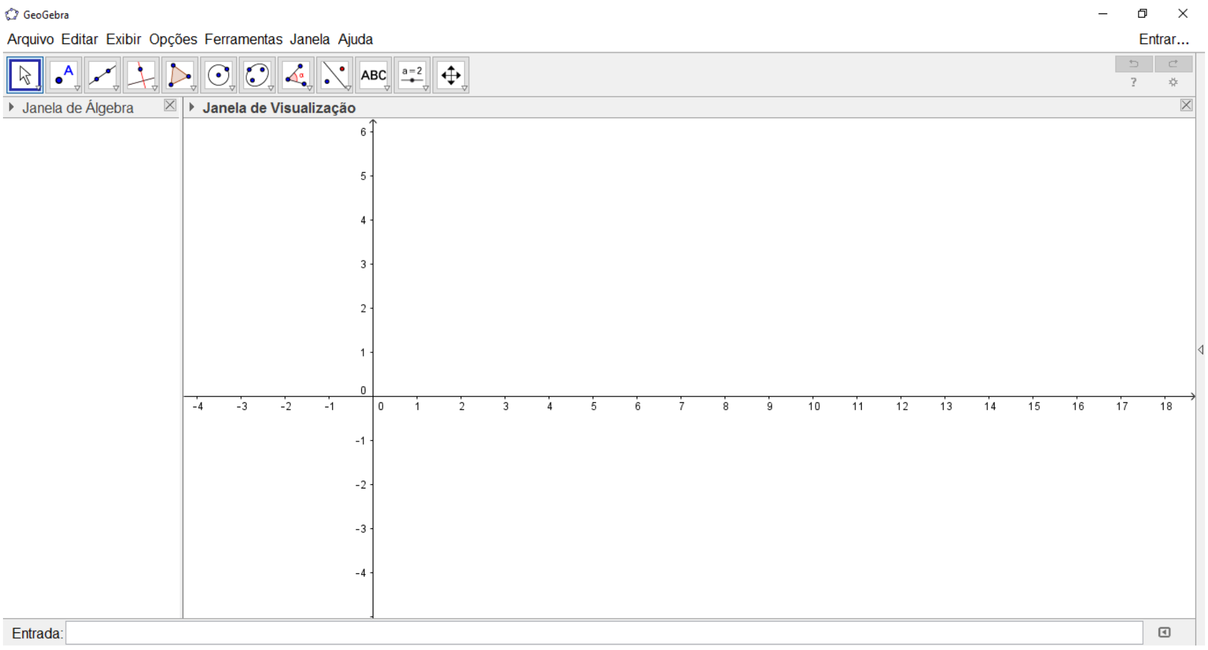


Figura 5.1: Tela inicial do Geogebra versão 5.0

5.1 O Mesolabo de Eratóstenes

A nossa primeira construção será a reprodução da solução proposta por Eratóstenes, também conhecida como mesolabo de Eratóstenes (Capítulo 2, Seção 2.5) que consiste em três calhas móveis que deslizam uma sob a outra.

Na janela de visualização não precisaremos dos eixos cartesianos, por isso devemos ocultá-los, basta selecionar a opção “mover”na barra de ferramentas e clicar com o botão direito do mouse na janela de visualização, logo aparecerá um menu suspenso e com o botão esquerdo clicar na opção eixos, fazendo com que os eixos sejam ocultados, acompanhe na sequência das Figuras 5.2 e 5.3.

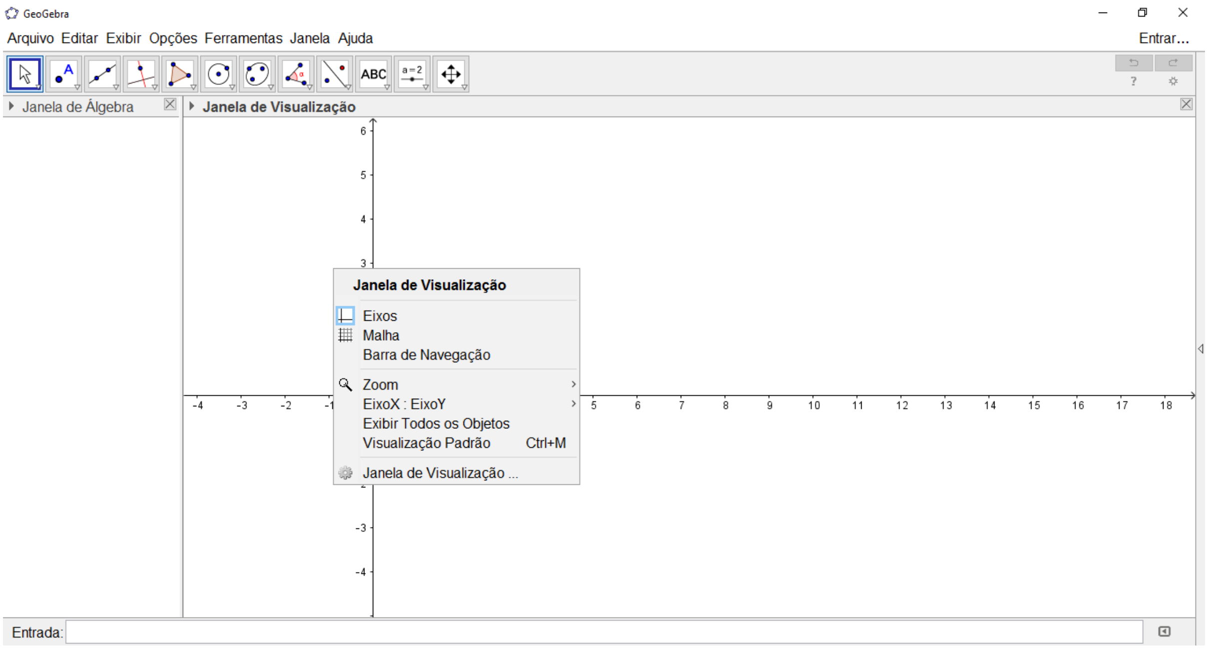


Figura 5.2: Ativando o menu suspenso para ocultação dos eixos

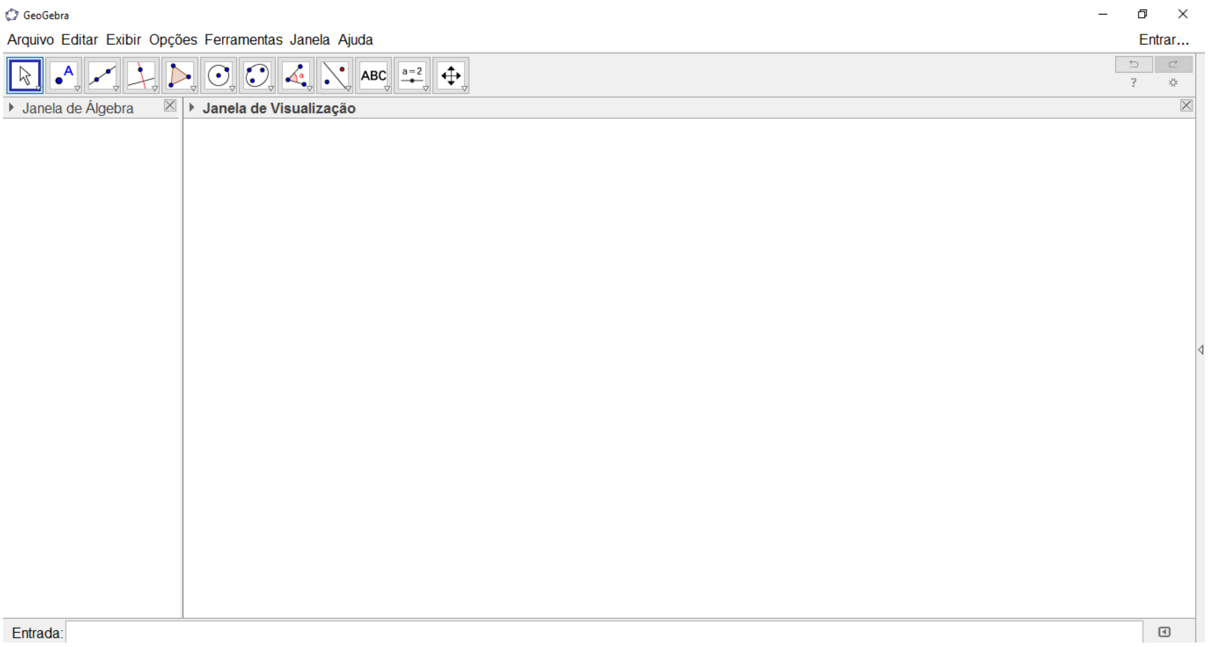


Figura 5.3: Tela do geogebra com eixos ocultados.

Usando a ferramenta de reta, construímos uma reta horizontal AB e uma reta perpendicular AC de modo que concorram em A. Ver Figura 5.4

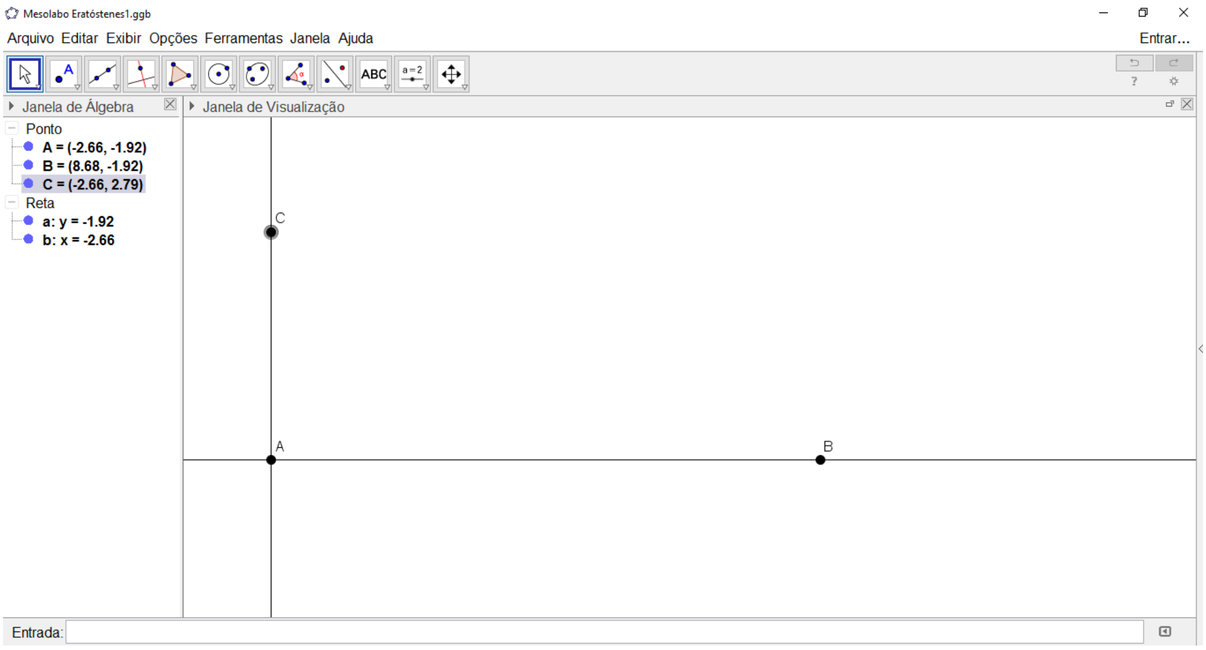


Figura 5.4: Retas perpendiculares em A.

Marcando um ponto D sobre a reta AB. Com o botão direito do mouse clicar sobre o ponto D e em *propriedades* no menu suspenso, após isso na *aba básico* selecionar a opção “Fixar objeto”, deste modo o segmento AD, será um dos lados da calha desejada e o segmento AC será o outro lado, como podemos observar na Figura 5.5.

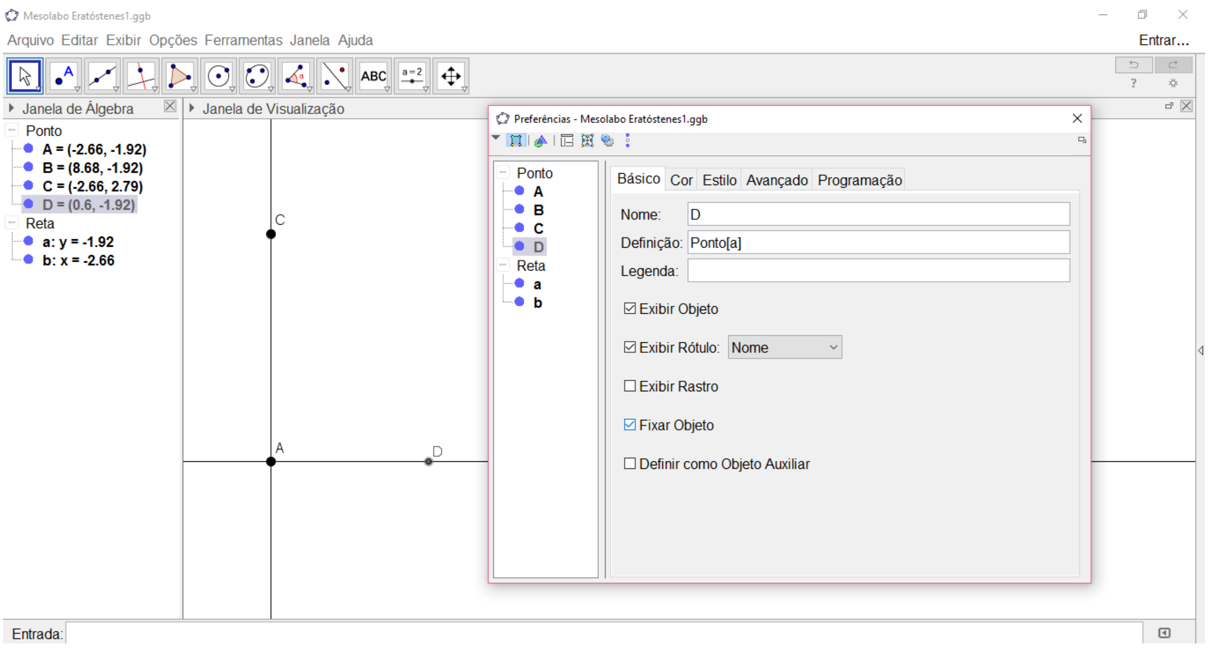


Figura 5.5: Fixar o ponto D na reta AB.

O objetivo é criar três calhas móveis, portanto ocultamos a reta AB, clicanco com o botão direito em cima da reta AB na janela de visualização ou na reta AB na janela de álgebra, no menu suspenso clicar em “Exibir objeto”. Agora com a ferramenta *segmento* traçar o segmento AD e neste segmento colocar um ponto E. No campo de entrada, digitar =E+(x(D)-x(A),0) que em seguida apertar a tecla “Enter”. Note que será criado automaticamente um ponto F que possui como coordenadas, as coordenadas do ponto E somado a coordenada x do ponto D menos x do ponto A, no eixo horizontal e 0 no eixo vertical, isso fará com que ao movimentarmos o ponto E no segmento AD, o ponto F se desloque na mesma reta que passa por este segmento mantendo sempre uma distância horizontal constante em relação ao ponto E, dando a idéia de movimentação de uma calha sobre outra. Para terceira calha, traçamos o segmento EF e marcamos um ponto G sobre ele, digitamos na caixa de entrada =G+(x(D)-x(A),0), pela mesma argumentação anterior, teremos um ponto H e em seguida traçamos o segmento GH, portanto os segmentos AD, EF e GH, serão as bases das calhas.

Ocultamos a reta AC e traçamos o segmento AC, usando a caixa ferramenta, traçamos uma perpendicular ao segmento AC passando por C, agora na caixa de ferramentas selecionamos paralelas e traçamos retas paralelas a AC que passem por E,D,G,F e H, conforme visto na Figura 5.6

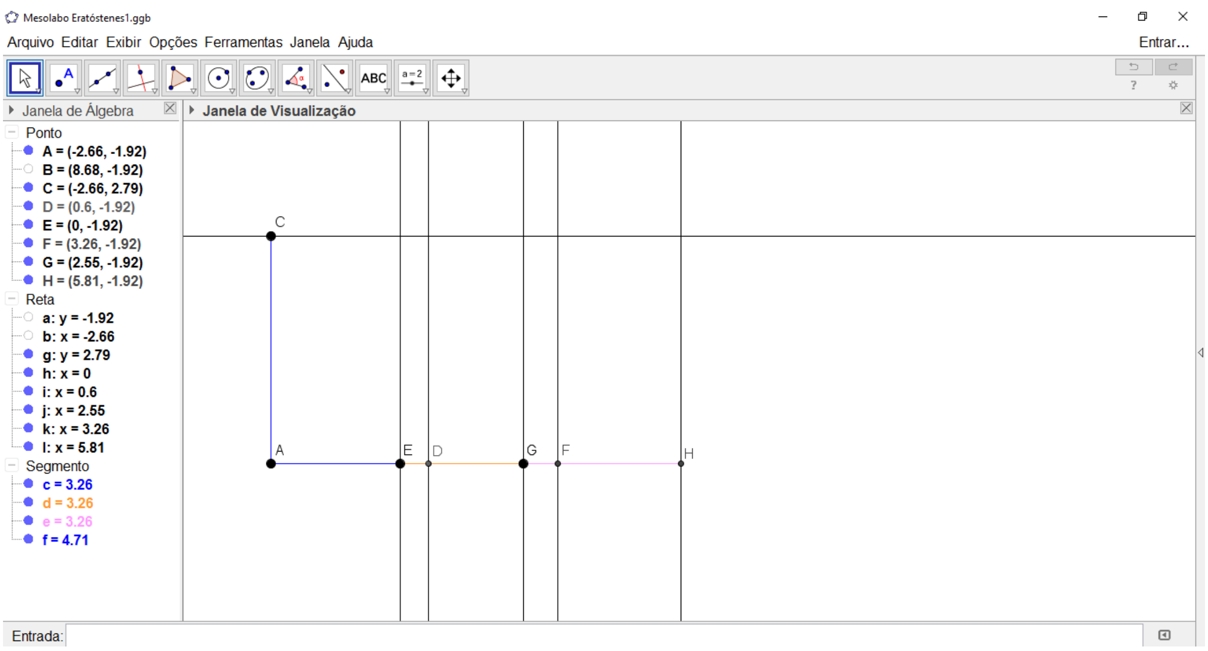


Figura 5.6: Paralelas e perpendiculares ao segmento AC.

Na Figura 5.7, marcamos os pontos I,J,K,L e M de interseções entre as retas paralelas a AC e a reta perpendicular a AC que passa em C. Em seguida ocultamos as retas paralelas e traçamos na horizontal os segmentos CJ, IL e KM e na vertical os segmentos EI, DJ, GK, FL e HM, em seguida reexibimos a reta AB e a reta perpendicular a AC em C.

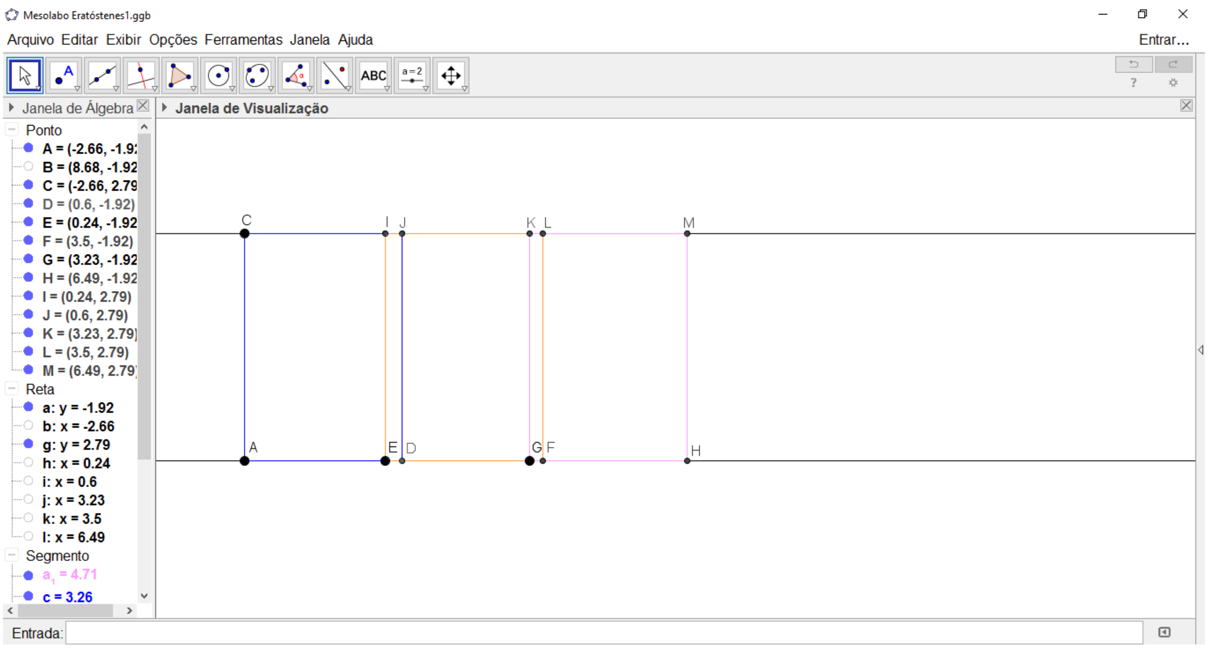


Figura 5.7: Calhas móveis.

Feito isso traçamos as diagonais CD, IF e KH e na caixa de ferramentas selecionamos a ferramenta ponto médio e determinamos o ponto N, ponto médio do segmento MH. Ver Figura 5.8.

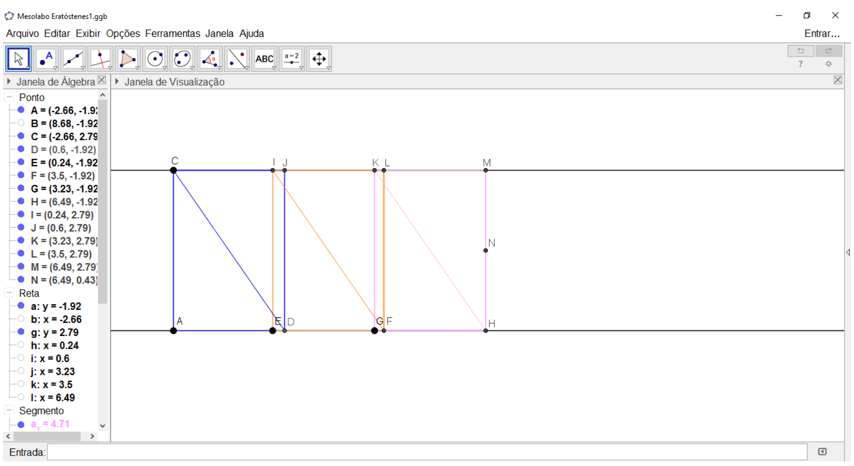


Figura 5.8: Diagonais CD, IF e KH e ponto médio N de MH.

Note que os retângulos ADJC, EFLI e GHMK são as três calhas móveis. Agora na Figura 5.9, marcamos o ponto O, interseção entre a diagonal IF e o segmento DJ, bem como o ponto P, interseção entre a diagonal KH e o segmento FL. Em seguida traçamos uma reta que passa pelos pontos C e N. Depois marcamos os pontos Q e R que são as interseções respectivas das diagonais IF e KH com a reta que passa por C e N.

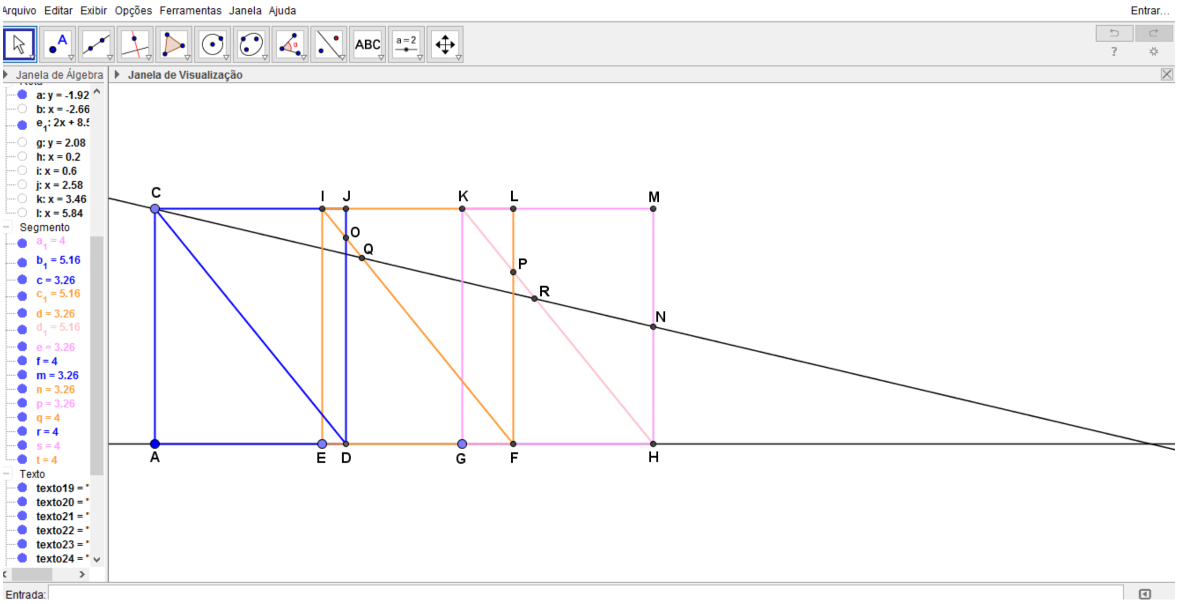


Figura 5.9: Pontos de interseção entre o lado das calhas e as diagonais e entre a reta CN e as diagonais das calhas.

Traçamos os segmentos DO, FP e HN, ao movimentarmos os pontos E e G, estamos manipulando as calhas móveis. Quando os pontos C,O,P e N estão em uma mesma reta, ou seja, quando O coincide com Q e P coincide com R, os segmentos DO e FP são duas médias proporcionais entre os segmentos HN e AC sendo HN $= a$ a aresta de um cubo dado, FP é a aresta de um cubo com o dobro do volume do primeiro.

Para verificação dos valores, criamos os números k_1, w e v, que são as razões $\dfrac{DO}{AC}$, $\dfrac{FP}{DO}$ e $\dfrac{HN}{FP}$ respectivamente, para isso basta digitar na caixa de entrada as razões, por exemplo, “=DO/AC”este comando irá automaticamente gerar um valor numérico que neste caso foi atribuído a k_1, o restante é só configurar os segmentos atribuindo cores para diferenciá-los, que pode ser feito clicando com o botão direito do mouse e indo em propriedades. Depois de tudo ajustado teremos o resultado como mostra a Figura 5.10

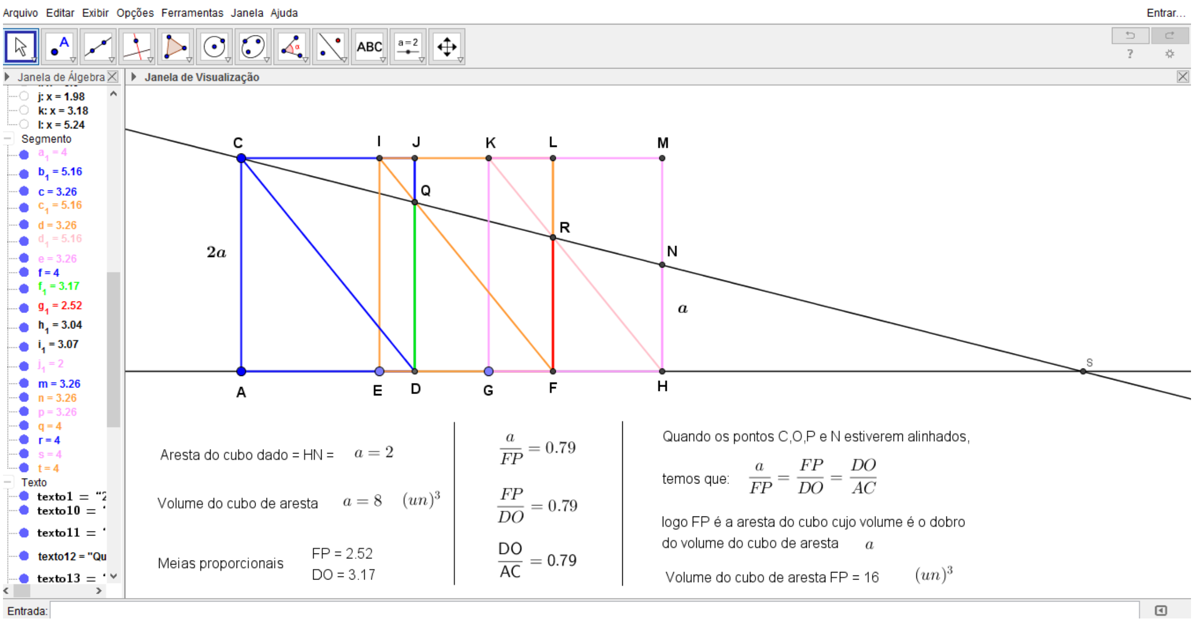


Figura 5.10: Resultado final depois de alinhar os pontos C,O,P e N.

5.2 O Esquadro de Platão

A nossa segunda construção é a simulação da solução de Platão, ou como Courant (2000) e Eves (2011) sugerem, a solução atribuída a Platão (Capítulo 2, seção 2.6), que consiste em através da semelhança de triângulos formados pela interseção de duas retas perpendiculares, e um segmento dado em um dos triângulos ao qual corresponde a aresta de um cubo, encontrar através do posicionamento adequado de uma ferramenta que tem a função de esquadro razões de semelhanças que correspondem a solução de Hipócrates dessa forma encontrar um outro segmento que é aresta de um outro cubo com o dobro do volume do cubo de aresta dada.

Dispondo de recursos computacionais, nesta construção faremos algumas adaptações ao método mecânico, de modo a facilitar encontrar as proporções desejadas, por isso alguns pontos que na prática seriam ajustados para coincidirem em determinadas retas, aqui estes já estarão fixos nas mesmas uma vez que pertencerem a essas retas, é condição necessária para as proporções.

Para isso voltamos ao Geogebra mas diferente da construção do Mesolabo, vamos inicialmente utilizar os eixos coordenados xOy, simplesmente pelo fato de já serem perpendiculares por definição e nos facilitar encontrar um segmento que será o dobro do outro.

Nosso primeiro passo é marcar dois pontos, um na origem do sistema (interseção entre o eixo x e o eixo y) e outro sobre a reta Ox, basta para isso ir na barra de ferramentas e selecionar a ferramenta *Ponto* em seguida clicar na interseção dos eixos e depois sobre a reta Ox, gerando os pontos A e B respectivamente. Ver Figura 5.11

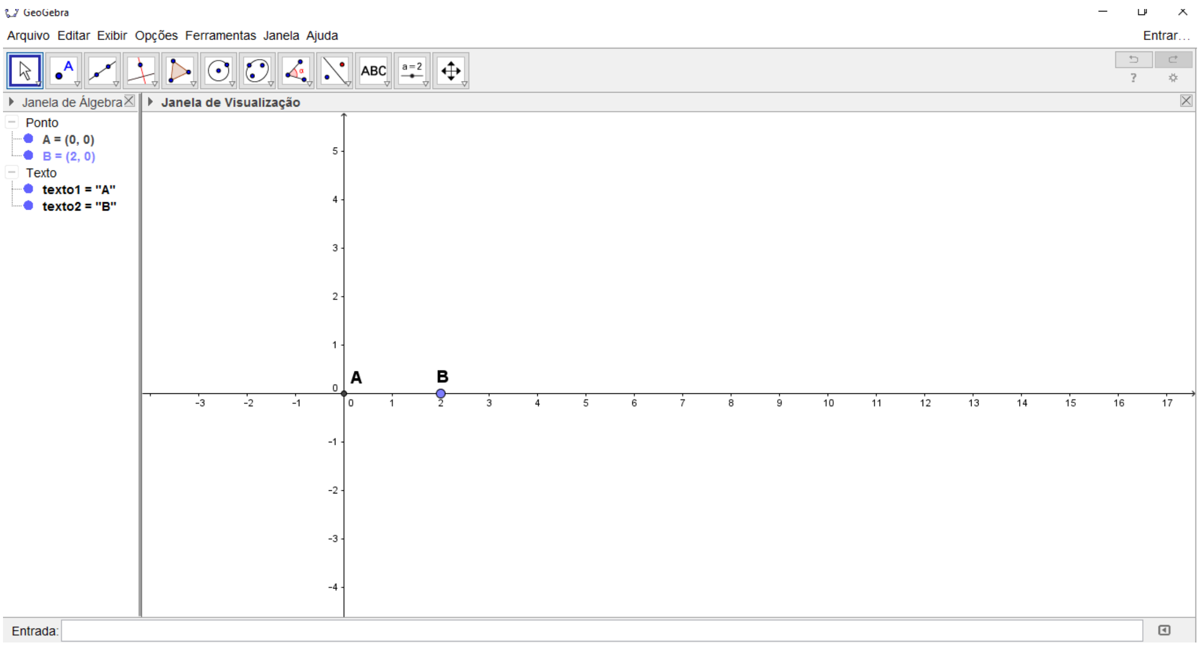


Figura 5.11: Pontos A e B, A na origem so sistema e B sobre a reta Ox.

Para melhor manipulação da construção vamos centralizar a origem do plano cartesiano no centro da janela de visualização, para isso iremos na barra de ferramentas selecionamos a ferramenta mover (símbolo é o ponteiro de um mouse), clicamos perto da origem do plano cartesiano e sem soltar o mouse, note que o ponteiro do mouse se transformará em uma mão, arraste-o para uma posição próximo ao centro da janela de visualização após, clique com botão esquerdo na janela de visualização e no menu suspenso na opção *janela de visualização*, com isso vai abrir uma outra tela, na nova tela vá até a aba *Eixo x* e desmarque a opção *Exibir números* e na opção *Graduações* escolha a sem marcações (toda em branco), logo ao lado vá até a aba *Eixo y* e faça os mesmos procedimentos. Figura 5.12.

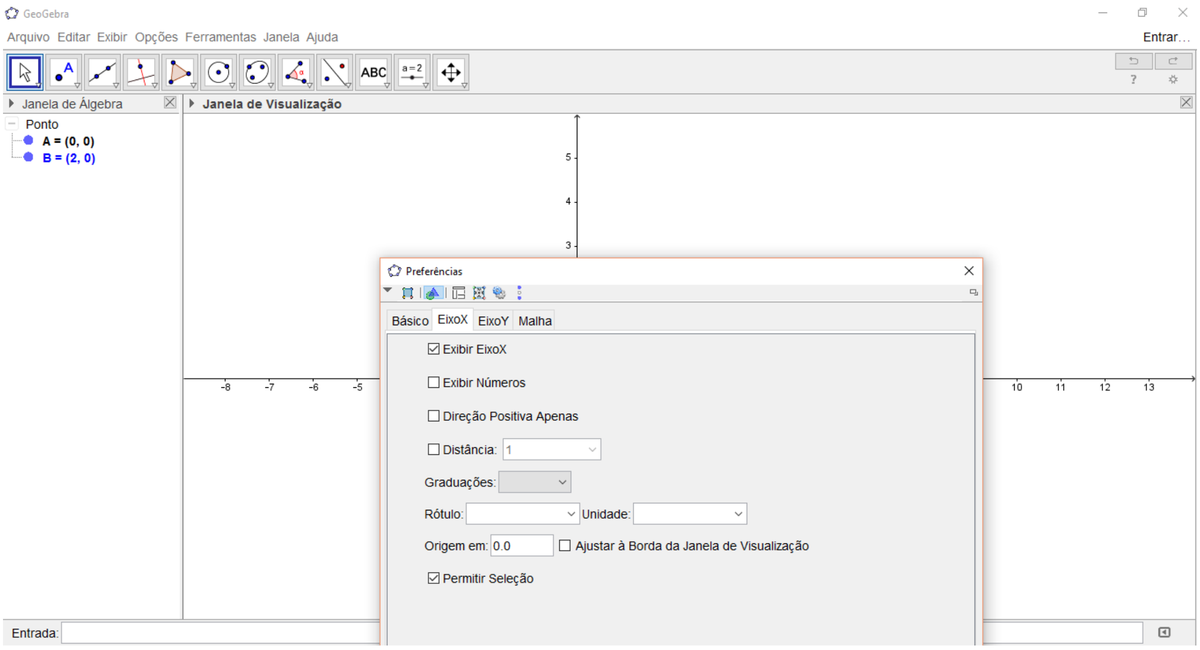


Figura 5.12: Movendo eixos coordenados e ocultando suas marcações.

Devemos agora criar um ponto C cuja distância até o ponto A seja o dobro da distância de B ao ponto A. Para automatizar este processo, utilizando-se da geometria analítica escrevemos na caixa de entrada as coordenadas deste ponto "=(0,2*x(B))". Essa coordenada se justifica pelo fato de o ponto B ser da forma $(x_b, 0)$ pois foi criado sobre a reta Ox, temos que as coordenadas de C deverão ser $(0, 2.x_b)$, pois o ponto C deve estar sobre o eixo y e a uma distância dupla da origem em relação o ponto B. Após isso vá na caixa de ferramenta dê um duplo clique sobre a ferramenta *Reta* no menu suspenso selecione a opção *segmento*, na janela de visualização clique no ponto A e em seguida no ponto B, depois no ponto A e em seguida em C, serão criados os segmentos a e b. O segmento a é a aresta do cubo inicial, clicando com o botão direito e em *Propriedades* podemos alterar a cor do segmento, bem como a sua espessura, podemos observar na janela de álgebra que a medida do segmento b é o dobro do segmento A, o ponto B pode ser movimentado sobre a reta Ox. Figura 5.13

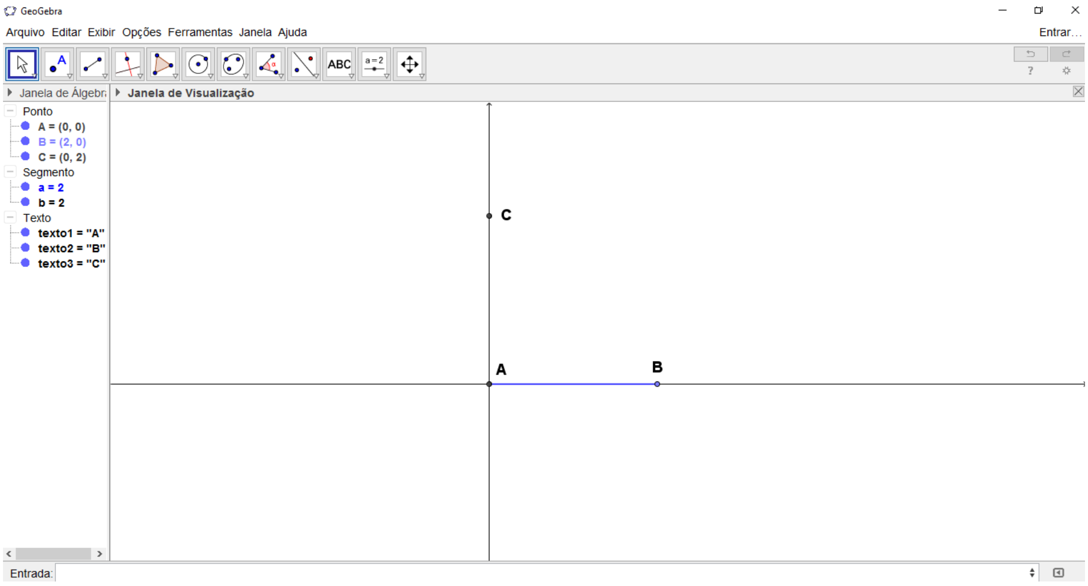


Figura 5.13: Determinação do ponto C e segmento AB (aresta do cubo dado).

Vamos determinar uma reta que corte os dois eixos coordenador Ox e Oy, então para isso na barra de ferramentas selecionamos a opção *reta*. Pela sequência da construção a última opção usada neste grupo foi segmento, portanto na barra de ferramentas dar um duplo clique na opção segmento que em seguida aparecerá um menu suspenso com a opção de reta, neste caso para determinar uma reta precisamos de dois pontos distintos, marque o primeiro sobre o eixo Ox e o segundo no eixo Oy, criando respectivamente os pontos D e E e a reta c. Figura 5.14

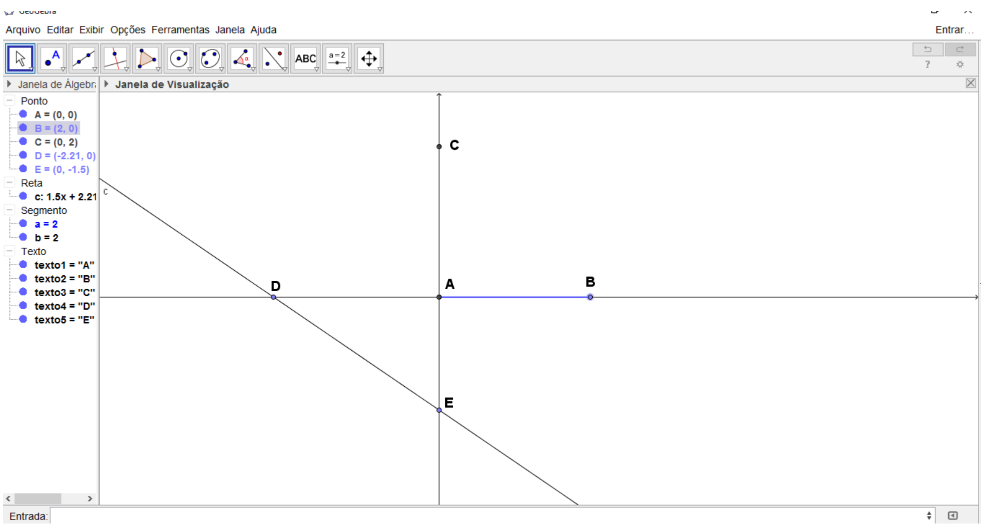


Figura 5.14: Determinação da reta que corta os eixos coordenados Ox e Oy.

Na caixa de ferramentas, selecione a ferramenta *Reta Perpendicular*, clique na reta c e em seguida no ponto D e depois novamente na reta c e agora no ponto E, então criamos as retas perpendiculares a c que passam por D e E, marque também o ponto de interseção entre as retas perpendiculares criadas e os eixos coordenados Ox e Oy, usando a ferramenta *Interseção de Dois Objetos*, logo teremos os pontos F e G. Figura 5.15

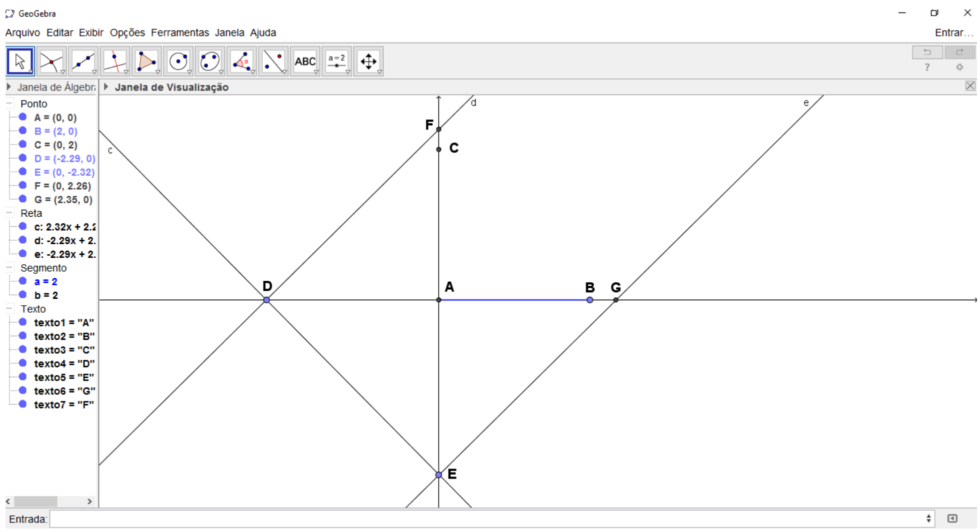


Figura 5.15: Criação de retas perpendiculares a reta c nos pontos D e E.

Agora construa os segmentos DF, DE, EG e AE, então vamos ocultar as retas criadas c, d e e. Em propriedades modificamos a cor e espessura do segmento AE. Figura 5.16

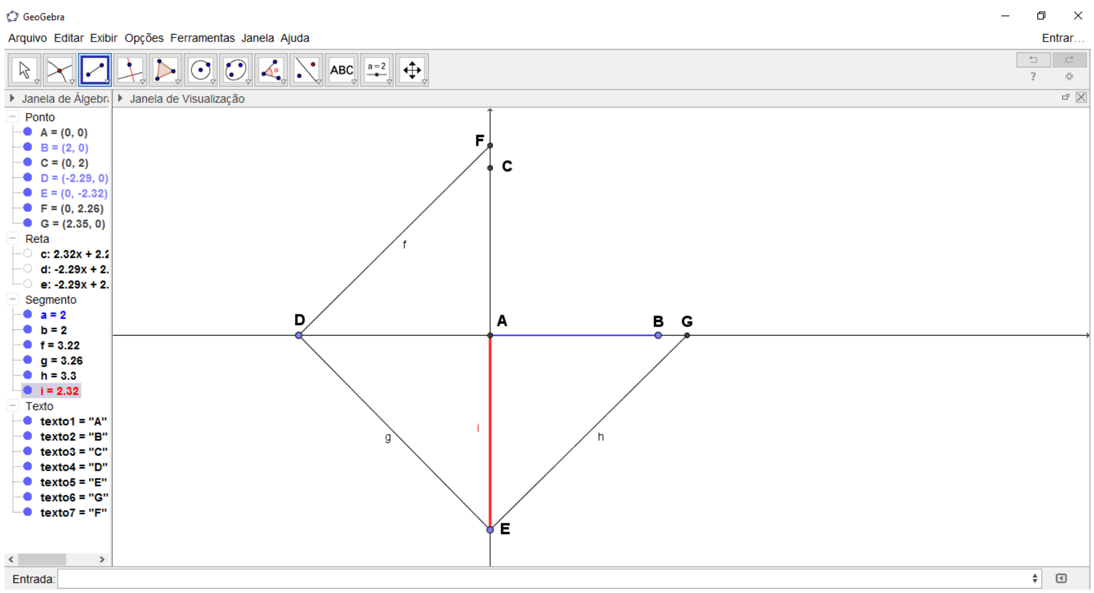


Figura 5.16: Criação dos segmentos para simular um esquadro.

Os pontos D e E podem ser movidos sobre os eixos coordenados xOy, de modo a simular um esquadro, o objetivo é que movimentando estes pontos consigamos fazer coincidir os pontos F com C e B com G, feito isso, o segmento AE será a aresta do cubo procurado, ou seja, um cubo com volume duplo em relação ao cubo de aresta inicial dada (segmento AB). Para facilitar o posicionamento dos pontos que devem coincidir, bem como as arestas dos cubos dado e procurado escrevemos textos e adicionamos seus respectivos valores na janela de visualização, para isso basta ir em *Texto* na barra de ferramentas e clicar na janela de visualização, abrirá uma nova janela onde poderá ser digitado o texto e um campo objeto onde pode ser inserido os valores de todos os objetos criados (pontos, segmentos, números), bem como podemos configurar a quantidade de casas decimais a ser exibida no menu *opções* e em seguida *arredondamentos* e adaptar o incremento na movimentação dos pontos D e E clicando com o botão direito no ponto, indo em *propriedades*, na aba *álgebra* opção *incremento*. Figura 5.17.

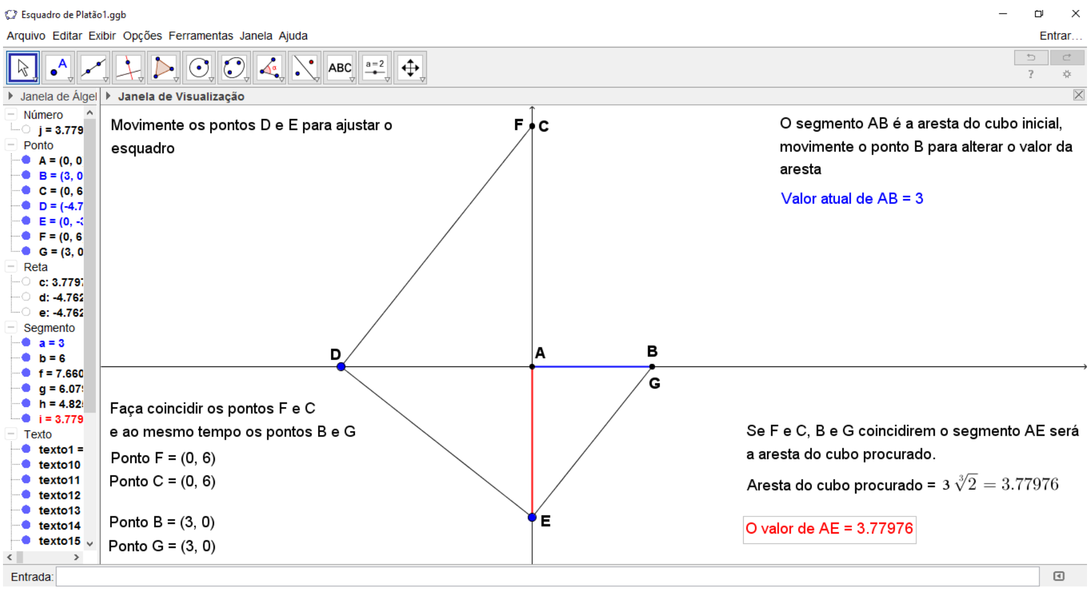


Figura 5.17: Esquadro de Platão devidamente posicionado gerando as proporções desejadas.

Considerações Finais

Espero que o estudo da história da matemática seja um meio ao qual desperte o interesse e a curiosidade dos alunos para o aprendizado da matemática, pelo fato de trazer a origem de um problema e as tentativas de solucioná-lo, apresentando variadas formas de pensamento e métodos de resolvê-lo ou ainda de mostrar que não há solução, que é o caso da duplicação do cubo utilizando apenas as ferramentas euclidianas. No início do trabalho o problema apresenta-se de forma puramente geométrica, contudo no decorrer observamos que outros conceitos são abordados, como a geometria analítica e álgebra. Por fim, como nos dias atuais dispomos de recursos tecnológicos, computadores, tablets, celulares que são minicomputadores, e isso está bem difundido entre os estudantes, torna-se viável dar versões de construções virtuais, dispondo desses recursos, que é o caso da reprodução de duas ferramentas mecânicas propostas como solução ao problema ainda na Grécia antiga, com isso é possível utilizar conceitos geométricos, algébricos e analíticos, em ambientes dinâmicos que propiciem o aprendizado.

Referências Bibliográficas

[1] MILIES, F. C. P.; BUSSAD, J. H. O. *A Geometria na Antiguidade Clássica*. São Paulo: FDT Editora, 1999.

[2] BORBA, M. C. Tecnologias da informática na educação matemática e reorganização do pensamento. In: BICUDO, M. A. V. *Pesquisa em educação matemática: Concepções e perspectivas*. São Paulo: UNESP, 1999.

[3] BOYER, C. B. *História da matemática*. São Paulo: E. Blucher, 1974.

[4] CAJORI, F. *Uma história da matemática*. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2007.

[5] COURANT, R.; ROBBINS, H. *O que é matemática: uma abordagem elementar de métodos e conceitos*. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2000.

[6] SOUZA, C. M. de.; ARAÚJO, M. P. S. de.; ANDRADE, V. L. V. X. de. As três últimas tentativas da duplicação do cubo. In: IX ENEM. *Encontro Nacional de Educação Matemá. Diálogos entre a Pesquisa e a Prática Educativa*. Belo Horizonte, 2007.

[7] EVES, H. W.; DOMINGUES, H. H. *Introdução à história da matemática*. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.

[8] REIS, F. E.; ALMEIDA, D. M. de. Um estudo introdutório sobre cissoide. *Famat em revista*, Uberlândia, MG, n. 11, 2008. Disponível em: <http://www.famat.ufu.br>. Acesso em: 02 de mar. de 2016.

[9] FONTES, H. C. O. *Poliedros regulares e suas extensões*. Rio de Janeiro: Gráfica Editôra Livro, 1968.

[10] GARBI, G. G. *A Rainha das Ciências*. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2006.

[11] TEIXEIRA, A. S. Corpos numéricos e a duplicação do cubo. 2013. Disponível em: <http://elementosdeteixeira.blogspot.com.br/2013/01/103-corpos-numericos-e-duplicacao-do.html>. Acesso em: 21 de fev. de 2016.