Aproximação Polinomial de Funções

Autor: Fabio Henrique Teixeira de Souza
Orientador: Marcelo Viana

15 de Março de 2016

Conteúdo

1 A Interpretação Geométrica da Derivada **5**
1.1 Da Reta Secante à Reta Tangente . . . 5
1.2 A Definição da Derivada . . . 6
1.3 Interpretando os Sinais da Derivada . . . 7

2 Derivadas de Funções Notáveis **9**
2.1 Função Polinomial de 1º Grau . . . 9
2.2 Função Polinomial de 2º Grau . . . 10
2.3 Função Polinomial de 3º Grau . . . 10
2.4 Função Polinomial de n-ésimo Grau . . . 10
2.5 Função e^x . . . 11
2.6 Função $sen(x)$ . . . 12
2.7 Função $cos(x)$ . . . 15
2.8 Um Exemplo Cinemático . . . 16

3 A Derivada Segunda **17**

4 Polinômios Aproximadores **19**
4.1 Utilizando Funções Polinomiais de 1º Grau . . . 19
4.2 Utilizando Funções Polinomiais de 2º Grau . . . 22

5 Polinômios Aproximadores na Prática **24**
5.1 Utilizando Polinômios Aproximadores de 1º Grau . . . 24
5.1.1 Calcular a raiz quadrada de 17 . . . 24
5.1.2 Calcular e elevado a 0,5 . . . 25
5.1.3 Calcular o seno de 0,1 radiano . . . 25
5.2 Utilizando Polinômios Aproximadores de 2º Grau . . . 26
5.2.1 Calcular a raiz quadrada de 17 . . . 26
5.2.2 Calcular e elevado a 0,5 . . . 27
5.2.3 Calcular o seno de 0,1 radiano . . . 27
5.3 Problema Proposto . . . 27

A Resolvendo o problema proposto **28**

Lista de Figuras **29**

Bibliografia **30**

Resumo

Este trabalho discorre sobre como as imagens de uma função $f(x)$ contínua e derivável podem ser aproximadas utilizando-se suas derivadas em polinômios de graus quaisquer. No primeiro capítulo, apresentam-se a definição da derivada e a sua interpretação geométrica fazendo com que uma reta secante ao gráfico da função $f(x)$ tenda a uma reta tangente. Conclui-se esse capítulo com um estudo acerca da interpretação dos sinais da derivada. No segundo capítulo, utiliza-se a definição da derivada para demonstrar as regras de derivação das funções que serão apresentadas e utilizadas neste trabalho. No terceiro capítulo, faz-se um estudo sobre os sinais da segunda derivada e as suas interpretações. No quarto capítulo, mostra-se como obter as tais aproximações de $f(x)$ utilizando-se polinômios de 1º e de 2º graus. Ao final do capítulo, apresenta-se a forma genérica do Polinômio de Taylor. As atividades propostas em classe para o aprendizado e a fixação do tema estudado são apresentadas no quinto e último capítulo.

Palavras-chave: Derivadas, Aproximações, Polinômios, Taylor.

Agradecimentos

Deus e aqueles que me rodeiam sabem quão difícil foi-me obter o grau de Mestre. Agradeço-lhes por terem acreditado e me incentivado mesmo quando meu ânimo já estava arrefecido.

Em especial agradeço ao meu filho, Gabriel Leal, que, mesmo tomado pelos seus estudos no curso de Engenharia Mecânica, teve fôlego para cuidar dos bastidores do nosso lar. Sem ele, eu teria passado maus bocados.

Agradeço ainda, pelas importantes revisões feitas, aos amigos André Luiz Rodrigues Chaves Marques, Fabiano Alberton Nogueira e Thiago Maciel de Oliveira.

Agradeço aos Professores Marcelo Viana e Roberto Imbuzeiro. Este, por me incentivar a levar adiante este trabalho. Aquele, por ter aceitado me orientar - o que muito me envaideceu.

Agradeço aos meus amigos da Turma Profmat / IMPA (2014-2015), que muito me apoiaram durante o curso e que são verdadeiros torcedores pelo meu sucesso. Tornamo-nos uma família.

Agradeço aos alunos Antônio Rocha Azevedo, Paulo Bessa do Rego Monteiro, Matheus Guimarães de Moura e Breno Trindade Tostes por terem, mesmo atarefados com os compromissos inerentes a um vestibulando, dedicado seu precioso tempo a essa iniciativa. Igual gratidão devo ao Colégio São Vicente de Paulo que colaborou cedendo o espaço para essas atividades.

Agradeço à minha mãe Selma pela esmerada educação que me deu e ao meu pai Paulo Roberto por me fazer amar o conhecimento. Ele estaria orgulhoso de mim se vivo estivesse.

Finalmente, agradeço ao professor Victor Giraldo, um amigo com quem muito aprendi. A ideia que originou esse trabalho surgiu, há muitos anos, enquanto eu assistia a sua aula sobre Polinômios de Taylor.

Introdução

Habitualmente, costumo lecionar, para alunos do Ensino Médio das escolas em que trabalho, tópicos de Cálculo Diferencial e Integral pertencentes às ementas das disciplinas Cálculo I e Cálculo II oferecidas na maioria dos cursos superiores de Engenharia e Matemática do Rio de Janeiro. Esse curso é opcional e acontece em horários não utilizados pela grade curricular ordinária dessas escolas. São aceitos alunos de quaisquer séries do Ensino Médio e o único pré-requisito é a vontade de aprender.

Os objetivos desse curso em paralelo são:

- propiciar ao estudante interessado um primeiro contato, ainda que superficial, com este tema da matemática;
- permitir que os alunos participantes tenham bom desempenho quando cursarem as disciplinas de Cálculo I e Cálculo II.

O trabalho desenvolvido com essas classes evita, sempre que possível, conteúdos ou demonstrações relacionados ao estudo da *Análise na Reta*. Isso porque, por experiência própria, tanto como aluno dos cursos de graduação em Engenharia e Matemática, quanto no exercício do magistério, estou convicto de que o aparecimento precoce da *Análise* dificulta a compreensão e, consequentemente, afasta o estudante daquilo que é, na minha modesta opinião, uma das maiores invenções da humanidade: o Cálculo.

Esta monografia tem por finalidade apresentar um recorte do trabalho desenvolvido com esses alunos.

Capítulo 1

A Interpretação Geométrica da Derivada

Este capítulo terá por objetivo apresentar $f'(x)$ − a derivada de uma função $f(x)$ − como sendo a lei que calcula, em função de x, o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de $f(x)$. Esse capítulo também será dedicado à apresentação da definição de derivada. Tal definição será obtida a partir da interpretação geométrica da derivada.

Durante todo o trabalho, serão utilizadas apenas funções contínuas e deriváveis.

1.1 Da Reta Secante à Reta Tangente

Considere uma função contínua e derivável $f(x)$ e o seu gráfico.

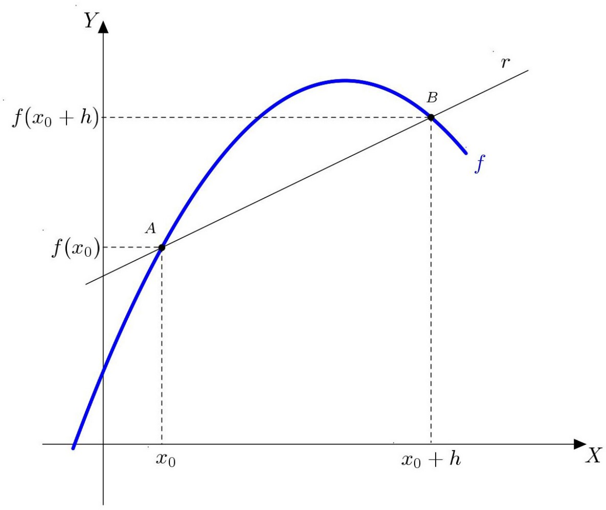

Figura 1.1: Reta Secante

Sejam $A = (x_0, f(x_0))$ e $B = (x_0 + h, f(x_0 + h))$ pontos pertencentes a esse gráfico e seja h a diferença entre as abscissas de A e B. Chamemos r à reta que passa por A e B intersectando o gráfico de $f(x)$ nesses pontos. Essa reta é dita uma *reta secante* ao gráfico.

Toda reta, que não seja uma reta vertical[1], pode ser associada à equação

$$y = mx + p \tag{1.1}$$

[1]Retas verticais não possuem coeficientes angulares e são descritas na forma $x = k$, de modo que uma tal reta é a reunião de todos os pontos do plano cartesiano que possuem abscissa igual a k.

em que m é dito o *coeficiente angular da reta* e corresponde à taxa de variação média de y em relação à variação de x.

No nosso exemplo, o coeficiente angular de r é dado, em função de h, por

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{(x_0 + h) - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}. \tag{1.2}$$

Agora imagine que o ponto A esteja fixo enquanto o ponto B desloca-se, ao encontro do ponto A, por sobre o gráfico de $f(x)$. Conforme o ponto B vai mudando de posição sobre a curva, o valor de h diminui e vai se aproximando de zero. Nesse caso, diz-se que *a reta r está tendendo a uma reta tangente.*

1.2 A Definição da Derivada

Considere a reta que tangencia o gráfico da função $f(x)$ no ponto A.

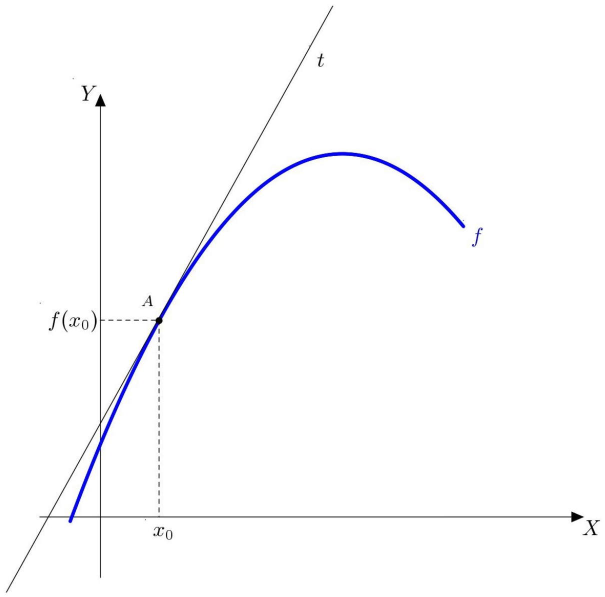

Figura 1.2: Reta Tangente

O coeficiente angular dessa *reta tangente* corresponde ao valor da *derivada de $f(x)$ no ponto A*. Dado que a abscissa de A é x_0, representa-se esse coeficiente angular por $f'(x_0)$ e seu valor é dado por

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}. \tag{1.3}$$

Assim como o coeficiente angular da *reta secante* corresponde à taxa de variação **média** de y em relação à variação de x, de forma análoga, o coeficiente angular da *reta tangente* corresponde à taxa de variação **instantânea** de y em relação à variação de x.

Vale observar que, durante o estudo da Cinemática, alunos do Ensino Médio sempre calculam velocidades médias de corpos em movimento, mas raramente calculam suas velocidades instantâneas. Isso acontece porque o cálculo de derivadas não faz parte dos currículos convencionais de Física e Matemática para o Ensino Médio. Entretanto, as velocidades instantâneas podem ser calculadas sem que o estudo formal das derivadas faça parte da grade de conteúdos, bastando que os alunos sejam convencidos a calcular a velocidade média em um intervalo de tempo "muito pequeno, tão pequeno quanto desejemos".

1.3 Interpretando os Sinais da Derivada

Como visto na seção 1.2:

> *A derivada de f em x_0 – representada por $f'(x_0)$ – corresponde ao coeficiente angular da reta que tangencia o gráfico da função f no ponto cuja abscissa é x_0*

e esse coeficiente angular, por sua vez, indica a taxa de variação instantânea de f nesse ponto. O valor de $f'(x_0)$ pode ser:

- positivo: a taxa de variação instantânea é positiva. Logo, a reta tangente é crescente neste ponto e, consequentemente, o valor de $f(x)$ está aumentando à medida que x aumenta;

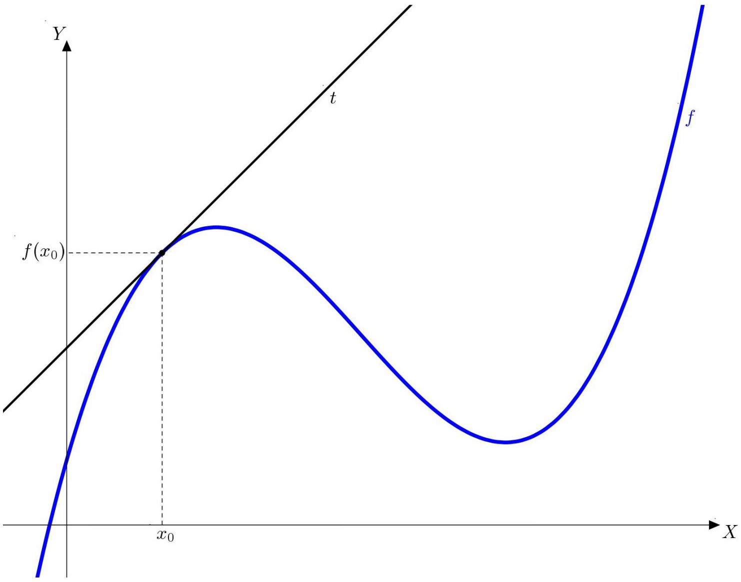

Figura 1.3: Derivada positiva no ponto $(x_0, f(x_0))$

- negativo: a taxa de variação instantânea é negativa. Logo, a reta tangente é decrescente neste ponto e, consequentemente, o valor de $f(x)$ está diminuindo à medida que x aumenta;

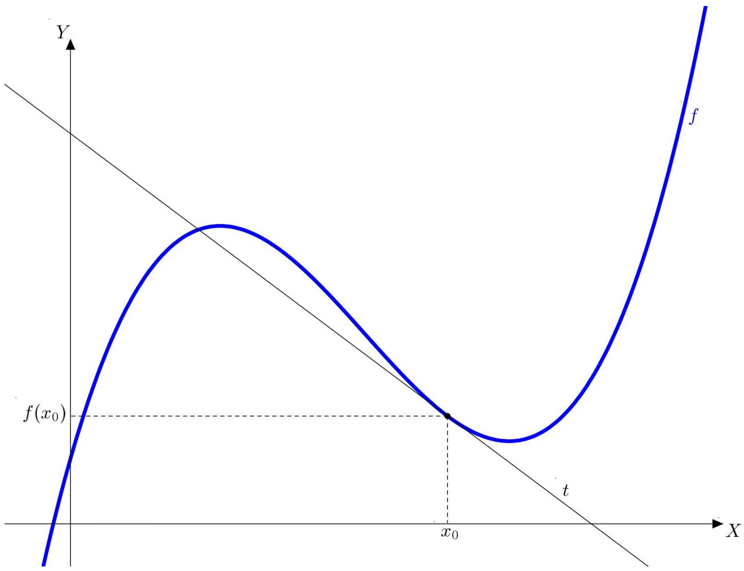

Figura 1.4: Derivada negativa no ponto $(x_0, f(x_0))$

- nulo: a taxa de variação instantânea é nula. Logo, a reta tangente é **horizontal** nesse ponto. Nesse caso, a função f **pode ter atingido** um ponto de *máximo local* ou de *mínimo local*.

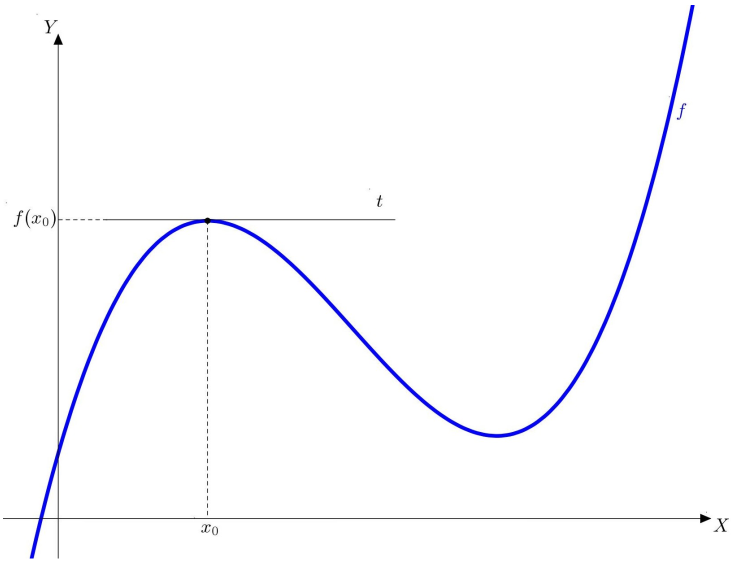

Figura 1.5: Derivada Nula - Máximo Local

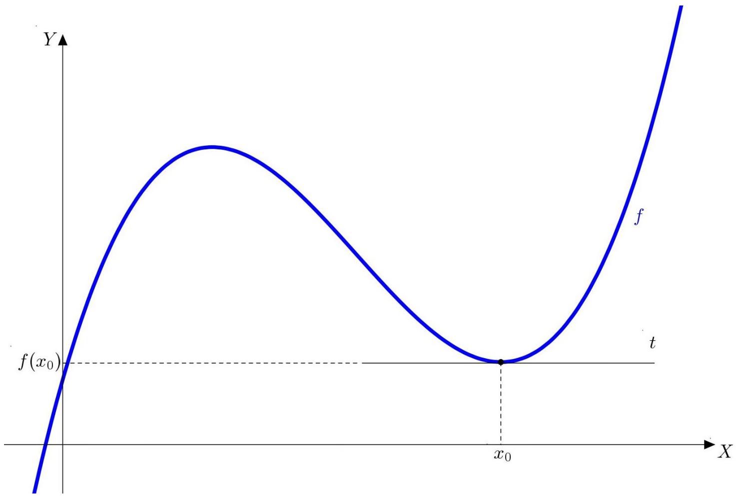

Figura 1.6: Derivada Nula - Mínimo Local

O caso em que $f'(x_0)$ é nulo configura-se numa importante ferramenta para a resolução de diversos problemas, como o de se obter máximos e mínimos locais de uma função ou ainda de se descobrir em que instante um móvel modifica seu movimento de progressivo para retrógrado, ou de retrógrado para progressivo[2].

[2]Ver exemplo ao final do Capítulo 2.

Capítulo 2

Derivadas de Funções Notáveis

Neste capítulo, a definição da derivada será utilizada para calcular as derivadas de algumas funções reais contínuas e deriváveis comumente utilizadas:

- função polinomial de grau qualquer;
- função e^x;
- função $sen(x)$.

Para o cálculo da derivada de uma função através da definição, é necessário recorrer à aplicação de limites. Propositalmente, o trabalho desenvolvido com os alunos não trata desse tópico de maneira formal. Por esse motivo, essa dissertação também não o fará.

Em geral, os alunos participantes já tiveram a oportunidade de se deparar com a idéia de *limite de uma soma* ao estudarem Progressões Geométricas. Em uma P.G., cada vez que um termo é acrescentado ao somatório de todos os termos que o antecedem, um novo resultado S_n é obtido. Respeitada a condição de que a sua razão esteja entre -1 e 1, a sequência $\{S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n, S_{n+1}, \ldots\}$ se aproxima de um valor L sem necessariamente atingi-lo. Esse valor L é o *limite da soma dos termos da Progressão Geométrica* e pode ser calculado por

$$L = \frac{a}{1-q}$$

em que a e q são, respectivamente, o primeiro termo e a razão da P.G. Além disso, tais limites não requerem técnicas avançadas para a sua obtenção. Pelas razões apresentadas, os limites são calculados, nesse curso, de modo intuitivo ou através de recursos computacionais.

2.1 Função Polinomial de 1º Grau

Uma função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dita *Polinomial de 1º Grau* quando a sua lei tem a forma

$$f(x) = Ax + B, \tag{2.1}$$

em que A e B são constantes reais, com $A \neq 0$. Aplicando-se a definição de derivada apresentada na seção 1.2, temos

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{[A(x+h)+B]-[Ax+B]}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{Ax+Ah+B-Ax-B}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{Ah}{h} = \lim_{h\to 0} A = A. \end{aligned}$$

A interpretação desse resultado é que, nas funções de 1º grau, a taxa de variação instantânea é constante. De fato, como o gráfico de uma função polinomial de 1º grau é uma reta, esta coincide com todas as retas que o tangenciam.

2.2 Função Polinomial de 2º Grau

Uma função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dita *Polinomial de 2º Grau* quando a sua lei tem a forma

$$f(x) = Ax^2 + Bx + C, \tag{2.2}$$

em que A, B e C são constantes reais, com $A \neq 0$. Aplicando-se a definição de derivada apresentada na seção 1.2, temos

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{[A(x+h)^2 + B(x+h) + C] - [Ax^2 + Bx + C]}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{[Ax^2 + 2Axh + Ah^2 + Bx + Bh + C] - [Ax^2 + Bx + C]}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{[2Axh + Ah^2 + Bh]}{h} = \lim_{h\to 0}[2Ax + Ah + B] = 2Ax + B.
\end{aligned}$$

Portanto, dada uma função polinomial de 2º grau cuja lei é $f(x) = Ax^2 + Bx + C$, se uma reta t tangencia o gráfico dessa função no ponto $(x_0, f(x_0))$, então o **coeficiente angular** de t é $2Ax_0 + B$.

2.3 Função Polinomial de 3º Grau

Uma função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dita *Polinomial de 3º Grau* quando a sua lei tem a forma

$$f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D, \tag{2.3}$$

em que A, B, C e D são constantes reais, com $A \neq 0$. Aplicando-se a definição de derivada apresentada na seção 1.2, temos

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{[A(x+h)^3 + B(x+h)^2 + C(x+h) + D] - [Ax^3 + Bx^2 + Cx + D]}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{[Ax^3 + 3Ax^2h + 3Axh^2 + Ah^3 + Bx^2 + 2Bxh + Bh^2 + Cx + Ch + D] - [Ax^3 + Bx^2 + Cx + D]}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{[3Ax^2h + 3Axh^2 + Ah^3 + 2Bxh + Bh^2 + Ch]}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0}[3Ax^2 + 3Axh + Ah^2 + 2Bx + Bh + C] = 3Ax^2 + 2Bx + C.
\end{aligned}$$

Portanto, dada uma função polinomial de 3º grau cuja lei é $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$, se uma reta t tangencia o gráfico dessa função no ponto $(x_0, f(x_0))$, então o **coeficiente angular** de t é $3Ax_0^2 + 2Bx_0 + C$.

2.4 Função Polinomial de n-ésimo Grau

Uma função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dita *Polinomial de n-ésimo Grau* quando a sua lei tem a forma

$$f(x) = A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + \cdots + A_2x^2 + A_1x + A_0, \tag{2.4}$$

em que n é constante natural, as demais constantes A_n, $A_{n-1}, \cdots, A_1$ e A_0 são reais e $A_n \neq 0$. Para que o objetivo desta seção seja atingido com maior facilidade, considere

$$A_{n-1} = A_{n-2} = \cdots = A_2 = A_1 = A_0 = 0$$

e

$$A_n = A \neq 0.$$

Portanto, será calculada a derivada da função de grau n dada por $f(x) = Ax^n$
Aplicando-se a definição de derivada apresentada na seção 1.2, temos

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{[A(x+h)^n] - [Ax^n]}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{[A(x^n + C_n^{n-1}x^{n-1}h + C_n^{n-2}x^{n-2}h^2 + \cdots + C_n^1 x h^{n-1} + h^n)] - [Ax^n]}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{[A(x^n + nx^{n-1}h + C_n^{n-2}x^{n-2}h^2 + \cdots + nxh^{n-1} + h^n)] - [Ax^n]}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{A(nx^{n-1}h + C_n^{n-2}x^{n-2}h^2 + \cdots + nxh^{n-1} + h^n)}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0} A(nx^{n-1} + C_n^{n-2}x^{n-2}h + \cdots + nxh^{n-2} + h^{n-1}) = Anx^{n-1}. \end{aligned}$$

Logo, dada uma função contínua cuja lei corresponde ao monômio de n-ésimo grau $f(x) = Ax^n$, a sua derivada é dada por $f'(x) = Anx^{n-1}$. Com isso, percebemos que há uma regra de derivação aplicável a cada monômio de uma função polinomial, independente de qual seja o grau n desse monômio. Essa regra compõe-se dos seguintes itens:

- o expoente de x sofre redução de uma unidade;
- o coeficiente do novo monômio é o coeficiente do monômio original multiplicado por n.

A seguir, serão feitas algumas observações importantes.

1ª Observação: a função constante $f(x) = A$ pode ser considerada como a função polinomial $f(x) = A \cdot x^0$. Dessa forma, a sua derivada é $f'(x) = A \cdot 0 \cdot x^{-1} = 0$. Ou seja, a derivada de uma função constante é *zero* − o que faz todo sentido. Afinal, se uma função é constante, não sofre variações. E se não as sofre, sua taxa de variação é nula!

2ª Observação: a regra de derivação apresentada acima mantém-se válida mesmo para $n \in \mathbb{R}$.

3ª Observação: dadas duas (ou mais) funções contínuas e deriváveis, a derivada da soma dessas funções é igual a soma das derivadas de cada uma delas. Portanto, dada a função polinomial $f(x) = A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + \cdots + A_2x^2 + A_1x + A_0$, essa função pode ser considerada como uma soma de $n+1$ funções monomiais como segue:

$$f(x) = g_n(x) + g_{n-1}(x) + \cdots + g_2(x) + g_1(x) + g_0(x).$$

e a sua derivada é:

$$f'(x) = g'_n(x) + g'_{n-1}(x) + \cdots + g'_2(x) + g'_1(x) + g'_0(x).$$

Essas duas últimas observações não serão demonstradas por fugir do escopo dessa dissertação, mas são fundamentais para a consistência deste texto.

2.5 Função e^x

Como foi dito na Introdução deste texto, o que se apresenta aqui é apenas um recorte do trabalho desenvolvido com essas classes extracurriculares. Uma das atividades iniciais nessas classes é calcular, com o auxílio de programação em Excel, o valor de $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ para valores cada vez maiores de x. Fixada a quantidade de casas decimais do valor retornado pelo *software*, há um momento, na tarefa, em que estes *outputs* não sofrem variação ainda que os valores atribuídos a x sejam aumentados. Com isso, de forma empírica, os alunos acabam por concluir que

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = 2,718281...$$

e aprendem que essa constante irracional − resultado do limite − é representada pela letra e e denominada *número neperiano* − devido a John Napier − ou *número de Euler*. Essa atividade é encerrada aplicando-se a mudança de variável $y = \frac{1}{x}$ sobre esse resultado. A conclusão dessa tarefa é que:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}} = \mathrm{e} \tag{2.5}$$

Na função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \mathrm{e}^x$, a variável real x encontra-se no expoente e e é a constante supracitada. Para calcular sua derivada, aplicar-se-á, mais uma vez, a definição de derivada apresentada na seção 1.2.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x+h}-\mathrm{e}^x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\mathrm{e}^x\cdot\mathrm{e}^h-\mathrm{e}^x}{h} = \lim_{h\to 0}\mathrm{e}^x\cdot\frac{\mathrm{e}^h-1}{h}$$

Note que, no cálculo desse limite, $h \to 0$. Portanto, e^x pode ser tratado como uma constante porque independe de h. Sendo assim:

$$f'(x) = \mathrm{e}^x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\mathrm{e}^h-1}{h} \tag{2.6}$$

e agora, será preciso calcular $\lim_{h\to 0}\frac{\mathrm{e}^h-1}{h}$. Para isso, far-se-á a mudança de variável $y = \mathrm{e}^h - 1$, que permite as seguintes conclusões:

$$y = \mathrm{e}^h - 1 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{e}^h = y+1 \tag{2.7}$$

$$ln(\mathrm{e}^h) = h \quad \Rightarrow \quad ln(y+1) = h \tag{2.8}$$

Observando-se a mudança de variável proposta, percebe-se que $h \to 0$ implica $y \to 0$. Logo, substituindo-se (2.7) e (2.8) no limite que se deseja calcular e, em seguida, aplicando-se (2.5):

$$\lim_{h\to 0}\frac{\mathrm{e}^h-1}{h} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{ln(y+1)} = \lim_{y\to 0}\frac{1}{\frac{1}{y}\cdot ln(y+1)} = \lim_{y\to 0}\frac{1}{ln(y+1)^{\frac{1}{y}}} = \frac{1}{ln(\mathrm{e})} = 1$$

Finalmente, substituindo-se esse resultado em (2.6), conclui-se que a derivada da função $f(x) = \mathrm{e}^x$ é:

$$f'(x) = \mathrm{e}^x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\mathrm{e}^h-1}{h} = \mathrm{e}^x\cdot 1 = \mathrm{e}^x$$

Esse cálculo fornece um resultado surpreendente para quem o faz pela primeira vez: a função derivada de $f(x) = \mathrm{e}^x$ é a própria função $f(x)$. Não será demonstrado neste texto, mas $f(x) = \mathrm{e}^x$ é a **única** [1] função com tal propriedade. Ou seja, apenas essa função tem sua variação proporcional a ela mesma, o que a torna especial para modelagens em diversos campos do conhecimento.

2.6 Função $sen(x)$

Dando continuidade ao esclarecimento feito no início da seção 2.5, outra atividade desenvolvida ao longo do curso é calcular $\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)}{x}$. Isso é feito com o auxílio de uma imagem construída no Geogebra, mas também conta com a intuição dos alunos.

Via de regra, os participantes já conhecem o *Ciclo Trigonométrico* e as funções que se definem sobre essa ferramenta − entre elas, a função seno. Com o auxílio do Geogebra, constroi-se o ciclo trigonométrico de raio unitário $\overline{OA}$. Escolhendo-se um ponto B sobre a circunferência, determina-se um ângulo $A\hat{O}B$ cuja medida, em radianos, vale x. Esse ângulo define, sobre o ciclo, um arco $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ de comprimento h. Chama-se $sen(x)$ ao segmento vertical $\overline{AC}$.

[1] A menos de uma constante multiplicando f, pois, por exemplo, a derivada de $f(x) = 2\mathrm{e}^x$ é $f'(x) = 2\mathrm{e}^x$.

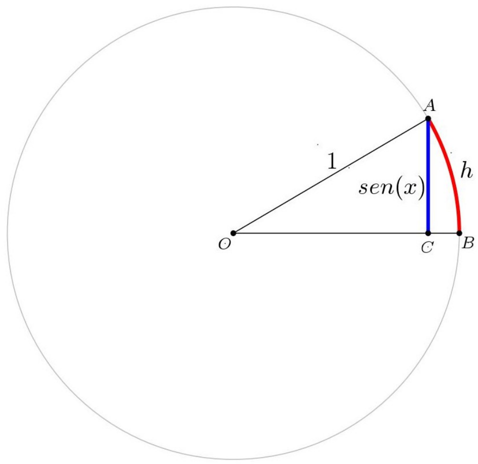

Figura 2.1: Arco de medida h e $sen(x)$

Em seguida, move-se o ponto A por sobre a circunferência de modo a aproximá-lo do ponto B, o que faz com que a medida x diminua cada vez mais, tendendo a zero. A consequência disso é que os comprimentos do arco $\widehat{\mathrm{AB}}$ e do segmento $\overline{AC}$ também vão diminuindo.

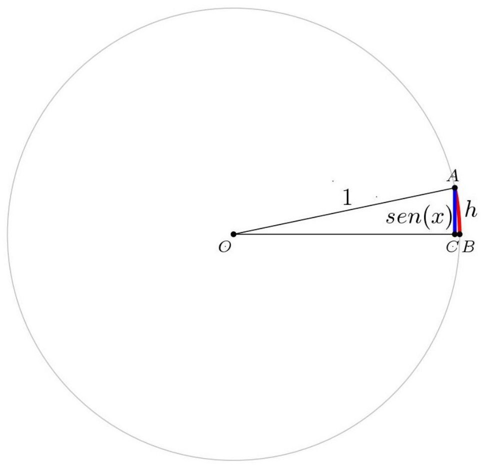

Figura 2.2: Medida x tendendo a zero

Conforme x vai sendo reduzido, os alunos são levados a comparar esses comprimentos e a concluir intuitivamente que eles tendem a ficar do mesmo tamanho. Independente de os alunos chegarem ou não a essa conclusão, a atividade é encerrada com a utilização da ferramenta do Geogebra que mede comprimentos de arcos e de segmentos.

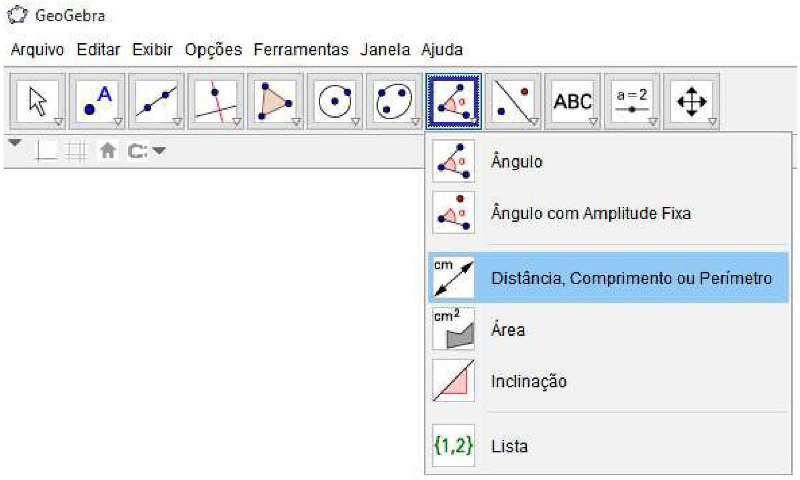

Figura 2.3: Geogebra: Medindo Comprimentos

Essa ferramenta vai mostrando simultaneamente os comprimentos de $\widehat{AB}$ e $\overline{AC}$ enquanto a medida x de $A\hat{O}B$ vai sendo reduzida. Para valores de x próximos de zero, a ferramenta mostra valores iguais para os comprimentos de $\widehat{AB}$ e $\overline{AC}$. Isso não prova que, de fato, eles tendem a ficar do mesmo tamanho, mas dá um pouco mais de consistência à conclusão obtida intuitivamente.

Essa atividade tem por objetivo final **convencer** os alunos de que

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)}{x}=1. \tag{2.9}$$

Também no Ensino Médio, os alunos, ao avançarem em seus estudos sobre Trigonometria, aprendem que:

$$sen(a+b)=sena\cdot cosb+senb\cdot cosa \tag{2.10}$$

$$sen(a-b)=sena\cdot cosb-senb\cdot cosa \tag{2.11}$$

Subtraindo-se (2.11) de (2.10) tem-se:

$$sen(a+b)-sen(a-b)=2\cdot senb\cdot cosa \tag{2.12}$$

Considerando-se $a+b=p$ e $a-b=q$, conclui-se que $a=\frac{p+q}{2}$ e $b=\frac{p-q}{2}$. Substituindo-se esses resultados em (2.12), será promovida uma mudança nas variáveis que conduz a:

$$senp-senq=2\cdot sen\left(\frac{p-q}{2}\right)\cdot cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \tag{2.13}$$

que é uma das expressões conhecidas como *Fórmulas de Prostaférese*[2].

Agora temos as ferramentas necessárias para calcular a derivada da função $f(x)=sen(x)$. Inicialmente, apliquemos a definição de derivada apresentada na seção 1.2 obtendo a expressão:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{sen(x+h)-senx}{h}.$$

[2]Do grego, algo correspondente a 'subtração prévia'. As Fórmulas de Prostaférese são utilizadas para transformar produtos em somas ou diferenças. Antes da invenção dos logaritmos, uma técnica para multiplicar dois números A e B era adaptar seus sinais e posições de vírgulas para que se transformassem em números A' e B' compreendidos entre 0 e 1. Assim era possível encontrar, numa tábua trigonométrica, arcos a e b tais que $sen(a)=A'$ e $cos(b)=B'$. Em seguida, usando a mesma tábua no sentido contrário, era possível encontrar os senos de $a+b$ e de $a-b$. De acordo com (2.13), a metade da diferença desses senos corresponde ao produto $A'\cdot B'$

Em seguida, considerando $x + h = p$ e $x = q$, podemos aplicar (2.13) e escrever

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{2}{h} \cdot \left[sen\left(\frac{h}{2}\right) \cdot cos\left(\frac{2x+h}{2}\right)\right] = \lim_{h\to 0} \frac{2}{h} \cdot \left[sen\left(\frac{h}{2}\right) \cdot cos\left(x + \frac{h}{2}\right)\right].$$

Para uma melhor visualização do recurso a ser utilizado, faremos $t = \frac{h}{2}$. Note que, quando h tende a zero, t também tende a zero. Assim

$$f'(x) = \lim_{t\to 0} \left[\frac{sen(t)}{t} \cdot cos(x+t)\right]. \tag{2.14}$$

Aplicando-se (2.9), conclui-se que

$$f'(x) = 1 \cdot cos(x+0) = cos(x). \tag{2.15}$$

Portanto, se $f(x) = sen(x)$, a derivada dessa função é dada por $cos(x)$.

2.7 Função $cos(x)$

De forma análoga ao que foi feito na seção (2.6), utilizar-se-á uma das Fórmulas de Prostaférese. Para isso, tomam-se as seguintes expressões já conhecidas da Trigonometria:

$$cos(a+b) = cosa \cdot cosb - sena \cdot senb \tag{2.16}$$

$$cos(a-b) = cosa \cdot cosb + sena \cdot senb \tag{2.17}$$

Subtraindo-se (2.17) de (2.16) tem-se:

$$cos(a+b) - cos(a-b) = -2 \cdot sena \cdot senb \tag{2.18}$$

Considerando-se $a + b = p$ e $a - b = q$, conclui-se que $a = \frac{p+q}{2}$ e $b = \frac{p-q}{2}$. Substituindo-se esses resultados em (2.18), será promovida uma mudança nas variáveis que conduz a:

$$cosp - cosq = -2 \cdot sen\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot sen\left(\frac{p-q}{2}\right) \tag{2.19}$$

Agora podemos calcular a derivada da função $f(x) = cos(x)$. Inicialmente, apliquemos a definição de derivada apresentada na seção 1.2 obtendo a expressão:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{cos(x+h) - cosx}{h}.$$

Em seguida, considerando $x + h = p$ e $x = q$, podemos aplicar (2.19) e escrever

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{-2}{h} \cdot \left[sen\left(\frac{2x+h}{2}\right) \cdot sen\left(\frac{h}{2}\right)\right] = \lim_{h\to 0} \frac{-2}{h} \cdot \left[sen\left(x + \frac{h}{2}\right) \cdot sen\left(\frac{h}{2}\right)\right].$$

Para uma melhor visualização do recurso a ser utilizado, trocaremos $t = \frac{h}{2}$. Note que, quando h tende a zero, t também tende a zero. Assim

$$f'(x) = -\lim_{t\to 0} \left[sen(x+t) \cdot \frac{sen(t)}{t}\right]. \tag{2.20}$$

Aplicando-se (2.9), conclui-se que

$$f'(x) = -sen(x+0) \cdot 1 = -sen(x). \tag{2.21}$$

Portanto, se $f(x) = cos(x)$, então a derivada dessa função é dada por $-sen(x)$.

2.8 Um Exemplo Cinemático

Ao final do Capítulo 1, faz-se referência à possibilidade de se utilizar a derivada para descobrir em que instante um móvel modifica seu movimento de progressivo para retrógrado, ou de retrógrado para progressivo. Será apresentado, em seguida, um exemplo dessa aplicação.

Para isso, imagine que um móvel se desloque em trajetória retilínea sobre um eixo orientado e que a sua posição, a cada instante t, seja dada por $s(t)$. Então $s'(t)$ corresponde à taxa de variação da posição em relação ao tempo no instante t e a isso chama-se *velocidade instantânea.* Se:

- $s'(t_0) > 0$, então, no instante t_0, o valor da posição do móvel aumenta à medida que o tempo passa (Movimento Progressivo).
- $s'(t_0) < 0$, então, no instante t_0, o valor da posição do móvel diminui à medida que o tempo passa (Movimento Retrógrado).

Considere, agora, que a *Função Horária de Posição* desse móvel é dada por $s(t) = t^3 - 6t^2 + 9t + 1$, com $t \geq 0$

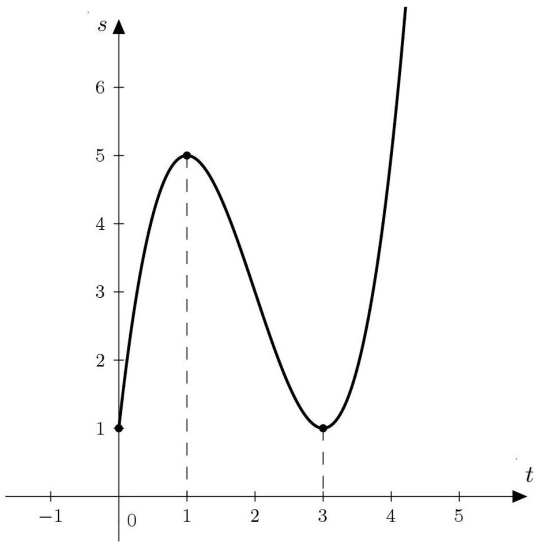

Figura 2.4: Gráfico da Função Horária de Posição

Sendo assim, a derivada $s'(t) = 3t^2 - 12t + 9$ corresponde à *Função Horária de Velocidade.* Note que $s'(t)$ é dada por uma função polinomial do 2º grau tal que:

- se $0 \leq t < 1$, então $s'(t) > 0$, ou seja, o móvel tem movimento progressivo nesse intervalo.
- se $1 < t < 3$, então $s'(t) < 0$, ou seja, o móvel tem movimento retrógrado intervalo.
- se $t = 1$, então $s'(t) = 0$, ou seja, o móvel muda, nesse momento, de movimento progressivo para retrógrado.

Capítulo 3

A Derivada Segunda

É comum, durante o aprendizado da derivada, que alunos perguntem sobre a possibilidade de derivar uma função mais de uma vez. Para responder a esse questionamento, são utilizados exemplos tradicionais como o de uma função polinomial (que vai sendo derivada sucessivas vezes até que, a partir de uma certa ordem, todas as derivadas têm valor nulo) e da função $f(x) = \mathrm{e}^x$ (que vai sendo derivada sucessivas vezes e o resultado é sempre a própria f).

Em etapa posterior do curso, estudam-se técnicas para esboçar gráficos de funções. Nessa etapa, as derivadas são utilizadas para identificar *pontos de máximo local*, *pontos de mínimo local* e *pontos de inflexão*. Nesse momento, surge a necessidade de se compreender o papel desempenhado pela derivada segunda.

Conforme visto no Capítulo 1, dada uma função derivável $f(x)$, a sua derivada $f'(x)$ corresponde a outra função que fornece a taxa de variação da função original $f(x)$. Dessa forma:

- $f'(x_0) > 0 \quad \Rightarrow \quad f(x)$ crescente no ponto $(x_0, f(x_0))$;
- $f'(x_0) < 0 \quad \Rightarrow \quad f(x)$ decrescente no ponto $(x_0, f(x_0))$;
- $f'(x_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(x)$ **pode atingir (não necessariamente atinge)** um valor de máximo ou de mínimo local no ponto $(x_0, f(x_0))$.

De forma análoga, dada uma função $f(x)$ que seja derivável pelo menos duas vezes, a sua derivada segunda $f''(x)$ corresponde a outra função que fornece a taxa de variação da função derivada $f'(x)$. Dessa forma:

- $f''(x_0) > 0 \quad \Rightarrow \quad f'(x)$ crescente no ponto $(x_0, f(x_0))$. Isto significa dizer que a derivada de $f(x)$, independentemente de ser positiva, nula ou mesmo negativa nesse ponto, **aumenta** conforme x vai aumentando. Portanto, o ponto $(x_0, f(x_0))$ está sobre um trecho do gráfico de $f(x)$ cuja concavidade está para **cima**. Se $f''(x_0) > 0$ e $f'(x_0) = 0$, o ponto $(x_0, f(x_0))$ é dito um *ponto de mínimo local*.

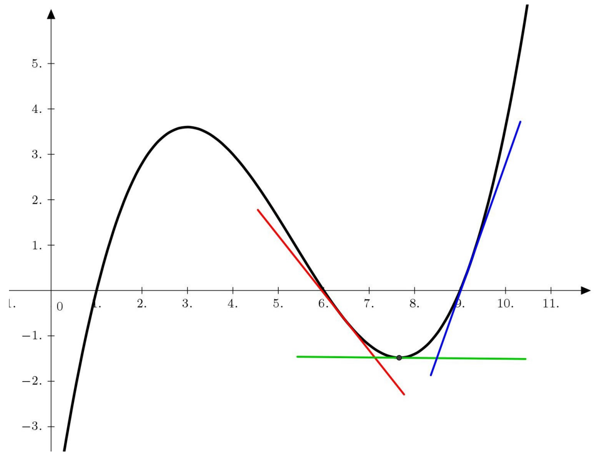

Figura 3.1: Tangentes em trecho com derivada segunda positiva

- $f''(x_0) < 0 \quad \Rightarrow \quad f'(x)$ decrescente no ponto $(x_0, f(x_0))$. Isto significa dizer que a derivada de $f(x)$, independentemente de ser positiva, nula ou mesmo negativa nesse ponto, **diminui** conforme x vai aumentando. Portanto, o ponto $(x_0, f(x_0))$ está sobre um trecho do gráfico de $f(x)$ cuja concavidade está para **baixo**. Se $f''(x_0) < 0$ e $f'(x_0) = 0$, o ponto $(x_0, f(x_0))$ é dito um *ponto de máximo local*.

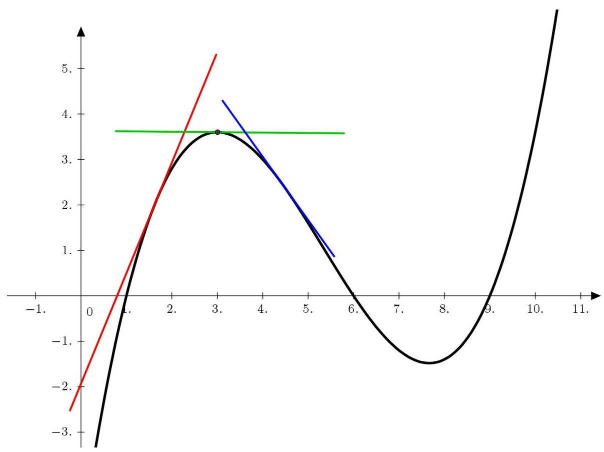

Figura 3.2: Tangentes em trecho com derivada segunda negativa

- $f''(x_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad f'(x)$ **pode inverter** seu comportamento no ponto $(x_0, f(x_0))$. Ou seja, caso isso ocorra,
  - se $f'(x)$ estava crescendo, passa a decrescer a partir do ponto $(x_0, f(x_0))$;
  - se $f'(x)$ estava decrescendo, passa a crescer a partir do ponto $(x_0, f(x_0))$.

Nesse caso, o ponto $(x_0, f(x_0))$ é dito um *ponto de inflexão*. Exatamente nesse ponto, o gráfico da função original $f(x)$ muda de concavidade.

Conclui-se que, se duas funções $f(x)$ e $g(x)$ são tais que $f''(x_0) = g''(x_0) \neq 0$, então as suas concavidades estão voltadas para o mesmo lado, isto é, ou ambas estão voltadas para cima, ou ambas estão voltadas para baixo.

Mais uma vez, pode ser feita analogia com o estudo da cinemática. Vimos, ao final da seção 1.2, que se $s(t)$ é a função horária de posição de um móvel, então a derivada $s'(t)$ calcula a velocidade instantânea desse móvel. Portanto, a derivada segunda $s''(t)$ corresponde à taxa de variação instantânea da velocidade com relação ao tempo − o que se chama aceleração.

Capítulo 4

Polinômios Aproximadores

Sabendo que e é um número irracional, um aluno de Ensino Fundamental é capaz de, com extrema facilidade, responder que o valor de e^0 é 1. Por outro lado, alunos da 3ª série do Ensino Médio, em sua grande maioria, precisarão recorrer a calculadoras científicas para responder qual o valor de $\mathrm{e}^{0,5}$. O que esses alunos não sabem é que é possível obter, sem a utilização de máquinas de calcular, boas aproximações para esse resultado.

Neste capítulo, aprenderemos como utilizar polinômios para calcular aproximações dos valores de uma função, o que é o tema central desta dissertação.

4.1 Utilizando Funções Polinomiais de 1º Grau

Considere uma função $f(x)$ contínua e derivável que passe pelo ponto $P = (x_0, f(x_0))$.

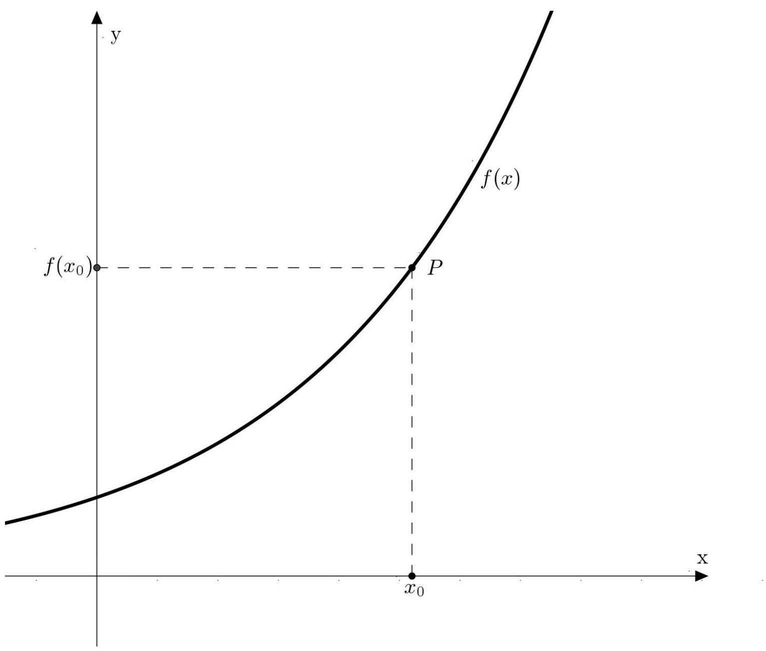

Figura 4.1: Função contínua passando pelo ponto P.

Nesta seção, o objetivo será obter um polinômio $p(x)$ de *primeiro grau* que calcule aproximações para as imagens de f nas vizinhanças de x_0[1]. É relativamente fácil perceber que a reta procurada deve passar pelo ponto P. Caso contrário, não será uma boa ferramenta de aproximação nas vizinhanças de x_0. Para ilustrar esse fato, considere as retas r e s paralelas representadas na figura a seguir.

[1]Dado um número x_0 qualquer fixo e um valor arbitrário $\epsilon > 0$, chama-se vizinhança de x_0 ao intervalo aberto $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$

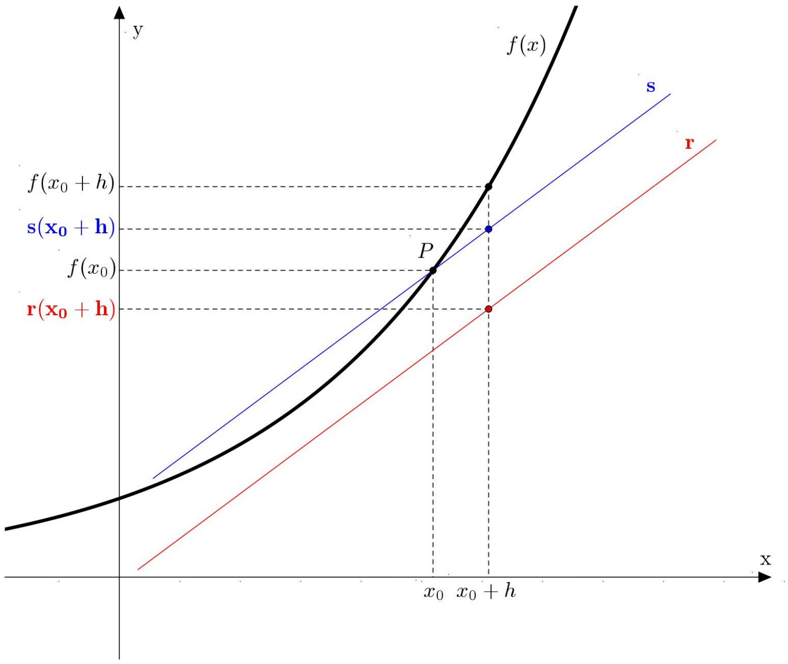

Figura 4.2: Possíveis retas aproximadoras de f nas vizinhanças do ponto P.

Tome um valor x_0+h nas vizinhanças de x_0. As retas r e s fornecem, respectivamente, as imagens $r(x_0+h)$ e $s(x_0+h)$ que são aproximações do valor de $f(x_0+h)$. Quanto mais próximo de 0 estiver o valor de h, melhor será a aproximação dada pela reta s quando comparada com a dada pela reta r.

Como $p(x)$ é polinômio de primeiro grau e seu gráfico deve passar pelo ponto P, então o polinômio aproximador pode ser escrito da seguinte forma:

$$p(x) = f(x_0) + A(x - x_0) \tag{4.1}$$

De fato, quando $x = x_0$, o valor de $p(x_0)$ é igual a $f(x_0)$. Para cada possível valor do coeficiente angular A, tem-se uma diferente reta que passa por P. Todas são retas aproximadoras de f nas vizinhanças de x_0. Mas qual delas será a que proporciona a MELHOR estimativa? Para responder a essa pergunta, voltemos à equação (1.3)

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}.$$

Seja $x = x_0 + h$. Quando h tende a zero, $p(x)$ torna-se uma aproximação cada vez melhor para o valor $f(x)$. Portanto trocaremos $f(x)$ por sua aproximação:

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cong \frac{p(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

o que nos leva a:

$$f'(x_0)\cdot(x - x_0) \cong p(x) - f(x_0),$$

e, finalmente:

$$p(x) \cong f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0). \tag{4.2}$$

O sinal de **aproximadamente igual** transformar-se-á em **igualdade** quando a reta aproximadora for a *reta tangente*, como ilustrado a seguir.

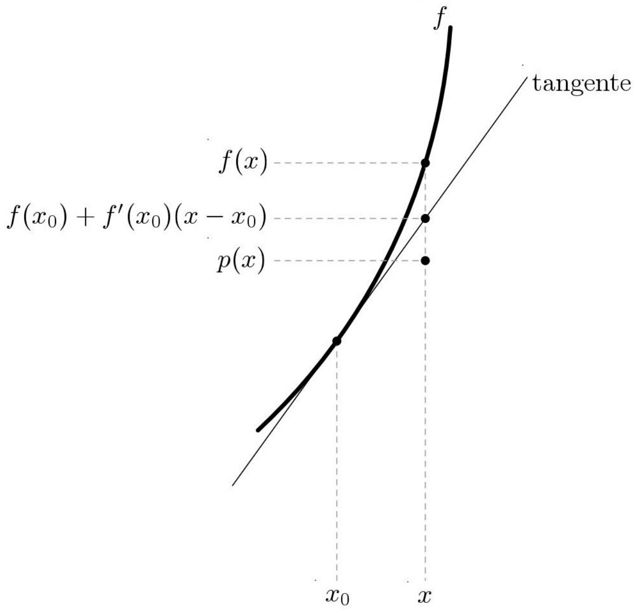

Figura 4.3: A reta tangente como aproximador de f.

Comparando-se (4.1) e (4.2), concluímos que a melhor das retas aproximadoras é aquela em que $A = f'(x_0)$. Tomada a reta tangente como aproximadora e derivando-se p em relação a x, obtém-se $p'(x) = f'(x_0)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, em particular, para $x = x_0$.

Encerraremos esta seção concluindo que o polinômio de 1º grau $p(x)$ que melhor aproxima $f(x)$ nas vizinhanças de x_0 deve ser tal que:

$$p(x_0) = f(x_0)$$

e

$$p'(x_0) = f'(x_0).$$

Observe que essas duas restrições determinam um único par (A, B) tal que $p(x) = Ax + B$:

$$p'(x_0) = A \quad \Rightarrow \quad f'(x_0) = A$$

e

$$p(x_0) = Ax_0 + B \quad \Rightarrow \quad f(x_0) = f'(x_0)x_0 + B \quad \Rightarrow \quad B = f(x_0) - f'(x_0)x_0.$$

Isso nos conduz a

$$p(x) = f'(x_0)x + f(x_0) - f'(x_0)x_0$$

$$p(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \tag{4.3}$$

que corresponde à conclusão a que se chegou quando da comparação de (4.1) com (4.2).

4.2 Utilizando Funções Polinomiais de 2º Grau

Na seção anterior, vimos que o polinômio de 1º grau que melhor aproxima os valores de $f(x)$ nas vizinhanças de x_0 é aquele que corresponde à reta tangente ao gráfico de f no ponto $P = (x_0, f(x_0))$. No entanto, se f for derivável duas vezes, é possível melhorar essa aproximação. Essa melhora é obtida utilizando-se, como aproximador $p(x)$, uma função polinomial de 2º grau que contenha o ponto P e que, exceto nesse ponto, esteja sempre entre o gráfico de f e essa reta tangente, como ilustrado a seguir.

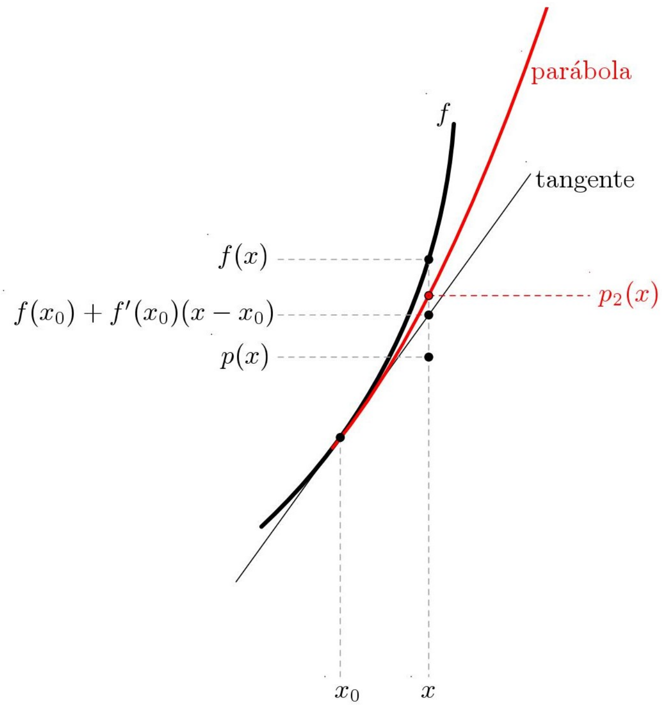

Figura 4.4: Uma parábola como aproximador de f.

Para que uma parábola possa cumprir essas exigências, é necessário que a sua concavidade e a concavidade de f nas vizinhanças de x_0 estejam voltadas para o mesmo lado. Se uma parábola cumpre com tais exigências, então a reta que tangencia $f(x)$ no ponto P também tangencia a parábola $p(x)$ nesse mesmo ponto P. Dessa forma, conclui-se que o polinômio de 2º grau $p(x)$ procurado deve ser tal que:

$$p(x_0) = f(x_0),$$

$$p'(x_0) = f'(x_0)$$

e

$$p''(x_0) = f''(x_0).$$

Acima, as duas primeiras condições são as mesmas exigidas para o polinômio aproximador de 1º grau. A terceira condição, conforme visto no Capítulo 3, é aquela que garante que as concavidades de f e de p estarão voltadas ambas para cima ou ambas para baixo. Dado que o polinômio aproximador procurado é de 2º grau, pode-se escrevê-lo na forma

$$p(x) = Ax^2 + Bx + C.$$

E, exigindo-se que esse polinômio cumpra as três restrições acima, tem-se:

$$p''(x) = 2A \quad \Rightarrow \quad p''(x_0) = 2A \quad \Rightarrow \quad f''(x_0) = 2A \qquad (I)$$

$$p'(x) = 2Ax + B \quad \Rightarrow \quad p'(x_0) = 2Ax_0 + B \quad \Rightarrow \quad f'(x_0) = 2Ax_0 + B \qquad (II)$$

$$p(x) = Ax^2 + Bx + C \quad \Rightarrow \quad p(x_0) = Ax_0^2 + Bx_0 + C \quad \Rightarrow \quad f(x_0) = Ax_0^2 + Bx_0 + C \ \ (III)$$

Com as expressões (I), (II) e (III), é possível calcular os coeficientes A, B e C do polinômio $p(x)$. De (I), tira-se o valor de A.

$$A = \frac{f''(x_0)}{2}$$

Substituindo-se esse resultado em (II), descobre-se o valor de B.

$$f'(x_0) = f''(x_0) \cdot x_0 + B \quad \Rightarrow \quad B = f'(x_0) - f''(x_0) \cdot x_0$$

Importando-se esse resultado, juntamente com (I), para a expressão (III), obtém-se o valor de C.

$$f(x_0) = \frac{f''(x_0)}{2} \cdot x_0^2 + \left[f'(x_0) - f''(x_0) \cdot x_0\right] x_0 + C \quad \Rightarrow \quad C = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0 + \frac{f''(x_0)}{2} \cdot x_0^2$$

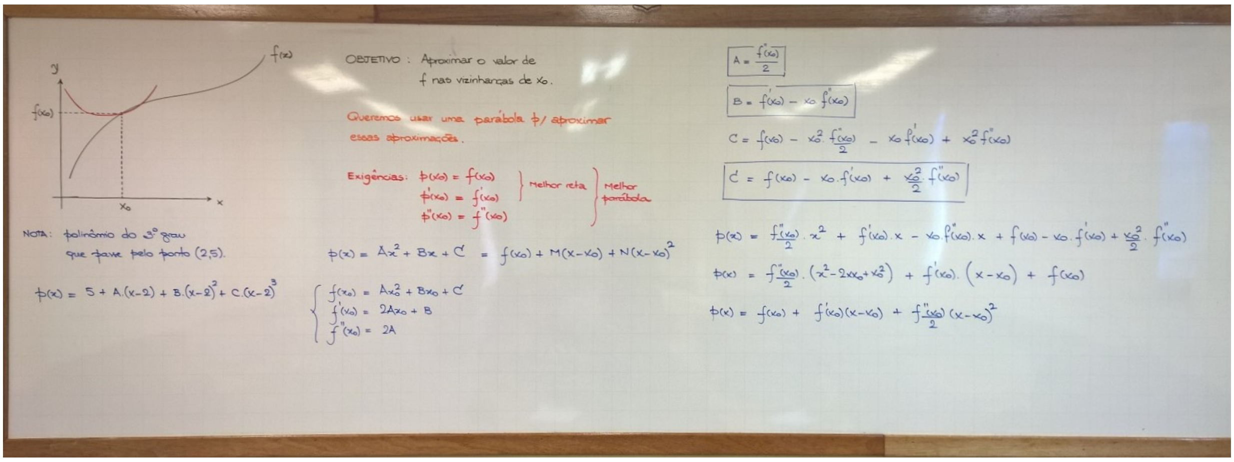

Figura 4.5: Em sala: calculando os coeficientes do polinômio aproximador de 2º grau

Coloque os valores encontrados para A, B e C no modelo $p(x) = Ax^2 + Bx + C$:

$$p(x) = \frac{f''(x_0)}{2} \cdot x^2 + \left[f'(x_0) - f''(x_0) \cdot x_0\right] \cdot x + \left[f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0 + \frac{f''(x_0)}{2} \cdot x_0^2\right]$$

$$p(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2} \cdot (x^2 - 2xx_0 + x_0^2)$$

$$p(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2} \cdot (x - x_0)^2 \tag{4.4}$$

que é o polinômio aproximador de 2º grau procurado nas vizinhanças de x_0.

A técnica de utilizar polinômios para aproximar funções mais complicadas é muito comum. A justificativa para tal fato é que os polinômios são fáceis de operar, exigindo apenas o uso das quatro operações básicas e de potências. Um exemplo de onde isso acontece são as máquinas de calcular. Caso $f(x)$ seja derivável n vezes, é possível obter um polinômio aproximador de n-ésimo grau. Para isso, $p(x)$ deve ser tal que:

$$p(x_0) = f(x_0)$$
$$p'(x_0) = f'(x_0)$$
$$p''(x_0) = f''(x_0)$$
$$\cdots$$
$$p^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0).$$

O polinômio que satisfaz a todas essas condições é

$$p(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!} \cdot (x - x_0)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n \tag{4.5}$$

e denomina-se *Polinômio de Taylor de ordem* n para a função $f(x)$ nas vizinhanças de x_0.

Capítulo 5

Polinômios Aproximadores na Prática

Este capítulo tem por objetivo apresentar algumas das atividades realizadas em sala de aula durante o estudo da utilização de polinômios na aproximação de valores de uma função. Tais atividades foram intercaladas com as explanações teóricas de modo a permitir a fixação de cada etapa do aprendizado. Por esse motivo, serão apresentadas, a seguir, segundo essa organização.

5.1 Utilizando Polinômios Aproximadores de 1º Grau

Na seção 4.1, concluiu-se que o melhor polinômio aproximador de 1º grau é

$$p(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \tag{5.1}$$

A seguir, apresentam-se as atividades propostas em classe com a finalidade de utilizar (5.1) como ferramenta de aproximação. Todas elas foram realizadas sem qualquer ajuda de máquinas de calcular posto que foram necessárias tão somente as 4 operações básicas além do cálculo de potências.

5.1.1 Calcular a raiz quadrada de 17

Esse foi o primeiro problema proposto. Os alunos integrantes da classe de estudos facilmente perceberam que a função f a ser utilizada é $f(x) = \sqrt{x}$, que $x = 17$ e que a escolha de x_0 é arbitrária. Após alguma discussão, concluíram que x_0 deve ser um valor próximo de 17 a fim de melhorar a precisão da aproximação e que, além disso, a escolha de um número quadrado perfeito para x_0 facilita a execução dos cálculos. Optaram por $x_0 = 16$.

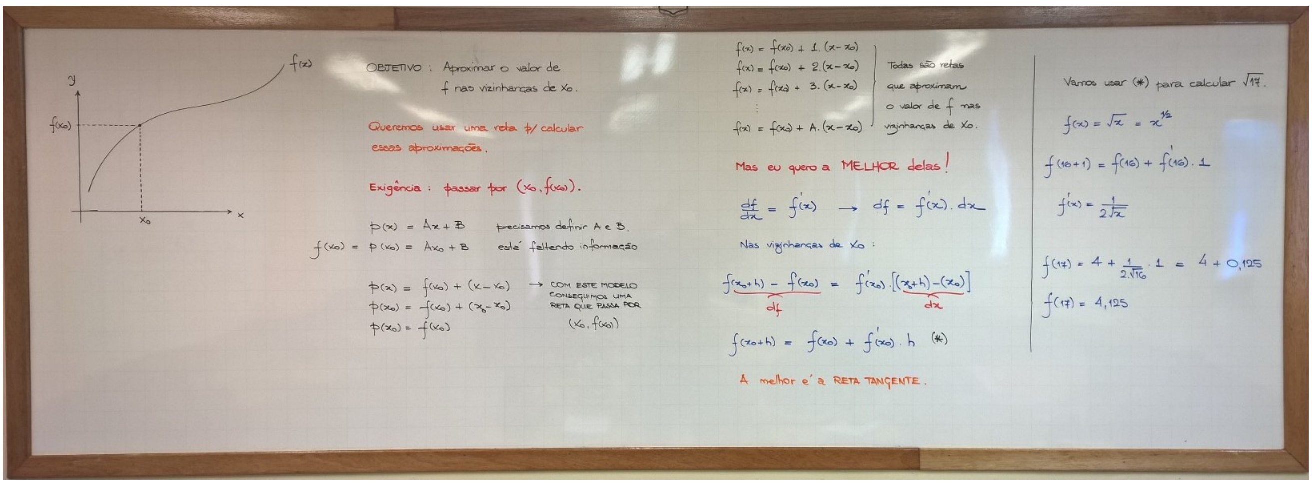

Figura 5.1: Em sala: utilizando um polinômio de 1º grau para calcular a raiz quadrada de 17

Considerando-se que $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ e utilizando-se a regra de derivação apresentada na seção 2.4, é fácil concluir que a derivada dessa função é $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Substituindo-se todos os parâmetros em (5.1), obtém-se:

$$f(17) \cong f(16) + f'(16) \cdot (17 - 16) = \sqrt{16} + \frac{1}{2\sqrt{16}} \cdot 1 = 4 + \frac{1}{8} = 4,125 \tag{5.2}$$

Logo, $\sqrt{17} \cong 4,125$. Após a resolução do problema, os alunos sugeriram conferir o resultado obtido com o fornecido por uma máquina calculadora do tipo científica: 4,12310... . Devido a essa sugestão, precisei atentar para o fato de que o valor dado pela máquina também é uma aproximação obtida de forma similar, porém com maior precisão. Mesmo assim decidimos, doravante, utilizar essa mesma máquina de calcular como parâmetro de referência para medir a precisão dos resultados obtidos através dos polinômios. Com relação ao valor de referência, a aproximação deu uma diferença de 0,00189... para mais.

5.1.2 Calcular e elevado a 0,5

Naturalmente, a função a ser utilizada é $f(x) = \mathrm{e}^x$ e $x = 0,5$. Já que a escolha de x_0 é arbitrária, os alunos ficaram na dúvida entre escolher 0 ou 1 para o valor de x_0. Decidiram escolher $x_0 = 0$ porque e^0 é conhecido com exatidão, ao contrário de e^1.

De acordo com a regra de derivação apresentada na seção 2.5, $f'(x) = f(x) = \mathrm{e}^x$. Substituindo-se todos os parâmetros em (5.1), obtém-se:

$$f(0,5) \cong f(0) + f'(0) \cdot (0,5 - 0) = \mathrm{e}^0 + \mathrm{e}^0 \cdot 0,5 = 1,5 \tag{5.3}$$

Logo, $\mathrm{e}^{0,5} \cong 1,5$. Nesse caso, o resultado fornecido pela máquina foi 1,64872... . Com relação ao valor de referência, a aproximação deu uma diferença de 0,14872... para menos.

5.1.3 Calcular o seno de 0,1 radiano

A função a ser utilizada é $f(x) = sen(x)$ e $x = 0,1$. Nesse caso, os alunos decidiram escolher $x_0 = 0$ porque $sen(0)$ e $cos(0)$ são conhecidos e a proximidade entre 0 e 0,1 deveria, em seu julgamento, dar uma boa precisão para o cálculo.

De acordo com a regra de derivação apresentada na seção 2.6, $f'(x) = cos(x)$. Substituindo-se todos os parâmetros em (5.1), obtém-se:

$$f(0,1) \cong f(0) + f'(0) \cdot (0,1 - 0) = sen(0) + cos(0) \cdot 0,1 = 0,1 \tag{5.4}$$

Logo, $sen(0,1) \cong 0,1$. O resultado fornecido pela máquina foi 0,09983... . Com relação ao valor de referência, a aproximação deu uma diferença de 0,00016... para mais.

5.2 Utilizando Polinômios Aproximadores de 2º Grau

Na seção 4.2, foi visto que, em geral, o uso do polinômio de 2º grau

$$p(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2} \cdot (x - x_0)^2 \tag{5.5}$$

produz melhores aproximações do que aquelas obtidas com polinômios de 1º grau. Para permitir a comparação dessas aproximações e, consequentemente, constatar uma real melhora dos valores obtidos, todos os exercícios propostos anteriormente foram repetidos utilizando (5.5).

5.2.1 Calcular a raiz quadrada de 17

Os parâmetros utilizados foram os mesmos. Considerando-se que $f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}}$ e utilizando-se a regra de derivação para polinômios apresentada na seção 2.4, conclui-se que a derivada segunda dessa função é $f''(x) = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}}$. Substituindo-se todos os parâmetros em (5.5), obtém-se:

$$f(17) \cong f(16) + f'(16) \cdot (17 - 16) + \frac{f''(16)}{2} \cdot (17 - 16)^2$$

$$f(17) \cong \sqrt{16} + \frac{1}{2\sqrt{16}} \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4\sqrt{16^3}} \cdot 1^2 = 4 + \frac{1}{8} - \frac{1}{512} = 4,12304... \tag{5.6}$$

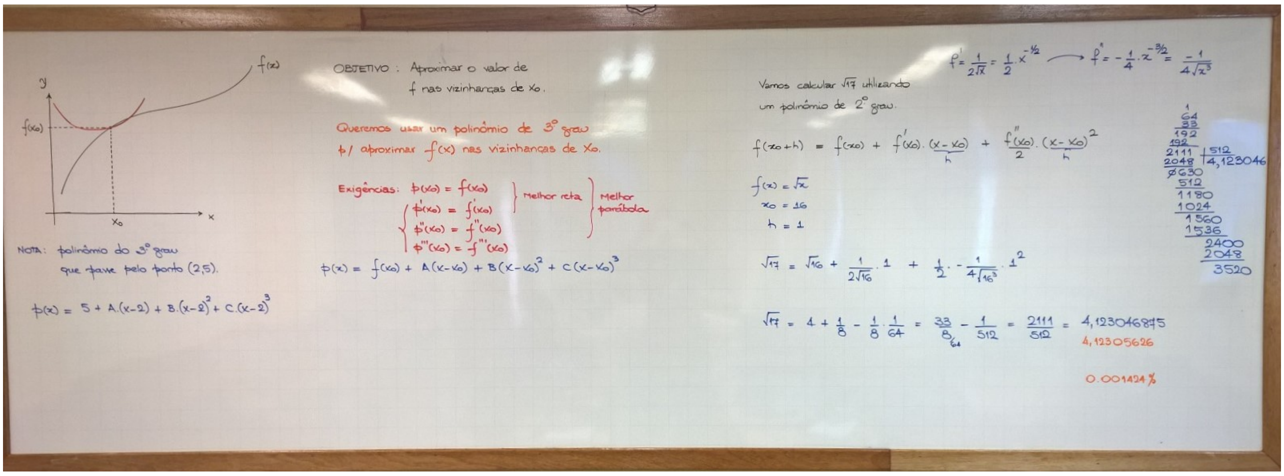

Figura 5.2: Em sala: utilizando um polinômio de 2º grau para calcular a raiz quadrada de 17

Na comparação dos resultados apresentada a seguir, percebe-se que, de fato, houve uma melhora na aproximação.

- Aproximação obtida com polinômio do 1º grau: 4,125
- Aproximação obtida com polinômio do 2º grau: 4,12304...
- Valor de Referência: 4,12310...

5.2.2 Calcular e elevado a 0,5

Os parâmetros utilizados foram os mesmos. De acordo com a regra de derivação apresentada na seção 2.5, $f''(x) = f'(x) = f(x) = \mathrm{e}^x$. Substituindo-se todos os parâmetros em (5.5), obtém-se:

$$f(0,5) \cong f(0) + f'(0) \cdot (0,5 - 0) + \frac{f''(0)}{2} \cdot (0,5 - 0)^2$$

$$f(0,5) \cong \mathrm{e}^0 + \mathrm{e}^0 \cdot 0,5 + \frac{\mathrm{e}^0}{2} \cdot 0,5^2 = 1 + 0,5 + 0,125 = 1,625 \tag{5.7}$$

Comparando-se os resultados obtidos, percebe-se uma melhora substancial na aproximação.

- Aproximação obtida com polinômio do 1º grau: 1,5
- Aproximação obtida com polinômio do 2º grau: 1,625
- Valor de Referência: 1,64872...

5.2.3 Calcular o seno de 0,1 radiano

Aqui, os parâmetros utilizados também foram os mesmos. Considerando-se que $f'(x) = cos(x)$ e utilizando-se a regra de derivação para polinômios apresentada na seção 2.7, conclui-se que a derivada segunda dessa função é $f''(x) = -sen(x)$. Substituindo-se todos os parâmetros em (5.5), obtém-se:

$$f(0,1) \cong f(0) + f'(0) \cdot (0,1 - 0) + \frac{f''(0)}{2} \cdot (0,1 - 0)^2$$

$$f(0,5) \cong sen(0) + cos(0) \cdot 0,1 - \frac{sen(0)}{2} \cdot 0,1^2 = 0 + 0,1 - 0 = 0,1 \tag{5.8}$$

Nesse caso, a comparação mostra que não houve qualquer melhora na aproximação.

- Aproximação obtida com polinômio do 1º grau: 0,1
- Aproximação obtida com polinômio do 2º grau: 0,1
- Valor de Referência: 0,09983...

Levados a refletir sobre o porquê de não haver qualquer diferença entre as aproximações obtidas com polinômios de 1º e de 2º graus, os alunos concluíram corretamente que os termos que contém derivadas de f de ordem par são dependentes do $sen(0)$ e, por esse motivo, não produzem qualquer melhora. Mesmo sem calcular, sugeriram que a melhora na aproximação só aconteceria se fosse utilizado um polinômio aproximador de 3º grau.

5.3 Problema Proposto

Para encerrar este trabalho, propõe-se ao leitor o seguinte problema:

Em certo instante, um automóvel em movimento possui velocidade de 16 m/s e aceleração de $3m/s^2$. Estime a distância percorrida por esse carro durante os próximos 2 segundos.

A solução desse problema é apresentada no Apêndice A.

Apêndice A

Resolvendo o problema proposto

A princípio, se a função horária de posição $s(t)$ desse automóvel fosse conhecida, o problema seria trivial. Entretanto, não se sabe qual o tipo de movimento do carro. Logo, a função $s(t)$ não está disponível.

Por outro lado, sabe-se que as funções horárias de velocidade e de aceleração são dadas, respectivamente, por:

$$v(t) = s'(t)$$
$$a(t) = s''(t).$$

Como essas informações correspondem às duas primeiras derivadas de $s(t)$, podemos estimar $s(t)$ por um polinômio de 1º grau ou de 2º grau. Para que se tenha uma melhor estimativa, será utilizado o polinômio de 2º grau de tal forma que:

$$s(t) \cong s(t_0) + s'(t_0) \cdot (t - t_0) + \frac{s''(t_0)}{2} \cdot (t - t_0)^2 \tag{A.1}$$

Considerando-se que a contagem do tempo (em segundos) é iniciada a partir do instante citado no enunciado, pode-se dizer que $t_0 = 0$. Assim, os parâmetros a serem substituídos em (A.1) são

- $t_0 = 0$
- $t = 2$
- $s'(t_0) = 16$
- $s''(t_0) = 3$

o que conduz a:

$$s(2) \cong s(0) + s'(0) \cdot (2 - 0) + \frac{s''(0)}{2} \cdot (2 - 0)^2 \tag{A.2}$$

A distância D percorrida por esse móvel nos dois segundos seguintes ao instante descrito no enunciado é dada por $D = s(2) - s(0)$. Portanto, uma aproximação para D é:

$$D \cong s'(0) \cdot (2 - 0) + \frac{s''(0)}{2} \cdot (2 - 0)^2 = 16 \cdot 2 + \frac{3}{2} \cdot 4 = 38m \tag{A.3}$$

Lista de Figuras

1.1 Reta Secante . . . 5
1.2 Reta Tangente . . . 6
1.3 Derivada positiva no ponto $(x_0, f(x_0))$ . . . 7
1.4 Derivada negativa no ponto $(x_0, f(x_0))$ . . . 7
1.5 Derivada Nula - Máximo Local . . . 8
1.6 Derivada Nula - Mínimo Local . . . 8

2.1 Arco de medida h e $sen(x)$ . . . 13
2.2 Medida x tendendo a zero . . . 13
2.3 Geogebra: Medindo Comprimentos . . . 14
2.4 Gráfico da Função Horária de Posição . . . 16

3.1 Tangentes em trecho com derivada segunda positiva . . . 18
3.2 Tangentes em trecho com derivada segunda negativa . . . 18

4.1 Função contínua passando pelo ponto P. . . . 19
4.2 Possíveis retas aproximadoras de f nas vizinhanças do ponto P. . . . 20
4.3 A reta tangente como aproximador de f. . . . 21
4.4 Uma parábola como aproximador de f. . . . 22
4.5 Em sala: calculando os coeficientes do polinômio aproximador de 2º grau . . . 23

5.1 Em sala: utilizando um polinômio de 1º grau para calcular a raiz quadrada de 17 . . . 24
5.2 Em sala: utilizando um polinômio de 2º grau para calcular a raiz quadrada de 17 . . . 26

Bibliografia

[1] GRANVILLE, W. A.; SMITH, P. F.; LONGLEY, W. R. *Elementos de Cálculo Diferencial e Integral.* Trad. J. Abdelhay. Rio de Janeiro: Científica, 1961.

[2] STEWART, J. *Cálculo.* 4ª ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2005.

[3] LIMA, E. L. *Logaritmos.* 2ª ed. Rio de Janeiro: SBM (Coleção do Professor de Matemática), 1996.