

**impa**



**PROFMAT**

**Bruno Cesar Sá da Silva**

**EMPARELHAMENTO EM GRAFOS BIPARTIDOS NO  
ENSINO MÉDIO**

**Rio de Janeiro, 24 de Fevereiro de 2016**

**BRUNO CESAR SÁ DA SILVA**

**EMPARELHAMENTO EM GRAFOS BIPARTIDOS NO  
ENSINO MÉDIO**

Trabalho de  
Conclusão de Curso do Mestrado  
Profissional em Matemática em Rede  
Nacional, apresentado ao Instituto Nacional  
de Matemática Pura e Aplicada como  
requisito final para a obtenção do título de  
Mestre.

**Orientador: Prof. Paulo Cezar Pinto Carvalho, PhD.  
Rio de Janeiro-RJ  
2016**

*Dedico este trabalho à minha  
futura esposa, Michele Brandão,  
por todo apoio e compreensão.*

## **AGRADECIMENTOS**

Primeiramente a Deus por todos os acontecimentos que me trouxeram até aqui.

Aos meus pais e à minha tia por todo apoio que me deram.

A todos os meus amigos de turma do mestrado, em especial ao Julio Serafim, por terem me aturado ao longo desses dois anos.

Ao Professor Paulo Cezar Pinto Carvalho por me orientar e acreditar no meu projeto.

Ao professor Samuel Jurkiewicz pelas críticas positivas que me possibilitaram enxergar nova abordagem do tema dissertado.

À Dra. Cynthia M. G. da Cruz pelo precioso e eficaz trabalho prestado desde 2009.

Por fim, ao universitário de Pernambuco Adson Sarinho por toda a ajuda (virtual e moral) dispensada.

## Resumo

Este trabalho apresenta uma introdução sobre a Teoria dos Grafos, fatos históricos e definições básicas que tornam possível a compreensão do tema nuclear a ser abordado: *emparelhamento em grafos bipartidos*. Em seguida, cinco sequências didáticas sobre tal assunto são explanadas nesta tese tendo como público alvo professores e alunos do Ensino Médio.

Concluimos este material com um apêndice que aborda as tecnologias utilizadas para a produção da sequência didática no formato audiovisual.

**Palavras-chave:** Grafos, grafos bipartidos, emparelhamento, emparelhamento perfeito, emparelhamento completo, acoplamento.

## **Abstract**

This work presents an introduction to Graph Theory, historical facts and basic definitions that make possible the understanding of the nuclear theme to be broached: matching bipartite graphs. Then, five didactics sequences about this subject are explained in this thesis having as target public teachers and high school students.

We conclude this material with an appendix that broaches the technologies used for the production of didactic sequence in audiovisual format.

**Keywords:** Graphs, bipartite graphs, perfect matching, complete matching.

# SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO .....	8
2. INTRODUÇÃO À TEORIA DOS GRAFOS .....	9
2.1 Abordagem Histórica.....	9
3. DEFINIÇÕES BÁSICAS .....	11
4. SUBGRAFOS.....	13
5. CAMINHOS .....	15
6. CONEXIDADE .....	16
7. BIPARTIÇÃO EM GRAFOS.....	17
8. EMPARELHAMENTO EM GRAFOS BIPARTIDOS .....	20
8.1 Breve abordagem histórica .....	20
8.2 Emparelhamento ou acoplamento .....	21
8.3 Teoremas.....	25
9. SEQUÊNCIA DIDÁTICA .....	31
9.1 Emparelhamento Perfeito (Vídeo 01) .....	32
9.2 Nomenclaturas (Vídeo 02) .....	32
9.3 Emparelhamento Completo (Vídeo 03) .....	32
9.4 Demonstração do Teorema de Hall (Vídeos 04 e 05) .....	32
10. CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	33
11. BIBLIOGRAFIA .....	34
APÊNDICE A– SOFTWARES UTILIZADOS NA PRODUÇÃO AUDIOVISUAL.....	35
A.1 TexStudio .....	35
A.2 Paint .....	36
A.3 My Paint e Mesa Digitalizadora Trust .....	37
A.4 Adobe Photoshop .....	38
A.5 Camtasia Studio .....	38
APÊNDICE B–SLIDES PRODUZIDOS DAS SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS .....	39

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Euler, Kirchhoff e Cayley, respectivamente.....	9
Figura 2: Pontes de Königsberg e o respectivo grafo. ....	9
Figura 3: Grafo simples. ....	11
Figura 4: Grafo com arestas em e laço.....	11
Figura 5: Grafo.....	12
Figura 6: Grafo G.....	13
Figura 7: Grafo H_1. ....	13
Figura 8: Grafo H_2. ....	13
Figura 9: Grafo $G_1 = (V, A)$ .....	14
Figura 10: Grafo $H_3 = (V', A')$ . ....	14
Figura 11: Grafo $H_4 = (V'', A'')$ .....	14
Figura 12: Exemplos de percurso, trilha, caminho, circuito e ciclo, respectivamente. ...	15
Figura 13: Grafo conexo.....	16
Figura 14: Grafo desconexo. ....	16
Figura 15: Grafo Bipartido.....	17
Figura 16: Ciclos.....	18
Figura 17: Grafo bipartido. ....	19
Figura 18: Grafo bipartido completo.....	19
Figura 19: Konig. ....	20
Figura 20: Hall.....	20
Figura 21: Berge.....	20
Figura 22: Grafo G. ....	21
Figura 23: Emparelhamento $M_1$ . ....	21
Figura 24: Emparelhamento $M_2$ . ....	22
Figura 25: Emparelhamento $M' \subset M_2$ . ....	22
Figura 26: Emparelhamento Maximal. ....	23
Figura 27: Emparelhamento Perfeito. ....	23
Figura 28: Grafo G e emparelhamentos M e M' de G. ....	26
Figura 29: Grafo $H = G[M \Delta M']$ .....	27
Figura 30: Componentes conexas 1.. ....	28
Figura 31: Componentes conexas 2. ....	28
Figura 32: Ícone do programa TexStudio. ....	35
Figura 33: Exemplo de slide produzido no TexStudio.....	35
Figura 34: Ícone do programa Paint.....	36
Figura 35: Exemplo de imagem gerada pelo controle Print. ....	36
Figura 36: Ícone do programa My Paint. ....	37
Figura 37: Mesa Digitalizadora Trust. ....	37
Figura 38: Escrita na imagem da tela do computador.....	37
Figura 39: Ícone do programa Photoshop.....	38
Figura 40: Imagens antes e depois do Photoshop.....	38
Figura 41: Ícone do programa Camtasia. ....	38
Figura 42: Interface do programa Camtasia. ....	38



# 1. INTRODUÇÃO

No Ensino Médio, em geral no 2º ano, é introduzido o conteúdo Análise Combinatória aos alunos. Os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM) justificam a introdução desse conteúdo da seguinte maneira:

Cabe também, nesse contexto, trabalhar com o aluno no sentido de ele perceber que a estrutura de dupla hélice do DNA é um modelo construído a partir dos conhecimentos sobre sua composição. É preciso que o aluno relacione os conceitos e processos acima expressos, nos estudos sobre as leis da herança mendeliana e algumas de suas derivações, como alelos múltiplos, herança quantitativa e herança ligada ao sexo, recombinação gênica e ligação fatorial. São necessárias noções de probabilidade, análise combinatória e bioquímica para dar significado às leis da hereditariedade, o que demanda o estabelecimento de relações de conceitos aprendidos em outras disciplinas. (PCNEM-Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, 2000, p.19)

A análise combinatória fornece aos estudantes métodos clássicos de contagem, como a combinação e a permutação. Apesar de serem extremamente funcionais e poderosos, o autor propõe o fortalecimento ou complementação de tais métodos através da abordagem da ferramenta emparelhamento em grafos bipartidos. Essa proposta surgiu com a percepção de que temas interessantes de combinação não se resumem em problemas de contagem.

A presente tese apresenta um breve relato histórico, definições, nomenclaturas e cinco sequências didáticas sobre emparelhamento em grafos bipartidos objetivando auxiliar a preparação das aulas do professor do Ensino Médio.

As sequências didáticas criadas poderão ser apreciadas em forma de [slide](#) ou em formato audiovisual. Todo o material audiovisual está hospedado no canal [Teoria dos Grafos](#) no youtube e poderá ser acessado de forma gratuita.

## 2. INTRODUÇÃO À TEORIA DOS GRAFOS

### 2.1 Abordagem Histórica <sup>1</sup>

A teoria de grafos tem uma origem relativamente recente (século XVIII) na história da matemática. Dentre os primeiros cientistas a trabalhar nesta área se destacam o suíço Leonard Euler, o alemão Gustav Kirchhoff e o britânico Arthur Cayley.

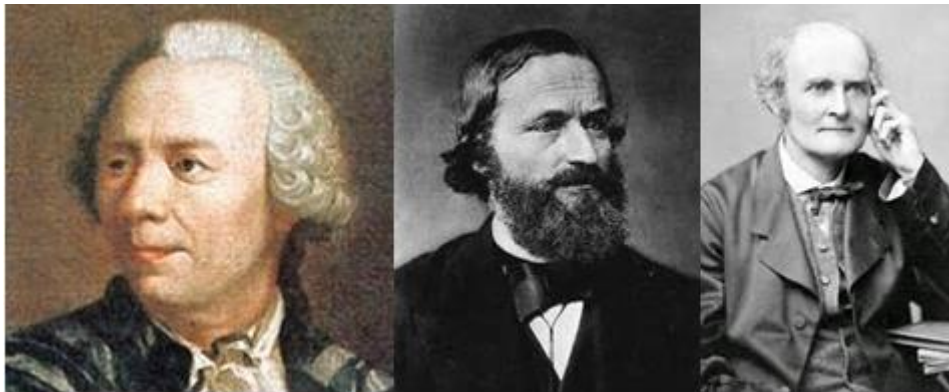


Figura 1: Euler, Kirchhoff e Cayley, respectivamente.

A origem da teoria dos grafos é, em geral, associada ao problema das pontes de Königsberg (cidade da Prússia que agora se designa por Kaliningrad). Parte desta cidade localizava-se em duas ilhas do rio Pregel as quais estavam ligadas às margens e uma à outra através de 7 pontes, conforme a Figura 2

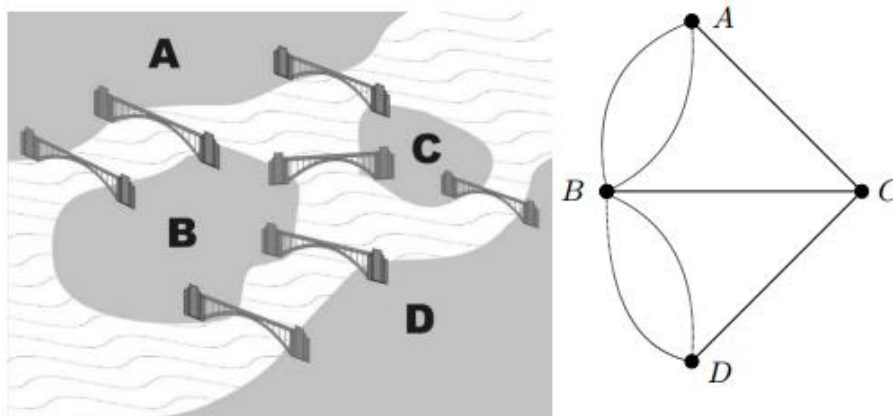


Figura 2: Pontes de Königsberg e o respectivo grafo.

<sup>1</sup> Baseada em Gouveia, 2003

O problema era: seria possível fazer um passeio pela cidade, começando e terminando no mesmo lugar, cruzando cada ponte exatamente uma vez?

**Euler** (1707-1783) solucionou tal questão indicando a impossibilidade da existência desse percurso, numa memória que publicou em S. Petersburgo em 1736, modelando-o pelo grafo representado na Figura 2.

De qualquer modo, é importante observar que o período transcorrido entre a demonstração de Euler e a última década do século XIX - mais de 150 anos - viu, apenas, o surgimento de alguns poucos trabalhos.

Em 1847, **Kirchhoff** utilizou modelos de grafos no estudo de circuitos elétricos e ao fazê-lo, criou a teoria das árvores, - uma classe de grafos, para caracterizar conjuntos de ciclos independentes.

Dez anos mais tarde, **Cayley** seguiria a mesma trilha, embora tendo em mente outras aplicações, dentre as quais se destaca a enumeração dos isômeros dos hidrocarbonetos alifáticos saturados, em química orgânica.

### 3. DEFINIÇÕES BÁSICAS

#### Definição 3.1: Grafo.

Um grafo  $G$  é um par de conjuntos  $(V, A)$ , tal que:

- $V = V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  é o conjunto dos vértices ou nós.
- $A = A(G)$  é o conjunto das arestas, a cada uma das quais corresponde um subconjunto de  $V(G)$  de cardinalidade 2, i.e.,  $A(G) = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ , com  $a_k = \{v_{k_i}, v_{k_j}\}$ , para  $k \in \{1, \dots, m\}$ . Quando não houver motivo de confusão, por simplicidade de notação, uma aresta entre os vértices  $x$  e  $y$  será representada por  $xy$

#### Definição 3.2: Incidência.

Sejam  $u$  e  $v$  dois vértices e  $a = \{u, v\}$  uma aresta que os conecta. Dizemos que a aresta  $\{u, v\}$  incide em  $u$  e em  $v$ , ou ainda, que  $u$  e  $v$  são pontas dessa aresta.

Dois vértices em um grafo  $G$  serão ditos *adjacentes* (ou *vizinhos*) se existe uma aresta que incide a ambos. Quando duas arestas forem incidentes a um mesmo par de vértices elas serão chamadas de *arestas em paralelo*. Outra possibilidade é uma aresta ser incidente a um único vértice, neste caso, diremos que tal aresta é um *laço*. A representação geométrica de um grafo no plano dar-se da seguinte forma: cada vértice corresponde a um ponto e cada aresta a um segmento de reta, cujos extremos representam os vértices incidentes a esta aresta.

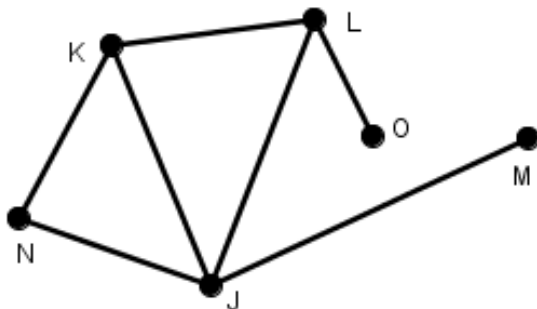


Figura 3: Grafo simples.

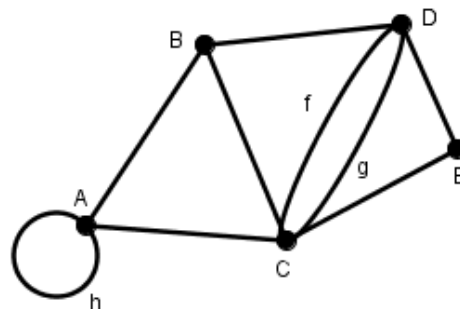


Figura 4: Grafo com arestas em e laço.

A Figura 4 ilustra a representação geométrica de um grafo em que as arestas f e g estão em paralelo e a aresta h é um laço. Notemos que nesse grafo os vértices A e B são exemplos de vértices adjacentes enquanto que A e D não são adjacentes.

Duas arestas são adjacentes ou vizinhas quando possuírem o mesmo extremo. No grafo da Figura 3,  $a_1 = \{N, K\}$  e  $a_2 = \{K, L\}$  são exemplos de arestas adjacentes, pois possuem o mesmo extremo K.

**Definição 3.3:** Grafo simples.

É um grafo que não apresenta arestas em paralelo nem laço (Figura 3).

**Definição 3.4:** Ordem de um grafo  $G=(V,A)$ .

Consiste na quantidade de vértices do grafo ou na cardinalidade do conjunto V.

**Notação 3.4.1:**  $|V|$ :=cardinalidade de V.

No grafo da Figura 5, temos  $|V|= 7$ .

**Definição 3.5:** Dimensão de um grafo  $G=(V,A)$ .

Consiste na quantidade de arestas do grafo ou na cardinalidade do conjunto A.

**Notação 3.5.1:**  $|A|$ :=cardinalidade de A.

No grafo da Figura 5, temos  $|A|= 9$ .

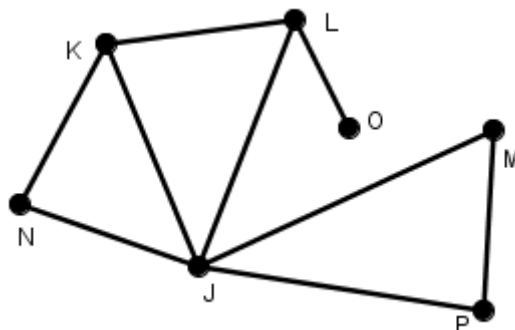


Figura 5: Grafo.

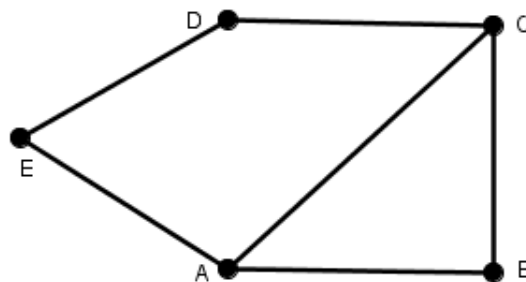
## 4. SUBGRAFOS

**Definição 4.1:** Subgrafo.

Um grafo  $H = (V', A')$  é dito ser um subgrafo de um grafo  $G = (V, A)$  se:

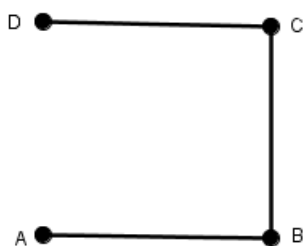
- cada vértice de  $H$  é também um vértice de  $G$ , ou seja,  $V' \subset V$ ;
- cada aresta de  $H$  é também uma aresta de  $G$ , ou seja,  $A' \subset A$ ;

Para melhor visualização, consideremos o grafo  $G$  da Figura 6.

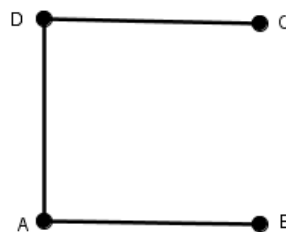


**Figura 6: Grafo G.**

Podemos verificar que  $H_1$  (Figura 7) é um subgrafo de  $G$ . Em contrapartida, temos que  $H_2$  (Figura 8) não representa um subgrafo de  $G$ , pois  $\{D, A\} \notin G$ .



**Figura 7: Grafo  $H_1$ .**



**Figura 8: Grafo  $H_2$ .**

**Definição 4.2:** Subgrafo gerador.

Um subgrafo  $H \subset G$  é *gerador* se  $H$  contém todos os vértices do grafo  $G$ .

**Definição 4.3:** Subgrafo induzido.

Consideremos os grafos  $H = (V', A')$  e  $G = (V, A)$ .

**Definição 4.3.1:**  $H$  é subgrafo induzido por  $V'$  de  $G$  quando:

- $V' \subset V$ ;
- $A'$  for o conjunto de arestas de  $G$  que tem (ambos) os extremos em  $V'$ .

Na Figura 10, temos que  $H_2$  é subgrafo induzido por  $V'$  de  $G_1$ .

**Definição 4.3.2:**  $H$  é subgrafo induzido por  $A'$  de  $G$  quando:

- $A' \subset A$ ;
- $V'$  for o conjunto de vértices de  $G$  que são extremos das arestas de  $A'$ .

Na Figura 11, temos que  $H_4$  é subgrafo induzido por  $A''$  de  $G_1$ .

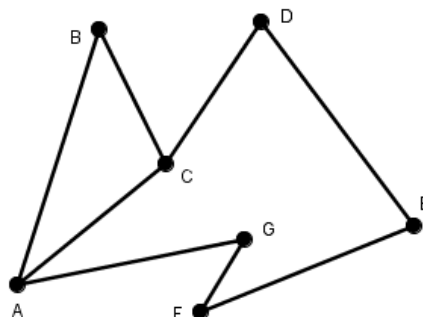


Figura 9: Grafo  $G_1 = (V, A)$ .

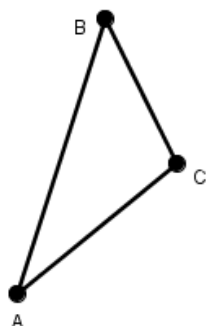


Figura 10: Grafo  $H_3 = (V', A')$ .

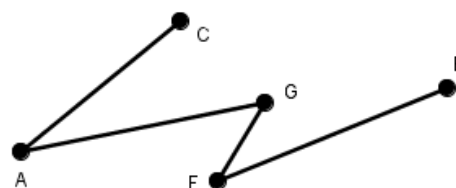


Figura 11: Grafo  $H_4 = (V'', A'')$ .

## 5. CAMINHOS

Seja  $G = (V, A)$  um grafo simples.

**Definição 5.1:** Passeio, percurso, cadeia ou walk.

É uma sequência finita  $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$  de vértices de um grafo  $G(V, A)$  em que  $\{v_i, v_{i+1}\} \in A$  para  $1 \leq i \leq n - 1$ . Dizemos que este é um percurso  $v_1 - v_n$ , e que  $v_1$  e  $v_n$  são, respectivamente, os pontos inicial e final do percurso. O comprimento de um percurso é o número de arestas do percurso e as repetições de arestas são consideradas na contagem.

**Definição 5.2:** Caminho ou path.

É um percurso tal que  $v_i \neq v_j$ , exceto possivelmente  $v_1 = v_n$ . Em outras palavras, caminho é um percurso em que todos os vértices são distintos, exceto possivelmente o primeiro e o último. Quando  $v_1 = v_n$ , o caminho recebe o nome de *ciclo*. Um ciclo é de ordem  $n$  se, e só se,  $|V| = |A| = n$ .

**Definição 5.3:** Trilha.

É um percurso onde  $\{v_i, v_{i+1}\} \neq \{v_j, v_{j+1}\}$  para  $1 \leq i, j \leq n - 1$ . Em outras palavras, todas as arestas são distintas. Quando  $v_1 = v_n$ , a trilha recebe o nome de *circuito* ou *trilha cíclica*.

Na figura 12: (a) ebfbc é um percurso, (b) afdefb é uma trilha, (c) acbfe é um caminho, (d) afdefbca é um circuito, (e) fbcadef é um ciclo.

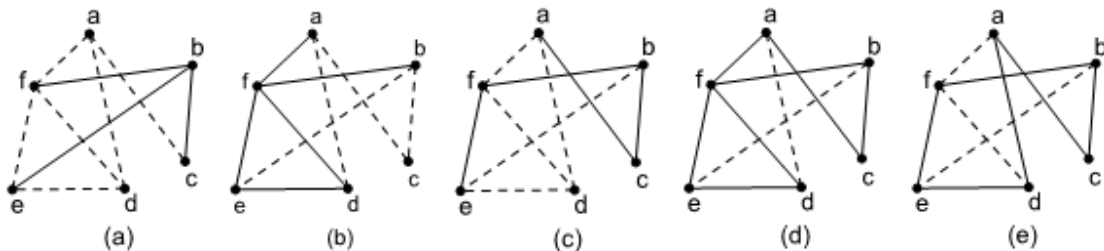


Figura 12: Exemplos de percurso, trilha, caminho, circuito e ciclo, respectivamente.



## 6. CONEXIDADE

**Definição 6.1:** Grafo Conexo.

Um grafo  $G = (V, A)$  é conexo se existir um caminho entre qualquer par de vértices. Caso contrário é desconexo, ou seja, há pelo menos um par de vértices que não está ligado por nenhuma cadeia (caminho).

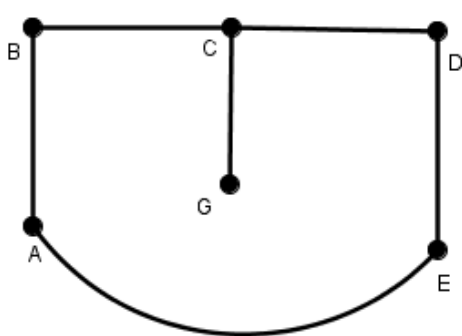


Figura 13: Grafo conexo.

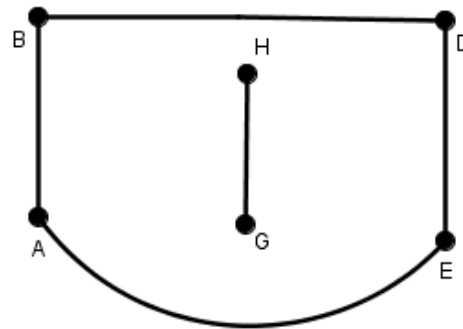


Figura 14: Grafo desconexo.

**Definição 6.2:** Componente conexa.

Considere um grafo  $G = (V, A)$ . Uma componente conexa  $C$  de  $G$  é um subgrafo  $C = (V', A')$ , tal que  $V' \subset V, A' \subset A$  e:

- $C$  é conexo;
- Para todo  $v \in V \setminus V'$  e para todo  $v' \in V'$ , a aresta  $\{v, v'\} \notin A$ .

Na figura 14, temos  $C = (V', A')$  como exemplo de uma componente conexa do grafo desconexo, onde  $V' = A' = \{H, G\}$ .

## 7. BIPARTIÇÃO EM GRAFOS

**Definição 7.1** Grafo bipartido.

Grafo bipartido (bicolorido, bigrafo ou bipartite) é um grafo cujos vértices podem ser divididos em dois conjuntos disjuntos  $X$  e  $Y$  tais que toda aresta conecta um vértice em  $X$  a um vértice em  $Y$ . Resumindo:

- Seja  $G = (V, A)$  um grafo simples.
- $V$  pode ser particionado em 2 conjuntos  $X$  e  $Y$ , tal que
- $V = X \cup Y$
- $X \cap Y = \emptyset$
- Vértices em  $X$  conectam-se apenas a vértices em  $Y$  (e vice-versa).

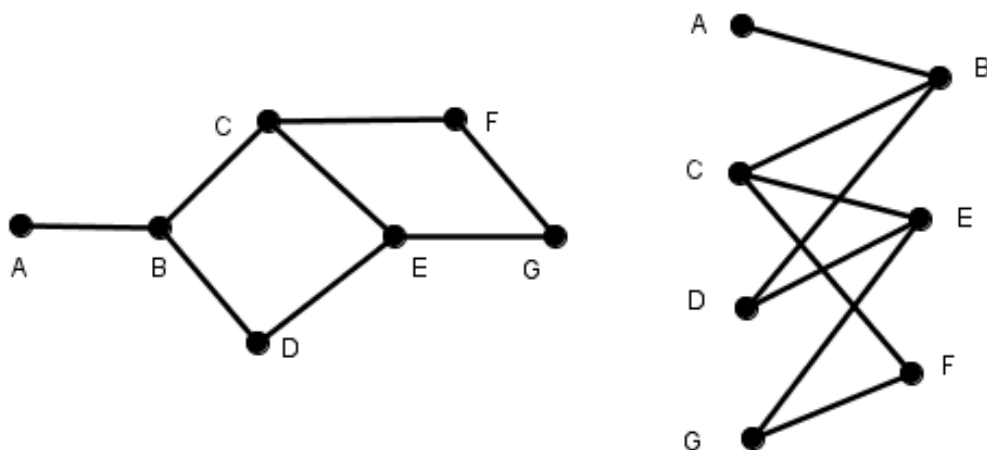


Figura 15: Grafo Bipartido.

## Teorema 7.2

Um grafo  $G$  é bipartido se, e somente se, não contém ciclos de comprimento ímpar.

### *Demonstração*

( $\Rightarrow$ ) Seja  $G$  bipartido. Se não houver ciclo em  $G$ , não há o que mostrar. Se há um ciclo em  $G$  este alterna vértices de  $X$  e  $Y$ , dois subconjuntos independentes e disjuntos. Partindo de  $X$  (por exemplo), para retornar ao ponto de partida teremos que utilizar um número par de arestas. O ciclo é, portanto, de comprimento par.

( $\Leftarrow$ ) Podemos considerar apenas grafos conexos. Seja  $G$  um grafo sem ciclos ímpares. Vamos particionar seu conjunto de vértices em dois subconjuntos  $X$  e  $Y$ , independentes e disjuntos. Consideramos primeiramente um vértice qualquer  $v$ . O subconjunto  $X$  será formado por todos os vértices  $w$  tais que exista um caminho de comprimento par entre  $v$  e  $w$ . O subconjunto  $Y$  será formado por todos os vértices  $w$  tais que exista um caminho de comprimento ímpar entre  $v$  e  $w$ . Os conjuntos  $X$  e  $Y$  são disjuntos, pois se  $w$  estivesse em  $X$  e  $Y$  ao mesmo tempo, haveria um caminho de comprimento par e um caminho de comprimento ímpar ligando  $v$  a  $w$ . Esses dois caminhos podem se cruzar (ou não) antes de chegar em  $w$ , produzindo alguns ciclos (veja a Figura 16). Como o número de arestas usado nestes ciclos é ímpar (é a soma do número de arestas dos dois caminhos) isso produziria pelo menos um ciclo ímpar em  $G$ , contrariando a hipótese.



Figura 16: Ciclos.

( $\Leftarrow$ ) **Demonstração 2**

Seja  $G$  um grafo onde todo ciclo é de comprimento par. Seja um vértice  $v$  de  $G$ . Colocamos num conjunto  $X$  o vértice  $v$  e todos os outros que estão a uma distância par de  $v$ . Os outros vértices formam o conjunto  $Y$ .

Algebrizando, teremos  $X = \{x \mid d(x, v) \text{ é par}\}, Y = \{y \mid d(y, v) \text{ é ímpar}\} = V - X$ . Onde a distância, ou seja, o número de arestas sob o grafo entre  $m$  e  $v$  é denotada por  $d(m, v)$ . Temos então, que:

- $V = X \cup Y$
- $X \cap Y = \emptyset$

Falta provarmos que não há vértices adjacentes em  $X$  nem em  $Y$ . Suponhamos, por absurdo, que exista uma aresta  $\{a, b\}$ , com  $a, b \in X$ . Já temos um caminho par entre  $a$  e  $b$  (pela maneira como criamos o conjunto  $X$ ). Acrescentando a nova aresta  $\{a, b\}$ , obteríamos um ciclo de comprimento ímpar, o que contradiz a hipótese. De modo análogo, provaríamos o mesmo para o conjunto  $Y$ . Portanto, não pode existir outra aresta entre qualquer par de vértices que já está em  $X$  (igualmente para  $Y$ ) e o grafo é bipartido. ■

**Definição 7.3:** Grafo bipartido completo.

Um grafo bipartido é chamado de *completo* quando todos os vértices de  $X$  estão ligados a todos os vértices de  $Y$ . Ele é denotado por  $K_{m,n}$ , onde  $m = |X|$  e  $n = |Y|$ . As Figuras 17 e 18 exemplificam grafos bipartidos. A Figura 18 representa um grafo completo  $K_{3,3}$ .

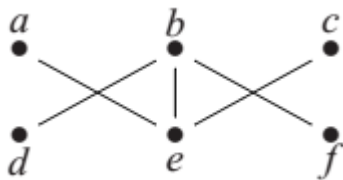


Figura 17: Grafo bipartido.

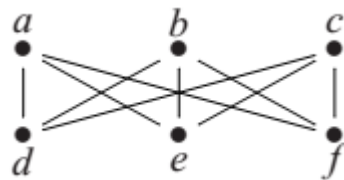


Figura 18: Grafo bipartido completo.

## 8. EMPARELHAMENTO EM GRAFOS BIPARTIDOS

### 8.1 Breve abordagem histórica

Um dos primeiros estudos relacionados a emparelhamentos em grafos foi conduzido pelo matemático húngaro Denes Konig (Figura 19). Em abril de 1914, em Paris, no Congresso de Filosofia Matemática, ele apresentou uma comunicação onde referia que todo o grafo bipartido regular admitiria um emparelhamento perfeito. Já Philip Hall (Figura 20), matemático Britânico que recebeu o prêmio Berwick LMS em 1958, demonstrou o teorema que determina o critério de existência de um emparelhamento completo.

Outra contribuição histórica à teoria do emparelhamento está associada ao matemático francês Claude Berge (Figura 21), ganhador da Medalha Euler em 1993. Berge demonstrou o teorema que caracteriza se um dado emparelhamento é ou não máximo em função da existência de um caminho M-aumentante entre vértices livres do grafo.



Figura 19: Konig.



Figura 20: Hall.



Figura 21: Berge.

## 8.2 Emparelhamento ou acoplamento

O conceito de emparelhamento é muito útil para modelar problemas de contagem envolvidos com alocação em pares de objetos: operários/máquinas, turmas/salas-de-aula, professores/disciplinas, processadores pareados etc. Em algumas aplicações, o grafo subjacente pode ser qualquer. Porém, neste trabalho, trataremos apenas de emparelhamento em grafos bipartidos.

**Definição 8.2.1:** Emparelhamento.

Sejam  $G = (V, A)$  um grafo,  $m, n \in \mathbb{N}$ . Um emparelhamento (matching, ou acoplamento) é um conjunto  $M \subset A$  tal que,  $a_m \cap a_n = \emptyset$  para todas as arestas  $a_m$  e  $a_n \in M$ , com  $m \neq n$ . Em outras palavras, as arestas não têm vértices em comum, ou seja, não existem duas arestas adjacentes neste conjunto. Este conjunto também é chamado de conjunto independente de arestas.

Para ilustrar um emparelhamento, considere o grafo  $G$  apresentado da Figura 22.

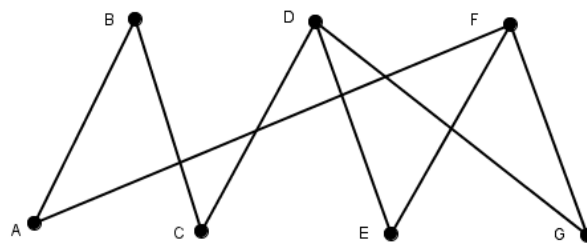


Figura 22: Grafo  $G$ .

**Exemplo 8.2.1.1:** Emparelhamento  $M_1$  do grafo  $G$ :

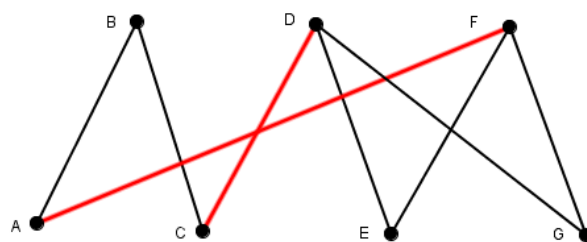
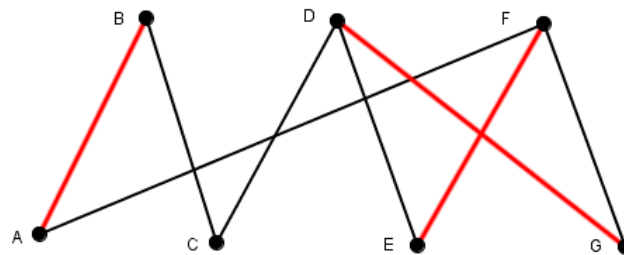


Figura 23: Emparelhamento  $M_1$ .

**Exemplo 8.2.1.2:** Emparelhamento  $M_2$  do grafo  $G$ :



**Figura 24:** Emparelhamento  $M_2$ .

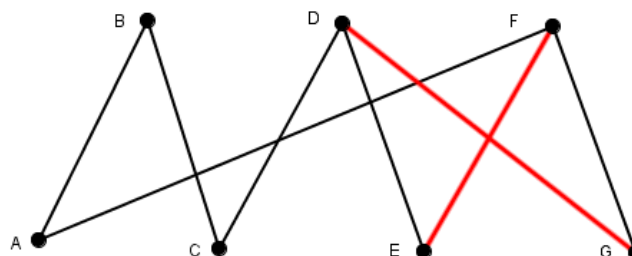
**Definição 8.2.2:** Vértice livre.

Em um grafo  $G = (V, A)$ , com emparelhamento  $M \subset A$ , dizemos que os vértices extremos de uma aresta  $a \in M$  estão emparelhados por  $M$  ou simplesmente  $M$  – emparelhados. Um emparelhamento  $M$  **satura** um vértice  $v$  e  $v$  é dito  **$M$  – saturado** se existe  $a \in M$  incidente a  $v$ ; caso contrário,  $v$  é **não  $M$  – saturado** ou livre.

São observações que seguem facilmente da definição de emparelhamento:

- $\emptyset$  define um emparelhamento.
- se  $M' \subset M$  e  $M$  é um emparelhamento, então  $M'$  também define um emparelhamento.

**Exemplo 8.2.3:**



**Figura 25:** Emparelhamento  $M' \subset M_2$ .

**Definição 8.2.4:** Emparelhamentos Máximo e Maximal.

Um emparelhamento  $M$  é dito **máximo** em  $G$  se  $M$  contém o maior número possível de arestas, isto é,  $G$  não admite emparelhamento  $M'$  com  $|M'| > |M|$ . Dizemos também que  $M$  é emparelhamento de cardinalidade máxima, neste caso. Um emparelhamento  $M$  é **maximal** em  $G$  se qualquer acréscimo de aresta a  $M$  faz com que  $M$  deixe de ser um emparelhamento. Ou seja, não existe nesse grafo  $G$  um emparelhamento  $M'$  que contém  $M$  propriamente (isto é, tal que  $M' \supset M$ ).

Note que nem todo emparelhamento maximal é máximo. Claramente, todo emparelhamento máximo é maximal. Para ilustrar o que foi dito basta observar os emparelhamentos  $M_1$  e  $M_2$  de  $G$  das Figuras 23 e 24. Temos  $M_1$  maximal, mas não é máximo, enquanto  $M_2$  é máximo (e também maximal).

**Definição 8.2.5:** Emparelhamento Perfeito.

Um emparelhamento é perfeito, se cada vértice  $v \in V$  é incidente a alguma aresta de  $M$ . Observe que todo emparelhamento perfeito é máximo, e que num grafo  $G = (V, A)$  com emparelhamento perfeito há  $|V|/2$  arestas. Num emparelhamento perfeito  $M$ , todos os vértices encontram-se  $M$  – saturados.

**Exemplo 8.2.6:** Os emparelhamentos maximal e perfeito no prisma pentagonal estão indicados nas figuras 26 e 27 respectivamente.

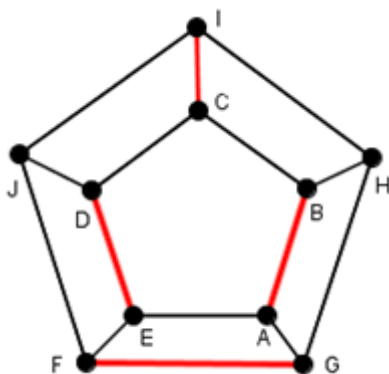


Figura 26: Emparelhamento Maximal.

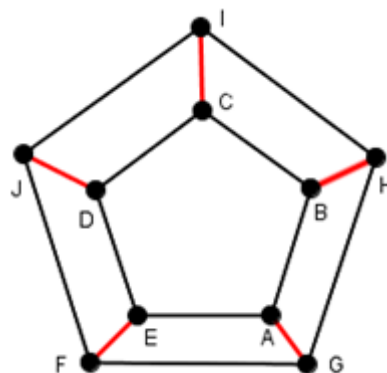


Figura 27: Emparelhamento Perfeito.



**Definição 8.2.7:** Emparelhamento Completo.

É um emparelhamento que cobre (ou satura), em um grafo bipartido, todos os vértices do conjunto  $X$ , onde  $X$  representa o conjunto dos elementos que devem ser alocados.

**Definição 8.2.8:** Caminho  $M$ -alternante.

Um caminho  $M$ -alternante  $P$  para um emparelhamento  $M$  é aquele onde as arestas se alternam entre arestas que pertencem a  $M$  e arestas que não pertencem, isto é, é um caminho tal que as arestas de  $P$  estão alternadamente em  $A \setminus M$  e  $M$ .

**Definição 8.2.9:** Caminho  $M$ -aumentante ou caminho de aumento.

É um caminho  $M$ -alternante onde os extremos (vértices final e inicial) não são saturados pelas arestas de  $M$ .

Sempre que existir um caminho  $M$ -aumentante, o emparelhamento  $M$  não será máximo em  $G$ , ou seja, haverá um emparelhamento  $M'$  máximo tal que  $M \subset M'$ . O contrário também é verdadeiro, resultando do Teorema de Berge.

**Definição 8.3.0:** Vizinhança  $S$  de  $G$ .

Dado um conjunto  $S$  de vértices em  $G$ , definimos a vizinhança de  $S$  em  $G$ , representada por  $N(S)$ , como sendo o conjunto de todos os vértices de  $G$  adjacentes aos vértices de  $S$ .

### 8.3 Teoremas

Os teoremas a seguir são de extrema importância para a solução das aplicações criadas na sequência didática da presente tese.

#### **Teorema 8.3.1:** Teorema de Berge.

O Teorema de Berge caracteriza emparelhamento máximo como sendo aqueles para os quais não há um caminho aumentante e pode ser enunciado da seguinte maneira:

Um emparelhamento  $M$  de um grafo  $G = (V, A)$  é máximo se, e só se, não existe em  $G$  um caminho  $M$ -aumentante.

#### ***Demonstração (baseada em De Santana (2014))***

( $\Rightarrow$ ) Seja  $M$  um emparelhamento em  $G$ , com  $|M| = k$ . Suponha que  $G$  possua um caminho  $M$ -aumentante  $P$ . Observe que  $P$  tem, por definição, um número par de vértices, pois é um caminho com uma quantidade ímpar de arestas (a primeira aresta pertence a  $A \setminus M$  e a última também). Tomemos  $P = v_0 v_1 v_2 \cdots v_{2m} v_{2m+1}$ . Definamos  $M' \subset A$  por

$$M' = (M \setminus \{\{v_1, v_2\}, \{v_3, v_4\}, \dots, \{v_{2m-1}, v_{2m}\}\}) \cup \{\{v_0, v_1\}, \{v_2, v_3\}, \dots, \{v_{2m}, v_{2m+1}\}\}.$$

Como  $\{v_0, v_1\}$  é a primeira aresta do caminho  $M$ -aumentante  $P$ , significa que  $\{v_0, v_1\}$  não pertence a  $M$ , mas as arestas que seguem alternadas  $\{v_1, v_2\}, \{v_3, v_4\}, \dots, \{v_{2m-1}, v_{2m}\}$  pertencem a  $M$ . Em  $\{\{v_1, v_2\}, \{v_3, v_4\}, \dots, \{v_{2m-1}, v_{2m}\}\}$  há exatas  $m$  arestas. Teremos, então,

$$\begin{aligned} |M \setminus \{\{v_1, v_2\}, \{v_3, v_4\}, \dots, \{v_{2m-1}, v_{2m}\}\}| &= \\ |M| - |\{v_1, v_2\}, \{v_3, v_4\}, \dots, \{v_{2m-1}, v_{2m}\}| &= k - m \end{aligned}$$

Já as arestas alternadas  $\{v_0, v_1\}, \{v_2, v_3\}, \dots, \{v_{2m}, v_{2m+1}\}$  pertencem ao conjunto  $A \setminus M$ , ou seja, não pertencem a  $M$ . Em  $\{\{v_0, v_1\}, \{v_2, v_3\}, \dots, \{v_{2m}, v_{2m+1}\}\}$  há exatas  $m + 1$  arestas. Teremos, então  $|\{v_1, v_2\}, \{v_3, v_4\}, \dots, \{v_{2m-1}, v_{2m}\}| = m + 1$  e  $|M'| = |(M \setminus \{\{v_1, v_2\}, \{v_3, v_4\}, \dots, \{v_{2m-1}, v_{2m}\}\}) \cup \{\{v_0, v_1\}, \{v_2, v_3\}, \dots, \{v_{2m}, v_{2m+1}\}\}| =$

$$= |M| - |\{v_1, v_2\}, \{v_3, v_4\}, \dots, \{v_{2m-1}, v_{2m}\}| + |\{v_0, v_1\}, \{v_2, v_3\}, \dots, \{v_{2m}, v_{2m+1}\}| =$$

$$= k - m + m + 1 = k + 1 = |M| + 1 \Rightarrow |M'| = |M| + 1.$$

Ou seja, temos que  $M'$  é um emparelhamento em  $G$  com  $|M'| = |M| + 1$  e, portanto  $M$  não tem cardinalidade máxima em  $G$ , pois existe um emparelhamento  $M'$  que possui cardinalidade maior que o emparelhamento  $M$ . Logo, se  $G$  possui caminho  $M$ -aumentante, então  $M$  não tem cardinalidade máxima.

( $\Leftarrow$ ) Por outro lado, suponhamos que o emparelhamento  $M$  não tem cardinalidade máxima em  $G$ . Consideremos  $M'$  um emparelhamento de cardinalidade máxima em  $G$ . Logo  $|M'| > |M|$ . Tomemos como auxílio visual a Figura 28.

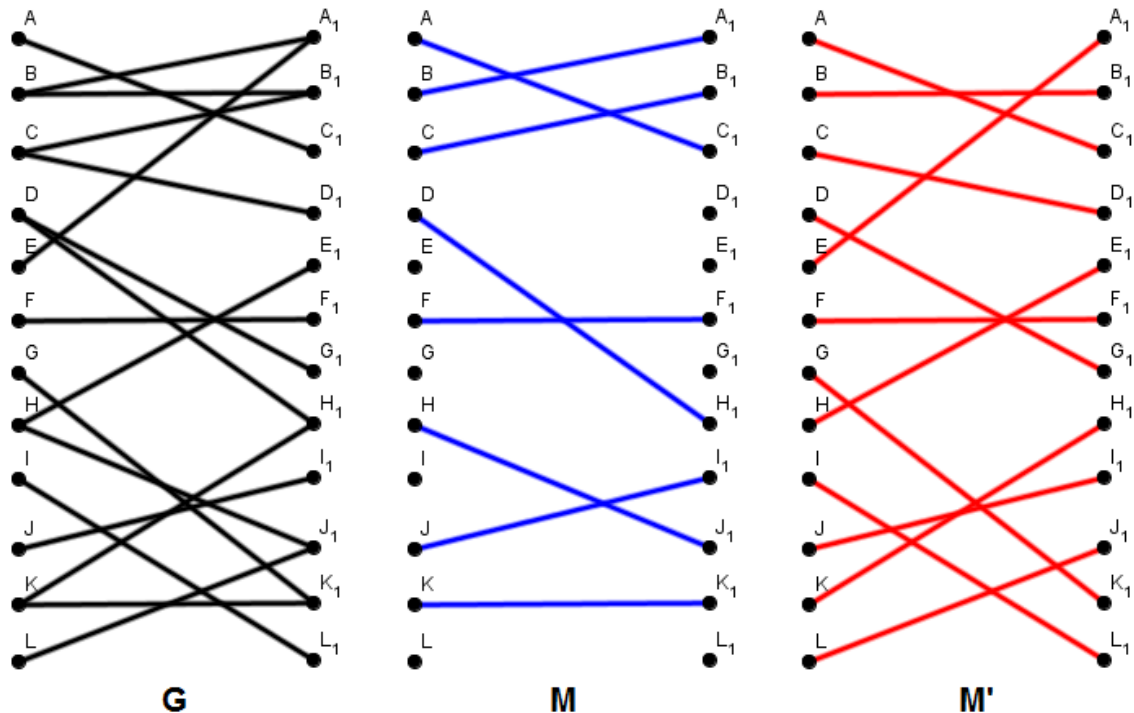
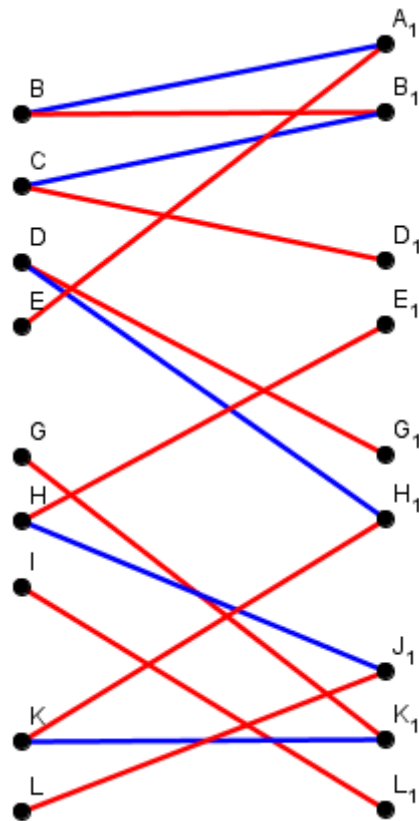


Figura 28: Grafo  $G$  e emparelhamentos  $M$  e  $M'$  de  $G$ .

Denotemos por  $M\Delta M' = (M \cup M') - (M \cap M')$  a diferença simétrica de  $M$  e  $M'$ , isto é, o conjunto das arestas que estão em  $(M \cup M')$ , mas não estão em  $(M \cap M')$ . Construíamos  $H = G[M\Delta M']$  (Figura 29). Em outras palavras,  $H = (V', M\Delta M')$  é um subgrafo induzido por  $M\Delta M'$  (vide **Definição 4.3.2**), ou seja:

- $M\Delta M' \subset A$ ;
- $V'$  é o conjunto de vértices de  $G$  que são extremos das arestas de  $M\Delta M'$ .



**Figura 29: Grafo  $H=G[M\Delta M']$ .**

Cada vértice em  $H$  tem grau 1 ou 2, já que  $H$  pode conter ou arestas vindas de  $M$ , ou arestas vindas de  $M'$ . Logo cada componente conexa de  $H$  é um caminho com arestas alternadamente em  $M$  e  $M'$  (em um caminho, não haverá duas arestas consecutivas pertencentes ao mesmo emparelhamento pelo fato de contrariar a definição de emparelhamento).

Veamos o subgrafo H disposto de tal maneira que sejam notórias as suas componentes conexas (Figura 30).

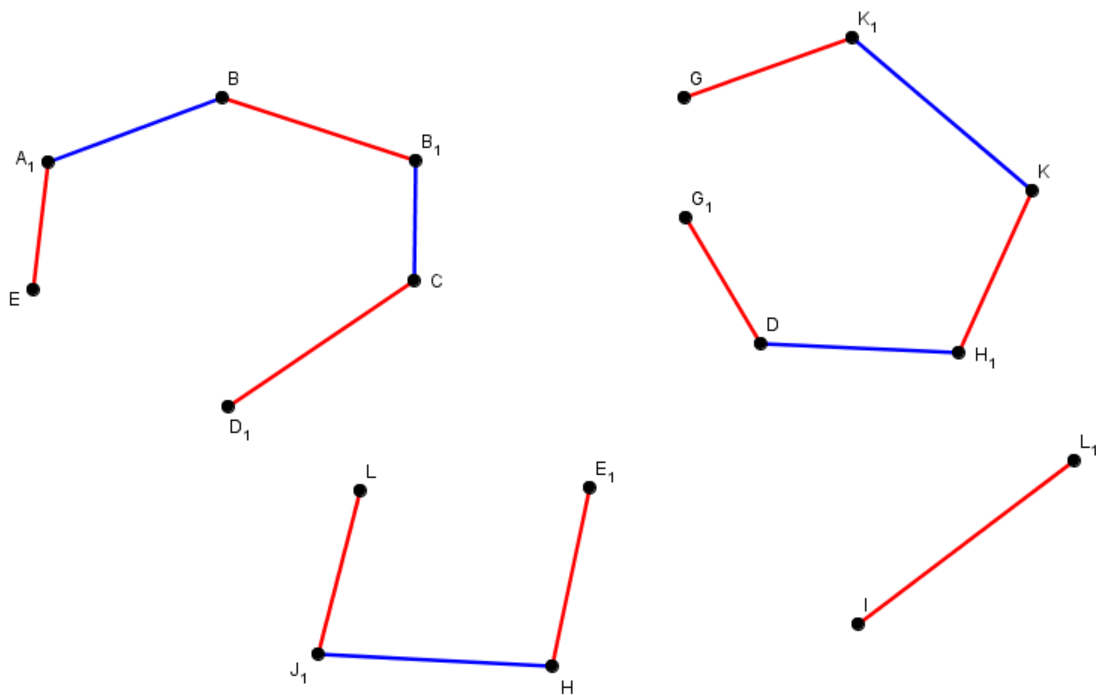


Figura 30: Componentes conexas 1..

Mas H tem mais arestas de  $M'$  do que de M e, portanto alguma componente, que é um caminho P em H, deve começar e terminar com arestas de  $M'$  (no nosso exemplo, todas as componentes são desse tipo). Não poderíamos ter SOMENTE componentes conexas dos tipos ilustrados na Figura 31, pois teríamos mais arestas de M do que de  $M'$  ou quantidades iguais de arestas, o que é um absurdo.

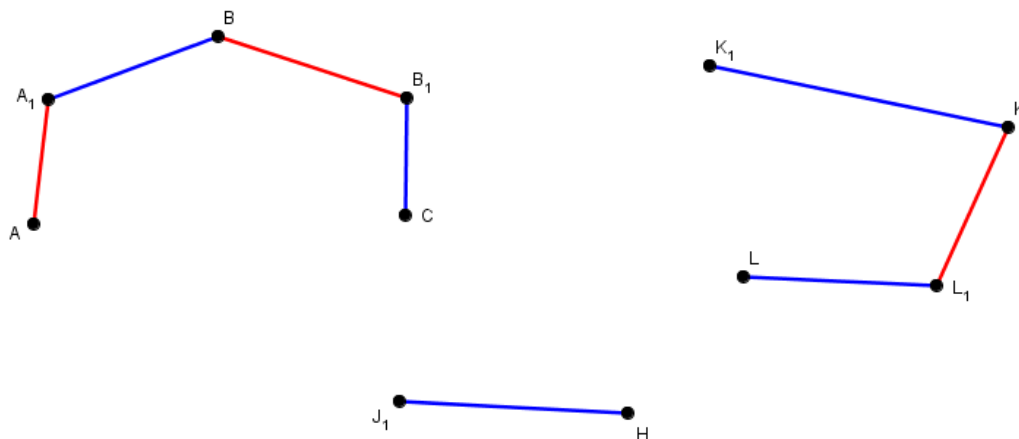


Figura 31: Componentes conexas 2..

Como a origem e o término de  $P$  são vértices  $M'$  – saturados em  $H$ , segue que são vértices não  $M$  – saturados em  $G$ . Logo  $P$  é o caminho  $M$  – aumentante procurado. Portanto, se  $M$  não tem cardinalidade máxima em  $G$ , então  $G$  possui caminho  $M$  – aumentante. ■

É possível construir um algoritmo que, a partir de um emparelhamento  $M$  em um grafo bipartido, encontra um caminho  $M$ -aumentante ou mostra que ele não existe, verificando assim, que  $M$  é máximo (ver Lovász, 2010).

### **Teorema 8.3.2:** Teorema de Hall.

O teorema de Hall dá condições necessárias e suficientes para a existência de um emparelhamento perfeito e pode ser enunciado da seguinte maneira:

Seja  $G$  um grafo bipartido com bipartição  $(X, Y)$ . Então  $G$  contém um emparelhamento que satura todos os vértices de  $X$  se, e somente se,  $|N(S)| \geq |S|$ , para todo  $S \subset X$ .

### **Demonstração (baseada em De Santana (2014))**

( $\Rightarrow$ ) Suponhamos que o grafo  $G$  tenha um emparelhamento  $M$  que satura todos os vértices de  $X$  e seja  $S$  um subconjunto de  $X$ . Como os vértices de  $S$  estão saturados por arestas de  $M$ , e essas arestas têm vértices únicos em  $N(S)$ , temos que a cardinalidade dos vizinhos de  $S$  é no mínimo igual à cardinalidade do subconjunto  $S$ , ou seja,  $|N(S)| \geq |S|$ .

( $\Leftarrow$ ) Sejam  $G$  um grafo bipartido tal que  $|N(S)| \geq |S|$ , para todo  $S \subset X$  e  $M'$  um emparelhamento máximo em  $G$ . Suponhamos, por absurdo, que  $M'$  não satura todos os vértices de  $X$ . Então existe um vértice  $u$  em  $X$  tal que  $u$  é não  $M'$ –saturado. Criemos um conjunto  $Z$  de tal maneira que seus elementos sejam vértices alcançáveis por  $u$  através de um caminho  $M'$ –alternante. Como  $M'$  é máximo,  $u$  deve ser o único vértice de  $Z$  não  $M'$ –saturado. Definamos  $S = Z \cap X$  e  $T = Z \cap Y$ .

Os vértices em  $S \setminus \{u\}$  estão emparelhados por  $M'$  com os elementos de  $T$ .

Portanto,  $|T| = |S| - 1$  e  $N(S) \supset T$ . Na verdade, temos  $N(S) = T$  uma vez que cada vértice em  $N(S)$  está conectado a  $u$  por um caminho  $M'$ -alternante. Portanto,  $|N(S)| = |T| = |S| - 1 < |S|$ , o que contradiz a hipótese. ■

Deve-se notar que a caracterização dada pelo Teorema de Hall não fornece uma maneira prática para ver a existência de um emparelhamento perfeito porque o número de subconjuntos de  $X$  cresce rapidamente com o aumento do tamanho do grafo.

## 9. SEQUÊNCIA DIDÁTICA

No Ensino Médio (EM), em geral no 2º ano, os alunos se deparam com problemas de contagem. Vejamos um exemplo simples desse tipo de problema: De quantas maneiras distintas podemos hospedar 6 casais em 6 quartos de maneira que cada integrante do casal permaneça junto? De imediato recebemos a resposta 6 fatorial. Tais situações elementares são resolvidas com ferramentas clássicas de contagem, como permutação e combinação. Mas o desafio nem sempre poderá ser tão simples assim. Em determinadas situações, desejamos verificar se é possível hospedar os casais quando há restrições para sua distribuição pelos quartos.

Para abordar o assunto, o autor criou sequências didáticas sobre Emparelhamento em Grafos Bipartidos. Ele acredita que este conteúdo pode complementar e fortalecer os métodos de contagem quando surgirem situações-problema sobre alocação de pares, como mencionado na introdução de **8.2**.

Para auxiliar professores e alunos do EM, as sequências didáticas criadas inserem algumas nomenclaturas e teoremas sobre emparelhamento de forma gradual, para significativa progressão do estudante, e de forma descontraída objetivando manter a atenção tanto dos alunos quanto dos professores.

Esta abordagem didática segue em anexo em forma de slides, podendo também ser apreciada no formato audiovisual disponibilizada no link (<https://www.youtube.com/playlist?list=PLJRNmvuHbdqRUryhX66F-3dsns1Re8ioS>).



Em formato audiovisual, foram elaborados cinco vídeos. A saber:

### **9.1 Emparelhamento Perfeito (Vídeo 01)**

Neste vídeo, contamos uma história ambientada na cidade de Paraty-RJ, onde surge um problema de alocação de hóspedes em uma pousada chamada Coco Verde.

De maneira descontraída, introduzimos as nomenclaturas básicas sobre emparelhamento em grafos bipartidos e utilizamos o Teorema de Berge para solucionar o problema proposto.

### **9.2 Nomenclaturas (Vídeo 02)**

No vídeo 02, apresentamos de maneira resumida e formal os termos que surgiram no vídeo 01 como, por exemplo, Caminho Alternante e Vértice Livre.

### **9.3 Emparelhamento Completo (Vídeo 03)**

Neste terceiro vídeo, abordamos o Teorema de Hall contando uma história que antecede a viagem com destino a Paraty e é ambientada na rodoviária Novo Rio.

O problema que surge, desta vez, envolve a tentativa (inusitada) de alocar 5 ônibus em 6 vagas. Acha fácil, caro leitor? Assista ao vídeo [Emparelhamento Completo](#) e perceberá que não é tão simples assim.

### **9.4 Demonstração do Teorema de Hall (Vídeos 04 e 05)**

Os penúltimo e último vídeos apresentam a demonstração do Teorema de Hall em duas partes: vídeo 04 a demonstração da ida; no vídeo 05, a volta.

## 10. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Visando a complementação dos métodos de contagem, esta tese abordou um assunto ainda desconhecido entre os alunos do Ensino Médio: o *emparelhamento em grafos bipartidos*. Porém, conversando com os colegas de profissão, o autor percebeu que o assunto também era desconhecido entre a maior parte dos professores de matemática.

É trivial dizer que para ensinar algo a alguém é necessário o conhecimento sobre o assunto a que se pretende ensinar. Para tentar resolver tal problema, o autor criou sequências didáticas abordando esse novo conteúdo.

Primeiramente, foram criados dois problemas motivacionais para despertar interesse e curiosidade tanto nos professores quanto nos alunos. Em seguida, o autor desenvolveu uma história apresentada em formato audiovisual, possibilitando a inserção dos conceitos e definições de forma gradativa com direção à solução dos problemas. E por fim, foram apresentadas as novas ferramentas que fortificam os métodos de contagem para a resolução de problemas de alocação: os teoremas de Berge e Hall.

O autor acredita que este método pode contribuir significativamente para o ensino–aprendizagem do emparelhamento de grafos bipartidos, no Ensino Médio.

## 11. BIBLIOGRAFIA

[1] LOVÁSZ, László. Matemática Discreta. Rio de Janeiro. SBM. 2010.

[2] DE SANTANA FERREIRA, Vêronica. DE GRAFOS A EMPARELHAMENTOS: Uma possibilidade viável de encantar-se com a matemática. Dissertação de mestrado. Sergipe: Universidade Federal de Sergipe, 2014.

[3] BOAVENTURA NETTO, P. O. Grafos: Teoria, Modelos e Algoritmos. São Paulo. E. Blucher. 2001

[4] LUCCHESI L., Claudio. Introdução à Teoria dos Grafos. Rio de Janeiro. Instituto de Matemática Pura e Aplicada. 1979.

[5] FOMIN, Dmitri. Círculos Matemáticos - A Experiência Russa. Rio de Janeiro. IMPA. 2012.

[6] LUZ FURTADO, Antonio. Teoria dos Grafos: Algoritmos. Rio de Janeiro. Ed. Livros Técnicos e Científicos. 1973.

[7] JURKIEWICZ, Samuel. Grafos-Uma Introdução. OBEMEP, 2009. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/docs/apostila5.pdf>. Acesso em Nov. 2015.

[8] PIMENTEL, Elaine. Grafos-Aperfeiçoamento. UFMG, 2007. Disponível em <http://www.mat.ufmg.br/~elaine/Aperfeicoamento/aula01.pdf>. Acesso em Dez. 2015.

[9] Gouveia, Maria Celeste de. Um pequeno histórico da Teoria dos Grafos. UC, 2003. Disponível em [http://www.mat.uc.pt/~mcag/FEA2003/Teoria\\_de\\_Grafos.doc](http://www.mat.uc.pt/~mcag/FEA2003/Teoria_de_Grafos.doc). Acesso em Jan. 2016.

# APÊNDICE A – SOFTWARES UTILIZADOS NA PRODUÇÃO AUDIOVISUAL

Neste apêndice, pretendemos explicar de forma sucinta as ferramentas tecnológicas utilizadas para a produção da sequência didática no formato audiovisual.

## A.1 TexStudio

O TexStudio foi o programa responsável pela confecção dos slides.



Dessa maneira, obtemos um tipo especial de grafo, chamado Grafo Bipartido (ou bipartite), como mostra a figura 3.1.



Figura 32: Ícone do programa TexStudio.

**Grafo Bipartido**  
Um Grafo é dito Bipartido se o conjunto de vértices pode ser particionados em dois conjuntos X e Y tais que toda aresta conecta um vértice em X a um vértice em Y.

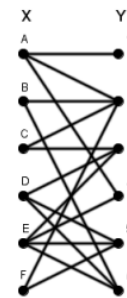


Figure: 3.1

Figura 33: Exemplo de slide produzido no TexStudio

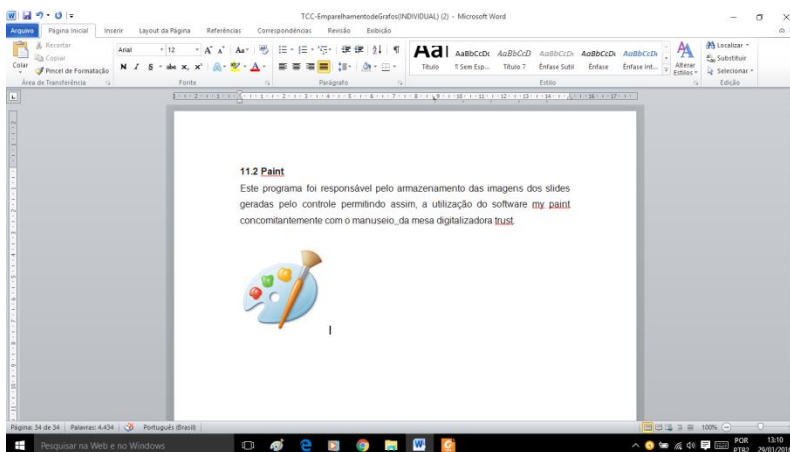
O TexStudio é um editor de LaTeX que facilita a entrada das fórmulas e tem um excelente sistema de auto completar e highlight que agilizar a criação dos textos.

## A.2 Paint

Este programa foi responsável pelo armazenamento das imagens dos slides geradas pelo controle permitindo assim, a utilização do software my paint concomitantemente com o manuseio da mesa digitalizadora trust.



**Figura 34: Ícone do programa Paint.**



**Figura 35: Exemplo de imagem gerada pelo controle Print.**

O Paint é um aplicativo que faz parte do grupo Acessórios do Windows. Permite o desenvolvimento, edição e impressão de imagens digitais que são salvas automaticamente como Bitmaps, podendo também ser salvas como gifs ou jpegs.

### A.3 My Paint e Mesa Digitalizadora Trust

O My Paint é o software que faz o hardware mesa digitalizadora funcionar. Ambos são utilizados simultaneamente e permitem a criação da escrita na imagem da tela do computador.



Figura 36: Ícone do programa My Paint.



Figura 37: Mesa Digitalizadora Trust.

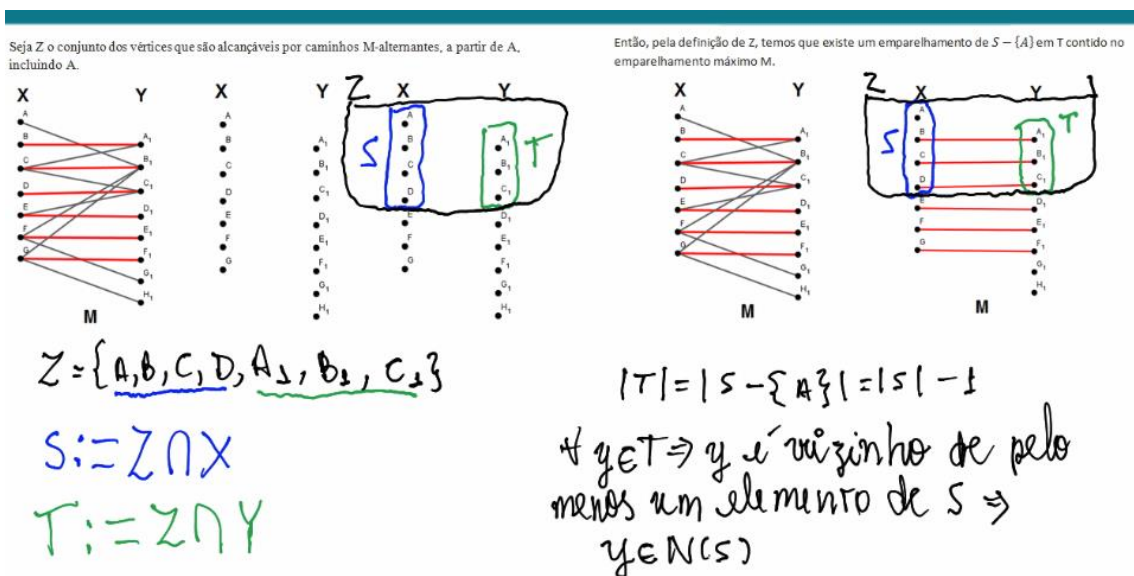


Figura 38: Escrita na imagem da tela do computador.

#### A.4 Adobe Photoshop

O Adobe Photoshop foi o programa utilizado para realizar a remoção do plano de fundo das imagens utilizadas na produção da sequência didática.



Figura 39: Ícone do programa Photoshop.



Figura 40: Imagens antes e depois do Photoshop.

#### A.5 Camtasia Studio

O **Camtasia Studio** é uma ferramenta de captura e gravação de tela. O programa, além do **screen recorder** (gravador de tela), possui diversas opções para edição e montagem de vídeos e foi utilizado para a gravação e a edição da sequência didática, proposta nesta tese, no formato audiovisual.



Figura 41: Ícone do programa Camtasia.



Figura 42: Interface do programa Camtasia.

# APÊNDICE B – SLIDES PRODUZIDOS DAS SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS

Emparelhamento Perfeito 000000000000 Emparelhamento Completo 000000000000

Emparelhamento Perfeito 000000000000 Emparelhamento Completo 000000000000

## Sequência Didática

Tema: Emparelhamento em Grafos Bipartidos

Bruno César  
PROFMAT-SBM  
February 4, 2016

### Sumário

- 1 Emparelhamento Perfeito
  - Teorema de Berge
- 2 Emparelhamento Completo
  - Teorema de Hall

Emparelhamento Perfeito 000000000000 Emparelhamento Completo 000000000000

Emparelhamento Perfeito 000000000000 Emparelhamento Completo 000000000000

### Motivação

No Ensino Médio, em geral no 2º ano, os alunos se deparam com problemas de contagem. Vejamos um exemplo simples desse tipo de problema: De quantas maneiras distintas podemos hospedar 6 casais em 6 quartos de maneira que cada integrante do casal permaneça junto? De imediato recebemos a resposta 6 fatorial. Tais problemas abordados são resolvidos com ferramentas clássicas como permutação e combinação. Mas o problema nem sempre poderá ser tão simples assim. Será que sempre conseguiremos contar até 6 fatorial? Melhor, será que sempre conseguiremos contar até 6? Vejamos a história a seguir, baseada em fatos reais.

### Pousada Coco Verde

Em janeiro de 2016, minha noiva e eu fomos passar um final de semana em Paraty e decidimos nos hospedar na pousada Coco Verde. Era pequena. Havia apenas 6 quartos. Na hora do check-in, seis casais que se hospedariam, incluindo minha noiva e eu, tínhamos preferências de acomodações distintas:

- O casal A preferia os quartos 1, 2 e 4.
- O casal B preferia os quartos 2 e 6.
- O casal C preferia os quartos 2 e 3.
- O casal D preferia os quartos 3, 5 e 6.
- O casal E preferia os quartos 3, 4, 5 e 6.
- Minha noiva e eu preferíamos os quartos 2 e 5.

Emparelhamento Perfeito 000000000000 Emparelhamento Completo 000000000000

Emparelhamento Perfeito 000000000000 Emparelhamento Completo 000000000000

### É possível contar até 6?

Ao analisar as fichas que nós, futuros hóspedes, preenchemos, a dona da pousada viu qual era minha profissão e logo me pediu ajuda: "professor, o senhor acha que vou conseguir hospedar todos os casais respeitando suas preferências?".

Para mim, sua pergunta equivalia a "qual é o número máximo de subconjuntos de tamanho 2 que é possível formar com esses 12 elementos (respeitando as restrições)?" Ou, de modo simplificado, "podemos contar até 6?". Nesse momento, percebi que as ferramentas de análise combinatória não seriam suficientes para resolver tal problema de contagem.

### Pousada Coco Verde (A solução)

Chamei a dona ao canto e disse que poderíamos desenhar o grafo daquela situação para tentarmos resolver o problema. Portanto, desenhamos 12 vértices, 6 representando os casais e 6 representando os quartos. Conectamos os casais aos os quartos respeitando as preferências. Não precisamos conectar casais com casais mesmo que se conhecessem, pois isso não interferiria no problema.

Podemos organizar os vértices de modo que vértices representando casais estejam à esquerda e vértices representando os quartos, à direita. Nesta situação, toda aresta conectará um vértice da esquerda a um vértice da direita. Denotaremos o conjunto de vértices à esquerda de  $X = \{A, B, C, D, E, F\}$  e o conjunto da direita de  $Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .



Dessa maneira, obtemos um tipo especial de grafo, chamado Grafo Bipartido (ou bipartite), como mostra a figura 3.1.

**Grafo Bipartido**  
Um Grafo é dito Bipartido se o conjunto de vértices pode ser particionados em dois conjuntos X e Y tais que toda aresta conecta um vértice em X a um vértice em Y.

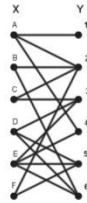


Figure: 3.1

Pedi que a dona ligasse os casais aos quartos da maneira que achasse melhor. Como ela estava um pouco nervosa, acabou criando o emparelhamento M da figura 3.2.

**Emparelhamento**  
Emparelhamento é um conjunto de arestas onde não existem duas arestas incidentes a um mesmo vértice.

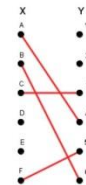


Figure: 3.2

Com o emparelhamento formado, dois casais não se hospedariam na pousada e a rentabilidade da mesma ficaria reduzida prejudicando a dona. Arguem-se que, para que todos se hospedassem ali, deveríamos encontrar um emparelhamento perfeito, que é um emparelhamento que tem todos os vértices conectados.

Graças ao matemático francês Claude Berge (figura 3.3), conseguiremos determinar se há um emparelhamento maior (com mais arestas) que o já encontrado.



Figure: 3.3

Como demonstrou Berge, se conseguirmos encontrar um caminho que comece e termine com vértices livres alternando entre arestas que pertencem e que não pertencem ao emparelhamento, então existe um emparelhamento M' maior que o inicial. Esse tipo de caminho chama-se Caminho M-aumentante.

**Vértice Livre**  
Vértice livre ou vértice não M-saturado é um vértice que não pertence ao emparelhamento M.

Com o auxílio das figuras 3.1 e 3.2, encorajei a dona da pousada a desenhar tal caminho (D5F2) como mostra o último grafo da figura 3.4.

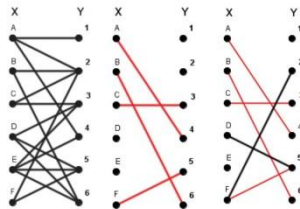


Figure: 3.4

Pedi a mesma que considerasse o caminho M-aumentante (D5F2), que retirasse do emparelhamento M toda aresta desse caminho que pertence a M e que acrescentasse a M as outras arestas do caminho (figura 3.5).

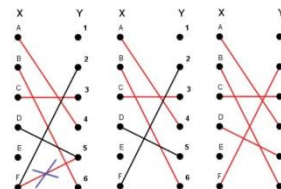


Figure: 3.5

"Nossa! Agora podemos hospedar 5 casais!" exclamou a dona. Em outras palavras, o resultado é um novo emparelhamento  $M'$  que contém uma aresta a mais que  $M$ . Pedi que ela repetisse os passos anteriores em  $M'$ .

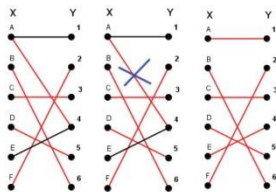


Figure: 3.6

"Professor, eu não acreditava que pudéssemos contar até 6 nessa situação. Muito obrigado! Terás uma diária por minha conta." ofereceu a dona da pousada. Quando fiz o check-in e pensei que curtiria a viagem com minha noiva, a dona da pousada perguntou-me "professor, e se eu quisesse apenas saber se poderia hospedar todos ou não, sem precisar indicar os quartos de imediato?"

Esse tipo de pergunta possibilitará a inserção de novos termos como, por exemplo, Emparelhamento Completo e Vizinhança.

Para responder a pergunta à dona da pousada, reporei-me a ela da mesma forma que estou me dirigindo a você, caro leitor: contando uma história.

Ao comparecer à plataforma rodoviária para tomar o ônibus a Paraty, presenciei uma cena muito estranha: repetidamente, um fiscal de ônibus revirava uma papelada e olhava para os ônibus, revirava a papelada e olhava para os ônibus. Fui pedir-lhe informação para saber se eu estava na plataforma correta.

Como não me deu atenção, pois estava todo atrapalhado, perguntei se eu poderia ajudá-lo em algo. Ele então respondeu-me: "meu senhor, eu tenho que comunicar rapidamente ao meu chefe se é possível alocar esses 5 ônibus nessas 6 vagas".

Então, a dona da pousada me interrompeu a história para falar: "mas essa é muito fácil, professor, basta colocarmos um ônibus em cada vaga e ainda sobrar uma". Disse a ela que foi justamente o que falei para o fiscal. Mas ele riu e explicou-me que não era tão simples assim: "meu senhor, há ali um ônibus de cada empresa. Cada empresa tem controle distinto da plataforma de acordo com as ações que possui. Vou tentar explicar melhor". Então ele disse que os ônibus:

- da empresa A, que possuía mais ações, só poderiam estacionar nas vagas 1, 2, 4 e 5.
- da empresa B só poderiam estacionar nas vagas 2 e 3.
- da empresa C só poderiam estacionar na vaga 3.
- da empresa D só poderiam estacionar nas vagas 2 e 3.
- da empresa E só poderiam estacionar nas vagas 4, 5 e 6.

"Já sei, professor! O senhor fez o mesmo que aqui, em Paraty: desenhou um grafo da situação. Acertei?". Respondi que foi exatamente isso.

Tomei um daqueles papéis do fiscal e desenhei 11 vértices, 5 representando os ônibus e 6 representando as vagas. Conectamos os ônibus às vagas respeitando as restrições. Como não há a necessidade de conectarmos ônibus com ônibus nem vagas com vagas, conseguimos organizar os vértices em um grafo bipartido onde  $X = \{A, B, C, D, E\}$   $Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  conforme ilustra a figura 3.7.

Porém, dessa vez estávamos à procura da existência de um Emparelhamento Completo.

**Emparelhamento Completo**  
 É um emparelhamento que cobre (ou satura), em um grafo bipartido, todos os vértices do conjunto X, onde X representa o conjunto dos elementos que devem ser alocados.

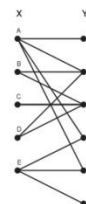


Figure: 3.7

## Matemático Philip Hall

Graças ao matemático britânico Philip Hall (figura 3.8), conseguiremos determinar se há um emparelhamento completo. Como demonstrou Hall, em um grafo  $G$  bipartido com partição  $(X, Y)$ , existe um emparelhamento completo se e somente se,  $|N(s)| \geq |s|$ , para todo subconjunto  $S$  de  $X$ .

## Conjunto Vizinhaça

$N(s)$  é conhecido como conjunto vizinhaça de  $S$ . Em outras palavras, seus elementos são todos os vértices que se conectam (são vizinhos) aos elementos de  $S$ .



Figure: 3.8

## A Rodoviária (A solução)

Sendo assim, o fiscal e eu analisamos alguns subconjuntos de  $X$  até encontramos o conjunto  $S = \{B, C, D\}$  (figura 3.9), que possuía a quantidade de elementos menor que a quantidade de vértices que se conectavam a eles. Agora, o fiscal já poderia informar o seu chefe de que não existe a possibilidade de todos os ônibus estacionarem simultaneamente. E poderia também me dizer se eu estava na plataforma correta, como eu havia perguntado de início.

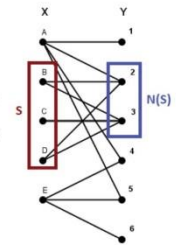


Figure: 3.9

## Conclusão da História

"Nossa, professor! Muito legal essa disciplina sobre grafos. Eu gostaria de ter aprendido essa matéria no Ensino Médio (E.M.). Assim não passaria a vergonha que passei hoje." desabafou a dona da pousada. Respondi que seria interessante incluí-la na no E.M. se tivesse o objetivo de complementar os métodos de contagem.

"E o senhor não teria trazido para Paraty alguns exercícios sobre emparelhamentos?" indagou a dona da pousada. Repliquei que estava a passeio mas que poderia lhe enviar alguns problemas por e-mail. "Muito obrigada, professor. Todas as diárias por conta da casa". E foi assim que comecei a morar em Paraty.