

PROFMAT-IMP
EMIDIO DE OLIVEIRA SARAIVA JUNIOR

ASTROLÁBIO: Calcular a Latitude com o Sol e a tabela de declinação ou com a Estrela Polar

Orientador: Paulo Cezar Pinto Carvalho

Rio de Janeiro-RJ

2016

DEDICATÓRIA

Dedico essa vitória a Deus, pois, até aqui tem me ajudado, orientado, guiado meus passos e nos momentos em que estive sem ânimo ou forças para continuar, levantou algumas pessoas importantes para me sustentar, como meus pais, Maria de Fátima e Emidio, e minha esposa, Cristiane, que soube compreender os momentos de preocupação e os momentos que tive que parar qualquer coisa para estudar, essas pessoas tem lugar de destaque como ferramentas auxiliadoras. E ao IMPA que nos proporcionou a chance de cursar um Mestrado e assim aperfeiçoar ainda mais nossos conhecimentos.

AGRADECIMENTO

Agradeço a Deus por esse presente, pela capacidade para conseguir passar por cada prova e trabalho, sem Ele seria impossível. Agradeço aos meus pais, Maria de Fátima e Emídio, que me sustentaram em oração durante toda a caminhada, noites de oração. Agradeço a minha esposa, que não permitiu, por nenhum momento que eu desistisse, meu real obrigado, agradeço também a minha irmã Isabela que sempre me ajudou em torcida e oração, agradeço as orações da minha sogra, Rute, e a todos que participaram direta e indiretamente nesta conquista. Agradeço aos meus professores que me mostraram novos caminhos e uma maneira diferente de olhar para a matemática, uma maneira ampla e bela. Obrigado.

RESUMO

No presente trabalho é abordado o Astrolábio, um instrumento criado há muitos séculos e desenvolvido com a participação direta e indireta de muitos matemáticos da antiguidade, foi utilizado por muito tempo para diversos fins. Uma dessas utilizações é a de calcular a latitude. O astrolábio sofreu modificações com o passar do tempo para melhor se adequar a uma função específica. Assim, o Astrolábio Náutico, foi a última modificação sofrida, permitindo uma melhor funcionalidade para navegação. Sua utilização é através da observação dos astros, mais especificamente da Estrela Polar ou do Sol em combinação com a tabela de declinação solar. Através dessas observações e de cálculos simples é possível ter a latitude de um determinado ponto, assim já se tornava possível alcançar um determinado destino com mais segurança. Com o presente trabalho pode-se perceber que é possível com exemplos de situações antigas incluí-las como exemplo para trabalhar em sala de aula e mostrar a importância da matemática desde muito tempo, uma matemática que é trabalhada no ensino fundamental de extrema importância.

O programa Geogebra é apresentado como uma ferramenta de grandes funções para criação de diversos tipos de figuras e objetos, mas com uma simplicidade nas suas ferramentas que até de modo intuitivo é possível realizar algumas construções. Esse processo de observação dos astros, isto é, medir a distância zenital, do Sol, e calcular a latitude com a declinação do solar, foi devidamente simulado no programa Geogebra, mostrando assim, o movimento de translação da Terra e o cálculo automático da latitude para cada momento da translação, ou seja, para cada dia do ano. Outra simulação que se utilizou o Geogebra foi a de medir a distância zenital. Com isso pode-se ver o funcionamento do astrolábio virtualmente de maneira prática e simples.

Palavras-chave: Astrolábio, latitude e Geogebra

Lista de figura

Figura 1. astrolábio esférico.....	12
Figura 2. astrolábio planisférico	13
Figura 3. astrolábio náutico.....	14
Figura 4. Partes do astrolábio náutico.....	14
Figura 5. Medir altura com o astrolábio náutico.....	15
Figura 6. posicionamento da Terra nos Equinócios e Solstícios	19
Figura 7. Estrela Polar	21
Figura 8. Tábua Astronômica	23
Figura 9. Estrela Polar como referência para a latitude	24
Figura 10. Utilização do astrolábio.....	25
Figura 11. Modelo prático para calcular a latitude	25
Figura 12. Tela principal do Geogebra.....	30
Figura 13. Janela de álgebra, 2D e 3D	30
Figura 14. Comparação entre as ferramentas das janelas 2D e 3D	31
Figura 15. Protocolo de Construção.....	33
Figura 16. Caixa de Entrada	33
Figura 17. Estilos das Linhas escondidas	34
Figura 18. Astrolábio no Geogebra.....	35
Figura 19. Janela 3D.....	35
Figura 20. Janela 2D sem uso.....	36
Figura 21. Construindo o Astrolábio	37
Figura 22. Construindo o Astrolábio	37

Figura 23. Construindo o Astrolábio	38
Figura 24. Astrolábio finalizado	39
Figura 25. Construção da simulação.....	40
Figura 26. Construção da simulação.....	41
Figura 27. Construção da simulação.....	41
Figura 28. Construção da simulação.....	42
Figura 29. Construção da simulação.....	43
Figura 30. Construção da simulação.....	44

Sumário

Introdução	8
1.Contexto Histórico: Astrolábio	10
1.1.História do Astrolábio.....	10
1.2.Composição de um astrolábio.....	14
1.3- Utilização do astrolábio.....	15
2- Calcular a latitude de um ponto.....	17
2.1- Movimentos da Terra.....	17
2.2. A latitude	20
2.3. Os astros	21
2.3.1. As estrelas	21
2.3.2. O Sol.....	22
2.4. Tabela de Declinação.....	22
2.5. Calcular a latitude.....	23
2.5.1. Calcular a latitude de um ponto com a ajuda da Estrela Polar	23
2.5.2. Calcular a latitude observando o Sol e a tabela de declinação	24
3. O software Geogebra	28
3.1. História	28
3.2. O programa Geogebra.....	29
3.2.1- Funções e Comandos Importantes do Geogebra.....	32
4. Construção do Astrolábio e do movimento da Terra com o cálculo da latitude	35
4.1. Sequência de construção do Astrolábio.....	36
4.2. Construção do movimento da Terra em torno do Sol com o Astrolábio calculando a latitude para cada ponto do movimento	39

Conclusão	45
Referências	46

Introdução

O presente trabalho tem como objetivo estudar todo o desenvolvimento, funcionamento e utilização de uma ferramenta muito importante e utilizada por muitos séculos, inclusive mostrar, de uma maneira atrativa, ou seja, como calculavam a latitude, a utilização da matemática do ensino fundamental aplicada em sala de aula, pois para esse processo é utilizado fundamentos básicos de geometria e trigonometria. Criada não por uma só pessoa, mas com a união de várias mentes, ou seja, celebres matemáticos de épocas diferentes, o Astrolábio, mais precisamente, Astrolábio Náutico. O Astrolábio Náutico era usado junto com a tabela de declinação do Sol para calcular a latitude de um determinado ponto.

Em épocas de descobertas existiam a dificuldades de orientação. Como navegar sem orientação? Mas, com o Astrolábio Náutico se tornou possível a navegação. Sem a necessidade de uma matemática muito difícil, e de posse da tabela de declinações do Sol passou-se a ser possível ter uma orientação nos mares, mais precisamente a latitude.

O programa Geogebra, é um software gratuito de fácil utilização, com várias ferramentas que podem ser usadas de maneira muitas vezes intuitivamente, e que proporciona a possibilidade de construir diversos tipos de instrumentos, objetos com riqueza de detalhes e com muita precisão. Devido a isso, o Geogebra ajudará na tarefa de obter uma visualização de como era o funcionamento e utilização do Astrolábio Náutico, tanto o próprio Astrolábio calculando a altura do Sol em qualquer momento do dia, como seu funcionamento para cada dia do ano, ou seja, o movimento de translação, um giro completo da Terra em torno do Sol, permitindo observar o comportamento dos ângulos medidos e os ângulos obtidos com os cálculos para cada dia do ano, tanto a latitude, a distância zenital, como as declinações diárias encontradas nas tabelas náuticas.

Não se pode deixar de lado que, o Astrolábio Náutico também era utilizado para medir altura de edificações, são aplicações mais simples, mas necessárias e poupavam esforços de quem utilizava.

O presente trabalho será composto por 4 capítulos, o capítulo 1 é constituído de 3 seções, a primeira seção se trata da história do Astrolábio, sua origem, suas

aplicações e utilização nas navegações e transformações ocorridas devido as necessidades. Na segunda seção será mostrada a composição do astrolábio e náutico. Na terceira mostra o funcionamento e aplicações em navegações e situações do cotidiano. No capítulo 2 será composto por 4 seções, na primeira é exposta como se dá o movimento da Terra e entender as mudanças angulares para cada dia do ano, e perceber a necessidade da declinação solar diária. Na segunda seção será visto o que é latitude. A seção 3 será composta de duas subseções onde serão explorados os astros utilizados no calculo da latitude, na primeira subseção será a Estrela Polar, e na segunda subseção será o Sol. Na seção 4 será sobre o calculo da latitude, terá 2 subseções, a primeira trará o latitude a partir da Estrela Polar, e na segunda será a latitude a partir do Sol e da tabela de declinação. O capítulo 3 terá duas seções e vai tratar do programa Geogebra, a primeira seção será sobre a história do Geogebra. A segunda seção será sobre o programa e terá uma subseção, que tratará de funções e comandos que não são tão óbvios. No capítulo 4 será construído passo a passo na construção dos objetos de estudo, será composto por duas seções, a primeira será a construção do Astrolábio Náutico, e na segunda será o passo a passo da simulação do movimento de translação com as latitudes, as declinações diárias e as distâncias zenitais do Sol. A Conclusão. E por fim a Referência.

1.Contexto Histórico: Astrolábio

1.1.História do Astrolábio

De acordo com o site astrolabe (The astrolabe, 2010), o astrolábio foi desenvolvido para resolver problemas relacionados com o tempo e a posição dos astros, como o Sol e estrelas por exemplo. O astrolábio era usado como se fosse um computador astronômico. Entre todos os astrolábios construídos o mais comum, ou seja, o que mais se usava, era o astrolábio planisférico, que consistia numa projeção da esfera celeste no plano do equador.

Uma das características mais incríveis de um astrolábio é a simulação do céu na palma de nossa mão, ou seja, no momento em que se regula o instrumento no dia e hora de um determinado momento passa-se a ter exatamente o céu daquele momento na face do astrolábio, e com todos os astros visíveis e invisíveis. E com posse dessas informações pode-se resolver vários problemas astronômicos. Com isso já se tem um ideia do que se pode fazer com um astrolábio: saber a hora, e também o momento exato de um determinado evento, como o nascer e o pôr do Sol.

Como base no trabalho do Iran Carlos Stalliviere Corrêa (Corrêa, 2009), o astrolábio não possui uma história muito bem definida, pelo menos no que diz respeito a sua origem, pois não existe uma afirmação precisa de quando o primeiro astrolábio foi construído. De acordo com Felipe Fantuzzi, uma das coisas que se sabe é que o astrolábio é o resultado de estudos e contribuições de vários estudiosos da antiguidade, e um que merece destaque é Hiparco (180-120 a.c.), que nasceu em Nicéia, na Ásia Menor, mas trabalhou e estudou na Ilha de Rhodes. Também descobriu a precessão dos equinócios e foi muito importante no desenvolvimento da trigonometria. Hiparco não inventou o astrolábio, mas refinou a teoria da projeção, ou seja, foi um matemático de grandes contribuições e uma dessas contribuições, foi a realização de uma projeção esferográfica como método para resolver problemas astronômicos sem precisar usar uma trigonometria esférica, é uma astronomia em que os astros são vistos sem haver a preocupação com suas distâncias (Esfera Celeste). De acordo com o site astrolabe, o primeiro trabalho significativo sobre projeção foi o de Cláudio Ptolomeu (cerca de 150 A.D) na obra *Planisphaerium*. Há sugestão por escrito de Ptolomeu, que ele poderia ter um

instrumento que teria condições de ser chamado de astrolábio. Ptolomeu ajustou significativamente a geometria fundamental do sistema Terra-Sol, usado na projeção. Mas só por volta dos anos 390 que se tem acesso a algum texto sobre o astrolábio, por Theon de Alexandria que escreveu um documento sobre o astrolábio. Só se tem algum acesso a um documento sobre construção e funcionamento do astrolábio, no século VI, com Philoponos de Alexandria (Fantuzzi).

Ivan Carlos Stalliviere Corrêa relata sobre o nome astrolábio, que é muito sugestivo, pois, é um instrumento que tem como uma das principais características observar estrelas, e o seu significado é algo como “pegador de estrelas”. As escolas islâmicas expandiram o astrolábio no século VIII e IX através de traduções de escritos gregos, deve-se destacar que a astrologia é algo que é próprio da cultura islâmica, e por isso consegue-se entender o porquê da importância que eles davam ao astrolábio e ao seu uso. O astrolábio não era um instrumento simples de ser usado e quem sabia utilizar era um sinal de poder de se tratar de uma personalidade importante, no caso dos islâmicos, como dão importância a certas horas do dia para suas orações, então sempre o líder, seja de uma caravana ou outros tipos de grupos, era responsável para determinar com precisão a hora de suas orações e também a localização de Meca. Assim pode-se perceber que possuir um astrolábio era uma característica de uma pessoa que possuía poder político e religioso, ou seja, pessoas que tem instrução. E uma das provas desses conhecimentos era construir seu próprio astrolábio, pois quem construía um astrolábio, com certeza tinha conhecimentos de matemática, astronomia, técnicas diversas (Corrêa, 2009).

Felipe Fantuzzi relata que o astrolábio chegou a Europa através dos próprios islâmicos, quando vieram do Norte da África para a Espanha, onde foi utilizado como todos sabem nos séculos XV e XVI nas grandes navegações, nas quais utilizaram o astrolábio náutico que era uma adaptação do astrolábio, pelo astrônomo Abraão Zacuto, em Lisboa (Fantuzzi).

Em Augsburgo e Nuremberga, na Alemanha, no século XV foi centralizada a fabricação de astrolábios, mas não se pode negar que houve alguma produção na França. Já no século XVI, os melhores instrumentos eram de Louvain, na Bélgica. Por volta da metade do século XVII os astrolábios já eram feitos em toda Europa. Sabe-se que certamente os astrolábios eram projetados e construídos por um único

individuo. Existem também astrolábios que eram construídos por equipes, contendo, designer, gravador e decorador. Existiam oficinas com vários funcionários, onde o estilo e o acabamento eram definidos pelo mestre e quando o mesmo se aposentava ou morria a oficina fechava. Um workshop especificamente importante foi criado por Georg Hartmann em Nuremberg em 1525 (The astrolabe, 2010).

Existiam também os astrolábios de papel que era disponível para impressão e muitos eram feitos, mas poucos sobreviveram. O astrolábio Universal não era comum nem se tornou muito usado, pois poderia ser usado em qualquer latitude e foi inventado no XV e XVI, mas por ser caro e de cálculos muito complexos nunca ganhou popularidade.



Figura 1. astrolábio esférico

Antes de se ter esse astrolábio plano deve-se lembrar do astrolábio esférico. E esse astrolábio esférico, nada mais é que uma simulação esférica do céu, como já foi abordada, através de uma trigonometria esférica não havia necessidade de levar em consideração as distâncias e sim a localização, só possuía um problema, era um instrumento grande e pesado de difícil locomoção. E para de certa forma torná-lo um instrumento mais fácil de transportá-lo, houve uma evolução para uma forma plana, o astrolábio planisférico, que consiste de basicamente alguns discos planos, geralmente feitos de cobre, esses disco possui a representação da Terra, latitudes,

longitudes, e horizonte do observador, possui outro disco que representa um simples mapa do céu, uma das partes mais interessantes é a elíptica, que é o movimento aparente do Sol em volta da Terra, e eram com esse astrolábio planisférico que determinavam à hora, os dias, as estações e os signos de todo ano. Uma das características dos astrolábios planisféricos é que eram verdadeiras obras de arte, preciosos, e muito ornamentados, por isso agregavam grande valor(Nunes, 2012,p.60,61).



Figura 2. astrolábio planisférico

Paulo Jorge Antunes Nunes escreve que o astrolábio planisférico possuía muitas funções, na verdade era um instrumento astronômico de grande importância. Enquanto fosse assim, apresentaria a bordo de uma embarcação funções desnecessárias para uma navegação, visto que a só haveria a necessidade de calcular a altura de alguns astros, principalmente o Sol. Deve-se resaltar que os marinheiros não possuíam conhecimentos para manusear e utilizar todas as funções do astrolábio planisférico. A partir desses problemas e situações, houve mais uma adaptação e modificação do astrolábio, deixando de ser um astrolábio planisférico para se tornar o astrolábio náutico, visto que tudo que pode ser executado com um astrolábio planisférico que não for útil numa navegação foi removido. Como nos mares o balanço e os ventos são situações comuns, fez-se necessário deixá-lo mais pesado e com isso ganhou uns dois quilos a mais, outra mudança foi deixar de ser um disco inteiro, e passar a ser quase um aro, para que o atrito com o vento fosse

diminuído e assim também balançasse menos, permitindo assim que durante as medições o astrolábio ficasse na posição vertical, evitando ao máximo os erros nas medições (Fundação Museu da Tecnologia de São Paulo). Era feito de metal maciço para que tivesse uma durabilidade ampla, e uma prova dessa durabilidade é que até hoje existem em muitos museus, astrolábios náuticos da época das grandes navegações (Nunes, 2012,p.61).



Figura 3. astrolábio náutico

1.2.Composição de um astrolábio

O Astrolábio Náutico uma versão simplificada do Astrolábio Planisférico, mas possuía partes comuns aos dois, e essas partes são:

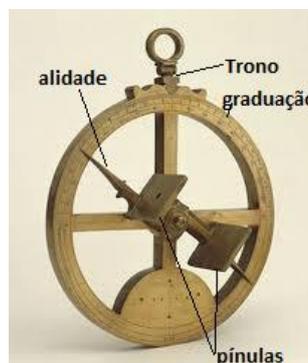


Figura 4. Partes do astrolábio náutico

1- O trono: o suporte fixo que ligava a argola por onde segurava o Astrolábio, a argola era móvel.

2- A graduação: as medidas em graus que ficavam marcadas principalmente na semicircunferência superior do Astrolábio.

3- A alidade: uma espécie de seta que tinha como função marcar a graduação do exato momento da localização do astro.

4- As pínulas: duas placas fixas a alidade, que possuíam um orifício cada, serviam de mira para medir as estrelas e de passagem dos raios solares para medir o Sol.

1.3- Utilização do astrolábio

O Astrolábio pode ser utilizado para ajudar a calcular a latitude de um ponto, que vai ser abordado de forma mais completa no capítulo 2. Outra utilização Astrolábio útil na época era para calcular a altura de um poste, ou torre. Para efetuar a medida basta se ter a distância entre o observador e a torre (por exemplo), e então mirar a alidade no topo da torre, assim se tem a ângulo formado entre a reta horizontal e a reta que vai do observador ao topo da torre, como na figura abaixo:



Figura 5. Medir altura com o astrolábio náutico

Pode-se entender a formação de um triângulo ABC da seguinte maneira, suponha que os olhos do observador seja o ponto A, a projeção do ponto A na torre seja o ponto B, e o ponto mais alto da torre seja o ponto C, assim está formado um triângulo retângulo, e é reto em B, pois, se trata da projeção do ponto A. agora se pode medir a distância do observador a torre com facilidade, e com o astrolábio medir o ângulo \widehat{BAC} . Tendo em mãos o ângulo \widehat{BAC} e o cateto adjacente a ele,

basta calcular o cateto oposto através da tangente do ângulo medido. Depois de calcular o cateto BC, basta somar BC com a altura do observador, para ter a altura da torre (Silveira, Hartmann, & Goi, 2014).

2- Calcular a latitude de um ponto

Para se calcular a latitude de um determinado ponto na face da Terra é necessário saber antes de tudo o que é latitude e como se dá o movimento da Terra durante 24 horas e também durante os 365 dias do ano, pois foi a partir dessas observações que chegaram a latitude. Esses movimentos são chamados de rotação e translação, ou seja, movimentos em torno de si e em torno do Sol. As latitudes são círculos em torno da Terra paralelos à Linha do Equador. Assim como também se faz necessário saber qual a estrela Polar e porque se pode usá-la na medida da latitude. E também a distância zenital do Sol.

2.1- Movimentos da Terra

O movimento da Terra vai ser simulado com a ajuda do Geogebra, e essa simulação teve base nos movimento reais da Terra em torno do Sol, inclusive dando para perceber os momentos exatos dos Equinócios e dos Solstícios.

Como já se tem conhecimento, a Terra não se encontra imóvel, assim, para se conseguir calcular a latitude de um determinado ponto deve-se entender o movimento da Terra ao longo de um determinado tempo, e esse tempo já está estabelecido, que são as horas, os dias, os meses, os anos. O motivo de se entender esse movimento é que, se apontasse para um determinado ponto no globo terrestre e esperasse um tempo qualquer, e observasse novamente, seria possível perceber que o direcionador não está mais apontando para o mesmo lugar, e não é o mesmo devido a esse movimento de rotação e translação.

Devido a rotação da Terra há muito tempo se acreditava que o Sol nascesse no leste e se põe no oeste, e esse fenômeno acontece todos os dias. E então se pode fazer a seguinte pergunta, por que isso acontece? Outra situação curiosa é que nem todos os dias do ano o Sol nasce e põe no mesmo local, há uma leve mudança do nascer e do pôr do Sol, por quê?

A resposta da primeira se dá pelo movimento da Terra em torno de si mesma, chamado de movimento de rotação. E como o movimento de rotação acontece do

oeste para o leste, então, aparentemente, o Sol se movimenta do leste para o oeste. Mas esse conceito não foi conquistado de maneira fácil, pelo contrário, deve-se lembrar que essa ideia de que o Sol girava em torno da Terra foi comum durante muito tempo, há cerca de 450 anos, Nicolau Copérnico mostrou que o movimento da Terra se dá em torno de si, (Dilão, 1999, p.2).

Uma volta em torno de si, ou seja, do seu eixo imaginário, tem um tempo de duração de 23 horas, 56 minutos, 4 segundos e 9 centésimos, para dar uma volta exata (Wikipedia The Free Encyclopedia). Como a terra demora cerca de 24 horas para dar um giro completo de 360° , fazendo uma simples divisão, conclui-se que em 1 hora a Terra gira 15° . Com base nessas informações se estabelece o fuso horário, e como se convencionou que o meridiano de Greenwich, seria o meridiano de grau zero (0°), então existem 12 meridianos para oeste e 12 meridianos para leste. Dentro de cada fuso o horário é o mesmo, e para oeste as horas diminuem e para leste as horas aumentam (aumentam ou diminuem 1 hora para cada fuso) (Menezes).

O segundo movimento da Terra é o movimento de translação e responde a segunda pergunta, que é o movimento que a Terra faz em torno do Sol, esse movimento tem um tempo de duração de 365 dias, 5 horas, 56 minutos e 4 segundos, esse movimento tem o formato de uma elipse, quase um círculo, é conhecido como eclíptica, ou seja, a Terra gira 365 vezes em torno do seu eixo imaginário em uma única volta em torno do Sol. A inclinação do eixo norte-sul imaginário da Terra é de $23^\circ 27'$ em relação ao plano da eclíptica e esse eixo sempre está apontando para o mesmo lugar, e a partir dessa informação para cada dia no ano existe uma declinação diferente, ou seja, o Sol nasce e se põe em lugares diferentes. Pode-se também observar que conforme a Terra gira em torno do Sol, ou seja, ocorre à translação, há uma variação na incidência dos raios solares na terra, isto é, os raios solares não atingem a Terra com a mesma intensidade em todos os dias do ano e em todos os lugares, e é através dessa variação da inclinação e incidência solar que ocorre às mudanças nas estações do ano.

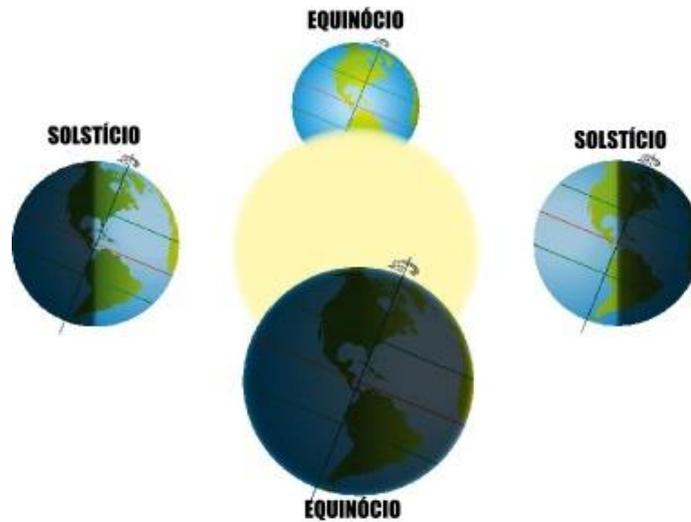


Figura 6. posicionamento da Terra nos Equinócios e Solstícios

Como se pode perceber a partir da figura acima, no globo da esquerda ocorre o Solstício de junho que são momentos que os raios solares estão iluminando mais o Hemisfério Norte do que o Hemisfério Sul, tem-se então o Solstício de 21 de junho, que se trata do início do verão no Hemisfério Norte e início do inverno no Hemisfério Sul. Também se tem o Solstício de 21 ou 22 de dezembro início do inverno no Hemisfério Norte e início do verão no Hemisfério Sul (Dilão, 1999, p.4).

Outro período importante também são os equinócios, nesse período os raios solares atingem a Terra de maneira igual nos dois Hemisférios e os dias e noites possuem a mesma duração. Existe o equinócio de 21 de março, o globo mais acima, início da primavera no Hemisfério Norte e início do outono no Hemisfério Sul. Também acontece o equinócio de 22 ou 23 de setembro, o globo mais abaixo, início do outono no Hemisfério Norte e início da primavera no Hemisfério Sul (Dilão, 1999, p.4).

Agora que já se tem conhecimento a respeito dos movimentos da Terra em relação ao Sol e em relação a si mesma, então já se podem demarcar os paralelos no globo terrestre. O primeiro é a Linha do equador, que determina a latitude 0° , deve-se saber que a Linha do Equador é o maior círculo perpendicular ao eixo imaginário norte-sul e divide a Terra em dois hemisférios, Norte e Sul. Os outros círculos paralelos à Linha do Equador são menores. Outro círculo importante é o Trópico de Câncer, que fica a $23^\circ 27'N$. O Círculo Polar Ártico fica a $66^\circ 33'N$ e é o

círculo que delimita a área que não é atingida por raios solares durante o Solstício. Outro é o Trópico de Capricórnio, que fica localizado a $23^{\circ} 27'S$. E o Círculo Polar Antártico, localizado a $66^{\circ} 33'S$, também é um local que na época do solstício, não possui incidência de raio solar. Todas essas informações são importantes para a construção de um modelo de simulação do movimento da Terra em torno do Sol, como será abordado mais à frente.

2.2. A latitude

De acordo com Wikipédia, (Wikipedia The Free Encyclopedia), nada mais é que, coordenadas geográfica ou geodésica, que pode ser definido em três situações: na esfera, no elipsoide de referência ou na superfície terrestre. A latitude é medida para norte e para sul, contando 90° sul, no Polo Sul, ou Polo Antártico, até 90° norte, no Polo Norte, ou Polo Ártico.

O modelo esférico é o mais simples, pois é o ângulo entre o raio da esfera (Terra como esfera) com o plano do equador. E como o raio de uma esfera é igual em qualquer ponto da esfera então, este ângulo é igual a medida angular do arco meridiano entre o equador e o lugar.

Já o elipsoidal da Terra, a latitude de um lugar é o ângulo entre a normal nesse ponto do elipsoide faz com o plano do equador. Pois no elipsoide as normais de diferentes pontos não concorrem no mesmo lugar, como acontece na esfera que concorrem no centro da esfera. Outro fator importante é que os meridianos não são circunferências, visto que não é uma esfera, assim as latitudes não são as medidas angulares entre a plano do equador e o lugar, são chamadas de latitudes geodésicas.

Já a superfície da Terra, a latitude é medida com a vertical do lugar com o plano do equador, e deve-se notar que a vertical do local não coincide com a normal elipsoidal, essas latitudes são diferentes das encontradas nos mapas, que são as latitudes geodésicas. Mas essas latitudes já eram utilizadas há muito tempo antes desses conhecimentos, e eram calculadas através de instrumentos antigos e um deles é o astrolábio (Wikipedia The Free Encyclopedia).

2.3. Os astros

Uma das maneiras mais utilizadas para se determinar a latitude de um determinado lugar na face da Terra é através da orientação dos astros. O mais comum é o Sol e algumas estrelas, que para esse processo de localização se tornam muito importante saber diferenciá-la em relação a outras estrelas e saber seu posicionamento.

2.3.1. As estrelas

A Estrela Polar somente é visível no Hemisfério Norte. Se alguém observar o céu durante a noite, e de tempo em tempo voltar a observar, perceberá que todas as estrelas estão girando em torno de uma estrela que fica parada, essa estrela é a Estrela Polar. Isso se dá pelo fato da Estrela Polar estar localizada quase no eixo imaginário da Terra ao norte. Deve-se saber que constelações são conjuntos de estrelas que formam figuras que se mantêm sempre na mesma posição uma em relação à outra. A Estrela Polar pertence a constelação da Ursa Menor, e é uma das estrelas da cauda. A Ursa Menor é uma constelação de fraca luminosidade, assim, a localização da Ursa Menor por muitas vezes carece de um auxílio de outras constelações. Por exemplo, para sua localização é bem melhor primeiro localizar a Ursa Maior e a Cassiopéia, após a localização dessas então basta procurar entre essas duas constelações, visto que a Ursa Menor se encontra no meio (Dilão, 1999, p.6).

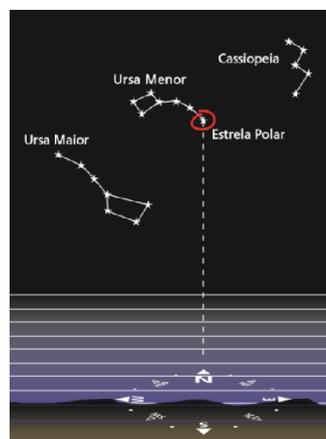


Figura 7. Estrela Polar

No Hemisfério Sul não é possível visualizar a Estrela Polar, então se deve ter como referencia outras estrelas, mas não será abordado no presente trabalho.

2.3.2. O Sol

O Sol é um astro muito útil para ser utilizado na determinação de latitudes e longitudes, ou seja, na localização. O movimento aparente do Sol em relação à Terra é sempre do leste para o oeste, e isso se dá pelo fato da Terra girar em torno do seu eixo imaginário do oeste para o leste.

Quando um determinado ponto se encontra acima do trópico de Câncer, então o Sol do meio dia sempre se encontra na direção sul. O mesmo acontece no Hemisfério Sul, se um determinado ponto se encontra abaixo do trópico de Capricórnio, então o Sol do meio dia sempre está apontando para o norte. Mas quando um ponto se encontra entre os trópicos o Sol pode apontar tanto para norte como para sul de acordo com a hora. A grande importância do Sol nos cálculos da latitude e longitudes se dá pelo fato de se conseguir através de medições sucessivas dos ângulos a determinarem o Sol do meio-dia.

2.4. Tabela de Declinação

Para calcular a latitude com a ajuda do Sol é necessário estar de posse de uma informação, a declinação do Sol para o dia da medição, e essa informação é encontrada nas tabelas náuticas.

Abraão Zacuto já era reconhecido como astrônomo antes de chegar em Portugal, seu trabalho teve colaboração mesmo na ciência náutica, afirmando e encorajando sobre navegações. Abraão Zacuto foi autor do astrolábio melhorado para as navegações, e também ajudou muito navegadores da época a utilizar o astrolábio bem como as tábuas astronômicas, também criadas e aperfeiçoadas por ele. Com certeza as suas contribuições salvaram muitas vidas nas navegações as Índias e na descoberta do Brasil.

Abraão Zacuto publicou o Almanach Perpetuum. Este livro contém tábuas astronômicas utilizadas juntamente pó Vascoda Gama e Pedro Álvares Cabral nas suas viagens (Wikipedia The Free Encyclopedia).

The image shows a page from an old astronomical almanac. At the top, it is divided into two sections: 'martino' (March) on the left and 'aprilis' (April) on the right. Below these, the title reads 'Tabula aërdætiæ et diædæriæ domeræ'. The table itself is a grid with multiple columns. The first column is labeled 'hora maxima' and contains numbers from 1 to 24. The next two columns are labeled 'horæ' and contain numbers from 1 to 12. The following columns contain various astronomical data, including what appears to be declination and other celestial measurements. The table is densely packed with numbers and some small text annotations.

Figura 8. Tábua Astronômica

2.5. Calcular a latitude

Utilizaremos duas maneiras de calcular a latitude, através da Estrela Polar, e através do Sol com a tabela de declinação.

2.5.1. Calcular a latitude de um ponto com a ajuda da Estrela Polar

Como é informado por Altineu Pires Miguens, (Miguens, 1999, p.546 e 549), para calcular a latitude com base na observação da Estrela Polar só pode ser feita no Hemisfério Norte, pois essa estrela não pode ser vista em nenhum momento no Hemisfério Sul. Essa estrela é usada, pois está localizada muito próxima do eixo imaginário, com se estivesse no próprio eixo, assim o erro é mínimo e a latitude é calculada sem grandes consequências.

Assim como a Estrela Polar está no eixo imaginário e a uma distância muito longa o ângulo formado pela Estrela Polar e o horizonte, ou seja, a altura da estrela, é igual a latitude. Observe a figura abaixo.

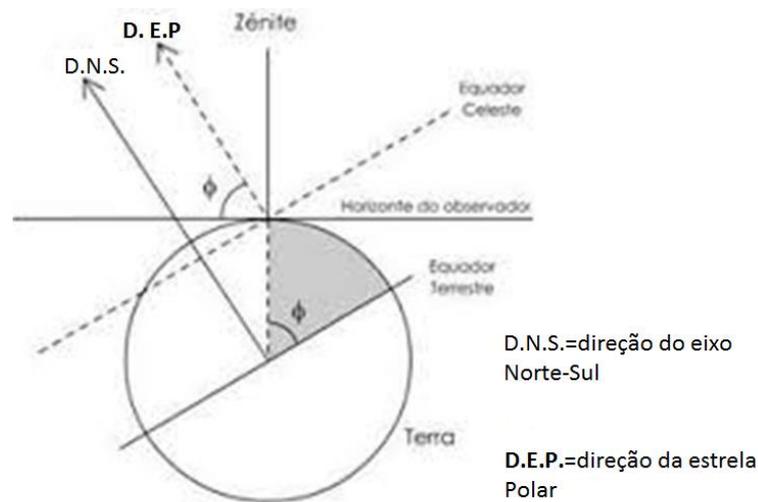


Figura 9. Estrela Polar como referência para a latitude

Deve-se destacar que a latitude está representada pela letra ϕ .

2.5.2. Calcular a latitude observando o Sol e a tabela de declinação

A utilização do astrolábio náutico era apenas para calcular a altura dos astros, mais comumente o sol. José Manuel Malhão Pereira informa que este instrumento não utiliza o horizonte como referência, pois em muitos casos não é possível ter com precisão o horizonte, a referência é a vertical do observador. O processo de utilização é bastante simples, basta mirar a alidade em direção ao sol, por exemplo, e localizá-lo de tal maneira que os raios do sol passem simultaneamente nos dois orifícios das pínulas, quando isso ocorrer é o exato momento em que a alidade vai estar alinhada com o sol. Para fazer essas marcações com o máximo de exatidão participavam das medições três homens, um para segurar o astrolábio pela argola que sustenta o astrolábio e se encontra no seu topo, outro localiza a alidade para alinhá-la em direção ao sol, ou um astro-alvo qualquer, e por fim o terceiro faz a leitura da distância zenital no limbo da madre, essa distância zenital também é conhecida como complemento da altura. A noite o processo é bem parecido, a diferença é que quando se tem o sol como referência não se olha direto pra ele, já a noite podemos mirar até uma estrela utilizando as pínulas como mira, e a utilização e leitura se dá da mesma forma (Pereira, 2000, p.10).

Será construído agora um passo a passo que ajudará na construção do conceito de como se calculava a latitude observando o Sol e com a ajuda de uma tabela de declinações.

Antes de se começar deve perceber que os raios solares sempre chegam a Terra paralelos.

1º passo – Localiza-se um ponto qualquer no globo terrestre e esse ponto será o ponto A. O ponto B será a interseção entre a linha do Equador e o meridiano do ponto A.

2º passo - Observar-se-á a Terra e o Sol de frente, ou seja, de modo que o Sol esteja exatamente de frente para o meridiano do ponto marcado.

3º passo – prolongam-se os raios solares até atingir o ponto A, se chamará r' , e o outro raio (r'') até atingir o ponto C que será nesse caso o centro da Terra. Havendo também uma interseção entre o raio solar(r'') e a circunferência da Terra, e será chamado de ponto D.

4º passo – Será agora marcado o ângulo: será chamado de δ e esse ângulo é a declinação do Sol em um determinado dia.

Como as declinações solares são fornecidas no Almanaque Náutico, se tem as declinações para todos os dias do ano, o valor de δ é conhecido de acordo com o dia do ano. Nuno Crato orienta que esse método só pode ser utilizado de posse de uma tabela de declinações diárias. Mas essa tabela existia na época das grandes navegações, nesse período já havia várias tabelas de declinações a partir das tabelas do lugar do sol na eclíptica contidas no Almanaque de Zacuto (Crato).

5º passo – Agora será prolongada uma semirreta partindo de C e passando por A, essa semirreta é a vertical que parte da cabeça do observador. E o ponto de interseção entre a semirreta e a Esfera Celeste é chamado de Zênite (Z).

6º passo – Imaginando que os raios do Sol tem origem em um ponto S, o ângulo $S\hat{A}Z$ é o ângulo α , esse ângulo é medido com o astrolábio e se trata da distância zenital do sol.

7º passo – Como os raios solares são todos paralelos, então os raios r' e r'' também são, e são cortados por uma transversal, que é a semirreta que passa por A, assim se pode perceber que os ângulos SAZ e SCZ são correspondentes, ou seja, possuem a mesma medida, assim o SCZ também mede α .

8º passo – A latitude é o ângulo BCA, ou seja, $\alpha + \delta$.

Alice Filipa Soares Brito descreve que para medir a latitude de um ponto é necessário medir a distância zenital no momento em que o sol esta no meridiano, e ocorre exatamente ao meio dia solar, ou seja, para que esse modelo seja válido o Sol precisa estar passando no meridiano do ponto A no momento da medição, ou seja, no momento do meio-dia solar. Essa medida é realizada fazendo medições sucessivas, até poder-se perceber que obteve um α máximo, ou seja, um ângulo que o Sol estava no seu maior ponto de altura, que é o momento em que ele passa pelo meridiano do ponto (Brito, p.15 e 16).

3. O software Geogebra

3.1. História

De acordo com Wikipédia, o software Geogebra foi criado justamente para ser uma ferramenta que auxiliasse nas práticas de sala de aula, seu criador é Markus Hohenwarter. E o projeto teve um começo no ano de 2001 na Universität Salzburg, e tem dado prosseguimento no seu aprimoramento na Florida Atlantic University. É um aplicativo de matemática gratuito que une conceitos de geometria e álgebra, e vem daí seu nome, da junção das iniciais das palavras: **Geo**metria e ál**ge**bra. Deve-se ressaltar que é um programa também disponível em português. Além das vantagens didáticas o programa é uma ótima ferramenta para criar ilustrações profissionais para serem usadas no Microsoft Word, no Open Office ou Lattex. Escrito em JAVA, o Geogebra é multiplataforma e, portanto, pode ser instalado em computadores com Windows, Linux ou Mac OS (Wikipedia The Free Encyclopedia).

O programa possui uma infinidade de possibilidades de construções geométricas, e diversas ferramentas de fácil utilização, com o uso de pontos, retas, segmentos de retas, interseções entre figuras, polígonos dos mais variados. E como se trata de um programa de geometria dinâmica, após fazer figuras e outros tipos de polígonos e etc, pode-se alterar para observar o comportamento em várias situações de variações. Pode ser trabalhadas também no geogebra funções de todos os tipos, trabalhar com vetores, derivar e integrar funções. Assim pode-se perceber que também existe a possibilidade de trabalhar com conceitos de Cálculo. Outra ferramenta importante que o aplicativo passou a possuir a partir da versão 5.0, que permite trabalhar em um ambiente em três dimensões. Devido ao seu grande desempenho, facilidade aplicabilidade, o Geogebra já ganhou vários prêmios, (Wikipedia The Free Encyclopedia).

De acordo com Esther, a divulgação do software tem aumentado significativamente e atualmente o Geogebra já alcançou 190 países, se encontra com tradução em 55 idiomas, com mais de 300.000 downloads por mês. O Geogebra pode ser adquirido pelo site oficial do programa, no link, [HTTP://www.geogebra.org/cms/pt BR/](http://www.geogebra.org/cms/pt_BR/). No site pode-se escolher para qual sistema operacional deseja baixar o programa. Existe também uma opção Portable, que

pode ser posto direto no pendrive para uso direto sem a necessidade de instalação, (Zilka, 2014, p.11).

De acordo com o site do Instituto Geogebra do Rio de Janeiro, houve a criação IGI (International Geogebra Institute) e o Instituto Geogebra do Rio de Janeiro (localizado na Universidade Federal Fluminense) é um dos 62 institutos de Geogebra dos 44 países, com o objetivo de reunir interessados no uso do Geogebra e com isso conseguir uma quantidade cada vez maior de materiais de acesso gratuito, para todos os tipos de pessoas, como alunos, professores, pesquisadores, e com isso agregar cada vez mais conhecimento de treinamento, prática, ou seja, suporte sobre o Geogebra, (Instituto Geogebra no Rio de Janeiro).

3.2. O programa Geogebra

O programa Geogebra é um software que não apresenta dificuldade para quem for utilizar, de maneira bem intuitiva, mesmo quem não possui muita familiaridade com elemento matemáticos consegue trabalhar com Geogebra sem apresentar graves problemas.

Primeiro é necessário ter um conhecimento prévio do programa como um todo. Para abrir o programa deve-se dar um duplo clique no ícone do programa, e é mais comum o ícone estar na área de trabalho, tem-se então a página principal do programa. Terá acesso ao menu, barra de ferramenta, lembrando que o menu está acima da barra de ferramenta. Também está exposto a janela de álgebra, a janela de visualização, que no exemplo abaixo está aberta a janela 2D, a caixa de entrada.

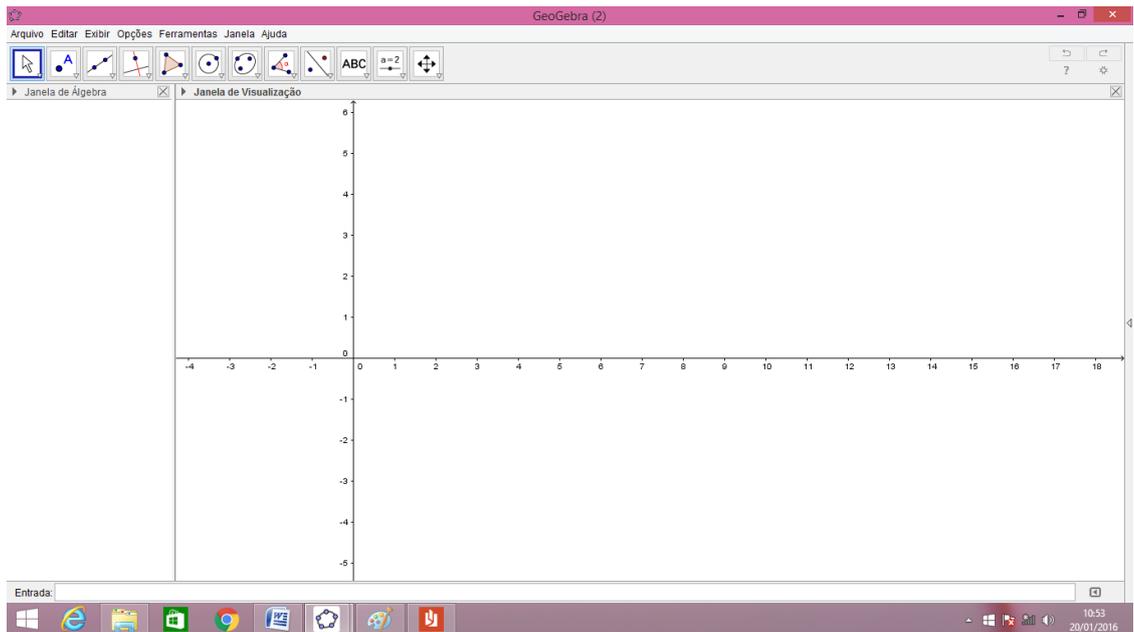


Figura 12. Tela principal do Geogebra

O programa Geogebra possui dois ambientes de construção que possibilita uma visualização de ótima qualidade tanto em relação aos objetos construídos, como em relação ao entendimento de conceitos, visto que o aprendizado e o entendimento se dá em muitos casos de maneira mais efetiva quando se vê o objeto sem precisar somente imaginá-lo. E esses dois ambientes se encontram no menu: exibir→ janela 2D, ou janela 3D. essas janelas podem ser abertas simultaneamente, veja:

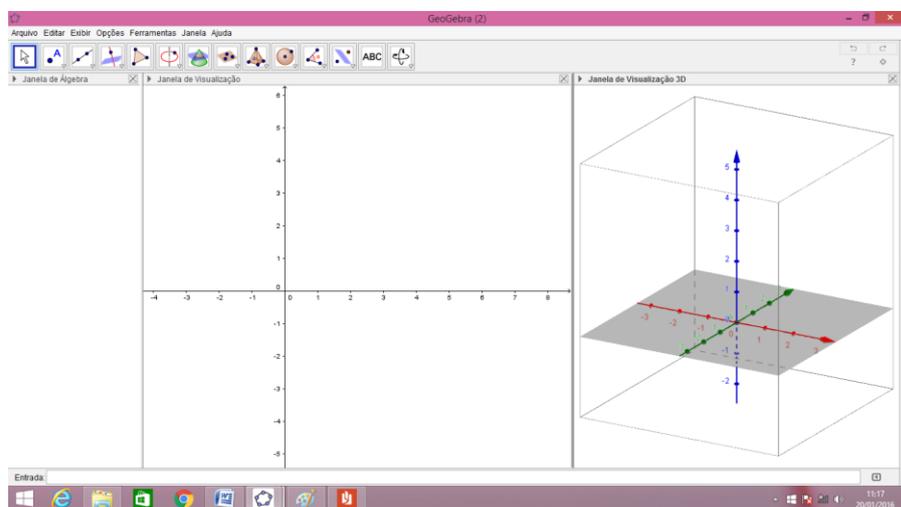


Figura 13. Janela de álgebra, 2D e 3D

A janela de visualização 3D possui ferramentas específicas para se trabalhar no espaço, assim com na janela de visualização 2D, mas o que se pode perceber que as ferramentas são fáceis de se utilizar e são bem parecidas, e nas próprias ferramentas é possível perceber que a de cima é 3D e a de baixo é 2D, veja a comparação:

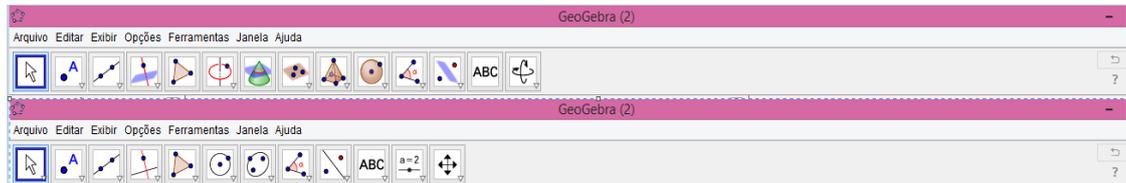


Figura 14. Comparação entre as ferramentas das janelas 2D e 3D

Essas ferramentas possibilitam a criação de diversas figuras, como se pode perceber, existe a criação de ponto, retas, retas paralelas e perpendiculares, circunferências, arcos, ângulos, e uma ferramenta de muita utilidade que é a interseção de objetos, e etc. Já na janela 3D existe a possibilidade de criar muitos objetos ricos em detalhes, reta perpendicular a um plano, retas passando por centro de circunferência, ou seja, o eixo da circunferência, planos, pirâmides, esferas, ângulos, interseção entre objetos, e muitos outros de igual importância. E a ferramenta que desloca toda a figura para qualquer direção, e no caso 3D ainda tem a opção de girar a figura para visualizar de qualquer ângulo.

A janela de Álgebra é uma janela de grande utilidade, pois, para qualquer figura desenhada, o programa mostra automaticamente a equação ou função do objeto construído, da mesma forma que se pode construir um objeto a partir de sua equação ou função.

Uma das qualidades desse programa é se deve sempre ser levado em consideração na construção das figuras ou dos objetos, pois, como se trata de um programa de Geometria dinâmica, as figuras e objetos devem ser construídos observando a dependência entre os elementos, para que no momento em que se queira mover o objeto construído, não seja modificado, ou destorcido, conforme o deslocamento de algum ponto específico do objeto. Um exemplo deste fato, é simples, se for desenhada uma reta e depois criar um ponto na reta já desenhada,

este ponto estará dependente a reta, assim o ponto não poderá mais sair da reta, só poderá se deslocar sobre a reta. Já a reta pode se mover levando consigo o ponto.

3.2.1- Funções e Comandos Importantes do Geogebra

Como foi mencionado acima existem comandos que intuitivamente se consegue entender e efetuar, mas existem outros que não são tão óbvios e por isso será exposto. Veja alguns que serão úteis nas construções dos objetos de estudo. O Geogebra possui algumas funções que permite após a construção visualizar o passo a passo da construção, o Protocolo de Construção. Também comandos importantes que no momento da construção do Astrolábio e da simulação envolvendo Astrolábio e movimento da Terra deve-se ter muito cuidado, são os comandos que cria uma dependência entre valores como se um determinado ponto estivesse em função de outro, uma variável. E o comando que permite colocar em destaque um elemento que está à frente do outro, ou está dentro de outro.

1- Protocolo de construção

O Protocolo de Construção é uma ferramenta de real importância, pois, depois de construir qualquer objeto, e vale destacar que para objetos mais complexos é ainda mais necessária essa ferramenta, pois depois de construídos pode-se ter uma lista na ordem de construção e com riqueza de detalhes dos comandos realizados.

E para ativar o Protocolo de construção, siga os passos: menu, exibir → Protocolo de Construção, pronto agora é só recordar o passo a passo da construção.

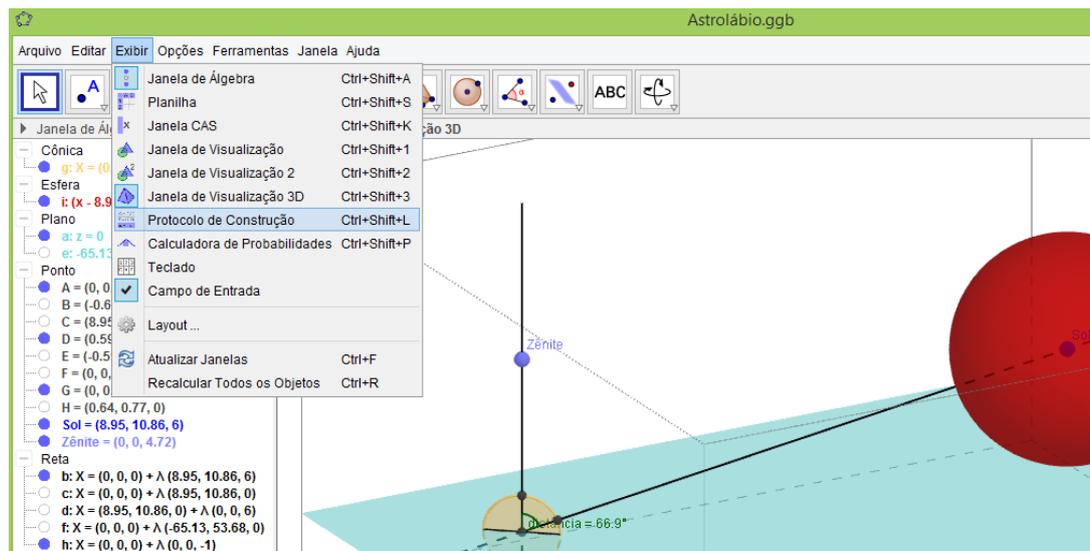


Figura 15. Protocolo de Construção

2- O primeiro comando importante é o que coloca uma dependência entre pontos

Um exemplo que está no trabalho: existe um ponto A, com coordenadas (x',y',z') , o objetivo é criar um ponto B como projeção de A no plano $z=1$, por exemplo. As coordenadas do ponto B deverá ser digitada no campo de entrada localizada na parte inferior, $B=(A(x),A(y),1)$, como se pode perceber há uma dependência do ponto B em relação ao ponto A, O $x=x'$ e $y=y'$ do A será também do B, só o z será igual a 1 no ponto B, e assim sempre que se mover o ponto A automaticamente o ponto B irá se mover diretamente abaixo do ponto A.

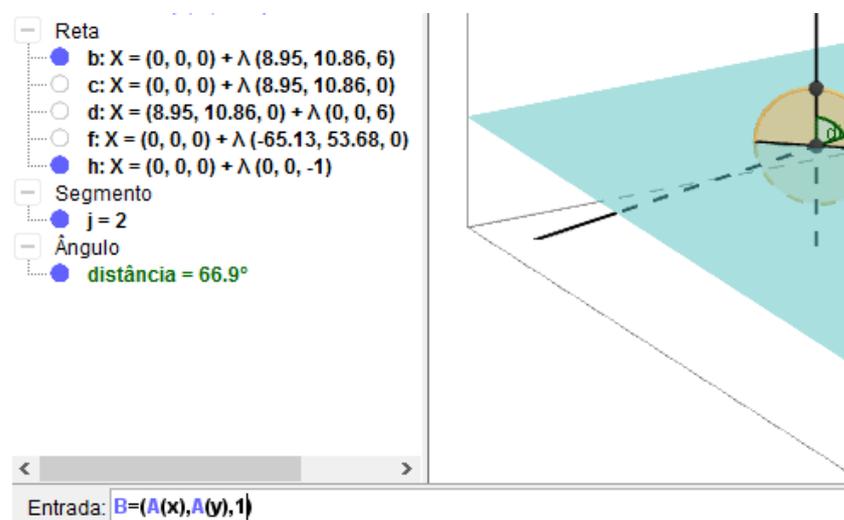


Figura 16. Caixa de Entrada

3- O segundo comando é o que destaca e traceja ou não permite visualizar o que está por trás.

Depois de criado os dois ou mais elementos, por exemplo, como foi também apresentado na construção do astrolábio e na simulação da translação da Terra, foi construído um segmento de reta que tem como extremos o centro de uma esfera e outro extremo fora da esfera, assim pode-se perceber que o pedaço do segmento que fica dentro da esfera pode ser visto ou não de acordo com o desejado, e esse comando não influencia nas propriedades da construção, serve como acabamento dos objetos.

Para colocar em prática esse comando, basta clicar com o botão direito do mouse no objeto que está por baixo ou dentro de algum outro e seguir os passos seguintes: Propriedades → (aba) Estilo → Estilo das Linhas Escondidas. Pronto agora pode ser alterado para três estilos diferentes, Invisível, Tracejado e Inalterado.

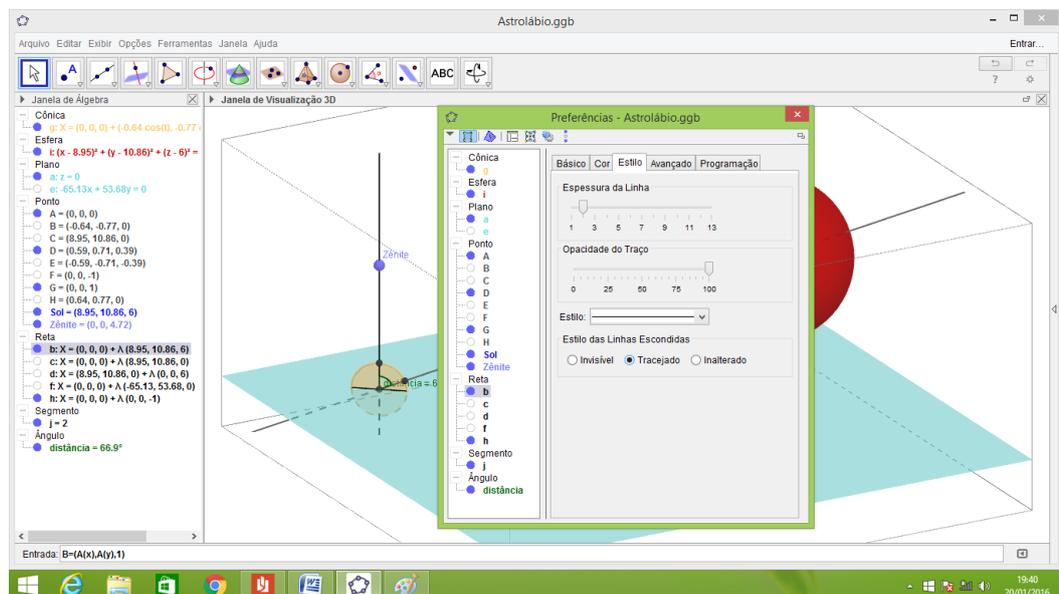


Figura 17. Estilos das Linhas escondidas

Qualquer outra alteração no objeto, em relação a cor, espessura, opacidade, tipo de linha, basta clicar com o botão direito do mouse no objeto a ser alterado e mudar conforme o desejado.

4. Construção do Astrolábio e do movimento da Terra com o cálculo da latitude

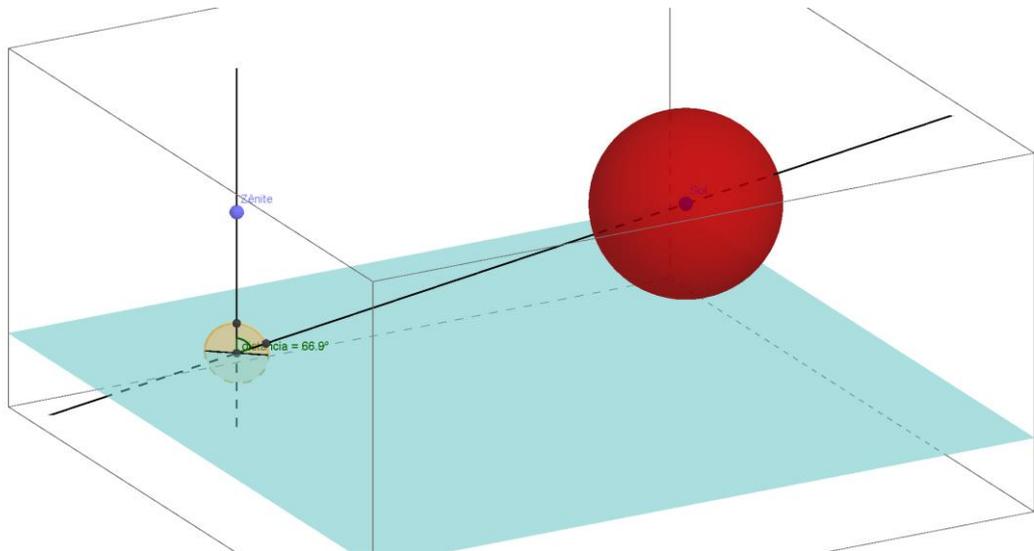


Figura 18. Astrolábio no Geogebra

Para a construção do Astrolábio foi utilizado a janela 3D, pois assim se tem uma melhor visualização do comportamento do Astrolábio em seu uso.

Quando se abre o Geogebra sempre se encontra aberto duas janelas, a janela 2D e a janela de álgebra. Como foi utilizada a janela de visualização 3D, então antes de começar com qualquer construção é necessário abrir a 3D. Para isso basta ir ao menu, exibir, e clicar na opção, janela de visualização 3D.

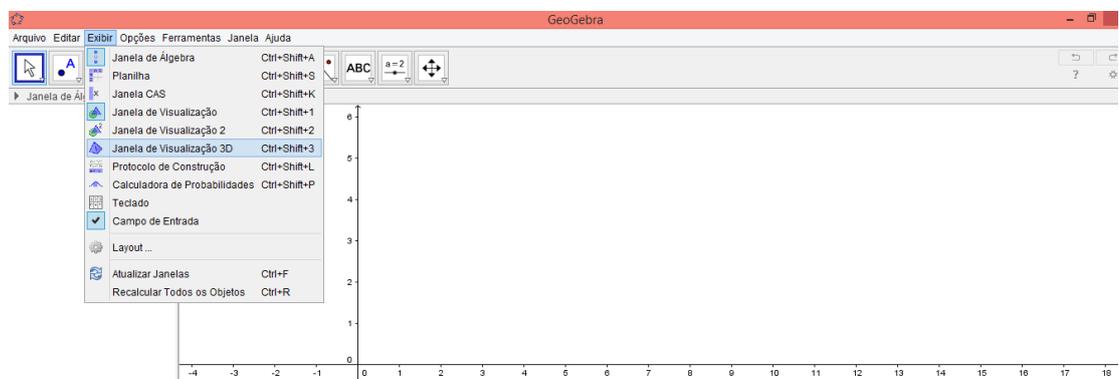


Figura 19. Janela 3D

Deve-se destacar que no momento em que se abre a janela 3D ficam abertas as três janelas, 2D, 3D e de álgebra. Mas, durante todo o processo de construção só serão utilizadas as janelas de álgebra e a 3D, então se pode fechar a janela de visualização 2D.



Figura 20. Janela 2D sem uso

Assim, depois de fechada a janela 2D já se pode começar a construção.

4.1. Sequência de construção do Astrolábio

- ☸ No campo de entrada digitaremos $z=0$ para criar um plano a ;
- ☸ Agora será criado um ponto na origem, pode ser feito de duas maneiras, ou digite no campo de entrada, $A=(0,0,0)$, ou na barra de ferramenta utilize a opção criar ponto e clique na origem dos eixos;
- ☸ Vamos criar agora o ponto $B(\text{Sol})$, pois, será o centro do nosso Sol, e esse ponto pode ser um ponto qualquer no espaço, mas, sem perda de generalidade, crie um no 1º quadrante;
- ☸ Construa a reta $AB(A\text{Sol})$, clicando na ferramenta reta, e indo até a opção reta passando por dois pontos;
- ☸ Construa o ponto C , que será uma projeção do ponto $B(\text{Sol})$ no plano z , para construir esse ponto, será necessário usar aquele procedimento de dependência entre pontos explicado no capítulo anterior. Para isso digite no campo de entrada, $C=(x(B),y(B),0)$, observe que é um ponto com as coordenadas (x,y) iguais a de B , mas com o z , fixo no plano $z=0$.

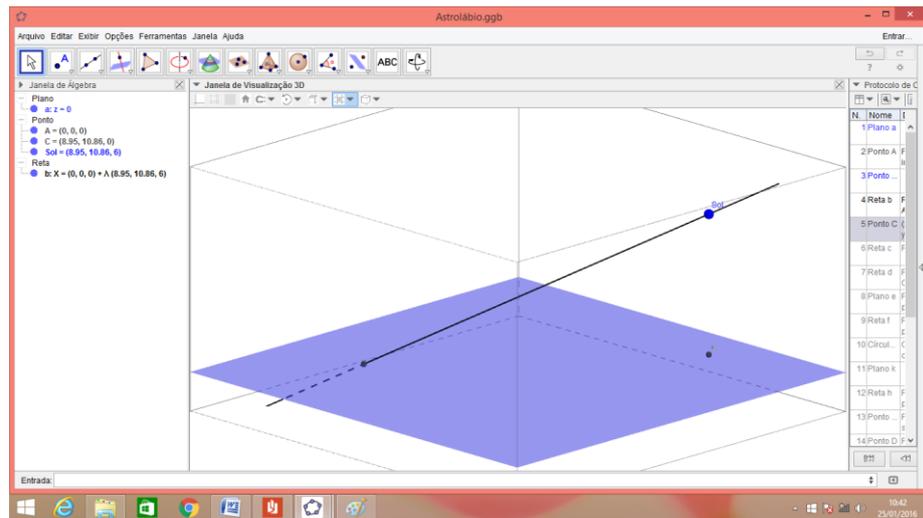


Figura 21. Construindo o Astrolábio

- ✿ Construa a reta AC da mesma forma que a reta AB;
- ✿ Construa a reta CB(CSol);
- ✿ Crie um plano e, passando por três pontos, B(Sol), A e C, para isso clique em ferramentas, planos passando por três pontos;
- ✿ Construa agora uma reta f passando por A e perpendicular ao plano e, para isso utilize a ferramenta, reta perpendicular;

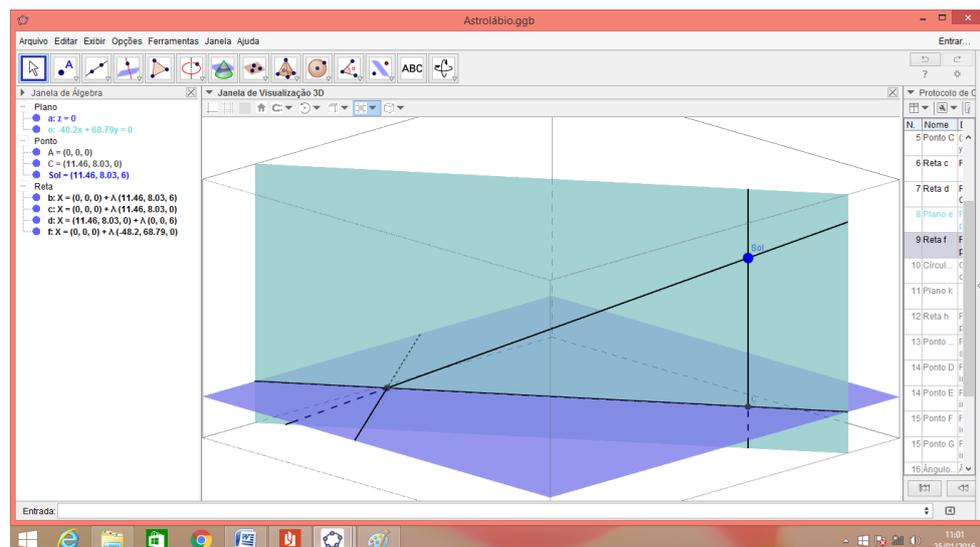


Figura 22. Construindo o Astrolábio

- ✿ Construa um círculo g com centro em A, raio 1, e eixo na reta f, para isso utilize a ferramenta para construção de círculos;

- ☛ Construa agora um plano k , $z=-1$, que será a base do horizonte do Astrolábio;
- ☛ Crie uma reta h , passando por A e perpendicular ao plano a ;
- ☛ Crie agora um ponto que chamaremos de Zênite, na reta h ;

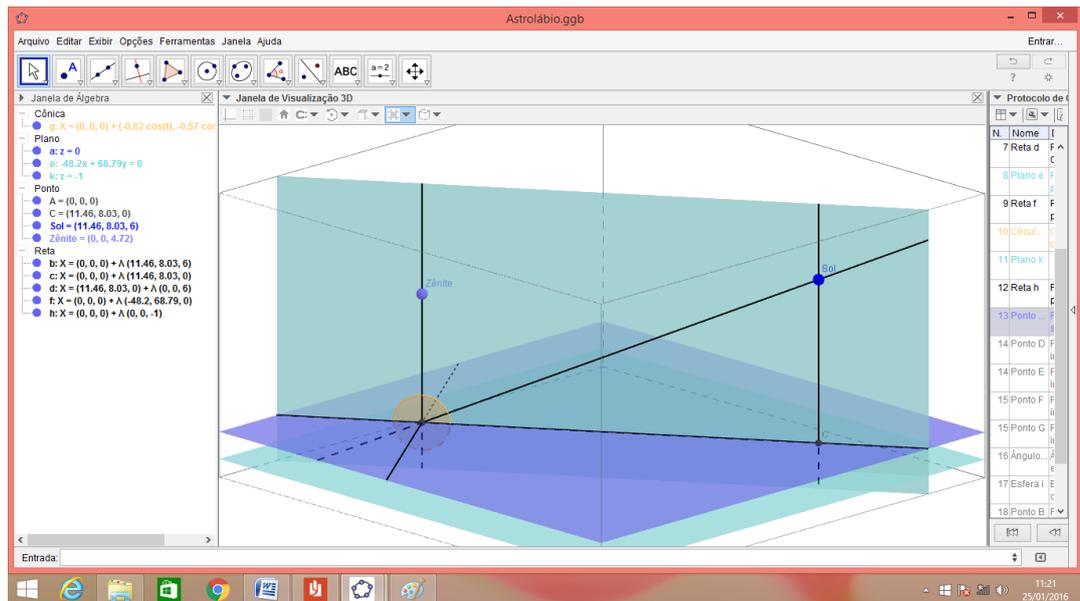


Figura 23. Construindo o Astrolábio

- ☛ Pontos D e E , interseção entre o círculo g e a reta $AB(ASol)$, a interseção também é feita diretamente com a ferramenta interseção entre objetos;
- ☛ Pontos F e G interseção entre g e h ;
- ☛ Ângulo distância, ângulo entre D, A, G ;
- ☛ Esfera de centro em $B(Sol)$, e raio 3, também construída diretamente com a ferramenta de construção de esferas;
- ☛ Ponto H e L , interseção entre g e a ;
- ☛ Segmento $[BH]$ deve ser construído com a ferramenta de construção de segmentos;

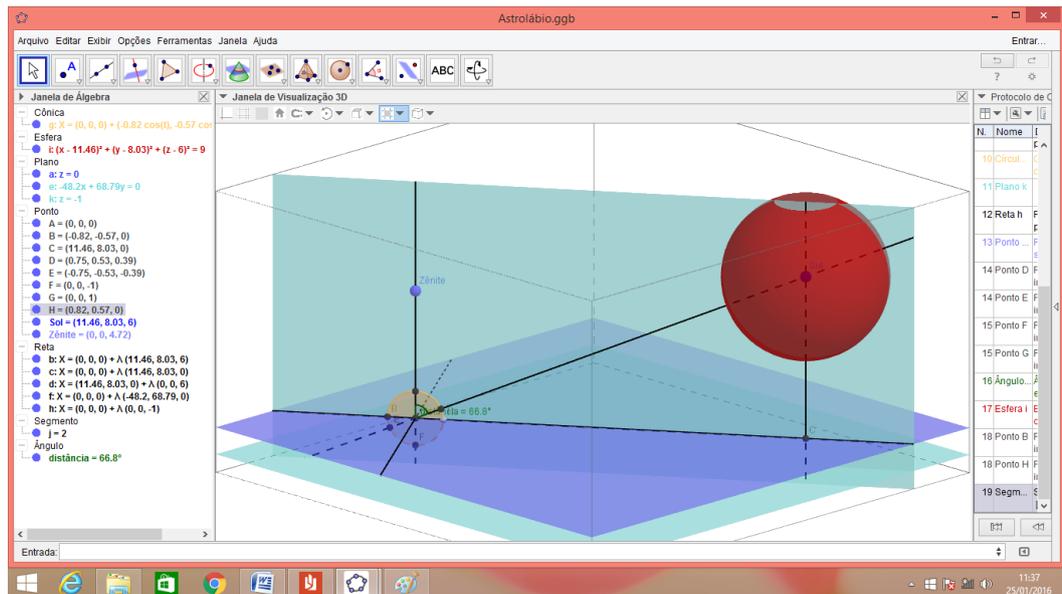


Figura 24. Astrolábio finalizado

Deve-se ressaltar que após a construção do Astrolábio, pode-se ocultar os objetos que não terão importância no seu funcionamento, ou seja, só era necessário na construção para criar as dependências necessárias.

4.2. Construção do movimento da Terra em torno do Sol com o Astrolábio calculando a latitude para cada ponto do movimento

- ☉ Construa o ponto $A=(0,0,0)$;
- ☉ Crie um círculo c com centro em A e raio de 30 cm, e eixo paralelo ao eixo Z ;
- ☉ Crie um ponto B sobre c ;
- ☉ Crie a esfera a , com centro em B e raio 5;
- ☉ Construa a reta d , reta passando por B e eixo paralelo ao eixo Y ;
- ☉ Crie agora um ponto C sobre a reta d ;
- ☉ Construa a reta e passando por C e perpendicular a c ;

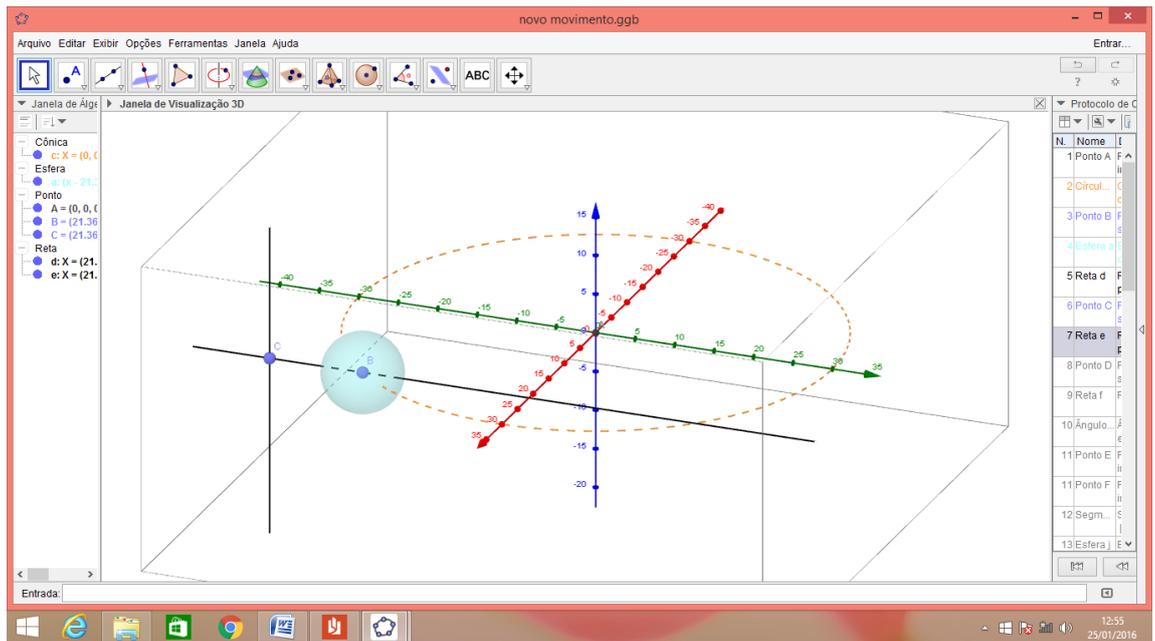


Figura 25. Construção da simulação

- ⊗ Construa agora o ponto D sobre e;
- ⊗ Crie a reta f, a reta que passa pelos pontos B e D;
- ⊗ Construa o ângulo α , ângulo entre DBC, nesta ordem, e para formar esse ângulo deve-se localizar o ponto D na reta e de maneira que o ângulo seja de $23,42^\circ$, que é a inclinação do plano, que contém a linha do equador, e a eclíptica;
- ⊗ Ponto E e F, que vai ser a interseção de a e f;
- ⊗ Agora crie o segmento AB;
- ⊗ Construa a esfera j com centro em A e raio de 5;

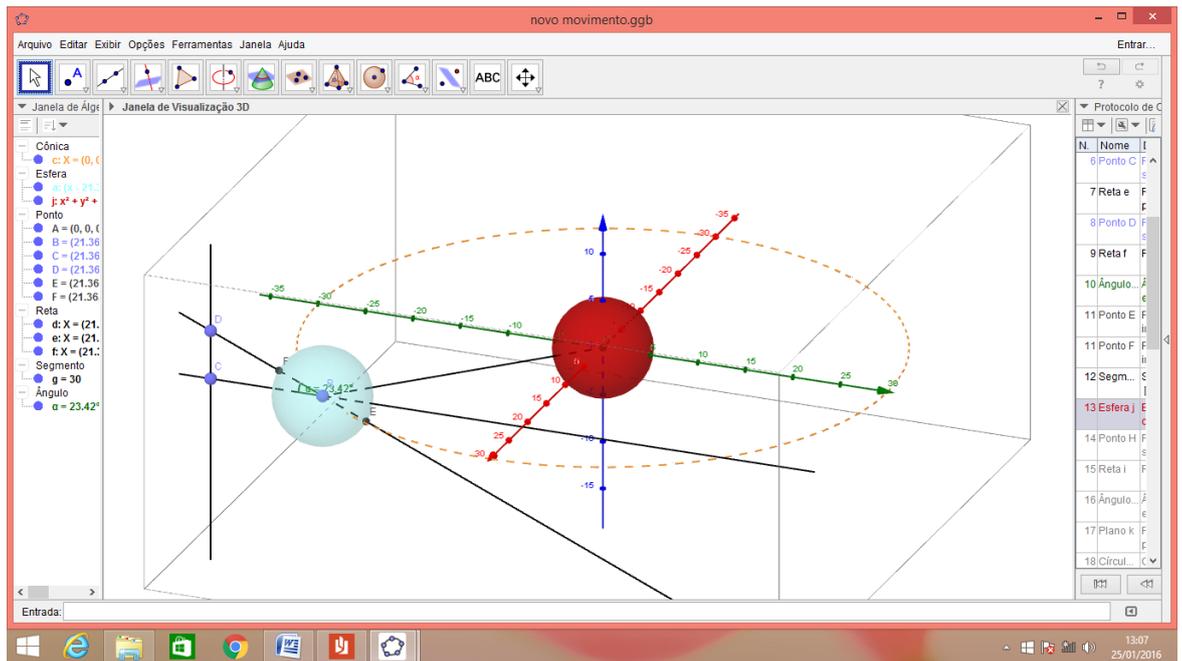


Figura 26. Construção da simulação

- Construa o ponto H sobre a reta e;
- Crie a reta i, a reta que passa pelos pontos B e H;
- Agora devemos ter atenção: vamos criar o ângulo β , que é o ângulo CBH e esse ângulo terá que ter o valor do complemento do ângulo α , para isso teremos que mover o H sobre a reta e de tal forma a obter um ângulo que tenha $66,58^\circ$. E como podemos perceber sem complicação, a reta e é perpendicular a reta i;

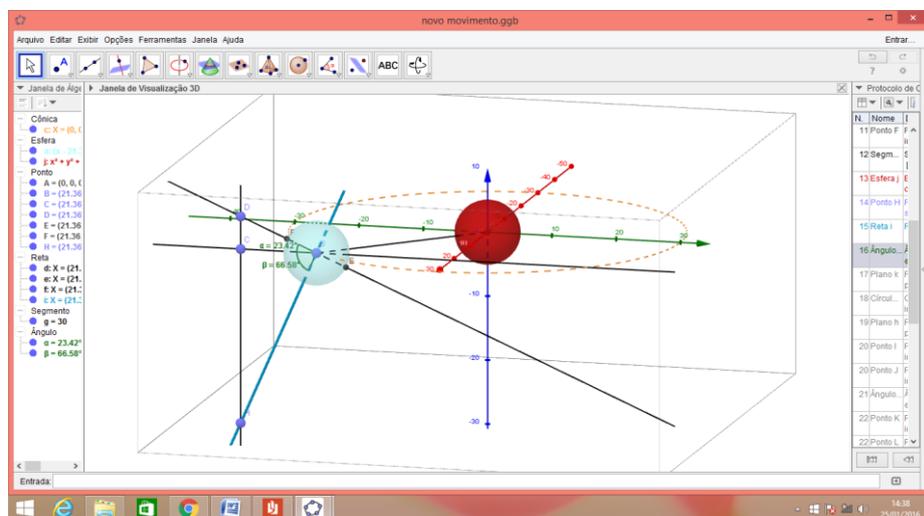


Figura 27. Construção da simulação

- ✿ Iremos agora criar o plano k, um plano passando por B e perpendicular a i;
- ✿ Círculo p, gerado a partir da interseção entre a esfera a e o plano k;
- ✿ Vamos criar agora o plano h, plano criado por três pontos, A, B e H;
- ✿ Pontos I e J, criados a partir da interseção entre p e h;
- ✿ Iremos criar agora o ângulo de declinação (dec), esse ângulo é o ângulo IBA;

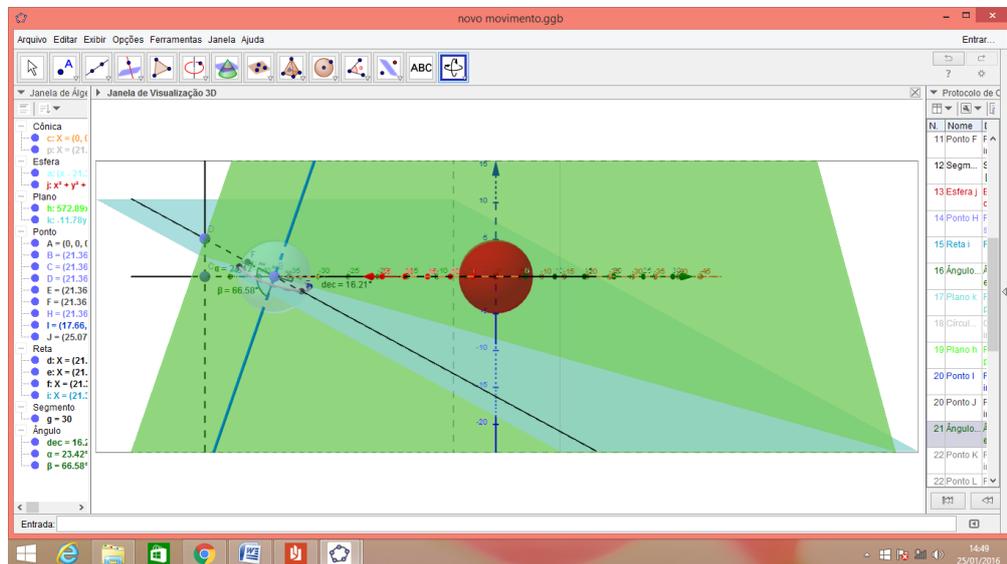


Figura 28. Construção da simulação

- ✿ Criar os pontos K e L, a partir da interseção entre a e i;
- ✿ Criaremos agora o arco q, arco circular passando por, K, I e L;
- ✿ Ponto que chamaremos de observador, simulará um ponto qualquer na Terra, criado sobre o arco q;
- ✿ Agora criaremos a vertical passando pelo observador, basta criar a semirreta com origem em B e passando pelo observador;
- ✿ Criaremos agora o Zênite, que já foi explicado anteriormente, basta criar um ponto na semirreta já criada. Observação : esse ponto zenital deve estar acima do observador. Deixamos oculto os planos para ficar mais nítido o desenho;

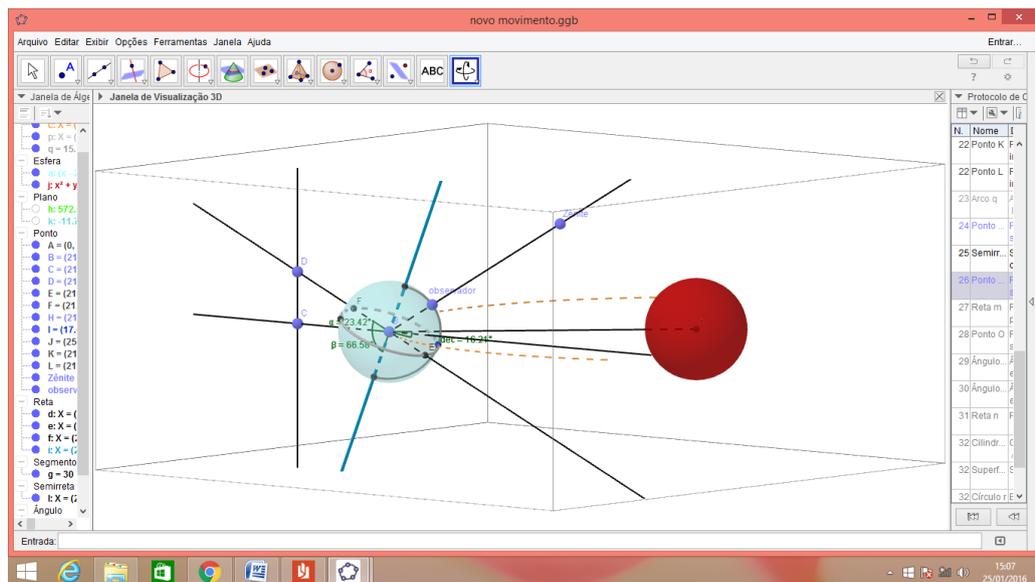


Figura 29. Construção da simulação

- ☸ Criaremos agora a reta m , reta passando pelo ponto do observador e paralela a g , essa reta tem a função de simbolizar o raio do Sol atingindo o ponto do observador;
- ☸ Crie o ponto O sobre a reta m ;
- ☸ Ângulo distância zenital (dist.), ângulo entre o ponto O , observador e o zênite;
- ☸ Ângulo latitude (lat.), ângulo entre I , B e o observador;
- ☸ Cilindro o , cilindro $[B,A,5]$, esse cilindro simboliza a claridade, ou seja, os raios solares atingindo a Terra;
- ☸ Semirreta declinação, com origem em B e passando por I .

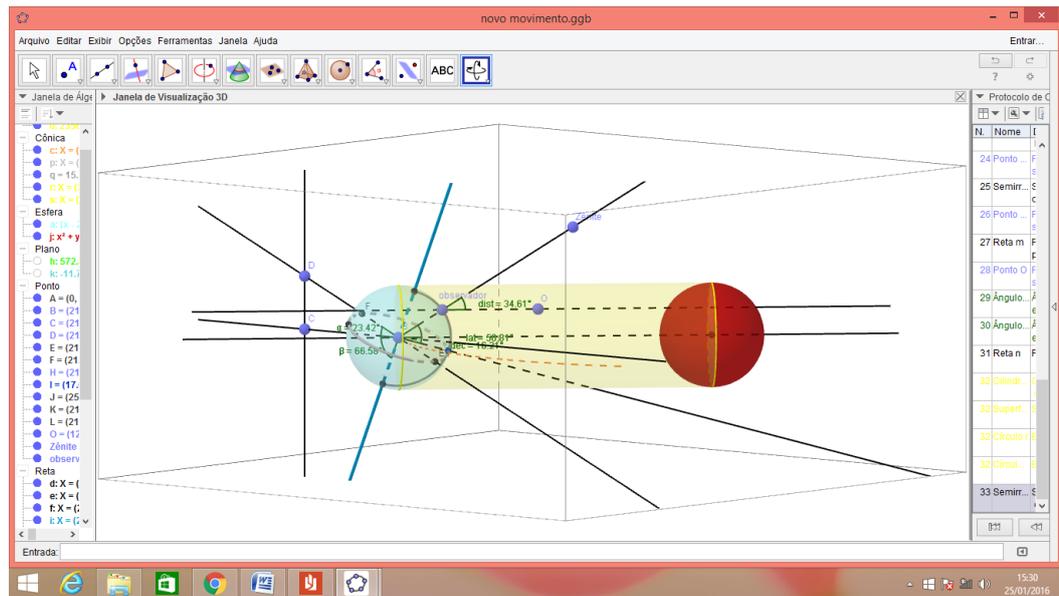


Figura 30. Construção da simulação

Deve-se ressaltar que depois de concluído a trabalho, pode ocultar alguns objetos que não possuem funcionalidade na simulação, mas foram necessários na construção, assim como mudar as cores de alguns objetos, e características de modo geral a fim de melhorar a visualização do trabalho final.

Conclusão

Pode-se concluir com o presente trabalho que, mesmo há tanto tempo, ou seja, há mais de 500 anos atrás, era possível ter algum tipo de orientação em mares e desertos, e através do Astrolábio em conjunto com a tabela de declinação e as observações dos astros, mais precisamente observando o Sol e a estrela Polar era possível calcular a latitude de um determinado ponto, assim a navegação passou a ser mais confiável. Outro ponto que se pode considerar é a possibilidade de se empregar nas aulas de matemática do ensino fundamental, exemplos mais importantes e atrativos, como o uso do Astrolábio para calcular a latitude em conjunto com a tabela de declinação solar ou observando a estrela Polar, pois durante todo o trabalho é utilizada conceitos ministrados no ensino fundamental, geometria e trigonometria. Vale destacar que a construção de uma, simulação do funcionamento do Astrolábio no software Geogebra possibilitou um real e visível entendimento do mecanismo do cálculo da latitude em conjunto com a declinação solar e da distância zenital do Sol.

Referências

Brito, A. F. (s.d.). *Ciência Viva*. Acesso em 24 de novembro de 2015, disponível em Ciência Viva: www.cienciaviva.pt/latlong/anterior/pedron.pdf

Corrêa, I. C. (julho de 2009). História do Astrolábio. *História do Astrolábio*. Porto Alegre, Rio Grande do Sul, Brasil.

Crato, N. (s.d.). *Ciência em Portugal Personagens e Episódios*. Acesso em 10 de novembro de 2015, disponível em Ciência em Portugal Personagens e Episódios: cvc.instituto-camoes.pt/ciencia/e7.html

Dilão, R. (1999). Latitudes e Longitudes. *Latitudes e Longitudes*. Lisboa, Portugal: Eurodois, Lda.

Fantuzzi, F. (s.d.). *InfoEscola Navegando e Aprendendo*. Acesso em 10 de outubro de 2015, disponível em InfoEscola Navegando e Aprendendo: www.infoescola.com/astronomia/astrolabio/

Fundação Museu da Tecnologia de São Paulo. (s.d.). Acesso em 10 de novembro de 2015, disponível em Fundação Museu da Tecnologia de São Paulo: www.museutec.org.br/previewmuseologico/o_astrolabio.htm

Instituto Geogebra no Rio de Janeiro. (s.d.). Acesso em 10 de novembro de 2015, disponível em Instituto Geogebra no Rio de Janeiro: www.geogebra.im-uff.mat.br

Menezes, E. (s.d.). *Esquadrão do Conhecimento*. Acesso em 27 de novembro de 2015, disponível em Esquadrão do Conhecimento: <https://esquadraodoconhecimento.wordpress.com/ciencias-humanas/geografiaregionalizacao-mundial/os-movimentos-da-terra-rotacao-e-translacao>

Miguens, A. P. (1999). Volume II-Navegação Astronômica e Derrotas. *Volume II-Navegação Astronômica e Derrotas*. Diretoria de Hidrografia e Navegação.

Nunes, P. J. (2012). Os Instrumentos Náuticos na Obra de Pedro Nunes. *Os Instrumentos Náuticos na Obra de Pedro Nunes* . Lisboa, Portugal.

Pereira, J. M. (2000). Experiências com Instrumentos e Métodos Antigos de Navegação. *Experiências com Instrumentos e Métodos Antigos de Navegação* . Lisboa, Portugal.

Significados. (s.d.). Acesso em 5 de dezembro de 2015, disponível em Significados: <https://www.significados.com.br/zenite/>

Silveira, D., Hartmann, Â., & Goi, M. (2014). Astrolábio: Instrumento de Medida. *Astrolábio: Instrumento de Medida* . Rio Grande do Sul, Brasil.

The astrolabe. (2010). Acesso em 26 de outubro de 2015, disponível em The astrolabe: www.astrolabe.org

Wikipedia The free Encyclopedia. (s.d.). Acesso em 28 de novembro de 2015, disponível em Wikipedia The free Encyclopedia: https://pt.wikipedia.org/wiki/Abra%C3%A3o_Zacuto

Wikipedia The Free Encyclopedia. (s.d.). Acesso em 26 de outubro de 2015, disponível em Wikipedia The Free Encyclopedia: <https://en.wikipedia.org/wiki/astrolabe>

Zilka, E. (2014). Utilização do Geogebra na Construção de Instrumentos: Teodolito. *Utilização do Geogebra na Construção de Instrumentos: Teodolito* . Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil.