INSTITUTO NACIONAL DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

ANTONIO MARCUS DIAS MOREIRA

TÉCNICAS DE TABULEIRO EM PROBLEMAS OLÍMPICOS: ATIVIDADES COM JOGOS DE TABULEIRO EM SALA DE AULA

Rio de Janeiro
2016

ANTONIO MARCUS DIAS MOREIRA

TÉCNICAS DE TABULEIRO EM PROBLEMAS OLÍMPICOS: ATIVIDADES COM JOGOS DE TABULEIRO EM SALA DE AULA

Trabalho de Conclusão de Curso de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT do Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof Dr Roberto Imbuzeiro Oliveira

Rio de Janeiro

2016

Dedicatória: Dedico a minha família,
em especial minha mãe Aída, minha
esposa Fernanda e minha filha Luíza.

AGRADECIMENTOS

Ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, coordenado pela Sociedade Brasileira de Matemática, pela oportunidade de realizar meu trabalho na minha área de pesquisa.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pela provisão de bolsa de mestrado.

Ao meu orientador, Roberto Imbuzeiro, pela disponibilidade em me auxiliar neste trabalho, com comentários e instruções fundamentais.

Ao meu amigo, Pedro Paulo Cavalcante, por colaborar neste trabalho estudando, pesquisando e resolvendo questões olímpicas sobre tabuleiro.

A todos os professores, monitores e colegas de classe do PROFMAT do IMPA que de alguma forma contribuíram para a conclusão do meu mestrado.

A viagem de mil quilômetros
começa com um passo.

Lao Tzu

RESUMO

A proposta deste trabalho é produzir um texto matemático abordando técnicas de resolução de exercícios sobre tabuleiros nas olimpíadas de matemática. Analisaremos as dificuldades dos alunos em descobrir quais são as soluções dos problemas de tabuleiro que, por vezes, necessitam de raciocínio lógico e escolhas de estratégias vencedoras. Sugerimos um modelo de aula com jogos e problemas voltados para alunos do ensino público que se preparam para a OBMEP, com o objetivo de criar um material que sirva de guia para alunos e docentes.

Palavras Chave: Técnicas de problemas sobre Tabuleiro; jogos de tabuleiro e Olimpíadas de Matemática.

ABSTRACT

The purpose of this work is to produce a text addressing mathematical problem solving techniques on trays in Mathematics Olympiads. Analyze students' difficulties in finding out what are the solutions of board problems sometimes require logical thinking and choices of winning strategies. We suggest a class model with games and problems facing public school students who are preparing for the OBMEP, aiming to create a material that serves as a guide for students and teachers.
Keywords: Techniques of Resolutions of Board; Game Board and Mathematics Olympics.

Lista de Figuras

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Observando os problemas de Olimpíadas de Matemática, percebemos uma grande incidência de questões que envolvem tabuleiros. O estudo combinatório a respeito desses exercícios é algo que sempre necessita de raciocínio lógico e escolha de caminhos favoráveis que nos leve a desencadear a resolução do problema de forma breve e inteligível.

Ao longo das edições das olimpíadas, encontramos diversos problemas sobre tabuleiros na Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas públicas (OBMEP), na Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM), na Olimpíada de Maio, na Olimpíada Ibero Americana, na Olimpíada Internacional de Matemática (IMO), na Canguru de Matemática, na Olimpíada dos Países de Língua Portuguesa, em olimpíadas regionais e em muitas outras olimpíadas pelo mundo.

Neste trabalho vamos mostrar alguns exercícios resolvidos de olimpíadas de matemática e analisar resultados de situações com alunos em sala de aula, observando o desenvolvimento do raciocínio do estudante quando exposto a problemas que envolvem tabuleiros de forma lúdica e concreta.

Os capítulos 2 e 3 foram feitos em conjunto com dois autores: Antonio Marcus Dias Moreira e Pedro Paulo Cavalcante. Já os capítulos 1, 4 e 5 foram produções individuais do autor deste trabalho.

No capítulo 2 temos um pouco da história dos jogos de tabuleiros e da criação das olimpíadas de matemática.

No capítulo 3, com o objetivo de produzir um texto matemático que aborde as técnicas de resoluções de exercícios sobre tabuleiros, mostraremos cinco técnicas utilizadas na resolução de exercícios sobre tabuleiros. Essas técnicas são estudadas com base em problemas olímpicos com soluções elaboradas pelo autor. As Técnicas apresentadas nesse capítulo foram apresentadas pelos autores no III Colóquio de Matemática da Região Centro-oeste em Novembro de 2013 e na VII Bienal da Sociedade Brasileira de matemática em Novembro de 2014.

Em vista do exposto no capítulo 3, são apresentados no capítulo 4, experimentos com jogos e exercícios sobre jogos de tabuleiro para uma turma de alunos da rede pública que se preparam para a OBMEP. Antes de resolver cada exercício proposto, os alunos jogaram cada jogo por diversas vezes para que eles próprios pudessem intuir estratégias vencedoras. O objetivo desta atividade foi mostrar e desenvolver o raciocínio lógico do aluno no que tange a técnica da simetria em jogos. Não foi pretendido com isso criar uma fórmula fechada para resolver jogos e problemas sobre tabuleiros, mas sim auxiliar na busca da solução de forma mais rápida e objetiva.

Por fim, apresentamos no capítulo 5 as considerações finais do nosso trabalho.

2 Contextualização[1]

Neste capítulo falaremos um pouco sobre a história dos jogos de tabuleiros desde o início da civilização até os dias atuais. Também falaremos sobre a história das Olimpíadas de Matemática, com a criação da IMO em 1894 até o sucesso da OBMEP em dias atuais.

2.1 BREVE HISTÓRIA SOBRE TABULEIROS

Desde de que se conhece a civilização sabemos da existência de jogos. Vejamos o texto retirado do site http://www.jogos.antigos.nom.br/artigos.asp, em 18/11/2015.

> *“Desde os mais remotos tempos, quando a espécie humana surgiu no planeta, nasceu junto a ela uma necessidade vital para seu crescimento intelectual: jogar.*
>
> *Manuscritos milenares falam de jogos praticados em todas as regiões do planeta. Dificilmente se poderá delinear exatamente qual foi o primeiro jogo surgido no mundo. Adeptos da teoria Darwiniana afirmam que foi um jogo chamado de Jogo da Evolução, praticado pelos Neanderdhal. Consta que era um jogo bem simples e rude, jogado com um grande osso. Marcava-se pontos destroçando a cabeça dos adversários e com isso conseguindo o domínio de territórios.”*

Apesar de não possuirmos dados concretos, diz-se que os primeiros jogos de tabuleiros surgiram milhares de anos antes de Cristo como forma de lazer e entretenimento entre as pessoas da época. Um dos jogos mais antigos que conhecemos é o Senet, que tem registros de 2000 anos antes de Cristo. O senet é jogado num tabuleiro retangular e conforme tradição da época, os donos dos jogos eram enterrados com eles para que suas almas tivessem lazer eterno.

[1] Este capítulo é comum aos Trabalhos de Conclusão de Curso do Profmat de Antonio Marcus Dias Moreira e Pedro Paulo Cavalcante.

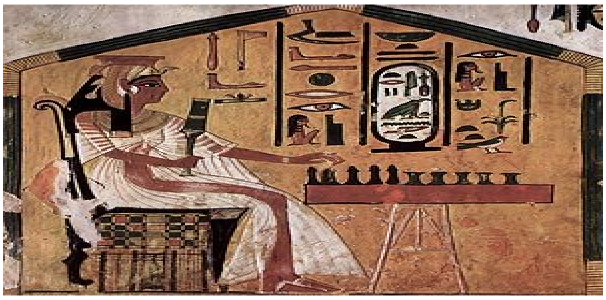


Figura 1 - Nefertari jogando Senet. Pintura da tumba da Rainha Nefertari do Egito (1295 – 1255 a.C.)

Fonte: http://pt.wikipedia.org/wiki/Senet

Outro jogo muito antigo e jogado até hoje é o xadrez. Várias são as histórias sobre a origem do xadrez[2], mas talvez a mais curiosa delas seja a dos grãos de soja. Um Brâmane apresentou o xadrez a um Rei para que ele saísse da depressão após ter perdido uma guerra. O tabuleiro era o mesmo dos dias atuais, quadrado, 8X8, preto e branco se alternando em casas vizinhas. O rei, extremamente satisfeito por ter saído da sua profunda depressão, sugeriu que o Brâmane fizesse um pedido para recompensar seu gesto de apresenta-lo ao jogo. Então ele pediu ao rei que lhe desse um grão de soja na primeira casa do tabuleiro, dois grãos no segundo, quatro no terceiro e assim sucessivamente até a 64ª casa do tabuleiro. Achando o pedido do Brâmame humilde, o rei lhe concedeu tal pedido. Se arrependeu mais tarde por ter aceitado pois até hoje não teríamos grãos suficientes para pagar o tal Brâmame[3].

Porém, embora diversas civilizações antigas tenham sido apontadas como o berço do xadrez, na atualidade a maioria dos pesquisadores concorda que o jogo tenha se originado na Índia por volta do século VI, com regras diferentes das atuais e denominado Chaturanga em sânscrito.

---

[2] Histórias sobre xadrez disponível em CASTRO, Celso. Uma história cultural do xadrez. Cadernos de Teoria da Comunicação, Rio de Janeiro, V.1, n°2, p.3-12,1994.

[3] Ver mais no Livro Ávila, Geraldo. Várias faces da matemática: tópicos para licenciatura e leitura geral. São Paulo, editora Blucher, 2010. (Cap 6, pag.47)

Figura 2 – Tabuleiro de xadrez

(Fonte: http://www.soxadrez.com.br/conteudos/tabuleiro_pecas/)

O jogo de damas também é muito popular, sendo jogado em praças de todo Brasil nos dias de hoje. Pouco se sabe da sua origem. No Brasil o jogo de Damas foi introduzido como esporte em 1935[4].

Outro conhecido nosso e muito jogado nas escolas é o jogo da velha. Dizem que foi nomeado na Inglaterra, quando mulheres se reuniam no fim da tarde para tomar chá, conversar e bordar. Daí, as mais idosas, sem habilidade para bordar se reuniam para jogar em um tabuleiro 3X3, com peças em forma de cruz e outras redondas. Temos também o Resta um, que usualmente é um presente dado a crianças entre 8 e 12 anos. É um jogo de tabuleiro em forma de cruz com 33 casas, jogado com 32 peças, onde o objetivo é deixar apenas uma peça no tabuleiro, saltando umas sobre as outras.

[4] Retirado de http://www.xadrezregional.com.br/damas_hist.html, acesso em 18/11/2015, 03:48

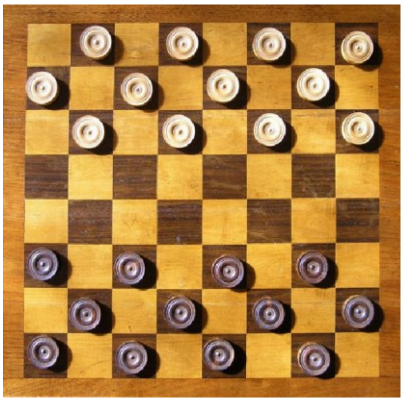


Figura 3 – Tabuleiro de damas

(Fonte: http://www.ilhadotabuleiro.com.br/jogos/damas/imagem/18611)

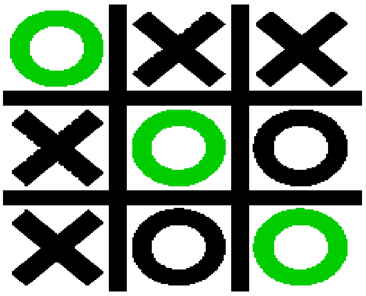


Figura 4 - Exemplo de um jogo da velha em que o círculo O ganha a partida

(Fonte: http://pt.wikipedia.org/wiki/Jogo_da_velha)

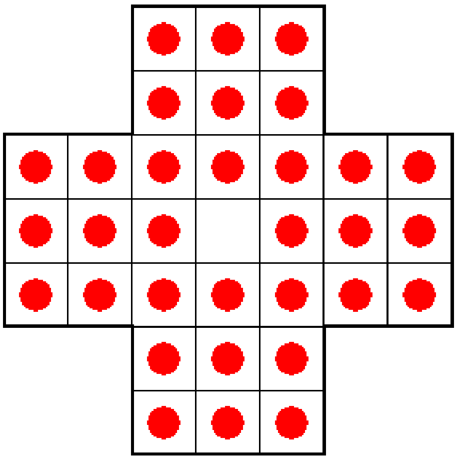
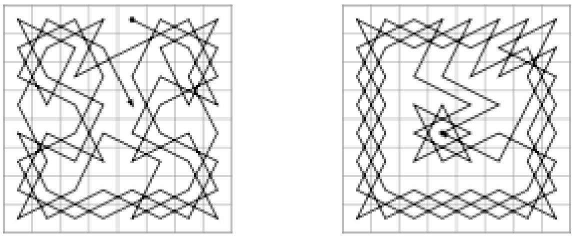


Figura 5 - Jogo resta um

(Fonte: http://gervasio010.blogspot.com.br/2010/11/jogo-resta-um.html)

Existem na história dos tabuleiros diversas produções de problemas que encantam os admiradores da matemática. Um problema clássico é o dos cavalos, registrado no livro Bagavantabháskara, escrito por volta do século XVI. O problema consiste no movimento de um cavalo percorrendo o tabuleiro vazio. Ele deve visitar todas as casas apenas uma vez em movimentos consecutivos. Atualmente existem diversas soluções para esse problema, inclusive as ditas abertas e fechadas, de acordo com a última posição do cavalo no tabuleiro. Se na última casa tivermos a possibilidade de retornar a casa inicial, dizemos que é uma solução fechada. Caso contrário ela é aberta.



1	48	31	50	33	16	63	18
30	51	46	3	62	19	14	35
47	2	49	32	15	34	17	64
52	29	4	45	20	61	36	13
5	44	25	56	9	40	21	60
28	53	8	41	24	57	12	37
43	6	55	26	39	10	59	22
54	27	42	7	58	23	38	11

(a) Solução aberta (b) Solução fechada (c)Solução com refinamento matemático onde a soma das colunas e fileiras é 260

Figura 6 (a), (b) e (c) – Soluções do problema do cavalo

(Fonte: http://pt.wikipedia.org/wiki/Problema_do_cavalo)

Os jogos de tabuleiros hoje em dia estão disponíveis em diversas plataformas online. Conseguimos jogar no computador e no celular. Um dos jogos muito jogados, apesar de não ser de tabuleiro propriamente dito é o Tetris, que tem como princípio o encaixe de quadriminós e cada linha completa é eliminada. Perde o jogo aquele que chegar na última linha do “tabuleiro”. Também temos o Sudoku, muito vendido em revistas, que consiste em completar um tabuleiro 9X9 com números de 1 a 9 sem repeti-los em nenhuma linha e em nenhuma coluna, além de ter os números de 1 a 9 contidos em subtabuleiros 3X3.

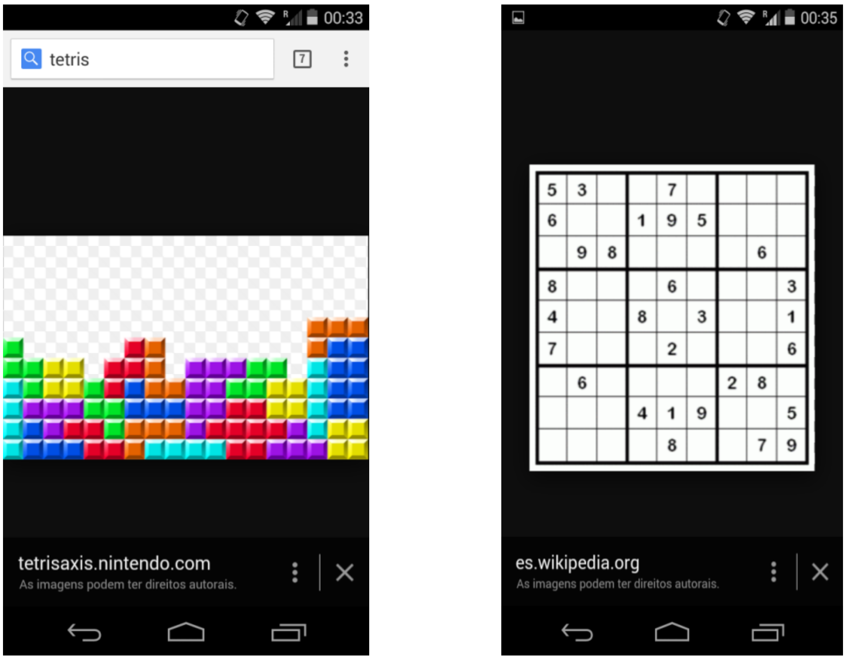


Figura 7 - Fotos de capturas de tela de um smartphone com o jogo tetris a esquerda e o jogo sodoku a direita.

(Fonte: capturas de tela do celular do Autor.)

Enfim, como podemos ver, os tabuleiros estão no nosso dia a dia, seja na história, nas bancas, no computador ou na palma de nossa mão através de telefones celulares.

2.2 AS OLIMPÍADAS DE MATEMÁTICA

As Olimpíadas de Matemática estão cada vez mais presentes no dia a dia dos estudantes. Essas competições matemáticas têm o objetivo de melhorar o ensino de matemática no nosso país, através de estímulos a alunos e professores. O intuito com isso, é descobrir jovens com talento matemático excepcional e colocá-los em contato com matemáticos profissionais e instituições de pesquisa de alto nível, como o IMPA, propiciando condições favoráveis para a formação e o desenvolvimento de uma carreira de pesquisa. Para entendermos melhor o que são as olimpíadas de matemática, vamos ler o texto retirado do sitio da OBM[5]:

"As Olimpíadas de Matemática, nos moldes atuais, são disputadas desde 1894, quando foram organizadas competições na Hungria. Com o passar dos anos, competições similares foram se espalhado pelo leste europeu, culminando, em 1959, com a organização da 1ª Olimpíada Internacional de Matemática, na Romênia, com a participação de países daquela região.

A Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) organizou em 1979 a 1ª Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM). Ao longo destes anos, a OBM passou por diversas mudanças em seu formato (veja abaixo quadro ilustrativo), mantendo a ideia central que é a de estimular o estudo da Matemática pelos alunos, desenvolver e aperfeiçoar a capacitação dos professores, influenciar na melhoria do ensino, além de descobrir jovens talentos.

Dentre os premiados são selecionados aqueles que formam as equipes brasileiras na Olimpíada do Cone Sul (4 estudantes, com até 16 anos); na Olimpíada Internacional de Matemática (6 estudantes do ensino médio, com até 19 anos); na Olimpíada Ibero-americana (4 estudantes, com até 18 anos) e na Competição Internacional de Matemática (universitários).Estas competições são realizadas anualmente, sempre em um país diferente."

[5]Disponível em < http://www.obm.org.br/opencms/quem_somos/breve_historico/>, acesso em 18/11/2015, 02:29.

A maior competição de Matemática do Brasil é a OBMEP[6] – Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas. Apresentando uma média de 19 milhões de alunos participantes por ano realizando, teve seu maior evento em 2010, onde 19.665.928 alunos foram inscritos para realizar a prova da primeira fase. Em 2014 a OBMEP distribuiu 6500 medalhas a alunos participantes, onde todos receberão uma bolsa durante um ano no Programa de Iniciação Científica Júnior.

Além dessas, existem diversas competições regionais de matemática. Há Olimpíadas estaduais e municipais no Brasil, entre elas dos municípios de João Pessoa, Duque de Caxias e São Carlos e nos estados do Rio de Janeiro, Minas Gerais, Alagoas, Pará e Ceará.

As olimpíadas de matemática apresentam problemas que estimulam o raciocínio lógico dos estudantes. Os problemas costumam vir das seguintes áreas: Álgebra, Geometria, Teoria dos números e Combinatória. Esta última, por sua vez, apresenta alta incidência de questões envolvendo tabuleiros. Este tipo de problema requer estratégias peculiares para resolução, que sempre necessitam de raciocínio lógico e escolha de caminhos favoráveis. Escolher um caminho errado pode nos levar a obtenção de resoluções muito longas ou até mesmo inserir elementos alheios à resolução dos problemas, que nos levarão a resultados equivocados. No próximo capítulo apresentaremos algumas técnicas que podem ser utilizadas na resolução deste tipo de problema.

[6] Disponível em <http://portal.mec.gov.br/component/tags/tag/32707>, acesso em 02/02/2016, 13:06.

3 ALGUMAS TÉCNICAS DE RESOLUÇÃO PARA PROBLEMAS DE TABULEIRO[7]

O objetivo deste capítulo é ajudar alunos e professores a determinarem caminhos que facilitem achar soluções para problemas envolvendo tabuleiros. Para isso, vamos mostrar cinco técnicas utilizadas para resolução desses tipos de exercícios, enfatizando-as com exemplos retirados das principais olimpíadas brasileiras e internacionais. Damos as estas técnicas os seguintes nomes:

1. Marcação de casas:
2. Movimentos e preenchimento de um tabuleiro
3. Cobertura de tabuleiros (Poliminós)
4. Redução a um caso menor
5. Simetria em jogos

3.1 MARCAÇÃO DE CASAS

Marcar as casas de um tabuleiro significa definir um comportamento para o nosso problema. Seja com cores ou de modo numérico, utilizando dois, três ou quatro tipos de marcação, o importante é identificarmos qual padrão é interessante para iniciarmos a solução. Talvez esta seja a técnica mais utilizada em problemas com tabuleiros já que muitas vezes temos que marcar as casas de um tabuleiro para nos guiar, estabelecer padrões ou instituir coberturas. Vamos começar com um problema simples de marcação que nos ajudará como identificar o que queremos nesta seção.

Problema 1 – (OBM 2005 – Nível 1 - 1ª Fase)

> As nove casas de um tabuleiro 3x3 devem ser pintadas de forma que cada coluna, cada linha e cada uma das duas diagonais não tenham duas casas de mesma cor. Qual é o menor número de cores necessárias para isso?
>
> A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

[7] Este capítulo é comum aos Trabalhos de Conclusão de Curso do Profmat de Antonio Marcus Dias Moreira e Pedro Paulo Cavalcante.

Solução:

Seja o tabuleiro 3X3 abaixo, com linhas e colunas rotuladas por a, b, c e 1, 2, 3, respectivamente.

	1	2	3
a			
b			
c			

Vamos chamar as cores de A, B, C, assim sucessivamente. Sem perda de generalidade marcamos a casa a1 com a cor A. Logo, as casas b1 e c1, também sem perda de generalidade, devem ter as cores B e C conforme a figura abaixo.

	1	2	3
a	A		
b	B		
c	C		

Podemos deduzir automaticamente que a casa a2 não pode ser pintada com A, mas pode com B ou C. Pintaremos com B.

	1	2	3
a	A	B	
b	B		
c	C		

A casa b2 não pode ser pintada com nenhuma das cores existentes, mesmo se tivéssemos escolhidos a cor C no passo anterior, uma nova cor para pintar b2 é inevitável. Logo pintaremos b2 com uma cor D.

	1	2	3
a	A	B	
b	B	D	
c	C		

A casa c2 não pode ser pintada por B, C nem D, mas pode por A. Logo, pintemos com A.

	1	2	3
a	A	B	
b	B	D	
c	C	A	

A casa a3 não pode ser pintada com nenhuma das cores existentes no tabuleiro. Pintemos com a cor E.

	1	2	3
a	A	B	E
b	B	D	
c	C	A	

A casa b3 não pode ser pintada com B, D nem E. Pode ser pintada com A ou C. A escolha é indiferente pois como a linha c já tem as cores A e C, sua escolha não altera a pintura do tabuleiro. Então, por escolha, pintemos com a cor A.

	1	2	3
a	A	B	E
b	B	D	A
c	C	A	

A casa c3 pode ser pintada com a cor B.

	1	2	3
a	A	B	E
b	B	D	A
c	C	A	B

Portanto, temos a seguinte configuração:

A	B	E
B	D	A
C	A	B

Reparamos que na 1ª coluna temos de escolher três cores. Na 2ª coluna independente da escolha da cor de a2 (B ou C), b2 será pintado com uma nova cor. Já na 3ª coluna, se escolhermos para a2 a cor B, a3 tem de ser uma nova cor, e se a2 for pintada por C, c3 terá uma nova cor.

Já sabemos que podemos utilizar apenas cinco cores. Vamos supor que dispomos apenas de quatro cores, A, B, C e D.

A cor A iremos por no meio do tabuleiro e depois iremos tentar distribuir as cores de modo que consigamos cumprir a condição do enunciado.

	A	

B		D
	A	
C		?

Como podemos ver, ficamos sem opção para preencher a casa destacada. Assim, o menor número de cores necessárias que podemos utilizar são cinco. Resposta letra C.

Este é um exemplo que podemos fazer para pensar bem na forma que decidimos marcar um tabuleiro. Observar as consequências do que marcamos é fundamental. Ver os nossos objetivos, que no caso do problema acima era não permitir que tivéssemos linhas, colunas e diagonais com as mesmas cores.

No próximo exemplo, utilizaremos, para marcar as casas, a coloração do tipo xadrez para resolver o problema.

Problema 2 – (OBM 2001 – Nível 2 – 3ª Fase)

As 42 crianças de uma escola infantil deram as mãos formando uma fila e cada uma delas recebeu um número da seguinte maneira: a primeira delas ficou com o número 1, a segunda ficou com o número 2 e, assim sucessivamente, até a última, que ficou com o número 42. Continuando de mãos dadas, foram para um pátio, onde cada uma delas ficou sobre uma lajota quadrada; duas crianças com números consecutivos ficaram em lajotas vizinhas com um lado comum (ou seja, do lado esquerdo, do lado direito, na frente ou atrás, mas nunca em diagonal). Ao relatar esse fato para a diretora, a inspetora Maria fez o desenho a esquerda, mostrando a posição de três crianças sobre o retângulo formado pelas 42 lajotas, sobre as quais estavam as crianças. Num outro comunicado, a inspetora Célia fez outro desenho, mostrado a direita, com a posição das mesmas crianças sobre o mesmo retângulo. Ao receber os dois desenhos a diretora disse a uma das inspetoras: "O seu desenho está errado".

a) Com qual das duas inspetoras a diretora falou? Qual foi o raciocínio da diretora?

b) Complete o desenho correto satisfazendo as condições do enunciado.

	11	20				
	31					

(Desenho de Maria)

	11	20				
	31					

(Desenho de Célia)

Solução:

Resolveremos apenas o item a) do problema.

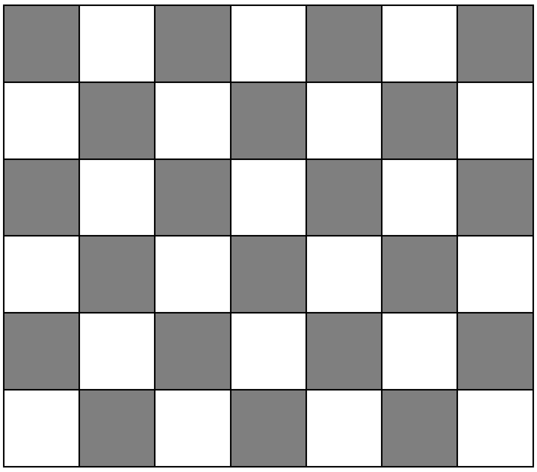
Neste exercício iremos utilizar um conceito matemático comumente utilizado em problemas olímpicos: a paridade. Apesar de a ideia de paridade ser extremamente simples, combinada com um pouco de imaginação ela se torna uma poderosa ferramenta na resolução de problemas matemáticos envolvendo números inteiros, sobretudo quando queremos provar que é impossível o resultado de algum tipo de contagem dado um certo valor.

A primeira coisa é pensar qual seria a melhor forma de marcar este tabuleiro. Pelas regras do problema, é impossível elas ficarem de mãos dadas na diagonal. Ou elas ficam na horizontal ou, na vertical. Outra informação importante é que, se as crianças são numeradas com um número par, elas ficarão de mãos dadas com duas crianças com numeração ímpares. Por exemplo, a criança de número 10 dá as mãos para as crianças de números 9 e 11. Da mesma forma, a criança com numeração ímpar dará as mãos para duas crianças de numeração par. Portanto, uma marcação dupla, considerando pares e ímpares é interessante, observando que eles estarão sempre na horizontal ou vertical.

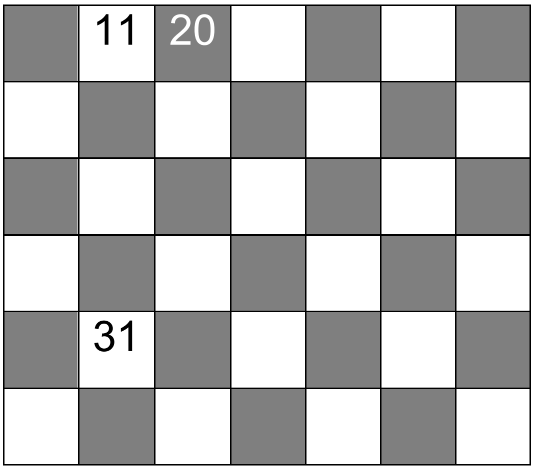
Chamemos I de ímpares e P de pares

I	P	I	P			
P	I	P				
I	P					
P						

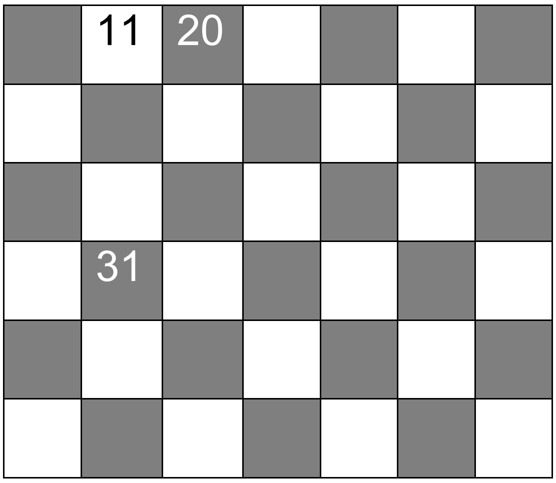
Se continuarmos a marcar, vemos que fica com uma marcação similar ao tabuleiro de xadrez. Logo, podemos fazer desse jeito:



Com essa configuração, podemos afirmar então que uma cor é dos pares e a outra é dos ímpares. Assim, de acordo com o enunciado, temos:



(Desenho de Maria)



(Desenho de Célia)

No segundo tabuleiro, temos números ímpares em cores diferentes, o que é impossível pela nossa marcação. Portanto, a diretora falou com a Célia.

Problema 3 – (OBM 1986 – Nível Sênior)

A figura 1 mostra o tabuleiro do jogo ”resta um”. Começa-se o jogo com peças em todas as casas, exceto na central, que inicialmente está vazia. São permitidas jogadas da seguinte forma: Suponha três casas imediatas A, B e C situadas em linha reta horizontal ou vertical e dispostas na ordem A, B, C ou C, B, A. Se A ou B Estiverem ocupadas por peças e C vazia, então a peça que ocupa A pode saltar para C, retirando-se do jogo a que está em B (veja figura 2). O objetivo do jogo é remover do tabuleiro todas as peças, exceto uma. Diga se é possível, partindo da posição inicial e fazendo apenas os movimentos permitidos, chegar a posição final mostrada na figura 3.

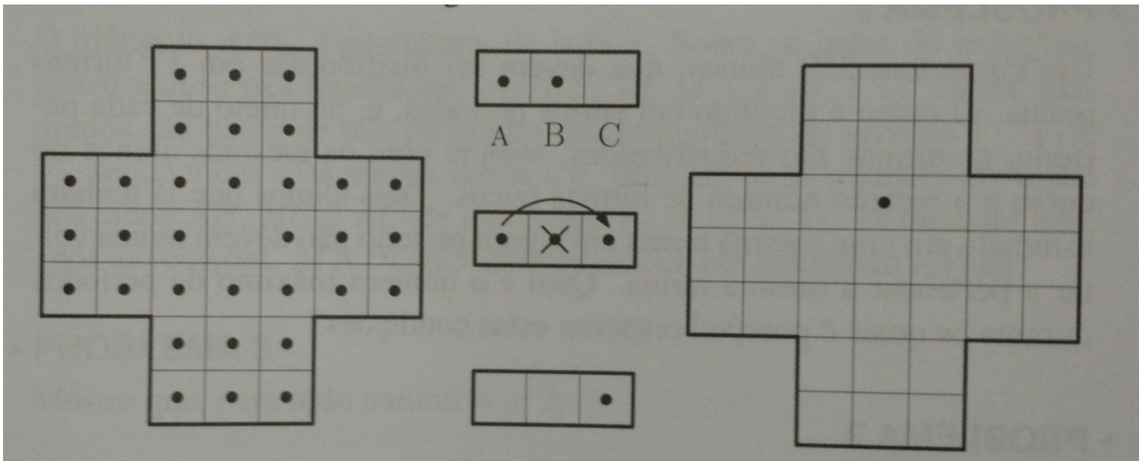
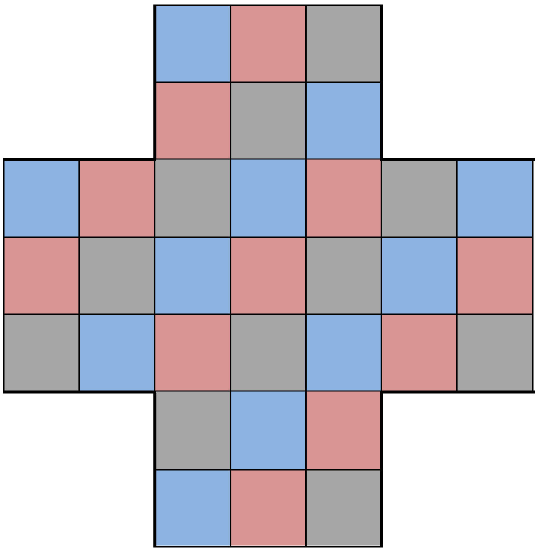


Figura 1 Figura 2 Figura 3

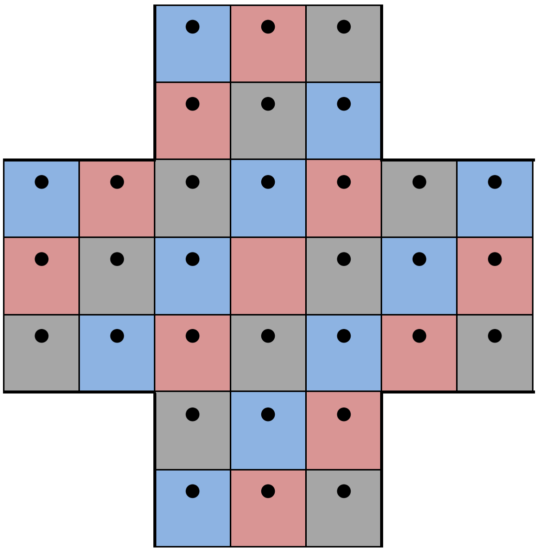
Solução:

Inicialmente vamos pensar como funciona o jogo do resta um. Cada jogada envolve três casas: a casa de onde sai o pino, a casa que vai receber o pino e a casa que é “pulada” na jogada. Então, é plausível que utilizemos uma marcação tripla neste tabuleiro.

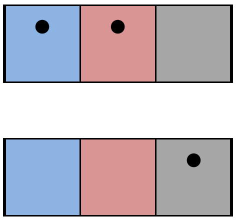
Vamos marcar este tabuleiro de modo que sempre tenhamos uma jogada envolvendo casas com três cores diferentes.



Podemos perceber que cada uma das cores está em 11 casas. Na disposição inicial do “resta um” temos 11 casas azuis com peças, 11 casas cinzas com peças e 10 casas vermelhas com peças. Notem que novamente aparece o conceito de paridade neste exercício.



O ponto crucial é o seguinte: a cada movimento do “resta um” altera-se o número de casas ocupadas de cada cor, pois pensemos como exemplo: retiramos a peça da casa azul e colocamos na casa cinza, “pulando” a casa vermelha. Logo a casa azul que estava ocupada não está mais assim como a casa vermelha. Já a casa cinza que estava vazia passou a ser ocupada.



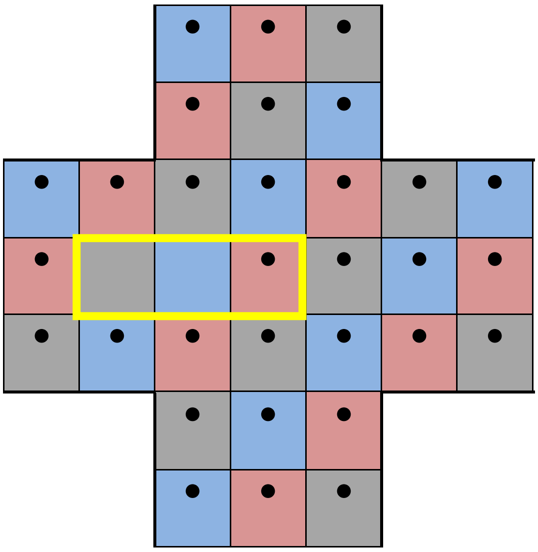
Vejamos três movimentos como exemplo, agora no tabuleiro do resta um:

Começamos com

A = 11

C = 11

V = 10

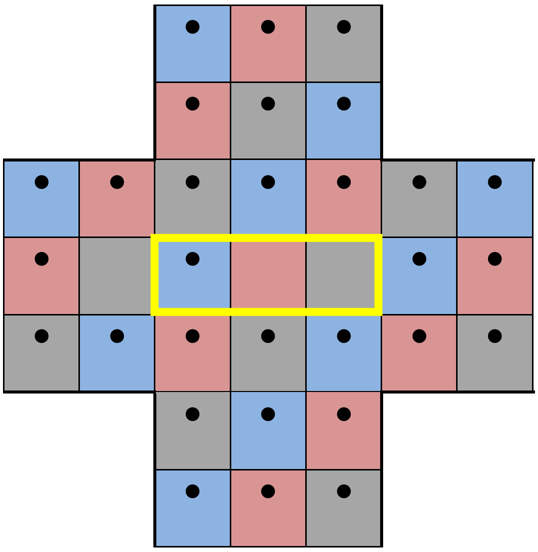


Após o primeiro movimento temos

A = 10

C = 10

V = 11

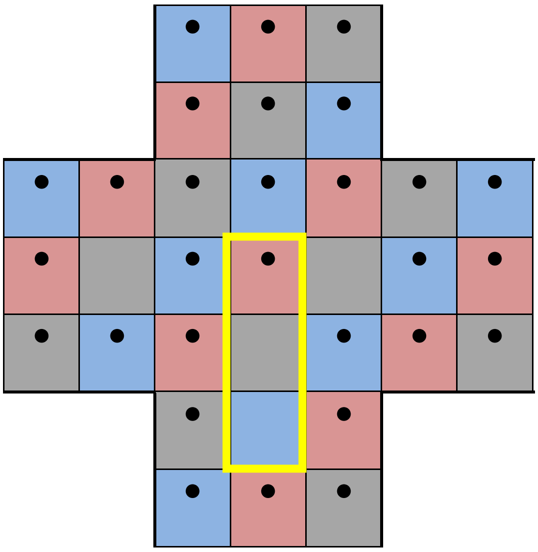


Após o segundo movimento temos

A = 11

C = 9

V = 10



Após o terceiro movimento temos:

A = 10

C = 8

V = 11

O ponto principal é que A, C e V trocam de paridade a cada jogada. Isto implica que as cores azul e cinza sempre têm a mesma paridade, ou seja, se eu tenho um número par de peças nas casas azuis, também tenho um número par de peças nas casas cinzas, e vice-versa. Já o vermelho tem paridade distinta das outras duas. Quando o vermelho é ímpar, as outras duas cores são pares e quando o vermelho é par, as outras duas são impares. Como no jogo deve sobrar apenas uma peça, duas cores devem ter zero peças e a outra cor deve ter uma peça. Considerando que as cores azul e cinza têm a mesma paridade, obrigatoriamente ambas devem ter zero no fim do jogo e a peça restante deve ficar em uma casa vermelha. Como a disposição do enunciado mostra a última peça em uma casa azul, é impossível chegar à posição final indicada.

Assim, apenas marcando as casas, muitas vezes chegamos diretamente ao resultado pretendido. Não existe uma fórmula de como marcar as casas, mas se pensarmos com cuidado no nosso objetivo no problema, conseguimos em geral deduzir nossa marcação de forma simples.

3.2 MOVIMENTOS E PREENCHIMENTO DE UM TABULEIRO

Questões que envolvem perguntas do tipo "qual o número mínimo de movimentos" ou "preencha o tabuleiro de modo que", aparecem usualmente em provas de Olimpíadas de Matemática.

Para esse tipo de problemas devemos ter bastante atenção, pois, apesar de muitas vezes não terem um alto grau de dificuldade, podemos ficar envolvidos muito tempo aplicando tentativas. Um roteiro interessante para resolvermos esses exercícios é:

1. Qual o padrão de movimentos que é dado pelo exercício ou qual padrão queremos encontrar?
2. De qual forma não existe chance de eu fechar o ciclo de movimento ou de percurso em um tabuleiro?
3. Quais opções eu tenho?

Problema 1 – (OBM 2002 – Nível 2 – 2ª Fase)

> João gosta de verificar propriedades do jogo de xadrez em um tabuleiro 5x5. Num de seus experimentos, João coloca um cavalo na casa inferior esquerda do tabuleiro 5x5. Qual o número mínimo de movimentos do cavalo para que ele possa chegar a qualquer casa do tabuleiro 5x5?

Solução:

Vamos as nossas perguntas:

1) Qual o padrão de movimentos que é dado pelo problema ou qual padrão queremos encontrar?

Resposta: Utilizaremos o movimento de um cavalo, ou seja, anda duas casas em uma direção e, logo em seguida, uma casa na direção perpendicular (movimento em L)

2) De qual forma não existe chance de eu fechar o ciclo de movimento ou de percurso em um tabuleiro?

Resposta: Se eu quero descobrir o número mínimo de movimentos, não devemos fazer movimentos que voltem para a mesma casa. Devemos sempre ir para casas não ocupadas.

3) Quais opções eu tenho?

Resposta: O interessante nesse exercício é marcar as casas que já foram ocupadas com números, para não repetirmos movimentos. A única opção é verificar todos os movimentos possíveis a partir da casa determinada.

Vejamos o tabuleiro abaixo:

C				

Com um movimento podemos chegar apenas a duas casas. As marcaremos com o número 1.

	1			
		1		
C				

Agora vamos analisar quais as possibilidades de movimento do cavalo a partir das casas marcadas com 1. Lembrando que, não vamos marcar as casas já visitadas.

2		2		
	2		2	
2	1			2
		1	2	
C		2		2

As casas marcadas com 2 necessitam apenas de dois movimentos para serem ocupadas.

Iremos repetir o processo para o terceiro movimento:

2	3	2	3	
3	2	3	2	3
2	1		3	2
3		1	2	3
C	3	2	3	2

Repetindo o processo para o quarto movimento:

2	3	2	3	4
3	2	3	2	3
2	1	4	3	2
3	4	1	2	3
C	3	2	3	2

Como todas as casas já estão preenchidas, podemos afirmar que quatro é o número mínimo de movimentos para chegar em qualquer casa do tabuleiro, pois o cavalo já possui um movimento com o número de casas pré- determinadas, não admitindo atalhos.

Problema 2 – (OBM 1998 – Nível 2 – 3ª Fase)

Em um jogo existem 20 buracos vazios em fila e o jogador deve colocar um pino em cada buraco de acordo com as seguintes regras:

a) Se colocar um pino em um buraco e se os dois buracos vizinhos estiverem vazios, o pino permanece.

b) Se colocar um pino em um buraco e se um dos buracos vizinhos estiver ocupado, o pino deste buraco vizinho deve ser retirado.

c) Se colocar um pino em um buraco e se os dois buracos vizinhos estiverem ocupados, então um dos pinos vizinhos deve ser retirado.

Determine qual é o número máximo de pinos que podem ser colocados.

Solução:

Ao contrário de outros exercícios, neste padrão queremos fechar o ciclo, ou seja, encontrar a forma de completar o máximo de casas vazias do tabuleiro abaixo.

Vamos ver o que acontece em quatro casas deste tabuleiro:

Colocando um pino na primeira casa

•			

Agora pino na terceira casa

•		•	

Colocando um pino na segunda casa, vamos optar por retirar o pino da terceira

•	•		

Colocando um pino na quarta casa temos:

•	•		•

Usaremos a lógica de nunca colocarmos um pino entre uma casa ocupada e uma casa vazia. Se tivermos a opção de colocar entre duas, essa será nossa prioridade, sempre retirando o pino da direita. Caso contrário, colocamos ela entre duas casas vazias.

Seguindo essa regra, teremos a seguinte sequência:

1	●																			
2	●		●																	
3	●	●																		
4	●	●		●																
5	●	●	●																	
6	●	●	●		●															
7	●	●	●	●																
8	●	●	●	●		●														
9	●	●	●	●	●															
10	●	●	●	●	●		●													
11	●	●	●	●	●	●														
12	●	●	●	●	●	●		●												
13	●	●	●	●	●	●	●													
14	●	●	●	●	●	●	●		●											
15	●	●	●	●	●	●	●	●												
16	●	●	●	●	●	●	●	●		●										
17	●	●	●	●	●	●	●	●	●											
18	●	●	●	●	●	●	●	●	●		●									
19	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●										
20	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●		●								
21	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●									
22	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●		●							
23	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●								
24	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●		●						
25	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●							
26	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●		●					
27	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●						
28	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●		●				
29	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●					
30	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●		●			
31	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●				
32	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●		●		
33	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●			
34	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●		●	
35	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●		
36	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●		●

Portanto, em 36 movimentos, conseguimos colocar 19 pinos, que é o número máximo de peças que é possível colocar neste tabuleiro, pois sempre que colocamos um pino, alguma casa vizinha fica sem pino. Logo não é possível ocupar todo o tabuleiro.

Problema 3 – (Olimpíada de Maio – 2007)

Um tabuleiro 7x 7 tem uma lâmpada em cada uma de suas 49 casas, que pode estar acesa ou desligada. A operação permitida é escolher 3 casas consecutivas de uma linha ou de uma coluna que tenham duas lâmpadas vizinhas entre si acesas e a outra desligada, e trocar o estado das três.

Quer dizer:

Exiba uma configuração de exatamente 8 lâmpadas acesas localizadas nas primeiras 4 linhas do tabuleiro tais que, mediante uma sucessão de operações permitidas, cheguemos a ter uma única lâmpada acesa no tabuleiro e que esta esteja localizada na última linha. Mostre a sequência de operações que se utilizam para alcançar o objetivo.

Solução:

Vamos as nossas perguntas.

1) Qual o padrão de movimentos que é dado pelo exercício ou qual padrão queremos encontrar?

Resposta: O padrão dado no enunciado, conforme a figura, e que devemos ter início nas quatro linhas superiores do tabuleiro 7X7.

2) De qual forma não existe chance de eu fechar o ciclo de movimento ou de percurso em um tabuleiro?

Resposta: Devemos analisar quais formas não teremos mais de uma casa acesa no tabuleiro e a única casa acesa deve estar na última linha.

3) Quais opções eu tenho?

Resposta: Podemos marcar oito casas aleatoriamente na parte superior do tabuleiro e fazer por tentativas. Porém, alguns exercícios vale a pena começarmos pelo fim, ou seja, colocamos uma única casa acesa na última linha e fazemos o percurso inverso, visando chegar a oito casas acesas nas quatro linhas superiores.

Vale ressaltar que, como a cada movimento eu apago uma luz e começo com oito luzes acesas, devo fazer exatamente sete movimentos.

Importante destacar que os movimentos são inversíveis, por isso começar pelo fim. Isso significa que quando eu faço determinado movimento, eu consigo, com apenas um movimento, voltar a posição anterior.

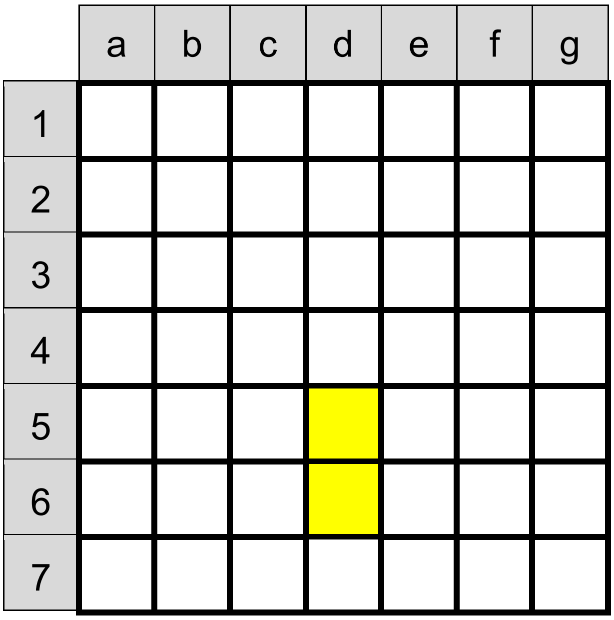
Vamos inicialmente numerar as linhas e nomear as colunas.

	a	b	c	d	e	f	g
1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							

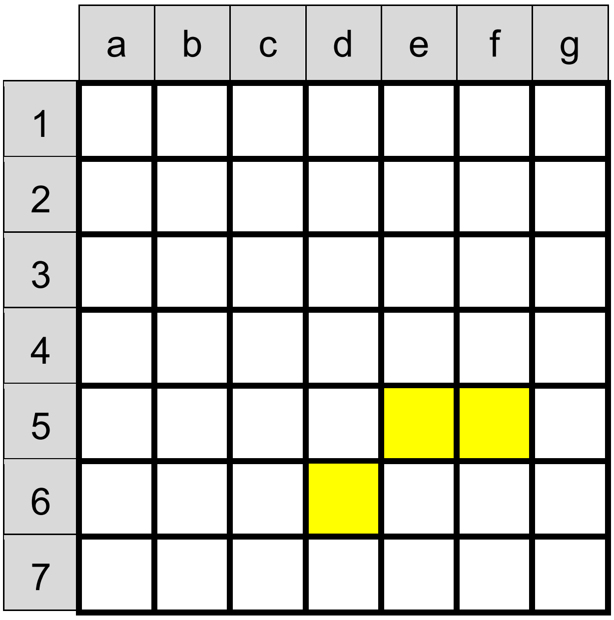
Vamos colocar a casa central da última linha (d7) acesa:

	a	b	c	d	e	f	g
1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							

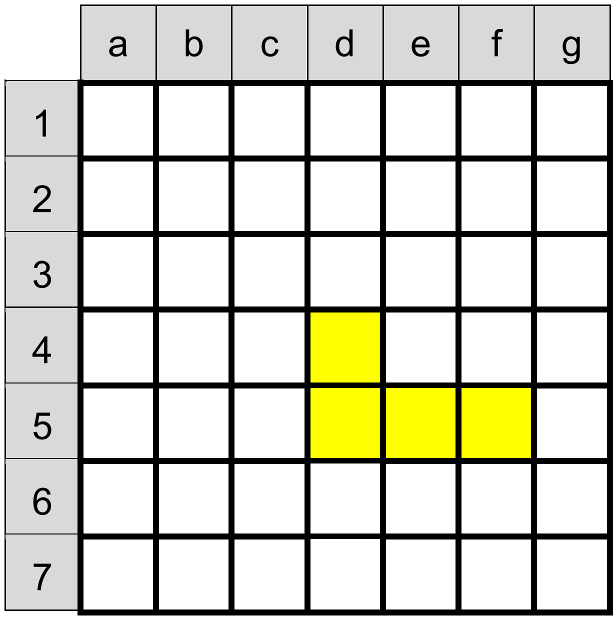
Como queremos subir para as quatro primeiras linhas, nosso raciocínio deve ser sempre procurar subir no tabuleiro. Logo, é interessante o primeiro movimento ser subindo.



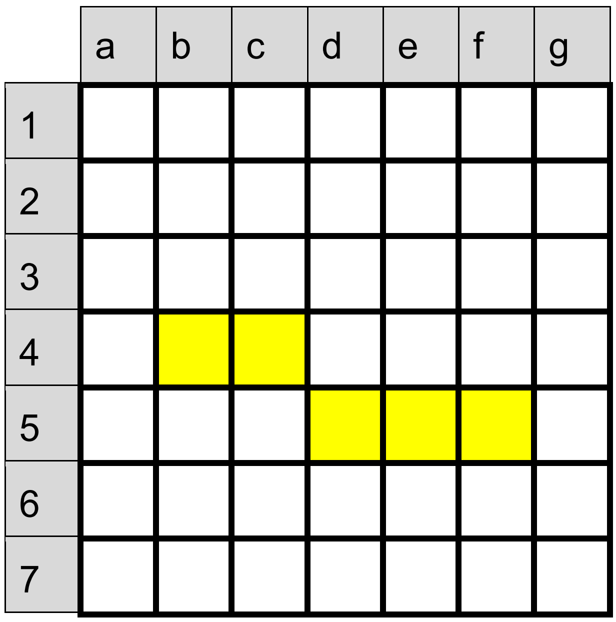
Se eu subir a casa d5, eu inviabilizo a casa d6 de subir. Logo, faremos o movimento para abrir caminho para d6, apagando d5 e acendendo e5 e f5.



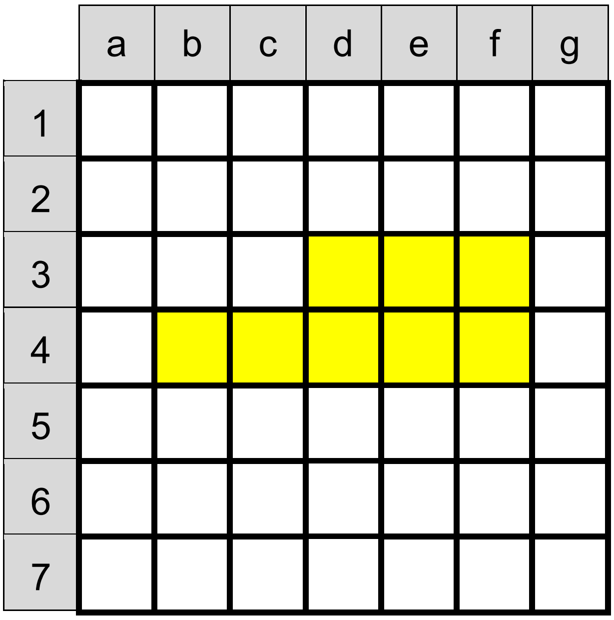
Assim podemos fazer o movimento de apagar d6 e acender d5 e d4.



Seguindo a mesma lógica, vamos abrir o caminho para d5, apagando d4 e acendendo c4 e b4.



Os outros três movimentos são similares, apagando d5, e5 e f5 e acendendo d4, d3, e4, e3, f4 e f3



Que é uma solução para o problema. Porém, não devemos escrever assim, pois o enunciado pede a sequencia de operações. Logo, vamos formalizar esta solução.

As acesas inicialmente são b4, c4, d3, d4, e3, e4, f3 e f4

Quadro de movimentos:

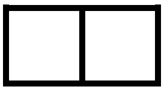
MOVIMENTO	APAGA	APAGA	ACENDE
1	d3	d4	d5
2	e3	e4	e5
3	f3	f4	f5
4	b4	c4	d4
5	d4	d5	d6
6	f5	e5	d5
7	d5	d6	d7

Note que d7 é a única casa acesa do tabuleiro e que está na última linha como pediu o enunciado.

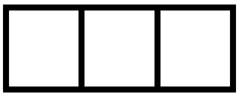
3.3 COBERTURA DE TABULEIROS (POLIMINÓS)

A ideia desta seção é desenvolver o raciocínio de cobertura de tabuleiro através de poliminós, que são peças obtidas unindo-se quadrados 1x1 pelas arestas. Por se tratar de um assunto muito atraente, ele se destaca nas principais olimpíadas de matemática. Cobrir tabuleiro com poliminós é como completar as peças de um quebra-cabeça e para isso, precisamos de raciocínio lógico de combinações que nos levem ao objetivo da cobertura. Vamos começar a desenvolver essa técnica de cobertura de tabuleiro mostrando as peças de alguns poliminós:

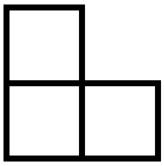
- Dominó



- Triminó

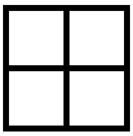


Triminó reto

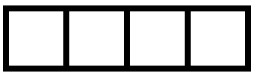


L-triminó

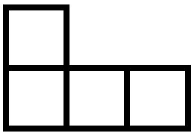
- Tetraminó



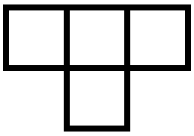
Quadrado



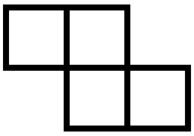
Tetraminó reto



Ltetraminó



T-tetraminó



Z-tetraminó

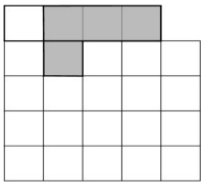
[8]Os pentaminós possuem 12 peças e os hexaminós 35 peças. O número de peças de um poliminó a partir da ordem sete é grande e não convém mostrar aqui.

---

[8] Informações retirada das páginas 64 e 65 do livro “21 Aulas de Matemática Olímpica” do Carlos Yuzo Shine, Editora SBM.

Problema 1 – (OBM 2013 – Nível 1 – 1ª Fase)

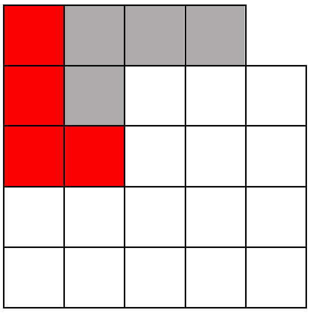
Luísa tem seis peças iguais formadas por 4 quadradinhos de área 1. Ela quer encaixar todas essas peças no quadriculado formado por 24 quadradinhos de área 1 e já colocou uma dessas peças, em destaque na figura abaixo, e as peças podem ser colocadas em qualquer orientação. De quantas maneiras diferentes ela pode terminar seu trabalho?



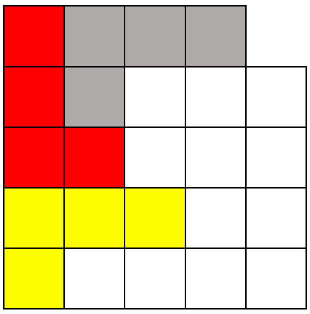
A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Solução:

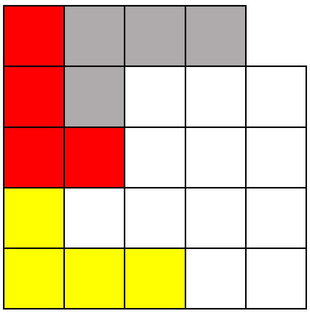
Só há uma possibilidade para encaixar uma peça que cubra as duas primeiras casas da primeira coluna, que é colocar uma peça na posição vertical conforme a figura (peça vermelha):



Agora, vamos pensar para encaixar nossa segunda peça. Analisando a figura vemos que as duas últimas casas da primeira coluna obrigatoriamente têm que receber uma peça na posição horizontal, que pode ser disposta de duas formas diferentes, conforme as figuras abaixo:

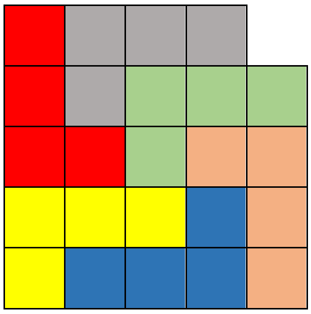


1°modo



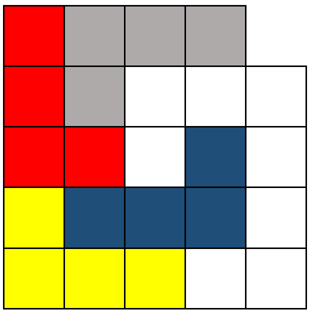
2°modo

A partir do 1°modo só temos uma forma de continuar o preenchimento

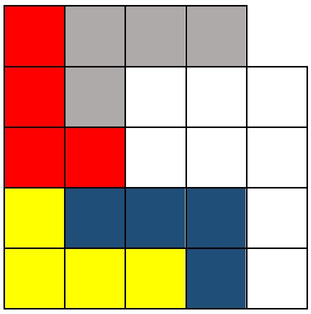


Assim, com esta configuração temos uma maneira de completar o quadriculado.

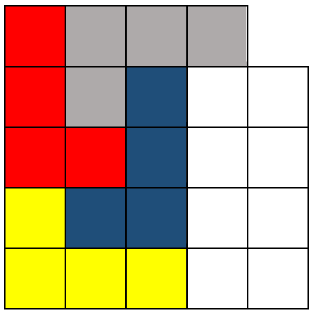
Já com o 2° modo, temos três modos de encaixar a próxima peça



Modo 2.1

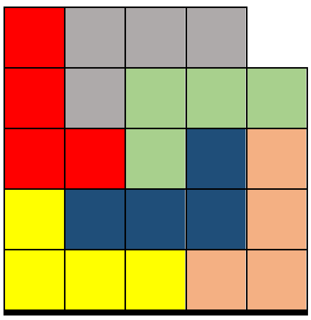


Modo 2.2

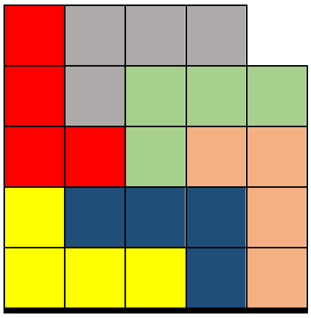


Modo 2.3

Analisando o modo 2.1, só teremos uma maneira de encaixar os próximos quadriculados.

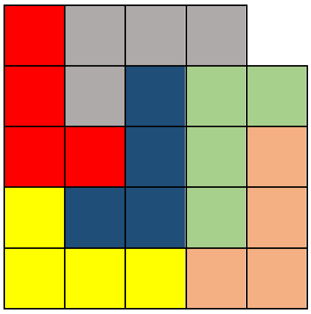


Assim como no modo 2.1 o modo 2.2 também só tem uma maneira de completar o quadriculado.

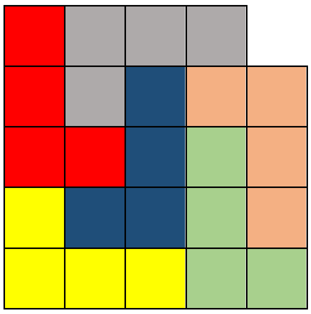


Já o modo 2.3 possui duas maneiras de completar o quadriculado

1ª maneira:



2ª maneira

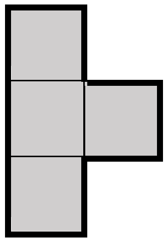


Desta forma, o 2°modo possui quatro maneiras distintas de se completar o quadriculado.

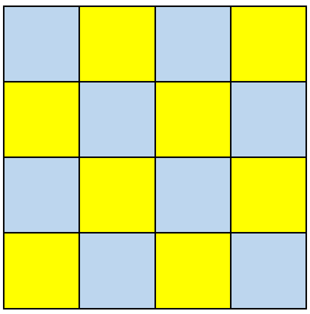
Logo, Luísa possui 5 maneiras diferentes de terminar seu trabalho.

Problema 2 – (OBMEP 2014 – Nível 2 – 2ª Fase)

Maria possui muitas peças, todas iguais, formadas por quatro quadradinhos, como mostra a figura ao lado. Sem sobrepor peças, ela tenta cobrir todas as casas de vários tabuleiros quadrados, fazendo coincidir aos quadradinhos das peças com os do tabuleiro.



a) Desenhe na figura abaixo uma maneira de cobrir um tabuleiro 4X4 com essas peças.

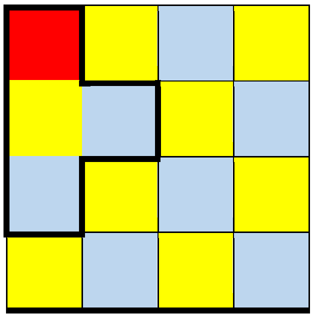


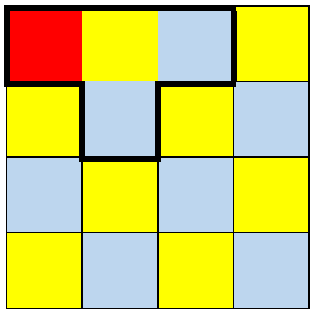
b) Explique por que nenhum tabuleiro quadrado pode ser coberto com exatamente vinte peças.

c) Explique por que Maria nunca conseguirá cobrir um tabuleiro 10X10 com suas peças.

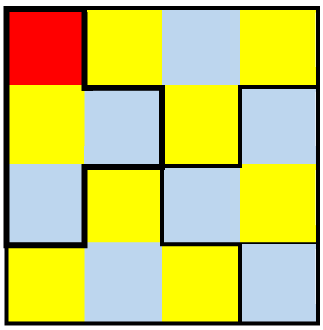
Solução:

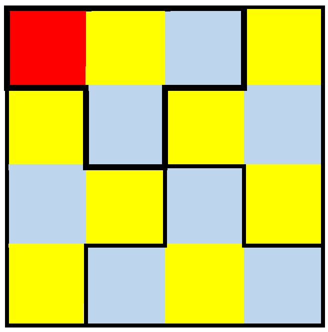
a) Vamos pintar de vermelho a casa da primeira linha e primeira coluna para fixarmos a colocação da primeira peça, e isso podemos fazer de dois modos.





Fixada a primeira peça, basta agora encaixar as outras peças para cobrir o tabuleiro.





Desta forma, as figuras acima apresentam as duas únicas formas possíveis, a menos da rotação, de cobrir o tabuleiro 4x4 com essas peças.

b) Cada peça possui 4 quadrados. Desta forma, com 20 peças teremos 4x20=80 quadrados. Como 80 não é um número quadrado perfeito, pois 80 = 2^4 x 5, não é possível cobrir um tabuleiro quadrado com 20 peças.

c) Para cobrir um tabuleiro 10x10, Maria necessita de 25 peças, pois cada peça possui 4 quadrados e 4x25 = 100 = 10x10. Do item a) podemos observar que cada peça cobre 3 quadradinhos de uma cor e 1 da outra cor. Assim, o tabuleiro através da distinção das cores das casas, possui dois modelos de peças. O modelo 1 que cobre exatamente uma casa amarela e três azuis e o modelo 2 que cobre três casas amarelas e uma azul.

Supondo que Maria conseguisse cobrir o tabuleiro com as 25 peças e sabendo que o tabuleiro possui 50 casas amarelas e 50 casas azuis, teremos duas situações a analisar:

1ª situação: o número de peças do modelo 1 é par.

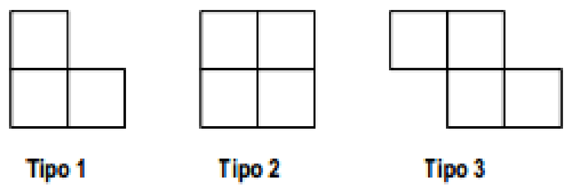
Se isso ocorrer o número de peças do modelo 2 é ímpar pois, só a soma de par com impar pode resultar em 25. Nesta situação, teríamos um número ímpar de casas azuis pois, 3 x par + ímpar resulta em um número ímpar. Esta situação é absurda porque o número de casas azuis é 50 que é par.

2ª situação: o número de peças do modelo 1 ímpar.

Se isso ocorrer o número de peças do modelo 2 é par pois, só a soma de par com impar pode resultar em 25. Nesta situação, teríamos um número ímpar de casas amarelas, pois 3 x par + ímpar resulta em um número ímpar. Esta situação é absurda porque o número de casas azuis é 50 que é par.

Problema 3 – (OLIMPÍADA DE MAIO – Nível 2 – 2008)

Matias cobriu um tabuleiro quadrado de 7x7, dividido em casas de 1x1, com peças dos três tipos a seguir



sem buracos nem superposições, e sem sair do tabuleiro.

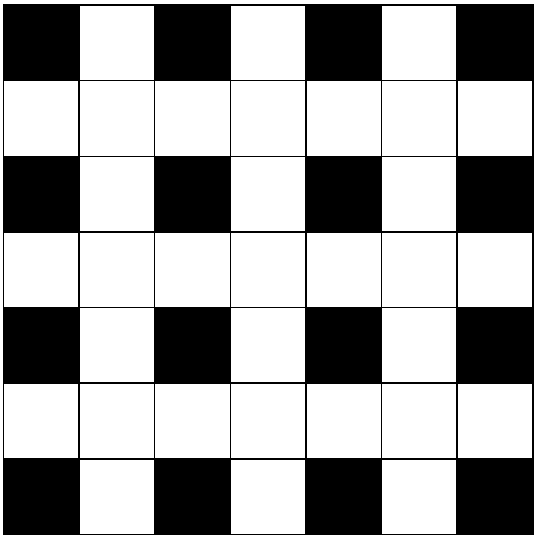
Cada peça do tipo 1 cobre exatamente 3 casas e cada peça do tipo 2 ou do tipo 3 cobre exatamente 4 casas.

Determine a quantidade de peças do tipo 1 que Matias pode ter utilizado.

(As peças podem girar e ser viradas).

Solução:

Para cobrir o tabuleiro, nossa ideia fundamental é marcar este tabuleiro antes de dispor as peças. Conforme vimos na seção 3.1, onde tratamos de marcação de casas, toda marcação nossa deve ter uma lógica e cumprir um determinado objetivo. Aqui vamos nos propor marcar o tabuleiro de modo que cada peça possa, no máximo, cobrir uma dessas casas pintadas, pois assim podemos definir o número mínimo de peças que podemos utilizar.



Note pela marcação do tabuleiro acima, que Matias utilizaria, pelo menos, 16 peças para cobrir todo o tabuleiro.

Desta forma, se a, b e c são as quantidades de peças do tipo 1, tipo 2 e tipo 3, respectivamente, que Matias pode ter usado, então teremos:

$$a + b + c \geq 16 \quad (I).$$

Agora, se contarmos o número de casas teremos:

$$3a + 4b + 4c = 49 \ (II)$$

Multiplicando por 4 a inequação (I), temos:

$$4a + 4b + 4c \geq 64$$

$$a + \underbrace{3a + 4b + 4c}_{(II)} \geq 64$$

Substituindo (II) em (I):

$$a + 49 \geq 64$$

$$a \geq 64 - 49$$

$$a \geq 15$$

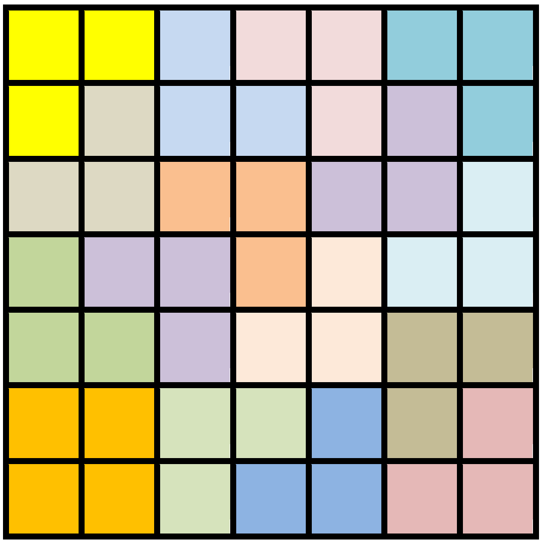
Portanto, Matias utilizou no mínimo 15 ou 16 peças do tipo 1.

Porém, se considerarmos a = 16, teremos pela equação (II) que:

$$3 \cdot 16 + 4b + 4c = 49$$

Logo, 4b + 4c = 1. Como 1 não é múltiplo de 4, temos que Matias usou exatamente 15 peças do tipo1.

Exemplo:



3.4 REDUÇÃO A UM CASO MENOR

Muitas vezes nos deparamos nas olimpíadas de matemática com problemas envolvendo tabuleiros mxn, contendo linhas e colunas muito grandes, até mesmo infinitas. Estes casos são impossíveis transportar para o papel. Entretanto, podemos verificar recorrências que, aplicadas em um caso menor, estabelecem um padrão que nos leva aos resultados. Nesta seção veremos alguns desses casos, onde, para um tabuleiro suficientemente grande, conseguimos uma versão reduzida que nos apresenta resultados similares.

Para melhor compreensão do assunto, vejamos as resoluções dos problemas a seguir.

Problema 1 – (OBM 2008 – Nível 2 – 3ª Fase)

Em cada casa de um tabuleiro n x n, colocamos um dos números 1, 2, 3, 4, de modo que cada casa tem exatamente uma casa vizinha com o mesmo número. E possível fazer isso quando

(a) n = 2007?

(b) n = 2008?

Observação. Duas casas são vizinhas se possuem um lado em comum.

Solução:

Inicialmente, vamos observar o padrão que temos. Cada casa deve ter exatamente uma casa vizinha com o mesmo número. Logo, estamos falando que deve existir um dominó que contenha os mesmos números e será encaixado nas casas do tabuleiro e nunca podemos ter dominós com os mesmos números tendo lados adjacentes.

Vejamos dois exemplos em um tabuleiro 4x4:

1	4	1	4
1	4	1	4
2	3	2	3
2	3	2	3

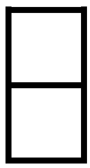
(I)

ou

1	1	4	4
2	2	3	3
4	4	1	1
3	3	2	2

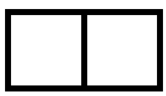
(II)

No primeiro tabuleiro utilizamos dominós na vertical e conseguimos um exemplo de configuração desejada pelo enunciado.



Dominó na vertical

Já no segundo tabuleiro, a configuração do problema foi fechada com dominós na horizontal.



Dominó na horizontal

Vamos pensar nas figuras (I) e (II) como se fossem espécies de “carimbos”. O tabuleiro 8 x 8 pode ser “carimbado” de modo que cumpra as exigências do enunciado. Vejamos como fica se utilizarmos a figura (II):

1	1	4	4	1	1	4	4
2	2	3	3	2	2	3	3
4	4	1	1	4	4	1	1
3	3	2	2	3	3	2	2
1	1	4	4	1	1	4	4
2	2	3	3	2	2	3	3
4	4	1	1	4	4	1	1
3	3	2	2	3	3	2	2

Se expandirmos a ideia, chegaremos à conclusão que podemos usar esses carimbos em tabuleiros do tipo 4n x 4n. Logo no tabuleiro 2008x2008 é possível, pois 2008 = 4 x 502. Entretanto, para um tabuleiro 2007x2007, essa disposição é impossível, já que não seria possível “carimbar” todo o tabuleiro. De fato, um tabuleiro 2007x2007 tem um número ímpar de casas, logo é impossível cumprir a exigência do enunciado, pois não encaixaríamos todas as peças do nosso dominó.

Problema 2 - (Olimpíada Iberoamericana de Matemática – 2008)

> Os números 1, 2, 3, . . ., 2008^2 são distribuídos num tabuleiro 2008 × 2008, de modo que em cada casa haja um número distinto. Para cada linha e cada coluna do tabuleiro calcula-se a diferença entre o maior e o menor dos seus elementos. Seja S a soma dos 4016 números obtidos.
>
> Determine o maior valor possível para S.

Solução:

Inicialmente vamos frisar que a importância de usar um tabuleiro menor em um problema desse tipo é visualizar de modo mais simples o comportamento da questão e expandir o raciocínio para casos maiores.

Queremos maximizar o valor de S. Como o tabuleiro tem um número par de casas e é um tabuleiro quadrado, vamos observar o que faríamos para maximizar as diferenças em um tabuleiro 4 x 4.

1	12	11	15	=14
9	4	14	10	=10
7	13	3	8	=10
16	6	5	2	=14
=15	=9	=11	=13	

Deste tabuleiro menor podemos destacar que:

1. As casas destacadas em amarelo não influenciam em nada as diferenças e a soma S é alcançada com a seguinte expressão:

   2 x (16 + 15 + 14 + 13) – 2 x (1 + 2 + 3 + 4) = 96

2. Se pensarmos em uma nomenclatura semelhante a matrizes, os elementos da diagonal principal são os menores números e da diagonal secundária os maiores números.

Vamos utilizar o mesmo raciocínio pensando agora em um tabuleiro n x n com n par.

Vamos considerar a sequência de números $K=(1, 2, 3, ..., n, ..., n^2-1, n^2)$

Os n menores números são $(1, 2, 3, ..., n-1, n)$

Os n maiores números são $(n^2, n^2-1, ..., n^2-n+1)$

Conforme o item (2), vamos distribuir os n menores números na diagonal principal do tabuleiro e os n maiores na diagonal secundária. Conseguimos chegar à conclusão o disposto no item (1) também se aplica a este tabuleiro nxn. Logo, temos

$S=2 \times (n^2 + n^2 -1 + n^2 - 2 + ... + n^2 - n + 1) - 2 \times (1 + 2 + 3 + ... + n)$ Utilizando a formula de Soma de Progressões aritméticas:

$S = 2 * ((n^2 + (n^2- (n - 1)))*(n/2) - (1 + n)*(n/2))$

$S = (n^2 + (n^2- (n - 1)))*(n) - (1 + n)*(n)$ $S = (2n^2 - n + 1)*(n) - (n^2 + n)$

$S = 2n^3 - n^2 + n - n^2 - n$

$S = 2n^3 - 2n^2$

$S = 2n^2 (n - 1)$

Como nosso n no caso é 2008, temos como solução $2 \times 2008^2 \times 2007 = 16.184.704.896$.

Logicamente em uma olimpíada de matemática não seria necessário efetuar a multiplicação.

Problema 3 – (Olimpíada de Maio – 2007)

Seja $n > 2$ um inteiro par. Nas casas de um tabuleiro de nxn devem-se colocar fichas de modo que em cada coluna a quantidade de fichas seja par e distinta de zero, e em cada linha a quantidade de fichas seja ímpar. Determinar a menor quantidade de fichas que precisamos colocar no tabuleiro para cumprir esta regra. Mostrar uma configuração com essa quantidade de fichas e explicar porque com menos fichas não se pode cumprir a regra.

Solução:

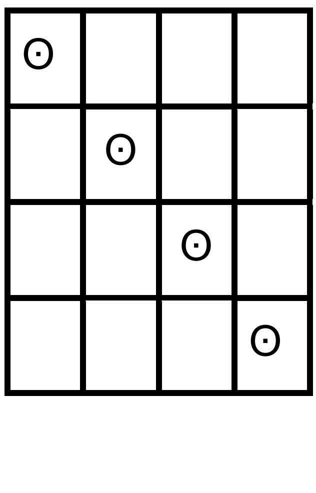
Aqui temos que buscar uma situação que seja necessária e suficiente para resolver o problema.

Inicialmente vamos analisar a situação das colunas. Este tabuleiro tem n colunas. Logo, como cada coluna tem que ter pelo menos duas fichas, podemos afirmar desde já que temos que usar pelo menos 2n fichas.

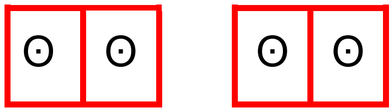
Se conseguirmos uma configuração com todas as linhas com uma quantidade ímpar de fichas e 2n fichas no total, conseguimos resolver nosso problema.

Vamos avaliar o menor tabuleiro possível para o problema que é o 4 x 4: Queremos tentar resolver nosso problema com 2n fichas, que no caso são 8 fichas.

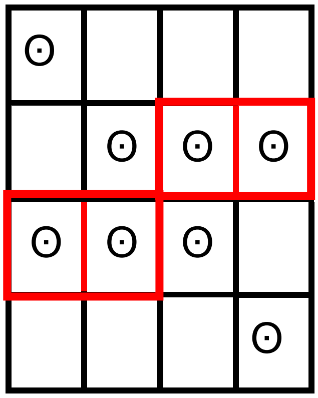
Inicialmente usaremos a estratégia de por uma ficha em cada diagonal.



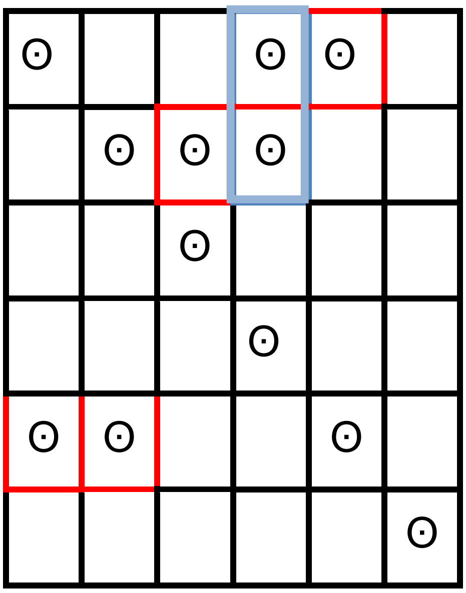
Já utilizamos 4 fichas. Nos restam apenas quatro. Vamos pegar estas fichas restantes e pensar em duas peças de dominós conforma a figura abaixo:



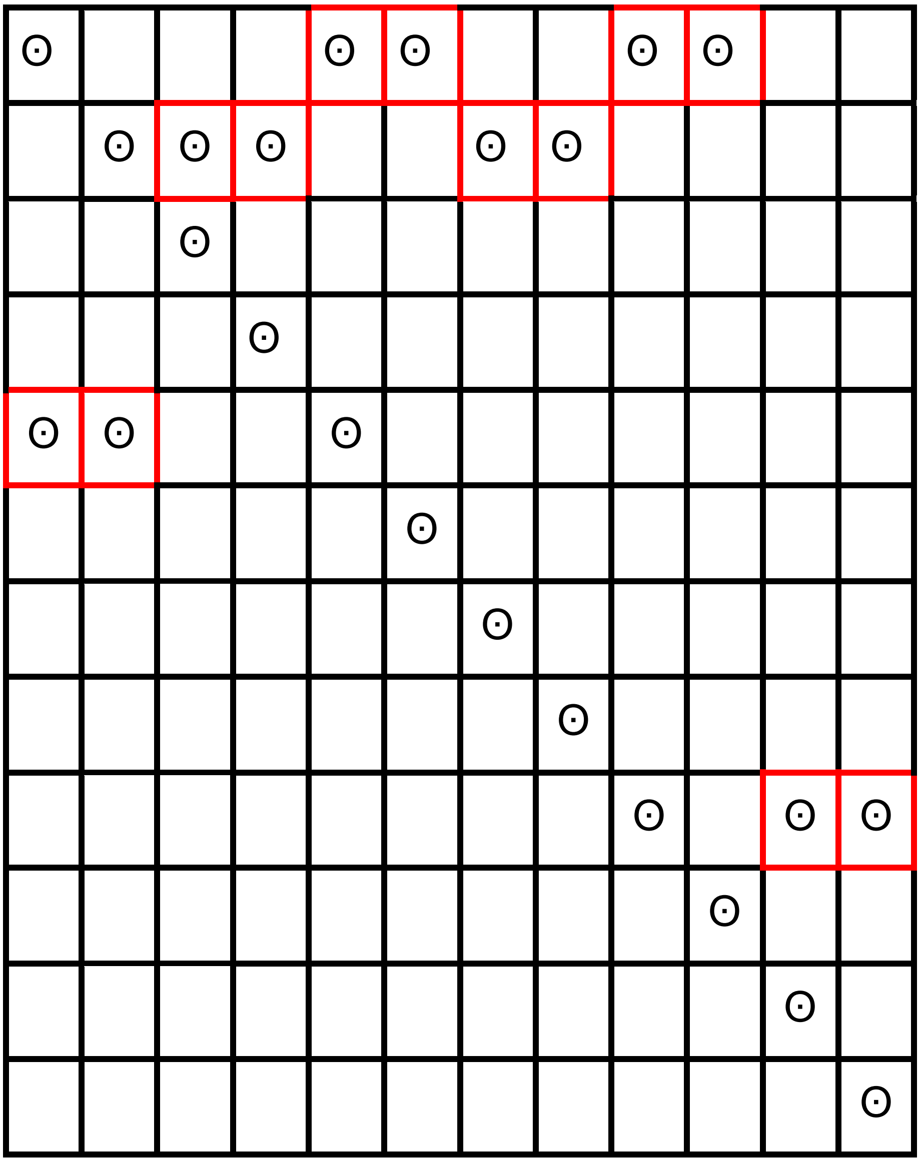
Vamos encaixar estas peças nas linhas de modo que nenhuma coluna seja ocupada por mais de duas peças.



Está claro que conseguimos resolver o problema do tabuleiro 4x4 com 8 fichas. Se estendermos o raciocínio para um tabuleiro nxn, iremos chegar a conclusão que é possível chegar a solução do problema proposto utilizando 2n peças e preenchendo o tabuleiro com n peças nas casas da diagonal e utilizando n/2 dominós nas linhas de modo que nenhum ocupe a mesma coluna.



Exemplo de situação não permitida: uma coluna com duas peças (conforme marcado em azul)



Exemplo de uma configuração possível em um tabuleiro 12x12.

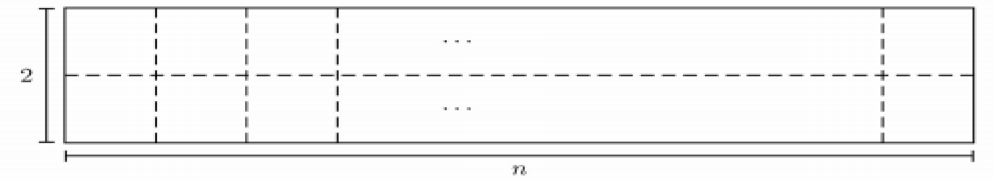
3.5 SIMETRIA EM JOGOS

Existem variados jogos que vem sendo abordados em problemas de olimpíadas de matemática no qual exige-se do aluno a descoberta de uma estratégia vencedora de um dos jogadores, ou seja, que um deles possa ganhar sempre, independentemente de como seu adversário jogue. Consideraremos nesta seção jogos de jogadores que se alternam nas jogadas e que são obrigados a jogar na sua rodada. Além disso, suponhamos que os dois jogadores não cometam erros, afinal queremos descobrir qual jogador possui uma estratégia vencedora. A técnica abordada nesta seção é baseada na ideia de simetria, que é uma estratégia simples e comum em problemas olímpicos.

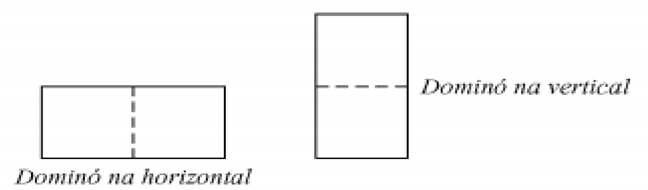
Problema 1 – (OBM 2004 – Nível 1 – 3ª Fase)

Arnaldo e Bernaldo disputam um jogo num tabuleiro 2 × n:

As peças do jogo são dominós 2 × 1. Inicialmente Arnaldo coloca um dominó cobrindo exatamente duas casas do tabuleiro, na horizontal ou na vertical. Os jogadores se revezam colocando uma peça no tabuleiro, na horizontal ou na vertical, sempre cobrindo exatamente duas casas do tabuleiro. Não é permitido colocar uma peça sobre outra já colocada anteriormente



Quem não conseguir colocar uma peça no tabuleiro perde.



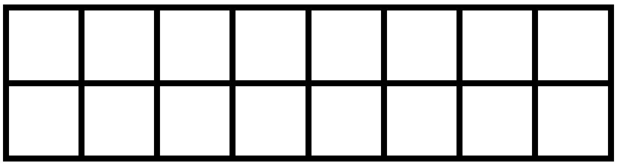
Qual dos dois jogadores tem uma estratégia vencedora, ou seja, uma estratégia que o leva à vitória quaisquer que sejam as jogadas de seu adversário, para:

(a) n = 2004?

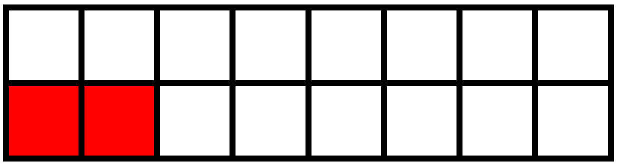
(b) n = 2005?

Solução:

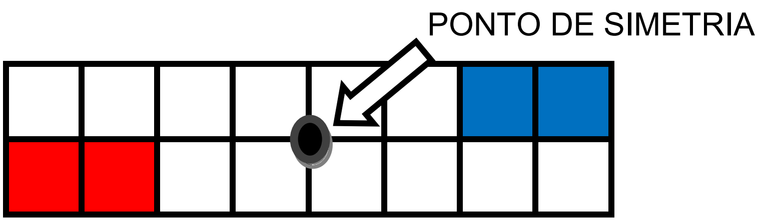
No item (a) temos um número par de colunas. Utilizando o pensamento visto na seção anterior, jogaremos em um tabuleiro 2x8.



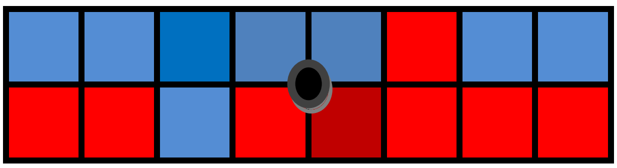
Vamos pensar na dinâmica deste jogo. A estratégia vencedora é colocar a última peça no tabuleiro, pois isto impossibilita o nosso adversário de jogar. Vamos supor que Arnaldo começou pondo a peça na posição mostrada abaixo: (para fins de ilustração, vamos utilizar as peças vermelhas para Arnaldo e as azuis para Beraldo).



Agora Beraldo vai utilizar a estratégia da simetria, ou seja, fazer a mesma jogada que Arnaldo utilizando um ponto de simetria. O que significa isso? Beraldo vai achar o ponto central da figura e reproduzir a jogada de Arnaldo simetricamente, conforme o ilustrado:



Mantendo a lógica, obteremos o seguinte resultado:



Como cada jogador pôs o mesmo número de peças, a vez de jogar é de Arnaldo. Como ele não tem a possibilidade de encaixar nenhuma peça, ele perdeu o jogo.

O raciocínio para n = 2004 é similar, pois Beraldo vai manter as jogadas de modo simétrico e Arnaldo não irá conseguir gerar situações que o faça vencer o jogo. Logo, para 2004 jogadas teremos como vencedor sempre Bernaldo, o segundo jogar, sendo necessário e suficiente que coloque, a cada jogada, o dominó na mesma posição (vertical ou horizontal) que Arnaldo de forma simétrica, utilizando a estratégia do ponto de simetria.

Já no item (b), para n = 2005, quem vence é Arnaldo, pois após colocar o primeiro dominó na posição vertical na primeira ou na última coluna, ele poderá utilizar a mesma estratégia de Beraldo no item (a).

Generalizando podemos concluir que, a estratégia vencedora desse jogo se verifica através da paridade de n. Se n for par, quem começa o jogo perde e se n for ímpar quem começa ganha. Basta que os jogadores sigam as técnicas utilizadas nos itens (a) e (b) da solução acima.

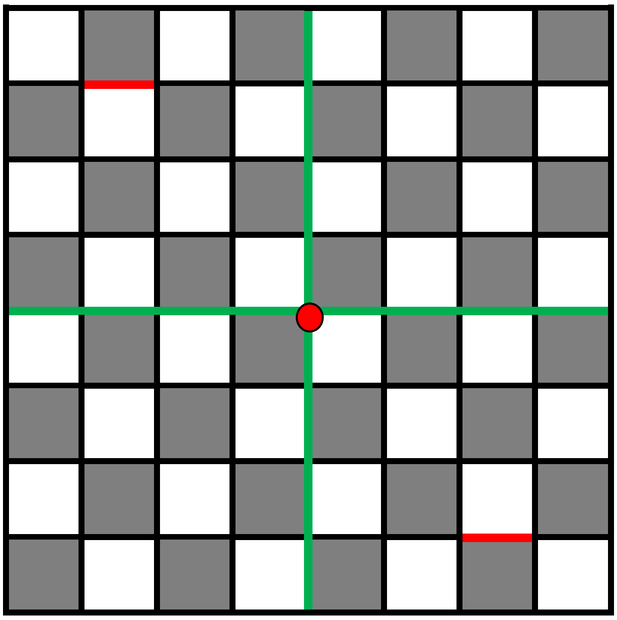
Problema 2 – (OBM 2002 – Nível 1 – 3ª Fase)

São dados um tabuleiro de xadrez (8X8) e palitinhos do tamanho dos lados das casas. Dois jogadores jogam alternadamente e, em cada jogada, um dos jogadores coloca um palitinho sobre um lado de uma casa do tabuleiro, sendo proibido sobrepor palitinhos.

Vence o jogador que conseguir completar primeiro um quadrado 1X1 de palitinhos. Supondo que nenhum jogador cometa erros, qual dos dois jogadores tem a estratégia vencedora, ou seja, consegue vencer independentemente de como jogue seu adversário?

Solução:

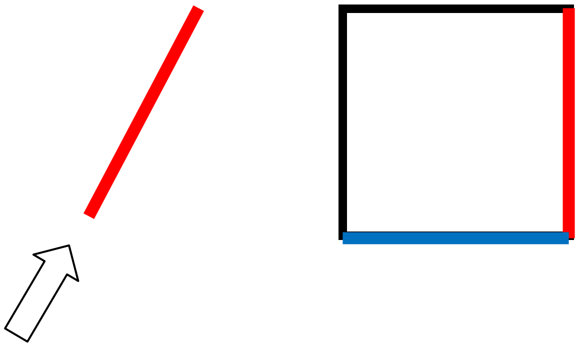
Visualizando um tabuleiro 8X8 reparamos que suas casas possuem posições simétricas em relação ao centro do tabuleiro, localizado no ponto vermelho na figura abaixo.



(Os lados pintados de vermelho são simétricos em relação ao centro do tabuleiro.)

O objetivo do jogo é completar primeiro com palitinhos um quadrado 1x1. Vale observar que se algum jogador puser o terceiro palito em um quadrado ele perde.

Exemplo:



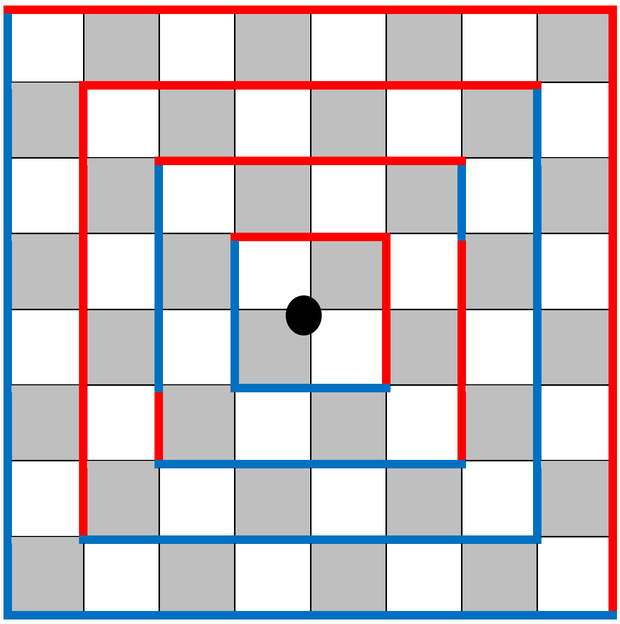
Se colocar o palito vermelho perde!

O vermelho perde, pois o azul vai poder fechar o quadrado.

Então vamos raciocinar. Nós não queremos de jeito nenhum colocar o terceiro palito em um quadrado. Logo, temos que forçar o nosso adversário a fazer isso. Pela lógica, se ele joga primeiro, ele tem que ser o primeiro a colocar o terceiro palito e nós temos que força-lo a isso.

Vamos fazer isso utilizando a simetria, pois se cada vez que ele fizer um movimento nós fizermos a mesma coisa, ele vai ficar sem opções antes da gente.

Portanto, quando ele for obrigado a pôr o terceiro palito no quadrado, nós vamos e fechamos esse quadrado ganhando o jogo. Vejamos um jogo onde quem começa é o palito vermelho:



Ambos puseram a mesma quantidade de palitos até agora. Logo é a vez do vermelho jogar. Ele é obrigado a pôr o terceiro palito e fatalmente perder o jogo. Podemos ver que o azul sempre posicionou seus palitos de forma simétrica ao vermelho em relação ao centro do tabuleiro.

Observando a simetria acima, o segundo jogador então sempre vencerá o jogo se puser seu palito simetricamente oposto, em relação ao centro, a cada jogada do primeiro jogador. Vale observar que o segundo jogador deve abandonar a estratégia assim que o seu adversário puser o terceiro palito, pois ele terá a oportunidade de completar o quadrado.

Problema parecido, e ainda mais interessante, caiu no mesmo ano e fase da questão anterior, só que agora no nível 2. Vejamos a seguir.

Problema 3 – (OBM 2002 – Nível 2 – 3ª Fase)

São dados um tabuleiro quadriculado $m \times n$ e palitinhos do tamanho dos lados das casas. Dois jogadores jogam alternadamente e, em cada jogada, um dos jogadores coloca um palitinho sobre um lado de uma casa do tabuleiro, sendo proibido sobrepor palitinhos.

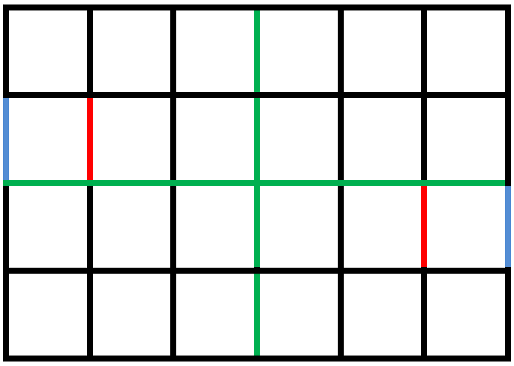
Vence o jogador que conseguir completar primeiro um quadrado 1×1 de palitinhos. Supondo que nenhum jogador cometa erros, qual dos dois jogadores tem a estratégia vencedora, ou seja, consegue vencer independentemente de como jogue seu adversário?

Solução:

No problema anterior resolvemos um tabuleiro 8X8 a partir da simetria dos lados em relação ao centro. Percebemos então, que nesse novo problema devemos encontrar a simetria do tabuleiro m x n. Para isso, observaremos as paridades de m e n.

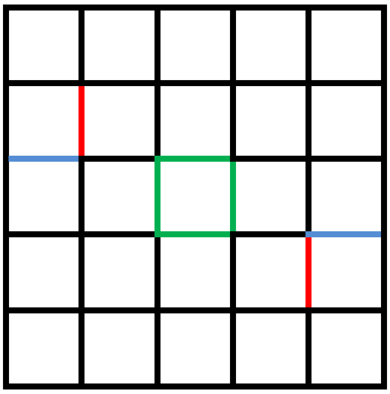
Se m e n são pares devemos ter a simetria dos lados das casas em relação ao centro.

par X par



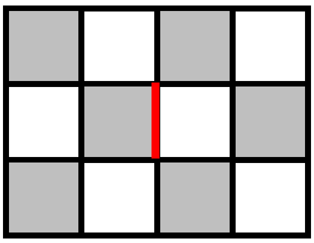
Se m e n são ambos impares devemos ter a simetria dos palitos em relação a casa central do tabuleiro, vejamos:

impar X impar



Nos casos em que as paridades de m e n são iguais, o segundo jogador terá uma estratégia vencedora jogando simetricamente em relação a cada jogada do primeiro jogador. Quando o primeiro jogador colocar o terceiro palito em uma das casas, o segundo jogador abandona a estratégia e completa a casa com o quarto palito e vence o jogo.

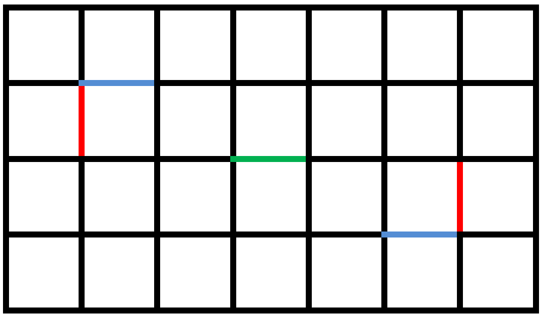
Agora, vamos analisar quando m e n têm paridades diferentes. Como exemplo, mostraremos o que acontece quando jogamos num tabuleiro 3X4.



A simetria nesse tabuleiro 3x4 ocorre a partir do lado central do tabuleiro, paralelo em relação a m=3 (impar). A estratégia agora cabe ao primeiro jogador, colocando seu primeiro palito neste lado (destacada de vermelho na figura acima) e em seguida imitar simetricamente as jogadas do segundo jogador, em relação ao lado central pintado de vermelho. Quando estiver todas as casas preenchidas com dois palitos e a vez do segundo jogar preenchendo uma casa com três palitos e aí o primeiro jogador vence a partida colocando o quarto palito na casa.

Neste caso de m e n terem paridades diferentes, a simetria ocorre no lado central paralelo a “m” ou “n” impar. Repare na figura:

par X impar



Em resumo, se m e n tem paridades iguais o segundo jogador tem a estratégia vencedora e se m e n tem paridades diferentes o primeiro jogador tem a estratégia vencedora.

4 JOGOS DE TABULEIRO EM SALA DE AULA

O intuito deste capítulo é mostrar como levamos à sala de aula três jogos de tabuleiro que estimulam a interação social dos alunos, através de competições matemáticas que possibilitem o desenvolvimento do raciocínio sobre a técnica de simetria em jogos de tabuleiro.

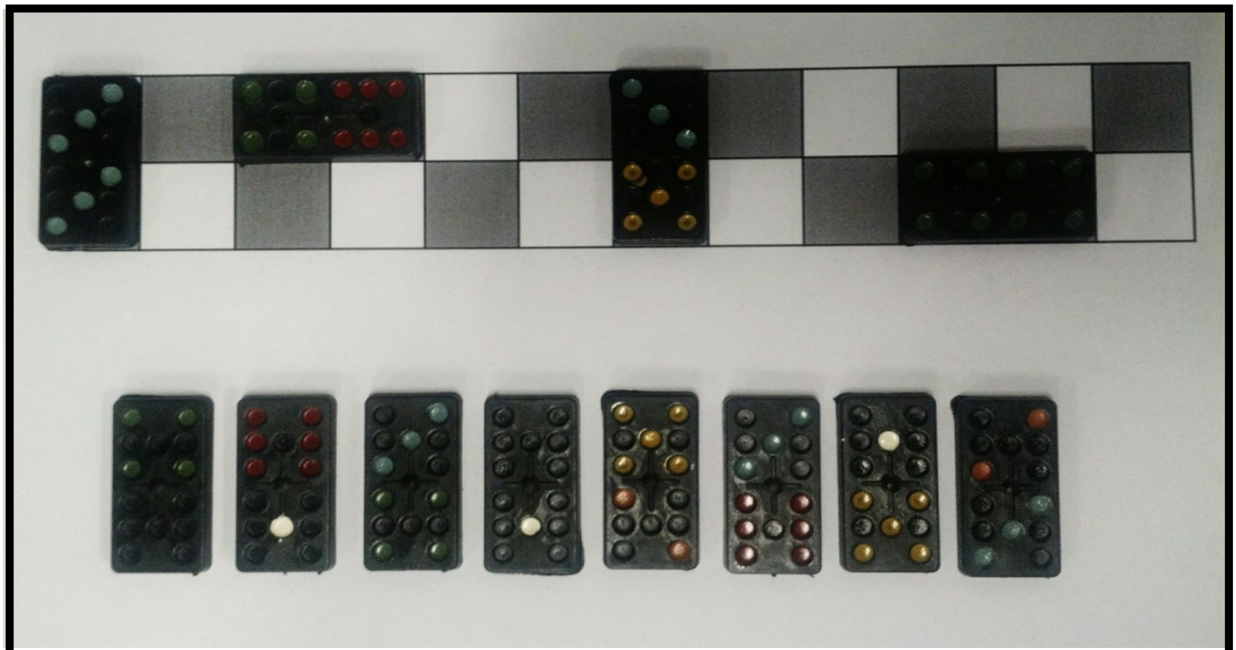
As aulas foram aplicadas na Escola Municipal Cora Coralina, situada na cidade do Rio de Janeiro. Como não existia nenhum programa de treinamento olímpico de matemática na escola, tivemos que criar uma turma com alunos voluntários que queriam se preparar para a prova da OBMEP. Dentre esses alunos já existiam duas alunas medalhistas da OBMEP e Canguru de Matemática. Eles eram todos do segundo segmento do Ensino fundamental.

Para isso, elaboramos três aulas com jogos de tabuleiro encontrados em exercícios olímpicos que foram adaptados para a sala de aula. O nosso objetivo era desenvolver o raciocínio do aluno em relação à estratégia vencedora aplicada nesses jogos. Posteriormente, será aplicado um problema nos moldes do jogo com o intuito de facilitar o caminho da solução da questão. A princípio, os alunos acham esses jogos divertidos e fáceis por estarem em contato direto com eles. Em consequência disso, por vezes, resumem o jogo com o seguinte pensamento “Se ele fizer isso, farei aquilo” como fonte de estratégia vencedora. A partir daí que surgem as dificuldades quando eles tentam montar uma estratégia efetiva que os permita vencer sempre e posteriormente demonstrar que os seus argumentos utilizados sempre os levarão a vitória.

Os três jogos foram apresentados em aulas com duração de duas horas e trinta minutos. No início, as regras e o objetivo do jogo foram bem explicados, assegurando que os alunos entendessem como se joga. Além disso, foi permitido que eles jogassem diversas vezes para descobrirem uma estratégia vencedora sem nenhum tipo de auxílio do professor.

Após terem jogado exaustivamente, resolveram um problema com o perfil do jogo. E no final de cada aula, foi apresentada a técnica de simetria em jogos através do jogo e do problema apresentado.

4.1 JOGO 1



O jogo é constituído por:

- 1 Tabuleiro 2x12.
- 12 peças de dominós.
- 2 jogadores.

Regras do jogo

- Dado tabuleiro 2x12 com cores alternadas (tipo xadrez), dois jogadores se revezam cobrindo pares de quadrados com dominós.
- Cada dominó consiste em um retângulo com 1 quadrado de largura e 2 quadrados de comprimento (que podem ser colocados na posição horizontal ou vertical).
- Um dominó não pode ser colocado com um quadrado em cima de outro dominó.

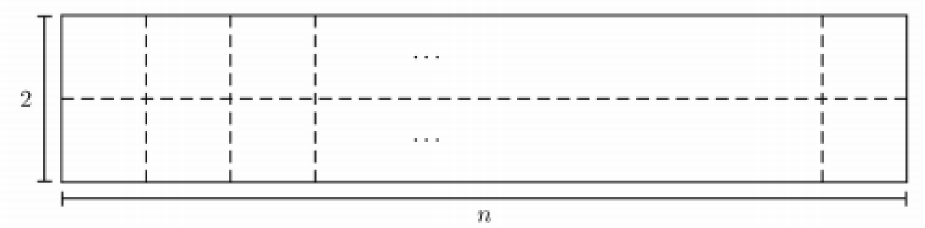
Objetivo do jogo

- Perde o jogador que não conseguir colocar seu dominó.

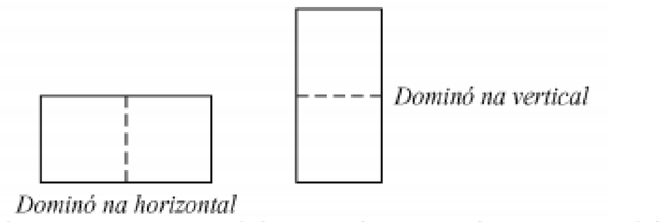
Problema proposto após o Jogo 1

Arnaldo e Bernaldo disputam um jogo num tabuleiro 2x*n*:

As peças do jogo são dominós 2x1. Inicialmente Arnaldo coloca um dominó cobrindo exatamente duas casas do tabuleiro, na horizontal ou na vertical. Os jogadores se revezam colocando uma peça no tabuleiro, na horizontal ou na vertical, sempre cobrindo exatamente duas casas do tabuleiro. Não é permitido colocar uma peça sobre outra já colocada anteriormente.



Quem não conseguir colocar uma peça no tabuleiro perde.



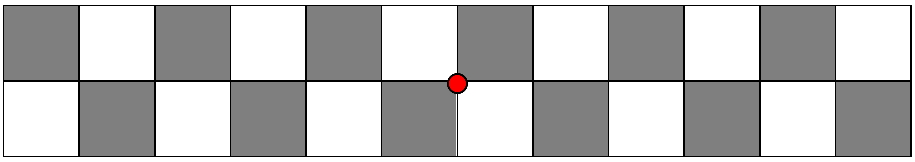
Qual dos dois jogadores tem uma estratégia vencedora, ou seja, uma estratégia que o leva à vitória quaisquer que sejam as jogadas de seu adversário, para:

(a) n = 2004?

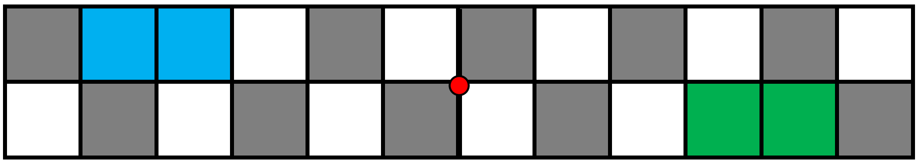
(b) n = 2005?

4.1.1 Estratégia vencedora do Jogo 1

O Jogo 1 é um tabuleiro 2x12 e a estratégia está em observar a simetria do tabuleiro em relação ao centro do tabuleiro, conforme a marcação em vermelho do tabuleiro abaixo.



A partir daí, o segundo jogador monta a sua estratégia jogando simetricamente em relação ao centro, os dominós que o primeiro jogador colocar na vertical. Já os dominós que o primeiro jogador colocar na horizontal, o segundo jogador deve colocar seu dominó simetricamente ao centro e invertido. Vejamos na figura abaixo um exemplo de jogada simétrica, em relação ao centro do tabuleiro, com dominós na horizontal.



Dominó azul – jogada do 1º jogador.

Dominó verde – jogada do 2º jogador.

Seguindo essa estratégia até o final, o segundo jogador possui uma estratégia vencedora não importando como jogue o primeiro jogador.

4.1.2 Solução do problema proposto após o Jogo 1

Esse problema já foi resolvido na subseção 3.5, problema 1, páginas 61 e 62.

4.1.3 Ações do Jogo 1

- **Receptividade**

Os alunos receberam o jogo com entusiasmo e o acharam interessante.

- **Dúvidas**

A única dúvida que os alunos tiverem foi em relação a realizar jogadas que deixassem casas vazias sem a possibilidade de serem preenchidas por um dominó por qualquer jogador.

4.1.4 Estratégias do Jogo 1 apresentada pelos alunos

Apenas duas alunas, em um total de sete presentes na aula, expuseram suas estratégias, os demais jogaram sem possuir alguma estratégia.

A aluna 1, percebeu que o tabuleiro do jogo tem um número par de casas, ou seja, tem 24 casas. E, o dominó cobre 2 casas que também é par. Então, se começasse o jogo, teoricamente perdia. Porém, se deixasse um número ímpar de casas isoladas sem que o segundo pudesse encaixar seu dominó, ela venceria. Caso contrário, se ela fosse a segunda a jogar, deixava um número par de casas isoladas sem possibilidade de encaixe de um dominó pelo primeiro jogador.

Ao ser questionada se sempre venceu com essa estratégia, ela respondeu que havia perdido algumas partidas quando as começou.

Já a aluna 2, observou que a estratégia só deu certo quando foi a segunda a jogar, pois ela casava os dominós igualmente ao seu adversário. Como exemplo, se ele colocasse o dominó na horizontal, ela encaixava sua peça na horizontal em cima ou embaixo do dominó que o primeiro jogador colocou e se ele encaixasse na vertical ela colocaria à esquerda ou à direita dessa peça.

Quando questionada se ela sempre venceu com essa estratégia, respondeu que sim.

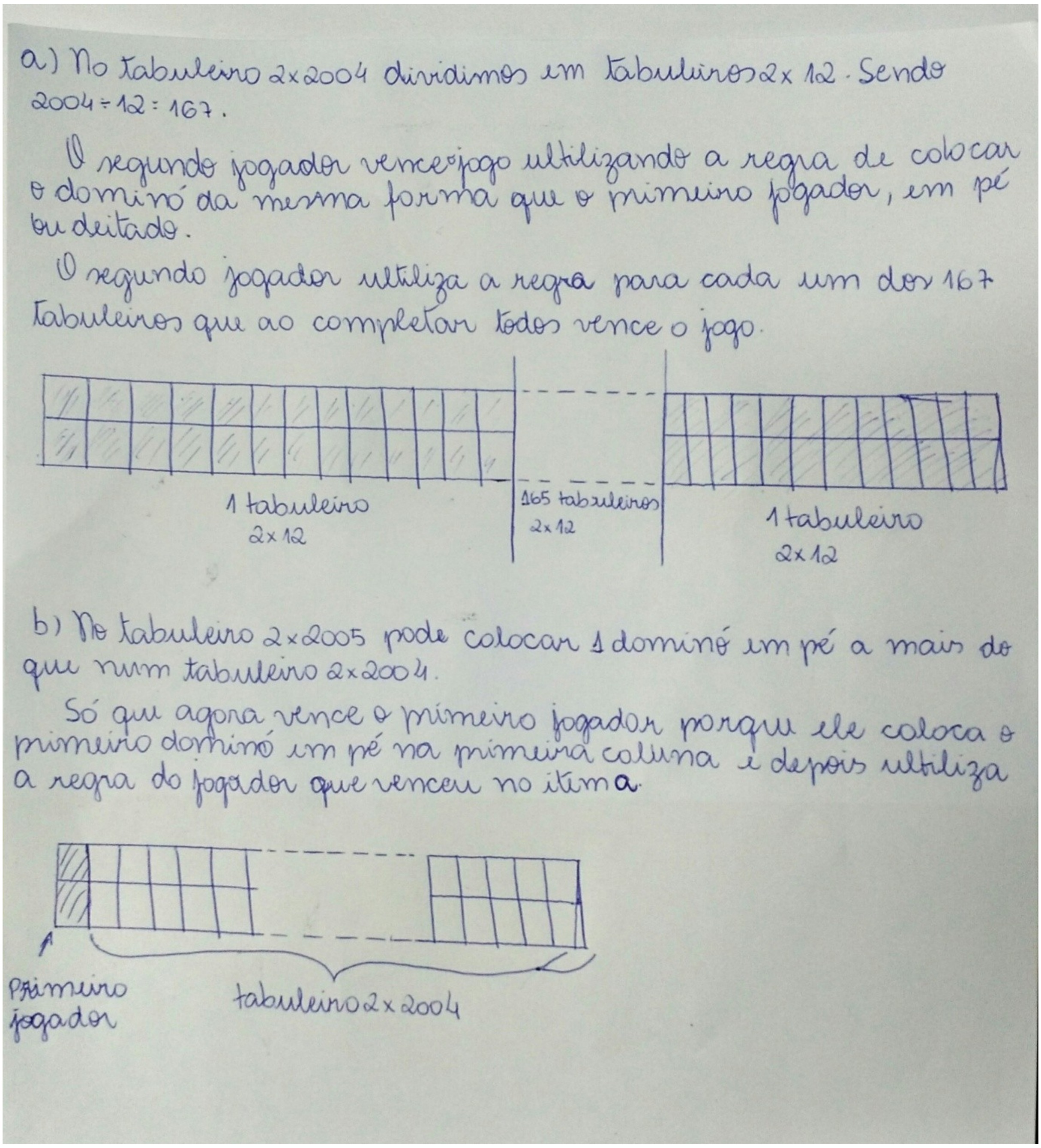
4.1.5 Resultados obtidos com o problema

Apenas a aluna 1 apresentou solução para o problema. Os demais alunos não fizeram ou apresentaram resposta incoerente.

No item (a), a aluna 1 fracionou o tabuleiro 2x2004 em 167 tabuleiros 2x12. E, a partir daí, utilizou a estratégia vencedora apresentada pelo o aluno 2 durante o jogo. E concluiu que o segundo jogador possui uma estratégia vencedora.

Já no item (b), ela percebeu que se tratava de um tabuleiro com número ímpar de colunas, ou melhor, ela justificou que o tabuleiro 2x2005 é um tabuleiro 2x2004 mais um tabuleiro 2x1. Assim, ela conclui que agora o primeiro jogador possui a estratégia vencedora, bastando para isso colocar o primeiro dominó na primeira coluna e na posição vertical e a partir daí, utiliza a ideia do item (a).

Vejamos a solução apresentada:



a) No tabuleiro 2x2004 dividimos em tabuleiros 2x 12. Sendo 2004÷12 = 167.

O segundo jogador vence o jogo ultilizando a regra de colocar o dominó da mesma forma que o primeiro jogador, em pé ou deitado.

O segundo jogador ultiliza a regra para cada um dos 167 Tabuleiros que ao completar todos vence o jogo.

b) No tabuleiro 2x2005 pode colocar 1 dominó em pé a mais do que num tabuleiro 2x2004.

Só que agora vence o primeiro jogador porque ele coloca o primeiro dominó em pé na primeira coluna e depois ultiliza a regra do jogador que venceu no item a.

4.1.6 Conclusões da aula

Nenhum aluno descobriu a estratégia vencedora do jogo à partir da nossa estratégia que era a simetria em relação ao centro do tabuleiro, no qual era o nosso objetivo inicial. Porém, a aluna 2, quando mostra sua estratégia, vê-se que ela se utiliza de elementos de simetria quando diz *“casava os dominós igualmente ao primeiro jogador”*. Logo podemos dizer que o experimento com o Jogo1 teve efeito, pois, uma aluna conseguiu determinar uma estratégia vencedora eficaz utilizando intuitivamente a técnica de simetria.

Diante disso, vamos analisar as estratégias apresentadas por elas:

A aluna 1, tentou mostrar uma estratégia que a fazia vencer não importando se é a primeira ou a segunda a jogar, o que é equivocado.

Analisando a estratégia da aluna 1 e supondo que dois jogadores joguem sem cometer erros, vamos supor que o primeiro a jogar utilize essa estratégia. Basta apenas que o segundo jogador utilize a estratégia apresentada para o Jogo 1, ou até mesmo a estratégia vencedora da aluna 2 para anular essa estratégia.

Agora, sendo o segundo a jogar e utilizando essa estratégia apresentamos a seguir um modelo de jogo finalizado em que o primeiro jogador vence a partida com duas casas isoladas sem a possibilidade de encaixe de dominó.

6ª	4ª	4ª	4ª	5ª	3ª	2ª		2ª	2ª	1ª	1ª
6ª	4ª	5ª	5ª	5ª	3ª	2ª	1ª	1ª		3ª	3ª

1º Jogador - dominó azul (6 jogadas)

2º Jogador - dominó verde (5 jogadas)

Já a estratégia da aluna 2 só funcionou, pois o número de colunas é par. Se fosse um número ímpar de colunas a estratégia não funcionaria para o segundo jogador. Vejamos um exemplo com um tabuleiro 2x11.

6ª	3ª	3ª	4ª	4ª	2ª	2ª	5ª	5ª	1ª	1ª
6ª	3ª	3ª	4ª	4ª	2ª	2ª	5ª	5ª	1ª	1ª

Dominó azul – Primeiro jogador

Dominó verde – Segundo jogador

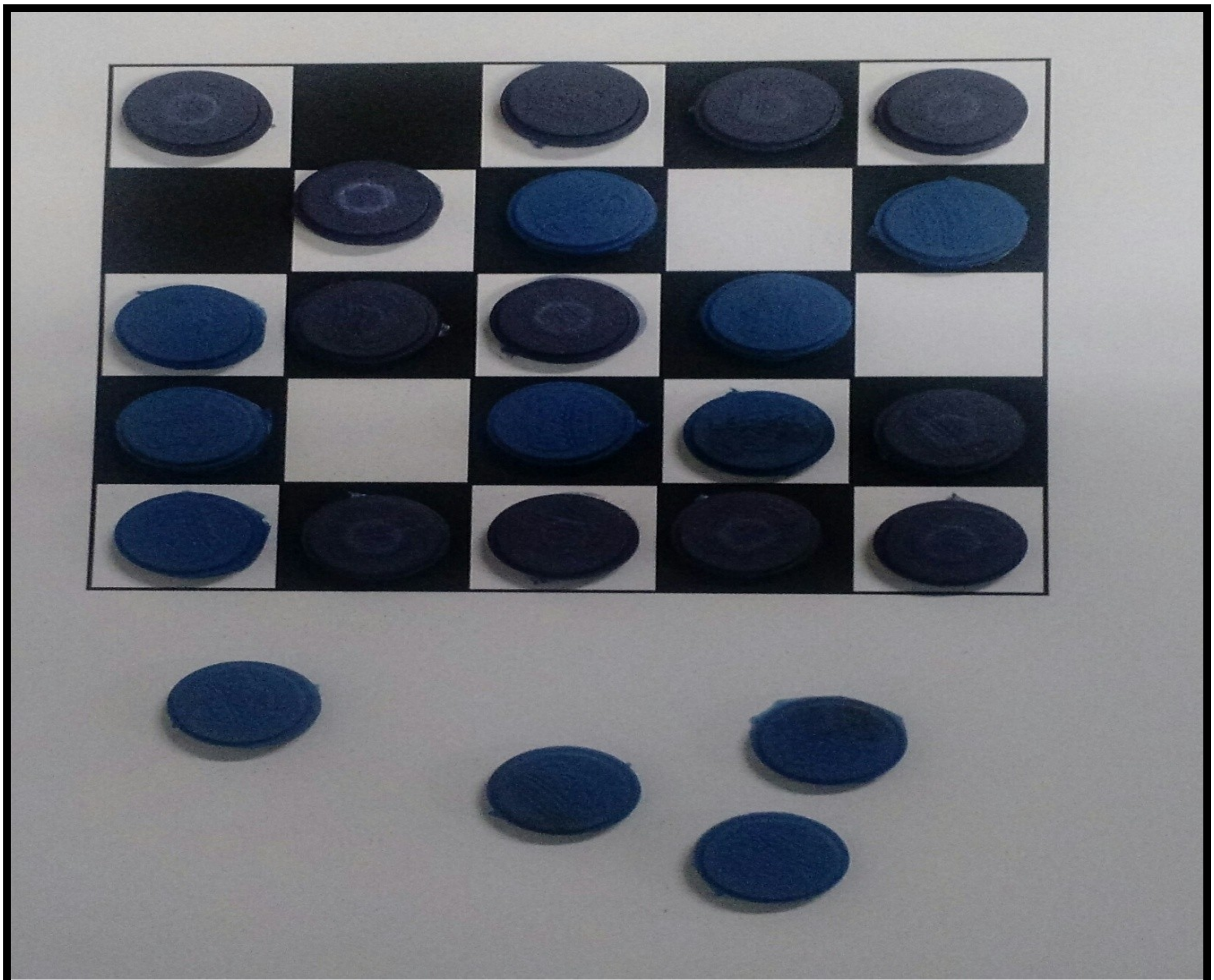
Reparamos neste tabuleiro que o número de dominós azuis são 6 peças e o de dominós verdes são 5 peças. Como o segundo jogador fica impossibilitado de jogar, ele perde.

Ao analisarmos agora a resposta do problema dada pela a aluna 1, percebemos que no item (a), associou o tabuleiro maior 2x2004 como múltiplo do tabuleiro 2x12 visto no jogo, e com isso, intuitivamente utilizou a técnica de redução a um caso menor. Porém, não mencionou o ponto de simetria no centro do tabuleiro 2x2004.

Já no item (b), percebeu que com a quantidade de colunas sendo ímpar a estratégia vencedora mudaria do segundo para o primeiro jogar, utilizando intuitivamente a técnica de cobertura com a ideia de paridade.

Um fato curioso é que a aluna 1 desenvolve sua resposta no problema com a estratégia vencedora apresentada pela a aluna 2 durante o jogo. Essa situação nos propõe que o jogo, no que tange a interação social, apresenta uma oportunidade de trocas de informações que contribui para o aprendizado dos alunos.

4.2 JOGO 2



O jogo é constituído por:

- 1 Tabuleiro de damas 5 X 5
- 25 peças de Damas
- 2 jogadores

Regras do jogo

- Coloca-se uma peça em cada quadrado de um tabuleiro de Damas 5X5.
- Os jogadores se revezam retirando um número arbitrário de peças vizinhas ao longo de uma linha ou de uma coluna.

Objetivo do jogo

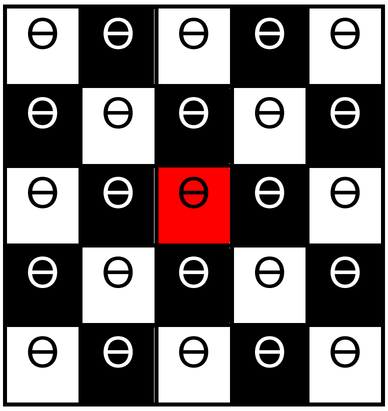
- Vence o jogador que retirar a última peça.

Problema proposto após o Jogo 2

Coloca-se uma peça em cada quadrado de um tabuleiro 8x8. Dois jogadores se revezam retirando um número arbitrário de peças vizinhas ao longo de uma linha ou de uma coluna. Vence o jogador que retirar a última peça. Qual jogador possui uma estratégia vencedora?

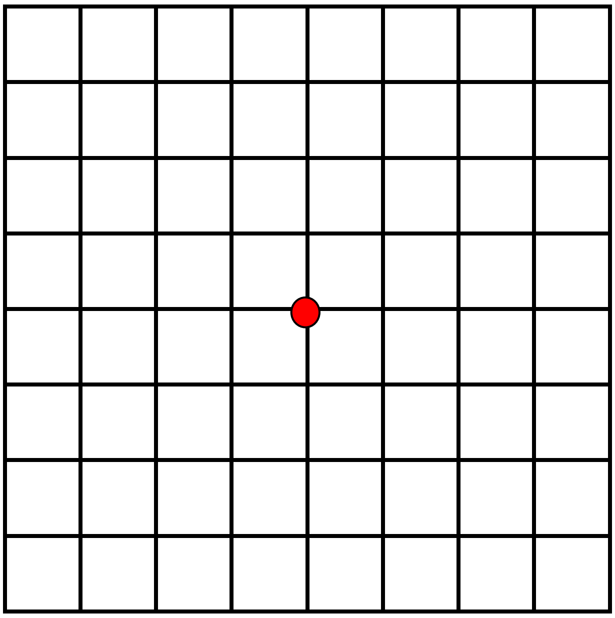
4.2.1 Estratégia vencedora do Jogo 2

Observe que para esse jogo, o primeiro jogador possui uma estratégia vencedora retirando inicialmente a peça de dama localizada no centro do tabuleiro (pintada de vermelho) e a partir daí repete todas as jogadas do segundo jogador simetricamente a essa casa.



4.2.2 Solução do problema proposto após o Jogo 2

No tabuleiro 8x8 o segundo a jogar possui uma estratégia vencedora se observar que esse tabuleiro possui uma simetria em relação ao centro. Vejamos o ponto de simetria no tabuleiro:



A partir dessa simetria o segundo jogador repete a jogada do primeiro a jogar, simetricamente ao ponto de simetria.

4.2.3 Ações do Jogo 2

- **Receptividade**

  Eles receberam o jogo, ansiosos para jogarem.

- **Dúvidas**

  Os alunos tiveram dúvidas durante o jogo quanto à quantidade de peças a serem retiradas por linha ou coluna. Fizeram perguntas se podiam retirar linhas ou colunas inteiras ou se era valido na última jogada vencer o jogo retirando mais de uma peça.

4.2.4 Estratégias do Jogo 2 apresentada pelos alunos

Estavam presentes na aula nove alunos, dos quais três apresentaram uma estratégia. Os demais alunos não conseguiram desenvolver uma estratégia vencedora.

O aluno 1, apresentou como estratégia vencedora isolar o maior número possível de peças unitárias e a partir daí, observava a jogada do outro jogador e fazia a conta para sobrar uma peça para ele no final do jogo. Ao perguntar esse aluno se ele venceu, respondeu que havia vencido bastante.

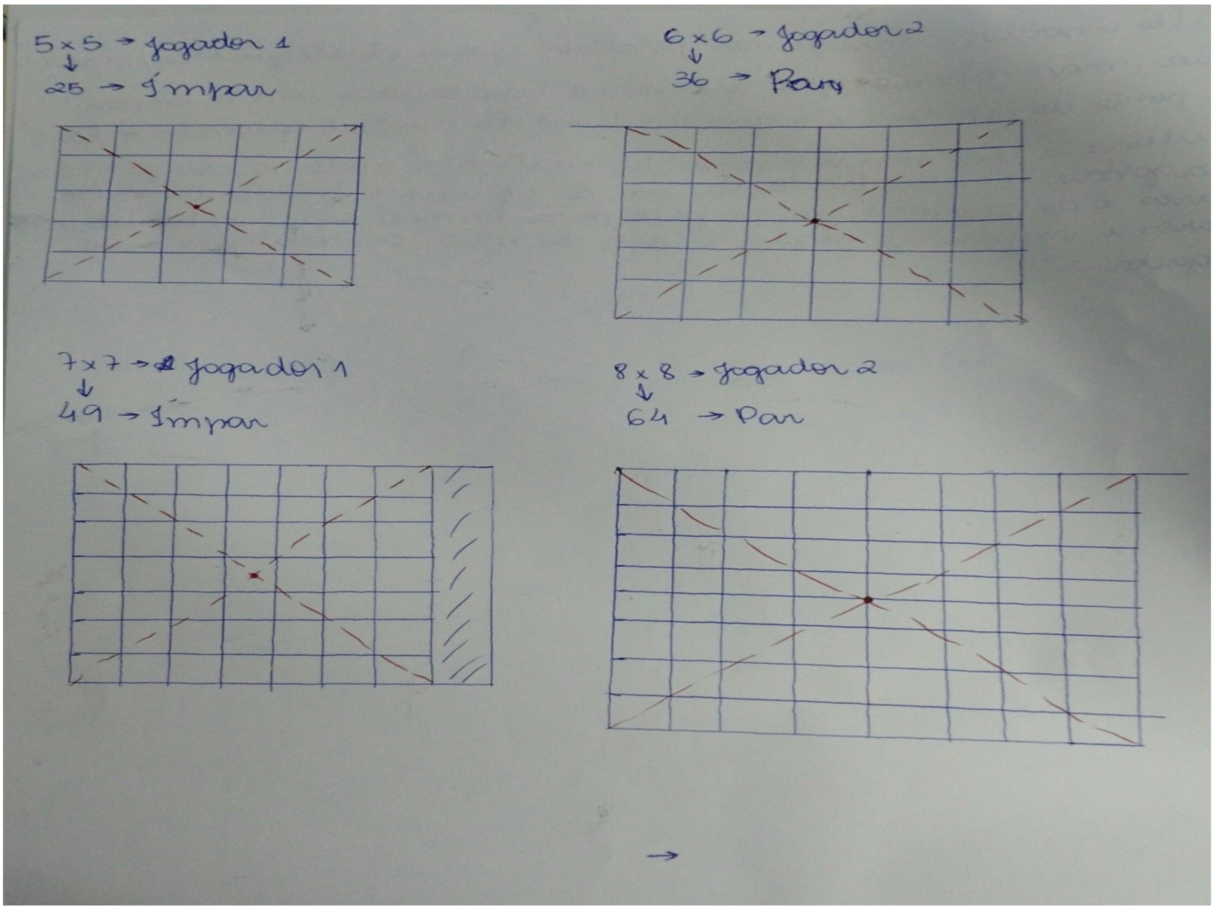
Em uma linha de pensamento parecida com a do aluno 1, a aluna 2 apresentou como estratégia deixar um grupo de duas ou três peças vizinhas para o final do jogo. Ao ser questionada se havia vencido com essa estratégia, respondeu que só venceu quando começou o jogo.

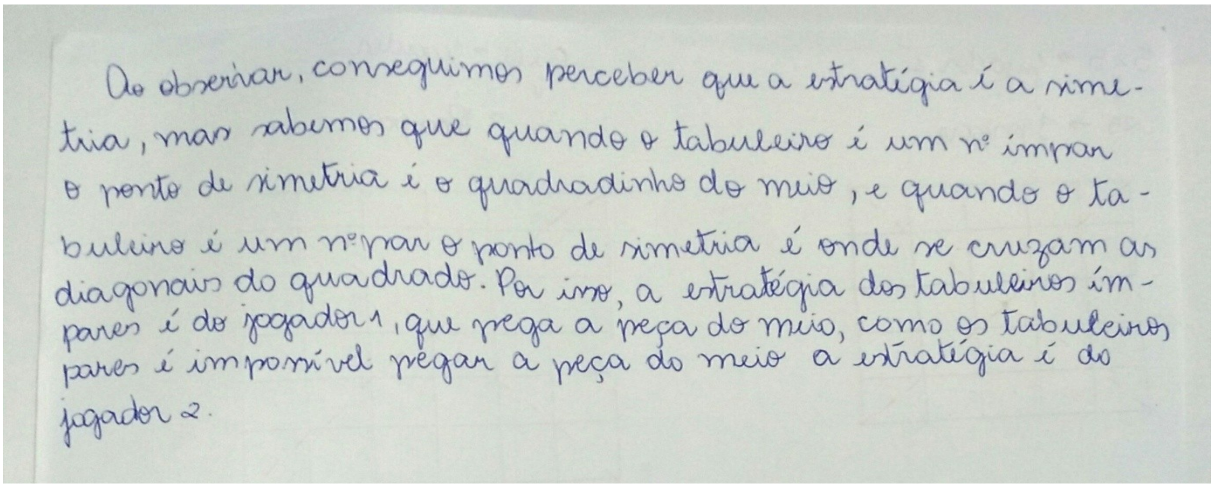
Já a aluna 3, observou que o tabuleiro tinha 13 casas brancas e 12 casas pretas. Em cosequência disso, se começasse o jogo retirava uma peça de uma casa branca qualquer e em seguida retirava a mesma quantidade de peças pretas e brancas que seu adversário realizasse em cada jogada. Sendo a segunda a jogar, retirava na primeira jogada o mesmo número de peças de casas pretas e brancas que o adversário tirou na primeira jogada com mais uma peça de uma casa branca, nas jogadas seguintes, retirava a mesma quantidade de peças que seu oponente. Ao ser questionada sobre seu desempenho no jogo respondeu que venceu todas.

4.2.5 Resultados obtidos com o problema

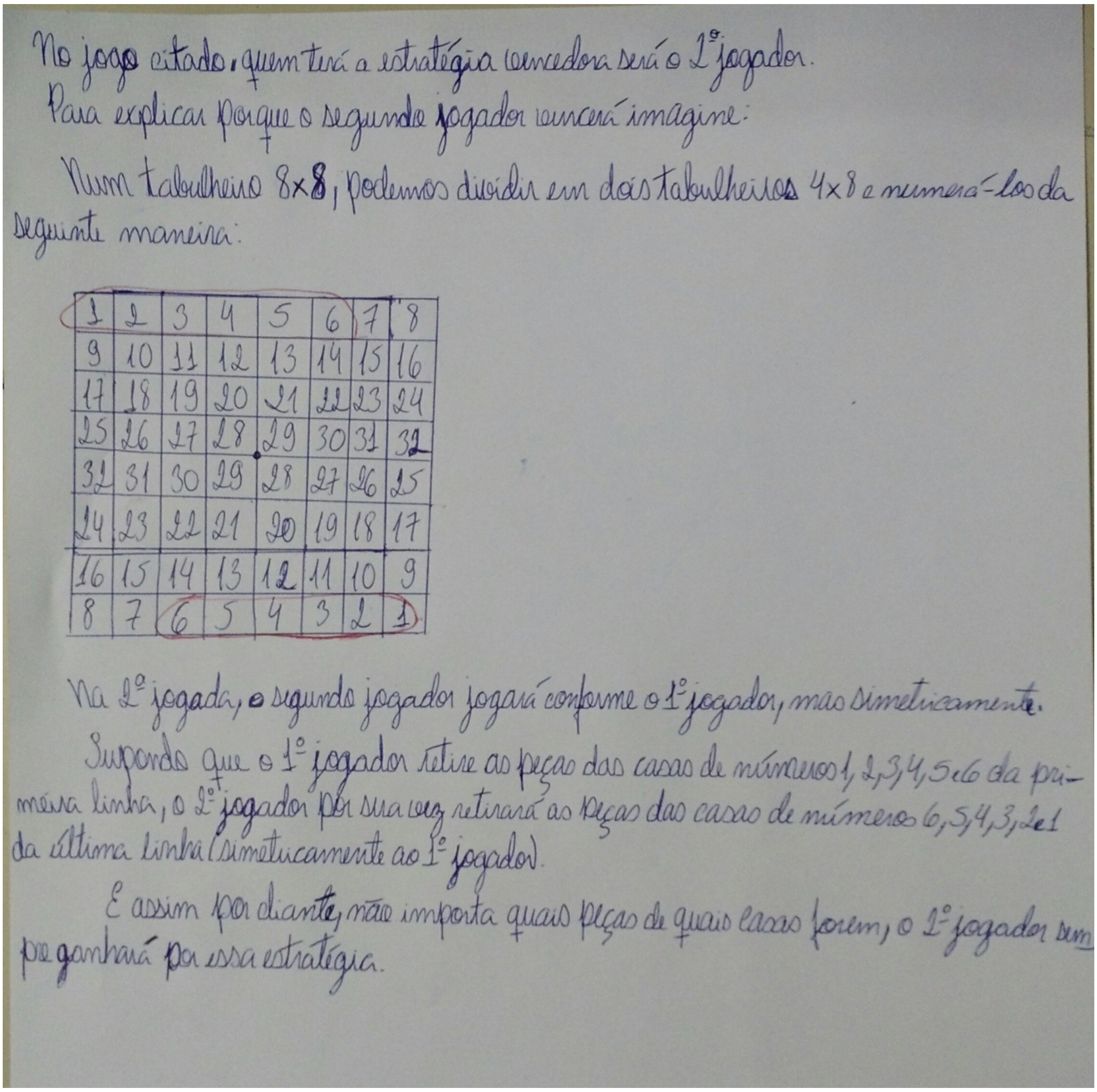
Apenas as alunas representadas por aluna 2 e aluna 3 da subseção anterior apresentaram soluções para o problema. Os demais não responderam ou simplesmente responderam objetivamente qual jogador tinha a estratégia vencedora.

Analisando a resposta da aluna 2, percebemos que ela apresentou a técnica da simetria em jogos de acordo com a paridade do tabuleiro. Com essa ideia, ela determinou que quando um tabuleiro quadrado for de ordem par, a simetria estaria no ponto de interseção das diagonais do tabuleiro e desta forma o segundo jogador possuía a estratégia vencedora. E sendo o tabuleiro de ordem ímpar, o ponto de simetria estaria na casa central que continha o ponto de interseção das diagonais do tabuleiro, em consequência disso o primeiro a jogar detinha a estratégia vencedora. Vejamos a sua solução:




Ao observar, conseguimos perceber que a estratégia é a simetria, mas sabemos que quando o tabuleiro é um nº ímpar o ponto de simetria é o quadradinho do meio, e quando o tabuleiro é um nº par o ponto de simetria é onde se cruzam as diagonais do quadrado. Por isso, a estratégia dos tabuleiros ímpares é do jogador 1, que pega a peça do meio, como os tabuleiros pares é impossível pegar a peça do meio a estratégia é do jogador 2.

Já a aluna 3, apresentou uma solução preenchendo o tabuleiro 8x8 com pares de números de 1 à 32 colocados simetricamente em relação ao centro do tabuleiro. Em consequência a essa marcação, conseguiu justificar que o segundo a jogar, retirando as mesmas peças marcadas que o primeiro a jogar, possuía uma estratégia vencedora. Vejamos a sua solução:



No jogo citado, quem terá a estratégia vencedora será o 2º jogador.
Para explicar porque o segundo jogador vencerá imagine:
Num tabuleiro 8x8, podemos dividir em dois tabuleiros 4x8 e numerá-los da seguinte maneira:

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
32	31	30	29	28	27	26	25
24	23	22	21	20	19	18	17
16	15	14	13	12	11	10	9
8	7	6	5	4	3	2	1

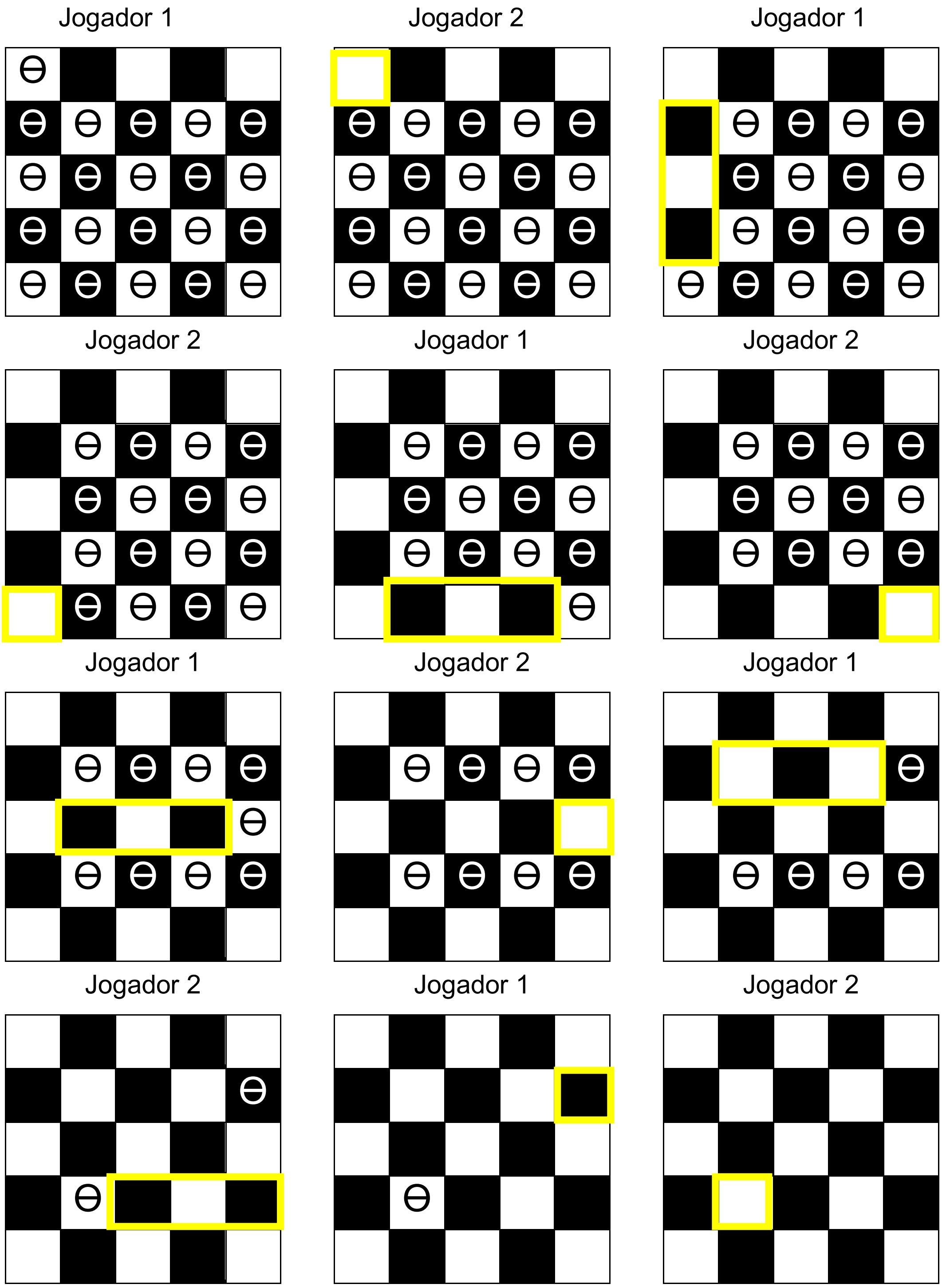
Na 2ª jogada, o segundo jogador jogará conforme o 1º jogador, mas simetricamente.
Supondo que o 1º jogador retire as peças das casas de números 1, 2, 3, 4, 5 e 6 da primeira linha, o 2º jogador por sua vez retirará as peças das casas de números 6, 5, 4, 3, 2 e 1 da última linha (simetricamente ao 1º jogador).
E assim por diante, não importa quais peças de quais casas forem, o 2º jogador sempre ganhará por essa estratégia.

4.2.6 Conclusões da Aula

Nenhum aluno chegou ao objetivo do jogo que era descobrir uma estratégia vencedora utilizando a técnica de simetria em jogos. Apenas a aluna 3 teve uma ideia próxima a estratégia desejada, faltando apenas encaixar o padrão de retiradas das peças.

Nas estratégias dos alunos 1 e 2, basta o adversário não permitir que eles consigam desenvolver suas ideais.

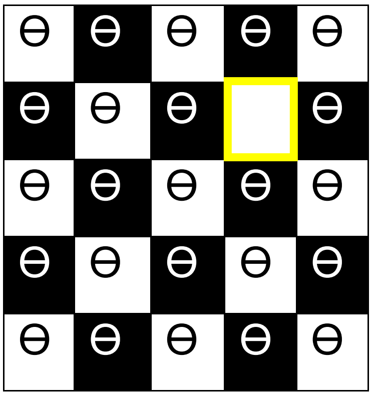
Em ambos os casos, cada vez que os alunos tentam implementar suas estratégias, temos como objetivo em não deixar que isso aconteça. Como ambos os casos possuem a mesma lógica, vejamos um exemplo onde o primeiro a jogar tenta executar a estratégia de isolar peças. Considere o jogador 1 o aluno com a estratégia do isolamento e o jogador 2 seu adversário.



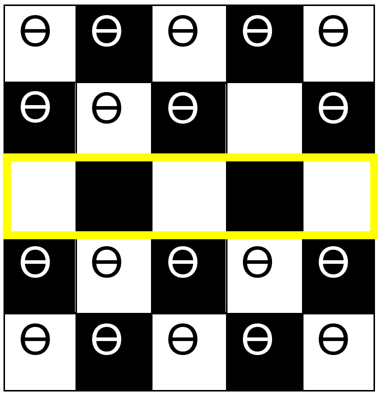
Como podemos observar, o aluno (jogador 1) perdeu. Logo sua estratégia não é sempre vencedora.

Vamos agora analisar a estratégia da aluna 3. Inicialmente consideramos que a aluna 3 comece o jogo (Jogador 1). Nossa estratégia aqui será isolar duas peças de modo que esta aluna não consiga retirar a mesma quantidade de peças que a gente. Como nós jogamos sem cometermos erros, nosso primeiro movimento será na linha central para tirar a possibilidade da aluna executar um jogo por simetria.

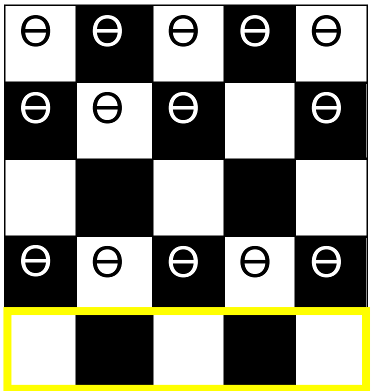
Jogador 1



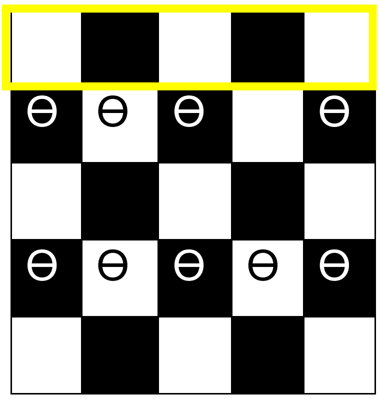
Jogador 2



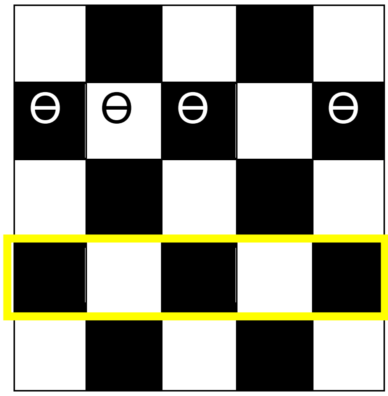
Jogador 1



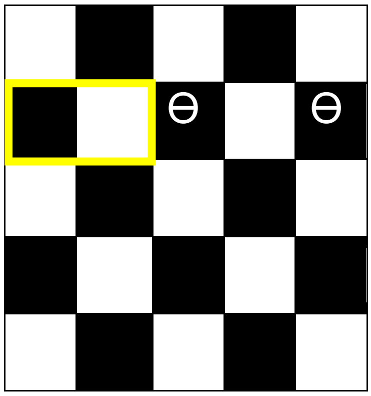
Jogador 2



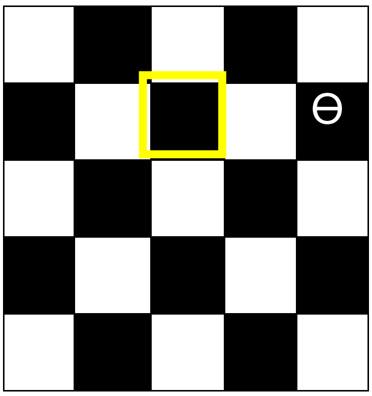
Jogador 1



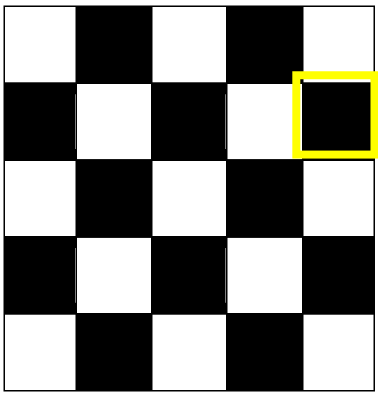
Jogador 2



Jogador 1



Jogador 2



Este é um exemplo de jogo que a aluna 3 (Jogador 1) perde com sua estratégia vencedora.

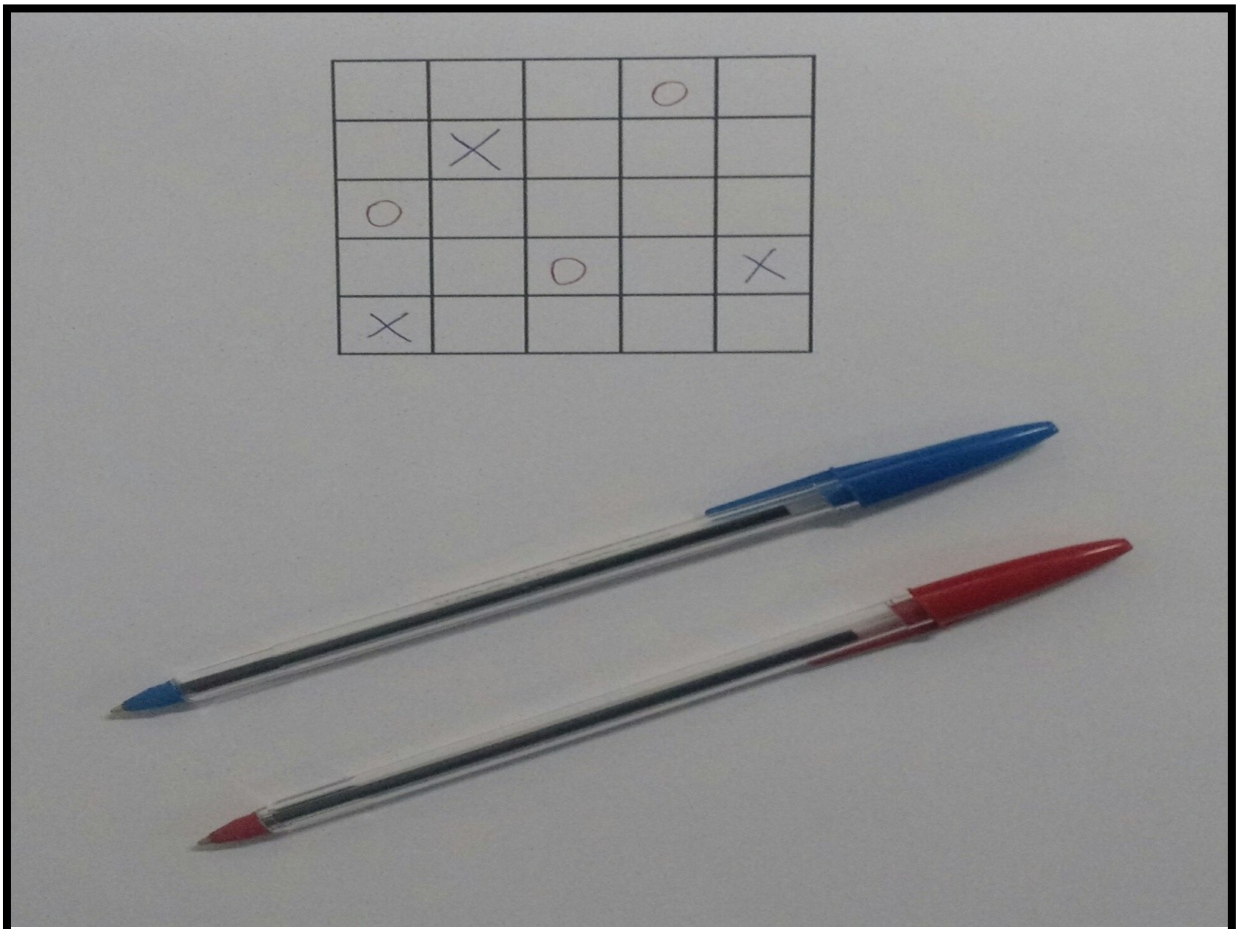
Agora, sendo a segunda a jogar, podemos mostrar que sua estratégia não é eficaz na primeira jogada. Bastando para isso que o primeiro a jogar retire uma linha ou uma coluna inteira e, desta forma, a aluna 3 teria que retirar 6 peças de uma só vez, o que é impossível conforme a regra do jogo nesse tabuleiro.

Já nos exercícios, tivemos bons resultados com as soluções. A aluna 2 conseguiu associar o tabuleiro do jogo 5x5, que tem paridade ímpar de casas, com o tabuleiro do exercício 8x8, que tem paridade par de casas. Além disso, ela conseguiu mostrar através de outros exemplos como os tabuleiros 6X6 e 7X7, que de acordo com a paridade dos números de casas do tabuleiro, a estratégia vencedora pertenceria a um dos jogadores, sendo ímpar para o primeiro jogador e par para segundo jogador.

A aluna 3 além de observar uma simetria no centro do tabuleiro 8X8, fez uma boa marcação das casas que o fez perceber que não importando como o primeiro jogador jogue, o segundo jogador sempre leva o primeiro a uma posição perdedora.

Percebemos com esses resultados do problema que, mesmo não conseguindo de fato uma estratégia vencedora eficaz para o jogo, as alunas conseguiram resolver o problema. Porém, isso nos propõe que o jogo contribuiu para um pensamento mais concreto para resolver o problema.

4.3 JOGO 3



O jogo é constituído por:

1 Tabuleiro de papel 5 X 5

2 canetas

2 jogadores

Regras do jogo:

- Dois jogadores se revezam escrevendo X e O em casas de um tabuleiro 5X5.
- O primeiro jogador marca X e ganha um ponto por cada linha ou coluna que contém mais X do que O.
- O segundo marca O e ganha um ponto por cada linha ou coluna que contém mais O do que X.

Objetivo do jogo:

- Vence o jogador que fizer mais pontos.

Problema proposto após o Jogo 3

Tom e Jerry jogam o seguinte jogo. Eles se revezam escrevendo X e O em um papel quadriculado 9X9. Tom é o primeiro a jogar e escreve O, enquanto que Jerry escreve X. Ao final do jogo, Tom ganha um ponto por cada linha ou coluna que contém mais O do que X, enquanto que o Jerry ganha um ponto por cada linha e coluna que contém mais X do que O. Vence o jogador que fizer mais pontos. Determine quem possui a estratégia vencedora.

4.3.1 Estratégia vencedora do Jogo 3

Para este jogo, o primeiro jogador possui a estratégia vencedora colocando seu primeiro X na casa central (conforme tabuleiro abaixo) e depois responder a cada jogada do segundo jogador com um X colocado simetricamente em relação ao quadrado central (conforme casas em verde abaixo).

	O			
		X		
			X	

4.3.2 Solução do problema após o jogo 3

A solução desse problema é análoga a estratégia vencedora apresentada para o Jogo 3.

4.3.3 Ações do jogo 3

- **Receptividade**

Os alunos receberam este último jogo sem muita euforia, pois disseram que o jogo é semelhante ao jogo da velha. Talvez por conter as mesmas marcações de X e O.

- **Dúvidas**

No início da aula alguns alunos tiveram dúvidas em relação ao objetivo do jogo, pois associaram esse jogo com o jogo da velha. Depois de algumas jogadas essa dúvida foi sanada.

4.3.4 Estratégias do Jogo 3 apresentada pelos alunos

Nessa aula estavam presentes seis alunos e apenas uma aluna apresentou estratégia vencedora. Os outros cinco alunos jogaram sem perceber alguma estratégia.

Ela utilizou a estratégia de quando começasse o jogo, sempre marcar a casa central (terceira linha com terceira coluna) e a partir disso, imitava o jogo do adversário simetricamente a casa central do tabuleiro.

A aluna ao ser perguntada se sempre venceu com essa estratégia, respondeu que sim, mas só quando começava o jogo. Além disso, expôs que quando era a segunda a jogar, não percebeu nenhuma estratégia vencedora e que aconteceu todos os resultados possíveis, vencer, empatar e perder, mesmo que tivesse a chance de na primeira jogada marcar a casa central para aplicar a simetria que tem o tabuleiro.

4.3.5 Resultados com o problema

Com uma solução bem interessante, a aluna que observou a estratégia vencedora durante o jogo no tabuleiro 5x5, conseguiu resolver o exercício mostrando argumentos para a veracidade de sua estratégia. Vejamos a solução:

Construindo o tabuleiro 9x9 e marcando uma cruz em azul e branco.

1	2	3	4		A	B	C	D
5	6	7	8		E	F	G	H
9	10	11	12		I	J	K	L
13	14	15	16		M	N	O	P
				O				
P	O	N	M		16	15	14	13
L	K	J	I		12	11	10	9
H	G	F	E		8	7	6	5
D	C	B	A		4	3	2	1

Colocando a cruz sobram quatro tabuleiros 4x4 que possuem simetria em em relação a cruz. Numerando dois tabuleiros simétricos de 1 a 16 e colocando letras de A a P nos outros dois.

Podemos ver por exemplo que a primeira linha possui 1,2,3,4, casa branca, A, B, C, D e que a última linha D, C, B, A, casa branca, 4, 3, 2, 1.

Neste exemplo se um jogador marcar a casa B da 1ª linha o outro deve marcar a casa B da última linha.

Ao completar linhas e colunas desta forma sobrará a casa central. E cada jogador já tem 8 pontos. Quem marcar a casa central primeiro garante mais dois pontos um na quinta linha e um na quinta coluna.

Então, o primeiro a jogar tem que marcar a casa central para vencer o jogo por 10x8.

R: O Tom vence o jogo sempre, pois é o primeiro a jogar.

4.3.6 Conclusões da aula

Por ser a terceira aula dada a essa turma e por eles já conhecerem a técnica de simetria em jogos de tabuleiros, foi surpreendente que apenas uma aluna, dentre seis alunos, conseguiu observar e apresentar a estratégia vencedora.

Fazendo uma análise do jogo com o problema, podemos perceber que o jogo antes do exercício possibilitou a aluna associar sua estratégia utilizada no jogo para a criação de argumentos que comprovassem sua estratégia vencedora em um tabuleiro maior com as mesmas características.

Além de mostrar a estratégia geométrica do jogo, que era utilizar a técnica de simetria, ela faz uma marcação de casas, outra técnica explorada neste trabalho. Essas duas técnicas em conjunto, conduziram a aluna de forma didática para a solução do exercício.

Podemos perceber, ainda, que ela utilizou da contagem total de pontos (18 pontos) ao dizer que utilizando das técnicas garantiria 8 pontos para cada jogador e que a única possibilidade de vitória nesse momento seria um dos jogadores garantir dois pontos, ou seja, vencer por 10X8.

5 CONCLUSÕES

Este Trabalho de Conclusão de Curso teve como objetivo produzir um texto matemático abordando algumas técnicas de resoluções de exercícios sobre tabuleiros nas olimpíadas de matemática. Propôs também, uma análise dos resultados de três aulas com problemas e jogos de tabuleiros em uma turma de alunos voluntários da rede pública que se preparavam para a prova da OBMEP.

Ao longo deste experimento percebemos que os alunos se motivaram muito com a utilização de material concreto na resolução de problemas de tabuleiro, porém observamos que, quando abstraímos o problema, eles ainda têm dificuldades, o que nos leva a crer que esta ferramenta é útil, mas deve ser usada por um período de tempo maior e não deve ser a única utilizada no ensino deste tipo de conteúdo.

Em trabalhos futuros, além de estudarmos apenas o aspecto combinatório da solução destes problemas, podemos também interagir com relações geométricas, propondo aos alunos a construção destes tabuleiros e explorar soluções aritméticas que visem o desenvolvimento e fortalecimento do cálculo para estes alunos que, infelizmente, ainda apresentam grandes dificuldades matemáticas.

6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AOBM; 'Página oficial da OBM na internet'. Disponível em http://www.obm.org.br

Fomin, Dimitri; Genkin, Sergey... [et al.]; **Círculos Matemáticos.** Tradução de Valéria de Magalhães Iório. Rio de janeiro: IMPA, 2012. 292p.

IMPA; 'Página oficial da OBMEP na internet'. Disponível em http.obmep.org.br

IMPA; 'Página oficial do POTI na internet'. Disponível em http://poti.impa.br

Shine, Carlos Yuzo. **21 Aulas de matemática Olímpica**. Rio de Janeiro: SBM, 2009. 280 p.

Tao, Terence. **Como resolver problemas matemáticos**. 1ªed. Rio de Janeiro: SBM, 2013. 163p.