Ensaio sobre o Ensino da Matemática Financeira no Brasil

Fabiano Alberton de Alencar Nogueira

28 de fevereiro de 2016

Sumário

Resumo

São discutidas algumas inconsistências curriculares no ensino de matemática financeira, desde temas tratados de forma intempestiva — por vezes abordados em nível de graduação sem que sua complexidade o justifique —, ou mesmo indevidamente omitidos, até tópicos fora da realidade, seja por anacronismo ou por conterem, de fato, erros conceituais.

Em todo o conteúdo isento de opinião própria do autor, a metodologia adotada foi a de pesquisa bibliográfica.

O primeiro capítulo contextualiza a escolha do tema e sugere a aproximação de duas instituições que vêm trabalhando em projetos que, embora independentes, guardam certa complementaridade. O segundo capítulo detalha o histórico das iniciativas recentes para a melhoria dos hábitos financeiros das famílias brasileiras, mediante a implantação de políticas públicas executadas por meio de órgãos da administração pública, direta e indireta. O terceiro capítulo analisa parte de um material didático elaborado no bojo das iniciativas citadas acima e que já está disponível para disseminação nas escolas públicas. O quarto capítulo discute o conteúdo de matemática financeira veiculado em cursos de graduação, criticando sua adequação conceitual e didática. Por fim, as conclusões e propostas são consolidadas no quinto e último capítulo, acompanhadas de sugestões para futuras linhas de continuidade deste trabalho.

Palavras-chave: Matemática Financeira, Educação Financeira, Juros, Finanças, Currículo.

Agradecimentos

Agradeço a Deus em primeiro lugar, criador de todos os mortais citados nesta página e de todos os injustamente omitidos.

Obrigado à minha esposa Patrícia, aos meus filhos Miguel e Mateus, à minha mãe Iria, à minha irmã Jerusa, ao meu falecido pai Antenor, pelo amor, pelos sacrifícios, pelo incentivo, etc.

Obrigado aos meus amigos e professores. Em especial, ao Paulo Cezar, pela paciente orientação. À Sheila Zani, ao Eduardo Wagner e ao Fabio Henrique Teixeira de Souza pela revisão deste texto.

Obrigado aos colegas que escreveram dissertações sobre o mesmo assunto, subsidiando o presente trabalho.

Obrigado aos colegas do Banco Central do Brasil que me apoiaram durante o curso que estou concluindo.

Por fim, estendo minha gratidão ao povo brasileiro, meu atual e favorito patrão, que custeou a maior parte da minha formação acadêmica e que merece toda contrapartida por seu compulsório investimento na coisa pública.

"Todas as coisas foram feitas por ele, e sem ele nada do que foi feito se fez." (João 1:3)

Isenção de Responsabilidade

Disclaimer

As opiniões contidas nesta dissertação de mestrado são de minha responsabilidade exclusiva, não podendo ser confundidas com posições oficiais divulgadas pelo Banco Central do Brasil (BCB), Autarquia da qual sou servidor estatutário. Meu vínculo funcional com o BCB, por si só, não confere qualquer caráter institucional à produção acadêmica por mim desenvolvida, exceto quando essa atividade decorre do exercício de minhas funções no próprio órgão, o que não é o caso deste texto.

Capítulo 1

Introdução

Por que falar de matemática financeira outra vez? Muitos trabalhos têm sido desenvolvidos neste tema, que, por preguiça e doravante, chamarei de *matfin*. Só no banco indutor do próprio Profmat pude encontrar mais de 50 dissertações a respeito. Resta clara a necessidade de evitar que a tônica deste trabalho se sobreponha às de outros que já tenham abrilhantado a discussão do assunto, sob pena de produzir *mais do mesmo*. Uma resposta à pergunta acima é que, nesses quase dez anos em que estive afastado do magistério da Educação Básica, fiquei mais em contato com estudantes do ensino superior que cursaram a cadeira de matfin em suas graduações e o que constatei é que **não há nada (ou quase nada) que eles tenham estudado em matfin em nível superior que um típico aluno do ensino médio não pudesse resolver com suas ferramentas**.

Ora, isso é alarmante. Significa que as graduações dotadas de um componente curricular de matfin, essas sim, estão produzindo mais do mesmo, ou *chovendo no molhado*, em linguagem coloquial. Em particular, as que cobram mensalidades para oferecer uma disciplina semestral de matfin estão arrecadando dinheiro em contrapartida de treinar casos particulares de exercícios de somas de progressões geométricas, assunto que seus alunos já deveriam ter dominado entre 2 e 4 anos antes. Pondo de outra forma, a porção da ementa dessa disciplina que poderia ser julgada imprópria para alunos do ensino básico é, controvérsias de lado, tão pequena que daria um capítulo, quando muito, de algum material didático adotado no ensino superior, ou seja, um *apêndice* na ementa de outra disciplina, jamais uma cadeira de um semestre inteiro dedicada a isso.

Por outro lado, não há dúvida de que é necessário investir mais nesse aspecto das habilidades matemáticas da nossa população, e a própria existência dessa disciplina de graduação denuncia a deficiência do ensino básico nesse tópico, pois visa a preencher uma lacuna facilmente verificável no conjunto dos estudantes. Dentre as dissertações do Profmat que focalizam tal déficit, destaco [1].

Assim, a principal ambição deste trabalho é fomentar uma profunda discussão curricular no ensino de matfin, identificando oportunidades para melhoria tanto da formação dos professores de matemática encarregados de lecionar esse assunto em suas escolas como também da aquisição de conceitos básicos passíveis de aplicação prática no cotidiano dos alunos e suas famílias. E quando digo *profunda discussão curricular*, quero salientar que ela não pode ficar circunscrita a um ciclo de escolaridade. Justamente e sobretudo, preconizo que seja feita a devida *transferência* da maior porção da matfin para o Ensino Médio, que é seu lugar de direito.

Antes, porém, convém delinear o contexto dentro do qual fiquei motivado a desenvolver esta dissertação...

1.1 Histórico pessoal e a escolha do tema

Minha própria história pessoal influenciou, fortemente, a escolha do tema de matfin. Desde que tomei gosto por ensinar matemática, deparei-me com o célebre questionamento "Para que serve a Matemática?". Até aí, nada de exclusivo. Ao contrário, creio que quase todos nós, os professores de matemática, já ouvimos essa pergunta. E para a maior parte de nós, independentemente de a ênfase no sentido utilitário concreto da Matemática ser conveniente ou não, uma das primeiras coisas que chegam à mente quando temos a intenção de responde-la é, sem dúvida, matfin.

Entretanto, perto do fim da minha licenciatura, ocorreu um episódio que exigiu de mim um conhecimento de matfin mais profundo do que tudo que tinha sido coberto na disciplina de mesmo nome em que eu mesmo já havia sido aprovado. Omitindo detalhes das circunstâncias que deram causa ao fato, um financiamento foi liquidado antecipadamente por valor superior ao devido. Em outras palavras, quitei uma dívida pagando valor maior que o saldo devedor. Sendo relevante a diferença, fui solicitar o correspondente reembolso, o que, lamentavelmente, não foi fácil até que o Procon fosse chamado a mediar.

Inspirado no acima ocorrido, redigi minha monografia de fim de curso da licenciatura[1], na qual se pode encontrar uma narrativa mais detalhada do episódio do tal financiamento. Contudo, cabe observar que o desenvolvimento daquela monografia abordou temas como, por exemplo, planejamento previdenciário, entendido como a poupança individual cuja finalidade seja a de garantir segurança financeira na aposentadoria. São coisas cujo ferramental é elementar, mas em torno das quais criou-se o mito de que seu estudo requer bagagem de ensino superior.

Alguns anos mais tarde, estava lecionando na rede pública estadual, à noite, quando me vi forçado a admitir que a ementa oficial do terceiro ano era irremediavelmente inacessível ao alunado ali presente. Estava diante de um dilema: ou teimar na hipocrisia de "cumprir a missão de entregar o currículo estabelecido na norma" ou romper com ele, abusando da minha autonomia e aproveitando a ausência de fiscalização e interferência para criar algo novo, feito sob medida para o meu público-alvo, na esperança de que um número mais significativo de discentes tivesse chances reais de assimilação eficaz, com efeitos transformadores de vida. Optei pela segunda e jamais me arrependi. O relato completo dessa experiência, incluindo a utilização efetiva do laboratório de informática da escola, tomaria um livro à parte.

Veio então a minha aprovação no concurso do Banco Central, em 2006. Em virtude do novo emprego, perdi contato com a educação básica, mas, em compensação, passei a

[1]"Matemática Financeira no Ensino Médio" ([12])

trabalhar em um órgão que "respira" Economia e Contabilidade, mantendo à permanente baila diversas noções de matfin, tais como juros reais e nominais, inflação, valor presente líquido de um projeto, taxa interna de retorno e custo-oportunidade.

Mais do que isso, a partir de um momento relativamente recente, o Banco Central incluiu a Responsabilidade Social como um de seus valores institucionais, diante da constatação de que a estabilidade do sistema financeiro é afetada pelo nível de conscientização dos indivíduos e das famílias em relação aos riscos associados aos serviços financeiros ofertados, sobretudo o crédito. Assim, mais do que normatizar e fiscalizar o Sistema Financeiro Nacional (SFN) e implementar políticas monetárias para manter a inflação sob controle, o Banco Central passou a se engajar em iniciativas de cunho educacional que serão detalhadas no capítulo 2.

Por outro lado, o Impa, a partir do início dos anos 90, investiu crescentemente na formação de professores do Ensino Básico. Começou com o projeto Impa-Vitae de 1991 a 1994, do qual surgiram as publicações da CPM (Coleção do Professor de Matemática). A partir do sucesso da experiência, apoiada pelo convênio Capes-Faperj, a iniciativa teve continuidade, em 1997, sob o nome de Curso de Aperfeiçoamento para Professores de Matemática do Segundo Grau, já utilizando os livros da série A Matemática do Ensino Médio - Volumes 1 ([11]), 2 ([10]) e 3. Tratava-se do precursor do PAPMEM (Programa de Aperfeiçoamento de Professores de Matemática do Ensino Médio) cuja periodicidade se consolidou como semestral, aproveitando cada recesso escolar.

Desde então foram ganhando impulso os esforços para emplacar programas de pós-graduação em moldes semelhantes aos de aperfeiçoamento que eram capitaneados pelo Impa. Em 2003, iniciou-se um programa de pós-graduação *lato sensu* envolvendo o Impa e mais quatro outras instituições de ensino superior do Estado do Rio de Janeiro, com apoio da Faperj, embora não tenha tido continuidade. Todavia, após conseguir que a Capes expedisse ofício de recomendação do Profmat, em outubro de 2010, foi dado um passo definitivo para o estabelecimento de uma política pública de profissionalização da classe docente atuante na Educação Básica, ficando o ano de 2011 marcado com o primeiro ingresso de professores-alunos no Mestrado Profissional de Matemática em Rede Nacional (Profmat), patrocinado pela SBM.

Para coroar, em 2015, o Inep (Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira) **incluiu a área de Competência Financeira no Programa Internacional de Avaliação de Estudantes — PISA** (*Programme for International Student Assessment*[2]), seguindo a matriz do PISA 2012, que havia incorporado a habilidade de letramento financeiro (*financial literacy*).

Por tudo isso, fica largamente justificada minha motivação para desenvolver essa dissertação. A ideia é criar condições para que, sonhando alto, o Profmat forneça subsídios diretos à ENEF (Estratégia Nacional de Educação Financeira), por exemplo, incorporando à sua carga horária conteúdos relacionados com a multiplicação da educação financeira. Conforme veremos, os projetos ora desenvolvidos pela Rede Nacional do Profmat e pelas instituições responsáveis pela implementação da ENEF são flagrantemente complementares.

[2] `http://www.oecd.org/pisa/`

Capítulo 2

Estratégia Nacional de Educação Financeira — ENEF

Este capítulo cobre aspectos de uma iniciativa atual, que tem sido desenvolvida no Brasil e em muitos outros países. Trata-se de criar e consolidar políticas públicas especificamente voltadas para instruir a população, em idade escolar ou não, no atributo conhecido como *educação financeira*[1], deste ponto em diante abreviada por "EF". No Brasil, a iniciativa foi batizada de ENEF (Estratégia Nacional de EF), instituída por decreto presidencial, conforme veremos a seguir.

2.1 Histórico

Ao longo da última década, os governos de vários países desenvolvidos ou emergentes demonstraram preocupação crescente com o baixo nível de *letramento financeiro*[2] de seus

[1]Segundo a OCDE, EF pode ser definida como *o processo pelo qual um consumidor financeiro ou investidor faz avanços em sua compreensão de produtos financeiros, conceitos e riscos e, através de informação, instrução e/ou aconselhamento objetivo, desenvolve as habilidades e a confiança para tornar-se mais consciente dos riscos financeiros e das oportunidades, para fazer escolhas racionais, para saber onde buscar ajuda, e para tomar outras providências efetivas visando a elevar seu bem-estar financeiro.*

[2]O PISA define letramento financeiro como sendo *o conhecimento e compreensão de conceitos e riscos financeiros, bem como as habilidades, motivos e confiança necessários para aplicar tal conhecimento e compreensão de modo a tomar decisões efetivas em um espectro de contextos, visando a melhorar o bem-estar financeiro de indivíduos e da sociedade, e para permitir participação na vida econômica.*

cidadãos, particularmente os jovens. Tal preocupação inicialmente foi originada pelo impacto do encolhimento de sistemas públicos e privados de cuidados/bem-estar, envelhecimento populacional e suas consequências previdenciárias, e os processos de sofisticação e expansão de serviços financeiros.

No Brasil, após o arrefecimento inflacionário decorrente do sucesso do Plano Real de 1994, ocorreu uma explosão da oferta/facilidade de crédito, o que significou melhora na qualidade de vida de boa parte da população, mas a combinação desse crescimento do crédito com a fraca educação financeira da grande maioria da sociedade resultou na disparada dos níveis de endividamento familiar, acarretando altos índices de inadimplência. A crise financeira de 2008 colocou as preocupações específicas do Brasil e também aquelas citadas anteriormente ainda mais no centro das atenções. Hoje existe consenso de que melhores níveis de letramento financeiro podem contribuir para melhores decisões individuais, e que o conjunto dessas decisões, por sua vez, pode induzir efeitos positivos não apenas na esfera familiar, mas numa estabilidade econômico-financeira bem mais abrangente, como sugere o diagrama da figura 2.1.

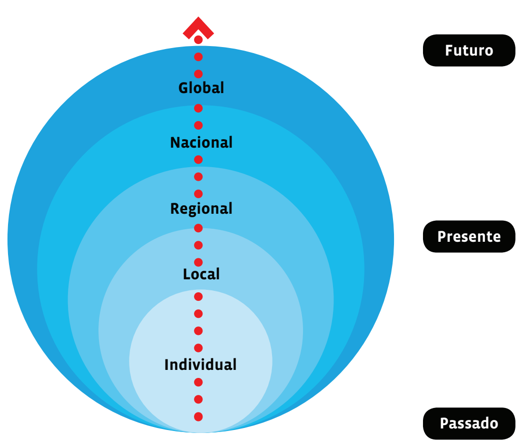


Figura 2.1: Dimensões da ENEF

Em 2005, a OCDE (Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico), movida pela revelação, em pesquisas recentes à época, de que as populações dos países membros tinham baixos níveis de letramento financeiro e eram desprovidas da consciência da necessidade de receberem EF, publicou o documento intitulado "*Recommendation on Principles and Good Practices for Financial Education and Awareness*"[3], listando sete princípios e dezenove boas práticas para criação ou reforma de políticas públicas voltadas para a EF e convidou os países, membros ou não, a difundirem tais orientações como forma de contribuir para uma maior estabilidade econômico-financeira em nível global.

De acordo com tal documento, é um princípio a ser observado que **programas de EF devem ser estruturados para irem ao encontro das necessidades e o nível de letramento financeiro do seu público-alvo (...) a EF deve ser pensada como um processo contínuo, vitalício, de modo a levar em conta a alta complexidade dos mercados (financeiros), as necessidades distintas que diferentes faixas etárias apresentam, e a crescente complexidade das informações disponíveis**.

Quanto às boas práticas, e no escopo deste trabalho, merecem destaque as seguintes:

- Campanhas nacionais devem ser estimuladas para elevar a consciência da população acerca de sua própria necessidade de avançar na compreensão de riscos financeiros e de maneiras de se proteger contra os mesmos por meio de poupança adequada, seguros e EF.

- A EF deve começar na escola. Indivíduos devem ser instruídos sobre assuntos financeiros o quanto antes em suas vidas. Além disso, programas assistenciais de bem-estar promovidos pelo Estado devem ter a EF como parte integrante.

- Devem ser desenvolvidas metodologias de avaliação dos programas de EF existentes. Devem obter reconhecimento oficial aqueles programas que satisfizerem critérios relevantes.

- Devem ser promovidos programas de EF que auxiliem os consumidores financeiros a

[3]Recomendação sobre Princípios e Boas Práticas para Educação e Consciência Financeiras – tradução livre ([13])

encontrarem fatos, prós e contras bem como os riscos dos diversos produtos e serviços financeiros.

- **Para os programas que propiciam o uso de salas-de-aula, devem ser promovidas a *competência e instrução adequadas dos educadores*. Neste aspecto, devem ser estimulados tanto o desenvolvimento de programas de "treinamento dos treinadores" como o fornecimento de ferramentas e materiais informativos específicos para eles.**[4]

Entre 2007 e 2010, o COREMEC[5] desenvolveu, por meio de um grupo de trabalho, um projeto de implementação da EF no Brasil[6], que culminou com o Decreto Presidencial nº 7.397, de 22 de dezembro de 2010[7], formalizando a instituição da ENEF. De modo sintético, uma perspectiva geral da implementação brasileira de ENEF pode ser vista no infográfico acessível no link `http://www.vidaedinheiro.gov.br/imagem/Infografico-ENEF-0508.pdf`.

Em 2012, a OCDE publicou novas diretrizes para as estratégias nacionais de EF[8], como resultado de trabalhos de revisão conduzidos pelo INFE (Rede Internacional para EF – *International Network on Financial Education*), que foram endoçadas pelos países membros do G20[9]. De acordo com tais diretrizes, define-se uma estratégia nacional para EF como uma abordagem para EF nacionalmente coordenada que consiste de uma estrutura ou programa que:

[4]Grifei este item porque uma das teses desenvolvidas neste trabalho é a de que o Profmat pode e deve ser aproveitado no contexto das iniciativas de fortalecimento da educação financeira no Brasil.

[5]COREMEC - Comitê de Regulação e Fiscalização dos Mercados Financeiro, de Capitais, de Seguros, de Previdência e Capitalização, formado pelos quatro reguladores do Sistema Financeiro Nacional: Banco Central do Brasil (BCB), Comissão de Valores Mobiliários (CVM), Superintendência Nacional de Previdência Complementar (PREVIC) e Superintendência de Seguros Privados (SUSEP).

[6]O rascunho continha vários documentos que, com ajustes, posteriormente tornaram-se parte da ENEF: um Plano Diretor, e anexos contendo uma Pesquisa Nacional sobre Educação Financeira, um Inventário de Iniciativas de Educação Financeira, uma revisão de iniciativas internacionais, Diretrizes para a Educação Financeira nas Escolas e um inventário de ações de educação financeira mantidas pelos reguladores do SFN.

[7]`http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_Ato2007-2010/2010/Decreto/D7397.htm`

[8]Princípios "de Alto Nível" para Estratégias Nacionais para Educação Financeira – tradução livre ([15])

[9]Descontando a União Europeia, os 19 países membros são África do Sul, Alemanha, Arábia Saudita, Argentina, Austrália, Brasil, Canadá, China, Coreia do Sul, Estados Unidos, França, Índia, Indonésia, Itália, Japão, México (anfitrião), Rússia, Turquia e Reino Unido.

- reconhece a importância da EF – possivelmente e inclusive via legislação – e define seu significado e escopo em nível nacional em função de necessidades e hiatos nacionalmente identificados;
- envolve a cooperação de diferentes partes interessadas como também a identificação de um líder nacional ou órgão/conselho coordenador;
- fixa um roteiro para atingir objetivos específicos e predeterminados dentro de um período de tempo estabelecido; e
- provê orientações a serem aplicadas em programas individuais de modo a contribuirem apropriada e eficientemente para a estratégia nacional.

Ainda segundo [15], **o processo de elaboração e execução da estratégia nacional pode seguir caminhos diferentes dependendo das circunstâncias de cada país. Por conseguinte, a articulação dos quatro princípios que espelham a definição da estratégia acima referida não necessariamente refletem uma ordem sequencial, mas sim os principais elementos de uma estratégia que podem ser postos em andamento em momentos diferentes ou simultaneamente, a depender do contexto de cada país (...) Considerando a diversidade de experiências, a OCDE/INFE deve manter uma plataforma para a aprendizagem horizontal (*peer learning*), através da qual os países que desenvolverem suas estratégias nacionais poderão compartilhar as lições aprendidas e as boas práticas**.

No mesmo ano, a OCDE incluiu, na matriz de avaliação de matemática do Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA), o letramento financeiro, perpassando os contextos pessoal (finanças pessoais), ocupacional (regras de pagamento de trabalho) e social (economia). O resultado, compilado no documento "*PISA 2012 Results: Students and Money: Financial Literacy Skills for the 21st Century (Volume VI)*"[10], corrobora as conclusões

[10]Resultados do PISA 2012: Estudantes e Dinheiro: Habilidades de Letramento Financeiro para o Século XXI (Volume VI) – tradução livre ([14])

das pesquisas anteriores. Contudo, apenas neste ano de 2015 o Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep) inseriu as competências financeiras dentre as áreas de conhecimento a serem avaliadas.

Em 2013, os Ministros das Finanças do G20 e representantes dos bancos centrais confirmaram o seu interesse nestas questões e solicitaram que a OCDE, sob a égide da presidência russa do G20, preparasse um relatório sobre o desenvolvimento de estratégias nacionais. A publicação conjunta resultante[11] relatou o monitoramento do progresso por parte dos governos das principais economias do mundo na implementação de suas estratégias nacionais.

2.2 CONEF — Comitê Nacional de Educação Financeira

Em seu artigo 3º, o Decreto nº 7.397, de 2010, criou o Comitê Nacional de Educação Financeira (CONEF), formado por um Diretor do BCB, pelo Presidente da CVM, pelo Diretor-Superintendente da Susep, pelo Superintendente da Previc, pelos Secretários Executivos dos Ministérios da Fazenda, da Educação, da Previdência Social e da Justiça e por quatro representantes da sociedade civil, cuja indicação segue ditames estabelecidos em regimento interno do Comitê. Cabe salientar que, no §5º desse artigo, consta que o BCB exercerá a secretaria-executiva do CONEF, prestando o apoio administrativo e os meios necessários à execução de seus objetivos. Também é de se ressaltar o disposto no §7º, de que o CONEF poderá convidar representantes de outros órgãos e entidades públicas e de organizações da sociedade civil para participar e colaborar com a consecução de seus objetivos, na forma do seu Regimento Interno[12].

Porém, o aspecto mais relevante para o que estamos interessados neste texto, está no artigo 5º, que diz que **para assessorar o CONEF quanto aos aspectos pedagógicos**

[11] ([16])

[12] Como determinado no Regimento Interno do CONEF, os quatro representantes da sociedade civil devem ser escolhidos entre (i) entidades autorreguladoras reconhecidas por órgão regulador de mercado integrante do SFN; (ii) entidades representativas dos mercados financeiro, de capitais, de seguros, de previdência e de capitalização; e (iii) entidades civis de defesa do consumidor. Esses representantes têm um mandato renovável de 3 anos (o atual até 2017). Desde o início até o momento, não constou da composição do CONEF nenhuma instituição da categoria "iii", o que, na minha opinião, configura um preocupante desequilíbrio de interesses.

relacionados com a educação financeira e previdenciária, é instituído, no âmbito do Ministério da Fazenda, o Grupo de Apoio Pedagógico – GAP[13]**, que terá em sua composição um representante de cada um dos seguintes órgãos e entidades:**
I - Ministério da Educação, que o presidirá;
(...)
VIII - instituições federais de ensino indicadas pelo Ministério da Educação, até o limite de cinco, no máximo de uma por região geográfica do País.

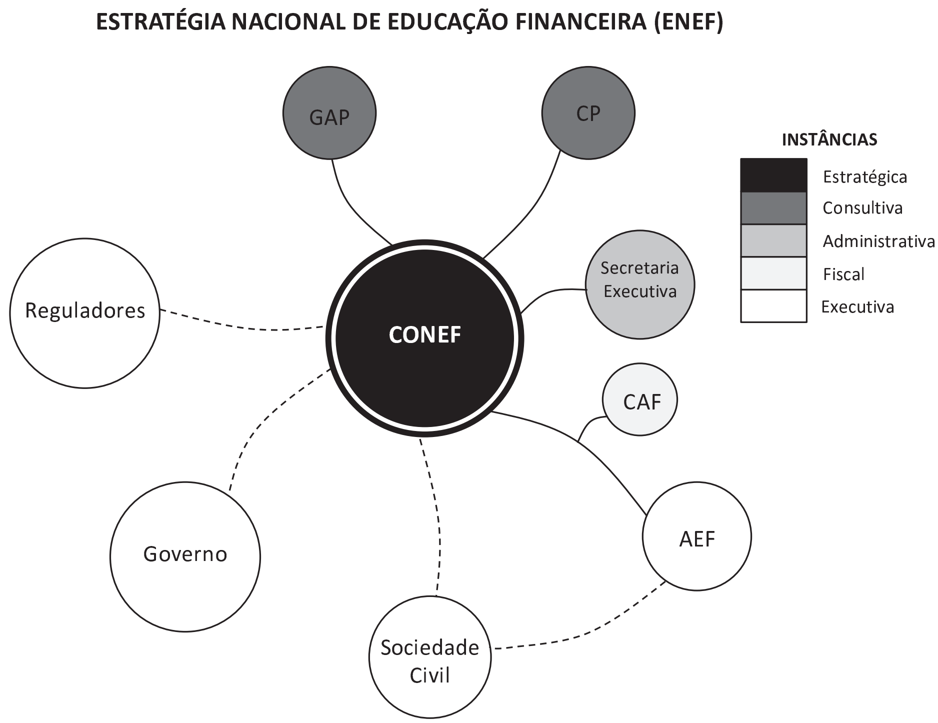
Em suas duas primeiras deliberações, o CONEF aprovou seu Regimento Interno e o Plano Diretor da ENEF. Esse plano, com seus anexos, norteia todos os programas da ENEF. As ações da ENEF são compostas pelos programas transversais e setoriais, coordenados de forma centralizada, mas executados de modo descentralizado.

Tudo isso evidencia a possibilidade de a rede nacional de instituições de ensino superior (IES) integrantes do Profmat influenciar significativamente o processo decisório pedagógico da ENEF, seja via gestões junto às instâncias do Ministério da Educação, na qualidade de presidente, conforme inciso I, ou diretamente, nos termos do inciso VIII, mediante indicação por esse ministério.

Convém frisar que as atividades desenvolvidas pelo BCB e pelo Impa, como instituições "líderes" da ENEF e do Profmat, respectivamente, não têm superposição imediata. Mas isso não quer dizer que devam permanecer estanques. Ao contrário, se um dos processos de trabalho no âmbito da ENEF é desenvolver materiais tais como cartilhas, livros, etc, e um dos objetivos do Profmat é capacitar professores, inclusive no uso de novas tecnologias educacionais, para preparação de materiais de alto padrão de qualidade, nada mais natural (e urgente!) que esses dois projetos conversem e convirjam em algum sentido, à semelhança do que ocorreu durante a construção do Aqueduto de Eupalinos, em Samos, no qual duas equipes cavavam a partir de extremos opostos da mesma montanha, encontrando-se no meio[14].

[13] As siglas CONSED e UNDIME da figura 2.2 significam, respectivamente, Conselho Nacional de Secretários de Educação e União Nacional dos Dirigentes Municipais de Educação, entidades convidadas.

[14] `https://pt.wikipedia.org/wiki/Aqueduto_de_Eupalinos`. Vide também [8, p. 59-65]



CONEF- Comitê Nacional de Educação Financeira

- Diretor do Banco Central do Brasil
- Presidente da Comissão de Valores Mobiliários
- Diretor-Superintendente da PREVIC
- Superintendente da SUSEP
- Secretário-executivo do MEC
- Secretário-executivo do MF
- Secretário-executivo do MPS
- Secretário-executivo do MJ
- Representantes da sociedade civil - 2011-2014 - ANBIMA, BM&FBOVESPA, FEBRABAN, e CNseg

GAP – Grupo de Apoio Pedagógico

- Ministério da Educação, como Presidente
- Banco Central
- CVM
- Ministério da Fazenda
- Susep
- Previc
- Conselho Nacional de Educação
- Instituições de ensino federais (até 5)
- CONSED
- UNDIME

CP – Comissão Permanente

- 12 membros efetivos, representando cada participante do CONEF

Secretaria Executiva

- Depto. de Educação Financeira do Banco Central

AEF – Associação de Educação Financeira do Brasil

- ANBIMA
- BM&FBOVESPA
- CNseg
- FEBRABAN

CAF – Comitê de Acompanhamento e Fiscalização

- Banco Central
- CVM
- Susep
- Previc
- Ministério da Fazenda

Programas Setoriais

Reguladores

- Banco Central
- CVM
- Susep
- Previc

Governo

- Ministério da Educação
- Ministério da Fazenda
- Ministério da Justiça
- Ministério do Desenvolvimento Social
- Ministério da Previdência Social

Sociedade Civil

- ANBIMA
- BM&FBOVESPA
- CNseg
- FEBRABAN

Figura 2.2: Estrutura da ENEF

2.3 O foco da ENEF

A formulação da ENEF brasileira, buscando adaptar, à nossa realidade, os princípios consensuados no âmbito do G20 por meio da OCDE, focou no desenvolvimento e implementação de programas para três públicos-alvo: crianças, jovens e adultos. O Plano Diretor da ENEF definiu orientações específicas para tratar de cada audiência.

2.3.1 Educação Financeira nas Escolas

A ENEF está desenhada para chegar às crianças e jovens principalmente por programas a serem desenvolvidos em escolas de ensino fundamental e médio, sob a orientação do Ministério da Educação e com a colaboração das secretarias de educação estaduais e municipais.

São dois projetos, um para o Ensino Médio e outro para o Fundamental, com livros escalonados por ano/níveis de ensino. No capítulo 3 faremos uma breve análise de parte do material didático empregado para esse fim.

O modelo pedagógico e o conteúdo foram concebidos tendo como base o documento "Orientação para Educação Financeira nas Escolas"[15], construído com a participação do Ministério da Educação, da UNDIME, CONSED e diversas outras instituições educacionais e financeiras ao longo de um ano, coordenado pela CVM.

Tanto o modelo pedagógico quanto os conteúdos financeiros tencionam convidar o aluno a adotar uma postura de protagonista de sua história de vida, dando a ele condições de planejar e fazer acontecer o futuro que deseja para si, em conexão com o grupo familiar e social a que pertence. A figura 2.3 esquematiza as competências associadas ao atingimento dos objetivos acima descritos.

Convém esclarecer que a competência de "Atuar como multiplicador", associada ao objetivo de "Formar multiplicadores" refere-se à situação em que o estudante difunde os conheci-

[15]Esse documento, disponível em `http://www.vidaedinheiro.gov.br/imagem/Info-EscolasFinal.pdf`, embasa e propõe a forma de alinhamento da EF e seus conteúdos formais ao currículo da Educação Básica, fundamentado na Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional e seus instrumentos normativos. A proposta é oferecer ao aluno informações e orientações que favoreçam a construção de um pensamento financeiro consistente e o desenvolvimento de comportamentos autônomos e saudáveis.

		OBJETIVOS		COMPETÊNCIAS
OBJETIVOS ESPACIAIS	OB1	Formar para a cidadania	C01	Debater direitos e deveres
	OB2	Ensinar a consumir e a poupar de modo ético, consciente e responsável	C02	Tomar decisões financeiras social e ambientalmente responsáveis
			C03	Harmonizar desejos e necessidades no planejamento financeiro do projeto de vida
	OB3	Oferecer conceitos e ferramentas para tomada de decisão autônoma baseada em mudança de atitude	C04	Ler e interpretar textos específicos de Educação Financeira
			C05	Ler criticamente textos publicitários
			C06	Tomar decisões financeiras autônomas de acordo com suas reais necessidades
	OB4	Formar multiplicadores	C07	Atuar como multiplicador
OBJETIVOS TEMPORAIS	OB5	Ensinar a planejar em curto, médio e longo prazos	C08	Elaborar planejamento financeiro
	OB6	Desenvolver a cultura da prevenção	C09	Analisar alternativas de prevenção em longo prazo
	OB7	Proporcionar a possibilidade de mudança da condição atual	C10	Analisar alternativas para superar dificuldades econômicas

Figura 2.3: Objetivos e competências pertinentes à ENEF

mentos adquiridos na escola em seu meio familiar, talvez influenciando decisões financeiras dos pais, irmãos, etc.

2.3.2 Educação Financeira de Adultos

Embora os objetivos da ENEF, tais como organizados na figura 2.3, apliquem-se igualmente ao público adulto, a abordagem de EF com essa população é muito diferente daquela adotada para o público infanto-juvenil. Se, por um lado, crianças e jovens estão inseridos dentro de uma instituição escolar e em processo de formação cognitiva e de visão de mundo, por outro, adultos não estão institucionalizados e têm visões já construídas e, em muitos casos, arraigadas.

Para alcançar o público adulto, foram firmadas parcerias com agentes privados e públicos capazes de multiplicar o efeito das ações da ENEF, tais como a realização de palestras, seminários, reuniões regionais, competições, campanhas de publicidade, cursos, programas de TV, publicações e feiras, bem como a criação de centros de atendimento telefônico, espaços culturais e portais de Internet. O detalhamento de tais iniciativas foge ao escopo deste texto, mas tem grande potencial para alimentar futuros trabalhos, possivelmente visando à Educação de Jovens e Adultos (EJA).

2.4 Mapeamento de iniciativas

O primeiro Mapeamento Nacional das Iniciativas de Educação Financeira foi um projeto da ENEF coordenado pela AEF-Brasil (Associação de Educação Financeira do Brasil[16]), com o objetivo de conhecer com maior abrangência e profundidade o cenário da EF no Brasil e de fomentar reflexões sobre os desafios e as oportunidades da área no país.

Em 2009, um levantamento preliminar de iniciativas de EF no país identificou 64 iniciativas. Em 2013, o Mapeamento Nacional identificou 803 ações em diferentes regiões brasileiras. Dessas 803 iniciativas mapeadas, 317 foram completamente cadastradas. A partir dos dados cadastrados, o Mapa da EF no Brasil se organiza em dois documentos:

- Dados Estatísticos sobre quem faz a EF no Brasil, o que faz e como faz.[17]
- Documento Analítico sobre os dados levantados, apontando avanços e oportunidades para qualificação e promoção do tema.[18]

Ainda que se trate de uma pesquisa não censitária, e sem verificação *in loco*, os números são representativos da situação da ENEF em nosso país, e permitem identificar carências –

[16]Uma OSCIP (Organização da Sociedade Civil de Interesse Público) instituída pelas quatro entidades que ora representam a sociedade civil no CONEF: ANBIMA, BM&FBOVESPA, CNSeg e FEBRABAN – http://www.aefbrasil.org.br/ para promover a EF no Brasil e desenvolver tecnologias sociais e educacionais, colaborando com a ENEF mediante a coordenação e execução de seus projetos.

[17]http://www.vidaedinheiro.gov.br/docs/RelatorioEstatisticoENEF.pdf

[18]http://www.vidaedinheiro.gov.br/docs/RelatorioAnaliticoENEF.pdf

denominadas “Oportunidades” no documento analítico supracitado –, dentre as quais destacamos:

- **Estimular a inserção da EF como um conteúdo a ser abordado por diferentes cursos e atividades educativas, especialmente por sua transversalidade.**
- **Desenvolver mais ações formativas que tenham uma perspectiva continuada, dando maior atenção tanto ao corpo docente quanto aos conteúdos e à avaliação.**

Capítulo 3

Análise do Material Didático da ENEF

A disseminação de EF nas escolas está subdividida em dois projetos: EF no Ensino Fundamental e EF no Ensino Médio.

EF no Ensino Fundamental

O projeto pedagógico e as atividades educativas propostas nessa vertente foram construídas e validadas pelos representantes dos setores educacional e financeiro, incluindo o Ministério da Educação, UNDIME e CONSED. A tecnologia foi desenvolvida a partir da reprodução da ideia de ciclo e integrando os conteúdos formais (financeiros) aos conteúdos sociais (situações reais cotidianas da faixa etária dos alunos, envolvendo organização pessoal, financeira e decisões de consumo e poupança). Assim, encontram-se em fase de finalização nove livros – aluno e professor – correspondendo a cada ano do Ensino Fundamental, com o apoio da BM&FBOVESPA.

Os livros voltados ao Ensino Fundamental ainda não estão prontos para disseminação, pois foram submetidos à análise do Ministério da Educação em setembro de 2014, que por sua vez está compilando e avaliando a resposta dos alunos e professores ao seu conteúdo.

EF no Ensino Médio

Essa subdivisão encontra-se bem mais avançada em sua implementação. Após testes feitos em 2010 e 2011 sob a forma de projeto-piloto, em 891 escolas de 5 estados brasileiros e Distrito Federal, com participação de cerca de 27000 estudantes e 1800 professores, a tecnologia está pronta, de acordo com um método rigoroso de avaliação do Banco Mundial, para disseminação nas escolas de Ensino Médio.

O material didático está disponível para *download*, mediante cadastro de *login* e senha, no sítio `http://www.edufinanceiranaescola.gov.br/`. São 3 livros (chamados "Blocos"[1]), com 72 situações didáticas propostas por meio de histórias, imagens, tabelas, etc.:

- Bloco 1 - Situações da Vida Pessoal e Familiar no curto prazo:
    1. Vida Familiar Cotidiana
    2. Vida Social
    3. Bens Pessoais
- Bloco 2 - Situações da Vida Pessoal e Familiar no médio e longo prazo:
    1. Trabalho
    2. Empreendedorismo
    3. Grandes Projetos
- Bloco 3 - Situações do País e do Mundo em Articulação com a sua vida Pessoal e Familiar, no curto, médio e longo prazos:
    1. Bens Públicos
    2. Economia do País
    3. Economia do Mundo

Na diversidade de situações didáticas trazidas pelos 3 livros, nem todas envolvem conhecimentos matemáticos propriamente ditos. Muitas tratam de tabus ou conceitos mal

[1] O conjunto de livros foi desenvolvido, com o apoio do Instituto Unibanco, em colaboração com o GAP do CONEF e com participação do CONSED e da UNDIME, além de instituições públicas e privadas, representativas do setor financeiro.

compreendidos em ditados populares, crendices equivocadas acerca da relação entre riqueza, pobreza, felicidade e caráter. Outras levantam aspectos psicológicos da relação com o dinheiro. Enfim, **EF não coincide com matfin**. Minha análise buscou não se desviar muito dos aspectos estritamente matemáticos que foram encontrados, embora a boa interdisciplinaridade nos convide a discutir currículo adentrando aspectos comportamentais, não fingindo estar absolutamente neutros em relação às práticas dos alunos fora do ambiente escolar, o que seria uma hipocrisia.

Convém salientar que este trabalho analisou apenas o Bloco 1. Deixo o exaurimento da análise para possíveis trabalhos futuros, sejam eles continuações ou rupturas desta dissertação.

Bloco 1 – Você Aqui e Agora Na introdução do bloco (seção *O que você já sabe?*), não foram encontradas situações que envolvessem conceitos matemáticos passíveis de crítica. As únicas perguntas que valem a pena destacar para efeito de minha análise foram feitas para reflexão e propositalmente deixadas sem resposta:

Como você paga pelas coisas que compra, como roupas, eletrônicos etc.? Você sente "pena" de comprar quando paga em dinheiro vivo? E quando paga com cheque ou cartão? Sente a mesma "pena"?

Você tende a gastar menos quando tem uma nota de maior valor na carteira? Em outras palavras, o que sai da sua carteira com mais facilidade: uma nota de R$ 50,00 ou cinco notas de R$ 10,00?

Você analisa as opções de pagamento? Costuma pagar à vista ou parcelado? Se isso varia, varia em função de quê?

O primeiro par de perguntas lida com o efeito "anestésico" dos meios de pagamento diversos do dinheiro *em espécie*. A ideia passada no texto é a de que quando o consumidor entrega uma cédula, ocorre uma sensação de perda que não se verifica (pelo menos não na mesma intensidade) nas demais modalidades de pagamento. Afora questões de segurança associadas a transitar pela rua carregando “dinheiro vivo” e outras considerações de ordem prática, tais como a liquidez diminuida pelo hábito de desprezar/arredondar centavos no manuseio das “moedinhas”[2], o pagamento com cartão eletrônico, mesmo na modalidade débito, pode gerar bônus de relacionamento para o correntista, dependendo do pacote de serviços do banco emissor do cartão. Além disso, o extrato é um registro da despesa, que pode ser esquecida caso tenha sido paga em *cash*.

O segundo par de perguntas também aborda a subjetividade comportamental: se o estoque de dinheiro na sua carteira tem maior liquidez (dinheiro mais “trocado”), seu gasto é mais “indolor”? Será que uma carteira é semelhante a uma peneira, uma vez que certos elementos saem dela mais facilmente que outros?

Até aí, nenhuma das questões é do (atual) programa de matemática do Ensino Médio. Provavelmente poderemos constatar a presença desses conceitos no material didático voltado ao Ensino Fundamental, que ainda não chegou às escolas, e constam aqui com a intenção de *revisar*.

Todavia, o terceiro bloco de perguntas diz respeito aos fluxos de caixa, embora “analisar” opções de pagamento possa ser considerado um termo bastante vago.

Vida Familiar Cotidiana O primeiro conceito de interesse matemático é introduzido nessa seção: orçamento. Define-se **orçamento doméstico ou pessoal é uma ferramenta financeira, geralmente uma tabela na qual em um dos lados entra quanto você ganha (receitas) e no outro, quanto você gasta (despesas)**. Em linguagem contábil, isso é um *Demonstrativo de Receitas e Despesas* (DRD).

Se o contexto fosse de um material de Ensino Fundamental, haveria a necessidade de verificar se as operações aritméticas com números decimais receberam tratamento adequado, mas não é o caso. Não há muito o que comentar com relação a isso em um material de Ensino Médio.

Outro conceito introduzido enquanto se ensina a conduzir o levantamento das receitas e

[2]Observação: a moeda de 1 centavo deixou de ser emitida em 2004.

despesas que comporão o orçamento é a distinção entre *fixas*, *variáveis* e *eventuais*. Sugere-se que a sazonalidade observada na incidência de cada gasto sirva de critério para sua categorização.

Na sequência, por meio de uma situação-problema, introduz-se o conceito de *taxa de juros* como sendo o **preço do dinheiro**, seja para os orçamentos superavitários (poupadores/investidores), seja para os orçamentos deficitários (tomadores). Curiosamente, o par de exemplos empregado para distinguir poupadores de tomadores utilizou a periodicidade mensal para juros de 7% pagos por um empréstimo contra 8% anuais recebidos como remuneração de um montante aplicado. Não foi feita a equivalência de taxas, trazendo-as para a mesma periodicidade, o que revelaria, com essas cifras, uma diferença abissal.

Depois disso, aborda-se, ainda que superficialmente, o processo de formação (precificação) da taxa de juros, traçando analogias com insumos e impostos influenciando na formação de preços de mercadorias comuns. Veremos um problema resolvido na seção 4.4 que exemplifica essa situação.

Ainda nesse tópico, define-se o *Custo Efetivo Total* (CET), como **taxa percentual anual, que diz quanto efetivamente custa um empréstimo ou financiamento, incluindo não só os juros, mas também tarifas, impostos e outros encargos cobrados do cliente**. Em cima disso, o texto afirma que o CET é um bom parâmetro para comparar preços de empréstimos, tal como quando pesquisamos preços de outros bens e serviços. Mas vejamos a seuinte sentença: **Mas atenção: para que você utilize o CET de modo correto, é fundamental que as condições dos empréstimos pesquisados sejam iguais. Por exemplo, se em uma instituição financeira você simular um empréstimo de R$1.000,00 para pagar em 24 meses e em outra você simular um empréstimo de R$1.000,00 para pagar em 36 meses, o CET não poderá ser utilizado para compará-los, pois as condições dos empréstimos são diferentes. Seria como você comparar o preço de dois tênis diferentes.**

Há que se fazer uma ressalva aqui. Sabemos que a taxa de juros é, de fato, o parâmetro que governa as decisões racionais referentes a operações de crédito/financiamento ou investimento. Só que isso é feito mediante confronto da CET com a remuneração do capital próprio. Chamemo-la de p. Em princípio, se o capital próprio for remunerado a uma taxa p coincidente com a CET, ocorre **indiferença**, isto é, tanto faz sacar as suas aplicações para pagar o bem à vista ou pagar as prestações do empréstimo com o rendimento das aplicações que não foram sacadas. Se $p < CET$ a fluência do tempo empobrece o tomador, ou seja, quanto mais cedo o saldo puder ser zerado, melhor. E se $p > CET$, o que é raríssimo, a passagem do tempo enriquece o tomador, pois suas aplicações geram rendimentos superiores aos juros decorrentes de sua dívida. Eis aí uma oportunidade do que se conhece por **alavancagem**, que é quando um investidor explora um *spread*[3] que lhe esteja favorável para tomar recursos a uma certa taxa e aplica-los a outra que seja superior. Trata-se de uma estratégia extremamente arrojada.

Outra situação tratada nesse tópico é a da contratação de seguros. Conceitua-se sucintamente os termos: apólice, prêmio, risco, sinistro e indenização. Explica-se qualitativamente a relação crescente entre o prêmio de um seguro e o risco (probabilidade de sinistro e indenização), sem exemplificar um cálculo desses.

Fechando o tópico, uma situação-problema é proposta a partir de informações sobre uma família fictícia na qual sucedeu uma demissão inesperada. Pede-se que o aluno elabore propostas de contingenciamento, em particular mapeando o fluxo de receitas tendo em vista as ocupações dos membros da família e as respectivas sazonalidades. Trata-se de um exemplo interessante para trabalhar o conceito de fluxo de caixa que veremos na seção 4.5.

Vida Social A segunda seção repete muitos dos conselhos dados na anterior, tais como elaborar orçamentos e evitar o "empilhamento" de prestações que comprometam rendas futuras em demasia. De maior interesse matemático, observa-se apenas a distinção entre juros nominais e juros reais, mencionando que os juros reais são *deflacionados* sem, contudo,

[3]Diferença entre a taxa de captação das instituições financeiras e a taxa de empréstimo cobrada dos clientes – definição presente à página 83 (Glossário).

adentrar os detalhes que forneço no apêndice B.

Ao falar das diferentes modalidades de empréstimos, tangenciou a relação risco-retorno como justificativa da diferenciação das taxas de juros cobradas.

Bens Pessoais Sem ter feito nenhum exercício quantitativo, ao final da página 111 o material exibe os dizeres "Aprendi: (...) a calcular a diferença entre preços à vista e a prazo; a decidir se é melhor comprar à vista ou a prazo; e a diferenciar entre financiamento e empréstimo."

Já na seção seguinte, ao confrontar as decisões de financiar um computador ou poupar para compra-lo à vista, a conceituação de custo de oportunidade vem bem equilibrada entre o puramente psicológico e o estritamente contábil. Após definir custo de oportunidade como a **perda de oportunidades decorrente da decisão de deixar o dinheiro aplicado no banco** (página 113), o texto discute adequadamente a noção de que uma escolha estará sempre associada a uma renúncia. Na 119, os dizeres são: "Aprendi: (...) a tomar decisões financeiras considerando o custo de oportunidade; a equilibrar desejos e necessidades na escolha de um computador; a comparar preços; a calcular a poupança necessária para realizar uma compra."

A seção que inicia na página 120 define *spread* bancário como a diferença entre o preço que o banco cobra dos tomadores e paga aos poupadores. Está correto, mas só é útil se o aluno já dominar que "preço" se refere à taxa de juros (preço do dinheiro).

Após algumas páginas dedicadas a conscientizar o aluno, nele semeando mecanismos de defesa de cunho eminentemente psicológico, revelando o objetivo da propaganda e de como as campanhas publicitárias procuram manipular nosso comportamento, o material discorre sobre planos de telefonia e aspectos de defesa do consumidor tais como vícios de fabricação, modalidades de garantia (contratual e estendida), SAC, Procons, práticas abusivas, etc.

A seção "Traduzindo Dinheiro" traz o conceito de taxa de câmbio, explicando superficialmente a relação com a balança comercial. A causalidade fica limitada ao impacto que uma dada variação cambial possui sobre a competitividade de produtos transacionados com o mercado internacional, não ficando clara a influência que o câmbio sofre diante de fenômenos vindos desse mesmo mercado.

Concluindo, o material tem a característica de estar mais preocupado com uma linguagem jovial do que com a precisão das definições e da fixação do conteúdo por meio de listas de exercícios. Enquanto é inegável o valor dessa abordagem "informal" para evitar de espantar alunos que tenham desenvolvido bloqueios psicológicos para com a matemática, fica para o docente a incumbência de compensar, dentro do seu tempo de aula, as lacunas de conceituação e manipulação. Não é possível fugir dos cálculos para sempre. E mesmo que fosse, isso seria uma atitude inconveniente, como *confessar inverdades* de que a matemática é inacessível e/ou contornável.

Capítulo 4

Análise de Questões Tratadas em Nível de Graduação

Este capítulo aborda uma miscelânea de tópicos pertencentes ou relacionados a matfin que são lecionados em disciplinas de graduação, que organizei em seções sem a pretensão de ordena-las segundo alguma lógica natural.

As faculdades de Administração de Empresas, de Ciências Contábeis e de Economia são três das principais *clientes* de matfin, pois o objeto de trabalho dos seus egressos lida direta e intensivamente com decisões sobre antecipar ou postergar pagamentos e recebimentos. Este capítulo põe em xeque o *status* de "ensino superior" atribuído aos assuntos das seções a seguir.

4.1 Números Índices

O tópico dos *Números Índices* traz mais um jargão próprio do que conhecimento matemático em si. Embora não seja assunto tratado na maioria das ementas das disciplinas de matfin ofertadas no ensino superior (faz-se mais presente em cadeiras estatísticas), penso que seu remanejamento para o ensino médio é uma parte bastante plausível da reformulação curricular proposta nesta dissertação, a reboque da distinção entre juros nominais e reais, que detalho no apêndice B.

O conteúdo desse tema exige duas competências:

- Ser capaz de referenciar uma grandeza a um indexador (indexar); e
- Ser capaz de avaliar índices de preços[1], conhecendo sua composição.

4.1.1 Indexação

Considerando as três componentes do ensino de matemática — conceituação, manipulação e aplicações —, trata-se de uma das aplicações da operação de divisão, tendo a conceituação e a manipulação sido aprendidas no início e reforçadas no fim do ensino fundamental. Mais precisamente, desde que o aluno aprendeu que um dos conceitos de divisão é o de fazer medições e desde que tenha assimilado a manipulação (*como* dividir), ele já sabe (sem saber que sabe) indexar.

Problema: *Quantos "Big Macs" podem ser adquiridos com um salário mínimo nacional?* Dados:

- Preço de um Big Mac: R$11,00
- Salário mínimo nacional: R$880,00

Solução: Queremos saber *quantas vezes o número* 11 *cabe dentro do número* 880. Para tanto, calcula-se o quociente da divisão de 880 por 11. $\frac{880}{11} = 80$. **Resposta: 80 Big Macs.**

A escolha do Big Mac não foi por esporte. É uma forma de evidenciar que uma mercadoria qualquer pode servir de indexador, bastando seu preço não ser nulo. Em particular, o "Índice Big Mac" existe mesmo e é razoavelmente famoso, ainda que não oficial[2]. O que importa aqui

[1] Embora a nomenclatura dos índices reserve a expressão *índices de preços* para aqueles que se destinam a acompanhar a inflação de alguma cesta de produtos e/ou serviços, estou empregando o termo em sentido mais amplo. Por exemplo, o Ibovespa não deixa de ser um índice de preços, já que as cotações das ações negociadas na Bolsa de Valores são, de fato, preços.

[2] Foi criado pela revista *The Economist* em 1986, tendo como objectivo comparar o poder de compra de moedas correntes com o do dólar americano, mediante o cálculo da razão entre os preços do Big Mac nos Estados Unidos e no país da moeda em estudo. `http://www.economist.com/content/big-mac-index`

é identificar a habilidade matemática requerida para indexar o salário mínimo nacional ao Big Mac, interpretando, ato contínuo, o resultado. A saber, basta "medir o salário na unidade Big Mac", e como consequência, ser capaz de deduzir que se o preço desse sanduíche subir, por exemplo, para R$15,00, o salário mínimo não será mais capaz de adquirir 80 unidades, a não ser que seja reajustado para $80 \times \text{R\$}15,00 = \text{R\$}1.200,00$. Em outras palavras, o preço indexado de 80 é uma constante de proporcionalidade, pois o *valor de face* que preserva o poder de comprar Big Macs é $80b$, onde b é o preço unitário do sanduíche.

4.1.2 Índices de preços — Estrutura e Variação

Um índice (ou indicador) de preços é, via de regra, uma média aritmética dos preços relativos, ponderada pelos valores monetários das quantidades negociadas. Por exemplo, considere uma família (que chamarei de Borges) com a seguinte lista de compras:

Descrição	Quantidade	Preço unitário	Valor
Pão-de-forma	5	5,99	29,95
Azeite	9	8,99	80,91
Refrigerantes 2 litros	11	4,50	49,50
Totais (volumes, média e soma)	25	N/A	160,36

Tabela 4.1: Exemplo de uma lista de compras

Podemos criar um índice de preços para os Borges. Um candidato simplório seria o "preço unitário médio" onde consta o N/A da tabela 4.1. Dividindo o valor total da cesta (160,36) pelo total de itens (25), encontramos 6,4144. Trata-se de um número representativo dos preços em geral, cujo propósito é permitir estimar a variação do "custo-de-vida", quando variarem os preços dos diversos itens que compõem a cesta.

Digamos que, no mês seguinte, os Borges tenham demandado quantidades diferentes e que os preços tenham mudado:

Agora o preço unitário médio é $\frac{132,52}{20} = 6,626$. A razão entre os índices, do novo para o velho, é $\frac{6,626}{6,4144} \approx 1,033$. Desta forma, nosso índice, candidato a *nível Borges de preços*,

Descrição	Quantidade	Preço unitário	Subtotais
Pão-de-forma	3	6,99	20,97
Azeite	5	11,99	59,95
Refrigerantes 2 litros	12	4,30	51,60
Totais (volumes, média e soma)	20	N/A	132,52

Tabela 4.2: A mesma lista de compras, um mês depois

cresceu $3,3$ em relação ao mês anterior[3].

Entretanto, é fácil sofisticar o índice mediante emprego de preços relativos e, com isso, eliminar problemas decorrentes da particular unidade de medida que tenha sido usada. Para tanto, indexamos os preços unitários dos produtos da cesta a algum valor de referência.

Existe um grande leque de índices de preços na economia. Para mais detalhes, recomendo ler [4, p. 75-79].

É comum, na imprensa, confundir um indicador com sua variação. Por exemplo, ao ler que a inflação de setembro último, medida pelo IGP-M, foi de 0,95%, ouvimos as pessoas dizerem tanto que "o índice *avançou* 0,95%" como também que "o índice *foi de* 0,95%". Correto mesmo é a primeira escrita, enquanto que a segunda comete uma imprecisão. O mesmo deslize ocorre quando a expressão "índice de reajuste" é interpretada como a porcentagem de reajuste, em vez da própria série numérica de números índices. Se for dado um comando para sublinharmos o índice de reajuste na frase "Os aluguéis foram reajustados em 5%, bem abaixo do IGPM.", embora a maioria sublinhe "5%", o certo é sublinhar a sigla "IGPM".

Porém esse uso ambíguo de termos não chega a causar confusão porque o valor do índice é irrelevante quando tomado isoladamente em dado momento. A tendência é o uso de **índices base móvel**, isto é, a razão entre um índice e seu antecessor. Atentemos para o caso do Ibovespa, medido em pontos, onde se tem acesso às duas coisas. O valor do índice da bolsa de valores não representa nenhuma das cotações das ações que o compõem, mas a razão entre os pontos calculados ao final de dois pregões consecutivos é que possui relevância para os investidores. Tanto é assim que, por razões operacionais, o valor absoluto do índice

[3] Minhas razões para evitar de escrever "cresceu 3,3%" estão postas no apêndice A.

foi ajustado em diversos momentos de sua história[4]. Vejamos os pontos dos últimos dois pregões do ano passado[5]: 43.653,97 pontos em 29/12/2015 e 43.349,96 em 30/12/2015. O que importa para o mercado é a variação de $-0,70\%$. Assim, se alguém disser que o último Ibovespa de 2015 foi $-0,7\%$, pedir para corrigir a frase será tomado como uma “picuinha”.

O PIB (Produto Interno Bruto) é um caso à parte porque seu valor absoluto, desde que tenha sido obtido com metodologia padronizada, é útil para comparar os tamanhos relativos de duas ou mais economias nacionais, em dado momento. O PIB existe nas versões *nominal* (PIB em valores correntes) e *real* (PIB em valores constantes/deflacionados), valendo a Fórmula de Fischer do apêndice B, sendo que o PIB real, em base móvel, mede o crescimento econômico no período.

Já que se abordou o tema dos números índices, é de bom alvitre que se mencione algo sobre as fórmulas de Laspeyres, Paasche, Fischer e Marshall–Edgeworth, pois são cadeira cativa em todos os cursos desse tópico. As duas primeiras são ponderações das variações de preços a quantidades constantes[6]. Vejamos como elas funcionariam no exemplo da família Borges:

- **Laspeyres** $P_L = \frac{\sum q(0)p(1)}{\sum q(0)p(0)} = \frac{5\times 6{,}99+9\times 11{,}99+11\times 4{,}3}{5\times 5{,}99+9\times 8{,}99+11\times 4{,}5} = \frac{190{,}16}{160{,}36} \approx 1,186$
- **Paasche** $P_P = \frac{\sum q(1)p(1)}{\sum q(1)p(0)} = \frac{3\times 6{,}99+5\times 11{,}99+12\times 4{,}3}{3\times 5{,}99+5\times 8{,}99+12\times 4{,}5} = \frac{132{,}52}{116{,}92} \approx 1,133$

Enquanto que o índice de Laspeyres fixou as quantidades iniciais para ponderar as variações de preço de cada item, chegando a uma inflação de 0,0556, o de Paasche fixou os pesos nas quantidades finais, obtendo 0,1194 de aumento. A literatura reconhece que o cálculo de Laspeyres tende a superestimar a inflação e que o de Paasche tende a subestima-la[7], razão

[4]Em `http://www.bcb.gov.br/?SERIESTEMP`, pode-se verificar divisões por 10 em janeiro de 1990, junho de 1991, janeiro de 1992, janeiro de 1993, agosto de 1993, fevereiro de 1994 e março de 1997.

[5]`http://economia.uol.com.br/cotacoes/bolsas/?historico`

[6]Existem os mesmos índices com a ótica inversa (variação de quantidades a preços constantes), mas servem a propósitos mais relacionados com conceitos econômicos ligados à elasticidade-preço e fogem ao escopo deste trabalho.

[7]A explicação é óbvia: as quantidades demandadas tendem a cair quando os preços aumentam, mantida a renda. Penso que uma boa reforma curricular traria fatos como este para o ensino médio. Em particular, um pouco de micro e macroeconomia poderia compor uma disciplina que sugiro chamar de *Noções Introdutórias de Economia*.

pela qual surgiram tentativas de mediar os dois índices. Daí é que surgem as duas últimas fórmulas citadas acima: de Fischer e de Marshall–Edgeworth. O índice de Fischer é a média geométrica entre os de Laspeyres e Paasche. Já o de Marshall–Edgeworth tenta cancelar as tendências inerentes a Laspeyres e Paasche fazendo os pesos da ponderação serem a média aritmética das quantidades iniciais e finais.

- **Fischer** $P_F = \sqrt{P_L \times P_P} = \sqrt{1,186 \times 1,133} \approx 1,159$
- **Marshall–Edgeworth**[8] $P_{ME} = \frac{\sum \overline{q}p(1)}{\sum \overline{q}p(0)} = \frac{8\times 6{,}99+14\times 11{,}99+23\times 4{,}3}{8\times 5{,}99+14\times 8{,}99+23\times 4{,}5} = \frac{322{,}68}{277{,}282} \approx 1,164$

Tudo isso pode ser feito em planilhas eletrônicas com extrema facilidade, pois envolve apenas somatórios, multiplicações, divisões e médias. Seria um belo trabalho de pesquisa já no ensino fundamental, mas caso venha a ser acoplado à distinção entre juros nominais e reais dentro de uma unidade didática, creio que o Ensino Médio seja mais apropriado. Contudo, cabe observar que os institutos de pesquisa que coletam as informações diretamente da atividade econômica dão preferência ao cálculo de Laspeyres, pois é muito custoso o acesso às quantidades de fim de período em tempo hábil para compor o índice. É bem mais prático e barato trabalhar com as quantidades fixadas no início de cada período, atualizando apenas os preços. E se o cálculo de Paasche já apresenta inconvenientes de ordem prática, os de Fischer e de Marshall-Edgeworth mais ainda, pois envolvem cálculos que conjugam as informações de Laspeyres e Paasche.

4.1.3 Inflação e Poder de Compra

Quando a imprensa noticia uma taxa de inflação, frequentemente a notícia vem acompanhada de uma frase equivocada que dá uma noção deturpada do significado da inflação. Ouve-se coisas como "O índice IPCA avançou 8% no último mês, o que significa que os brasileiros poderão comprar 8% menos bens e serviços...". Sim, a inflação diminui o poder

[8]Embora o enunciado seja trabalhar com a média aritmética $\overline{q} = \frac{q(0)+q(1)}{2}$, é mais prático cancelar o fator $\frac{1}{2}$ e trabalhar com pesos iguais a $2\overline{q} = q(0) + q(1)$.

de compra da moeda, mas a taxa de inflação não coincide numericamente com a redução da capacidade de aquisição de bens e serviços percebida por um dado salário que não teve variação no período considerado. É fácil perceber isso usando uma taxa de 100% de inflação, o que corresponde a dobrar os preços, ao passo que uma queda de 100% no poder de compra significaria aniquilar completamente a capacidade de pagamento.

Vamos agora estabelecer uma relação geral, partindo de definições precisas:

- **Taxa de inflação** (i) — mede o aumento geral de preços de certa cesta de produtos em determinado período.

- **Queda do poder de compra da moeda** ($\frac{\Delta q}{q}$) — é a perda relativa das quantidades que podem ser adquiridas por um salário constante, decorrente do processo inflacionário.

Se arbitrarmos como unitário o nível geral de preços em um instante t_0, os salários coincidirão com as quantidades que são capazes de adquirir. Se for i a taxa de inflação medida no decorrer do período que vai de t_0 até t_1, os preços subirão para $1+i$ e a quantidade acessível cairá de q_0 para $q_1 = \frac{q_0}{1+i}$. A perda relativa é dada por

$$\frac{\Delta q}{q} = \frac{q_0 - q_1}{q_0} = 1 - \frac{q_1}{q_0} = 1 - \frac{1}{1+i} = \frac{i}{1+i}$$

Uma pergunta natural que poderia ter surgido ainda antes da dedução que fizemos acima é se é possível a taxa de inflação coincidir com a perda do poder aquisitivo, para algum valor de i. Substituindo $\frac{\Delta q}{q} = i$ na fórmula que encontramos, fica $i = \frac{i}{1+i} \Leftrightarrow i = 0$. Portanto, só se a inflação for nula!

Por fim, cabe observar que a equação obtida acima, que expressa a perda do poder de compra em função da taxa de inflação, é a mesma que relaciona a taxa de juros com a taxa de desconto de que trata a subseção 4.2.1.

4.2 Sobre os Cálculos "Por Fora"

Dentre os muitos conceitos trabalhados em matfin, um dos mais elementares é o de juros/descontos comerciais, também chamados bancários ou "por fora". Trata-se, por exemplo, de comparar um lucro/prejuízo com o valor da receita, no lugar de compara-lo com a despesa, que é o valor investido.

Exemplificando, se um bem foi adquirido por R$40,00 e revendido por R$50,00, o lucro de R$10,00 corresponderia a 0,2 do preço de venda. Desta forma, problemas de "lucro sobre a venda" são como juros por fora.

Isso é feito em oposição à comparação dos R$10,00 de lucro com os R$40,00 investidos, o que refletiria um *rendimento* de 0,25. A esse rendimento sobre a compra corresponderiam os juros racionais ou "por dentro". O apelo geométrico dessas expressões se materializa na figura 4.1.

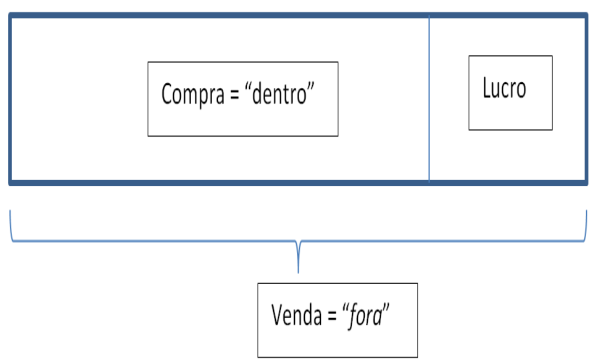


Figura 4.1: Lucro sobre compra (por dentro) e sobre venda (por fora)

Faz-se necessário ressalvar que, quando uma revenda é feita com prejuízo, o mnemônico derivado da figura 4.1 não funciona, pois o "por fora" fica interno e o "por dentro" externo, trocando, pois, de posição. Contudo, não devemos confundir as situações de prejuízo com a de desconto, na qual o mnemônico volta a funcionar.

Resumindo, o termo "por fora" indica que o valor final de uma transação é tomado como um inteiro. Quando o inteiro é definido como o valor inicial da transação, usa-se a expressão "por dentro".

Cabe observar que, quando é o caso de incidência de impostos, o valor inicial é o valor sem o imposto e o final é a soma deste com o imposto devido. O exemplo clássico é o do ICMS (Imposto Sobre Operações Relativas à Circulação de Mercadorias e Sobre Prestações de Serviços de Transporte Interestadual e Intermunicipal e de Comunicação). A alíquota do ICMS incide sobre o total da nota, já incluído o próprio tributo. A tabela 4.3 mostra essas alíquotas variando conforme o estado. Fazendo as contas para o Rio de Janeiro, por exemplo, o verdadeiro (racional) ICMS é de $\frac{19}{100-19} \approx 0,2346$. A quem interessaria exibir uma alíquota significativamente menor que a efetiva, valendo-se inclusive da multiplicação por 100 que é feita ao apresentar essa alíquota sob a forma de percentagem? Seria uma jogada de *marketing*?

Estado	Alíquota comercial	Alíquota real	Ganho de Marketing
Rio de Janeiro	19%	23,46%	4,46%
SP, MG e PR	18%	21,95%	3,95%
Demais estados	17%	20,48%	3,48%

Tabela 4.3: ICMS – alíquotas nominal, real e diferença.

4.2.1 Adiantamento de recebíveis

Uma das rotinas mais frequentes no comércio é vender mercadorias aceitando "cheques pré" como pagamento e, em seguida, levar esses cheques a uma instituição financeira que compra esses recebíveis do lojista, por um valor inferior ao do cheque. Dá-se o nome de deságio à diferença entre o valor do cheque e os recursos adiantados ao lojista.

Ora, do ponto de vista da instituição financeira, o investimento é o valor antecipado ao lojista. Arbitremo-lo unitário, de modo que, se a taxa de juros for chamada de i, o deságio também terá esse valor, e portanto o resgate do investimento será $q = 1 + i$. A taxa de desconto comercial, ou “por fora” é dada por

$$\frac{i}{q} = \frac{i}{1+i}$$

É exatamente a mesma relação, conhecida como **assimetria**, que vimos na subseção 4.1.3, valendo as mesmas conclusões lá firmadas. Em particular, podemos afirmar que as taxas de juros e de desconto comercial só podem coincidir se forem nulas.

Levando tudo isso em conta, considero inadequado dedicar grandes quantidades de carga horária para garantir que os alunos sejam capazes de resolver problemas associados a essas convenções. Quero, com isso, dizer que se trata de definições desnecessárias. Bastaria confiar na capacidade de interpretação de textos dos alunos, que, diante de problemas enunciados corretamente em língua portuguesa, sem ambiguidades ou terminologias excessivamente rebuscadas, teriam êxito em distinguir o que se pede.

Mais ainda, face à necessidade de se escolher com qual das modalidades ficar, a opção natural é a que toma por base o valor investido. Tanto é assim que, na ausência de menção em contrário, subentende-se um “lucro de 0,25” como sendo 0,25 “por dentro”.

4.3 Divisão Proporcional e Regra de Sociedade

O problema de dividir uma certa quantidade em partes proporcionais é de uma simplicidade tal que sua presença em uma dissertação de mestrado causa estranheza. Porém mais inusitada ainda é a necessidade de essa dissertação discutir o conceito porque muitos livros de matfin adotados em cursos superiores empregam uma noção **errada** de divisão proporcional. Mais especificamente, esses livros ensinam ser possível dividir uma quantidade fixada em partes diretamente proporcionais aos termos correspondentes de duas ou mais listas ordenadas distintas, mesmo que essas listas não sejam diretamente proporcionais entre si.

Preliminarmente, resolvamos o seguinte:

Problema: *Divida* R\$120,00 *em partes (diretamente*[9]*) proporcionais a* 2*,* 3 *e* 7*.*

Solução: As partes devem ser escritas como $2k$, $3k$, e $7k$, onde k é uma *constante de proporcionalidade*. Logo $2k + 3k + 7k = 120 \Rightarrow 12k = 120 \Rightarrow k = 10$. Portanto, as partes são $2k = 20$, $3k = 30$, e $7k = 70$. **Resposta: R\$20,00, R\$30,00 e R\$70,00.**

Existem outras formas de resolver o problema acima, embora nenhuma tão sucinta quanto a que acabou de ser apresentada. Mesmo assim, quero incluir uma figura geométrica que apela para o Teorema de Tales e o método de divisão de segmentos de reta conhecido, no Desenho Geométrico, como *Feixe de Paralelas*.

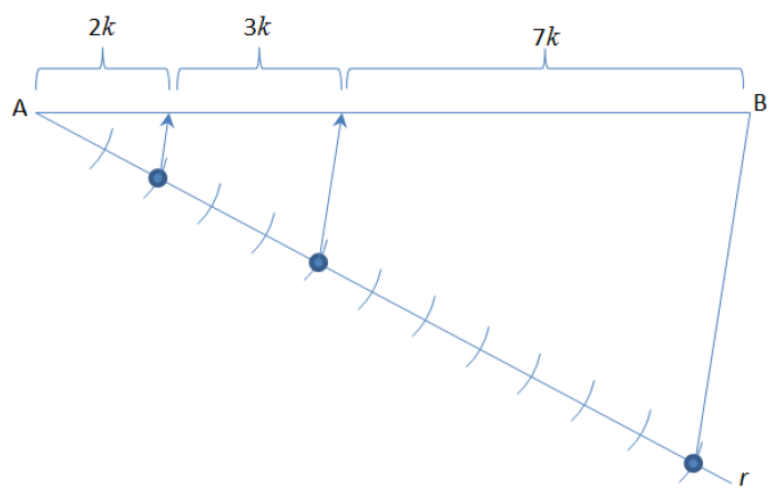


Figura 4.2: Divisão Proporcional com Feixe de Paralelas

A construção geométrica da figura 4.2 destina-se a dividir o segmento AB tal como foram repartidos os R\$120,00 do problema proposto antes. Traça-se uma reta auxiliar r a partir do ponto A e, sobre essa reta, marca-se 12 (pois 2+3+7=12) distâncias iguais e consecutivas, salientando os dois pontos que separam 2, 3 e 7 dessas distâncias. Em seguida, traça-se o

[9]Quando não estiver especificado o contrário, subentender-se-á proporção direta. No escopo desta dissertação, a proporção inversa não merece mais do que o presente comentário, no qual se esclarece que, dados dois números não nulos A e B, dizer que A é *inversamente proporcional* a B é o mesmo que dizer que A é diretamente proporcional ao inverso de B.

segmento de reta que une a 12ª marcação ao ponto B. Por fim, constrói-se, passando pelos marcadores que foram salientados, paralelas a esse segmento. Pelo Teorema de Tales, onde essas paralelas intersectarem AB (são os extremos das "setas"), ali ficarão os delimitadores homólogos, separando, nesse caso, três segmentos adjacentes cujas medidas são $2k = \frac{2AB}{12}$, $3k = \frac{3AB}{12}$ e $7k = \frac{7AB}{12}$.

Penso que essa construção é fundamental para uma assimilação perene desse tópico. A mim, foi apresentada quando eu estava na sétima série, que hoje corresponderia ao oitavo ano. Digo isso para que não haja dúvida de que esse conteúdo é plenamente accessível a alunos de Ensino Fundamental. Por muito mais forte razão, não há motivos para acreditar que um público de Ensino Médio teria dificuldades de maturidade para entende-lo como uma forma clara e elegante de justificar as contas que são feitas para repartir valores monetários em partes proporcionais.

Indo além, se essa fundamentação geométrica fosse empregada no momento certo, provavelmente não haveria espaço para que perdurasse a seguinte aberração, conhecida como **divisão proporcional simultânea**:

(Pseudo)Problema: *Divida* R\$120, 00 *em partes que sejam proporcionais a* 3 *e* 7*, e também (ao mesmo tempo, simultaneamente, etc.) proporcionais a* 7 *e* 3.

(Pseudo)Solução: Multiplique os números correspondentes das duas listas: $3 \times 7 = 21$ e $7 \times 3 = 21$. Agora divida R\$120,00 em partes proporcionais a 21 e 21. **Resposta: R\$60,00 e R\$60,00.**

Alguma pergunta? Vamos momentaneamente ignorar que, com 3 e 7 apenas, já podíamos pensar em partes de 36 e 84, nesta ordem. Mas ao mesmo tempo, as partes devem ser as mesmas na ordem contrária, pois a outra lista é 7 e 3. Portanto, uma solução salomônica seria dividir em partes iguais! Então os primeiros 60 estão para 3 assim como os outros 60 estão para 7, e vice-versa (Claro! Se 3=7 então 7=3.). Nem Picasso conseguiria conciliar isso.

Não pretendo continuar tripudiando sobre o ridículo dessa situação, mas qualquer aluno com um mínimo de compreensão do próprio objetivo[10] de dividir em partes proporcionais recusaria qualquer partição na qual a segunda parte fosse simultaneamente maior e menor que a primeira, antes mesmo de executar a receita de bolo que viesse a ser proposta.

Voltando ao que é matematicamente correto, uma quantidade só poderia ser dividida em partes simultaneamente proporcionais aos números $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ e $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ se ocorresse $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}$ (novamente o Teorema de Tales!). E, para que dividir em partes proporcionais a $(a_1b_1, a_2b_2, \ldots, a_nb_n)$ fosse a solução, seria necessário que $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ e $b_1 = b_2 = \cdots = b_n$, ou seja, que estivéssemos dividindo em partes iguais!

A "divisão proporcional simultânea" pretende decorrer do conceito de **grandeza proporcional a várias outras**, que é um dos métodos de resolver regras de três compostas. Uma grandeza y é proporcional a várias outras $(x_1, \ldots, x_n)$ se ela é proporcional a cada $x_i; i = 1, \ldots, n$ quando os demais $x_j; j \neq i$ são mantidos constantes. E essa exigência de manter constantes as demais grandezas inviabiliza, no caso geral, a simultaneidade pretendida, fato que passou despercebido pelos autores dos livros didáticos que ensinam esse procedimento de "multiplicar as listas".

Agora, pondo de lado a terminologia infeliz, a rotina a que se destina tal procedimento é um caso particular da chamada **regra de sociedade**, que versa sobre como repartir valores entre sócios, o que pode suceder ordinariamente no decorrer da atividade empresarial ou numa eventual dissolução da sociedade.

Segundo essa regra[11], o quinhão de cada sócio é proporcional ao produto do seu capital inicial pela duração de sua permanência na sociedade, em alguma unidade de tempo. Por exemplo[12], se uma pessoa A fundou uma empresa com R$40.000,00 e, passados 5 meses,

[10] Em Desenho Geométrico, geralmente se ensina a dividir segmentos em partes iguais antes de dividir em partes proporcionais. Uma coisa é preparação para a outra. Infelizmente, nos cursos de matfin não há tempo, nem se vê utilidade, em dividir quantias em partes iguais antes de faze-lo em partes desiguais.

[11] Em [9, p. 66], cita-se o compêndio tradicional *Aritmética Progressiva*, de Antonio Trajano, como um bom exemplo de livros antigos que traziam a distinção entre a regra de sociedade *simples* e *composta*. Na composta, os sócios entram no projeto com capitais distintos e permanecem na sociedade por tempos distintos, o que não significa que a partilha se dê em partes simultaneamente proporcionais às componentes de tempo e de capital tomadas separada e independentemente.

[12] Curiosamente, todos os exemplos da literatura que encontrei envolvem 3 sócios, nem mais nem menos. Escapa-me a conveniência disso. Ao contrário, creio ser mais fácil assimilar a dinâmica societária com apenas

admitiu um sócio B que investiu R$15.000,00, que proporção caberá a cada um se a firma for dissolvida após 1 ano de existência? Resumindo em unidades mais simples, o "vetor (capital, tempo)" de A pode ser escrito como (40 mil, 12 meses) e o de B como (15 mil, 7 meses). Portanto, a parte de A estaria para 40×12 assim como a de B estaria para 15×7.

Ocorre que isso também não corresponde à realidade. Na vida real, o certo é avaliar o patrimônio líquido da firma por ocasião do ingresso de B, pois o valor relativo dos R$15mil que ele aportou não pode ser presumido coincidente com o valor relativo dos R$40mil com os quais A fundou a empresa.

E como é na prática? No caso de firmas brasileiras, a unidade de valor da empreitada é a *ação* (se for S.A.[13]) ou a cota (ou quota, se for Ltda.[14]). Digamos, só para fixar ideias, que:

- A constituiu uma S.A.[15], com capital social representado por 40.000 ações, que valem R$1,00 cada no momento da fundação.
- Após 5 meses, a empresa evoluiu a ponto de o valor unitário das ações subir para R$1,50.

Nessas condições, o sócio B entrou com uma participação equivalente a 10.000 ações. Daí em diante o "mapa de capital" exibe 4 ações de A para cada ação de B, e qualquer distribuição de resultados seguirá essa razão.

A realidade se distancia ainda mais da regra de sociedade, que lineariza o efeito-tempo, ao consideramos companhias de capital aberto. Com ações listadas em bolsa, os sócios da firma mudam a cada instante em que uma ordem de negociação é executada. É impossível, portanto, calcular por quanto tempo cada indivíduo foi acionista da empresa. Ademais, os dividendos e os juros sobre capital próprio são pagos *per share*, isto é, por ação detida no

2 sócios.

[13] A Lei das Sociedades por Ações ("Lei das S.A.") é a Lei nº 6.404, de 15 de dezembro de 1976.

[14] As Sociedades por Cotas de Responsabilidade Limitada são regidas pelo Novo Código Civil (NCC), Lei nº 10.406, de 10 de janeiro de 2002.

[15] Na verdade, para constituir uma empresa não-individual, é requerido haver mais de um sócio. Muitos empresários contornam essa exigência usando o nome do cônjuge como sócio minoritário. Aqui, só para preservar a simplicidade do exemplo, podemos pensar em A como sendo um desses casais.

momento da distribuição. Assim sendo, além de inacessível, o tempo pelo qual o portador deteve a ação é irrelevante. Pior ainda, se houver ações ordinárias e preferenciais, pode acontecer que as preferenciais recebam remuneração maior que as ordinárias.

Por todo o exposto, ao apelo feito em [9, p. 67], acrescento a recomendação de que o tópico inteiro da regra de sociedade seja suprimido ou reformulado para, numa possível ementa de OSPB, incluir noções de Lei das S.A. e das disposições do Código Civil sobre sociedades limitadas.

4.4 Precificação de Juros e Inadimplência

Lê-se muito no jornal sobre o dilema existente entre as taxas de juros dos empréstimos e os níveis de inadimplência dos tomadores. Especula-se sobre a relação de causalidade[16] entre um parâmetro e outro, à semelhança do que se diz sobre impostos e sonegação: *a sonegação é incentivada pela carga tributária, que por sua vez aumenta para compensar a sonegação que ela mesma induziu.*

Um modelo simplificado da formação de taxas de juros despreza a influência do nível dessa taxa sobre a probabilidade de inadimplência de um determinado público. Segue abaixo uma situação-problema típica.

Problema: *Um banco capta recursos com custo de* $1,7\%$ *para uma carteira comercial na qual a probabilidade de inadimplência dos tomadores foi estimada em* 4%*. Qual deve ser a taxa de juros cobrada nos empréstimos oferecidos a esse segmento a fim de que o lucro da carteira seja de* 12%*?*

Solução: Para cada R$1,00 captado no início do período e emprestado à base de clientes, sabemos que R$0,04 vão "para o ralo", pois estão sendo entregues aos que darão o *calote*,

[16]Sob a promessa de quebrar o ciclo vicioso no qual as altas taxas de juros e a inadimplência se alimentam mutuamente, foi instituído o **Cadastro Positivo**, parcialmente copiado do modelo estadunidense (*credit history*), a fim de dar a clientes com "bons históricos" acesso a taxas de juros menores. Teoricamente, sem tal dispositivo, bons pagadores pagam mais caro para subsidiar os maus pagadores, em argumento semelhante ao que se usa para justificar, por exemplo, que os ingressos do cinema são bem mais caros do que seriam se não houvesse tantos benefícios de meia-entrada.

restando R$0,96 nas mãos dos que efetivamente pagarão suas dívidas. Ainda com relação a esse R$1,00 captado, ao final do período, o banco deve *lucrar* $0,12$ *do investimento* (i.e., lucrar 12%), mesmo pagando R$1,017 aos credores da carteira. Para tanto, deve receber $1,017 \times 1,12 = 1,13904$. Logo, chamando de q o multiplicador procurado, temos $0,96q = 1,13904 \therefore q = 1,1865$. **Resposta: 0,1865 (ou 18,65% caso se prefira).**

A questão acima foi adaptada a partir de outra (com números mais realistas e menos "fatoráveis") que foi trabalhada na disciplina de Administração Financeira, 6º período do curso de Administração de Empresas de uma universidade em funcionamento na cidade do Rio de Janeiro. Honestamente, qual é o conhecimento de nível superior exigido para apresentar a solução acima?

Ainda que se diga que, sendo x a taxa de juros que se busca cobrar, a probabilidade de inadimplência seja uma função $f(x)$ dessa taxa, a equação que soluciona o problema acima não deixa de ser[17] $(1+x)(1-f(x)) = (1+c)(1+l)$, onde c é o custo de capital e l é a lucratividade. A não ser que a lei da função f seja complicada a ponto de impedir sua manipulação por estudantes em torno dos 16 anos de idade, o problema da formação de preços aqui estudado pode ser tratado no Ensino Médio com relativa tranquilidade, sobretudo considerando seu grande potencial de suscitar interesse genuíno nos alunos. E não é esse modelo mais completo[18] que é tratado na graduação, mas sim o simplificado que ilustrei antes!

[17] É necessário insistir que a escrita das sentenças matemáticas seja feita da forma mais visualmente simples possível. Nesse sentido, e para promover maior conexão com o conteúdo das progressões geométricas, a mesma equação deveria ter sido escrita como $qg(q) = CL$, onde $q = 1+x$, $C = 1+c$, $L = 1+l$ e $g(q) = 1 - f(x)$ é a probabilidade de ocorrer o pagamento em vez de não ocorrer.

[18] Uma modelagem ainda mais sofisticada levaria em conta as tentativas de **recuperação de créditos**, nas quais as Instituições Financeiras buscam reaver parte das dívidas perdidas junto a clientes inscritos em cadastros como SPC e Serasa, oferecendo-lhes a oportunidade de quitação integral dos débitos, e consequentemente *limpar o nome na praça*, mediante pagamento parcelado com descontos generosos.

4.4.1 Inadimplência e Contabilidade Bancária

A título de informação, existe uma norma que emula a probabilidade de inadimplência. A Resolução CMN nº 2.682, de 21 de dezembro de 1999[19], está no coração da contabilidade bancária, pois explicita porcentagens para PCLD (Provisão para Créditos de Liquidação Duvidosa) a serem aplicadas nos ativos das instituições financeiras em função da classificação de risco de cada operação de crédito, que por sua vez é atribuída adotando como principal critério o atraso nos pagamentos previstos. São nove extratos de risco de crédito, de "AA" a "H". Vejamos três camadas, sendo duas extremas e uma que não seja "nem 8 nem 80":

- Empréstimos que estão *em dia* são classificados como tendo "nível 'AA' de risco de crédito" e não são provisionados, como se fosse nula a probabilidade de virem a tornar-se inadimplentes;

- Créditos com atraso superior a 180 dias, salvo exceções previstas na norma, são classificados como tendo "nível 'H' de risco de crédito" e devem ser integralmente provisionados, como se houvesse a certeza do "calote"; e

- Créditos com atraso entre 91 e 120 dias (aplicadas as mesmas ressalvas do item acima) são classificados como tendo "nível 'E', no mínimo, de risco de crédito" e $\frac{3}{10}$ de seu valor são provisionados.

Provisionamentos parciais (níveis de risco de A a G), devem ser entendidos não como um indivíduo honrando parte de sua dívida e deixando de pagar a outra parte, mas sim como um subconjunto daquele extrato quitando integralmente suas respectivas dívidas e o complementar desse subconjunto não pagando nada, tal como no problema de precificação de juros que resolvemos nesta seção 4.4.

As porcentagens de provisionamento da norma obedecem ao princípio contábil conhecido como **prudência**, o que significa que estimativas devem ser mais conservadoras do que a realidade, superestimando a probabilidade de inadimplência. Tomando o nível "E" como

[19] `http://www.bcb.gov.br/pre/normativos/res/1999/pdf/res_2682_v2_L.pdf`

exemplo, a norma entende ser suficientemente prudente provisionar 0,3 dos créditos, cobrindo as perdas da carteira "com alguma folga". Se a probabilidade efetiva fosse conhecida, seria possível calcular o *valor esperado* do retorno relativo àquele extrato da carteira de clientes. Eis aí um belo exemplo motivador para introduzir o conceito de **expectância** no Ensino Médio.

4.5 Fluxos de Caixa e Séries de Pagamentos

O ponto culminante de matfin da maioria dos trabalhos, livros, apostilas, etc, é o momento em que as fórmulas de somas de progressões geométricas, finitas e infinitas, são escritas de frente, de lado, em cores, com som, e com todas as variações que a imaginação humana puder inventar para apresentar múltiplas versões de uma mesma fórmula, como se fossem coisas muito diferentes[20].

Vejamos o que extraí de [18, p. 45-64]. São quatro definições:

- **Fator de Acumulação de Capital (FAC):** $FAC(i,n) = \frac{(1+i)^n-1}{i}$
- **Fator de Formação de Capital (FFC):** $FFC(i,n) = \frac{i}{(1+i)^n-1}$
- **Fator de Valor Atual (FVA):** $FVA(i,n) = \frac{(1+i)^n-1}{(1+i)^n \times i}$
- **Fator de Recuperação de Capital (FRC):** $FRC(i,n) = \frac{(1+i)^n \times i}{(1+i)^n-1}$

A segunda é o inverso da primeira e a quarta é o inverso da terceira. Além disso, introduzindo a razão $q = 1 + i$, percebemos que a primeira é q^n vezes a terceira. Logo, as quatro fórmulas ficam reduzidas a uma só. E se a primeira for escrita como $FAC(q, n) = \frac{q^n-1}{q-1}$, ficará fácil ver que as ferramentas do Ensino Médio são suficientes para que adolescentes

[20]Houve uma escola em que trabalhei que dispensava seus alunos de decorar fórmulas matemáticas e fornecia-lhes um resumo chamado *formulae sheet*, um "formulário" no sentido mais literal da palavra. Porém havia exageros, tais como a fórmula $\cos\theta = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, na seção da Lei dos Cossenos onde, é claro, também constava $a^2 = b^2+c^2-2bc\cos\theta$. A meu ver, isso denota que a escola presume um grave nível de incompetência do alunado.

possam resolver questões que são propostas em exames de 4º a 6º período em faculdades de economia, administração, contabilidade, etc.

É importante repisar que o ponto desta dissertação não é mostrar as definições e demonstrações da teoria de matfin, principalmente as deste tópico, que figura na quase totalidade dos trabalhos desenvolvidos neste tema[21]. Ao contrário, a bem da objetividade, o foco é mostrar que as habilidades matemáticas demandadas de alunos do ensino superior estão presentes no Ensino Médio, no 1º ou no 2º ano dependendo do planejamento curricular adotado por cada escola.

No capítulo 1, fiz referência à minha passagem pela rede estadual de ensino, onde ensinei matfin para um público de jovens e adultos no turno da noite. Geralmente, as situações-problema mais motivadoras eram de aquisição parcelada de bens, com Tabela Price. Utilizei a abordagem que foi estudada em minha monografia de fim de curso da licenciatura ([12]), que chamo de **tabela de acompanhamento do saldo devedor**, organizando as informações em uma planilha eletrônica conforme exemplificado na figura 4.3.

Os valores particularizados na figura 4.3 ilustram um estudo sobre pagamento de IPTU (Imposto Predial e Territorial Urbano) para o qual foi concedido desconto de 0,07 em caso de quitação integral à vista, versus pagamento em 10 prestações mensais sucessivas, vencendo a primeira na mesma data que a cota única. Isto é, o contribuinte decide se é melhor pagar 0,93 no mês 1 ou pagar 0,1 nos meses de 1 a 10. Usando a função *Atingir meta...* do Microsoft Excel (menu "Dados > Teste de Hipóteses" na versão 2010 do Office Standard), obtemos um fator de indiferença de 1,016508. Se o capital próprio do contribuinte for remunerado com fatores mensais maiores que esse, vale a pena parcelar mantendo o dinheiro aplicado. Do contrário, melhor quitar à vista.

Análise similar pode ser feita com encartes de lojas de eletrodomésticos, mobília, etc, estruturando planilhas com uma coluna "Mês" contando as prestações, uma coluna "Dívida antes" abrigando os saldos devedores imediatamente antes do pagamento da parcela respec-

[21]Exemplos de TCCs que abordaram SAC e Tabela Price com o devido cuidado são [7] e [6]. De modo mais abrangente, um excelente resumo pode ser encontrado em [17, p. 121-136].

	A	B	C	D	E
1	Mês	Dívida antes	Pagamento	Dívida depois	IPTU
2	1 (cota única de 0,93 ou 1ª de 0,1)	0,9300	0,1000	0,8300	Desconto de 0,07
3	2	0,8437	0,1000	0,7437	
4	3	0,7560	0,1000	0,6560	
5	4	0,6668	0,1000	0,5668	
6	5	0,5762	0,1000	0,4762	
7	6	0,4840	0,1000	0,3840	
8	7	0,3904	0,1000	0,2904	
9	8	0,2952	0,1000	0,1952	
10	9	0,1984	0,1000	0,0984	q=
11	10	0,1000	0,1000	0,0000	1,0165

	A	B	C	D	E
1	Mês	Dívida antes	Pagamento	Dívida depois	IPTU
2	1 (cota única de 0,93 ou 1ª de 0,1)	0,93	0,1	=B2-C2	Desconto de 0,07
3	2	=D2*E11	=C2	=B3-C3	
4	3	=D3*E11	=C3	=B4-C4	
5	4	=D4*E11	=C4	=B5-C5	
6	5	=D5*E11	=C5	=B6-C6	
7	6	=D6*E11	=C6	=B7-C7	
8	7	=D7*E11	=C7	=B8-C8	
9	8	=D8*E11	=C8	=B9-C9	
10	9	=D9*E11	=C9	=B10-C10	q=
11	10	=D10*E11	=C10	=B11-C11	1,01651

Figura 4.3: Planilha eletrônica e fórmulas de acompanhamento de saldos devedores

tiva, uma coluna "Pagamento" contendo o valor dessa parcela (que é constante no sistema Price, mas que poderia ser variável a gosto do usuário) e uma coluna "Dívida depois" com a subtração das duas colunas vizinhas da esquerda. Registra-se o fator de juros em alguma célula à parte e aí as celulás de "Dívida antes", a partir da segunda, são o produto desse fator pelo conteúdo de "Dívida depois" da linha imediatamente acima.

Essa maneira de modelar obtém os mesmos resultados de TIR (Taxa Interna de Retorno) que se consegue trazendo os fluxos de caixa para uma mesma data focal, porém os valores de saldo devedor ficam explícitos de modo estático na tela. Uma figura que ilustra o histórico do saldo devedor, inclusive com valores *pro-rata die* que não aparecem na planilha é a 4.4, que retirei da capa do Livro Temas e Problemas da Coleção do Professor de Matemática.

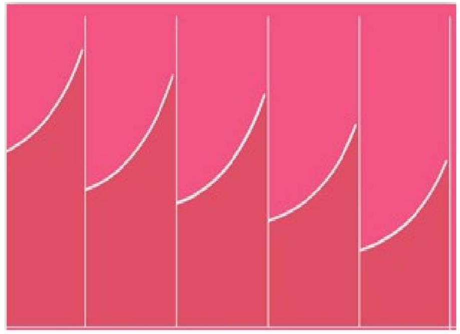


Figura 4.4: Arte da capa do Livro *Temas e Problemas*, da SBM

4.5.1 Loterias

Defino loterias como **instrumentos concentradores de renda através dos quais a população mais carente de EF estabelece voluntariamente um fluxo de caixa empobrecedor na esperança de enriquecer**.

Nada do que incluí na definição acima é segredo. No entanto, o governo continua a fomentar sua prática, com campanhas publicitárias na TV e uma farta variedade de produtos lotéricos, como mostra a figura 4.5[22].

Mas agora que o governo resolveu investir na EF da população, o mínimo que deveria fazer é replicar o que foi feito com os cigarros, cujas peças publicitárias foram banidas dos meios de comunicação (não esqueçamos de que são concessões públicas) e que passaram a ser embalados em maços com alertas do Ministério da Saúde acerca de seus malefícios.

Loterias são piores do que as *pirâmides*, que já foram criminalizadas. Nas pirâmides, um conjunto finito de indivíduos implementa um sistema de enriquecimento que, para se sustentar, precisa que os ganhadores ponham a perder tudo o que ganharam. Daí sua inviabilidade. Nas loterias, milhões de indivíduos doam dinheiro para poucos, e a administradora do evento repassa praticamente metade da arrecadação para programas sociais, ficando apenas a outra metade disponível para premiação. Conforme informações do site da Caixa Econômica

[22] `http://loterias.caixa.gov.br/wps/portal/loterias/`

Figura 4.5: Loterias administradas pela Caixa Econômica Federal

Federal, em 2014, mais de R$ 6 bilhões foram destinados ao esporte nacional, à seguridade social, ao FIES, etc.

Jogos de azar são proibidos no Brasil, mas as loterias são incentivadas. Como podemos saber a diferença? Seria o volume apostado em um único dia? Seriam fatores psicológicos? Seria a possibilidade de o apostador ficar devendo e ser cobrado de modo criminoso? O fato é que quando o assunto é cassino nossa legislação é paternalista ao extremo, mas quando o assunto é loteria, o governo é monopolista a menos de jogos contraventores. Enfim, encerro esta seção com a recomendação de que se estude o impacto das loterias sob o prisma da renda média familiar e o que as classes mais baixas conseguiriam consumir se não estivessem gastando uma média aproximadamente igual a um real por dia[23] com apostas que têm uma probabilidade ínfima de lhes mudar o padrão de vida.

[23] Estimativa feita supondo uma aposta mínima de R$3,50 na Mega-Sena, duas vezes por semana, 52 semanas por ano.

4.6 Pitadas de Finanças

A disciplina conhecida como *Finanças* geralmente é estudada no 6º período de graduações de Economia e de outros cursos superiores. Nela estuda-se ETTJ (Estrutura a Termo da Taxa de Juros), Teoria das Carteiras de Investimento, dentre outros tópicos relevantes para a gestão de ativos.

4.6.1 ETTJ

Consideremos a questão abaixo, adaptada do concurso do BCB de 2006.

Problema (múltipla escolha): *Sendo as taxas de juros para vencimentos em um ano e em dois anos estimadas, respectivamente, em 8% e 9,5% a.a., a "taxa a termo" relativa ao período entre esses dois vencimentos pode ser calculada da seguinte forma:*

Opções:

1. taxa a termo $= \left[\frac{(1+0{,}095)^2}{(1+0{,}080)^2} - 1\right] \times 100$
2. taxa a termo $= \left[\frac{(1+0{,}095)}{(1+0{,}080)^2} - 1\right] \times 100$
3. taxa a termo $= \left[\frac{(1+0{,}080)}{(1+0{,}095)} - 1\right] \times 100$
4. taxa a termo $= \left[\frac{(1+0{,}080)^2}{(1+0{,}095)} - 1\right] \times 100$
5. taxa a termo $= \left[\frac{(1+0{,}095)^2}{(1+0{,}080)} - 1\right] \times 100$

Solução: A taxa de 8% para o primeiro período significa que o mercado está praticando uma remuneração que multiplica os capitais investidos por $1,08$ a cada ano que passa. Analogamente, a taxa de 9,5% fará os capitais investidos em dois anos serem multiplicados por $1,095^2$. Ora, a equação dos fatores é $1,095^2 = 1,08q$, onde q é o fator para o segundo ano. Então, chamando de $i = q - 1$ a taxa procurada, temos $i = \frac{1{,}095^2}{1{,}08} - 1$. **Opção correta: 5ª.**

Tenho três comentários a fazer sobre essa questão de ETTJ. Inicio pelo elogio de que a questão não solicita o valor numérico da taxa, mas apenas *como* ela deve ser calculada, ou seja, o que o candidato deve fazer com as informações do enunciado. Trata-se de um tipo de questão intelectualmente elegante, que a princípio não favorece candidatos que tenham memorizado fórmulas ou macetes de cursos preparatórios especializados em concursos públicos. O segundo é que as multiplicações por 100 presentes em todas as alternativas não passam de transformar a representação da taxa a termo em uma porcentagem. A rigor, o símbolo de porcentagem foi indevidamente omitido, pois o elemento neutro da multiplicação não é 100, mas sim 100%. O terceiro é que os fatores $1,08$ e $1,095$ estão escritos de modo desnecessariamente complicado nas alternativas. Poderíamos pensar que se trata de algum tipo de intenção da banca examinadora de dificultar o caminho para os candidatos que estão prestando aquele concurso. Não é. Por maior que seja a perplexidade que isso possa causar, esse é o modo costumeiro de escrever os fatores no universo das finanças e dos cursos de matfin em geral[24].

Vejamos outro exemplo, retirado de [2].

Problema: *Calcular a taxa de juros de um ativo negociado a 102,77% CDI, sabendo que, na hora da negociação, o DI-1dia na BM&F para o prazo do ativo projetava uma taxa de juros de 22,80% ao ano.*

Observação: Nesse mercado, 1 ano equivale a 252 dias úteis.

Solução: Dessa vez, antes de explicar, adaptarei a expressão que encontrei no livro de onde retirei o problema (Segure-se!).

$$i_{ativo} = \left[\left[1 + \frac{102,77}{100} \left(\left(1 + \frac{22,80}{100} \right)^{\frac{1}{252}} - 1 \right) \right]^{252} - 1 \right] \times 100 = 23,50\%$$

Resposta: 23,50%. Observe novamente a multiplicação por 100 com a omissão do "%", o que está incoerente com a presença desse símbolo à direita dos 23,50. Será implicância minha? Vide Apêndice A para mais detalhes sobre as dificuldades criadas pela *mania* das porcentagens.

[24] O certo é fazer os alunos chegarem a um ponto no qual, ao *lerem* um fator de $1,2$, já saberem que se trata de um aumento de 20%. Em um dos PAPMEM que cursei, o professor Morgado disse "*Não trate seu aluno como um débil mental, pois se o fizer, um dia ele acaba se tornando um*".

Mas o que realmente espanta aqui é a pompa de explicitar i_{ativo} em função dos dados do enunciado sem qualquer preparação. A solução é, de fato, apresentada em uma linha! Não é de surpreender que esses livros tenham uma fórmula para cada conta.

Observemos a desconstrução do que se passou, sem a poluição visual causada pelas divisões e multiplicações por 100:

$$q_{ativo} = \left[1 + 1,0277\left(\sqrt[252]{1,228} - 1\right)\right]^{252}$$

Fica mais fácil explicar que o fator anual de $1,228$ foi trazido ao dia com a raiz índice 252, que esse fator diário (CDI) teve sua taxa aumentada para 1,0277 de si, gerando um fator diário com ágio, e que esse novo fator foi anualizado de volta pela elevação à 252ª potência.

Talvez assim um aluno de 9º ano do Ensino Fundamental consiga posar de monitor dos estudantes do 6º período de Economia. Mas que ninguém se ofenda. A culpa é dos professores. Na pura falta de didática, conteúdos elementares se transformam em tabus.

4.6.2 Teoria das Carteiras

Há um ditado popular que diz "Nunca coloque todos os ovos em um único cesto". Aplicado ao hábito de poupar, isso quer dizer que se deve diversificar os ativos. Ao *espalhar* suas economias por diversos veículos de investimento, diz-se que o poupador formou uma **Carteira (ou Portfólio) de Investimento**. Por exemplo, o patriarca daquela família fictícia da subseção 4.1.2, Sr. Turíbio Borges, formou um portfólio com quatro aplicações: 0,65 em Letras Financeiras do Tesouro (LFTs), 0,2 em Letras do Tesouro Nacional (LTNs), 0,11 em dólar (USD) e 0,04 em ações do Banco do Brasil S.A. (BBAS3), e observou os desempenhos anotados na tabela 4.4 abaixo:

É fácil ver que o rendimento geral da carteira foi de 0,1228, pois os ativos que somavam 1 no instante t_0 passaram a somar 1,1228 no instante t_1. Mais fácil ainda é provar que o retorno geral da carteira é a média ponderada dos desempenhos de cada ativo, com os pesos

Ativo	Peso Inicial (w_0)	Rendimento	Novos "saldos" ($q \cdot w_0$)	Peso Final (w_1)
LFT	0,65	0,15	0,7475	0,6657
LTN	0,2	0,08	0,2160	0,1924
USD	0,11	0,23	0,1353	0,1205
BBAS3	0,04	-0,4	0,0240	0,0214
Totais	1	N/A	$\sum q \cdot w_0 = 1,1228$	1

Tabela 4.4: Evolução da Carteira do Sr. Turíbio Borges

iniciais. Os pesos finais foram incluídos para ilustrar como cada ativo ganhou ou cedeu espaço na composição conforme sua *performance* tenha sido acima ou abaixo da geral. No caso, a proporção do capital investido em ações despencou de 0,04 para 0,0214 em virtude de BBAS3 ter caído 0,4 em uma carteira que subiu 0,1228.

Vimos, portanto, que a Teoria das Carteiras começa com médias ponderadas, ou seja, com uma ferramenta plenamente acessível na educação básica. Novamente, uma planilha eletrônica seria suficiente para dar conta de exemplos realistas, em que o portfólio costuma ser composto de uma grande variedade de ativos, com pesos e rendimentos respectivos para os quais se desaconselharia fazer contas na mão.

Seguindo em frente, outra parte da mesma teoria lida com o histórico de rendimentos de um ativo isolado. Digamos que BBAS3 tenha rendido 0,18 entre t_1 e t_2, 0,09 entre t_2 e t_3 e -0,07 entre t_3 e t_4. Em conjunto com os -0,4 do período entre t_0 e t_1, como se calcula o **retorno médio** de BBAS3 entre t_0 e t_4? A média aritmética das taxas é um erro comum. Ela não funciona com as taxas originais (mas funciona com adaptações que veremos logo adiante!). A resposta certa está em [10, p. 140]:

$$\overline{q}^4 = 0,60 \times 1,18 \times 1,09 \times 0,93 \Rightarrow \overline{i} \approx -0,0796$$

Como se vê, há espaço para explorar médias geométricas. De modo geral, o retorno médio de um ativo que teve uma série histórica de rendimentos $(i_1, i_2, \cdots, i_n)$ é dado pela equação

$$\overline{q}^n = (1+\overline{i})^n = \prod_{k=1}^{n}(1+i_k) = \prod_{k=1}^{n} q_k$$

Eis que surge uma bela oportunidade para lançar mão das propriedades dos logaritmos. Partindo de $\overline{q}^n = \prod_{k=1}^n q_k$, podemos escrever:

$$n \ln \overline{q} = \sum_{k=1}^{n} \ln q_k$$

Então definimos **retorno logarítmico** de um ativo (denotado aqui por $l_k = \ln q_k$) como o logaritmo natural[25] do fator correspondente ao retorno simples desse mesmo ativo. E nesse cenário a média aritmética volta a funcionar:

$$\ln \overline{q} = \frac{\sum_{k=1}^n \ln q_k}{n} = \frac{\sum_{k=1}^n l_k}{n} = \overline{l} \therefore \overline{q} = \mathrm{e}^{\overline{l}}$$

Assim mostramos que os retornos logarítmicos são aditivos no tempo. Outra vantagem dos retornos logarítmicos é que, para a maioria dos ativos da economia, eles se distribuem normalmente em torno de $\overline{l}$. Isso permite usar os conhecimentos acumulados sobre a curva normal para estimar, fixando previamente algum nível de significância, o famoso *Value at Risk* (VaR – “Valor em Risco”).

Outro aspecto curioso é que, para valores pequenos de i_k, temos $l_k \approx i_k$. Isso pode ser explorado no limite fundamental:

$$\lim_{i_k \to 0} \frac{\ln(1 + i_k)}{i_k} = 1 \Rightarrow \ln q_k \approx i_k \therefore l_k \approx i_k$$

4.6.3 Títulos Públicos

A expressão “Renda Fixa” engana muita gente. Seu significado não é o de que os rendimentos são constantes no tempo, como o nome pode fazer parecer. Em [2, p. 18], define-se um ativo de renda fixa como um instrumento financeiro cuja principal característica é **o**

[25] A base não importa desde que seja maior que 1 para que retornos logarítmicos maiores correspondam a retornos simples maiores. Usaremos o número e como base do sistema de logaritmos para que derivações fiquem mais simples, entretanto a base 10 pode ser conveniente em um contexto de títulos públicos que veremos logo mais.

conhecimento do valor de resgate no início do prazo da aplicação. Contudo mesmo essa definição pode induzir a erro, se não esclarecermos que **"valor de resgate" pode referir-se a um indexador e não à moeda corrente**. Se for a moeda corrente, trata-se de um *ativo pré-fixado*. Se for um indexador, estamos diante de um *ativo pós-fixado*.

Para simplificar, consideremos apenas títulos da dívida pública brasileira que não paguem cupons semestrais, para que o fluxo de caixa não tenha um feixe de setas entre a aplicação e o vencimento, pois essa generalidade apenas atrapalharia o raciocínio. Limitamo-nos, portanto, a três títulos do Tesouro Nacional: LTN (pré), LFT (pós indexada à taxa Selic) e NTN-B Principal (pós indexada ao IPCA).

Outra simplificação que se introduz, ainda que provisoriamente, é a suposição de que todos os títulos são *mantidos até o vencimento*, isto é, uma vez adquiridos, eles não são revendidos antecipadamente em relação à data de vencimento. Essa simplificação é retirada ao estudar as estratégias avançadas de investimento em títulos, buscando oportunidades de realização precoce de lucros, assunto que foge ao propósito deste texto.

Para entender a dinâmica da precificação de um título ao longo do período que se estende desde sua emissão até a data do vencimento, o mais didático é iniciar com a LTN:

Por definição, a Letra do Tesouro Nacional (LTN) tem o fluxo[26] da figura 4.6, no qual o segmento AB representa a linha do tempo que vai desde a aquisição do título até o vencimento, a seta AD é o valor de aquisição e CB é o valor de resgate. Em se tratando de LTN, tanto AD como CB estão em reais, e CB vale 1.000. A linha DC representa a remuneração da LTN. Ela é pactuada no momento da compra AD.

Assim, por exemplo, se uma LTN for adquirida com a pactuação de uma taxa de 16% a.a., o capital AD será multiplicado por $1,16$ a cada ano (de 252 dias úteis), até que essa multiplicação, considerando os anos e frações de ano decorridos, o transforme em 1.000 reais.

[26] Rompendo um pouco com a prática da literatura, colocarei a seta do resgate encostando no eixo do tempo com sua extremidade em vez da origem, ficando abaixo do eixo mas apontando para cima, que é o sentido de um fluxo positivo (recebimento). Não se trata somente de economizar espaço, já que a figura passa a ocupar uma área menor, mas porque, fazendo assim, as "linhas de remuneração" ficam mais fáceis de compreender.

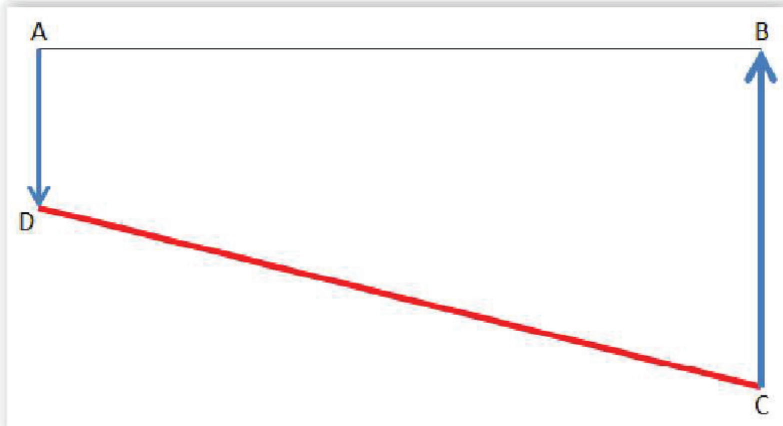


Figura 4.6: Fluxo de caixa de uma Letra do Tesouro Nacional (LTN)

No fundo, é o valor AD na data de aquisição que define a taxa de juros pactuada.

A taxa de juros de uma LTN é *aparente*. Isto é, os juros reais que o investidor irá receber dependerão da inflação do período. Evidentemente, na formação da sua taxa de atratividade ele já deve embutir seu palpite de quanto a inflação será, acrescentando-lhe seu custo de oportunidade na forma de juros reais.

Agora vejamos o que ocorre quando a taxa Selic é alterada ao longo da linha do tempo AB. Acompanhe a figura 4.7. Ela exemplifica quatro níveis de Selic e a evolução de uma LTN desde 1º de janeiro de 2016 até 1º de janeiro de 2021, onde $t = 0$. São quatro exponenciais do tipo $\text{PU} = 1.000 \cdot q^t; t \leq 0$ com valores de q iguais a 1,14 (gráfico azul), 1,2 (vermelho), 1,3 (verde) e 1,4 (lilás).

Por exemplo, digamos que uma LTN tenha sido comprada em janeiro de 2016 com juros de 20%. Então seu preço seguiu pelo gráfico vermelho até que, em outubro de 2017, os juros reduziram-se para 14%. Como o governo pagará 1.000 reais no vencimento, a exponencial de base $1,14$ que contém o ponto $(0, 1.000)$ é a curva azul. Saltando do gráfico vermelho para o azul, a LTN se valoriza abruptamente.

Porém, chegando em novembro de 2018, os juros da economia voltaram para 20%. A

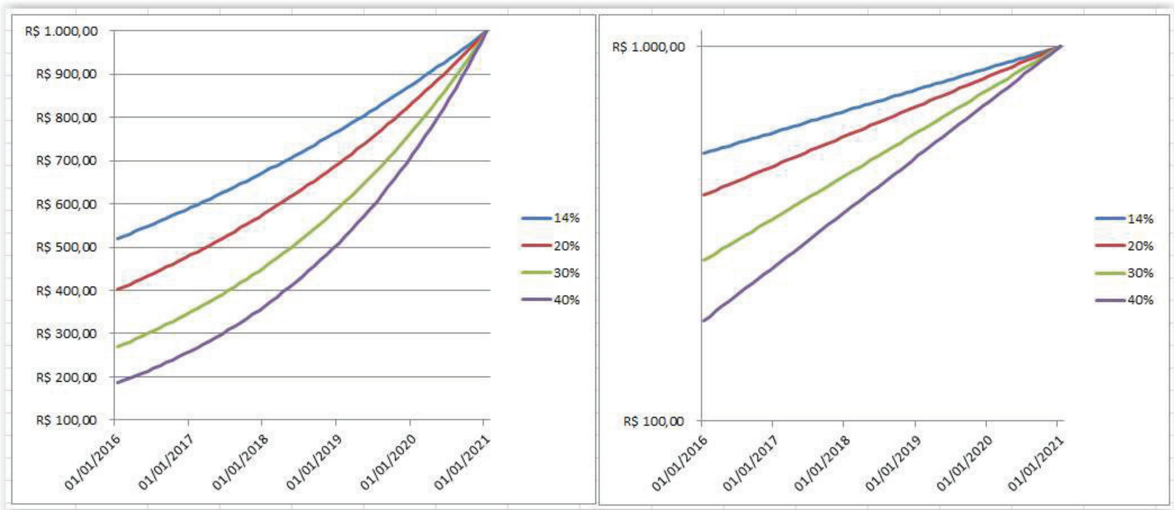


Figura 4.7: LTN para distintas Selic – gráficos linear à esquerda e mono-log à direita

LTN voltou para a curva vermelha, só que mais à frente. A valorização acumulada desde a aquisição retornou para aquela que era inicialmente esperada se os juros não oscilassem. Só que em março de 2019 os juros aumentaram para 30% e, um ano após isso, para 40%. A partir desses marcos, os gráficos que valem são o verde e depois o lilás. O investidor viu seu investimento ter uma performance muito ruim nesse trecho. Todavia, ele sabe que, no fim, o governo pagará 1.000 reais. Perceba que, quanto menores as ordenadas, maiores as derivadas.

Essa é minha maneira geométrica de justificar que **quanto maior a taxa de juros, menor o preço unitário de um título pré-fixado**.

E tem mais. Consideremos o gráfico obtido quando o eixo vertical é posto em escala logarítmica (papel “mono-log”). Equações da forma $y = Ae^t$ se transformam em $\ln y =$

$\ln A + t$. Curvas exponenciais viram retas! A dinâmica da oscilação dos juros continua valendo tal como foi descrito acima, mas agora com uma vantagem. Cada valor de juros corresponde a uma inclinação (global) de gráfico. A precificação de um título passa a ser um problema de traçar uma paralela por um ponto dado.

Também é bem instrutivo pensar nas derivadas, com e sem logaritmos (apesar de a precificação ocorrer a cada dia útil que passa, e portanto nosso domínio ser, a rigor, um conjunto discreto). Chamando $p = \mathrm{PU}$ e C um capital constante, temos:

$$p = C \cdot q^t \Rightarrow \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = C \cdot q^t \ln q = p \ln q \therefore \frac{p'}{p} = \ln q$$

Isso é enunciado assim: **a variação relativa é constante igual ao logaritmo natural do fator de remuneração**. Até aí, nada mais coerente com a própria caracterização das funções exponenciais, demonstrada em [11]. Mas se ela não tornar claro a “limpeza” que o gráfico mono-log proporciona (a divisão por p), talvez seja conveniente focar em outra derivação, efetuada com o logaritmo das ordenadas:

$$\ln p = \ln C + t \ln q \Rightarrow \frac{\mathrm{d}(\ln p)}{\mathrm{d}t} = \ln q$$

Duas observações. A primeira é que a expressão de $\ln p$ é de uma função afim, o que dispensa derivação, pois já se sabe que o resultado é o coeficiente angular. A segunda é que, por comparação, temos $(\ln p)' = \frac{p'}{p}$, uma aplicação da Regra da Cadeia para logaritmos.

Para as Letras Financeiras do Tesouro (LFT) e para as Notas do Tesouro Nacional, série B Principal (NTN-B Principal), o fluxo é o da figura 4.8. Ainda temos AB representando a linha do tempo e CB (seta azul para cima) um fluxo positivo no vencimento do título. Mas CB não é conhecido e sim um número índice: DA é apurado no momento da aquisição. Transladando DA para o vencimento, obtemos o segmento equipolente EB. A remuneração exclusivamente devida à variação do índice é representada pelo segmento CE. Porém, além da variação do índice, pactua-se um *prêmio* de juros sobre ele (linha vermelha), pelo qual o investimento não é AD e sim um valor geralmente[27] menor A'D' (que foi representado mais à esquerda para evitar superposição na figura). Então DD' é o deságio devido aos "juros reais" do diagrama, ou seja, DD' é a remuneração percebida se a curva laranja fizer coincidir C com E, zerando toda a variação do indexador.

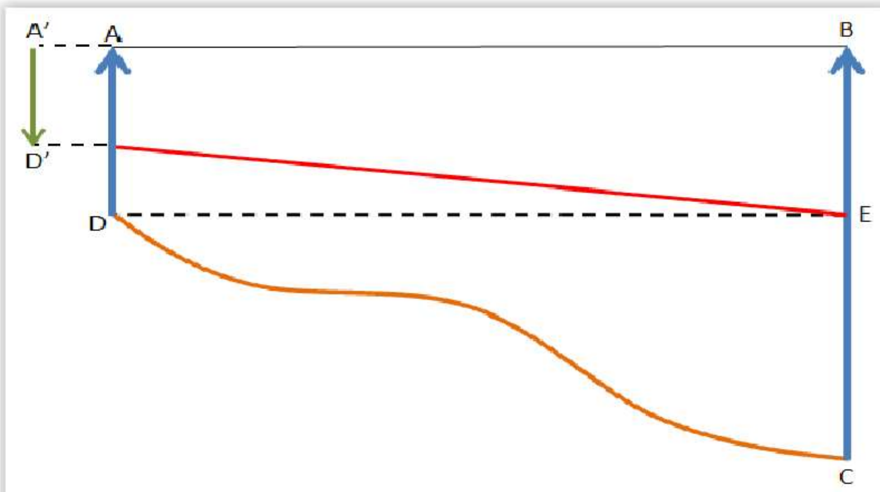


Figura 4.8: Fluxo de caixa de títulos pós-fixados (ex: NTN-B Principal e LFT)

Ao adquirir uma LFT, o mais comum é o prêmio sobre o indexador ser zero (D' coincidindo com D), pois a variação desse indexador, no caso, é a taxa Selic[28], que já embute juros reais e inflação em um certo sentido.

No caso das NTN-B Principal, o prêmio sobre o IPCA desempenha o papel dos juros reais, enquanto que o indexador é um parâmetro chamado VNA (Valor Nominal Atualizado), que é R$1.000,00 referenciados a julho de 2000 trazidos a valor presente pelo IPCA.

Sabemos que nem o IPCA nem a Selic apresentam variações relativas constantes, mas a natureza de médio/longo prazo desses dois parâmetros é exponencial, ou seja, é possível modelar o indexador por uma função da forma $y = A \cdot b^t$, com A constante e substituir em

[27] Em raras ocasiões, LFTs são vendidas com prêmios negativos.

[28] O valor do índice é R$1.000,00 referenciados a julho de 2000, trazidos a valor presente pela Selic

$p = y \cdot q^t$:

$$p = A \cdot (bq)^t \therefore \frac{p'}{p} = \ln b + \ln q$$

Então a remuneração relativa de um pós-fixado segue aditivamente um ritmo ditado pelos rendimentos do indexador e do juro real pactuado.

Capítulo 5

Conclusões

Vimos que existe uma preocupação em escala mundial com o preparo do público geral para lidar com finanças pessoais. Essa preocupação advém do consenso de que existe uma forma de *correlação positiva* entre o nível de EF e a estabilidade econômico-financeira da região considerada, que pode ser até global.

A partir dessa noção e da constatação de que o nível de EF da população geral deixava muito a desejar, iniciativas para melhorar a EF começaram a surgir, tanto no setor privado como no público. Em particular, os governos de diversos países, coordenados pela OCDE, planejaram e desenvolveram ações parcialmente padronizadas para implementar políticas públicas permanentes para sanar essa deficiência.

A versão brasileira dessas políticas foi oficializada em 2010, com o Decreto Presidencial que instituiu a ENEF, criando o CONEF, do qual faz parte o Banco Central do Brasil.

E também a SBM deveria fazer! Desde os anos 90, a SBM, por meio de iniciativas variadas e complementares organizadas pelo Impa, tem canalizado recursos para a formação dos professores do ensino básico. Os PAPMEM, os livros da CPM e o próprio Profmat são legados dessa resolução.

Por outro lado, se o diagnóstico da EF no Brasil já é ruim, o do ensino de matfin é péssimo. Enquanto a ENEF ataca a primeira, a segunda segue órfã de uma intervenção mais enérgica.

Agora, consideremos os fatos seguintes:

1. A ENEF cuidou de elaborar materiais didáticos, voltados para todos os anos da educação básica e munidos de projetos político-pedagógicos pautados pelas diretrizes e parâmetros curriculares brasileiros classificando a EF como um tema transversal.

2. O Profmat tem por objetivo o fortalecimento da matemática da educação básica através do aprofundamento da formação acadêmica do corpo docente, e um dos aspectos desse fortalecimento é a capacidade de seus egressos de elaborar materiais escritos de alta qualidade, sendo que o banco indutor de trabalhos já acumula um acervo considerável de dissertações que abordam o tema da matfin sob diversos prismas.

3. Dentro do organograma do CONEF existe previsão para participação de IES no Grupo de Apoio Pedagógico (GAP), que, entre outras atribuições, exerce influência sobre a preparação de materiais didáticos.

4. De acordo com as diretrizes da OCDE, às quais o Brasil buscou adaptar-se, recomenda-se a implementação de programas de treinamento dos próprios multiplicadores de EF.

5. A estrutura curricular do Profmat conta atualmente com quatro disciplinas obrigatórias no primeiro ano e duas no segundo, sendo que uma das do primeiro ano é MA-12 Matemática Discreta, que inclui o estudo de matfin, ainda que atrelado à solução de recorrências.

6. Conforme vimos no capítulo 4, a existência de inúmeros tópicos de matfin, permeando disciplinas de cursos superiores, cujas habilidades são típicas da educação básica, revela a total desordem do ensino de matfin ao longo dos diversos ciclos.

Juntando tudo isso, a proposta que tenho é a de **abrir espaço dentro do Profmat para a ENEF e dentro da ENEF para o Profmat**. A forma exata de como esse casamento se processaria não pode ser explicitada neste texto; antes demandaria muitas reuniões de cúpula para tomar vulto. Entretanto, não resta dúvida sobre a visível complementaridade dos projetos ENEF e Profmat, o primeiro endereçado ao corpo discente e o segundo ao docente.

Convém lembrar a existência dos livros da **Coleção Profmat**, atualmente com 15 títulos escritos especificamente para disciplinas do catálogo do Profmat, o que assevera a capacidade de produção de material didático de alto padrão para fazer frente aos desafios decorrentes da convergência por mim proposta.

Por fim, deixo como sugestão de continuação deste trabalho:

- a pesquisa, junto a gestores de recursos humanos, das competências específicas de matfin que a educação formal tem negligenciado. Quais são as lacunas que a escola básica e/ou superior deixa(m) e que as empresas têm que preencher com as próprias mãos (treinamento *in company*)?

- o levantamento do potencial didático das iniciativas junto ao público adulto de que tratou a subseção 2.3.2. Há trabalhos no Banco Indutor a esse respeito.

- a análise dos blocos 2 e 3 do material da ENEF do Capítulo 3.

Apêndice A

Porcentagens — Tradição e Desperdício

Percentagens, porcentagens, percentuais, porcentuais. Tudo vem direta ou indiretamente do latim *per centum*. Ponhamos logo que isso significa "dividido por uma centena" e encerremos o assunto! Mas não se faz assim na escola e nos livros. Dedica-se uma carga horária imensa e capítulos inteiros de livros (repetidos em diversas séries), com pouca eficácia cognitiva, só para ensinar aquilo que, no fundo, **não passa de uma convenção**. Um número como 0,5 é escrito em outro "idioma" como 50%.

O ensino de porcentagens não seria o único exemplo de exagero em termos de alocação de carga horária e impressão de páginas de teoria. Outro exemplo na mesma direção é a trigonometria. Lembro-me de ter ouvido, em alguma edição do PAPMEM, críticas em relação à uma coleção de livros de ensino médio, popularmente adotada entre as melhores escolas do país, que tinha um volume inteiramente dedicado ao assunto. Pior ainda, no auge da predominância da manipulação em detrimento da conceituação e das aplicações, adotava-se, em caráter de bibliografia complementar, alguns livros específicos tais como *Equações Trigonométricas*, de Sinésio de Farias.

Entretanto, a inadequação do ensino de porcentagens não se limita ao desperdício de recursos educacionais. O reforço de uma convenção que sobrevive por motivos de acomodação, sem que seu domínio traga benefícios de manipulação e a consequente redução da energia necessária para assimilar outros conteúdos, acaba por "dificultar o mundo", fazendo-o mais distante da população em geral, o oposto da razão de existir da atividade educacional como um todo.

Sim, é por puro costume que se diz "50% dos casos" em vez de "0,5 dos casos". Para quem domina ambas as formas, nada é facilitado ou dificultado com a adoção de uma forma ou de outra. Todavia, para quem ainda tem de aprender, isso é um estorvo.

Estou convicto de que o ensino de matfin é menos democrático do que poderia ser devido à utilização de porcentagens. Intencionalmente ou não, o próprio mundo das finanças trabalha para reduzir o acesso das camadas mais carentes da população a uma matfin com uma *curva de aprendizado* mais amigável.

Isso com a conivência da escola. Senão vejamos: considere o enunciado: *Calcule 75% de 240 litros*. Trata-se de um problema usual de sexto ano. Ensina-se que "de" deve ser substituído por $\times$ da mesma forma com que, algumas semanas antes, os alunos já haviam resolvido o mesmo problema escrito como *Calcule* $\frac{3}{4}$ *de 240 litros*. Será pedir muito que se proponha aos alunos que se *calcule 0,75 (em lugar de 75%) de 240 litros*, já que os decimais são ensinados na mesma série e desempenham, junto com as frações, um papel bem mais importante na matemática?

Outro exemplo, agora do cotidiano de adultos. Na calculadora HP-12C, a tecla "i" recebe como entrada a taxa de juros. Digamos que sua intenção seja a de informar à calculadora (*input*) uma taxa de 4%. Que valor numérico deve ser digitado, 4 ou 0,04? Só um ferrenho defensor da HP diria ser óbvia a resposta, mas meu ponto é que a existência dessa dúvida, por si só, já me motiva a desejar que a expressão "4%" jamais tivesse existido, caso em que não haveria alternativa senão 0,04. Aliás, quantos alunos, *em cada grupo de cem*[1], seriam capazes de testar os multiplicadores $q = 5$ e $q = 1,04$ para saber qual dos dois é compatível com a entrada de dados da HP-12C que exemplifiquei acima? Agora experimente ajuntar alunos de escolaridade fraca e ensinar-lhes $q = 1 + i$ para que possam resolver problemas

[1]Parece um deboche, mas não é. Estou provando a desnecessidade de considerar um grupo de 100, como se fosse essencialmente superior a tomar um grupo de tamanho 1000 ou qualquer outro inteiro positivo!

básicos de matfin. Não será difícil constatar o que exponho neste apêndice.

No contexto das probabilidades, a educação básica é marcada pelo uso quase que exclusivo da definição laplaciana “razão do número de casos favoráveis para o número total de casos”, válida para espaços equiprováveis. A ênfase é continuar resolvendo problemas de contagem (análise combinatória) e simplificar frações, jamais perdendo a chance de transformar a resposta numa porcentagem quando o denominador assim permitir. Não é de se estranhar que os alunos adquiram uma visão deturpada de que uma probabilidade *seja* uma fração ou uma porcentagem. Mais tarde, aqueles que reencontram o assunto no nível superior vêm as funções densidade de probabilidade e as distribuições, nas quais é praticamente inútil expressar probabilidades sob aquelas formas. Seria um bocado despropositado dizer que a área total sob o gráfico de uma função densidade de probabilidades é 100%, no lugar de dizer que é unitária.

Se a educação serve para “ler o mundo”, considere o caso do sistema inglês de unidades. Não é razoável empenhar tanto esforço apenas para se acostumar com outro sistema de medidas, a fim de preparar a população para um ambiente estranho. Embora os Estados Unidos, por sua hegemonia econômica, acabem prolongando a sobrevida[2] do sistema inglês, a maior parte do mundo já o superou.

Na esteira de ler o mundo, o sistema romano de numeração poderia ser questionado, se sua aplicação ficasse restrita às datas gravadas em monumentos históricos, relógios de estilo antiquado, etc. Entretanto, uma compreensão das limitações e deficiências desse sistema e de outros é válida para realçar as vantagens dos sistemas posicionais (decimal, binário e hexadecimal). Nesse sentido, é qualitativamente distinto do boicote às porcentagens que preconizo nesta dissertação.

Como operacionalizar esse boicote? Não seria da noite para o dia, mas certamente demandaria muito autocontrole para não se desviar do primeiro passo: limitar as traduções entre porcentagens e decimais à direção da primeira para a segunda. Jamais no sentido

[2]Segundo `https://pt.wikipedia.org/wiki/Unidade_inglesa`, os demais três países do mundo que ainda adotam este sistema são Libéria, Birmânia e Colômbia.

contrário. Assim, novos textos seriam publicados sempre com um "de-para" que visasse a eliminar o símbolo %, nunca a introduzi-lo. A partir daí, o estoque de material escrito com porcentagens aproximar-se-ia assintoticamente do aramaico. Pratiquei, onde aplicável, esse boicote ao longo desta dissertação. O leitor deve ter percebido tal intencionalidade, explícita na subseção 4.1.2, mas também presente nas seções 4.2 e 4.6, entre outras.

Finalizando de modo coloquial, estou sonhando com uma aula de história da matemática na qual se diga algo como **(...) por algum motivo, a larga utilização da centena em transações comerciais induziu a adoção de uma linguagem chamada *porcentagem*, cujo uso perdurou até o século IOIOI, quando entrou em declínio, a partir de uma revolta deflagrada por matemáticos brasileiros que perceberam seus malefícios (...) o que fez com que várias relações de poder se aproximassem de um *quasi-equilibrium*.**

Apêndice B

Sobre os Juros

Neste apêndice procuro fornecer raciocínios que justifiquem a prática de juros compostos, bem como a fixação de taxas de juros que superem a inflação mas não anulem os benefícios do crédito para um devedor responsável. Existem, evidentemente, situações onde essas condições deixam de ser observadas, mas são as exceções, não a regra.

Que os juros são o **preço cobrado pelo aluguel do dinheiro**, todos já devem ter ciência. Que existem diferentes regimes de capitalização, também. Não é o foco deste trabalho reafirmar esses conceitos[1]. A ideia aqui é eliminar qualquer dúvida remanescente acerca da inadequação dos juros simples, bem como facilitar a compreensão sobre a formação das taxas de juros.

Façamos de conta que, na fictícia família Borges da subseção 4.1.2, houvesse um primo do Turíbio Borges (TB) chamado Abílio (AB). Um belo dia, AB pediu R$25.000,00 emprestados a TB para abrir um negócio. TB concordou e, após deliberações, os primos fixaram o prazo de 10 anos para pagamento do empréstimo em uma única parcela.

No momento da concessão do crédito, enquanto discutiam os detalhes da operação, TB indexou o empréstimo a picolés ChicaBon[2], que à época custavam R$2,50 cada. Portanto, TB

[1] Para tais preliminares, um bom resumo é [5].

[2] Já usei BigMacs e Ferraris para explicar essa história. A escolha do ChicaBon não é somente uma homenagem ao Morgado, que costumava usar ChicaBons em seus exemplos, mas deve-se também ao fato de esse picolé ser essencialmente o mesmo há muitos anos, ao passo que BigMacs e Ferraris podem mudar

deixou bem claro para AB que estava emprestando dinheiro equivalente a 10.000 ChicaBons.

Passados 10 anos, o preço unitário do ChicaBon subiu para R$4,00. Nem merece comentário que AB venha com R$25.000,00 esperando quitar sua dívida para com TB. Para que TB não sofra uma efetiva[3] perda patrimonial, a menor tentativa (e veremos que é insuficiente) de valor monetário válida é R$40.000,00, o suficiente para comprar 10.000 ChicaBons.

Sobre a situação que acabo de descrever, é necessário estabelecer um glossário. **Correção monetária** é o ajuste de valores monetários que compensa a inflação de certo período. No caso, 10 anos de inflação multiplicaram o preço unitário do ChicaBon por $\frac{4}{2{,}5} = 1,6$ e este mesmo fator deve multiplicar o capital emprestado para que o credor não perca poder de compra referenciado ao indexador adotado. **Taxa nominal (ou aparente) de juros** é a taxa com que os valores de uma dívida evoluem de modo bruto, não indexado, a cada período do empréstimo. No caso, os R$25mil que TB emprestou a AB renderam 0,6 de si mesmos em 10 anos, perfazendo um fator de 1,6 também. Finalmente, **taxa de juros reais** é a taxa *deflacionada* de juros, ou seja, a taxa com que evoluiu a dívida indexada. Como a correção do exemplo coincidiu com os juros aparentes, os reais foram nulos.

Agora responda, é justo que TB receba apenas 10.000 ChicaBons de volta ao cabo de 10 anos? Quem responder que sim estará simplesmente negando a utilidade[4] de 10.000 ChicaBons por um período de 10 anos! TB privou-se de uma boa quantidade de picolés, por um prazo não desprezível. Não é nenhuma aberração querer que AB, na devolução, recompense TB com alguns ChicaBons a mais do que 10.000. Estou dizendo que TB deve ser premiado (remunerado) com juros reais estritamente positivos.

Mas quanto? Existe um método objetivo passível de ser padronizado? Digamos que TB tivesse uma aplicação que lhe proporcionasse o rendimento real de 0,4 do capital em 10 anos. AB, ao pegar o dinheiro de TB, deve prometer pagar-lhe pelo menos isso, sob pena de TB

substancialmente de tempos em tempos.

[3] Contabilmente, a reposição sem correção monetária restabelece o patrimônio de TB, mas economicamente TB ficaria mais "pobre", pela desvalorização do capital emprestado ao longo do tempo. Infelizmente, para fins tributários, o critério contábil é o mais adotado para obter as bases de cálculo dos impostos.

[4] O termo *utilidade* é central para a microeconomia. Indivíduos buscam maximizar suas *funções-utilidade* dentro das condições de contorno (restrições orçamentárias) a que estão submetidos.

"deixar de ganhar". Por outro lado, se o empreendimento de AB apresentar rendimento real de 1,2 do capital investido, não parece razoável que tal resultado seja integralmente repassado a TB, sob pena de AB ter "patinado" economicamente, isto é, tudo ter sido, para ele, perda de tempo. Evidentemente, se o empreendimento fracassar, AB poderá não ser nem capaz de repor o poder de compra de TB, mas como fica a avaliação desse risco na pactuação da taxa? Quanto maior for a percepção do risco, mais TB exigirá *acima* de 0,4 e menos AB estará disposto a *deduzir* de 1,2. Forma-se um conflito. Pode ser que os primos entrem em acordo *rachando a conta por meio de alguma média*, por exemplo, fechando negócio com juros reais de 0,8. Pode ser que pactuem outro valor qualquer em algum intervalo $[a, b]$ com $0,4 \leq a < b \leq 1,2$, onde a é o prêmio mínimo de risco exigido por TB e b é o prêmio máximo de risco que AB admite pagar. Mas pode também ser que a avaliação de risco seja tão preocupante que provoque a inversão posicional entre a e b, caso em que o empréstimo não ocorreria. Conclusão: não há como padronizar uma taxa. É um processo negocial, muitas vezes assimétrico.

Todavia, o que ficou evidente é que a decisão de privar-se de bens por algum tempo mediante empréstimo a outrem deve render **juros e correção monetária**, onde se subentende juros reais. Daí vem a **Fórmula de Fischer:**

$$1 + J = (1 + i)(1 + \pi_p)$$

, onde J são os juros nominais (aparentes), i os reais e π_p é a inflação.

Agora vejamos outra historinha. Seja A uma pessoa que emprestou x reais a outra pessoa, que chamaremos de B. Suponha que A e B pactuaram que B devolveria $x + j$ a A após um certo tempo t. Acaso não estaria claro que, no instante t, mas antes de qualquer pagamento, A possui j reais em posse de B? Mesmo estando claro, ainda há pessoas que consideram a capitalização de juros um verdadeiro acinte.

Ainda nesse exemplo, digamos que B esteja diante de A, no prazo combinado, com os

$x+j$ na mão, prontos para devolução. Porém, no momento em que a devolução iria ocorrer, A diz para B: "*Espere! Como eu não estou precisando de dinheiro agora mesmo, você pode, se quiser, continuar com o dinheiro, todo ou em parte, mantendo a mesma taxa de juros. Gosta da ideia?*".

Diante da oferta de A, consideremos as seguintes opções para B:

- B devolve j e permanece com x por mais um período igual ao primeiro.
- B fica com $x+j$ por mais um período igual ao primeiro.

Na primeira opção, A e B firmaram um contrato em condições idênticas ao que havia ocorrido no primeiro período e portanto B deveria comparecer com $x+j$ ao final do segundo período. Chegando lá, se devolver $x+j$, acabou e o total dos recebimentos de A foi $x+2j$.

Pois bem, em regime de juros simples, B poderia ter optado pela segunda via e mesmo assim pagaria $x+2j$ no final do segundo período. Tem cabimento que os j gerados no primeiro período possam passar o segundo período na posse de qualquer das partes e não fazer a menor diferença? Além disso, não parece contraditório dizer que *a taxa foi mantida* quando, no segundo período, uma dívida de $x+j$ rendeu j, ou seja, teve o mesmo rendimento que os x do início?

Salta aos olhos a incompatibilidade do modelo linear para a variável tempo da **função montante** $M(C,t)$, onde C é o capital emprestado e t é o tempo. Isto é, enquanto que a variação de M em função de C independe do valor de C, o mesmo não ocorre com t. Mais adequado é dizer que a variação de M em função de t é proporcional ao próprio M, o que aponta para a expressão $M(C,t) = Cq^t$, onde q é uma constante[5].

Repare que A ofereceu manter a taxa independentemente da via que B viesse a escolher. Isso não é prática de mercado. O risco da operação é maior quanto mais tardiamente[6] se concentram os pagamentos. Um erro clássico de diversos textos de matfin é confrontar dois

[5]Vide [11, p. 183-185].

[6]Tanto é assim que uma métrica de risco, chamada *duration*, é definida como a média aritmética dos prazos dos diversos pagamentos de um fluxo, ponderados pelo valor presente dos mesmos.

planos de pagamento com riscos diferentes utilizando a mesma taxa nominal, sem sequer fazer a ressalva de que se trata de um exercício intelectual. Experimente simular, junto ao gerente de sua conta bancária, um financiamento imobiliário, que por *default* vem no sistema SAC e peça a ele que refaça a simulação mudando o sistema para Price com a mesma taxa. O terminal de computador não permite! No sistema SAC o tomador devolve ao credor um volume maior de recursos no início, ficando com prestações menores ao final, enquanto que no Price o tomador segue devendo mais recursos por períodos maiores[7]. Na Tabela Price, qualquer banco, na qualidade de credor, irá trabalhar com uma percepção de risco maior, e não há como isso deixar de pesar sobre o valor da taxa de juros.

Voltando aos juros simples, ainda que não sejam matematicamente corretos, sua utilidade prática não é nula, pelo menos por enquanto. Em minhas aulas sobre o assunto, procurava certificar-me de transmitir claramente que juros simples são aproximações. Comunicava aos alunos que, por questão de coerência, não poderia permanecer muito tempo no assunto dos juros simples, já que se tratava de algo sabidamente inexato, em oposição ao que viria em seguida.

Mais especificamente, estabelecia que juros simples funcionam satisfatoriamente desde que três **condições subjetivas** se façam presentes:

- prazo pequeno
- taxa pequena
- estar entre amigos

A ausência de qualquer dessas hipóteses faz com que os juros simples deixem de ser bons substitutos dos *verdadeiros*.

A terceira condição é fundamental para que haja "boa vontade" entre tomador e credor para desprezar a diferença, supondo-a pequena em virtude das duas primeiras.

[7] Vide gráficos em [3, p. 40-42].

Além da farta bibliografia que mostra como os montantes dos dois modelos evoluem e divergem no tempo, poderíamos lançar mão da Desigualdade de Bernoulli:

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

, válida para $x > -1$ e $n \in \mathbb{N}$.

É interessante fixar com os alunos os casos em que há igualdade ($n = 1 \vee x = 0$). E nos estabelecimentos que ensinam Cálculo, isso gera uma boa interpretação do limite fundamental $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^n-1}{x} = n$. De fato, a expansão binomial de $(1+x)^n$ é uma série de Taylor cujo truncamento nas duas primeiras parcelas forma a expressão $1+nx$.

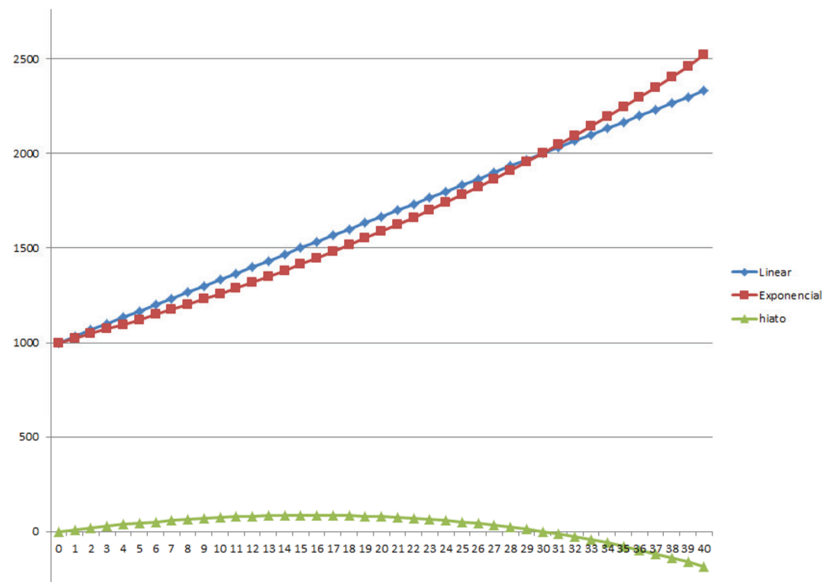


Figura B.1: Atraso de um boleto – convenções linear e exponencial.

Entretanto, nada é mais importante e necessário do que munir os alunos da capacidade de analisar criticamente as situações da realidade. Dois exemplos (dentre inúmeros) de deturpações com as quais convivemos no Brasil são o "casuísmo" bancário (figura B.1) que estipula a convenção linear entre 1 e 15 dias de atraso em pagamentos de boletos[8] e a

[8] Antigamente, usava-se a frase "Senhor caixa, não receber após 30 dias do vencimento", para que o cálculo de juros simples ficasse restrito ao *pro-rata die* entre 1 e 30 dias. Posteriormente, ao perceber que após os 15 primeiros dias, o hiato entre as convenções linear e exponencial começava a diminuir, substituiu-se 30 por 15.

tipificação penal do crime de agiotagem estar definida em função da taxa praticada, em lugar da forma de cobrança[9], criando um monopólio conhecido como "agiotagem legal", detido pelas instituições financeiras.

Gostaria de crer que, através da educação matemática de qualidade, mais do que a educação financeira focada pela ENEF, possamos desvelar à população brasileira os erros do nosso sistema financeiro, as injustiças e distorções, sobretudo os mecanismos que fomentam valores abusivos dos juros de certas modalidades de empréstimo e o arcaico conjunto de leis vigentes no Brasil sobre a matéria[10].

[9]Fora do Brasil, existem hoje plataformas nas quais a internet, e não os bancos, realizam intermediação financeira agentes deficitários e superavitários da economia, reduzindo o *spread* a níveis mínimos. Algumas são experiências bem sucedidas. Cabe ao nosso legislativo revisar conceitos até mesmo do Código Penal, no qual o crime de agiotagem está tipificado em função da taxa praticada e não da forma de cobrança. Tal como é a lei brasileira, um banco pode cobrar 400% ao ano no cheque especial sem que isso seja considerado lesivo ao tomador, mas se uma pessoa física se oferecer para pagar seu cheque especial pactuando com ele uma taxa de 20% ao ano, é crime!

[10]Em *Cobrança de Juros sobre Juros – Anatocismo*: Uma Longa História sobre Tabus, Equívocos e Interesses, de José Dutra Vieira Sobrinho, a descrição do livro afirma que **a proibição da capitalização de juros é contrária a tudo que se faz no mundo real (...) o principal objetivo deste livro é mostrar a inviabilidade da utilização de critérios lineares nas operações de empréstimos ou investimentos, devido a sua inconsistência matemática e financeira, e às consequentes distorções que provocam (...) espera-se, que após a leitura deste trabalho, o leitor se conscientize de que a cobrança de juros sobre juros não é uma questão jurídica: ela é eminentemente matemática. O conceito de anatocismo, tal como caracterizado nos Códigos de diversos países, nada tem a ver com os regimes de capitalização simples e composto, ensinados, praticados e respeitados no mundo inteiro**.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Referências Bibliográficas

[1] Cristiano Marcell Isquierdo de Amorim. *Matemática Financeira* – abordagem voltada para a cidadania. Master's thesis, IMPA, 2014.

[2] Paulo Lamosa Berger. Mercado de Renda Fixa no Brasil – *Ênfase em Títulos Públicos*. Perfil Negócios. Nova Razão Cultural, primeira edition, 2012.

[3] Rivelino Duarte Costa. *Uma Abordagem da Matemática Financeira no Ensino Médio para Explicitar as Metodologias do Fundo de Financiamento Estudantil - FIES*. Master's thesis, UFC, 2014.

[4] Fabio Augusto Coelho da Cruz. *Matemática Financeira e uma abordagem no ensino de Finanças para a Educação Básica*. Master's thesis, UFBA, 2013.

[5] Tiago Gadelha de Sousa. *Ensino de Matemática Financeira com Utilização de Tecnologias*. Master's thesis, UFC, 2014.

[6] Herbert José Cavalcanti de Souza. *Matemática Financeira:* uma aplicação direta no cotidiano. Master's thesis, UFPB, 2013.

[7] Eduardo Vicente do Couto. *Sistemas de Amortização:* uma abordagem para o ensino médio regular. Master's thesis, Unirio, 2013.

[8] Elon Lages Lima. Meu Professor de Matemática *e outras histórias*. Coleção do Professor de Matemática. SBM, terceira edition, 2000.

[9] Elon Lages Lima. *Matemática e Ensino*. Coleção do Professor de Matemática. SBM, segunda edition, 2003.

[10] Elon Lages Lima et al. A Matemática do Ensino Médio – Volume 2. Coleção do Professor de Matemática. SBM, quarta edition, 2002.

[11] Elon Lages Lima et al. A Matemática do Ensino Médio – Volume 1. Coleção do Professor de Matemática. SBM, sexta edition, 2003.

[12] Fabiano Alberton de Alencar Nogueira. *Matemática Financeira no Ensino Médio*, 2002.

[13] OECD. *Recommendation on Principles and Good Practices for Financial Education and Awareness*, 2005.

[14] OECD. *PISA 2012 Results: Students and Money: Financial Literacy Skills for the 21st Century (Volume VI)*, 2014.

[15] OECD and Mexico's G20 Presidency. *High-Level Principles on National Strategies for Financial Education*, 2012.

[16] OECD and Russia's G20 Presidency. *Advancing National Strategies for Financial Education* – a joint publication by russia's g20 presidency and the oecd, 2013.

[17] Ilydio Pereira de Sá. Matemática Comercial e Financeira (na educação básica) para Educadores Matemáticos. Sotese, primeira edition, 2005.

[18] Sobrinho Vieira, José Dutra. Matemática Financeira – *Edição Compacta.* Atlas, terceira edition, 2000.