UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

UMA PROPOSTA DE ABORDAGEM AO PROBLEMA DE FLÁVIO JOSEFO APLICADA AO ENSINO MÉDIO

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Márcia Erondina Dias de Souza

SANTA MARIA, RS, BRASIL

2013

UMA PROPOSTA DE ABORDAGEM AO PROBLEMA DE FLÁVIO JOSEFO APLICADA AO ENSINO MÉDIO

Márcia Erondina Dias de Souza

Dissertação apresentada ao curso de
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT,
da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito
parcial para obtenção do grau de
Mestre em Matemática

Orientadora: Prof.ª Drª Luciane Gobbi Tonet

SANTA MARIA, RS, BRASIL

2013

Ficha catalográfica elaborada através do Programa de Geração Automática
da Biblioteca Central da UFSM, com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Dias de Souza, Márcia Erondina
Uma proposta de abordagem ao problema de Flávio Josefo aplicada ao Ensino Médio / Márcia Erondina Dias de Souza.-2013.
61 p.; 30cm

Orientadora: Luciane Gobbi Tonet
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Maria, Centro de Ciências Naturais e Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática, RS, 2013

1. Problema de Flávio Josefo 2. Relações de recorrência 3. Indução Matemática I. Gobbi Tonet, Luciane II. Título.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

A comissão Examinadora, abaixo assinada,
aprova a Dissertação de Mestrado

UMA PROPOSTA DE ABORDAGEM AO PROBLEMA DE FLÁVIO JOSEFO APILICADA AO ENSINO MÉDIO

elaborada por
Márcia Erondina Dias de Souza

como requisito parcial para obtenção para o grau de
Mestre em Matemática

COMISSÃO EXAMINADORA:

Luciane Gobbi Tonet

Luciane Gobbi Tonet, Drª
(Presidente / Orientador)

Lidiane Buligon

Lidiane Buligon, Drª (UFSM)

Giuliani

Oscar Francisco Giuliani , Dr (UNIPAMPA)

Santa Maria, 15 de abril de 2013.

Dedico ao meu amor,
José Otávio Silveira da Silva,
pelo companheirismo e carinho.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus e ao meu Mestre, por todo amparo e proteção durante a minha vida.

À Universidade Federal de Santa Maria e à Sociedade Brasileira de Matemática, pela oportunidade de realização deste curso.

Aos professores pelos ensinamentos e por contribuírem para a minha formação profissional. Em especial à Professora Carmen Mathias, pela sua incansável dedicação ao curso.

À professora Luciane Gobbi Tonet, minha orientadora, pelo empenho, dedicação na elaboração deste trabalho e pelas constantes palavras de incentivo.

A todos os colegas de curso, pela amizade e companheirismo nestes dois anos de curso, em especial as colegas e amigas Ana Luiza Kessler e Renata Magarinus.

À equipe diretiva e alunos da Escola Estadual de Ensino Médio Professora Margot Terezinha Noal Giacomazzi, pela oportunidade que me deram de aprender com todos vocês. E ao Professor Marcos Roberto Fonseca por organizar o grupo de alunos para a realização da prática pedagógica tornar uma realidade.

À Escola Municipal de Ensino Fundamental Deputado Victor Issler, pela parceria e incentivo para a conclusão deste curso.

Aos amigos que compreenderam as minhas ausências e por todo o carinho demonstrado, em especial a minha amiga Jamile Forneck.

Aos meus irmãos Cecília, Lúcia, Letícia, João e Paulo, aos meus afilhados Ana Júlia e Júlio César e ao Rodrigo por tornarem os meus dias mais felizes. Torço pelo sucesso de todos vocês.

Aos meus professores da vida, meus pais, Jomar e Cândida, por terem ensinado a importância dos estudos, e o verdadeiro significado da vida mas, acima de tudo, por respeitarem as minhas escolhas.

E ao meu amor, Otávio, grande incentivador deste trabalho, pelo companheirismo, apoio e por toda compreensão a mim dispensada.

RESUMO

Dissertação de Mestrado
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT
Universidade Federal de Santa Maria

UMA PROPOSTA DE ABORDAGEM AO PROBLEMA DE FLÁVIO JOSEFO APLICADA AO ENSINO MÉDIO

Autora: Márcia Erondina Dias de Souza
Orientadora: Drª Luciane Gobbi Tonet

Santa Maria, 15 de abril de 2013.

Neste trabalho, apresentamos uma sequência didática de atividades elaboradas para um grupo de alunos do ensino médio, na faixa etária de 15 a 18 anos, tendo como principal objetivo estudar o problema proposto pelo matemático Flávio Josefo, nos meados do ano 64. Conta a lenda que um grupo de rebeldes, dentre eles Flávio Josefo, foi encurralado numa caverna pelo exército inimigo. Preferindo o suicídio à captura, os rebeldes decidiram formar um círculo e, contando ao longo deste, matar cada terceira pessoa restante do grupo. Josefo era contrário a este pacto suicida e, por isso, juntamente com um amigo, calculou muito rapidamente as posições adequadas que ambos deveriam tomar nesse círculo de modo a saírem ilesos desta terrível situação. Para o entendimento desta solução propomos, inicialmente, uma revisão sobre sequências numéricas, incluindo os casos especiais de progressão aritmética e geométrica. Em seguida, introduzimos algumas noções a respeito de relações de recorrência e do Princípio da Indução Matemática, permitindo uma generalização dos conceitos e resultados já conhecidos intuitivamente pelo grupo de alunos.

Palavras – chave: Problema de Flávio Josefo. Relações de Recorrência. Princípio de Indução Matemática.

ABSTRACT

Dissertação de Mestrado
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT
Universidade Federal de Santa Maria

AN APPROACH PROPOSAL OF FLAVIO JOSE`S PROBLEM APPLIED TO HIGH SCHOOL

Authoress: Márcia Erondina Dias de Souza
Leader: Drª Luciane Gobbi Tonet

Santa Maria, April 15, 2013.

In this paper, we presents a didactic sequence of activities designed for a group of students of high school, their age were about 15 and 18 years old, with the main objective to study the problem proposed by the mathematician Flávio Josefo, in mid-year 64. The legend tells that a group of rebels, including Flávio Josefo, was trapped in a cave by the enemy army. Preferring the suicide to capture, the rebels decided to form a circle and, counting over this, to kill each third person of the rest of the group. Josefo was contrary of this suicide pact therefore, together with a friend, calculated very quickly the appropriated positions that both should take in this circle in order to get out of this terrible situation. To understand this solution, we propose, at the first moment, a review about the numerical sequences, including the special cases of arithmetic and geometric. Then, we introduce some notions about the de recurrence relations and the Principle of Mathematical Induction, allowing a generalization of concepts and results already known intuitively by the student group.

Key words: Josefo's Problem. Recurrence relations. Principle of Mathematical Induction.

LISTA DE TABELAS

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE ANEXOS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Neste trabalho de pesquisa elaboramos, aplicamos e analisamos uma abordagem de conteúdos com alunos do segundo ano do Ensino Médio, dentre os quais ousamos apresentar assuntos complexos como Relações de Recorrências e o Princípio de Indução Matemática. Estes, por se tratarem de conteúdos matemáticos abstratos e de difícil compreensão para os alunos, nos exigiu maior atenção e cuidados em sua abordagem.

Para amenizar este problema, utilizamos o problema proposto por Flávio Josefo como o enfoque motivador para elaborar a proposta didática

> “Conta a lenda que Flávio Josefo, estava encurralado pelos romanos em uma caverna, juntamente com 11 rebeldes judeus, durante uma guerra entre judeus e romanos. O grupo de rebeldes, preferindo o suicídio à captura, decidiu formar o círculo e, contando ao longo deste, matar cada terceira pessoa restante até não sobrar ninguém. Contudo Josefo, junto com um amigo, não queria participar do pacto suicida, e calculou rapidamente onde ele o amigo deveriam ficar nesse círculo.” (Jesus, 2006, p.7)

Realizamos a prática pedagógica na Escola Estadual de Ensino Médio Professora Margot Terezinha Noal Giacomazzi, situada em uma zona periférica no município de Canoas, RS, com dez alunos com idades entre 15 a 18 anos. A escola possui recursos de multimídia, salas de aulas amplas e conta com uma equipe pedagógica completa e 57 professores.

A sequência didática desenvolvida com os alunos foi composta por nove encontros, no primeiro apresentamos o problema a ser estudado e realizamos diversas atividades práticas com o intuito de entender melhor o problema. No capítulo 1, além de relatar as atividades desenvolvidas nesta primeira aula, apresentamos brevemente a história de Flávio Josefo e algumas variações do problema.

Do segundo ao oitavo encontro realizamos a abordagem teórica, ou seja, estudamos os conteúdos necessários para a resolução do problema de Flávio Josefo. Descrevemos detalhadamente cada encontro no capítulo 2 e, nos anexos, disponibilizamos todo o material apresentado aos alunos. No segundo encontro estudamos sequências e progressão aritmética. Nas duas aulas seguintes abordamos progressão geométrica, com o objetivo de abordar a soma dos termos de uma PG. Como os alunos dominavam o assunto, aproveitamos para demonstrar as fórmulas que eles assumiam como verdade.

Já no quinto e no sexto encontro estudamos Relações de recorrência, para abordar esse assunto utilizamos uma vídeo aula do professor Morgado[1], com explicação e exemplos de como resolver uma relação de recorrência. E para encerrar a abordagem de conteúdos estudamos Indução Infinita, apresentamos um exemplo lúdico e utilizamos como exemplo as fórmulas da soma dos termos de uma PA e dos termos de uma PG. Os assuntos dos quatro últimos encontros é novidade para os alunos, e pelo fato de serem conteúdos que exigem um grau de abstração foi necessário muita cautela ao apresentá-los aos alunos.

No capítulo 3, apresentamos a solução do problema do Josefo, juntamente com uma descrição da vivência dos alunos na nona aula. Finalizamos o trabalho, com a análise da prática pedagógica, apontando a possibilidade de uma abordagem no ensino médio que envolva Relações de recorrência e Indução Infinita.

[1] Disponível em: http://video.impa.br/index.php?page=janeiro-de-2003

2. O PROBLEMA DE FLÁVIO JOSEFO

2.1 CONTEXTUALIZAÇÃO HISTÓRICA

Flávio Josefo[2] nasceu em Jerusalém, por volta do ano 37 d.C., e viveu até 100 d.C. Sua descendência de família real por parte de mãe e sacerdotal por parte de pai oportunizou acesso a uma excelente educação enraizada nas culturas judaica e grega, sendo considerado um dos maiores historiadores judeus de seu tempo. Na sua grande maioria, suas obras foram escritas em grego e são de extrema importância para o estudo das relações entre judeus e romanos durante o século I. Em alguns momentos da história, seus escritos só perderam em popularidade para a bíblia, pois traziam informações detalhadas da época em que o cristianismo dava seus primeiros passos como cultura religiosa no mundo.

Desde muito cedo, Flávio Josefo se envolveu em questões religiosas da sua época, dedicando boa parte de sua vida aos estudos sobre algumas seitas judaicas. Com o passar do tempo Flávio tornou-se fariseu, participando ativamente de questões de ordem política com ideais mais próximos do entendimento com Roma, o que o colocava numa linha não tão extremista aos romanos. Isso acarretou-lhe muitos embates com os zelotas[3], grupo este que detinha maior poder de mobilização junto aos líderes judeus. Desta forma, deu-se inicio a vários conflitos que, mais tarde, trariam muitas consequências trágicas, dentre elas a própria destruição da cidade de Jerusalém.

---

[2] Em latim, ele era conhecido como *Flavius Josephus.* Após ser reconhecido como cidadão romano, passou a ser chamado de Tito Flávio Josefo. Originalmente, seu nome judaico era Yosef ben Matityahu, que significa José, filho de Matias.

[3] Seita estabelecida por Judas que liderou uma revolta contra o domínio romano no ano 6 d.C., ao rejeitar o pagamento de tributo pelos israelitas a um imperador pagão, sob a alegação de que tal ato era uma traição contra Deus, o verdadeiro rei de Israel. A seita dos zelotas é referida por Flávio Josefo como extremista e responsável pela incitação da revolta que conduziu à destruição de Jerusalém.

Neste âmbito, convém ressaltar a participação de Flávio Josefo em uma grande revolução defendendo militarmente a Judeia, muito embora fosse contrário ao confronto direto com Roma. Seu notável desempenho lhe rendeu a nomeação de chefe militar da região da Galileia, mesmo com a oposição ferrenha de alguns líderes importantes da época. Em decorrência a uma destas batalhas vividas por Josefo e seu grupo, surgiu um famoso episódio de sua biografia o qual, por não constar em nenhuma literatura confiável, é considerado por muitos como lenda.

Este episódio retrata os acontecimentos ocorridos numa das batalhas travada contra os romanos. Nesta ocasião, Josefo e mais quarenta companheiros ficaram encurralados numa caverna. Muitos não admitiam a possibilidade de rendição por significar uma grande desonra a seus ideais filosóficos e religiosos. Foi então que Josefo incitou seus companheiros a um suicídio coletivo, no qual ninguém precisaria efetivamente se matar. Ele propôs que todos se organizassem em círculo, de modo que a vida de cada um dos rebeldes seria tirada pelo companheiro ao lado por esganadura. Usando o seu rápido raciocínio matemático, Josefo se posicionou no círculo de maneira estratégica para que não morresse. Como resultado, apenas Josefo, juntamente com um colega, sobreviveram e ambos se entregaram aos romanos. Obviamente, esse episódio da vida de Josefo fez com que os judeus o considerassem um grande traidor.

Ao ser aprisionado pelos romanos, Josefo conquista a simpatia do comandante das tropas romanas da época, chamado Vespasiano, ao prever que ele seria o próximo imperador de Roma. Nesta época, Josefo tentou novamente dissuadir seus antigos companheiros de enfrentarem o exército romano. Fracassando em seu intento, ele assistiu, ao lado dos romanos, a mais uma derrota humilhante dos judeus e a total destruição da cidade de Jerusalém. Em seguida, Josefo ganha a proteção do exército romano tornando-se, inclusive, cidadão romano.

Com o auxílio e assistência dados pelos Flavianos[4], Flávio Josefo se torna um homem muito rico. Ele comprou terras confiscadas na Judeia durante a guerra e

---

[4] A dinastia flaviana ou dinastia dos Flávios, foi a segunda dinastia de imperadores do Império Romano chegando ao poder com Vespasiano após uma grave crise que se estabeleceu no fim da dinastia Julio-Claudiana com a morte do imperador Nero.

teve toda a tranquilidade para escrever alguns livros até hoje reconhecidos como importantes fontes de informações históricas da época. Dentre suas principais obras, citamos quatro livros:

- **A Guerra Judaica** – escrito em aramaico e, posteriormente em grego, contendo mais detalhes sobre o cerco e tomada de Jerusalém;
- **Antiguidades Judaicas** – relato da história do povo judeu até a derrocada na guerra contra os romanos;
- **Contra Ápion** – resposta às críticas antissemitas de Ápion, um erudito grego que disseminava ideias contrárias a visão histórica dos judeus;
- **Vida de Flávio Josefo** – autobiografia contendo detalhes de sua vida desconhecidas por outras fontes de informação da época.

2.2 ENTENDENDO O PROBLEMA DE FLÁVIO JOSEFO

Como já mencionamos no início deste capítulo, a sobrevivência de Josefo dentre os quarenta companheiros originou um curioso problema muito conhecido e difundido principalmente entre os matemáticos, o qual pode ser enunciado da seguinte forma[5]:

"*Flávio Josefo estava encurralado pelos romanos em uma caverna, juntamente com 40 rebeldes judeus, durante uma guerra entre judeus e romanos. O grupo de rebeldes, preferindo o suicídio à captura, decidiu formar um círculo e, contando ao longo deste, matar cada terceira pessoa restante até não sobrar ninguém. Contudo Josefo, junto com um amigo, não queria participar do pacto suicida, e calculou rapidamente onde ele o amigo deveriam ficar nesse círculo.*"

Outras variações deste problema são comuns na literatura, sendo que a

[5] Na literatura disponível sobre o assunto, podemos encontrar diversos enunciados para este problema, todos eles equivalentes matematicamente. Em especial, o que citamos neste trabalho pode ser encontrado em http://www.calendario.cnt.br/Paginas/Josefo.htm – acesso em 12/02/2013.

principal diferença entre elas se encontra basicamente no número de pessoas encurraladas na caverna. A seguir, apresentamos uma interessante variação deste problema aplicado à ciência da computação, onde programadores resolvem o dilema através de algoritmos criados em uma linguagem de programação adequada[6]:

"Um grupo de soldados está cercado por uma força inimiga esmagadora. Não há esperança de vitória sem a chegada de reforços. No entanto, existe somente um cavalo disponível para escapar e buscar reforço, e os soldados precisam entrar num acordo para determinar qual deles deverá escapar e trazer ajuda. Eles formaram um círculo e um número N é sorteado num chapéu. Um de seus nomes também é sorteado, e é pelo nome deste soldado sorteado que eles começam a contar ao longo do círculo em sentido horário. Quando a contagem alcança o número sorteado N, esse soldado é retirado do círculo, e a contagem reinicia com o soldado seguinte. O processo continua de maneira que, toda a vez que N é atingido, outro soldado sai do círculo. Todo soldado retirado não entra mais no círculo. Irá buscar ajuda o soldado que sobrar no círculo."

Não é difícil perceber a equivalência entre os enunciados acima destacados para o problema de Josefo. Mais geralmente, este problema pode ser enunciado da seguinte maneira:

> *"Decide-se eliminar* $n-1$ *pessoas de um grupo de* n *pessoas da seguinte forma:*
>
> (i) *as pessoas são colocadas em um círculo com lugares marcados em ordem crescente no sentido horário, (1, 2, 3, …, n),*
>
> (ii) *este círculo é percorrido no sentido horário tantas vezes quanto necessário, começando com a pessoa no lugar 1, e toda segunda pessoa viva nesta visitação é eliminada até que só uma sobreviva.*
>
> *Qual a posição que a sobrevivente ocupa?" (Santos, 2007, p.234)*

---

[6] Maiores informações acerca desta variação ao problema de Flávio Josefo podem ser acessadas no site: http://forum.clubedohardware.com.br/problema-josephus/593331?s=89d541fd50d85d0e414fc79faf9085ba&s=8bef7c5a9083dc6ea8f2a28fd79b44bd& - acesso em 06/03/2013.

Para nossa prática pedagógica, iniciamos o estudo deste problema dispondo os alunos em um círculo, conforme a situação proposta por Josefo. Analisamos, em grupo, a posição do soldado sobrevivente para diferentes números de soldados no círculo. Consideramos o caso $m=2$, isto é, cada segunda pessoa a partir do ponto inicial da contagem deverá sair do círculo, sempre em sentido horário.

Claramente, se tivermos apenas um soldado encurralado, este será o único sobrevivente.

Consideremos o caso $n=2$, no qual o círculo contém os soldados S_1 e S_2. Começando a contagem por S_1, em sentido horário, podemos perceber que o soldado S_2 será eliminado do círculo. Neste caso, o sobrevivente será o próprio soldado S_1.

Para $n=3$, será necessário percorrer o círculo duas vezes. Na primeira rodada será eliminado o soldado S_2. Começando novamente a contagem em S_3, observamos que será eliminado o soldado S_1. Neste caso, sobreviverá o soldado S_3. Abaixo, apresentamos uma figura que ilustra a situação exposta neste caso.

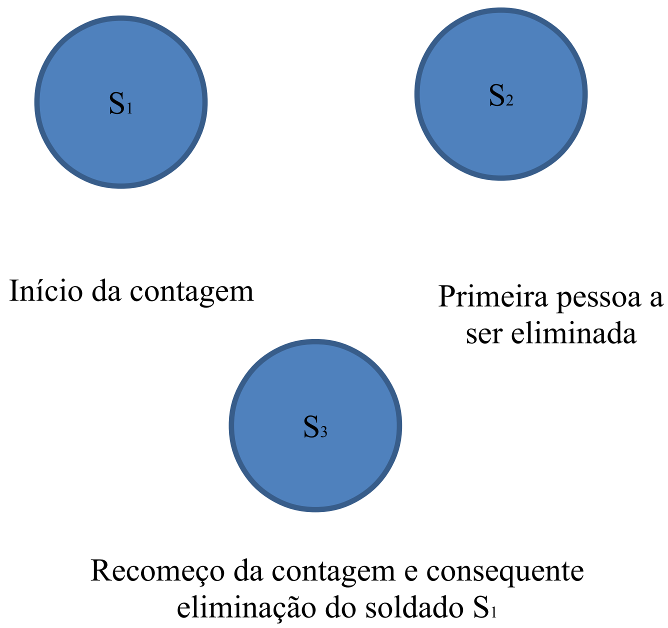


Figura 1: Ilustração do caso n = 3

Para $n=4$, ao percorrer o círculo pela primeira vez, eliminamos os soldados S_2 e S_4 , conforme ilustra a figura abaixo. Na segunda rodada, reiniciamos a contagem no soldado S_1 , com a consequente eliminação do soldado S_3 . Para este caso, temos que S_1 será o soldado sobrevivente.

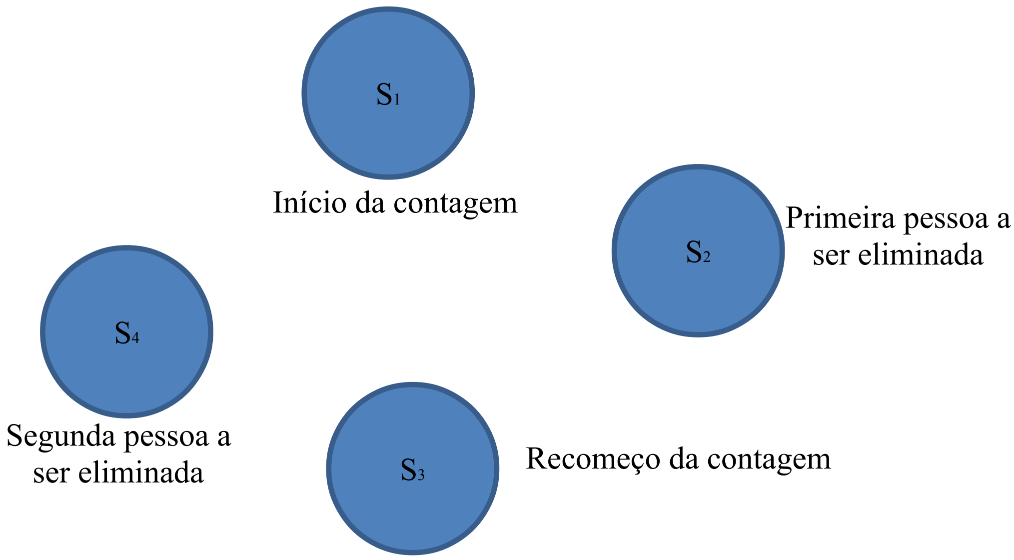


Figura 2: Ilustração do caso n = 4

Repetimos este procedimento para os casos em que o círculo contém cinco e seis soldados, nos quais sobrevivem S_1 e S_5 , respectivamente. Neste momento, constatamos que, para $m=2$, na primeira rodada serão eliminados os soldados nas posições pares, denotados por S_{2k} , o que nos levou a concluir que a posição do soldado sobrevivente será ímpar. Além disso, se o número n de soldados no círculo é par, então a segunda rodada inicia no soldado S_1 , sendo que essa rodada conterá exatamente a metade dos soldados da formação inicial. Caso contrário, se n for um número ímpar, os alunos conjecturaram que a segunda rodada inicia no soldado S_n . Neste caso, a quantidade de soldados restantes para a segunda rodada é a metade dos soldados da formação inicial mais um. Podemos sintetizar isso da seguinte forma:

- para $n=2k$, na segunda rodada restam k soldados;
- para $n=2k+1$, na segunda rodada restam $k+1$ soldados.

Baseados neste estudo, os alunos perceberam que, para a segunda rodada, nós recaímos no mesmo problema inicial, apenas com um número reduzido de soldados. Além disso, após uma breve familiarização com o problema, alguns alunos preferiram organizar os soldados em uma fila, conforme mostra na figura abaixo. Isso ilustra o entendimento do problema e nos dá segurança para avançarmos na sua solução.

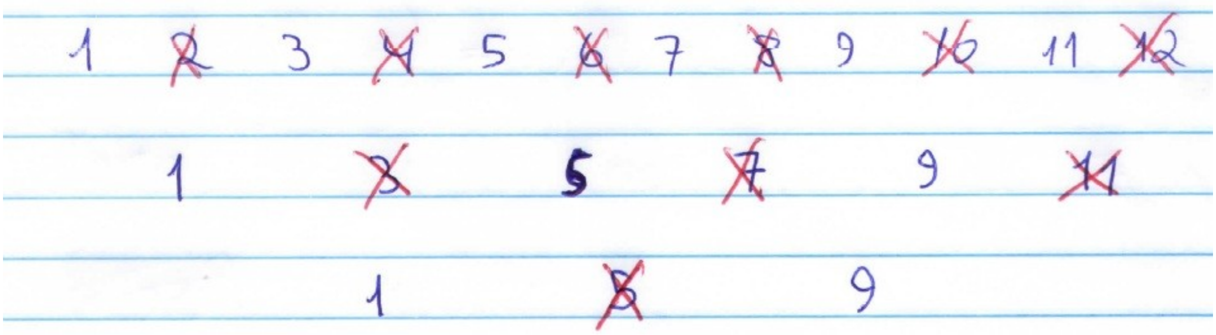


Figura 3: Disposição dos soldados em fila.

Neste exemplo, o aluno resolveu o problema com 12 soldados, dentre os quais sobrevive o soldado na posição nove. A seguir, apresentamos uma tabela elaborada por uma dupla de alunos, onde foram marcados os soldados eliminados em cada rodada. Nestas tabelas, analisamos também o caso $m=3$, isto é, a terceira pessoa a partir do ponto inicial da contagem deverá sair do círculo, sempre em sentido horário.

$m=2$

	1ª volta	2ª volta	3ª volta	4ª volta
1				X
2	X			
3		X		
4	X			
5			X	
6	X			
7		X		
8	X			
9				
10	X			
11		X		
12	X			

Tabela1: Resolução do problema I

$m=3$

	1ª volta	2ª volta	3ª volta	4ª volta
1			X	
2				X
3	X			
4		X		
5				
6	X			
7			X	
8		X		
9	X			
10				
11				X
12	X			

Tabela 2: Resolução do problema II

Assim, no caso em que $m=3$ e o círculo contém 12 soldados, para garantir sua sobrevivência, Josefo deveria se posicionar como soldado S_5 ou S_{10}. De fato, observamos que, para a quinta rodada, iniciando a contagem em S_5, este deveria cometer suicídio, o que era contra o pacto.

Todas estas atividades permitiram aos alunos uma grande familiarização com o problema e a elaboração de muitas conjecturas úteis para sua futura resolução. Além disso, nossa intenção com esta prática pedagógica é proporcionar a abordagem de conceitos matemáticos mais abstratos como relações de recorrências e indução matemática, dando aos alunos uma visão mais ampla da matemática básica estudada na escola. Em função disso, estudar uma versão mais geral deste problema poderia se tornar um empecilho. Para facilitar a retomada e entendimento dos conceitos necessários para a resolução do problema proposto por Flávio Josefo, optamos pelo estudo do caso $m=2$ e $n=12$.

3. ABORDAGEM TEÓRICA

Neste capítulo, abordaremos o estudo dos conceitos matemáticos necessários para a resolução do problema proposto por Flávio Josefo. Com este propósito, elaboramos uma sequência didática de atividades destinadas para um grupo de dez alunos voluntários, com idades entre 15 e 18 anos, da Escola Estadual de Ensino Médio Professora Margot Terezinha Noal Giacomazzi, no município de Canoas, RS.

Nosso principal objetivo, para cada encontro proposto, é fornecer meios para que os alunos se apropriem de um formalismo matemático adequado, mesmo que ainda de maneira muito primitiva. Isso vem de acordo com as ideias de (Giraldo, 2013, p. 4) que afirma "que a escola tem um papel tão importante quanto a academia na própria produção do conhecimento: criar condições para que o novo conhecimento superior seja estabelecido".

Ao todo, realizamos nove encontros presenciais nos quais abordamos o estudo de Sequências, em especial das Progressões Aritmética e Geométrica, além das Relações de Recorrências e, finalmente, o Princípio de Indução Matemática.

Em cada um destes tópicos, procuramos fazer com que os alunos compreendessem a ideia de infinito e que, intuitivamente, capturassem a essência do Princípio da Indução Matemática. Compreender o processo de Indução Matemática no Ensino Médio se torna necessário na medida em que introduz na vida do aluno problemas acerca do infinito. Conforme afirma o Professor Abramo

> "é com o conceito de indução que se estabelece o primeiro contato com a noção de infinito em Matemática, e por isso ele é muito importante; porém, é ao mesmo tempo, sutil e delicado." (Abramo, 2009, p. iii)

A recursividade também nos permite trabalhar com este tipo de problema, muito embora seja outro tema pouco comum nos currículos de matemática do Ensino Médio. Segundo Morgado,

> “É necessário valorizar os raciocínios recursivos pois hoje, com a revolução da tecnologia, é extremamente importante saber raciocinar recursivamente. Mas este é um assunto que exige dos alunos um raciocínio mais elaborado, sendo um tanto abstrato.” (Morgado, 2003)

Em função das dificuldades resultantes da abordagem destes conteúdos um tanto abstratos, fez-se importante a elaboração de uma prática pedagógica adequada, capaz de tornar o aluno apto a compreender todos os conceitos e propriedades envolvidas no processo. A partir deste momento, passaremos a destacar todas as atividades desenvolvidas, bem como as dúvidas elencadas pelos discentes em todo o processo.

No primeiro encontro, formalizamos uma parceria entre alunos e professor na qual combinamos como seria o desenvolvimento desta pesquisa. Além disso, estudamos alguns casos particulares do problema de Josefo conforme já relatado na seção 1.2.

3.1 SEGUNDO ENCONTRO

Este segundo encontro foi dedicado ao estudo das Sequências Numéricas e, em particular, da Progressão Aritmética. Introduzimos a definição de sequências para, posteriormente, estudar seus casos especiais na forma das progressões aritmética e geométrica.

Para o estudo das Progressões Aritméticas, damos uma atenção especial à fórmula da soma de n termos de uma PA, já introduzindo a demonstração das fórmulas previamente estudadas em aula.

3.1.1 Sequências

Começamos nosso segundo encontro com o estudo das sequências numéricas. Iniciamos as atividades com algo mais simples, para nos próximos assuntos evoluirmos o grau de complexidade e, posteriormente, realizarmos demonstrações matemáticas.

Nesta oportunidade, definimos sequência como uma sucessão de elementos, ou seja, um encadeamento de fatos que se sucedem. Nesse sentido, citamos exemplos que permitissem observar como as sequências são comuns em nosso dia a dia, conforme podemos notar a seguir:

Exemplo Inicial: Imagine que uma pessoa da cidade de Canoas tenha anotado as temperaturas máximas em um período do mês de novembro de 2011. O resultado pode ser visto na seguinte tabela:

Dia	4	5	6	7	8	9	10	11	12
ºC	29	30	31	33	34	34	34	25	23

Tabela 3: Temperaturas máximas em Canoas – (dados hipotéticos)

Estes dados coletados quanto à temperatura em Canoas formam um conjunto com os elementos dispostos numa determinada ordem, o qual denominamos sequência. Matematicamente, quando temos uma sequência numérica qualquer, representamos o seu primeiro termo por a_1, seu segundo termo por a_2 e assim sucessivamente, sendo o n-ésimo termo representado por a_n . No exemplo proposto inicialmente, identificamos $a_1=29$, $a_2=30$ e $a_9=23$. Neste caso, concluímos que $n=9$ representa o número total de elementos presentes na sequência.

3.1.2 Progressão Aritmética

Neste mesmo encontro, abordamos o conceito de progressão aritmética (PA). Salientamos que uma progressão aritmética é, na verdade, uma sequência numérica que obedece a algumas propriedades específicas. Isso não se tornou uma tarefa muito difícil na medida em que os alunos já haviam estudado este assunto em sala de aula. Em função disso, trabalhamos este conceito sob um novo ponto de vista, de maneira que os alunos pudessem deduzir algumas propriedades interessantes inerentes a este tipo de progressão.

Inicialmente, definimos uma progressão aritmética como uma sequência na qual, dado um termo, obtemos o termo seguinte acrescentando uma quantidade fixa. A partir da definição, percebemos que $a_n=a_{n-1}+r$ e, com isso, concluímos que

$$a_2=a_1+r$$
$$a_3=a_2+r=a_1+r+r=a_1+2\mathrm{r}$$
$$a_4=a_3+r=a_1+2\mathrm{r}+r=a_1+3\mathrm{r}$$

Desta forma, foi possível conjecturar que o termo geral de uma progressão satisfaz

$$a_n=a_1+(n-1)r.$$

Em seguida, estudamos a soma dos termos de uma progressão aritmética finita. Para tal, abordamos o mesmo raciocínio desenvolvido por Carl Friedrich Gauss no ano de 1787, aos 10 anos de idade[7]. Na oportunidade, Gauss frequentava o terceiro ano do ensino fundamental quando, na aula de Aritmética, o professor

---

7 Maiores detalhes acerca deste assunto podem ser acessados no endereço: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/EnsMed/expensmat3_1_1.pdf (último acesso: 06/02/2013)

pediu aos alunos que calculassem o valor da soma

$$S = 1 + 2 + 3 + ... + 98 + 99 + 100.$$

Gauss, muito prontamente, escreveu o número 5050, impressionando a todos pela rapidez e inteligência.

Neste momento, explicamos aos alunos o que Gauss havia observado. Basicamente, como

$$S = 1 + 2 + 3 + ... + 98 + 99 + 100$$

$$S = 100 + 99 + 98 + ... + 3 + 2 + 1$$

representam a mesma soma então,

$$2S = 101 + 101 + 101 + ... + 101 + 101 + 101$$

é uma soma com 100 parcelas. Ou seja, $2S = 101\, x\, 100$, donde segue que $S = 5050$.

Com base no raciocínio desenvolvido por Gauss, pedimos que os alunos determinassem a soma de sete termos em progressão aritmética. Neste caso, obtivemos que $S = \frac{(a_1 + a_7)7}{2}$. Isso permitiu com que os alunos conjecturassem que a soma dos n termos de uma progressão aritmética satisfaz

$$S = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}.$$

Neste momento de nossa prática, apenas aceitamos esta conjectura, deixando a demonstração de sua validade para a aula sobre o Princípio de Indução Matemática.

3.2 TERCEIRO E QUARTO ENCONTROS

Para estes encontros, abordamos a definição de progressão geométrica, com os principais objetivos de

- entender o processo de construção de uma progressão geométrica;
- diferenciar progressões geométricas das progressões aritméticas;
- estabelecer a fórmula da soma dos termos de uma progressão geométrica finita;
- ressaltar sob que condições podemos obter a soma de uma progressão geométrica infinita.

Os alunos já haviam estudado esse assunto com o professor em sala de aula, o que nos possibilitou dar um enfoque de revisão para certas definições. Em contrapartida, esta familiaridade com o assunto nos permitiu abordar certos resultados de uma maneira mais formal.

3.2.1 Progressão geométrica

Iniciamos este encontro com uma breve revisão do conceito de Progressão Geométrica (PG). Ressaltamos que uma PG é uma sequência numérica em que cada termo tem uma relação especial com o anterior, exatamente como ocorre com os termos de uma PA. Neste caso, qualquer termo posterior é igual ao termo anterior multiplicado por um valor fixo q. Com base na definição, os alunos concluíram que os termos de uma progressão geométrica satisfazem

$$\begin{matrix} a_2 = a_1 q \\ a_3 = a_2 q \\ a_4 = a_3 q \\ a_5 = a_4 q \end{matrix} .$$

Ou seja, $a_n = q a_{n-1}$.

Através da observação do comportamento destes termos, questionamos os alunos sobre a possibilidade de determinar a_5 sem conhecermos os termos anteriores. De fato, para determinar a_5 , precisamos conhecer $a_{4,} a_{3,} a_2$. Isso se torna um problema para a determinação de termos muito grandes numa PG. Por um raciocínio semelhante ao desenvolvido no estudo das PA, concluímos que

$$a_3 = a_2 q = a_1 q q = a_1 q^2$$

Analogamente, substituindo $a_3 = a_1 q^2$ na equação que determina o valor de a_4, obtemos

$$a_4 = a_3 q = a_1 q^2 q = a_1 q^3 .$$

Isso nos permitiu generalizar este comportamento, conjecturando que o termo geral de uma progressão geométrica satisfaz

$$a_n = a_1 q^{n-1} .$$

Neste momento de nossa prática, apenas aceitamos esta conjectura, deixando a demonstração de sua validade para a aula sobre o Princípio de Indução Matemática. Uma vez de posse desta fórmula, partimos para o estudo de um exemplo de aplicação. Apresentamos uma situação problema sobre reprodução de bactérias, que para os alunos foi um desafio.

Exemplo: Existem bactérias que se reproduzem de forma extremamente rápida. Um exemplo é a bactéria que causa a sífilis (chamada treponema pallidum) cada uma delas se transforma em 8 iguais no período de 1 hora. Se uma bactéria desse tipo começa a se reproduzir, quantas elas serão 12 horas depois, supondo que nenhuma delas tenha morrido?

Iniciamos a resolução deste problema elaborando um pequeno esquema no qual os alunos pudessem identificar a_1 e a razão q .

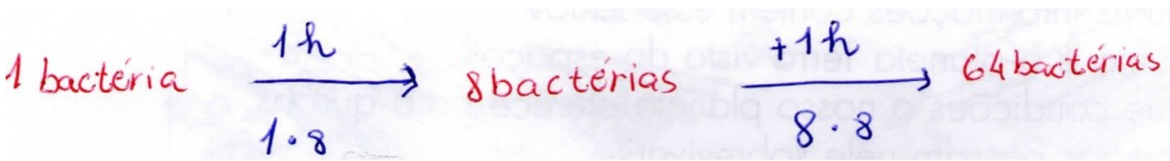


Figura 4: Esquema para o problema das bactérias

A partir deste esquema concluímos que o primeiro termo desta PG é $a_1 = 1$ e a razão é $q = 8$. Com isso, podemos calcular a quantidade de bactérias após 12 horas utilizando $a_n = a_1 q^{n-1}$.

Fazendo os cálculos, obtemos que $a_{12} = 1 x 8^{11} = 8589934592$.

Esse tipo de exercício desestabilizou os alunos na medida em que saiu do padrão dos exercícios estudados normalmente, exigindo inclusive uma leitura minuciosa para que fosse possível identificar a_1 e a razão q.

Num segundo momento, abordamos o estudo da soma dos termos de uma progressão geométrica. Iniciamos este tópico com o seguinte exemplo:

Exemplo: Qual é a soma dos 12 primeiros termos da PG (7, 14, 28, 56,112, 224, 448, 896, 1792, 3584, 7168, 14336)?

Naturalmente, os alunos somaram todas as parcelas e obtiveram o resultado correto. Neste momento, nos questionamos sobre o que deveria ser feito se a progressão geométrica tivesse 30 termos ou mais. Ou seja, existe alguma maneira simples para determinar a soma dos termos de uma progressão geométrica?

Para responder a esta pergunta, consideramos uma progressão geométrica (a_n) qualquer. Observamos que

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n \qquad (1)$$

representa a soma dos n primeiros termos desta progressão. Neste momento, foi conveniente conversamos sobre o significado dos três pontos que escrevemos em (1), ressaltando que essa soma tem n parcelas.

Multiplicando ambos os membros da igualdade em (1) por q obtemos:

$$qS_n = qa_1 + qa_2 + qa_3 + \ldots + qa_n$$

Como $a_n = a_{n-1} q$, então

$$qS_n = a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n + a_{n+1} \qquad (2)$$

Comparamos as igualdades (1) e (2), termo a termo. Isso nos permitiu concluir que a subtração destas igualdades satisfaz

$$S_n - qS_n = a_1 - a_{n+1} \qquad (3)$$

Colocando o fator S_n em evidência na igualdade (3), obtemos

$$S_n(1-q) = a_1 - a_{n+1} \quad .$$

Como $a_{n+1} = a_1 q^n$, então

$$S_n(1-q) = a_1 - a_1 q^n$$

e, com isso, $S_n(1-q) = a_1(1-q^n)$. Portanto,

$$S_n = a_1 \frac{(1-q^n)}{(1-q)}$$

representa a soma dos n primeiros termos desta progressão geométrica.

Neste momento, os alunos puderam comparar nossos estudos com os conhecimentos prévios sobre o assunto adquiridos em sala de aula. Alguns se perguntaram sobre a semelhança desta fórmula com a obtida em aula:

$$S_n = a_1 \frac{(q^n - 1)}{(q-1)}$$

Mostramos, na verdade, que se tratava da mesma equação apenas observando que esta nova fórmula é obtida se multiplicarmos o divisor e o quociente por (-1). E ainda podemos obter esta fórmula na demonstração fazendo (2) – (1) e portanto isso mostra que não importa qual a subtração que escolhemos, o resultado será o mesmo.

Encerramos nosso estudo sobre progressões geométricas abordando o comportamento da soma no caso em que temos infinitas parcelas. Inicialmente, para uma progressão crescente, retomamos a PG (7, 14, 28, 56,112, 224, 448, 896, 1792, 3584, 7168, 14336) e acrescentamos novos termos. A cada nova parcela, a soma aumentava consideravelmente. Facilmente os alunos constataram que seria impossível determinar esta soma a medida em que as parcelas aumentassem muito. No que segue, analisamos o que acontece com esta soma para progressões decrescentes.

Exemplo: Determine a soma da PG $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \frac{3}{16}, \frac{3}{32}, \frac{3}{64}, \frac{3}{128}, \ldots\right)$.

Inicialmente, verificamos que

$$\frac{3}{2}+\frac{3}{4}=2{,}25$$

$$\frac{3}{2}+\frac{3}{4}+\frac{3}{8}=\frac{21}{8}=2{,}625$$

$$\frac{3}{2}+\frac{3}{4}+\frac{3}{8}+\frac{3}{16}=\frac{45}{16}=2{,}8125$$

$$\frac{3}{2}+\frac{3}{4}+\frac{3}{8}+\frac{3}{16}+\frac{3}{32}=\frac{93}{32}=2{,}90625$$

$$\frac{3}{2}+\frac{3}{4}+\frac{3}{8}+\frac{3}{16}+\frac{3}{32}+\frac{3}{64}=\frac{189}{64}=2{,}953125$$

$$\frac{3}{2}+\frac{3}{4}+\frac{3}{8}+\frac{3}{16}+\frac{3}{32}+\frac{3}{64}+\frac{3}{128}=\frac{381}{128}=2{,}976525$$

$$\frac{3}{2}+\frac{3}{4}+\frac{3}{8}+\frac{3}{16}+\frac{3}{32}+\frac{3}{64}+\frac{3}{128}+\frac{3}{256}=\frac{765}{256}=2{,}98828125$$

A partir destes cálculos, percebemos que a soma dos termos da PG está se aproximando de 3. Neste momento, observamos que cada nova parcela que adicionamos na soma tem valor menor e nos questionamos sobre o que estava influenciando esse comportamento. Concluímos que a razão $q<1$ para esta PG era o fator causador deste resultado.

Discutimos com o grupo sobre o comportamento de potências de números entre zero e um, o que nos levou a introdução de noções básicas acerca do limite de uma sequência.

Analisando alguns valores das potências de $\frac{1}{2}$ temos que:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}=0,25$$
$$\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{32}=0,03125$$
$$\left(\frac{1}{2}\right)^8=\frac{1}{256}=0,00390625$$
$$\left(\frac{1}{2}\right)^{15}=\frac{1}{32768}=0,0000305175$$

Questionamos os alunos sobre o comportamento desta sequência para potências cada vez maiores. Com o auxílio de uma calculadora, concluímos que estas frações diminuem a medida que o expoente aumenta. Ou seja, quando a razão da progressão geométrica é um número $0<q<1$ e o número de termos da progressão é grande, teremos que q^n tende a zero. Consequentemente, torna-se possível obter a soma de uma progressão geométrica de infinitos termos e razão $0<q<1$ através da fórmula

$$S_n=\frac{a_1}{(1-q)}$$

Nesta etapa de nossas atividades, a abordagem dos conteúdos passou a ter um caráter matemático mais formal, o que deixou os alunos intrigados pela maneira com a qual confirmamos a validade de cada resultado a partir de um simples exemplo. Isto é, alguns alunos passaram a questionar a validade de certas propriedades matemáticas, haja visto que elas apenas lhes foram transmitidas, sem jamais terem sido justificadas ou demonstradas.

3.3 QUINTO E SEXTO ENCONTROS

Nos dois encontros seguintes, abordamos o conceito de relação de recorrência. Num primeiro momento, procuramos compreender o que é uma relação de recorrência passando, em seguida, para o estudo da resolução das mesmas. Desenvolvemos nossa prática pedagógica de tal forma que os alunos pudessem compreender que as progressões aritmética e geométrica são exemplos de relações de recorrência.

3.3.1 Relação de recorrência

Iniciamos nosso estudo das relações de recorrência através de uma atividade prática, na qual os alunos construíram uma relação de recorrência da seguinte forma:

Exemplo inicial: Escolha a_1 e a_2 números naturais menores do que 10. Em seguida, construa uma relação de recorrência cujo termo posterior é a soma dos dois termos anteriores.

Uma dupla de alunos escolheu os números $a_1=3$ e $a_2=7$. Em seguida, obtivemos a seguinte sequência de termos:

$$a_3=a_1+a_2=3+7=10$$
$$a_4=a_2+a_3=7+10=17$$
$$a_5=a_3+a_4=10+17=27$$

Percebemos que, para encontramos a_{10} deveríamos conhecer a_8 e a_9 . Mais geralmente, os alunos observaram que, para determinar a_n é necessário conhecer a_{n-1} e a_{n-2} . Definimos aqui a primeira relação de recorrência:

$$a_1=3$$
$$a_2=7$$
$$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$$

A partir desta atividade, os alunos puderam não só construir uma relação de recorrência, como também entender a definição destas relações. Em seguida, assistimos a uma aula[8] do professor Augusto César Morgado, com explicação e exemplos de como resolver uma relação de recorrência. Em alguns momentos foi necessário interromper o vídeo, a fim de explicar com maior teor de detalhes o conteúdo que estava sendo abordado.

No segundo encontro destinado ao estudo das relações de recorrência, definimos formalmente o que é uma relação de recorrência. Também propomos um desafio, conforme ilustrado a seguir:

[8] Disponível em: http://video.impa.br/index.php?page=janeiro-de-2003

Desafio: Quantas são as sequências de n termos todos iguais a 0 ou 1, que possuem um número ímpar de termos iguais a 0?

Para solucionar este desafio, elaboramos um esquema a fim de perceber o comportamento de n para valores relativamente pequenos e só então conjecturar como seria seu comportamento para valores consideravelmente grandes.

Temos apenas duas sequências com $n=1$ termo, dadas por

$$\begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array}$$

Neste caso, temos apenas uma sequência com um número ímpar de termos iguais a zero. Por outro lado, temos quatro sequências com $n=2$ termos, representadas por

$$\begin{array}{c} 00 \\ 01 \\ 10 \\ 11 \end{array}$$

Aqui, temos duas sequências com número ímpar de zeros.

Para $n=3$ teremos oito sequências,

$$\begin{array}{c} 000 \\ 001 \\ 010 \\ 011 \\ 100 \\ 101 \\ 110 \\ 111 \end{array}$$

obtendo somente quatro sequências com um número ímpar de zeros.

A cada novo dígito inserido, percebemos que o número de sequências dobra. Após analisarmos muitos outros casos, conjecturamos que o número total de sequências é 2^n e o número total de sequências com número ímpar de zeros é $2^{(n-1)}$. Frisamos aos alunos o fato de ser apenas uma conjectura e que, nos encontros seguintes, verificaríamos se essa resposta funciona para todos os casos.

Finalizamos nosso estudo sobre relações de recorrência abordando suas formas de resolução. Continuamos assistindo ao vídeo do Professor Morgado, onde ele explica de maneira didática como encontrar a solução de relações de recorrência de primeira e segunda ordem.

Como última atividade, propomos a resolução da relação de recorrência $A_{n+2} - 5A_{n+1} + 6A_n = 0$. Para isso, assistimos a um vídeo[9] do professor Morgado sobre este assunto e, a cada passo da resolução explanada por ele, interrompíamos o vídeo e aplicávamos suas explicações ao nosso problema. Inicialmente, os alunos escreveram a equação característica $x^2 - 5x + 6 = 0$ desta relação, determinando suas raízes $x = 2$ e $x = 3$.

Explicamos aos alunos que, em função destas raízes, a solução da relação de recorrência é da forma $a_n = C_1 2^n + C_2 3^n$. Os valores para C_1 e C_2 somente serão determinados caso o problema nos forneça alguns dados adicionais, denominados condições iniciais.

A abordagem de um assunto com um grau de complexidade maior, numa turma de alunos do Ensino Médio, nos exigiu uma atenção especial. Durante a exibição do vídeo, fizemos várias interrupções para retomar as explicações do professor Morgado. Abordar esse assunto com os alunos é possível e de extrema importância neste nível de ensino, pois o raciocínio recursivo é muito utilizado na prática. Destacamos, por exemplo, que a recursividade é de uso frequente na informática, uma área que os alunos tem contato diariamente. Ao saberem disso, a turma demonstrou maior interesse e uma curiosidade aguçada sobre o assunto.

3.4 SÉTIMO E OITAVO ENCONTROS

Em nossos próximos encontros, abordamos o Princípio de Indução Infinita. Conforme afirma o professor Abramo (2009), esse assunto "é um tanto sutil e delicado". Portanto, torna-se necessário utilizar uma linguagem simples e até figurativa, usando variados exemplos para auxiliar na compreensão deste importante princípio matemático.

---

9 http://video.impa.br/index.php?page=janeiro-de-2003

3.4.1 Indução Infinita

Para iniciar a aula, apresentamos aos alunos a seguinte situação problema:

Exemplo inicial: Se enfileirarmos as peças de um jogo de dominó, o que ocorre se empurramos a primeira peça dessa fila?

A resposta foi unânime: todas as peças do dominó cairão. Ou seja, o comportamento do conjunto de peças é totalmente previsível, mesmo tendo muitas peças enfileiradas. Todos concordamos que, se um conjunto de peças for derrubado, a próxima peça na fila também cairá.

Em seguida, abordamos outro exemplo, conhecido por indução galinácea e criado pelo filósofo Bertrand Russel (1872 – 1970):

> “Havia uma galinha nova no quintal de uma velha senhora. Diariamente, ao entardecer, a boa senhora levava milho às galinhas. No primeiro dia, a galinha, desconfiada, esperou que a senhora se retirasse para se alimentar. No segundo dia, a galinha, prudentemente, foi se alimentando enquanto a senhora se retirava. No nonagésimo dia, a galinha, cheia de intimidade, já não fazia caso da velha senhora. No centésimo dia, ao se aproximar a senhora, a galinha, por indução foi ao encontro dela para reclamar o seu milho. Qual não foi a sua surpresa quando a senhora pegou-a pelo pescoço com a intenção de pô-la na panela.” (Hefez, 2009, p. 8)

Com esses dois exemplos lúdicos, os alunos puderam ter uma breve noção do que iríamos começar a estudar. Isto é, uma vez conhecido o comportamento de uma propriedade para um certo número de casos, podemos conjecturar que a mesma valerá para qualquer outro caso.

Basicamente, os dois exemplos anteriores retratam o Princípio de Indução Matemática, cujo enunciado formal é dado a seguir:

Princípio da Indução Matemática: Considere n_0 um inteiro não negativo. Suponhamos que, para cada inteiro $n \geqslant n_0$, seja dada um proposição $p(n)$. Suponha que se pode verificar as seguintes propriedades:

(a) $p(n_0)$ é verdadeira;

(b) se $p(n)$ é verdadeira então $p(n+1)$ também é verdadeira, para todo $n \geqslant n_0$.

Então $p(n)$ é verdadeira para qualquer $n \geqslant n_0$.

Propomos a realização de alguns exercícios para consolidar esse conhecimento adquirido. Iniciamos com a demonstração da fórmula da soma dos n primeiros números naturais.

Exemplo inicial: Determinar a soma dos n primeiros números naturais.

Para resolver este exemplo, inicialmente relembramos que

$$S = \frac{(a_1 + a_n) n}{2}$$

representa a soma dos termos de uma progressão aritmética. Para a soma dos n primeiros números naturais, teremos

$$S = \frac{(1+n) n}{2}. \qquad (1)$$

Verificamos que esta igualdade é verdadeira para $n=1$. Em seguida, por hipótese de indução, assumimos que a igualdade em (1) é verdadeira para algum número natural n . Em seguida, observamos que a soma dos $n+1$ primeiros números naturais satisfaz

$$S=\frac{(1+n)n}{2}+(n+1)$$
$$S=\frac{(n+n^2)}{2}+\frac{[2(n+1)]}{2}$$
$$S=\frac{n^2+3\text{n}+1}{2}$$

donde segue que $S=\frac{(n+2)(n+1)}{2}$. Observamos que esta última igualdade obtida segue de (1), ao substituirmos n por $n+1$. Ou seja, provamos que a igualdade em (1) também é verdadeira para $n+1$. Portanto, pelo Princípio de Indução Matemática, provamos que a soma dos n primeiros números naturais satisfaz

$$S=\frac{(1+n)n}{2}$$

para todo número natural n.

Como exercício, verificamos a validade da fórmula para a soma de n termos de uma progressão geométrica. Os alunos contribuíram para a solução do exercício e, principalmente, mostraram ter compreendido a demonstração por Indução Matemática.

Uma vez entendido este princípio, provamos a veracidade de outras fórmulas matemáticas. Neste momento, iniciamos uma nova etapa de nossos estudos através da análise determinadas situações problemas. Em particular, procuramos por uma forma fechada para a resolução das relações de recorrência, isto é, precisamos determinar uma fórmula para a_n que independa dos termos anteriores. Para isso, aplicamos o exemplo a seguir:

Exemplo: É possível determinar a soma dos n primeiros números ímpares?

Seja $P(n)$ a soma dos n primeiros números ímpares. Em particular, temos que

$$P(1)=1 \quad .$$
$$P(2)=1+3=4$$

$$P(3)=1+3+5=9$$

$$P(4)=1+3+5+7=16$$

$$P(5)=1+3+5+7+9=25$$

Desta listagem, os próprios alunos conjecturaram que a soma dos n primeiros números ímpares satisfaz

$$P(n)=1+3+5+...+2\text{n}-1=n^2 \quad .$$

No que segue, vamos validar essa conjectura utilizando o Princípio de Indução Matemática. Já verificamos que $P(1)=1=1^2$. Por hipótese de indução, suponhamos que $P(n)=n^2$ seja verdadeira, para algum número natural n . Vamos verificar se esta igualdade é verdadeira para $n+1$; ou seja, mostraremos que $P(n+1)=(n+1)^2$.

Por hipótese de indução,

$$P(n)=1+3+5+...+2\text{n}-1=n^2$$

Logo,

$$P(n+1)=P(n)+2\text{n}+1$$
$$P(n+1)=1+3+5+...+2\text{n}-1+2\text{n}+1$$
$$P(n+1)=n^2+2\text{n}+1$$
$$P(n+1)=(n+1)^2$$

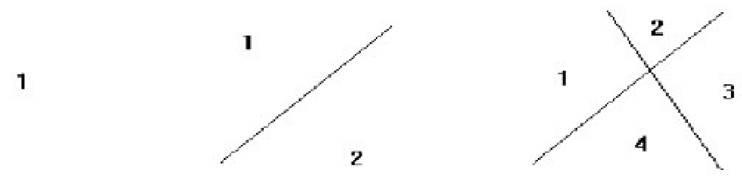
e, portanto, pelo Princípio de Indução Matemática, provamos que a soma dos n primeiros números ímpares satisfaz $P(n)=n^2$.

Basicamente, através destes exemplos, percorremos todos os processos estudados até o momento. Ou seja, conjecturamos uma possível solução, verificamos a validade dessa solução e, por último, encontramos uma forma fechada como solução do problema. A necessidade de encontrar essa fórmula fechada surge do fato de que, para calcularmos o valor de a_n , precisamos conhecer a_{n-1} , o que não se torna prático para n muito grande. É conveniente encontrar uma fórmula com a qual podemos determinar qualquer valor da sequência, sem precisarmos dos termos anteriores.

Para finalizar o estudo deste assunto resolvemos o seguinte exercício:

Exercício: Qual é o número máximo de regiões definidas por n retas no plano?

Iniciamos a resolução deste exercícios apresentando um esquema, conforme ilustram as figuras abaixo.



$L_0 = 1$ $\qquad$ $L_1 = 2$ $\qquad$ $L_2 = 4$

Figura 5: Regiões no plano I

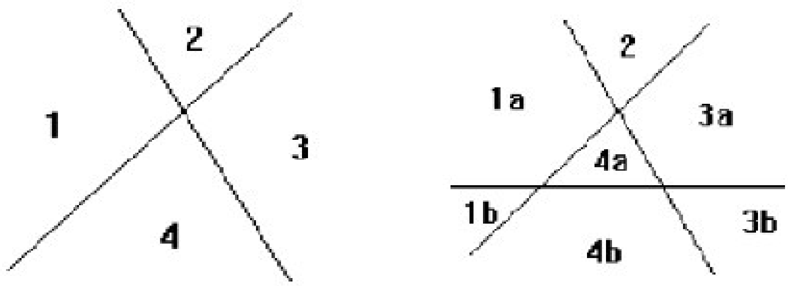


Figura 6: Regiões no plano II

Chamamo de L_n o número de regiões formadas no plano, através deste esquema, conjecturamos que $L_n = L_{n-1} + n$ e $L_0 = 1$.

Para o que segue, encontramos a forma fechada para este problema. Começamos reescrevendo L_n :

$$L_n = L_{n-1} + n$$
$$L_n = L_{n-2} + (n-1) + n$$
$$L_n = L_{n-3} + (n-2) + (n-1) + n$$
$$L_n = L_{n-4} + (n-3) + (n-2) + (n-1) + n$$
$$\vdots$$
$$L_n = L_0 + 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + (n-3) + (n-2) + (n-1) + n$$

Ou seja, L_n é a soma dos n primeiros números naturais e, portanto, satisfaz

$$L_n = \frac{(1+n)n}{2} + 1$$

Para concluir precisamos provar, por indução, a veracidade desta forma. Se $n=0$, então $L_0 = \frac{(1+0)0}{2} + 1 = 1$.

Por hipótese de indução, suponhamos que $L_n = \frac{(1+n)n}{2} + 1$ seja válida para algum número natural n. Mostraremos que a mesma é verdadeira para $n+1$ retas. Observamos que

$$L_{n+1} = L_n + n = (\frac{(1+n)n}{2} + 1) + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} + (n+1).$$

e, portanto, $L_n = \frac{(1+n)n}{2} + 1$, para todo $n \geqslant 0$.

Toda essa bagagem de conteúdos desenvolvida com os alunos serviu de base para que, no último encontro, pudéssemos solucionar o problema de Flávio Josefo.

4. RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DE FLÁVIO JOSEFO

Dedicaremos este capítulo à resolução do problema proposto por Flávio Josefo. Nosso objetivo é formalizar todas as observações e conjecturas feitas no primeiro encontro e já destacadas na seção 2.2. Na oportunidade, realizamos um estudo de casos mais simples deste problema, no qual os alunos puderam observar que

- para $n=2\mathrm{k}$, na segunda rodada restam k soldados;
- para $n=2\mathrm{k}+1$, na segunda rodada restam $k+1$ soldados

onde n é o número de soldados do grupo e $m=2$, isto é, cada segunda pessoa no círculo será eliminada. Além disso, os alunos perceberam que, para a segunda rodada, o problema se torna equivalente ao inicial, apenas apresentando um número reduzido de soldados.

Para o caso , a $m=2$ resolução do problema de Josefo consiste, basicamente, em determinar a posição do soldado sobrevivente no círculo. Para isto, vamos enumerar cada soldado no círculo com os números de 1 a 12, em sentido horário. Vamos denotar por $S(n)$ o número do soldado sobrevivente.

Recordamos que, se $n=1$ soldado, então $S(1)=1$ representa a posição do soldado sobrevivente. Por outro lado, se $n=2$ soldados, então o soldado de número 2 será eliminado e, portanto, $S(2)=1$. Também observamos que, se $n=3$ soldados, então $S(3)=3$. Uma vez entendido este processo, os alunos completaram a tabela a seguir, contendo a posição dos soldados sobreviventes para diferentes valores de n :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$S(n)$	1	1	3	1	3	5	7	1	3	5	7	9

Tabela 4: Soluções do Problema de Flávio Josefo para valores pequenos

A partir disto, os alunos perceberam que é $S(n)$ sempre um número ímpar, uma vez que, para $m=2$, na primeira rodada são eliminados os soldados representados por números pares.

Deste momento em diante, analisamos o problema variando os valores de n . Inicialmente, estudamos o comportamento da sequência $S(n)$, para $n=2\mathrm{k}$ um número par. Para tal, a partir dos dados obtido na Tabela 1, observamos que

$$
\begin{gathered}
S(2)=S(2.1)=1=2\mathrm{S}(1)-1\\
S(4)=S(2.2)=1=2\mathrm{S}(2)-1\\
S(6)=S(2.3)=5=2\mathrm{S}(3)-1\\
S(8)=S(2.4)=1=2\mathrm{S}(4)-1\\
S(10)=S(2.5)=5=2\mathrm{S}(5)-1\\
S(12)=S(2.6)=9=2\mathrm{S}(6)-1
\end{gathered}
$$

Com esta análise, os alunos puderam perceber que, para $n=2\mathrm{k}$, temos que $S(2\mathrm{k})=2\mathrm{S}(k)-1$, com $k\in N$, o que caracteriza uma relação de recorrência. Obviamente, a intervenção do professor se fez muito importante para a obtenção deste resultado.

De maneira análoga, concluímos que se $n=2\mathrm{k}+1$ é um número ímpar, então $S(2\mathrm{k}+1)=2\mathrm{S}(k)+1$, com $k\in N$.

Uma vez de posse destas informações, os alunos concluíram que a resolução do problema de Josefo era equivalente a resolução da relação de recorrência

$$
\begin{gathered}
S(1)=1\\
S(2\mathrm{k})=2\mathrm{S}(k)-1\\
S(2\mathrm{k}+1)=2\mathrm{S}(k)+1
\end{gathered}
$$

Paral tal, primeiramente sugerimos a construção de uma tabela contendo os valores de $S(n)$, com o número de soldados n variando de 1 a 16, como destacamos a seguir:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$S(n)$	1	1	3	1	3	5	7	1	3	5	7	9	11	13	15	1

Tabela 5: Soluções do Problema de Josefo em blocos

Uma análise detalhada desta tabela permitiu a percepção de algumas propriedades inerentes a sequência $S(n)$. Por exemplo, observamos que $S(2)=S(4)=S(8)=S(16)=1$, o que nos permitiu conjecturar que $S(n)=1$, para todo $n=2^p$. Além disso, notamos que

$$S(3)=S(5)=S(9)=3$$
$$S(6)=S(10)=5$$
$$S(7)=S(11)=7$$

Desta forma, os alunos verificaram a existência da sequência (1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, …) que se inicia a cada potência de 2, conforme podemos observar na Tabela 2. O comportamento previsível desta sequência permite, inclusive, a obtenção de outros valores para $S(n)$.

Convém ressaltar que as identidades acima estabelecidas foram obtidas mediante a observação de um número pequeno casos. Por esse motivo, questionamos os alunos quanto a validade destas igualdades para todo número natural p . Ou seja, se uma dada propriedade vale para um número finito de casos, como podemos nos valer disso para concluir sua validade de um modo mais geral? Neste sentido, os alunos compreenderam que, para verificar a validade da relação de recorrência encontrada, necessitaremos do Princípio da Indução Matemática.

Num primeiro momento, utilizamos o Princípio de Indução Matemática para mostrar que $S(n)=1$, para todo $n=2^p$. Com efeito, se $p=0$, então $n=1$ e, como já observamos anteriormente, neste caso sobrevive o soldado S_1 . Ou seja, $S(1)=1$ e, desta forma, constatamos a validade da nossa proposição para $n=1$.

Por hipótese de indução, suponhamos que $S(2^p)=1$ para algum $p\in N$. Mostraremos que $S(2^{p+1})=1$. Porém, para todo $n=2\mathrm{k}$ número par, observamos que $S(n)=2\mathrm{S}(k)-1$. Em particular, para $n=2^{p+1}$, temos que

$$S(n)=S(2^{p+1})=S(2.2^p)=2\mathrm{S}(2^p)-1$$

Por hipótese de indução, temos que $S(2^p)=1$ e, com isso, $S(2^{p+1})=2\mathrm{S}(2^p)-1=1$. Portanto, provamos por Indução Matemática que, para todo $n=2^p$, o soldado sobrevivente é $S(n)=1$.

Nosso próximo passo consiste em analisar o comportamento de $S(n)$ para $n\neq 2^p$. Com o auxílio da Tabela 2, observamos que $S(3)=S(5)=S(9)=3$. Isso nos leva a concluir que, para todo $n=2^p+1$, temos $S(n)=3$. Além disso, $S(6)=S(10)=5$ nos induz a concluir que, para todo $n=2^p+2$, temos $S(n)=5$. De maneira análoga, $S(7)=S(11)=7$ nos induz a concluir que, para todo $n=2^p+3$, temos $S(n)=7$.

A partir dessas observações, passamos a analisar o comportamento da relação de recorrência obtida para $S(n)$, com $n=2^p+r$ e $r\in N$ tal que $0\leqslant r<2^p$. Com esta nova escrita para n , os alunos concluíram, com o auxílio do professor, que se r é par, então n é par. Analogamente, se r é ímpar, então n é ímpar.

Desta forma, se r é par, então

$$S(n)=S(2^p+r)=2\mathrm{S}(2^{p-1}+\frac{r}{2})-1 \tag{1}$$

e, analogamente, se r é ímpar, então

$$S(n)=S(2^p+r)=2\mathrm{S}(2^{p-1}+\frac{r-1}{2})+1 \tag{2}$$

Solicitamos aos alunos que verificassem a validade das igualdades (1) e (2) para diferentes valores de r e p . Essa atividade pode auxiliar na tarefa de encontrarmos uma equação candidata a solução da relação de recorrência.

Para o caso em que $p=r=1$, temos $n=2^{(1)}+1=3$ e, com isto, segue da igualdade (2) que

$$S(n)=2\mathrm{S}(2^{1-1}+\frac{1-1}{2})+1=2\mathrm{S}(2^0+\frac{0}{2})+1=2\mathrm{S}(1)+1=2.1+1=3=2\mathrm{r}+1$$

Por outro lado, se $p=2$ e $r=2$, temos $n=2^{(2)}+2=6$ e, com isso, segue da igualdade (1) que

$$S(n)=2\mathrm{S}(2^{2-1}+\frac{2}{2})-1=2\mathrm{S}(2^1+1)-1=2\mathrm{S}(3)-1=2.3-1=5=2\mathrm{r}+1$$

Fizemos mais alguns exemplos neste sentido, de modo a concluirmos que $S(n)=S(2^p+r)=2\mathrm{r}+1$ é uma possível solução para o problema de Josefo. Novamente, vamos utilizar o Princípio de Indução Matemática sobre $n\in N$, para verificar a validade desta possível solução encontrada para quaisquer $p, r\in N$.

Inicialmente, observamos que se $p=r=0$, então $S(1)=2.0+1=1$, donde segue que para um grupo com apenas um soldado, ele próprio sobreviverá, vindo de acordo com que havíamos estudado inicialmente.

Por hipótese de indução, suponhamos que existe um número natural n tal que $S(n)=S(2^p+r)=2\mathrm{r}+1$ para quaisquer $p, r\in N$ Vamos verificar a veracidade desta solução para $n+1$, assim escrevemos n da seguinte forma $n+1=2^p+r+1$, ou seja, $S(n+1)=S(2^p+r+1)=2(r+1)+1$.

Para isto, consideramos se $n+1=2^p+r+1$ é par, da igualdade (1), segue que

$$S(n+1)=S(2^p+r+1)=2S(2^{p-1}+\frac{r+1}{2})-1 .$$

Por hipótese de indução, temos que

$$S(2^{p-1}+\frac{r+1}{2})=2\frac{r+1}{2}+1=(r+1)+1 .$$

Consequentemente

$$S(2^p+r+1)=2S(2^{p-1}+\frac{r+1}{2})-1=2((r+1)+1)-1=2(r+1)+1 .$$

Se $n+1$ é ímpar, pela igualdade (2), temos que

$$S(n+1)=S(2^p+r+1)=2S(2^{p-1}+\frac{(r+1)-1}{2})+1 .$$

Por hipótese de indução,

$$S(2^{p-1}+\frac{(r-1)+1}{2})=2\frac{((r+1)-1)}{2}+1=(r+1)$$

e, consequentemente $S(2^p+r+1)=2S(2^{p-1}+\frac{(r+1)-1}{2})+1=2(r+1)+1$

Ou seja, a fórmula vale para $n+1$ e portanto $S(n)=2\mathrm{r}+1$, $\forall\ n\in\mathbb{N}$.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao longo deste trabalho desenvolvemos uma proposta didática com alunos do segundo ano do Ensino Médio, abordando conteúdos matemáticos mais sofisticados tais como Relações de Recorrências e o Princípio de Indução Matemática, com o objetivo de solucionar o problema de Flávio Josefo.

Analisamos a matemática envolvida em todo esse processo, para então elaborarmos as atividades aos alunos. Ao final de cada encontro, refletimos com os alunos acerca da compreensão dos conteúdos desenvolvidos. Utilizamos esta reflexão para reelaborar o próximo encontro.

O envolvimento e comprometimento dos alunos foram importantes para o sucesso da prática pedagógica. A cada encontro, a turma se sentia mais desafiada, sempre resolvendo todas as atividades propostas.

Ao estudar Sequências Numéricas, Progressão Aritmética e Progressão Geométrica, conteúdos estes que já fazem parte da base curricular do Ensino Médio, percebemos que ainda é possível modificar o enfoque que hoje é dado ao assunto, ampliando os conceitos apresentados pelos livros didáticos, é necessário priorizar que os alunos construa os conceitos, introduzindo algumas demonstrações matemáticas.

Conteúdos como relações de recorrência e indução matemática que são mais abstratos, podem também serem abordados no Ensino Médio, será necessário ter um problema motivador, ou até um enfoque que auxilie a compreensão dos conceitos abordados, no entanto, isso exigirá do educador uma certa bagagem matemática e um planejamento da aula que seja coeso, pois assim terá condições de guiar os alunos neste novo mundo de conhecimentos matemáticos.

Na finalização deste trabalho reforçamos a importância de assuntos como Relações de recorrência e Indução matemática no Ensino da Matemática, pois o primeiro está diretamente ligado a informática e a assuntos já estudados como: PA e PG. E o segundo desenvolve a ideia de infinito, que é conceito um tanto árduo para os alunos compreenderem. E por isso a escola deve permitir que os alunos que aprofundem conceitos matemáticos, ampliando as possibilidades de aprendizagem através de diferentes abordagens dos assuntos estudados.

6. REFERÊNCIAS

FLÁVIO Josefo Disponível em: <http://greciantiga.org/arquivo.asp?num=0581>. Acesso em: 24 fev. 2013.

FOMIN, Dmitri; GENKIN, Sergey; ITENBERG, Ilia. **Círculos Matemáticos - A Experiência Russa.** 1ª edição Rio de Janeiro: Impa, 2010.

HEFEZ, Abramo. **Indução Matemática.** 1ª edição Rio de Janeiro: OBMEP, 2009.

GIRALDO, Victor et al. **Livro Companheiro do Professor de Matemática:** Números Reais. 1ª edição Rio de Janeiro: 2013. No prelo.

JESUS, Eliane Alves de; SILVA, Elisa Fonseca Sena e. **Relações de Recorrência.** Belo Horizonte: 2006.

LIMA, Elon Lages et al. **A Matemática no Ensino Médio.** 6ª edição, Rio de Janeiro: SBM, 2006.

OLIVEIRA, Krerley Irraciel Martins; FERNANDEZ, Adán José Corcho. **Iniciação à Matemática: um curso com problemas e soluções.** 1ª edição, Rio de Janeiro: SBM, 2010.

PROBLEMA de Flávio Josefo Disponível em: <http://www.calendario.cnt.br/Paginas/Josefo.htm>. Acesso em: 24 fev. 2013.

Problema de Flávio Josefo. Disponível em: <http://forum.clubedohardware.com.br/problema-josephus/593331?s=89d541fd50d85d0e414fc79faf9085ba&s=8bef7c5a9083dc6ea8f2a28fd79b44bd&>. Acesso em: 06 mar. 2013.

RELAÇÕES de Recorrência Disponível em: <http://video.impa.br/index.php?page=janeiro-de-2003>. Acesso em: 24 fev. 2013.

SANTOS, José Plínio Oliveira; MELLO, Margarida P.; MURARUI, Idani Teresinha Colzolari. **Introdução à Análise Combinatória.** 4ª edição Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2007.

ANEXOS

Anexo A – Primeiro encontro

PROBLEMA DE JOSEFUS

Professora: Márcia Erondina

Novembro – 2012

UFSM – Mestrado em Matemática - Profmat

Flavio Josefus

- Historiador;
- Nasceu em Jerusalém – (ano 37 ou 38);
- 19 anos – Partido dos fariseus;
- No ano de 64 advogou em favor dos Judeus, em Roma.
- Assistiu ao cerco de Jerusalém nas fileiras Romanas.
- 4 obras escrita em grego.

PROBLEMA DE JOSEFUS

Conta a lenda que um historiador famoso do primeiro século, Flávio Josefus, estava encurralado pelos romanos em uma caverna, juntamente com 11 rebeldes judeus, durante uma guerra entre judeus e romanos. O grupo de rebeldes, preferindo o suicídio à captura, decidiu formar um círculo e, contando ao longo deste, matar cada terceira pessoa restante até não sobrar ninguém. Contudo Josefus, junto com um amigo, não queria participar do pacto suicida, e calculou rapidamente onde ele o amigo deveriam ficar nesse círculo de modo que não fossem mortos

Possíveis Variações

- Com um grupo de 12 pessoas eliminar a terceira restante;
- Com um grupo de 12 pessoas eliminar a segunda restante;
- Com um grupo de 15 pessoas eliminar a terceira restante;
- Outra possível variação;

REGISTRO

- Em duplas elaborar a estratégia de solução para a situação envolvendo qualquer número de pessoa.
- Escrever quais as expectativas com esses encontros e o que você entendeu do encontro de hoje.
- Ficha de cadastro

ANEXO B – Segundo encontro

PROGRESSÃO ARITMÉTICA

Professora: Márcia Erondina

Novembro – 2012

UFSM – Mestrado em Matemática - Profmat

SEQUÊNCIAS

- DEFINIÇÃO:

  Quando escrevemos qualquer quantidade de números, um após o outro, temos o que chamamos de sequência.

  (1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1)

  As sequências são, frequentemente, resultado da observação de um determinado fato ou fenômeno.

SEQUÊNCIAS

- Imagine, por exemplo, que uma pessoa da cidade de Canoas tenha anotado as temperaturas máximas em um período do mês de novembro de 2011. O resultado pode ser visto na seguinte tabela:

Dia	04	05	06	07	08	09	10	11	12
°C	29°	30°	31°	33°	34°	34°	34°	25°	23°

Na linha de cima, temos a sequência dos dias e, na de baixo, a sequência das temperaturas. Nessa sequência, dizemos que o primeiro termo é 29, o segundo termo é 30, o sexto termo é 34.

É conveniente representar cada termo de uma sequência pela letra a, seguida de um índice que indica a sua ordem.

Assim, na sequência das temperaturas temos:

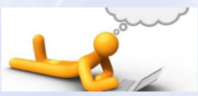
$a_1 = 29 \quad a_2 = 30 \quad a_6 = 34$

- Quando desejamos falar sobre um termo qualquer de uma sequência escrevemos a_n. Assim, no exemplo que acabamos de dar, a_n representa a temperatura máxima registrada no dia n.
- a_n representa a temperatura registrada no primeiro dia;
- Você pode usar as sequências para registrar diversas observações, como a produção de uma fábrica em cada mês, o número de telefonemas que você faz por dia, a taxa de inflação mensal etc.

PROGRESSÃO ARTIMÉTICA

(7, 10, 13, 16, 19)

- Uma progressão aritmética é uma sequência na qual, dado um primeiro termo, obtemos todos os outros acrescentando sempre a mesma quantidade.
  - (3, 7, 11, 15, 19, 23)
  - (9, 7, 5, 3, 1, -1, -3)
  - (4, 4, 4, 4, 4, 4, 4)



Dada uma progressão aritmética, como calculamos sua razão? Pense!

Como a razão é a quantidade que acrescentamos a cada termo para obter o seguinte, podemos dizer que:

A razão de uma progressão aritmética é a diferença entre qualquer termo e o anterior.

- (3, 7, 11, 15, 19, 23)
- (9, 7, 5, 3, 1, -1, -3)
- (4, 4, 4, 4, 4, 4)

GENERALIZAÇÃO

- É a lei matemática que permite determinar os termos de uma sequência é chamada termo geral.

$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad a_5 \quad a_6 \quad \ldots \quad a_n \ldots$

$+R \quad +R \quad +R \quad +R \quad +R \quad +R \quad \ldots \quad +R$

$a_2 = a_1 + R$
$a_3 = a_1 + 2R$
$a_4 = a_1 + 3R$
$a_5 = a_1 + 4R$
....
$a_{10} = a_1 + 9R$

Fórmula do termo geral
$a_n = a_1 + (n - 1)\,R$

Exemplo 1:

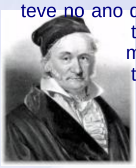
- Você decide economizar dinheiro da seguinte forma:
  - No primeiro mês, guarda R$ 20,00.
  - Nos meses seguintes, guarda sempre R$ 10,00 a mais que no mês anterior.
  - Quanto você guardará no segundo mês? No terceiro mês? E no quinto mês?
  - Qual o termo geral da sequência?

Exemplo 2:

Em janeiro de certo ano, João estava ganhando R$ 70,00 por mês. Seu patrão prometeu aumentar seu salário em R$ 4,00 todos os meses. Quanto João estará ganhando em dezembro do ano seguinte?

SOMA DOS TERMOS DE PA

Deduziremos a fórmula da soma dos termos de uma progressão aritmética usando a mesma ideia que um menino de 10 anos teve no ano de 1787. Esse menino, que se tornou um dos maiores matemáticos de todos os tempos, chamava- se Carl Friedrich **Gauss**.



SOMA DOS TERMOS DE PA

Um pouco de história

O menino Gaus era alemão e vivia na cidade de Brunswick onde, aos 10 anos, frequentava a escola local. Certo dia para manter a classe ocupada, o professor mandou que os alunos somassem todos os números de 1 a 100. Mas, para sua enorme surpresa, o pequeno Gauss anunciou a resposta quase imediatamente.

SOMA DOS TERMOS DE PA

Vamos mostrar como ele calculou "de cabeça" a soma:

$1 + 2 + 3 + \ldots + 100$

Primeiro vamos representar pos S essa soma.

Depois, escrevemos a mesma soma na ordem inversa e, em seguida, somamos as duas, termo a termo.

$$\begin{array}{l} S = 1 + 2 + 3 + \ldots + 98 + 99 + 100 \\ S = 100 + 99 + 98 + \ldots + 3 + 2 + 1 \\ \hline 2S = 101 + 101 + 101 + \ldots + 101 + 101 + 101 \end{array}$$

SOMA DOS TERMOS DE PA

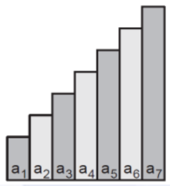
Assim, duas vezes S é igual à soma de 100 parcelas, todas iguais a 101.

Logo:

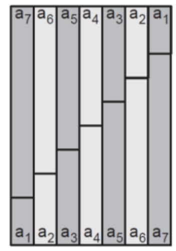
$2S = 100 \cdot 101$
$2S = 10.100$
$S = 5.050$

SOMA DOS TERMOS DE PA

- Podemos imaginar os termos de uma PA como degraus de uma escada.



Como faremos para calcular a soma das alturas de todos os degraus?



SOMA DOS TERMOS DE PA

- Observando o desenho vemos que $a_1 + a_7$ é igual $a_2 + a_6$ que é igual a $a_3 + a_5$ e assim por diante

$$S = \boxed{a_1} + \boxed{a_2} + \boxed{a_3} + \boxed{a_4} + \boxed{a_5} + \boxed{a_6} + \boxed{a_7}$$

$$S = \boxed{a_7} + \boxed{a_6} + \boxed{a_5} + \boxed{a_4} + \boxed{a_3} + \boxed{a_2} + \boxed{a_1}$$

Somando as duas igualdades, obtemos, do lado esquerdo, 2S e, do lado direito, 7 vezes $a_1 + a_7$. Logo:

$$2S = (a_1 + a_7) \cdot 7$$

$$S = \frac{(a_1 + a_7) \cdot 7}{2}$$

SOMA DOS TERMOS DE PA

$$S = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

a_1 é o primeiro termo,

a_n é o último termo,

n é o número de termos.

Exemplo 1

- Calcule a soma dos 15 primeiros números ímpares:

Exemplo 2

Em janeiro de certo ano, João estava ganhando R$ 70,00 por mês. Seu patrão prometeu aumentar seu salário em R$ 4,00 todos os meses. Desejamos saber qual foi o total que ele recebeu em dois anos de trabalho, ou seja, até dezembro do ano seguinte?

Exercício 1

Dada a progressão: 5, 16, 27, 38, ..., calcule:

a) o vigésimo (20º) termo;

b) a soma dos 20 primeiros termos.

ANEXO C – Terceiro e quarto encontros

PROGRESSÃO GEOMÉTRICA

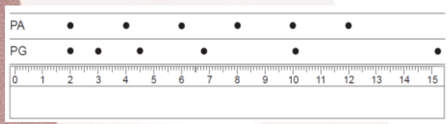
Professora: Márcia Erondina

Novembro – 2012

UFSM – Mestrado em Matemática - Profmat

Progressão geométrica

Observe, no desenho seguinte, alguns termos de uma PA e de uma PG, situados sobre uma régua. Observe o crescimento constante da PA e o crescimento, cada vez mais rápido, da PG.



Definição

- Progressão geométrica (ou simplesmente PG) é uma sequência de números não nulos em que cada um deles, multiplicado por um número fixo, fornece o próximo elemento da sequência. Esse número fixo chama-se razão, e os elementos da sequência são os termos da progressão geométrica.
- Construa três sequências de números, cujos os termos das sequências formem uma progressão geométrica

Considerações

Os termos de uma PG são representados por

$$a_1,\ a_2,\ a_3,$$

e a razão será representada pela letra ***q.***

Se cada termo da PG multiplicado pela razão dá o termo seguinte, então podemos afirmar que a razão da PG é igual a qualquer termo dividido pelo anterior.

Determinação de uma PG

- Como encontramos qualquer termo de uma Progressão geométrica?

Termo Geral

- Para obter então o termo de ordem n, devemos multiplicar o primeiro termo pela razão n-1 vezes, ou seja,

Fórmula do termo geral

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Exercício 1

Existem bactérias que se reproduzem de forma extremamente rápida. Um exemplo é a bactéria que causa a sífilis (chamada *treponema pallidum*): cada uma delas se transforma em 8 iguais no período de 1hora. Se uma bactéria desse tipo começa a se reproduzir, quantas elas serão 12 horas depois, supondo que nenhuma delas tenha morrido?

Exercício 2

Determinar o 12º termo da PG: 7, 14, 28, ...

Exercício 3

- Escolha um valor para o a_1 e construa três progressões geométricas com as seguintes razões:
- a) q = 5
- b) q = ½
- c) q = 1
-
- d) q = -3

O que você pode concluir?

Classificação de PG

- Crescente:

Uma progressão geométrica é crescente quando o consequente de um termo qualquer é maior que este termo. Isto ocorre quando $q > 1$ e $a_1 > 0$, ou quando $0 < q < 1$ e $a_1 < 0$.

- Decrescente:

Uma progressão geométrica é decrescente quando o consequente de um termo qualquer é menor que este termo. Isto ocorre quando $q > 1$ e $a_1 < 0$, ou quando $0 < q < 1$ e $a_1 > 0$.

Classificação de PG

- Constante:

Uma progressão geométrica é constante quando a sua razão é igual a 1, ou quando o primeiro termo é igual a zero. Neste caso todos os termos da P.G. têm o mesmo valor.

- Oscilante ou Alternada:

Uma progressão geométrica cujos termos alternem ou oscilem de positivo para negativo e vice-versa, é denominada P.G. oscilante ou P.G. alternante. Isto ocorre quando $q < 0$ e $a1 \neq 0$.

Soma dos termos de uma PG

- Imagine a soma dos 12 primeiros termos da PG do exercício 2:

7 + 14 + 28 + 56 + 112 + 224 + 448 + 896 + 1792 + 3584 + 7168 + 14336

- Será possível obter o resultado sem precisar somar todas as parcelas?

Soma dos termos de uma PG

$$s = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$$

Calcular, com auxílio da fórmula, a soma que apareceu na introdução da aula

Soma dos termos de uma P. G. Ilimitada

- Crescente:

É possível calcular a soma de todos os termos?

7 + 14 + 28 + 56 + 112 + 224 + 448 + 896 + ...

- Decrescente:

E agora?

3/2 + ¾ + 3/8 + 3/16 + 3/32 ...

Soma dos termos de uma P. G. Ilimitada

- Quando n é um número consideravelmente grande temos que:

$$q^n = ?$$

- Então como ficará a soma de uma PG ilimitada decrescente?

Soma dos termos de uma P. G. Ilimitada

$$S = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

- Quando q^n tende a 0 temos:

$$S = \frac{a_1}{1 - q}$$

Exercício 3

No exercício 1, você escreveu quatro PG's, agora calcule a soma dos dez primeiros termos de cada uma delas.

- OBRIGADA – Profª Márcia Erondina

ANEXO D – Quinto encontro

Relações de Recorrência

Professora: Márcia Erondina
Novembro – 2012
UFSM – Mestrado em Matemática - Profmat

Relações de Recorrência

- ATIVIDADE PRÁTICA
- VÍDEO – 23min
- Construir uma sequência
- VÍDEO – 9 min

Exercícios

Calcular os dez primeiros termos de cada uma das sequências:

a) A sequência S é definida por recorrência por

1. $S(1) = 2$
2. $S(n) = 2S(n-1)$ para $n \geq 2$

Exercícios

b) A sequência T é definida por recorrência por

1. $T(1) = 1$
2. $T(n) = T(n-1) + 3$ para $n \geq 2$

Essas sequências são PA ou PG?

Desafio

Quantas são as sequências de n termos todos iguais a 0, 1 ou 2, que possuem um número ímpar de termos iguais a 0?

Obrigada – Prof ª Márcia Erondina

ANEXO E – Sexto encontro

Relações de Recorrência

Professora: Márcia Erondina

Novembro – 2012

UFSM – Mestrado em Matemática - Profmat

Desafio

Quantas são as sequências de n termos todos iguais a 0, 1 ou 2, que possuem um número ímpar de termos iguais a 0?

Definição

- Relações de Recorrência é técnica de contagem que determina contagem para n baseada na contagem para valores menores que n.
- Exemplo: 0! = 1

  1! = 1

  2! = 1 * (1!)

  ...

Como resolver Relações de Recorrência

- Vídeo

Resolvendo Relações de Recorrência

- $A_{n+2} – 5\ A_{n+1} + 6\ A_n = 0$
- $A_0 = 2$
- $A_1 = 5$

- Obrigada - Profª Márcia Erondina

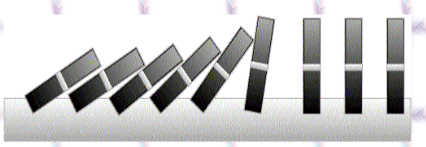
ANEXO F – Sétimo encontro

Indução Matemática

Professora: Márcia Erondina
Novembro – 2012
UFSM – Mestrado em Matemática - Profmat

Indução Matemática

- O que acontece quando empurramos a primeira peça desta fila de dominós?



Definição lúdica

A indução empírica foi batizada, de modo irônico, pelo matemático, filósofo e grande humanista inglês do século passado, Bertrand Russel (1872-1970), de *indução galinácea*, com base na seguinte historinha:

Definição Ludica

Havia uma galinha nova no quintal de uma velha senhora. Diariamente, ao entardecer, a boa senhora levava milho às galinhas. No primeiro dia, a galinha, desconfiada, esperou que a senhora se retirasse para se alimentar. No segundo dia, a galinha, prudentemente, foi se alimentando enquanto a senhora se retirava. No nonagésimo dia, a galinha, cheia de intimidade, já não fazia caso da velha senhora. No centésimo dia, ao se aproximar a senhora, a galinha, por indução, foi ao encontro dela para reclamar o seu milho. Qual não foi a sua surpresa quando a senhora pegou-a pelo pescoço com a intenção de pô-la na panela.

Exemplo:

- Vamos calcular:

1 + 2 + 3 + 4+ … + n

As parcelas desta soma formam uma progressão aritmética, sendo assim já conhecemos uma maneira de somar todos esses termos:

- P(n) = n (n + 1) / 2
- Isso vale sempre? Por quê?

Teoria

Base de Indução (estabelecemos a veracidade da propriedade para n = 1): $P(1)$

Hipótese de Indução (supomos que a propriedade é válida para algum inteiro k, $k \geq 1$): $P(k)$

Passo de Indução (provamos que a propriedade é válida para o inteiro seguinte k+1, ou seja,

que $P(k) \rightarrow P(k+1)$): $P(k+1)$

Exemplo

- Voltando a Soma dos termos de uma progressão aritmética:

P(1) = 1 é verdade?

Utilizando P(n) = n(n+1)/2 e substituindo o n=1 teremos:

P(1) = 1(1+1)/2 = 1, assim temos que P(1) é verdade.

- Hipótese de Indução: P(n) = n(n+1)/2;
- Passo de Indução: P(n+1) = n+1(n+1+1)/2;

Exercício

- Já estudamos também uma fórmula para a soma dos termos de uma progressão geométrica, ela funciona sempre? Vamos verificar isso agora:

$$\boxed{S = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}}$$

ANEXO G – Oitavo encontro

Indução Matemática

Professora: Márcia Erondina

Novembro – 2012

UFSM – Mestrado em Matemática - Profmat

Indução Matemática

É possível encontrar uma fórmula para somar n números ímpares?

- P(1) = 1
- P(2) = 1 + 3 = 4
- P(3) = 1 + 3 + 5 = 9
- P(4) = 1 + 3 + 5 + 7 = 16
- P(5) = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25
- P(n) = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + … +(2n-1) = ?

Indução Matemática

- Agora que concluímos que P(n) = n², vamos provar por indução a validade da mesma.

Como encontrar as fórmulas fechadas?

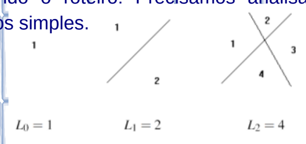
- É necessário passar por três etapas:

1. Analise a solução de casos simples e procure perceber o padrão do problema.
2. Generalize a solução do problema, encontre uma relação de recorrência e prove sua validade.
3. A partir da relação de recorrência, encontre a forma fechada da solução e demonstre sua validade.

Exemplo:

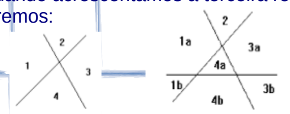
Qual é o número máximo Ln de regiões definidas por n retas no plano?

Seguindo o roteiro: Precisamos analisar para casos simples.



Exemplo:

- Quando acrescentamos a terceira reta teremos:



$L_3 = L_2 + 3 = 7$

- E quando acrescentarmos a quarta reta, teremos quantas regiões?

Exemplo:

Vamos fazer o segundo passo do roteiro para encontrar fórmulas fechadas:

Generalize a solução do problema, encontre uma relação de recorrência e prove sua validade.

$L_n = L_{(n-1)} + n$

E a validade como fazemos?

Exemplo:

$L_0 = 1$

n = 1 $L_1 = L_{(1-1)} + 1 = L_{(0)} + 1 = 1 + 1 = 2$

n = 2 $L_2 = L_{(2-1)} + 2 = L_{(1)} + 2 = 2 + 2 = 4$

n = 3 $L_3 = L_{(3-1)} + 3 = L_{(2)} + 3 = 4 + 3 = 7$

n = 4 $L_4 = L_{(4-1)} + 4 = L_{(3)} + 4 = 7 + 4 = 11$

$L_{n-1} = L_{(n-1-1)} + n - 1 = L_{(n-2)} + n - 1$

$L_n = L_{(n-1)} + n$

Exemplo:

- Vamos resolver a relação de recorrência?

$$L_n = L_{(n-1)} + n$$

E agora vamos para o último passo para encontrar a fórmula fechada.

Exemplo:

- Vamos validar a fórmula fechada utilizando Indução matemática.

Problema do Josefus

Flávio Josefus, estava encurralado pelos romanos em uma caverna, juntamente com 11 rebeldes judeus, durante uma guerra entre judeus e romanos. O grupo de rebeldes, preferindo o suicídio à captura, decidiu formar um círculo e, contando ao longo deste, matar cada terceira pessoa restante até não sobrar ninguém. Contudo Josefus, junto com um amigo, não queria participar do pacto suicida, e calculou rapidamente onde ele o amigo deveriam ficar nesse círculo de modo que não fossem mortos

Problema do Josefus

Pense em uma forma de resolver essa situação.

Obrigada – Professora Márcia Erondina