PROFMAT – MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

FELIPE DE CARVALHO BARROS

Pavimentações do Plano: Propostas lúdicas de aula.

Trabalhando com Ângulos Internos, Simetrias, Isometrias, Obras de Artes e Mediatrizes.

Rio de Janeiro – RJ

1° semestre/2016

FELIPE DE CARVALHO BARROS

Pavimentações do Plano: Propostas lúdicas de aula.

Trabalhando com Ângulos Internos, Simetrias, Isometrias, Obras de Artes e Mediatrizes.

Dissertação apresentada pelo aluno Felipe de Carvalho Barros, à Coordenação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, junto ao Programa PROFMAT – Sociedade Brasileira de Matemática / Instituto de Matemática Pura e Aplicada, para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Paulo Cezar Pinto Carvalho

Rio de Janeiro – RJ

1° semestre/2016

DEDICATÓRIA

Dedico esse trabalho aos meus avós paternos, Vicente (*In memoriam*) e Ivone (*In memoriam)*, que foram a base para que eu chegasse até aqui.

AGRADECIMENTOS

A Deus que colocou as pessoas certas no meu caminho e sempre deu Sua benção para que este mestrado fosse concluído.

Ao Professor Paulo Cezar pelas orientações, sugestões e esclarecimentos. À Professora Asla Sá pelas orientações iniciais e por ter sugerido o tema.

Aos meus pais, Sebastião e Lucia, por me apoiarem durante o mestrado. À minha irmã Gabriela por estar ao meu lado.

À minha namorada Jaqueline, que nos momentos mais difíceis soube me amparar e me dar força para continuar e não desistir, e por entender os momentos que estive longe.

Aos meus queridos amigos de estudo, Adriano, Alexandre, Marcelo, Roberta, Suelen e Rafael da turma PROFMAT/IMPA-2013 pelos momentos que passamos juntos e também por tudo o que me ensinaram.

Aos professores da turma PROFMAT/IMPA-2013 pelos momentos de dedicação nas suas práticas docentes.

À CAPES pelo apoio financeiro.

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo apresentar quatro propostas de aula utilizando a pavimentação do plano como motivação. As quatro propostas buscam trabalhar o conceito matemático de forma lúdica, explorando cores e a criatividade do aluno. Os trabalhos buscam abordar os temas como: ângulos internos (recobrimento do plano), isometrias (técnica da dentada de Escher), simetrias (recortes em papel) e mediatrizes (Diagrama de Voronoi e Triangulação de Delaunay), além de estabelecer e criar relações matemáticas com obras de artes, em especial, as obras de Maurits Cornelis Escher. Também é mostrado com o recobrimento do plano está presente na arquitetura e na natureza. E o objetivo dessas propostas é oferecer ao aluno do Ensino Básico, condições de estabelecer relações entre transformações geométricas e padrões utilizados nas obras de Artes e na Arquitetura.

Palavras-Chave: Geometria, Escher, Voronoi, Delaunay, simetria, mediatrizes, pavimentação, matemática, ângulos internos.

ABSTRACT

This study aims to present four proposals lesson using paving the plan as motivation. The four proposals seek to work the mathematical concept in a playful manner, exploring colors and creativity of the student. The works seek to address issues such as internal angles (plan coverage), isometries (toothed technical Escher) symmetries (clippings on paper) and bisectors (Voronoi diagram and Triangulation Delaunay), and establish and create mathematical relationships with works of art, especially the works of Maurits Cornelis Escher. Also shown with the plan coverage is present in architecture and nature. And the aim of these proposals is to provide students with basic education, able to establish relationships between geometric transformations and patterns used in works of Art and Architecture.

Keywords: Geometry, Escher, Voronoi, Delaunay, symmetry, bisectors, paving, math, internal angles

Sumário

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

Introdução

Ao longo da vida pude observar o distanciamento entre alunos e a matemática e, por isso o tema em questão foi escolhido a fim de aproximar, de forma lúdica e criativa, os alunos da tão temida matemática que, por muitas vezes, no ensino básico, mostra-se abstrata, o que dificulta o entendimento do aluno. Esse trabalho busca trazer para o cotidiano do aluno algumas questões sobre o tema pavimentação que estão presentes à nossa volta mas não reparamos ou não sabemos que têm matemática envolvida por trás de algumas situações.

> *O conhecimento matemático formalizado precisa, necessariamente, ser transformado para se tornar passível de ser ensinado/aprendido; ou seja, a obra e o pensamento do matemático teórico não são passíveis de comunicação direta aos alunos. Essa consideração implica rever a ideia, que persiste na escola, de ver nos objetos de ensino cópias fiéis dos objetos da ciência. (BRASIL, 1997, p.30)[3]*

O trecho acima mostra a preocupação dos PCN's com este tipo de conhecimento abstrato e coloca o professor como principal responsável para a transformação do abstrato da matemática para o real, fazendo com que o entendimento seja claro e proveitoso na vida escolar do aluno; Deixando de lado a ideia de cópia fiel da matemática nos trabalhos de pavimentações do plano e buscando não só o conhecimento formal, mas também o lado criativo.

No Capítulo 1 serão abordados os tipos de pavimentações com figuras regulares congruentes e não congruentes. O objetivo é mostrar que não é possível pavimentar o plano com qualquer tipo de figura regular e demonstrar quais os tipos de pavimentações, com mais de duas figuras diferentes, é possível pavimentar o plano. Com isso, o assunto de ângulos internos pode ser trabalhado.

No capítulo 2 serão abordados os tipos de pavimentações com figuras irregulares. Serão apresentados alguns tipos de pavimentações presentes na natureza, arquitetura e em obras de artes, em especial as obras de Maurits Cornelis Escher e suas técnicas. Temos ainda, a exposição de algumas técnicas de pavimentações do plano com figuras irregulares como: As pavimentações de Penrose, a Triangulação de Delaunay e o Diagrama de Voronoi.

No capítulo 3 proponho quatro atividades de pavimentação do plano que podem ser utilizadas de forma sequencial ou individual de acordo com o currículo escolar. A primeira atividade aborda as figuras regulares e os ângulos internos. Na segunda atividade, temos recortes de papel com o intuito de trabalhar a simetria, mas ainda utilizando o conceito de recobrimento do plano. Na terceira atividade, utilizamos a técnica da dentada (técnica usada por Escher), para trabalharmos conceitos de isometrias no plano. Na quarta e última atividade, utilizamos a Triangulação de Delaunay e o Domínio de Voronoi em pontos distribuídos de forma regular para pavimentar o plano e, para isso, introduzimos o conceito de mediatriz de um segmento de reta. No fim, um breve relato sobre a aplicação dos trabalhos em uma turma de 2° ano do Ensino Médio de uma Escola Estadual localizada no município de Duque de Caxias/RJ.

1. Pavimentação do Plano com Polígonos Regulares

O objetivo deste trabalho é mostrar os diferentes tipos de pavimentações do plano no qual será definido o que é pavimentar o plano.

Segundo Barbosa (1993), um conjunto de polígonos é uma pavimentação do plano se, e só se, o conjunto de polígonos *cobre sem cruzamentos* o plano. Isto é, nenhum polígono sobrepõe ao outro. Este tipo de recobrimento é muito utilizado por pedreiros e ladrilheiros. Barbosa (1993) afirma ainda que, na prática, não conseguiremos uma pavimentação do plano, pois nunca a completaríamos, mas podemos obtê-la idealmente. Podemos, então, entender o plano como uma região poligonal ou a região entre duas retas paralelas.

1.1. Critérios De Classificação Das Pavimentações

1.1.1 – Monoédricas

São pavimentações constituídas de regiões congruentes entre si.

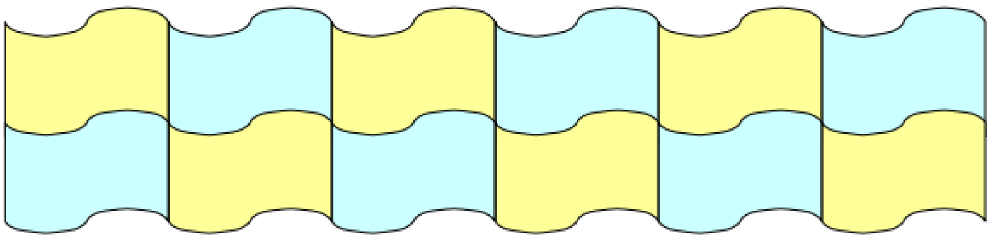


Figura 1: Exemplo de pavimentação monoédrica

1.1.2 – Regulares

As pavimentações regulares são monoédricas com polígonos regulares e congruentes entre si.

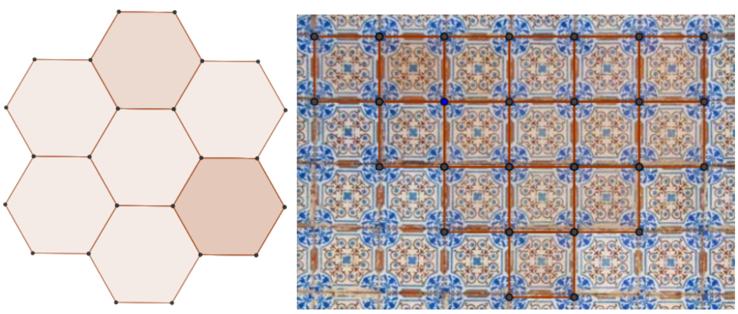


Figura 2: Exemplo de pavimentação monoédrica regular

1.1.3 – Semirregulares

São as pavimentações em que os ladrilhos possuem dois ou mais tipos de polígonos regulares e os vértices possuem as mesmas configurações.

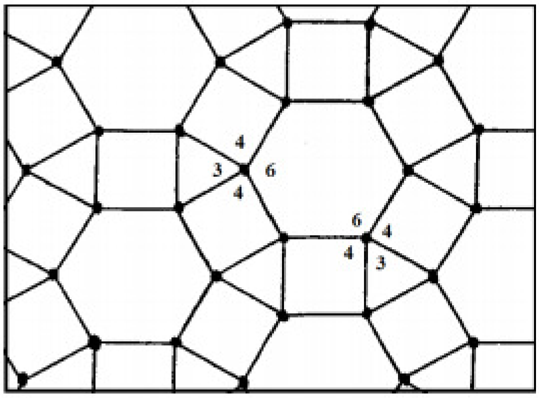


Figura 3: Exemplo de pavimentação Semirregular.

Cada vértice possui a configuração (3, 4, 6, 4).

Alguns tipos de pavimentações Semirregulares:

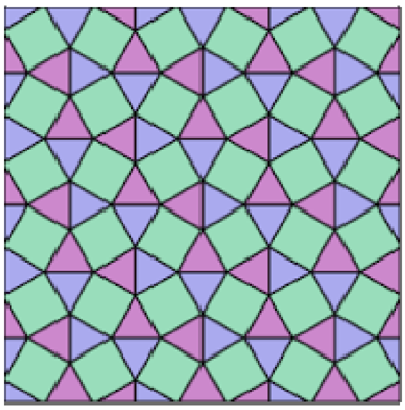


Figura 4: Exemplo de pavimentação semirregular com configuração (4, 3, 4, 3, 3).

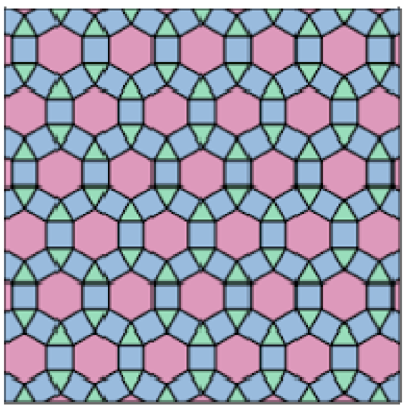


Figura 5: Exemplo de pavimentação semirregular com configuração (6, 4, 3, 4).

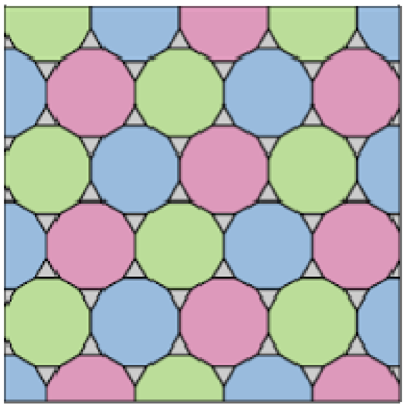


Figura 6: Exemplo de pavimentação semirregular com configuração (12, 3, 12).

1.1.4 – Demi-regulares

São as pavimentações em que os ladrilhos possuem dois ou mais tipos de polígonos regulares, mas os vértices possuem configurações diferentes.

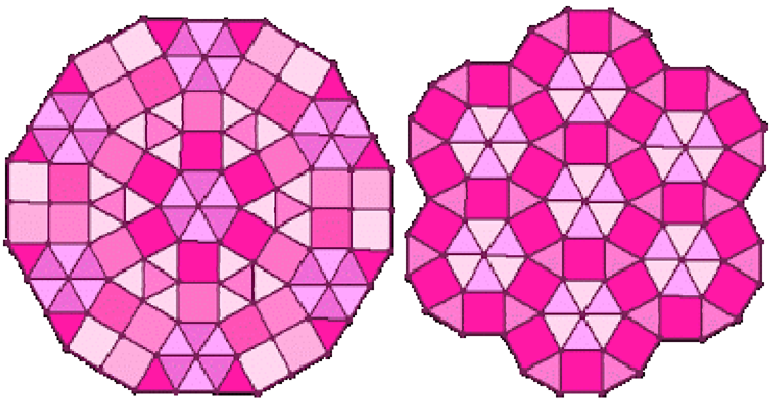


Figura 7: Exemplos de pavimentação Demi-regulares.

1.2. Pavimentação Do Plano Com Cópias Congruentes de Um Único Tipo De Polígono Regular

Quando falamos em pavimentar o plano com apenas um tipo de polígono regular, fazemos a seguinte pergunta:

"É possível pavimentar o plano com qualquer tipo de polígono regular?"

Veremos que a resposta é não e que só podemos pavimentar com triângulo, quadrado e o hexágono.

Para isso, devemos pegar um ponto e tentar colocar ao redor dele os polígonos regulares, se conseguirmos completar a volta sem faltar ou sobrepor esse polígono regular, podemos, então, preencher o plano.

Vale destacar que ao falarmos de polígonos regulares para o preenchimento do plano, estamos falando de polígonos regulares e congruentes. Mais a frente, iremos falar de polígonos regulares e não congruentes no preenchimento do plano.

1° Caso: Triângulo Equilátero

O triângulo equilátero possui ângulos internos iguais a 60° e, ao colocarmos seis deles em volta de um ponto, conseguimos completar a volta (360°).

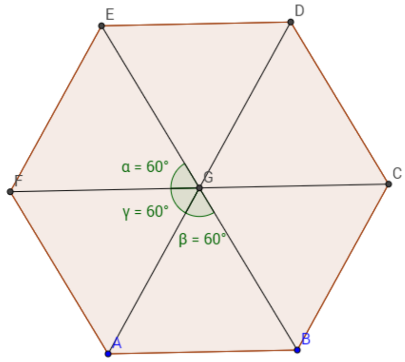


Figura 8: Pavimentação do plano com triângulos equiláteros, explicitando os ângulos.

2° Caso: Quadrado

O quadrado possui ângulos internos iguais a 90° e, ao colocarmos quatro deles em volta de um ponto, conseguimos completar a volta.

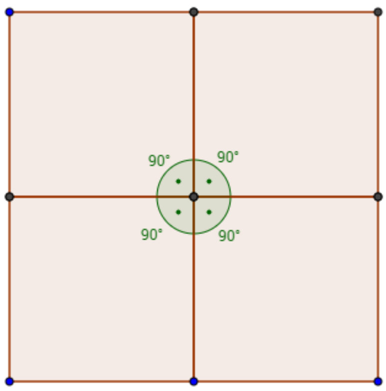


Figura 9: Pavimentação do plano com quadrados, explicitando os ângulos.

3° Caso: Pentágono

O ângulo interno do pentágono vale 108°. Como 108 não é divisor de 360, não podemos completar a volta.

Se colocarmos três pentágonos, teremos 324°, mas se colocarmos quatro, a soma será 432°, o que resultaria em uma sobreposição da figura.

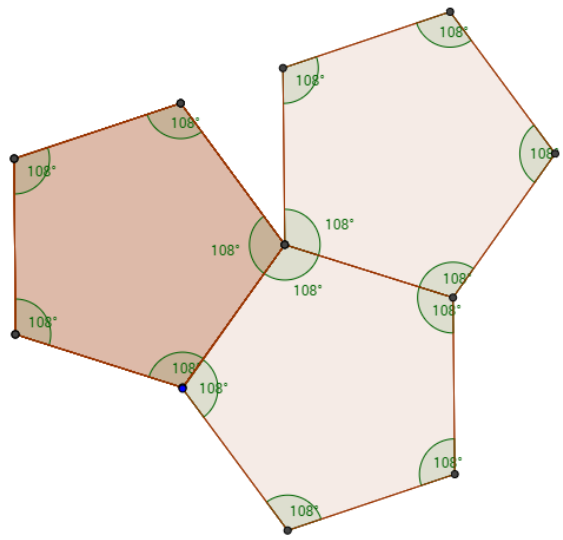


Figura 10: Tentativa de pavimentação do plano com pentágonos, explicitando os ângulos.

4° Caso: Hexágono

O hexágono possui ângulos internos iguais a 120° e, ao colocarmos três deles em volta de um ponto, conseguimos completar a volta.

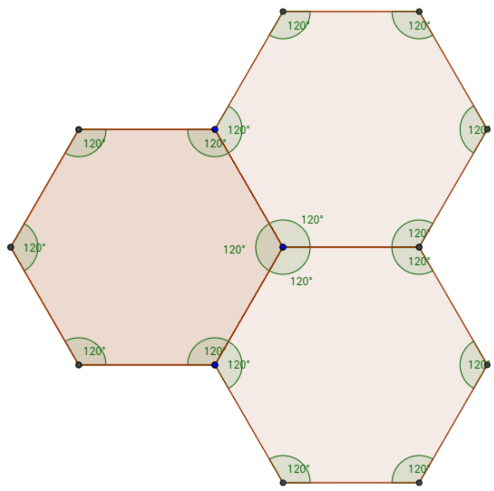


Figura 11: Pavimentação do plano com hexágonos, explicitando os ângulos.

Não vamos tentar todos os polígonos regulares, pois, se pensarmos que precisamos de números inteiros de polígonos e que os ângulos internos de todo polígono é dado por $A_i = \frac{180(n-2)}{n}$, então, podemos concluir que, polígonos com quantidades diferentes de lados, possuem ângulos internos diferentes.

Então, se para os hexágonos são usados três polígonos, para outra figura só poderíamos usar dois polígonos, mas, nenhum polígono regular possui ângulo interno igual a 180°. Nota-se, então, que só podemos pavimentar o plano com esses três polígonos regulares e congruentes (triângulo, quadrado e hexágono).

Podemos observar que, fica ainda mais impressionante se analisarmos e percebermos que, na verdade, todos os tipos de pavimentações só são construídas com quadrados e triângulos regulares, já que o hexágono pode ser dividido em triângulos equiláteros.

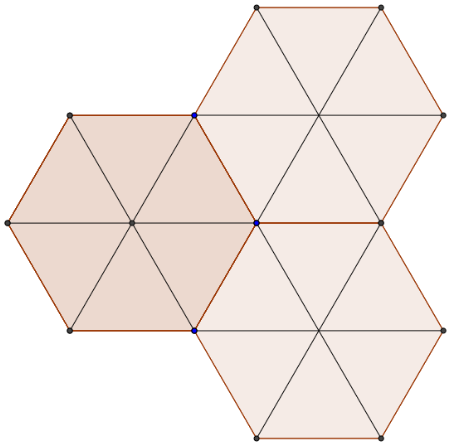


Figura 12: Divisão dos hexágonos, que pavimentaram o plano, em triângulos equiláteros.

1.2.1. Pavimentação Do Plano Com Cópias Não-Congruentes de Apenas Um Tipo De Polígono Regular

Este tipo de pavimentação é do tipo não lado-lado[1], pois como temos figuras diferentes, não conseguimos colocá-las lado-lado.

1.2.1.1 – Triângulos Equiláteros

Com apenas dois triângulos equiláteros:

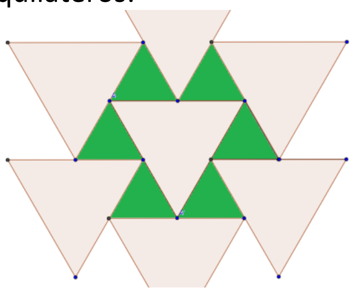


Figura 13: Pavimentação do plano com dois triângulos equiláteros não congruentes.

[1] Uma pavimentação é não lado-lado se, e somente se, toda aresta não é lado comum a dois polígonos.

Com três triângulos equiláteros:

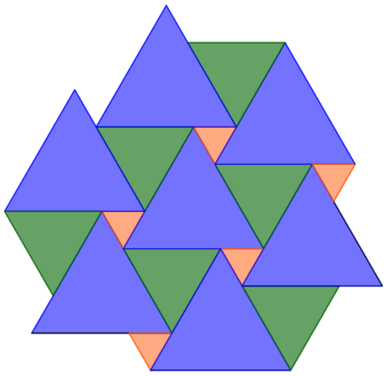


Figura 14: Pavimentação do plano com três triângulos equiláteros não congruentes.

1.2.1.2 – Quadrados

Com dois quadrados

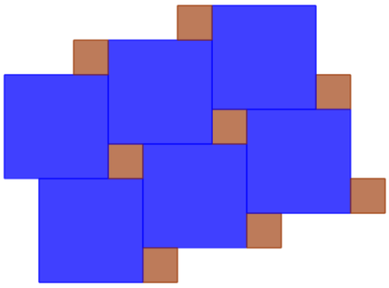


Figura 15: Pavimentação do plano com dois quadrados não congruentes.

Com três quadrados

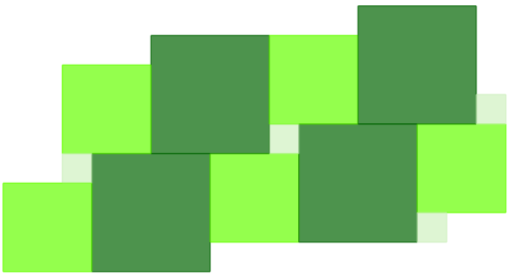


Figura 16: Pavimentação do plano com três quadrados não congruentes.

1.2.1.3 – Hexágono

Em Barbosa (1993) ele sugere como verificação da existência de pavimentação com hexágonos regulares e não congruentes.

Fazendo uma rápida verificação, vemos que é impossível fazer este tipo de pavimentação. Vejamos:

1° Passo: Colocamos um hexágono no plano.

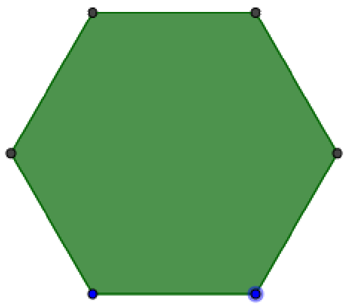


Figura 17: Tentativa de Pavimentação do plano com dois Hexágonos não congruentes.

2° Passo: Em seguida, colocaremos outro hexágono, de aresta menor, em um dos lados.

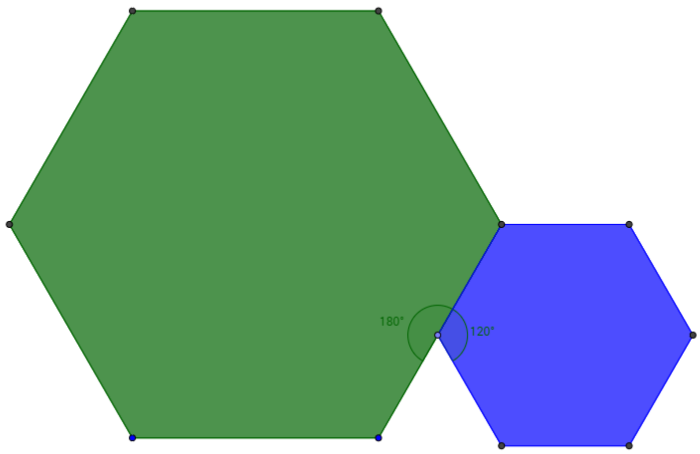


Figura 18: Tentativa de Pavimentação do plano com dois Hexágonos não congruentes.

Observando os ângulos, chegamos à conclusão que não é possível colocar outro hexágono, pois a soma dos ângulos em destaque é de 180°+120° = 300°, restando apenas 60° para completar a volta.

1.3. Pavimentação Do Plano Com Mais de Um Tipo De Polígono Regular

Este tipo de pavimentação requer bastante atenção e por isso devemos ter o controle dos ângulos internos. Um exemplo de Barbosa (1993) mostra essa situação.

Ao tentarmos recobrir o plano com um pentágono, um hexágono e um heptágono, usando a técnica de colocar as figuras ao redor de um ponto, podemos chegar à seguinte figura:

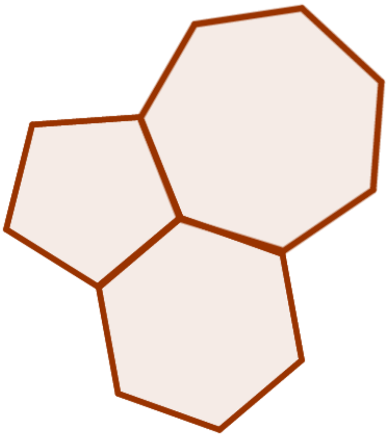


Figura 19: Pavimentação com pentágono, hexágono e Heptágono. Um problema de visualização

Visualmente, a pavimentação parece correta, mas se analisarmos os ângulos, teremos:

$$i_5 + i_6 + i_7 = 108° + 120° + \frac{900°}{7} \cong 356°34$$

Então, está faltando pouco mais de 3° para 360°.

Quando vamos trabalhar esse tipo de conteúdo, com figuras concretas, devemos prestar atenção e ter o controle do ângulo ao redor de um ponto (360°). Criamos a necessidade de prova para que esta figura seja o recobrimento do plano. Por outro lado, pode facilitar e instigar o aluno a conhecer os ângulos internos dos polígonos regulares.

Segundo Coelho (2014) *"Johannes Kepler (1571-1630), em sua obra Harmonia do Mundo, de 1619, trouxe as primeiras investigações referentes à teoria da pavimentação do plano euclidiano utilizando polígonos regulares, apontando um tratamento matemático para o problema."*

Coelho (2014) vai além disso e enuncia o seguinte teorema, que se encontra do livro Harmonia do Mundo, de 1969, de Kepler.

Teorema 01: Existem exatamente onze maneiras de se cobrir o plano utilizando-se exclusivamente polígonos regulares sujeitos às condições:

a) Se dois polígonos regulares intersectam-se, então essa interseção é um lado ou um vértice comum;

b) A distribuição dos polígonos regulares ao redor de cada vértice é sempre a mesma.

A demonstração a seguir, deste teorema, está contida em Coelho (2014).

Demonstração: De fato, suponha que m seja o número de polígonos regulares que formam um nó de uma pavimentação. E considere ainda que $m \geq 3$, pois não faz sentido encaixar apenas um ou dois polígonos em torno de um nó. Como a menor medida de um ângulo interno de um polígono regular é 60° (caso do triângulo equilátero), então, o maior valor de m é seis, pois $\frac{360°}{60°} = 6$. Portanto, $3 \leq m \leq 6$.

Assim, se três polígonos regulares estão ao redor de um nó, sendo o primeiro com n_1 lados e ângulos medindo $\hat{A}_1$, o segundo com n_2 lados e ângulos medindo $\hat{A}_2$ e o terceiro com n_3 lados e ângulos medindo $\hat{A}_3$, pela fórmula dos ângulos internos, tem-se:

$$\hat{A}_1 = \left(1 - \frac{2}{n_1}\right)180°, \hat{A}_2 = \left(1 - \frac{2}{n_2}\right)180° \text{ e } \hat{A}_3 = \left(1 - \frac{2}{n_3}\right)180°$$

Como ao redor de cada nó, a soma dos ângulos é 360° (figura a seguir), então:

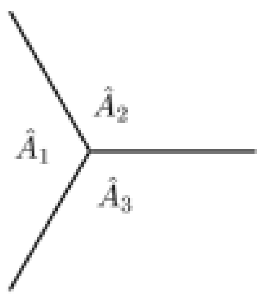


Figura 20: Três polígonos regulares em torno de um nó.

$$\left(1 - \frac{2}{n_1}\right)180° + \left(1 - \frac{2}{n_2}\right)180° + \left(1 - \frac{2}{n_3}\right)180° = 360° \qquad (1)$$

Multiplicando por $\frac{1}{180°}$ ambos os membros da *Eq. (1)*, tem-se:

$$1 - \frac{2}{n_1} + 1 - \frac{2}{n_2} + 1 - \frac{2}{n_3} = 2 \qquad (2)$$

E somando (-3) em ambos as membros da *Eq. (2)*, resulta em:

$$-\frac{2}{n_1} - \frac{2}{n_2} - \frac{2}{n_3} = -1 \qquad (3)$$

Por fim, multiplicando por $\left(-\frac{1}{2}\right)$ ambos os membros da *Eq. (3)*, chega-se na seguinte expressão:

$$\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}=\frac{1}{2} \qquad (4)$$

Sem perda de generalidade, suponha que $n_1 \leq n_2 \leq n_3$. Logo,

$$\frac{1}{n_2}\leq\frac{1}{n_1} \;\; e \;\; \frac{1}{n_3}\leq\frac{1}{n_1}$$

Substituindo na *Eq. (4)* as desigualdades dadas acima, tem-se:

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}\leq\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_1}=\frac{3}{n_1} \qquad (5)$$

$$\frac{1}{2}\leq\frac{3}{n_1} \qquad (6)$$

$$n_1 \leq 6. \quad (7)$$

Fazendo $n_1 = 3$ na *Eq. (4),* obtém-se:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}=\frac{1}{2} \qquad (8)$$

Por outro lado, tem-se que $n_2 \leq n_3$, o que acarreta:

$$\frac{1}{n_3}\leq\frac{1}{n_2} \qquad (9)$$

Assim, substituindo (9) em (8) tem-se:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_2}\geq 12 \rightarrow n_2 \leq 12$$

Variando os possíveis valores de n_2(de 3 até 12) na Eq. (8), obteremos os possíveis valores para n_3 e, assim obtém-se chegaremos às seguintes ternas (n_1, n_2, n_3) como soluções: (3, 7, 42), (3, 8, 24), (3, 9, 18), (3, 10, 15) e (3, 12, 12).

Usando o mesmo argumento para $n_1 = 4, n_1 = 5 \; e \; n_1 = 6$, têm-se os seguintes resultados apresentados na Tabela 1 para três polígonos regulares ao redor de um nó.

Número de polígonos ao redor de um nó	n_1	n_2	n_3
3	3	7	42
	3	8	24
	3	9	18
	3	10	15
	3	12	12
	4	5	20
	4	6	12
	4	8	8
	5	5	10
	6	6	6

Tabela 1: Soluções com três polígonos ao redor de um nó.

Usando raciocínio análogo para quatro, cinco e seis polígonos regulares ao redor de um nó, serão obtidas as seguintes soluções representadas na Tabela 2.

Número de polígonos ao redor de um nó	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	n_6
4	3	3	4	12		
	3	3	6	6		
	3	4	4	6		
	4	4	4	4		
5	3	3	3	3	6	
	3	3	3	4	4	
6	3	3	3	3	3	3

Tabela 2: Soluções com quatro, cinco e seis polígonos ao redor de um nó.

Pelo exposto, até o momento, existem 17 combinações de polígonos regulares que podem ser colocados ao redor de um vértice comum, de modo que não tenha superposição, tampouco espaços vazios. Dessas 17, 3 já foram estudadas anteriormente, quais sejam, as combinações (6, 6, 6), (4, 4, 4, 4) e (3, 3, 3, 3, 3, 3) que são respectivamente a malha hexagonal, quadrada e triangular.

Porém, temos também algumas dessas combinações que admitem segunda interpretação, como no caso da solução (3, 3, 6, 6), que admite uma segunda interpretação, que é (3, 6, 3, 6), como apresentado na figura abaixo:

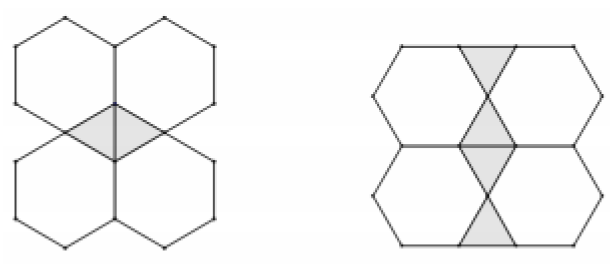


Figura 21: Exemplo de pavimentações (3, 3, 6, 6) e (3, 6, 3, 6).

O mesmo ocorre com as soluções (3, 3, 4, 12), (3, 4, 4, 6) e (3, 3, 3, 4, 4), que admitem uma segunda interpretação, que são respectivamente (3, 4, 3, 12), (3, 4, 6, 4) e (3, 3, 4, 3, 4). Sendo assim, passa-se a ter vinte e uma combinações de polígonos regulares, os quais podem ser colocados ao redor de um vértice comum.

Entretanto, algumas dessas soluções não podem ser estendidas de modo a se obter uma pavimentação do plano. É o que acontece com as combinações envolvendo polígonos regulares com número ímpar de lados e dois polígonos regulares quaisquer com número de lados diferentes. Por exemplo, com um triângulo equilátero não é possível intercalar dois polígonos regulares, um com n lados e outro com m lados, sendo $n \neq m$, de modo a se obter nós idênticos, como exibido na figura a seguir.

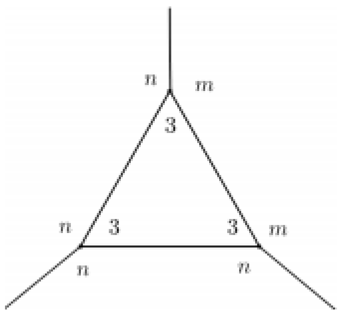


Figura 22: Nós da forma (3, n, m) e (3, n, m).

O mesmo ocorre com os demais polígonos regulares com números ímpares de lados. Nesse caso, as combinações podem ser estendidas se os outros dois polígonos regulares forem congruentes.

Logo, as combinações (3, 7, 42), (3, 8, 24), (3, 9, 18), (3, 10, 15), (4, 5, 20) e (5,5,10) não pavimentam o plano.

Com relação às combinações com quatro polígonos ao redor de um nó, por construção, encontramos quatro combinações que não podem ser estendidas, sendo elas: (3, 3, 4, 12), (3, 4, 3, 12), (3, 3, 6, 6) e (3, 4, 4, 6). Isso por que a distribuição dos polígonos regulares ao redor de um nó, nem sempre é a mesma, como exposto na figura abaixo:

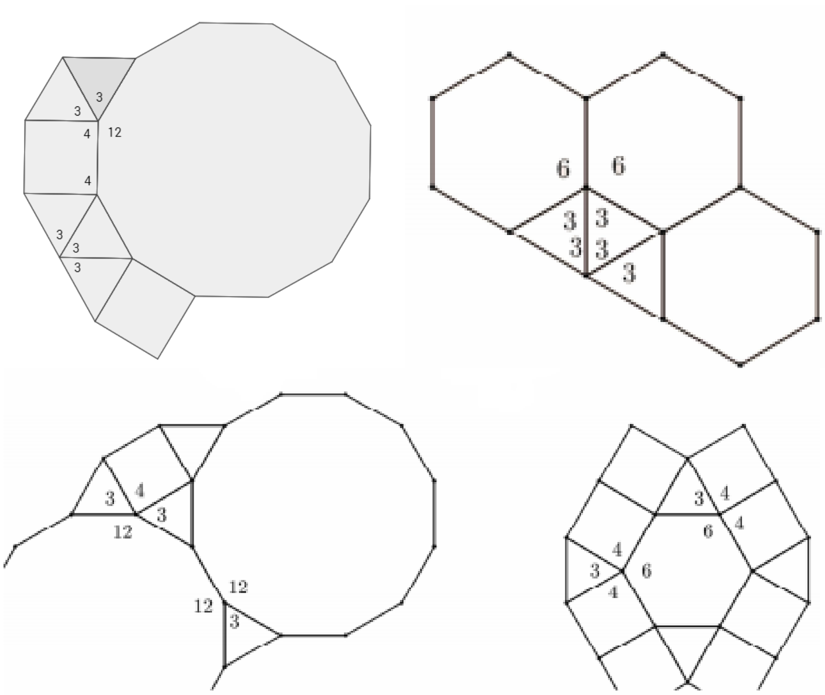


Figura 23: De cima para a direita, temos pavimentações do tipo (3, 3, 4, 12), (3, 3, 6, 6), (3, 4, 3, 12) e (3, 4, 4, 6).

Coelho (2014) conclui que, dessa maneira, das vinte e uma possíveis combinações de polígonos regulares que poderiam pavimentar o plano, dez delas foram descartadas por não estarem de acordo com o teorema de Johannes Kepler.

Concluímos, portanto, que só temos oito configurações para pavimentações com mais de um tipo de polígonos regulares e três configurações com um tipo de polígono regular (visto anteriormente). Vejamos abaixo essas configurações.

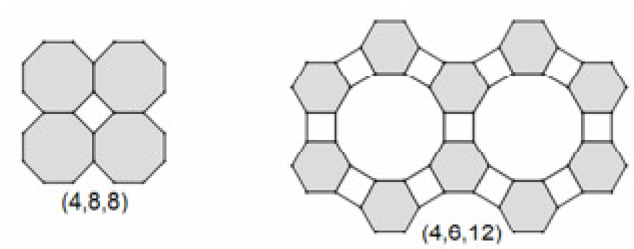


Figura 24: Pavimentações do tipo (4, 8, 8) e (4, 6, 12).

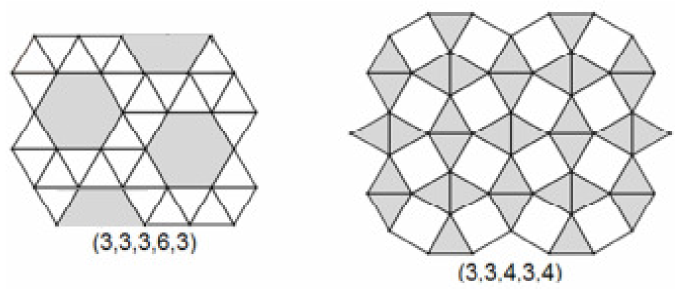


Figura 25: Pavimentações do tipo (3, 3, 3, 6,3) e (3, 3, 4, 3, 4)

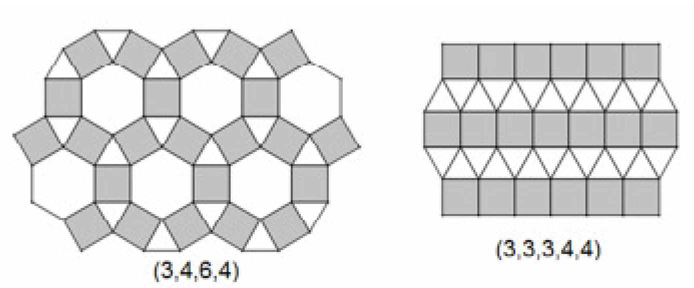


Figura 26: Pavimentações do tipo (3, 4, 6, 4) e (3, 3, 3, 4, 4).

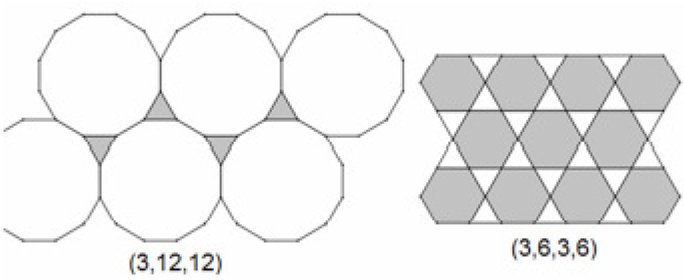


Figura 27: Pavimentações do tipo (3, 12, 12) e (3, 6, 3, 6).

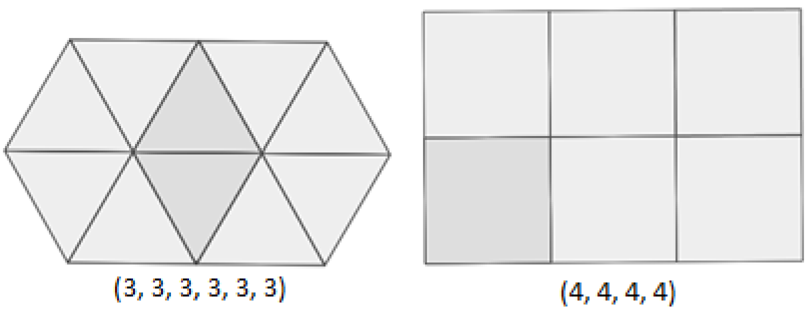


Figura 28: Pavimentações do tipo (3, 3, 3, 3, 3, 3) e (4, 4, 4, 4).

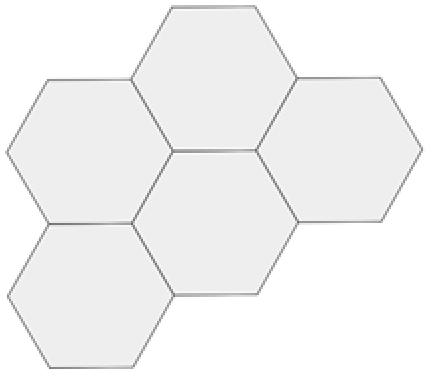


Figura 29: Pavimentação do tipo (6, 6, 6).

Dalcin (1999) enuncia este teorema como:

Teorema de Kepler: Existem exatamente onze maneiras de se cobrir o plano utilizando-se exclusivamente polígonos regulares sujeitos às condições a) e b) anteriormente descritas.

1.4. Pavimentação Do Plano Com Polígonos Replicantes

Definindo polígonos replicantes como sendo figuras geométricas com a propriedade que com cópias idênticas da figura é possível fazer uma pavimentação de uma versão de maior tamanho e mesma forma dessa figura.

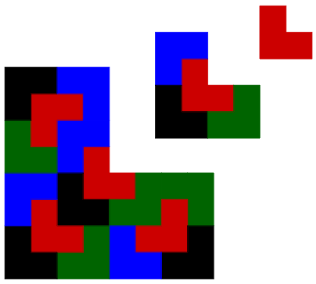


Figura 30: Exemplo de polígono replicante.

A figura menor é um polígono replicante, pois apenas com ele, podemos construir figuras de mesma forma, com tamanhos diferentes. Diante desta situação, podemos trabalhar o conceito de semelhança de figuras geométricas.

Os exemplos simples de polígonos replicantes são os quadrados, pois quatro quadrados, quando colocados lado a lado, formam um novo quadrado. Repetindo o processo, temos um novo quadrado, e assim infinitamente.

Podemos ter exemplos simples de polígonos replicantes como alguns triângulos e paralelogramos.

Figura 31: Paralelogramo como polígono Replicante.

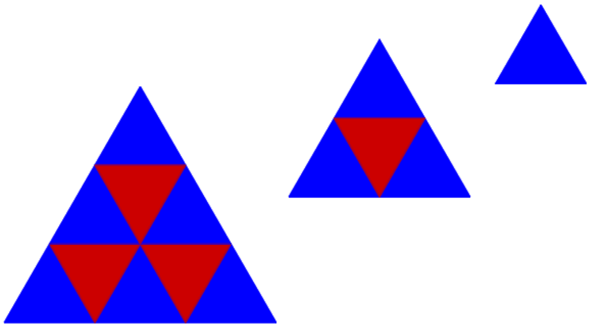


Figura 32: Triângulo como polígono Replicante

Temos alguns polígonos replicantes bem interessantes. Vejamos abaixo:

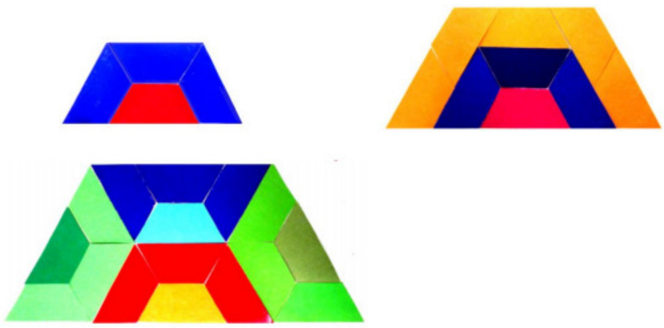


Figura 33: Trapézio como polígono replicante. Disponível em: http://mat.unb.br/lemat/wp-content/uploads/2015/07/07SOLU%C3%87%C3%83O-DAS-ATIVIDADES.pdf

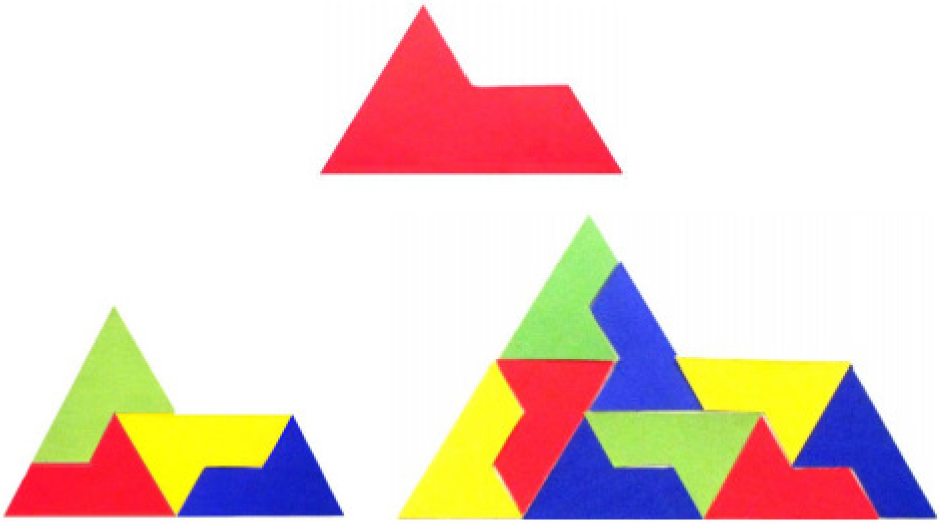


Figura 34: Polígono de 5 lados como polígono replicante. Disponível em: http://mat.unb.br/lemat/wp-content/uploads/2015/07/07SOLU%C3%87%C3%83O-DAS-ATIVIDADES.pdf

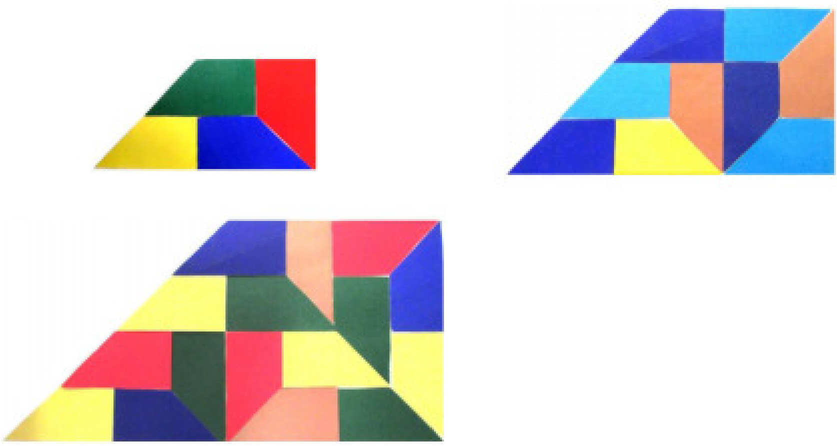


Figura 35: Trapézio como polígono replicante. Disponível em: http://mat.unb.br/lemat/wp-content/uploads/2015/07/07SOLU%C3%87%C3%83O-DAS-ATIVIDADES.pdf

O trabalho com polígonos replicantes estimula o desenvolvimento de novas visualizações de congruência e semelhança. A realização de atividades e experiências estimulam a observação e a comparação das características e das propriedades dos polígonos.

1.5. A Importância Das Cores Nas Pavimentações.

A coloração das pavimentações é de extrema e fundamental importância para que o recobrimento tenha uma melhor visualização e o reconhecimento do padrão de recobrimento. Vejamos duas figuras abaixo, uma sem cor e outra colorida.

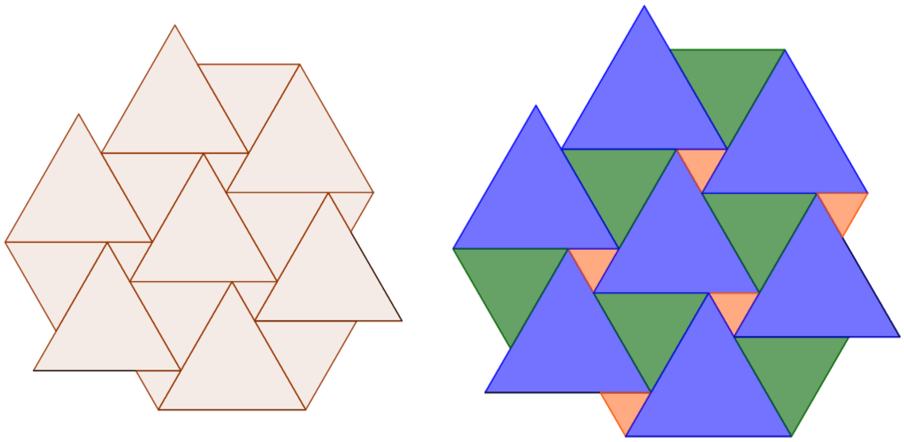


Figura 36: Pavimentação sem e com cor.

Segundo Alves (2014):

> *"Com toda esta importância, temos que ter muito cuidado no momento da escolha da paleta de cores a serem usadas, pois uma escolha infeliz pode tornar o desenho desinteressante aos olhos, sem uma boa comunicação visual, em contrapartida quando esta é apropriada ocorre o destaque visual da individualidade da figura e suas respectivas transformações (figura 37)."*

Figura 37: Escher, M. C., "Lagartos", de 1939, nanquim, lápis, aquarela. & de 1942 nanquim, tinta de ouro, lápis de cor, pintura de pôster.

Temos algumas técnicas de pinturas, e Alves (2014) as define como técnica individual de coloração, técnica regional de coloração, técnica cíclica de coloração e técnica sem contornos de coloração em que diferentes técnicas mostram perspectivas e interpretações diferentes.

Alves (2014) faz essa demonstração utilizando a figura a seguir como base (sem coloração) e as demais com as suas técnicas. Vejamos:

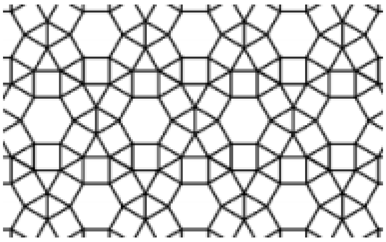


Figura 38: Figura utilizada como base para a coloração.

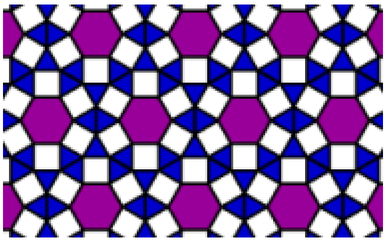


Figura 39: Técnica de coloração individual: polígonos congruentes possuem a mesma cor.

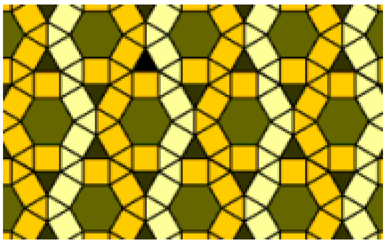


Figura 40: Técnica de Coloração regional: Regiões inteiras são preenchidas pela mesma cor.

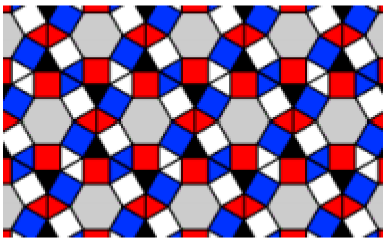


Figura 41: Técnica de Coloração Cíclica: Utilizam-se cores em ciclos.

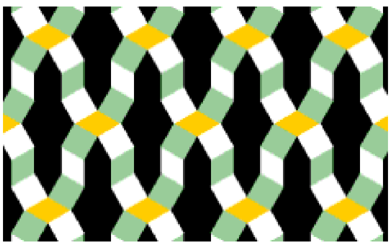


Figura 42: Técnica sem Contornos de Coloração: São retirados os contornos das figuras.

Podemos perceber que a mesma figura colorida com técnicas diferentes gera figuras “diferentes” que poderiam ter diversas interpretações, sem contar a beleza que cada coloração nos traz.

Não estamos considerando a escolha das cores, pois temos diversas combinações que podem nos trazer diferentes visualizações utilizando a mesma técnica de coloração.

2. Pavimentações do Plano Com Polígonos Irregulares

Segundo Coelho (2014), *pavimentações irregulares são pavimentações que não são regulares, nem semirregulares ou nem demirregulares. Um exemplo é exibido na Figura abaixo, composta por pentágonos não regulares, já que nem todos os seus ângulos têm a mesma medida.*

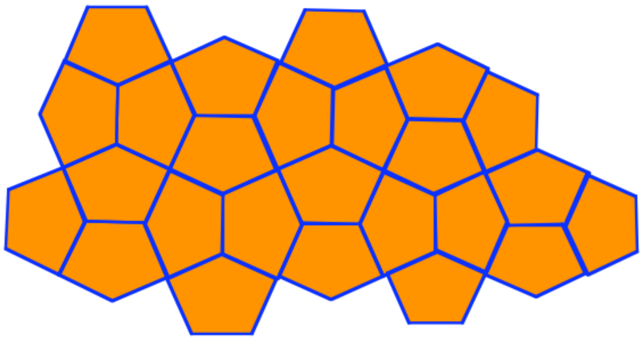


Figura 43: Pavimentação com pentágonos irregulares.

Nosso objeto de estudo será o recobrimento do plano com polígonos irregulares, porém congruentes. Não é interessante estudar os casos em que temos polígonos irregulares e não congruente, pois sempre é possível recobrir o plano com qualquer polígono irregular, basta ajustarmos as figuras para “caber no plano”.

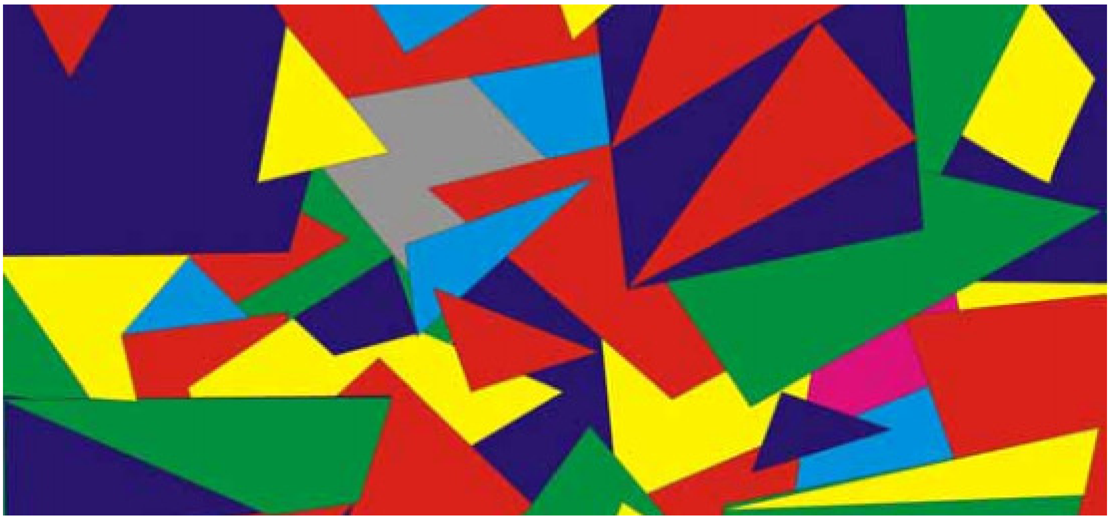


Figura 44: Pavimentação com polígonos irregulares.
Disponível em Mello (2010)

2.1 Pavimentações de Penrose

Uma técnica bastante conhecida que utiliza polígonos irregulares, mas tem padrões, são as pavimentações de Penrose. Roger Penrose é um matemático e físico Britânico que trabalhou com os mosaicos aperiódicos, assim chamados de Mosaicos de Penrose.

Segundo Mello (2010), um fato fascinante nessas pavimentações é que elas podem ser geradas utilizando-se dois tipos de tesselas; são dois losangos, um com ângulos de 36 e 144 graus, chamado de "**losango estreito**", representado em azul, e outro com ângulos de 108 e 72 graus, chamado de "**losango largo**", representado em vermelho.

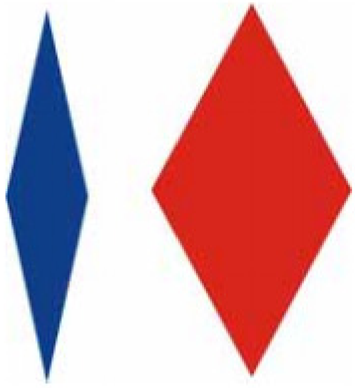


Figura 45: Peças para a pavimentação de Penrose.

Sendo as duas tesselas de Penrose, como descrito anteriormente, podemos criar mosaicos bem interessantes.

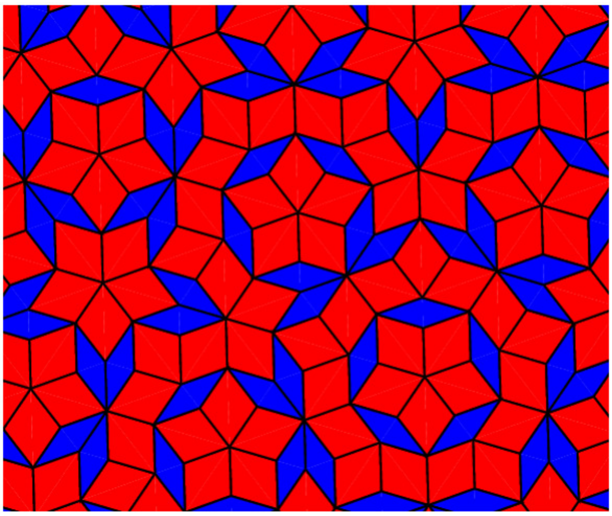


Figura 46: Pavimentação de Penrose.

A tesselação acima pode aparentar ser simétrica e periódica, mas se observarmos e nos afastarmos um pouco poderíamos observar que não tem um padrão se repetindo indefinidamente, porém, é possível recobrir o plano com ela.

Santos (2006) apresenta uma Pavimentação de Penrose, denominada Kite e Dart. As duas figuras se completam e podem ser criadas sendo retiradas do Pentágono.

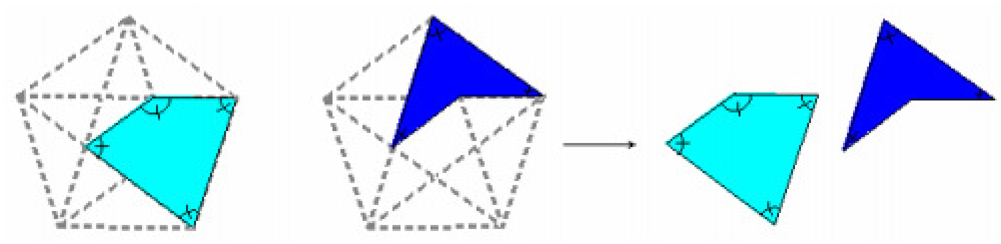


Figura 47: Peças Kite e Dart de Penrose.

Com as figuras podemos pavimentar o plano de forma periódica ou aperiódica.

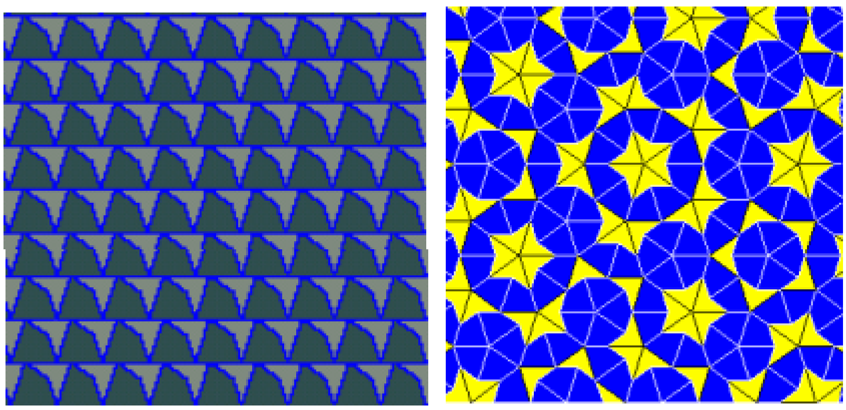


Figura 48: Pavimentação de Penrose.

Sendo Θ = 36°, as medidas dos ângulos das peças são:

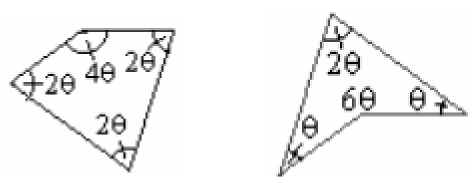


Figura 49: Peças de Penrose e seus ângulos.

Este tipo de pavimentação se torna fantástico, pois,

> *Numa pavimentação de Penrose, quanto maior a região pavimentada, mais a razão entre a quantidade de kites e darts aproxima-se da razão áurea. Em uma pavimentação infinita, essa razão é exatamente a razão áurea (GRUNBAUM & SHEPARD, 1989 apud Santos, 2006).*

Vejamos abaixo a pavimentação de Penrose assimétrica aumentada.

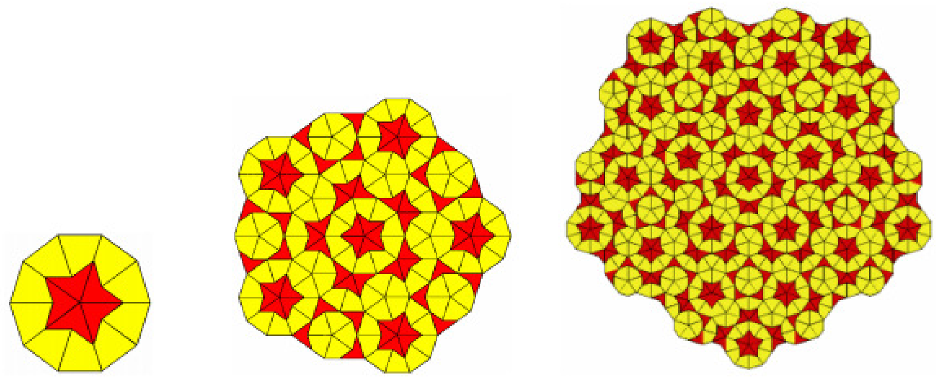


Figura 50: Pavimentação de Penrose aumentada.

Didaticamente, este tipo de pavimentação pode ser útil, pois estimula o raciocínio do aluno e faz com que as rotações e translações sejam trabalhadas de forma lúdica e desafiadora, visto que a tarefa de pavimentar o plano pode tornar-se difícil, pois poderão ocorrer espaços entre as peças se for feita alguma colocação errada, pelo fato da pavimentação ser assimétrica.

2.2 Triangulação de Delaunay.

A triangulação de Delaunay é amplamente utilizada em topologia matemática e serve para pontos que não possuem padrão. Vejamos a definição desta Triangulação.

Uma triangulação de Delaunay (TD) para um conjunto P de vértices deve atender à condição de Delaunay, que é: TD(P) é uma triangulação de Delaunay, tal que nenhum vértice de P permanece dentro do circuncírculo de qualquer triângulo em TD(P) (Ver Nogueira, 2013). Vejamos abaixo um exemplo desta triangulação:

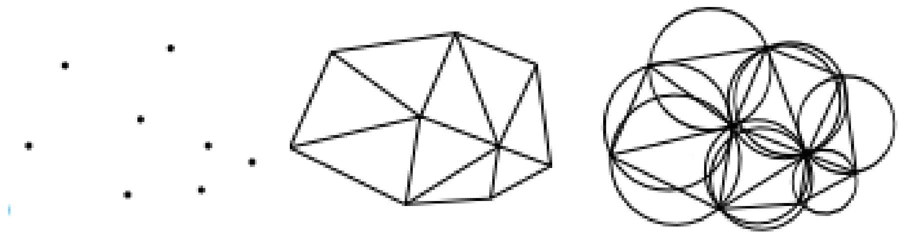


Figura 51: Exemplo de triangulação de Delaunay.

Na primeira figura, temos os pontos dispostos aleatoriamente**;** na segunda figura, uma possível triangulação de Delaunay**;** e na última figura, a demonstração de que a segunda é uma triangulação de Delaunay, pois, dados três pontos, existe uma circunferência que não possui nenhum dos outros pontos no interior.

Não vamos nos aprofundar neste tema, pois nosso objetivo não é trabalhar com casos aleatórios e sim em casos particulares, cujos pontos estão dispostos de forma organizada, gerando assim, malhas triangulares.

2.2.1 Diagrama de Voronoi.

O Diagrama de Voronoi é utilizado em diversas áreas, tais como Epidemiologia, Geofísica, Meteorologia, Computação Gráfica e Robótica.

O Diagrama de Voronoi possui conceitos semelhantes aos que foram discutidos por Dirichlet e que ficou conhecido como Tesselação de Dirichlet. Então, podemos nos referir aos dois nomes, mas se trata do mesmo assunto.

Definição: Seja S = {p1, p2, …, pn} um conjunto de pontos de $\mathbb{R}^2$. Os pontos de S denominam-se por geradores (ou sítios). Chama-se Diagrama de Voronoi (ou polígono de Voronoi) associada ao gerador p_i de S, e representa-se por $V(p_i)$ ou V_i, ao conjunto definido por:

$$V(P_i) = \{x \in \mathbb{R}^2; d(p_i, x) \leq d(p_j, x); 1 \leq j \leq n\}$$

Onde, d denota a distância (Euclidiana) em $\mathbb{R}^2$. (Ver Bajuelos, 2008)

Em outras palavras: Dado um conjunto de pontos (geradores) no plano, um Diagrama de Voronoi é uma subdivisão desse plano em regiões formadas pelos lugares mais próximos a cada um dos pontos.

Sendo assim, o Diagrama de Voronoi é construído através do circuncentro dos triângulos da triangulação de Delaunay. Com isso, conseguimos recobrir o plano que é o tema principal do trabalho e ainda trabalhamos o conceito de mediatriz e circuncentro (encontro das mediatrizes).

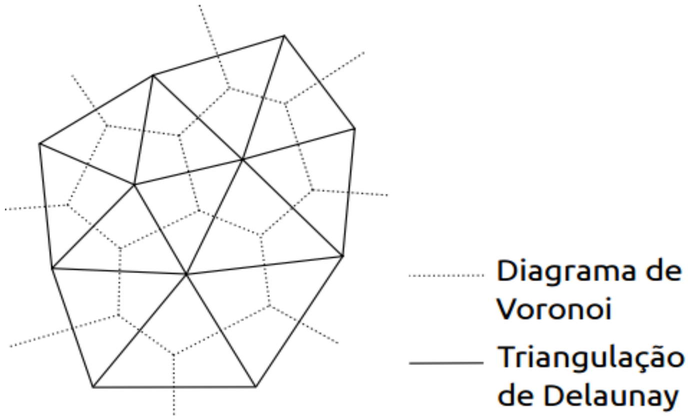


Figura 52: Triangulação de Delaunay e Diagrama de Voronoi.

A figura acima mostra claramente os conceitos da triangulação de Delaunay e do Diagrama de Voronoi.

Vale ressaltar que a triangulação de Delaunay é única, porém existem outras triangulações, mas que não são consideradas de "Delaunay", pois não atendem a definição e, por consequência, o Diagrama de Voronoi também é único.

Temos uma série de algoritmos para a construção dessa triangulação e do diagrama, mas não iremos nos aprofundar, pois o nosso objetivo é trabalhar com pontos que possuem um padrão.

2.3. Construção De Um Padrão De Pavimentação Com Diagrama De Voronoi (Ou Tesselação De Dirichlet).

Tomemos os pontos distribuídos de forma regular pelo plano.

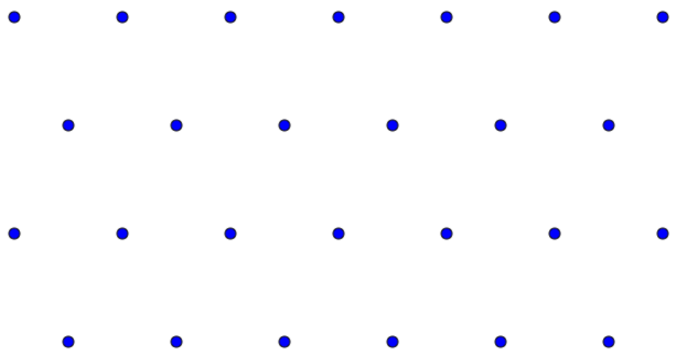


Figura 53: Distribuição regular dos pontos no plano.

Assim, a triangulação de Delaunay terá o aspecto regular.

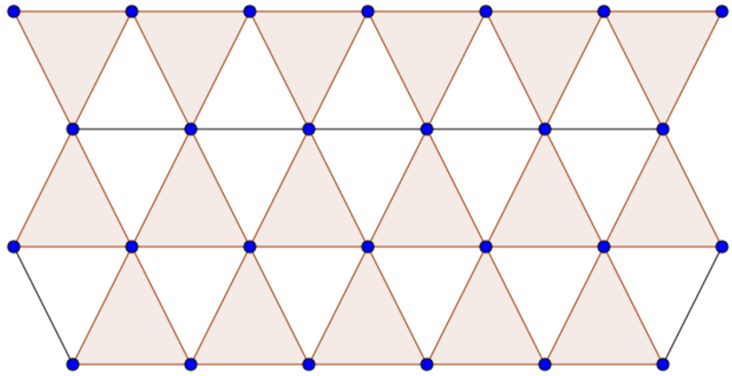


Figura 54: Triangulação de Delaunay.

Apesar do aspecto regular, os triângulos não são regulares, mas são congruentes.

Para o Diagrama de Voronoi, é encontrado o circuncentro de cada triângulo e em seguida, unimos esses centros. Para isso, de um ponto dá-se a designação de DOMÍNIO DE DIRICHLET do ponto da grelha.

Note que os lados da figura (em azul) do ponto central se obtêm construindo as mediatrizes dos lados da grelha que concorrem no ponto.

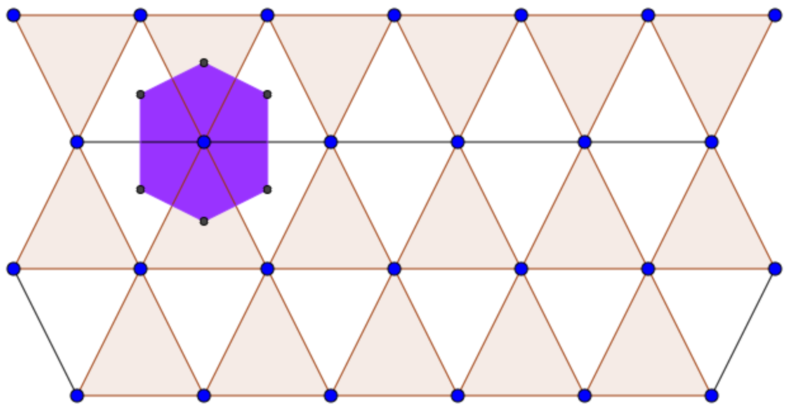


Figura 55: Triangulação de Delaunay e Diagrama de Voronoi.

É fácil ver que conseguiremos preencher o plano.

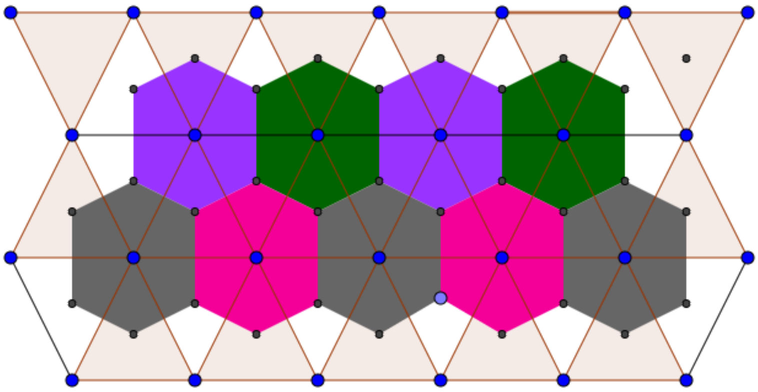


Figura 56: Diagrama de Voronoi.

Podemos, então, chamar de Diagrama de Voronoi (ou Tesselação de Dirichlet)

De acordo com a disposição regular dos pontos, temos apenas cinco tipos distintos do Diagrama de Voronoi.

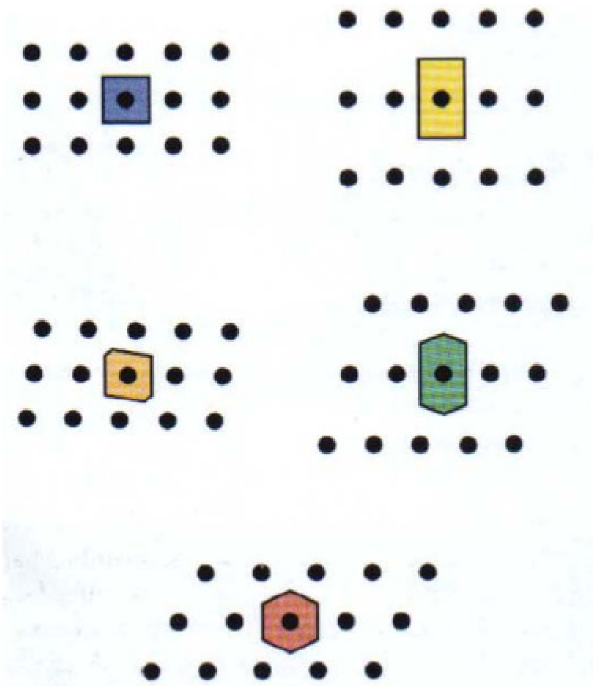


Figura 57: Tipos de Diagramas de Voronoi .

Segundo Mateus (2012), utilizando o diagrama de Voronoi (o autor utiliza o outro nome, tesselação de Dirichlet), *a ideia de base subjacente para a construção de um PADRÃO para uma PAVIMENTAÇÃO PERIÓDICA do plano corresponde ao preenchimento de um diagrama de Voronoi*.

Vejamos que a base utilizada por Mateus (2012) é a seguinte:

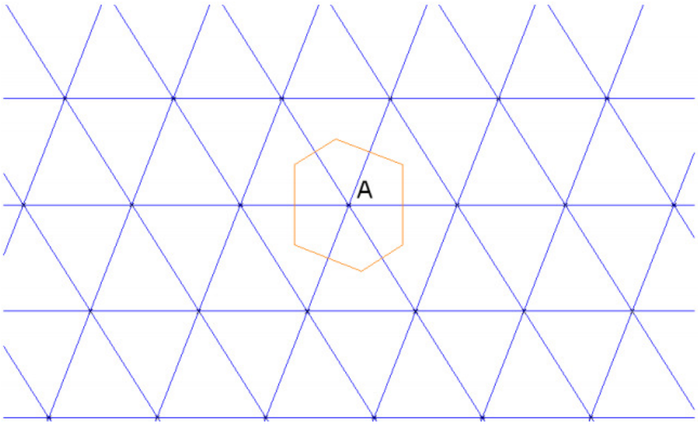


Figura 58: Diagrama de Voronoi.

Através dela, ele transmite a ideia de construção de um padrão para preencher o plano.

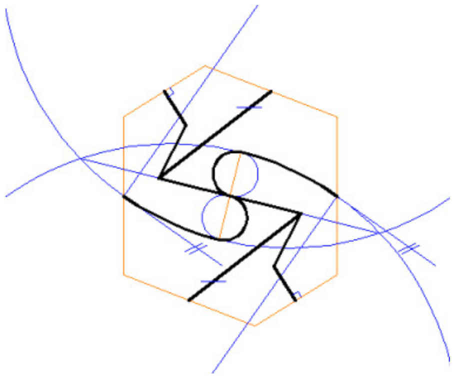


Figura 59: Base padrão do Diagrama de Voronoi.

Com a sua reprodução por toda a grelha, temos:

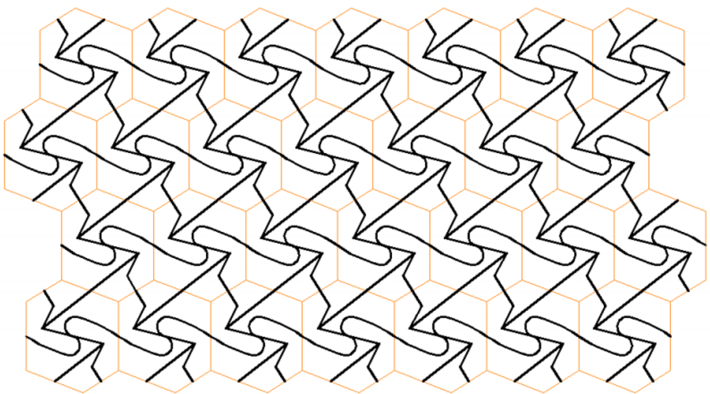


Figura 60: Preenchimento do plano com a base padrão.

Note que, para dar origem a uma pavimentação, todas as áreas devem ser isoláveis e com isso, cada área é designada por ladrilho.

Segundo Mateus (2012), desta operação pode ser possível isolar uma ou mais áreas fechadas que se repetem. Podemos ter apenas um ou mais de um tipo de ladrilho; porém, se a divisão não resultar em ladrilhos, podemos ter ainda assim, um padrão de preenchimento do plano.

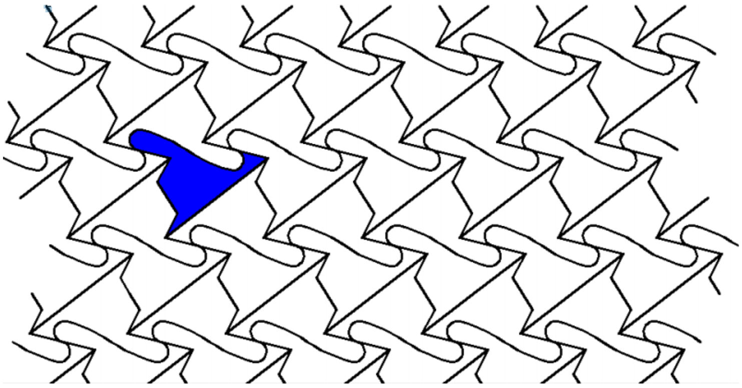


Figura 61: Preenchimento do plano com a base do Diagrama de Voronoi.

No exemplo de Mateus (2012), temos apenas um ladrilho e assim, é chamada de Pavimentação Monoédrica.

2.4 Recobrimentos na Natureza

Como forma de obter motivação para os alunos, temos alguns recobrimentos presente na natureza (em sua maioria irregulares). Essa abordagem evidencia que o recobrimento do plano não é um assunto apenas matemático.

2.4.1 – Abacaxi

Apesar de não ter um padrão e não ser plano, o Abacaxi possui uma forma de recobrimento bem semelhante ao abordado no trabalho.

Figura 62: Abacaxi.
Disponível em: http://wallpaper.ultradownloads.com.br/73453_Papel-de-Parede-Abacaxi--73453_1280x1024.jpg

2.4.2 – Escama de Peixe

Bem semelhante ao que foi falado em relação ao Abacaxi são as escamas de peixes.

Figura 63: Escama de Peixe.
Disponível em: http://1.bp.blogspot.com/-WnK_Frv-K2E/UZfCWdij6LI/AAAAAAAAAu8/yTnwK2VZUPA/s400/escamas+d%C3%A9rmicas.png

2.4.3 – Escama de Cobra

A escama de cobra tem uma particularidade. Elas possuem diferentes cores, o que muda o aspecto do recobrimento, tornando as espécies diferentes por causa dessas colorações, reforçando a ideia falada no capítulo anterior sobre a importância das cores.

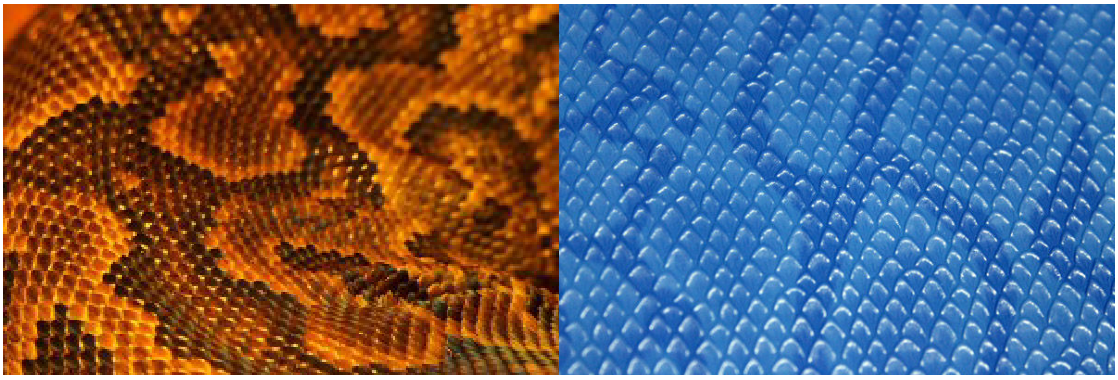


Figura 64: Escama de Cobra.
Disponível em: http://www.sobiologia.com.br/figuras/Reinos3/pelerepteis.jpg e http://i01.i.aliimg.com/img/pb/880/347/760/760347880_200.jpg

2.4.4 – Colmeia

As colmeias são as que apresentam o melhor e mais perfeito recobrimento do plano, pois tem a forma de uma malha hexagonal. Assim sendo, além de conseguir recobrir o plano, ainda o faz com formas, aparentemente, regulares.

Figura 65: Colmeias.
Disponível em: http://thumbs.dreamstime.com/x/colmeia-18409219.jpg e http://thumbs.dreamstime.com/z/abelhas-dentro-da-colmeia-3988679.jpg

2.5 Pavimentações Na Arquitetura e em Obras de Artes.

As pavimentações têm sido utilizadas há muito tempo e nos mais diversos lugares. Barbosa (1993), afirma que:

> *Os mosaicos, resultados das pavimentações, são conhecidos desde os tempos antigos. Estiveram presentes nas civilizações assíria, babilônica, persa, egípcia, grega, chinesa e outras, empregados em padrões que não raro permaneceram até os dias atuais. O objetivo do artífice era e é encontrar um certo tipo de simetria ornamental com o emprego de figuras relativamente simples, cuja repetição e interação formem um todo harmonioso e estético.*

Nessa época, os mosaicos eram pautados na beleza, não tendo nenhuma referência matemática. Atualmente, os mosaicos podem ser notados em papéis de parede, pisos, painéis, faixas, gradis e em algumas obras de arte.

2.5.1 – Na Arquitetura

O recobrimento do plano é muito utilizado na arquitetura e na construção civil devido a sua beleza e a facilidade em se determinar um padrão. Vejamos alguns exemplos:

2.5.1.1 – Papéis de Parede

Esta técnica consiste, em termos, em um modelo o qual é aplicado utilizando apenas a translação. Vejamos que a figura abaixo é o modelo:

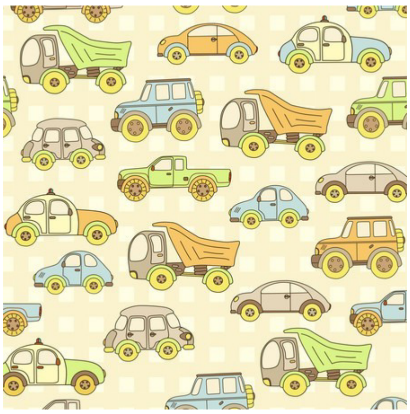


Figura 66: Modelo de Papel de Parede.
Disponível em: http://s3.amazonaws.com/img.iluria.com/product/1C6D51/430B1A/450xN.jpg

E na próxima figura, foi feita uma cópia dela e transladado por toda a área a ser preenchida.

Figura 67: Papel de Parede aplicado.
Disponível em: http://s3.amazonaws.com/img.iluria.com/product/1C6D51/430B1B/450xN.jpg

Esse tipo de técnica é bem popular no recobrimento de uma parede.

2.5.1.2 – Azulejos

Esse tipo de técnica bem difundida na arquitetura possui ampla beleza e matemática para a construção das paredes, pisos ou painéis com azulejos. A isometria é amplamente utilizada para fazer esses trabalhos.

Com apenas um módulo (veja a figura abaixo), podemos preencher o plano de forma que as figuras se completem, formando outra figura com aspecto e beleza diferente.

Figura 68: Exemplo de Azulejo no recobrimento do plano.
Disponível em: http://st2.depositphotos.com/3077183/7684/i/950/depositphotos_76843375-Pattern-of-retro-style-wall-tile-texture.jpg

Observando o modelo, e fazendo rotações, (ou reflexão), chegamos à figura maior. Ou, ao invés de se complementarem, geram outra aparência visual.

Figura 69: Exemplo de azulejo.
Disponível em: https://casadefilo.files.wordpress.com/2011/07/azulejos-005.jpg

Algumas dessas pavimentações são mundialmente conhecidas, como é o caso do calçadão de Copacabana. Nesse caso é feito apenas a translação horizontal do modelo.

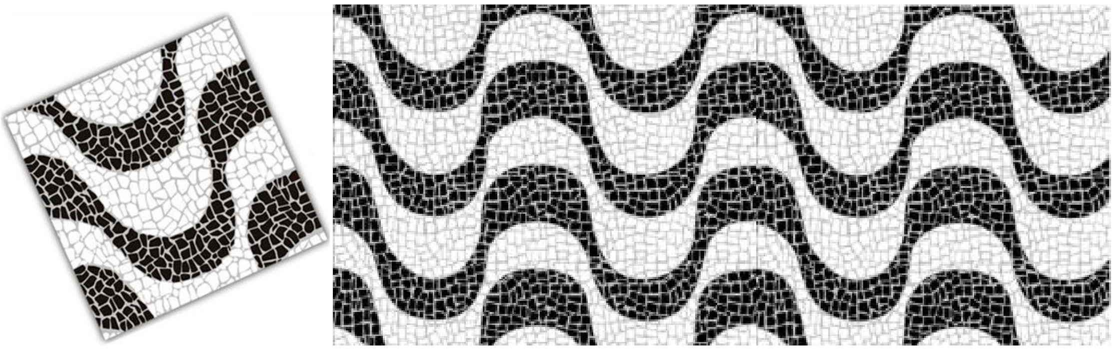


Figura 70: Calçadão deCopacabana.
Disponível em:
http://www.overmundo.com.br/uploads/overblog/img/1237550526_copacabana_beach40x30sm.jpg e
http://3.bp.blogspot.com/-dA14oHLbsm4/UZY_JIbB3sI/AAAAAAAAgj8/9MFsIUjWLl0/s640/adesivos+azulejos+7.jpg

Todavia, esse tipo de recobrimento tem também suas falhas. Um simples erro de colocação é visto rapidamente.

Figura 71: Erro do recobrimento do plano.
Disponível em: http://cotovelodeformiga.com.br/wp-content/uploads/2013/08/Mas-por-que-isso-gente.jpg

2.5.1.3 – Gradis

Os gradis não preencham o plano, porém, podemos considerar que elas delimitam o plano imaginário vertical de um terreno, varanda ou casa; E algumas, por apresentarem simetrias também podem servir de motivação para o tema. Em sua maioria, os gradis apresentam apenas a translação, mas em alguns casos, apresentam a reflexão.

Figura 72: Gradil 1.
Disponível em: http://1.bp.blogspot.com/-yUyTCbC6Ydw/UJkJ6uDKXOI/AAAAAAAALbU/QaioiMHgmJs/s1600/gradil+da+escada+do+passo.jpg

Figura 73: Gradil 2.
Disponível em: https://modernacoisantiga.files.wordpress.com/2012/04/gradecolonial3.jpg

Figura 74: Gradil 3.
Disponível em:
http://3.bp.blogspot.com/_nySHMtBcSiA/RxzbEe5b_MI/AAAAAAAAAZY/JffH9Ibq0qo/s400/gradil.jpg

Além disso, tem os gradis mais modernos que não apresentam tanta complexidade nas isometrias.

Figura 75: Gradil 4.

Disponível em: http://serralheriajasantiago.com.br/files/grade-de-ferro-2.jpg

2.5.2 – Artes

2.5.2.1 – Mauritus Cornelis Escher

Ao abordar o tema recobrimento do plano nas Artes, não podemos deixar de mencionar Mauritus Cornelis Escher.

Embora o ladrilhamento fosse considerado por Escher como “a fonte de inspiração mais rica de que me nutri”, para o meio artístico da época, era apenas uma brincadeira matemática. O entusiasmo dos matemáticos por sua obra impediu que Escher fosse considerado um artista moderno e suas obras eram encontradas no Departamento de Matemática e não nos Museus. Apesar de suas obras estarem em quadros, Escher declarou várias vezes que “na verdade, não sabia desenhar.” O que de fato é aceitável, hoje em dia, visto que sua obra contém muita matemática envolvida. E em algumas de suas obras, é necessário apenas matemática e a criatividade. Escher era um amante da natureza e em suas obras, constantemente, apareciam salamandras, aves, peixes, plantas, formigas, besouros e sapos.

Segundo Tjabbes (2011), define M. C. Escher como:

> *“um artista gráfico especializado em xilogravuras e litografias. Xilogravuras são feitas mediante o corte de um desenho num bloco de madeira; nas litografias, faz-se um desenho sobre uma pedra plana especialmente tratada. A xilogravura é uma forma de impressão em relevo: uma goiva é usada para esculpir um bloco de madeira, formando sulcos e produzindo uma imagem no primeiro plano. A tinta é aplicada a essas partes e, em seguida, uma folha de papel é pressionada sobre o bloco de madeira com a tinta. A litografia é uma forma de impressão plana: a tinta é aplicada à pedra lisa e o papel é, em seguida, colocado em cima. Todas as cópias de uma série são idênticas: embora a cor possa variar, a imagem ou a representação é sempre a mesma.” (TJABBES, 2011).*

Vejamos abaixo a técnica de Escher por Alves (2013):

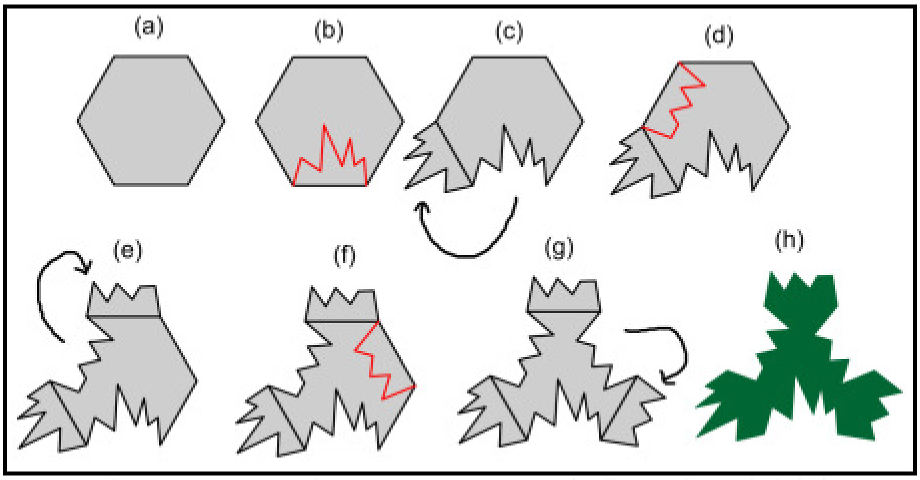


Figura 76: Desenho para construção da figura base inicial

Acima, foi construída em (h) a figura base para o recobrimento do plano, utilizando a técnica adotada por Escher. Como foram feitas apenas recortes e colagens, a área da figura (a) é a mesma da figura (h).

Ao escolher um dos vértices (P1) do hexágono de base (em verde) e fazer uma rotação da base inicial, de 120° em relação a esse vértice (em rosa), repetir esta operação (em amarelo) e encaixar os polígonos formados, estas três rotações de áreas recortadas geram o elemento base translacional para a pavimentação. Transladando esse elemento base translacional e encaixando um nos outros, seguindo uma grade translacional de pavimentação hexagonal, está feita a pavimentação.

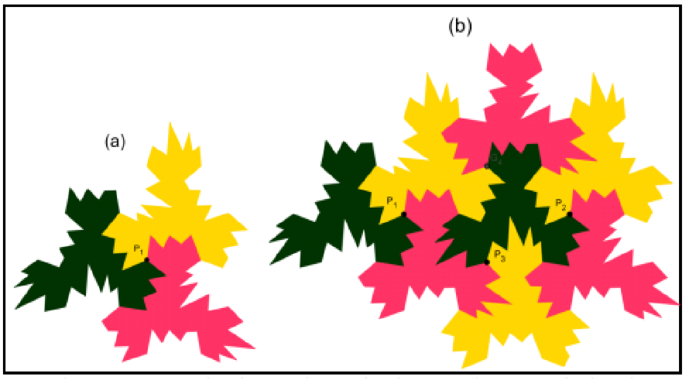


Figura 77: Pavimentação com o modelo criado.

Vejamos agora algumas obras de Escher com essa técnica.

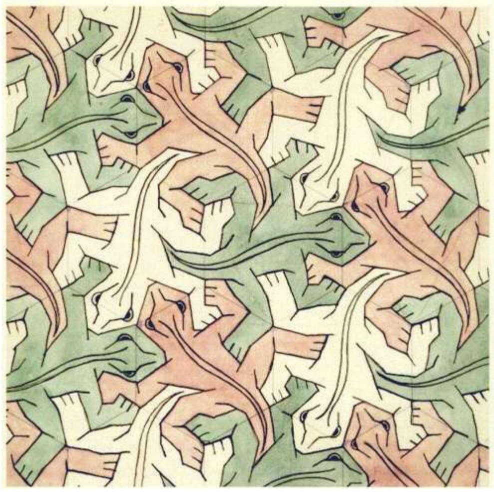


Figura 78: Obra “Os Lagartos” de Escher.
Disponível em: http://pendientedemigracion.ucm.es/info/vivataca/images/n65/lagartos.jpg

Agora vejamos como foi aplicada a técnica e como isso faz com que os lagartos pareçam “entrelaçados”.

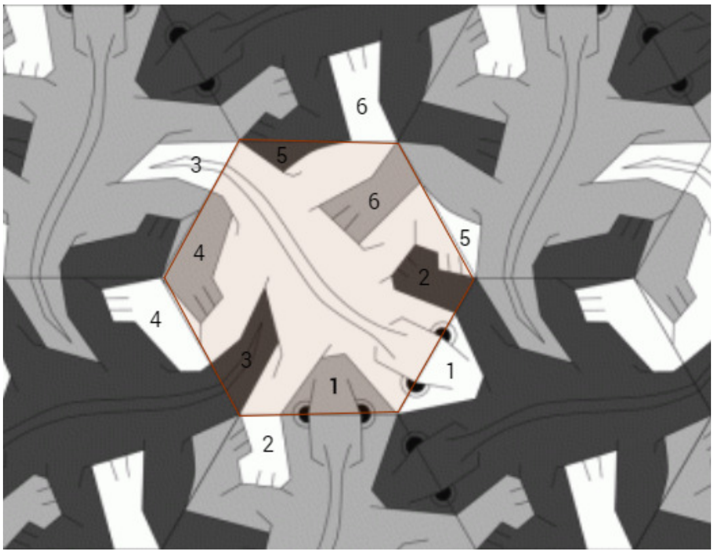


Figura 79: Explicação da técnica utilizada por Escher.

Como podemos ver, os números iguais são os recortes feitos por Escher.

Escher também Escreveu Limites Circulares, uma obra que Tjabbes(2011) escreve como:

> *“Na série Limites Circulares Escher buscou uma forma de transmitir o infinito. Sua primeira tentativa foi* ***c****ada vez menor. Nessa gravura, contudo, parece que a forma está prestes a implodir - caindo para dentro - porque as figuras maiores (os répteis) estão na borda externa, e as figuras menores, no centro.” (TJABBES, 2011).*

Figura 80: Os lagartos , utilizando limites circulares, por Escher.

Escher também fez o inverso, figuras maiores no centro e figuras menores na borda do Círculo.

Figura 81: “Devils & Angels” de Escher.

Ele possui uma obra tão ampla em que aborda diversos conceitos em diferentes áreas, apresentando obras magníficas.

2.5.2.2 – Faixas

Alguns artistas se destacam por obras em que a isometria é amplamente utilizada. Vejamos alguns:

Figura 82: Adam Gailey.

Figura 83: Jennifer Novak

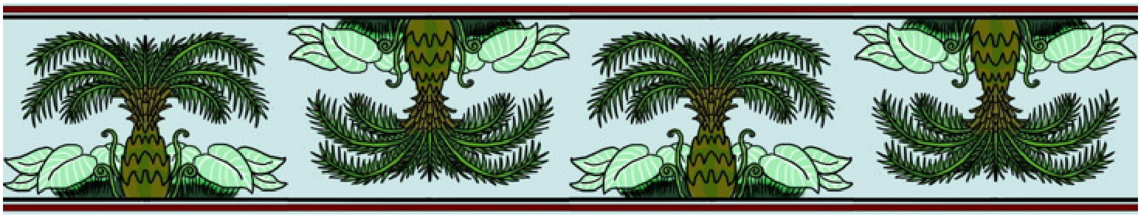


Figura 84: Tyler Rhodes

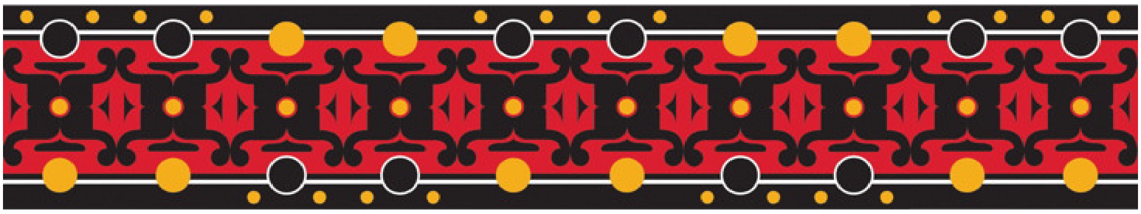


Figura 85: Mike Odum.

Figura 86: Tori Ero

Depois desse estudo, podemos perceber que não é difícil sair pelas ruas e encontrar formas de se recobrir o plano ou formas que apresentem simetrias, rotações ou reflexões. Se prestarmos mais atenção, iremos encontrar em diversos lugares ao nosso redor.

Que tal propor aos nossos alunos esse tipo de percepção?

É de grande valia para que possamos entender que a matemática está presente ao nosso redor e nem percebemos.

3. Atividades Em Sala De Aula Utilizando Técnicas De Pavimentação Do Plano.

Este capítulo se propõe a descrever as atividades realizadas com um grupo de 15 alunos da turma 2001 do ano de 2015 no Colégio Estadual Dr. Ignácio Bezerra de Menezes, localizado no município de Duque de Caxias, no período de 19 de novembro a 01 de dezembro do mesmo ano. O trabalho consiste em mostrar a viabilidade do ensino de forma lúdica, trazendo alguns conceitos para a realidade. O objetivo é tornar o conhecimento comum à realidade do aluno, de forma prática e simples, de uma maneira construtivista.

O público alvo é carente de conhecimentos práticos e culturais e esse trabalho visa o acréscimo, não só de conhecimento, mas de cultura, tal como observar e interpretar as obras de Escher sob uma visão matemática.

Este capítulo tem também como objetivo apresentar esse conceito e mostrar, de forma lúdica, o recobrimento do plano, o conceito de ângulos internos, o conceito de mediatriz e circuncentro, isometrias no plano e de que forma esse assunto se encontra presente na vida urbana e nas obras de arte.

Segundo Amorim (2014) *apud* Carraher (1996), é importante que a aprendizagem de matemática na sala de aula seja um momento de interação entre a matemática organizada pela comunidade científica, ou seja, a matemática formal e a matemática como atividade humana. Diante dessa afirmação é que temos claro nosso objetivo com esse trabalho.

O presente trabalho teve quatro encontros, com duração de 1 hora e 20 minutos cada, totalizando 320 minutos (aproximadamente 5,33 horas)[2]. O trabalho contou com apresentação em slides (encontra-se em Anexo), materiais palpáveis e data show.

3.1 – Primeiro Encontro (Ângulos Internos)

No primeiro encontro, foram mostrados alguns recobrimentos do plano com figuras regulares. Em seguida foram apresentados alguns tipos de recobrimento do plano que encontramos na natureza, na arquitetura e em obras de arte. Antes de partir para a atividade, foi proposta uma atividade para casa.

[2] Foi considerado 1 hora e 20 minutos de trabalho efetivo, porém, foram dispostos dois tempos de aula de 50 minutos por encontro. Não foi levado em consideração o tempo gasto com arrumação da sala, instalação do *Data Show* entre outros motivos que não são pertinentes à atividade.

TAREFA 1:	Trazer uma foto que representasse algum tipo de recobrimento apresentado e que estivesse à nossa volta, em qualquer lugar que conseguíssemos identificar e fotografar.

Tabela 3: Tarefa 1

Nota: Essa fotografia pode ser de qualquer lugar que o aluno consiga identificar, até mesmo de algum programa que está passando na televisão, desde que o aluno consiga identificar e tirar foto.

Após o "dever de casa", iniciamos a Atividade 1.

3.1.1 – Atividade 1

Em um estudo preliminar, Santos (2004), propôs o uso de um kit que Murari (1999) define como Kit polígonos. Um kit composto por um conjunto que contém cerca de 50 polígonos regulare, com as mesmas medidas de lados, feitos em papel cartão e colorido dos dois lados.

O kit utilizado foi composto de 18 triângulos, 15 quadrados, 4 pentágonos, 3 hexágonos, 2 heptágonos e 2 octógonos. Foram preparados no papel cartão, utilizando os modelos em anexo. Além disso, a turma foi dividida em 3 grupos com 5 alunos e cada grupo possuía um kit.

O objetivo da atividade é manipular polígonos regulares a fim de recobrir o plano, encontrar quais figuras regulares recobrem o plano e encontrar qual o requisito para que certa combinação de polígonos cubra o plano.

Pergunta 1: Cada grupo deve pavimentar parcialmente o plano, obedecendo às regras:

- Os vértices devem coincidir sempre num mesmo ponto (lado-lado)
- Não deve haver espaços nem sobreposições de polígonos.
- Só pode ser usado um tipo de figura (só triângulos ou só quadrados).

Pergunta 2: Tente ladrilhar o plano com dois tipos de polígonos associados. Quais você utilizou? Se você conseguir encontrar outra combinação possível, anote quais polígonos foram utilizados.

Pergunta 3: É possível ladrilhar o plano utilizando 3 polígonos (de forma diferente)? Se sim, quais?

Através dos experimentos, eles devem descobrir que é necessário que a soma dos ângulos nos vértices em um arranjo de polígonos seja 360º. Portanto, será necessário que os alunos se acostumem com o cálculo do ângulo interno de um polígono.

Essa percepção nos retoma ao que foi mostrado no Capítulo 2.

Pergunta 4: É possível pavimentar o plano com um pentágono, hexágono e um heptágono?

Essa pergunta reforça a ideia dos 360° ao redor de um ponto e de que, visualmente, podemos ter, mas se analisarmos os ângulos, percebemos que faltará, aproximadamente, 3°.

Por fim, foi feita mais uma pergunta.

Pergunta 5: É possível ladrilhar o plano com quatro tipos de polígonos? Se sim, qual ladrilho montou?

Dando fim ao primeiro encontro é mostrado que não é possível (espera-se que o aluno chegue a essa conclusão) o recobrimento, pois os 4 polígonos do nosso kit tem soma maior do que 360°. Triângulo (60°) + Quadrado (90°) + Pentágono (108°) + Hexágono (120°) = 378°, sendo o valor da menor soma possível. Logo, não é possível construir com 4 polígonos.

3.2 – Segundo Encontro (Simetria)

O segundo encontro se inicia com as figuras que foram pedidas para que os alunos trouxessem.

Em seguida, iremos propor uma atividade utilizando o conceito de simetria através de recortes de papel. Esta atividade é interessante, pois, pode gerar, intuitivamente, um entendimento da obra de Escher, além do conceito de continuidade no recobrimento do plano.

O objetivo dessa atividade é encontrar a simetria do triângulo regular e do quadrado, utilizando o eixo de simetria para a construção de figuras que apresentam continuidade e construir recobrimentos do plano através de recortes utilizando um modelo.

3.2.1 – Atividade 2

Através de um triângulo foi pedido que dobrasse nos eixos de simetria do mesmo. Para que ficasse mais exato, o triângulo dado já estava com o eixo de simetria marcado, mas cabe ressaltarmos as propriedades da simetria.

Em seguida, foi pedido que se fizesse recortes aleatórios no lado do triângulo.

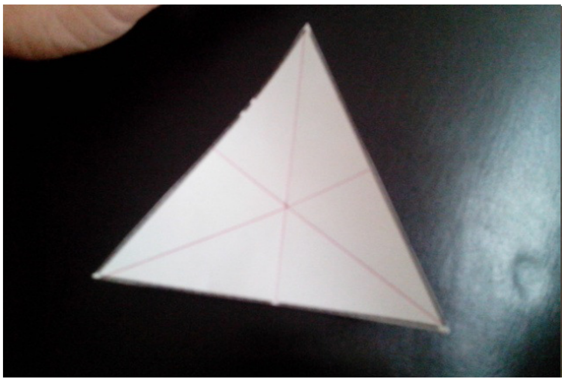


Figura 87: Triângulo e suas mediatrizes e o mesmo dobrado nas linhas e cortado para ser utilizado como modelo.

Em seguida, abrimos a figura e observamos o nosso modelo. Como o triângulo recobriu o plano, desenhamos em uma folha de papel o triângulo e os recortes feitos, como se fosse um carimbo. Em seguida pintamos a figura.

Figura 88: Modelo do triângulo para ser utilizado como base.

Figura 89: Preenchimento do plano com o modelo da figura 88.

O mesmo procedimento é feito utilizando o quadrado.

Para encerrar a atividade, foi sugerido um mural com os trabalhos realizados.

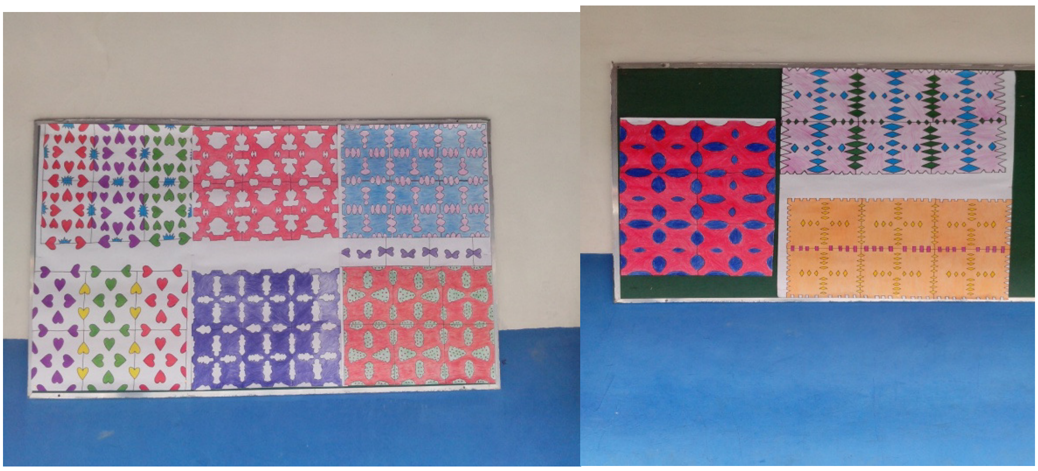


Figura 90: Mural com os trabalhos do 1° Encontro.

3.3 – Terceiro Encontro (Técnica da Dentada de Escher)

O terceiro encontro se tornou o mais esperado devido às obras de Escher.

O objetivo desta atividade era trabalhar os conceitos de rotação, translação, além de dar uma visão do espaço como um todo.

Esta técnica consistia em retirar um pedaço do ladrilho de um dos lados e aplicá-lo a outro lado (por rotação ou translação), de modo a obter um novo ladrilho. Ou ainda, podemos aplicar esse pedaço no mesmo lado, mas devemos nos atentar para que não passemos da metade do lado da figura.

Essa técnica só pode ser utilizada, utilizando triângulos, quadrados ou hexágonos. Como vimos anteriormente, apenas essas figuras preenchem o plano.

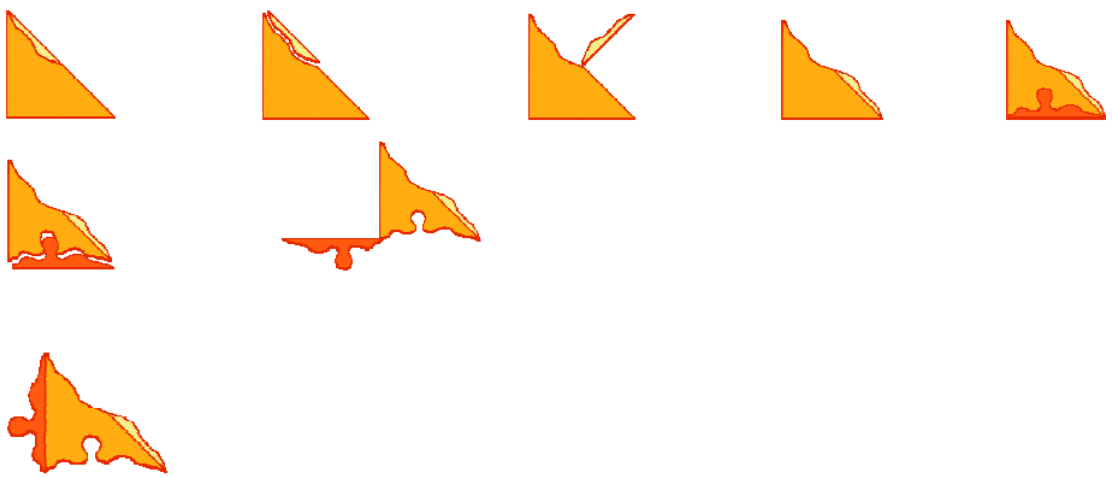


Figura 91: Técnica da Dentada de Escher.

3.3.1 – Atividade 3

Para esta atividade foi dado aos alunos, quadrados, triângulos e hexágono e foi pedido que eles levassem tesoura e cola.

A atividade consistia em criar pavimentações usando a “técnica da dentada” sobre polígonos, usando translação, rotação, translação e rotação.

Após a criação do modelo, foi disponibilizada uma folha para que eles pudessem preencher com o modelo e assim ter uma obra semelhante à de Escher.

Apesar de serem iniciantes, foi pedido para que tentassem fazer algo semelhante com que Escher fez ao “dar movimentos” ao desenho ou então, criar animais, objetos e pessoas. Para isso, foram dadas sugestões de desenhos que poderiam ser feitas.

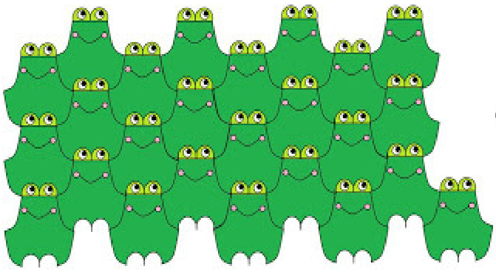
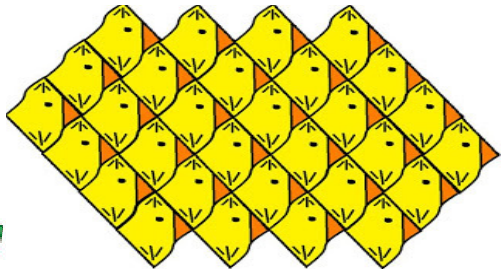
 

Figura 92: Figuras que foram utilizados a técnica da dentada.

Após isso, foram mostradas duas obras de Escher (Flying Horses e Reptiles) e feitas duas perguntas:

- Quais isometrias foram utilizadas para se obter o cavalo inicial da obra *Flying Horse*?
- Quais isometrias foram utilizadas para se obter o lagarto inicial da obra *Reptiles*?

Figura 93: Obra “Flying Horse” de Escher.

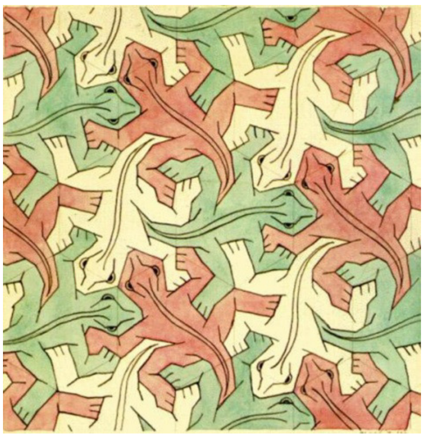


Figura 94: Obra “*Reptiles”* de Escher

3.4 – Quarto Encontro (Mediatriz)

O quarto e último encontro abrange outro tema bem interessante e muito utilizado em Desenho Geométrico.

O objetivo desta aula foi a construção do Diagrama de Voronoi e, por conseguinte, o recobrimento do plano com um padrão de pavimentação. O presente tema envolveu o conceito de mediatriz e circuncentro.

Então, para essa aula, foi pedido que eles levassem um compasso de forma que pudéssemos encontrar esses pontos e retas.

Essa aula pôde ser aplicada como parte integrante dos três encontros anteriores, ou livremente, ao se abordar o tema circuncentro e mediatriz. Ainda podemos afirmar que ela pode ser utilizada por um professor de Artes ou Desenho Geométrico de forma a tornar o conhecimento lúdico.

3.4.1 – Atividade 4

Inicialmente, foram dados pontos aleatórios em uma folha de papel.

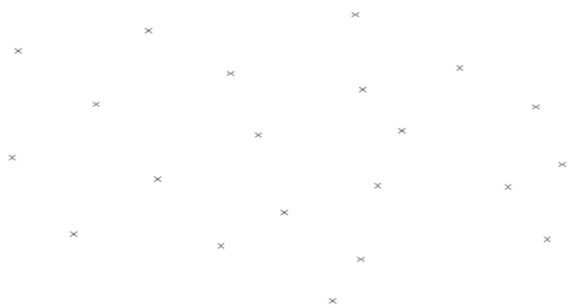


Figura 95: Pontos distribuídos aleatoriamente.

Em seguida, foi pedido que fizessem triângulos, unindo esses pontos. Para não se aprofundar muito no assunto, deixei que eles fizessem livremente. O processo para saber se todos os triângulos são considerados triângulos de Delaunay é demorado e apenas se deve explicar o que é uma triangulação de Delaunay (onde todo triângulo possui uma circunferência que não contém nenhum ponto dentro) e, em seguida, partimos para o caso em que os pontos estivessem ordenados de forma regular.

Porém, antes de entregar a folha, peguei os trabalhos e mostrei que existem diferentes formas de se obter essa triangulação, mas que para que se obtenha a triangulação de Dirichlet, só existia uma.

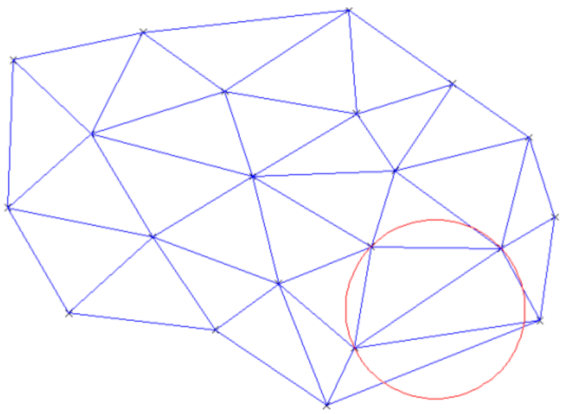


Figura 96: Triangulação de Delaunay.

Nesse momento, foi introduzido o conceito de Mediatriz e de Circuncentro, para que pudéssemos utilizar na próxima atividade.

3.4.2 – Atividade 5

Foi entregue uma folha com os pontos distribuídos de forma ordenada e regular.

Figura 97: Pontos distribuídos de forma ordenada e regular.

Então, foi pedido para que fizessem a triangulação destes pontos. Ao mostrar, percebemos que, quando os pontos estão distribuídos ordenadamente, a forma mais intuitiva de se fazer é exatamente o Diagrama de Voronoi.

Neste momento, foi pedido que tomassem um vértice de um triângulo e fizessem o circuncentro de todos os triângulos à sua volta e em seguida ligassem esses pontos.

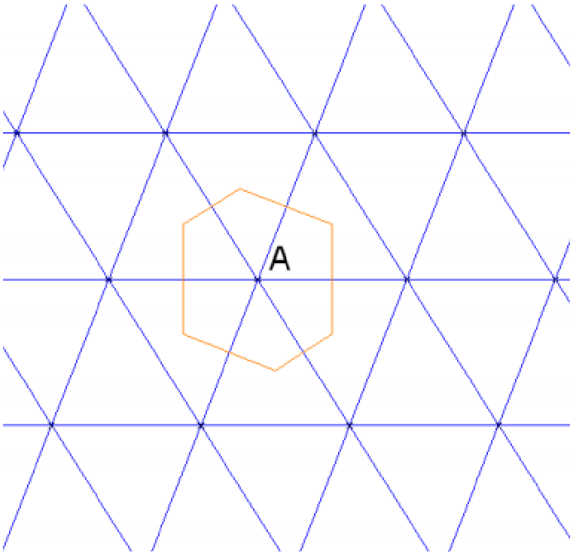


Figura 98: Construção do modelo utilizando o Diagrama de Voronoi.

Com este modelo, pudemos perceber que os lados opostos são congruentes e que, ao dividir a figura, podemos criar padrões interessantes.

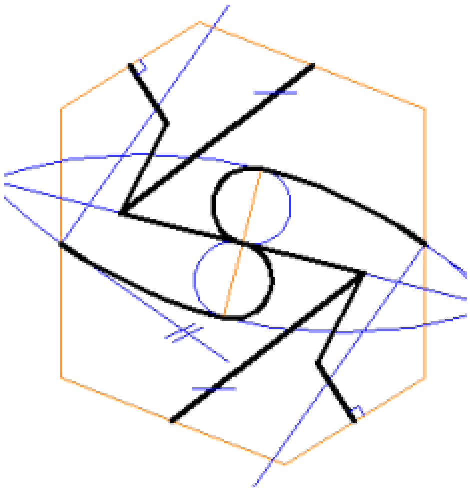


Figura 99: Modelo de preenchimento do plano do Diagrama de Voronoi.

Ao mostrar o padrão, alertei para a necessidade de tomarem alguns cuidados a fim de que na confecção deste padrão se obtivessem sucesso e tivéssemos uma pavimentação periódica.

Em seguida, com o modelo criado, foi pedido para que fizessem em outra folha e a preenchessem toda. De forma a concluir se temos ou não uma pavimentação periódica e, caso negativo, qual foi o erro cometido que não resultou nesse tipo de pavimentação.

Para concluir, os mesmos deveriam pintar com a mesma cor as áreas fechadas que foram criadas.

Podemos ter figuras fantásticas ou desastres neste tipo de confecção, mas não os desanimei, pois, o principal objetivo do trabalho era encontrar o circuncentro e determinar a mediatriz, e isso foi alcançado quando chegaram ao Diagrama de Voronoi.

3.5 – Relato da Prática e Resultados

Neste tópico, iremos fazer algumas considerações sobre a proposta didática apresentada.

3.5.1 – Primeiro Encontro

O primeiro encontro foi produtivo de forma que eles pudessem entender e se interessar pelo tema proposto. A apresentação de figuras que encontramos na natureza e na arquitetura aguçou a imaginação deles. Em especial, ficaram curiosos para entender como Escher fazia suas figuras. Além disso, tentaram ao máximo realizar as atividades propostas.

Apesar de estarem no segundo ano do Ensino Médio, e apenas trabalharmos com conceitos básicos de Geometria, foi necessária uma intervenção de forma que construíssem as tesselações prestando atenção para os ângulos. Foi nesse momento em que nenhum dos alunos sabia qual era a medida dos ângulos internos das figuras apresentadas. Então, foi explicada a fórmula e pedido para que, a partir daquele momento, tentassem construir as figuras e ver qual era a soma necessária para que se conseguisse recobrir o plano. As conclusões vieram logo em seguida.

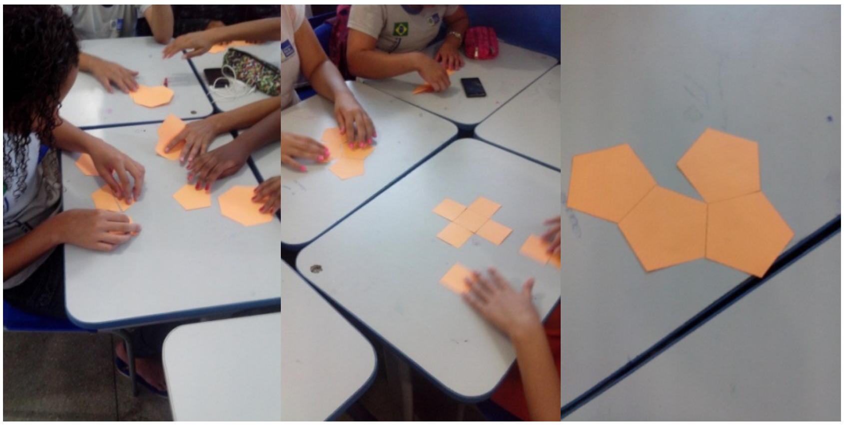


Figura 100: Alunos realizando a primeira atividade e concluindo que não é possível pavimentar o plano com pentágonos.

A pergunta 4 do primeiro encontro, apesar da intervenção, apenas dois alunos, mesmo vendo que as figuras se “encaixavam” (Como foi mostrado no Capítulo 1) falaram que não era possível fazer essa combinação. Os demais não se atentaram para os ângulos e ficaram apenas focados no visual, o que acabou fazendo com que eles errassem a pergunta.

Figura 101: Ilusão de que é “possível” pavimentar o plano com pentágono, hexágono e heptágono.

A pergunta 5 foi respondida por quase toda a turma, sem dificuldades, pois novamente, após a intervenção da pergunta 4, prestaram atenção nos ângulos.

3.5.2 – Segundo Encontro

Ao começar o segundo encontro, alguns alunos me mostraram a tarefa com objetos à sua volta e outros decidiram pesquisar na internet, respeitando o que foi mostrado na aula anterior. Apenas um aluno trouxe figuras que não apresentavam padrões ou eram simples (como uma blusa listrada). Abaixo, algumas figuras, como porta toalha, calçada e até um anúncio de jornal foi trazido pelos alunos.

Figura 102: Figuras trazidas pelos alunos referentes à pavimentação do plano no dia a dia. Primeiro Um anúncio de jornal e o piso de uma rua.

Figura 103: Figuras trazidas pelos alunos referentes à pavimentação do plano no dia a dia. Uma toalha de mesa e a porta de uma casa.

Dando início ao objetivo do segundo encontro, não gerou dúvidas e entenderam rápido o objetivo da simetria e como eles conseguiriam fazer as figuras de forma que elas se completassem no plano ao repeti-las.

Figura 104: Alunos realizando a segunda tarefa no segundo encontro.

De um modo geral, o trabalho foi de preencher o modelo em uma cartolina, o que gerou um grande trabalho na hora de colorir, causando um pouco de preguiça e desinteresse por parte dos alunos e, com isso, a conclusão ficou para casa.

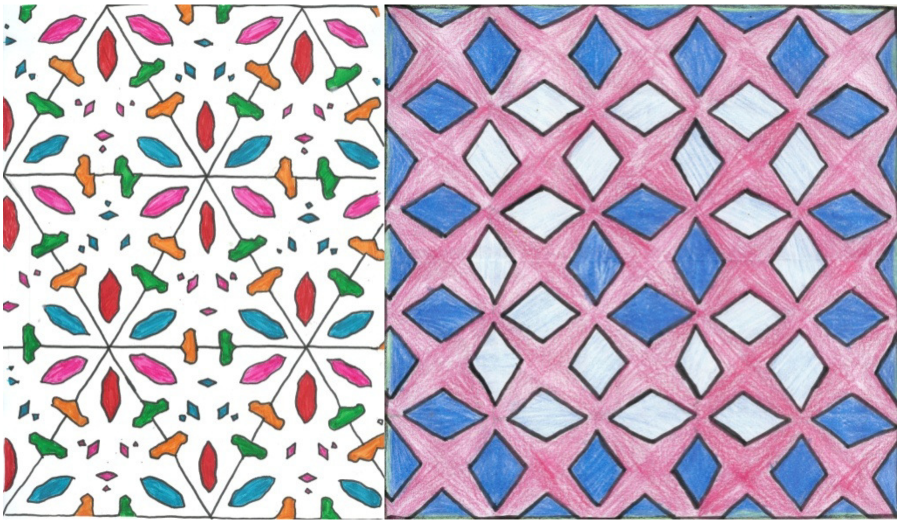


Figura 105: Pavimentações do plano em uma folha de papel A4, utilizando como modelo triângulo e quadrado.

Figura 106: Trabalho em cartolina feito pelos alunos, utilizando o conceito de simetria do quadrado

Figura 107: Trabalho em cartolina feito pelos alunos, utilizando o conceito de simetria do quadrado.

3.5.3 – Terceiro Encontro

O terceiro, e mais aguardado encontro, deixou os alunos fascinados com a inteligência de Escher pela beleza das pinturas. Mas ao conhecer o método, perceberam que eles também seriam capazes de realizar algo semelhante, visto que a técnica da dentada é simples. Porém, tivemos alguns problemas na hora de cortar e colar, e na aplicação da técnica da dentada.

Primeiramente, eles erraram na hora de fazer o corte, pois não se atentaram que na hora de cortar, deveriam ter a mesma distância do vértice que foi tirado. Alguns chegaram a fazer replicações do modelo e foram dando um “jeitinho” para se encaixar, fugindo do objetivo do trabalho que era trabalhar conceitos de translação e rotação.

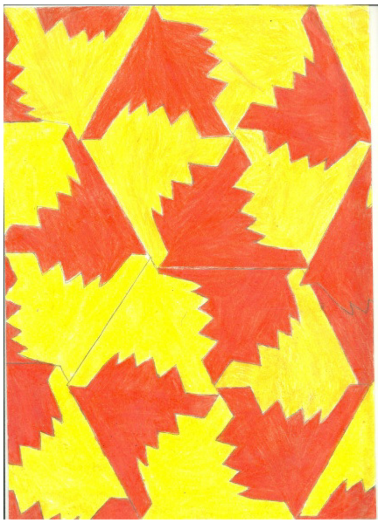


Figura 108: Figura que mostra o erro na hora de utilizar o modelo.

A figura acima mostra que o aluno não se preocupou em colocar o modelo lado a lado para que a técnica fosse realizada de forma correta.

Figura 109: Outro erro na aplicação da técnica.

A figura acima é um erro que demonstra que o aluno não entendeu a técnica nem a construção do modelo, pois ele construiu o modelo e decidiu não utilizar preenchendo o plano da forma que quis, tentando utilizar um padrão.

Figura 110: Figuras trazidas pelos alunos referentes à pavimentação do plano no dia a dia. Primeiro um anúncio de jornal e o piso de uma rua.

Este trabalho apresentou um erro, pois cortou de um lado e colou do lado adjacente sem se preocupar com a distância que foi cortada. Logo, na hora de preencher o plano, foram necessários alguns ajustes manuais, fugindo do objetivo da técnica.

Depois, alguns erros em aplicar a técnica foram constatados. Começaram retirando de um lado e colando no mesmo lado, cometendo dois erros ao realizar esta técnica:

1° Erro: Cortaram um pedaço onde o segmento era maior do que a metade, então, ao colar, não conseguiram colar no mesmo lado que foi tirado, pois não cabia.

2° Erro: Ao cometer o 1° Erro, eles decidiram mudar de técnica e colar do lado adjacente. No entanto, quando se inicia a técnica de colar do lado adjacente, ela deve permanecer até a conclusão do trabalho (o mesmo vale para colar no mesmo lado). Eles só perceberam ao tentar preencher o plano, pois não se conseguia e era constatado o erro.

Alguns erros de atenção também foram constatados, como inverter o lado da figura, ao invés de apenas rotacionar ou transladar. E ainda, colar em lado oposto e depois em lado adjacente (no caso do Hexágono). Esses erros não foram percebidos pelos mesmos e foi necessária uma intervenção.

Mas, no final, as duas perguntas sobre as obras de Escher, foram respondidas sem aparentar dificuldades ou dúvidas.

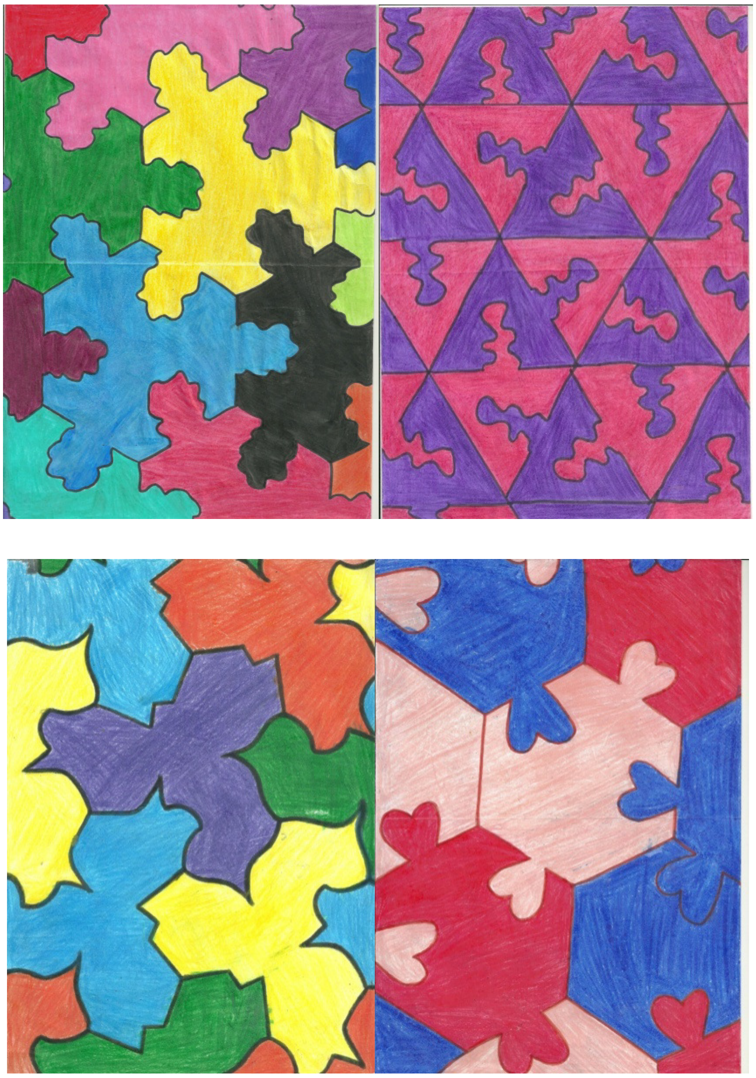


Figura 111: Trabalhos realizados com perfeição.

Tivemos dois trabalhos que lembraram as pinturas de Escher. Um fez referência a um sapo e outro me foi dito que era uma mulher com rabo de cavalo (só foi possível fazer essa referência depois de explicado pelo aluno). Os demais não se preocuparam em dar “movimento” à figura com animais ou objetos. Talvez um pouco mais de tempo e de estímulo na obtenção desse tipo de figura fosse necessário.

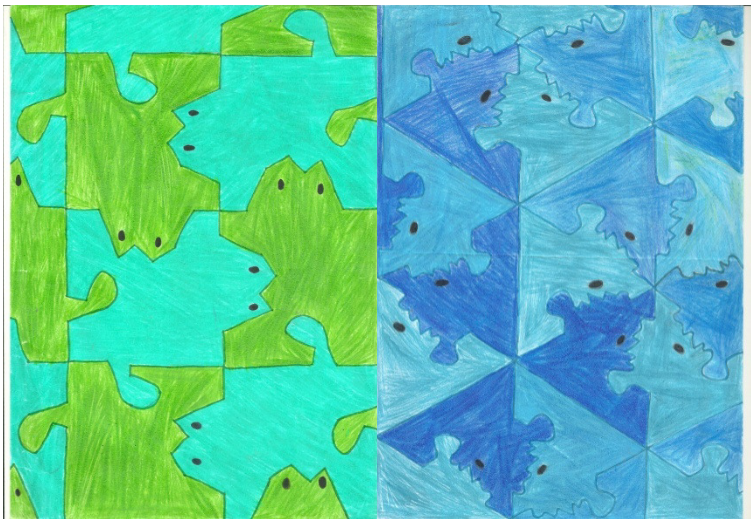


Figura 112: Trabalhos que lembram as obras de Escher. O primeiro representa sapos e o segundo, segundo a aluna, representa uma mulher de rabo de cavalo.

Além disso, teve um aluno que não quis o plano como sendo a folha retangular.

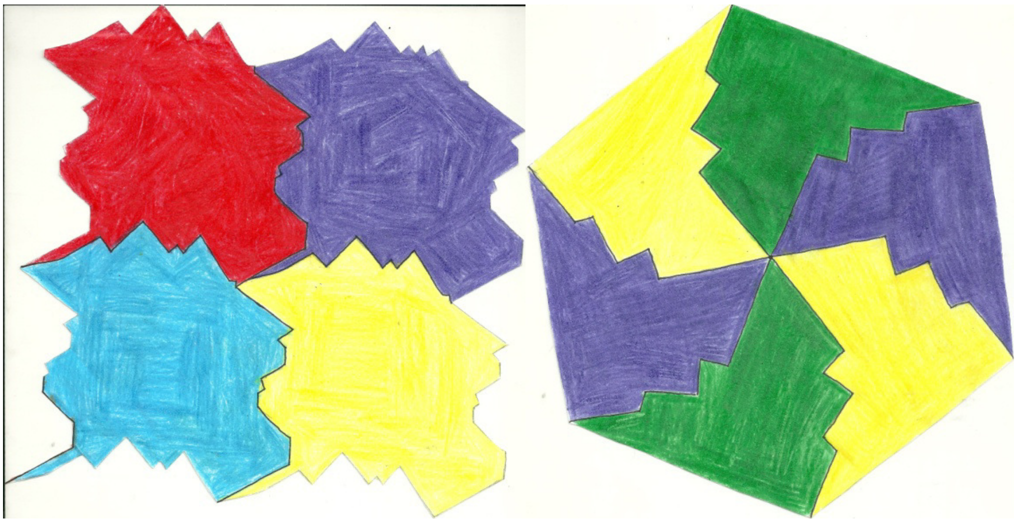


Figura 113: Trabalho realizado aplicando a técnica da dentada, mas em planos que não eram retangulares.

3.5.4 – Quarto Encontro

O quarto encontro talvez tenha sido o mais difícil, pois os alunos não levaram o compasso que foi pedido e os poucos que levaram não sabiam ou não conseguiram utilizar o compasso de forma correta para o encontro do circuncentro e da mediatriz.

Diante deste problema, utilizamos apenas a régua para encontrar e traçar a mediatriz. Essa forma de encontrar gerou problemas, pois o circuncentro não ficava certo em alguns casos que a divisão não era exata e sem contar no erro de visualização que a régua nos proporcionou.

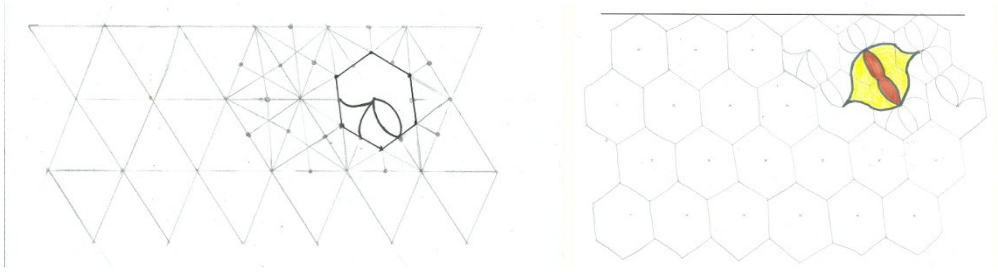


Figura 114: Modelo do Diagrama de Voronoi e figura pintada de como ficaria o plano.

No mais, a aplicação transcorreu normalmente, e foi muito produtivo para que pudessem entender sobre mediatriz e circuncentro. Ficou evidente que a falta da disciplina de Desenho Geométrico pode trazer problemas matemáticos e na visualização de alguns conceitos importantes para a geometria, e até mesmo a trigonometria.

O mais interessante foram os alunos tentando criar padrões que ao unir, gerassem figuras totalmente diferentes do que haviam imaginado. E, como era esperada, a maioria não conseguiu criar padrões de repetições que gerassem uma pavimentação monoédrica (ladrilho).

Isso se deu pela falta de tempo para se pensar e, principalmente, pela falta de atenção na construção da figura dentro do módulo. Deixaram de pensar e imaginar o que precisaria fazer para que pudesse obter esse tipo de pavimentação.

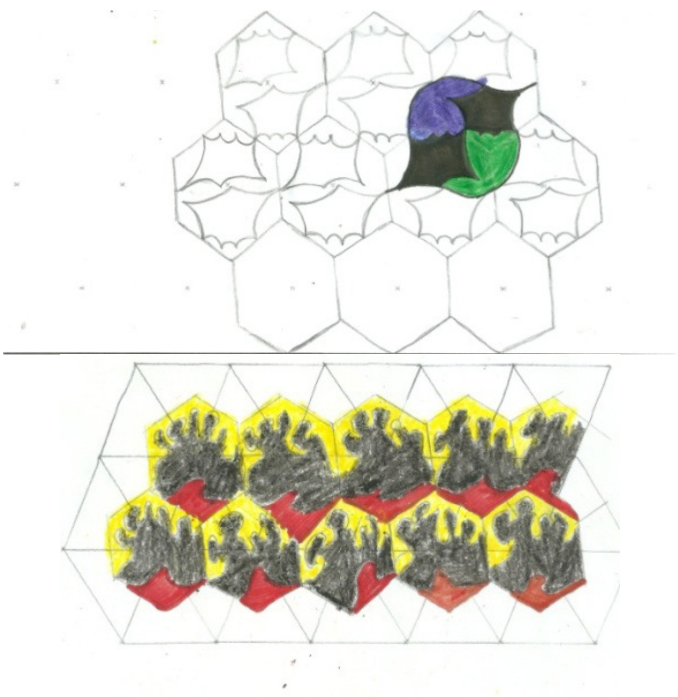


Figura 115:Pavimentação do plano com Digrama de Voronoi. No primeiro, temos que a pavimentação é monoédrica, no segundo, vemos que apesar de pavimentar o plano, o modelo não se completa.

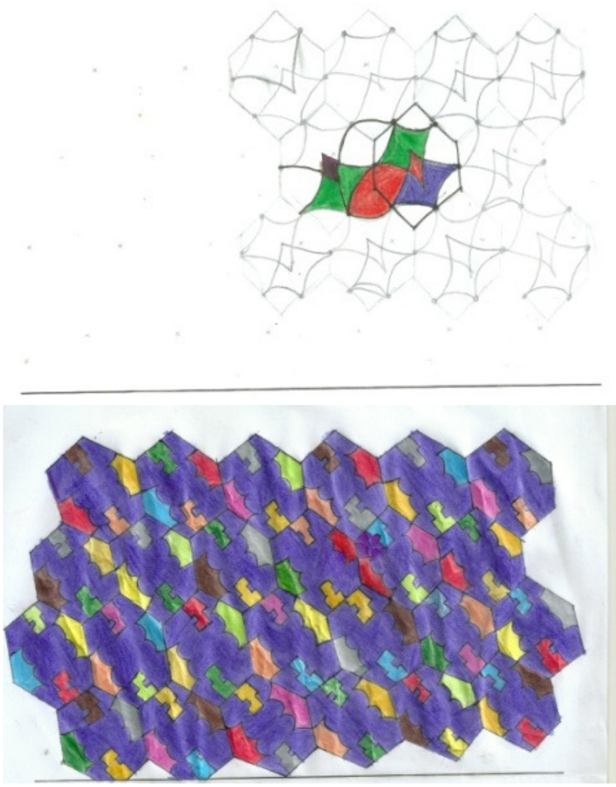
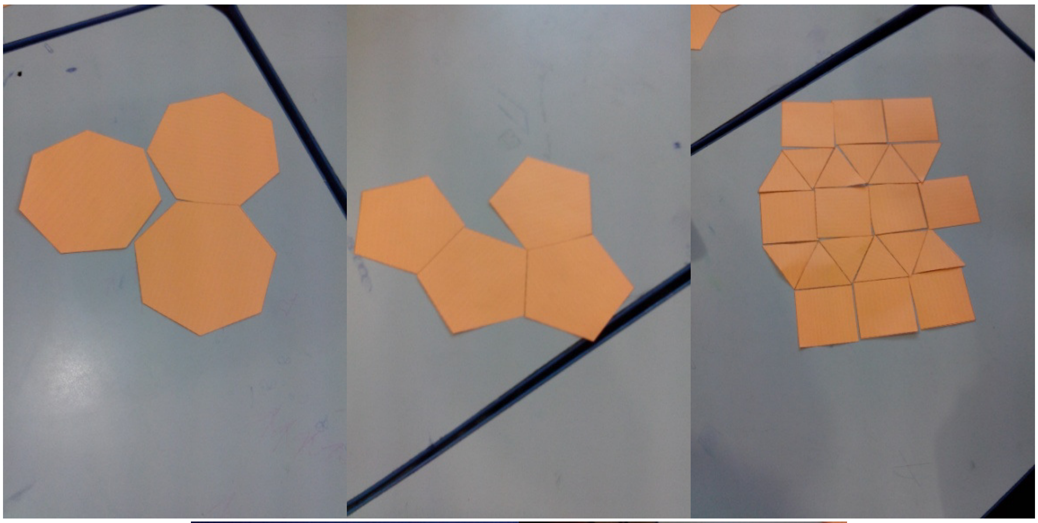


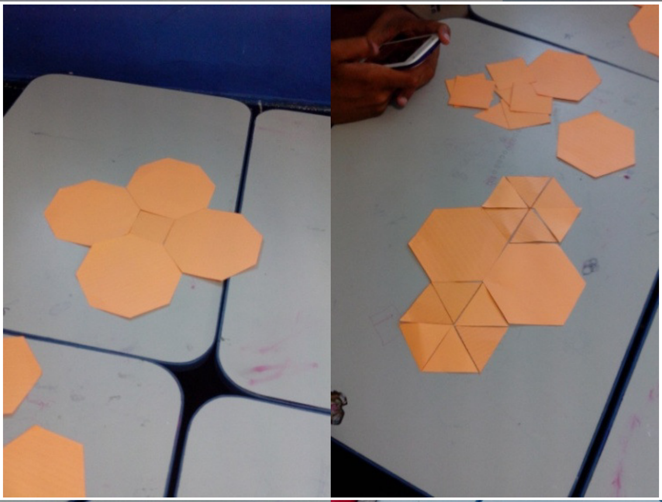
Figura 116: Diagrama de Voronoi. Temos que o primeiro desenho o aluno não coloriu o plano todo, mas teríamos uma pavimentação monoédrica. Já na segunda, o aluno coloriu, mas as figuras não se complementam.

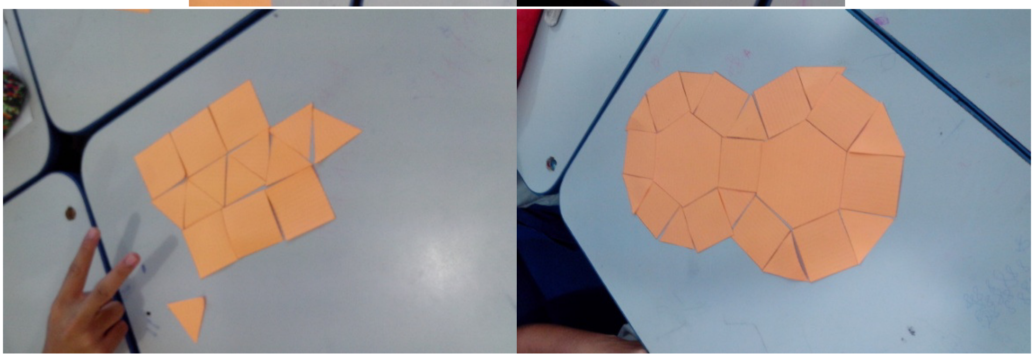
Figura 117: Aluna realizando a atividade do quarto encontro.

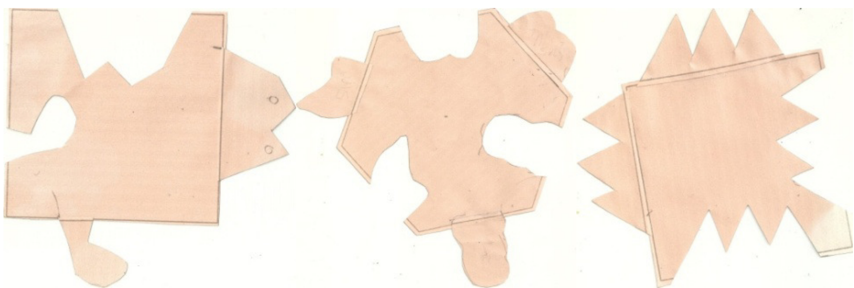
Do ponto de vista matemático, essa atividade foi bem produtiva, pois o principal objetivo era encontrar a mediatriz e o circuncentro. Além disso, serviu para que os alunos pudessem “aprender” a utilizar o compasso, saber a utilidade e a precisão de tal instrumento.

3.6 – Fotos da Aplicação.









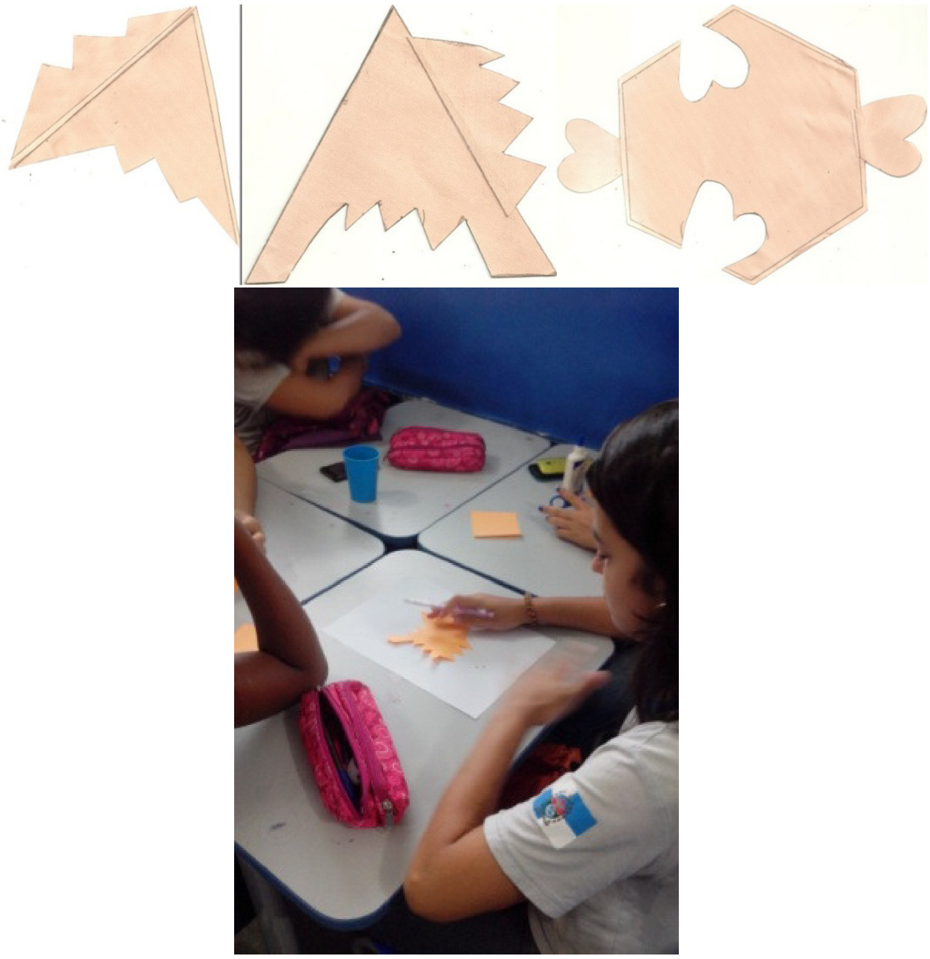


Figura 118: Fotos dos 4 encontros.

4- Considerações Finais.

O tema pavimentação do plano se mostrou muito eficaz e promissor no ensino de alguns conceitos matemáticos, pois ele muda o foco da matemática pura e abstrata para pinturas e conceitos “escondidos” na realização das atividades propostas. Além disso, as quatro propostas mostraram-se uma ótima forma de motivação do aluno.

O trabalho ainda trouxe ao conhecimento dos alunos as obras de Escher e mostrou a eles, que sabendo utilizar a técnica correta, podemos ter belas obras de artes. Além disso, as obras de artes podem ter matemática e muita criatividade.

Cabe ressaltar que a exposição dos trabalhos elevou a autoestima dos alunos que ficaram orgulhosos ao verem seus trabalhos expostos. Sem contar que, muitos alunos me questionaram o porquê não fiz em outras turmas, pois gostariam de ter participado do projeto. A beleza e a aparente complexidade dos trabalhos prontos foram alvos de elogios dos colegas de outras turmas, professores e funcionários da escola.

A proposta da tarefa (trazer fotos do dia a dia) foi muito importante para a percepção do aluno com relação às pavimentações do plano e como ela estão ao nosso redor e não reparamos. As fotos trazidas demonstraram bem o entendimento do assunto e a importância de mostrar ao aluno que a matemática está ao nosso lado e não associamos ao que aprendemos na escola.

Mas, apesar do sucesso final do trabalho, temos alguns pontos a melhorar, sendo este trabalho um estudo preliminar, no qual sugiro algumas alterações no projeto inicial.

Diante da preguiça de alguns alunos, podemos trocar a pintura em cartolina por uma pintura em papel A4 com quadrados menores no momento em que trabalharmos com o conceito da simetria. No momento da realização, alguns alunos ficaram desestimulados por terem que pintar a cartolina toda, mas outros fizeram e até gostaram de pintar. Portanto, para que todos possam interagir, essa mudança pode gerar melhores resultados.

Utilizar figuras com apenas um lado colorido ajuda na hora de fazer a técnica da dentada. Como foi relatado anteriormente, os alunos estavam virando a figura para aplicar a técnica da dentada, o que invertia todo o processo, então, a sugestão foi ter um material em que tivéssemos um lado de cada cor, pois assim, ficaria mais fácil de o aluno não cometer este erro.

O principal problema que devemos tentar modificar no panorama do ensino é com relação ao compasso. Ele deveria ser amplamente utilizado em salas de aula. Os alunos do 2° ano do Ensino Médio não sabiam utilizar este instrumento e, segundo relatos de alguns, nunca haviam utilizado em sala de aula. Os alunos não sabiam da importância desse instrumento no rigor para a construção da figura.

O presente trabalho pôde mostrar aos alunos que o compasso possui uma margem de erro muito menor do que quando se utiliza a régua (que é um instrumento comumente utilizado). Diante desse problema, ficou claro que a disciplina de Desenho Geométrico é indispensável na vida escolar do aluno.

Concluímos, então, que a matemática pode ser integrada a outras matérias, de forma lúdica e criativa, na construção de conceitos que antes eram colocados sem relação com a realidade do aluno.

Referências Bibliográficas.

- ALVES, Claudia Maria Fiuza. **O estudo da simetria através da arte de Maurits Cornelis Escher.** 2014. 76 f. TCC (Mestrado Profissional Profmat), Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2014. Disponível em: <http://www.impa.br/opencms/pt/ensino/downloads/PROFMAT/trabalho_conclusao_curso/2014/claudia_fiuza.pdf>. Acesso em: 23 out. 2015.

- AMORIM, Cristiano Marcell Isquierdo de. **Matemática Financeira - Abordagem voltada para a cidadania.** 2014. 54 f. TCC - Profmat, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2014. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/tcc_get.php?cpf=05143719780&d=20151113190728&h=10ad064b5240a2cdddd06adfb85c0533013f6214>. Acesso em: 13 nov. 2015.

- BAJUELOS, Antonio Leslie. **Problemas de Proximidade: Diagramas de Voronoi.** 2007. 19 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado em Matemática e Aplicações, Universidade de Aveiro, Aveiro, Portugal, 2008. Cap. 7. Disponível em: <http://sweet.ua.pt/leslie/GeoCom/Slides/GC_0708_7_Diagramas_Voronoi.pdf>. Acesso em: 28 jan. 2016.

- BARBOSA, Ruy Madsen. **Descobrindo padrões em mosaicos.** 4. ed. São Paulo: Atual, 1993.

- BARRICHELO, Leonardo; LEITE, Kauan Pastini Paula. **Polígonos Regulares e Ladrilhos.** Campinas, Disponível em: <http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1026>. Acesso em: 13 nov. 2015.

- BRASIL. Parâmetros Curriculares Nacional (PCN). Brasília, Documento Oficial, 1997. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf>. Acesso em: 23 dez. 2015.

- C., P. J. R.. **Pavimentações.** Disponível em: <http://passeiomatematico.blogspot.com.br/2010/10/pavimentacoes.html>. Acesso em: 16 out. 2015.

- COELHO, André. **Estudo dos Polígonos por Intermédio da Pavimentação do Plano.** 2014. 82 f. TCC (Mestrado Profissional- Profmat), Uiversidade Federal de

Goiás, Catalão (GO), 2014. Disponível em: <https://repositorio.bc.ufg.br/tede/bitstream/tede/4026/2/Dissertação - André Coelho - 2014.pdf>. Acesso em: 16 out. 2015.

- CORREA, Nazareno. **Estudo das pavimentações do plano utilizando um objeto de aprendizagem.** 2013. 189 f. Monografia (Especialização), Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2013. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/106892/318862.pdf?sequence=1>. Acesso em: 23 out. 2015.

- DALCIN, Mário; ALVES, Sérgio. **Mosaicos do Plano**. **Revista do Professor de Matemática,** Rio de Janeiro, v. 40, p.3-12, 1999. Disponível em: <http://www.ufrgs.br/espmat/disciplinas/midias_digitais_I/2009/modulo_II/pdfs/mosaicos_RPM40.pdf>. Acesso em: 09 out. 2015

- HAMMACK, Richard (Org.). **Involves Designing Frieze Patterns With Specified Types Of Symmetry.** Disponível em: <http://www.people.vcu.edu/~rhammack/Math122/Homework/Homework1/Room1.html>. Acesso em: 13 nov. 2015.

- JORGE, Marilise Oliveira. **Pintando o Cubo:** Matemática com Arte. 2011. 82 f. TCC (Graduação) - Curso de Licenciatura em Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2011. Disponível em: <http://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/31622/000784071.pdf?...1>. Acesso em: 30 out. 2015.

- MATEUS, Luis Miguel Cotrim. **GD Aula Teórica 2: Pavimentações.** 2012. Disponível em: <http://home.fa.utl.pt/~lmmateus/1112_1_sem/1112_1_4_Moda_padroes.pdf>. Acesso em: 13 nov. 2015.

- MELLO, Hilton Andrade de. Compondo um plano com polígonos: Tesselações: Tesselações (ou tilings) de Penrose. In: MELO, Hilton Andrade de. **Geometria Nas Artes,** 2010. p. 62-69. Disponível em: <www.hamello.com/PDF/livro_pt.pdf>. Acesso em: 06 nov. 2015.

- NOGUEIRA, Jessica Renata. **Uma Revisão Da Triangulação De Delaunay Com Malhas Geradas Pelo Algoritmo De Green-Sibson.** 2013. 60 f. Monografia (Graduação) - Curso de Ciência da Computação, Universidade Federal de Lavras, Lavras - MG, 2013. Disponível em: <http://repositorio.ufla.br/bitstream/1/5069/1/MONOGRAFIA_ Uma revisão da triangulação de Delaunay com malhas geradas pelo algoritmo de Green-Sibson.pdf>. Acesso em: 04 dez. 2015.

- **Polígonos Replicantes:** Semelhanças no plano. Brasília: UNB, 2015. Disponível em: <http://mat.unb.br/lemat/wp-content/uploads/2015/07/07APRESENTA%C3%87%C3%83O.pdf>. Acesso em: 09 out. 2015

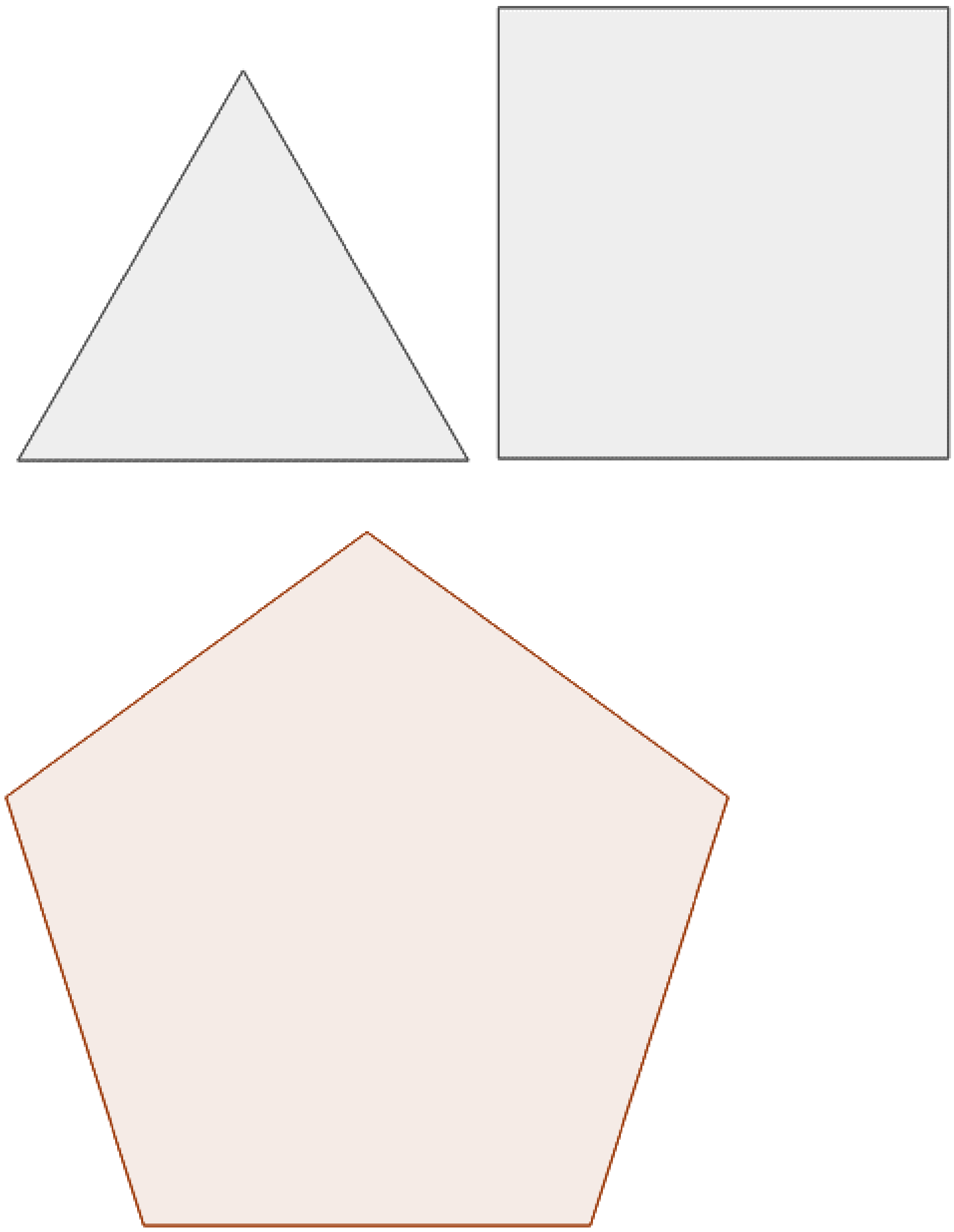
- SANTOS, Marli Regina dos; MURARI, Claudemir. **Aprendendo Tesselações de Forma Lúdica.** In: VIII ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8., 2004, Recife. **Anais do VIII ENEM.** Recife (PE), 2004. p. 1 - 12.

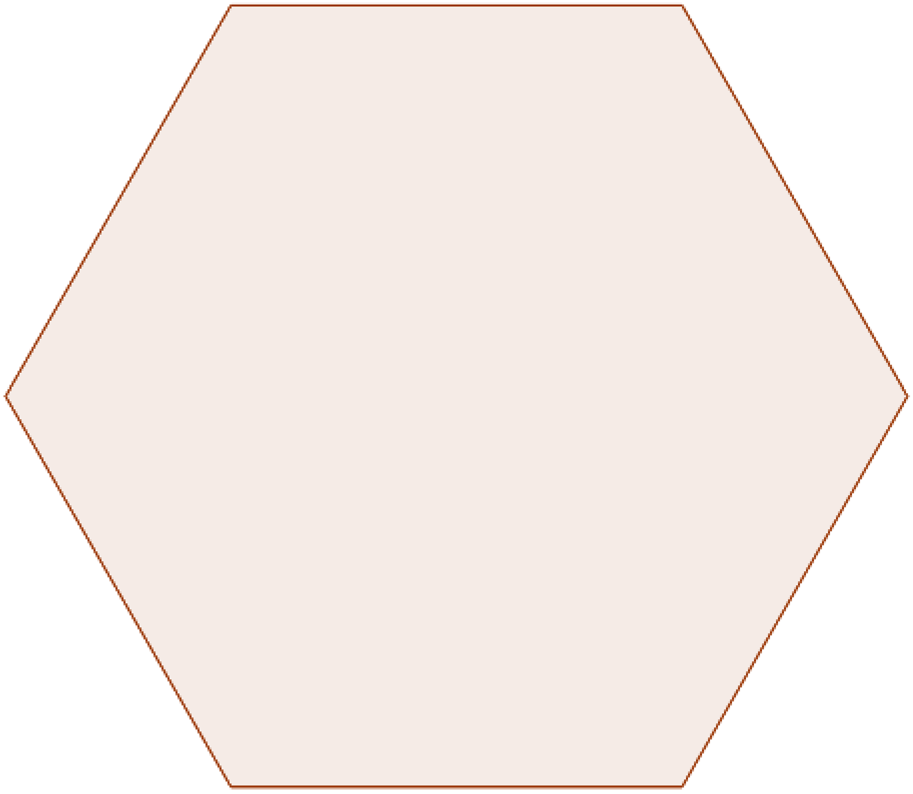
- SANTOS, Marli Regina dos. **Pavimentações Do Plano: Um Estudo Com Professores De Matemática E Arte.** 2006. 177 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Pós-graduação em Educação Matemática, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro (sp), 2006. Disponível em: <http://base.repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/91130/santos_mr_me_rcla.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso em: 06 nov. 2015.

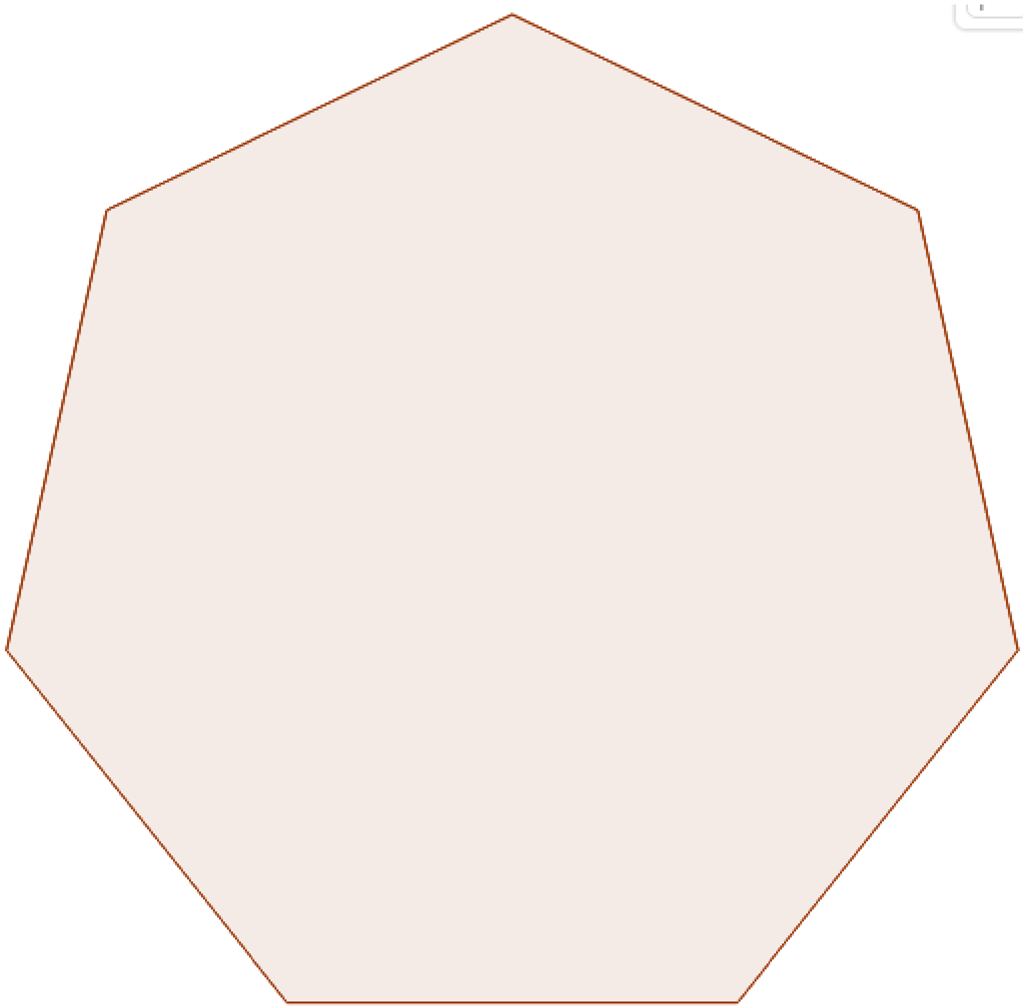
- TJABBES, Pieter (Curador). **O Mundo Mágico De Escher**. Centro Cultural Banco do Brasil. Rio de Janeiro, 2011. Disponível em http://www.bb.com.br/docs/pub/inst/img/EscherCatalogo.pdf. Acesso em: 30 out. 2015.

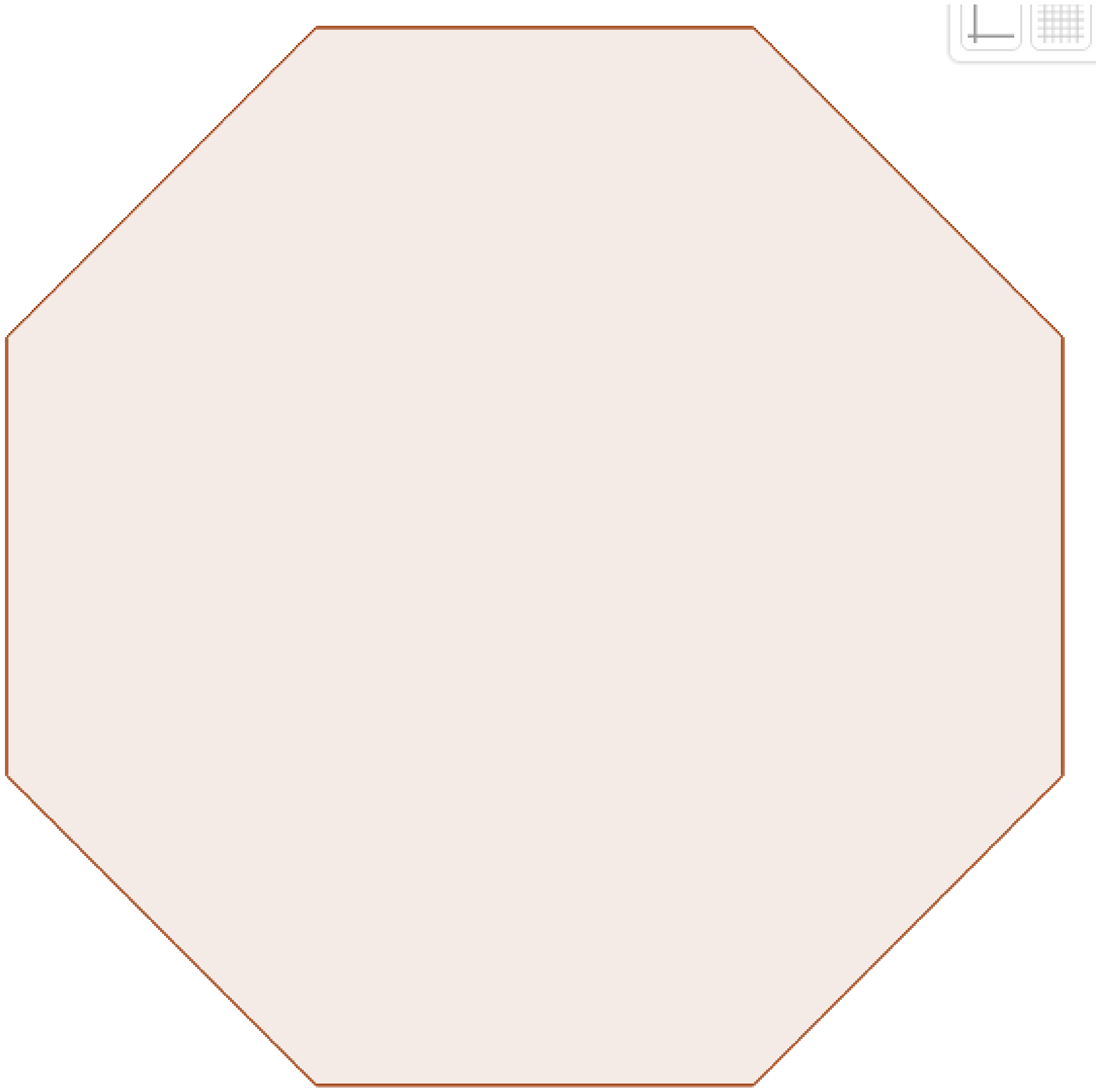
Anexos

Anexo 1: Modelo de Polígonos Regulares de Mesmo Lado

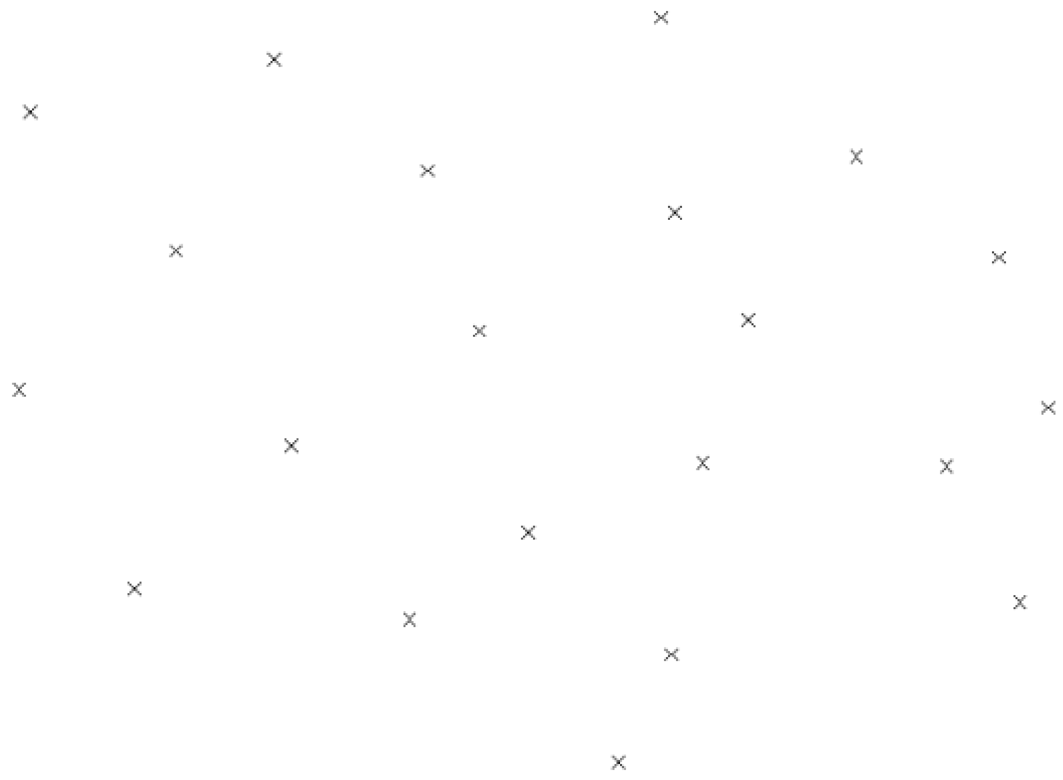


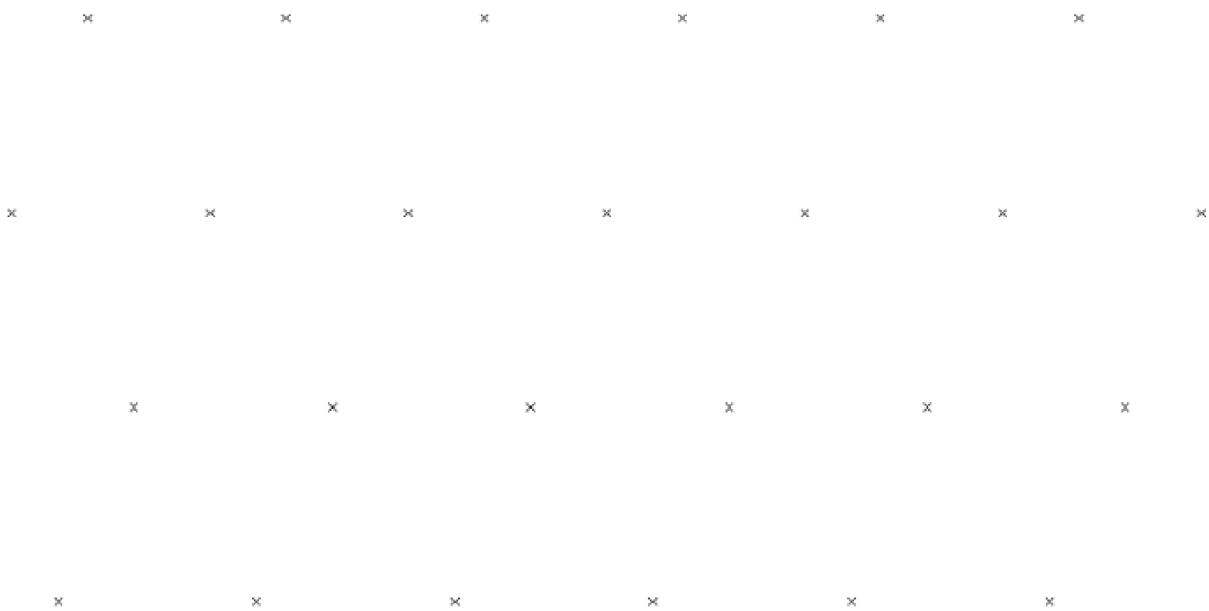






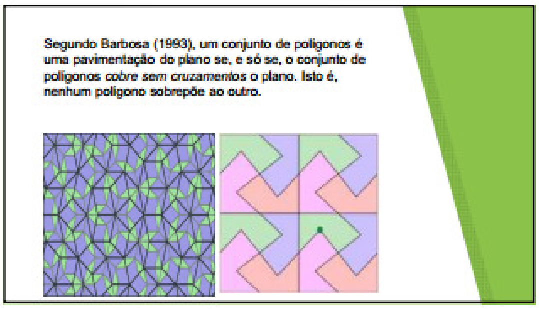
Anexo 2: Padrões Para Triangulações de Delaunay

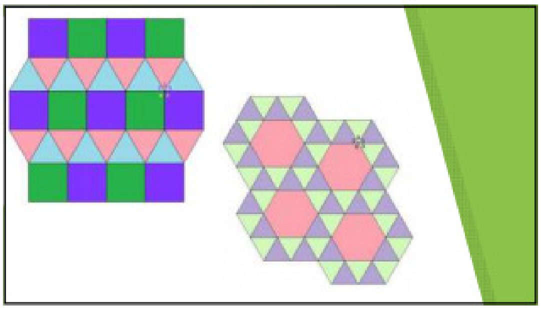


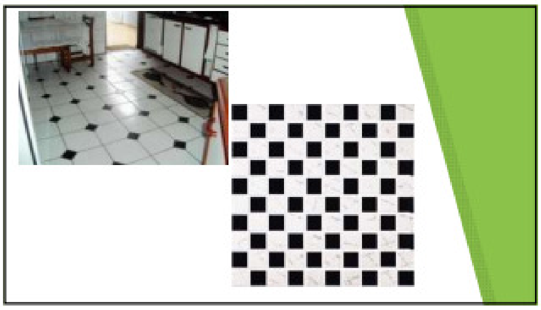


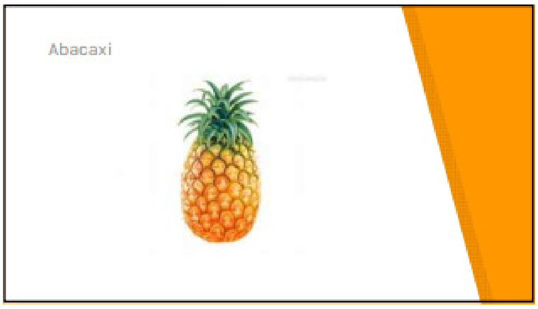
Anexo 3

Slides do 1° Encontro.







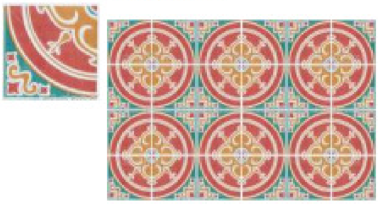


Colméia de Abelha

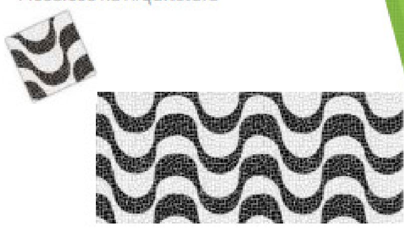
Mosaicos

Os mosaicos, resultados das pavimentações, são conhecidos desde os tempos antigos. Estiveram presentes nas civilizações assíria, babilônica, persa, egípcia, grega, chinesa e outras, empregados em padrões que não raro permaneceram até os dias atuais. O objetivo do artífice era e é encontrar um certo tipo de simetria ornamental com o emprego de figuras relativamente simples, cuja repetição e interação formem um todo harmonioso e estético.

Mosaicos na Arquitetura

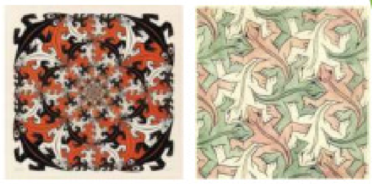


Mosaicos na Arquitetura



Mosaicos na Arquitetura

Recobrimentos em Obras de Arte



Recobrimentos em Obras de Arte

Então, não é difícil sair pelas ruas e encontrar formas de se recobrir o plano, ou formas que apresentem simetrias, rotações ou reflexões.

Se prestarmos mais atenção, iremos encontrar em diversos lugares ao nosso redor.

TAREFA PARA CASA

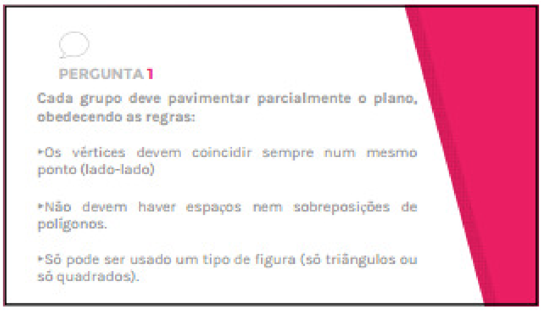
Trazer uma foto que representa algum tipo de recobrimento apresentado que está ao nosso redor. Em qualquer lugar que conseguirmos identificar e fotografar.

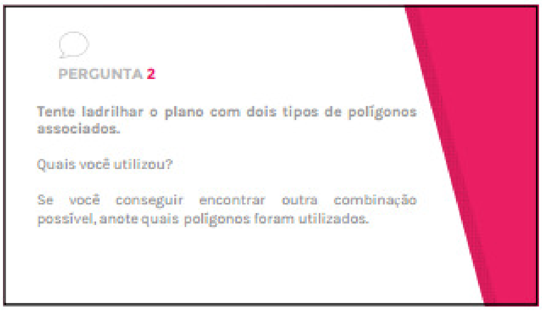
ATIVIDADE 1

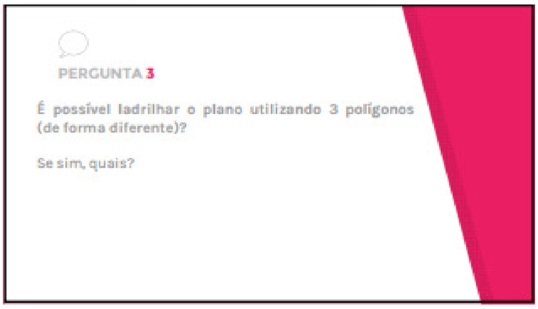
Manipular polígonos regulares a fim de recobrir o plano;

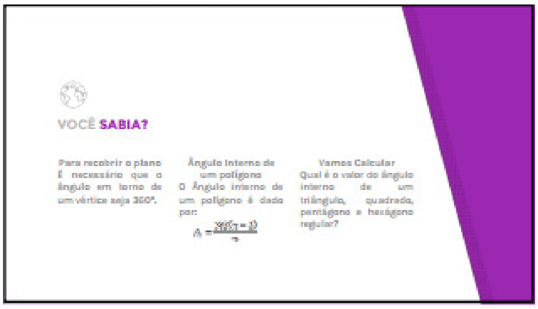
Encontrar quais figuras regulares recobrem o plano;

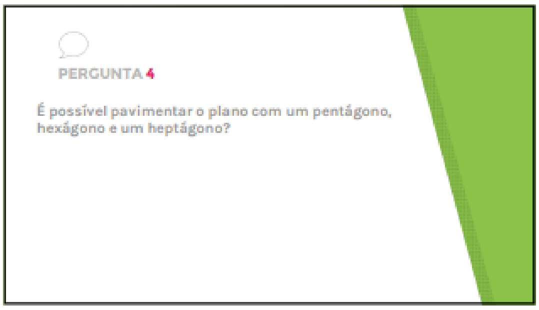
Encontrar qual o requisito para que certa combinação de polígonos cubra o plano.

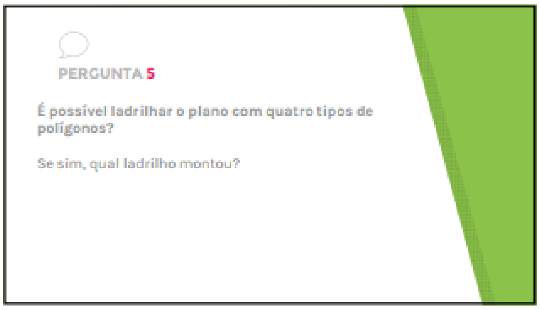




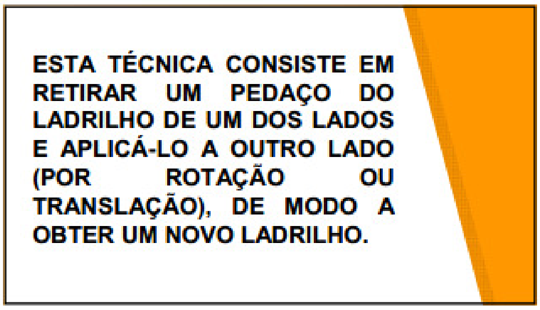


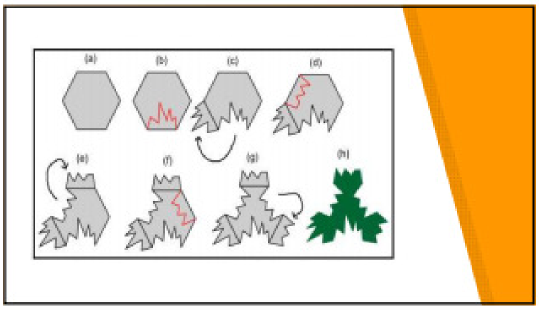


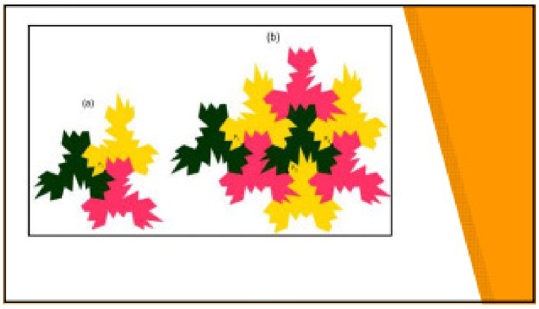


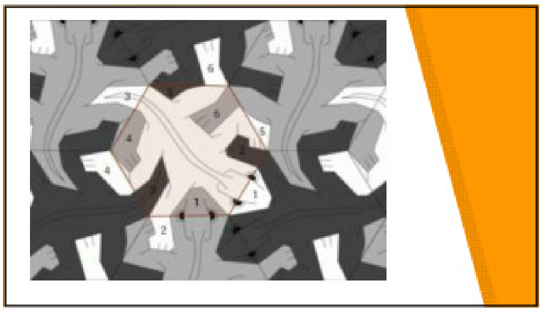


Slides do 3° Encontro

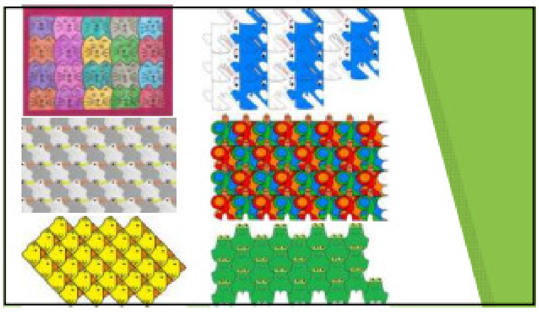




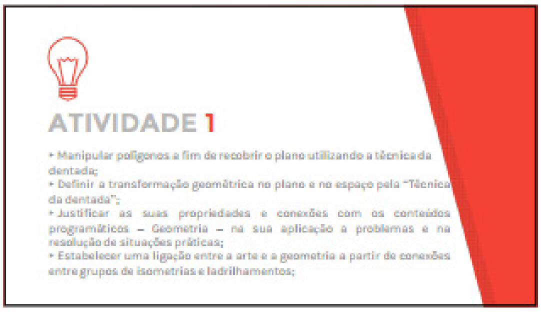

(a)
(b)



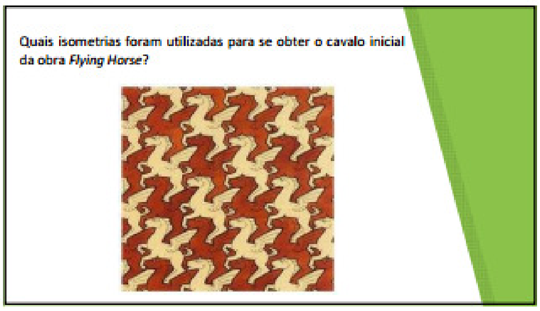

ALGUMAS OBRAS DE ESCHER

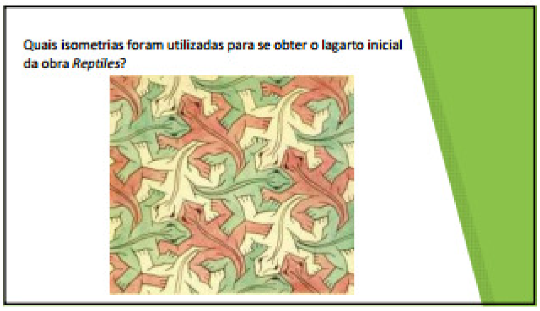



CONCEITOS MATEMÁTICOS ENVOLVIDOS

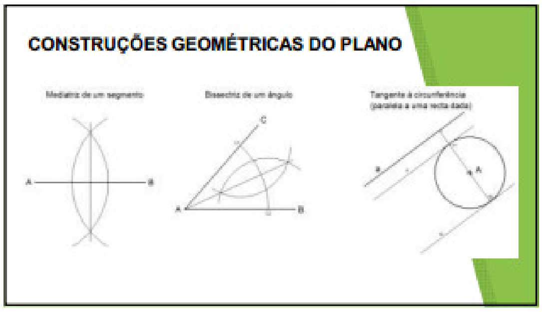

ATIVIDADE 1
• Manipular polígonos a fim de recobrir o plano utilizando a técnica da dentada;
• Definir a transformação geométrica no plano e no espaço pela "Técnica da dentada";
• Justificar as suas propriedades e conexões com os conteúdos programáticos – Geometria – na sua aplicação a problemas e na resolução de situações práticas;
• Estabelecer uma ligação entre a arte e a geometria a partir de conexões entre grupos de isometrias e ladrilhamentos;

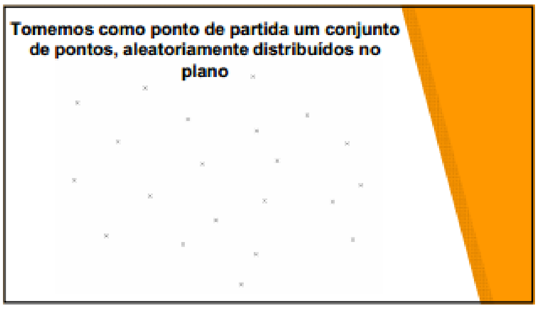

TAREFA1
Criar pavimentações usando a "técnica da dentada" sobre polígonos, usando:
•Translação
•Rotação
•Translação e Rotação

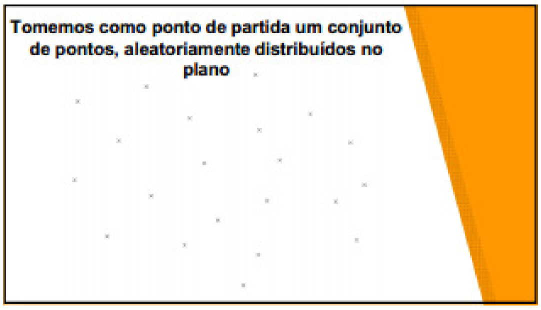

Quais isometrias foram utilizadas para se obter o cavalo inicial da obra *Flying Horse*?

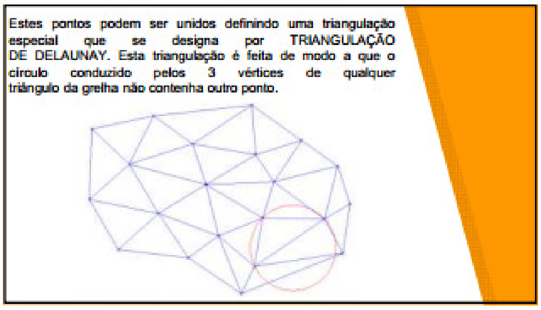

Quais isometrias foram utilizadas para se obter o lagarto inicial da obra *Reptiles*?

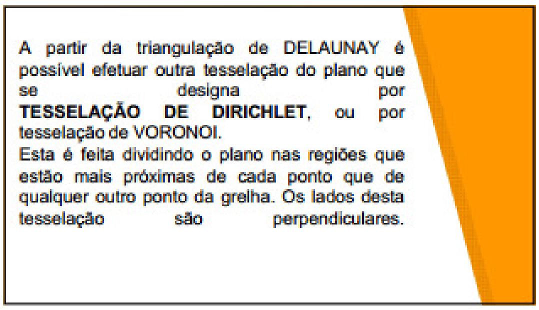
Slides do 4° Encontro

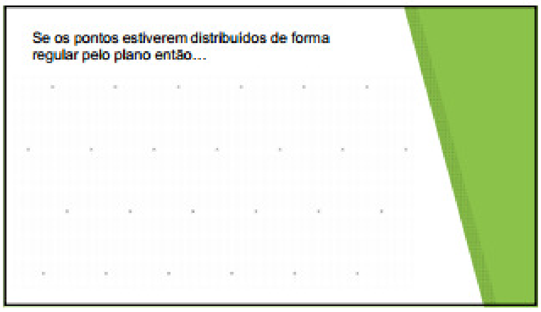


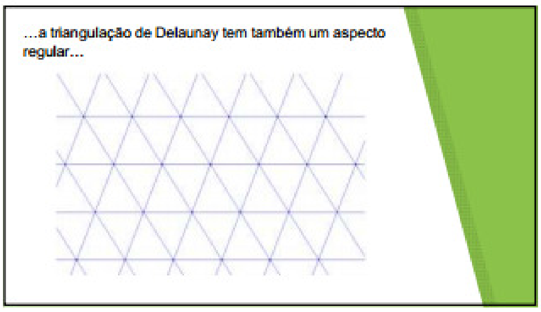






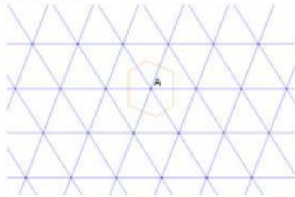




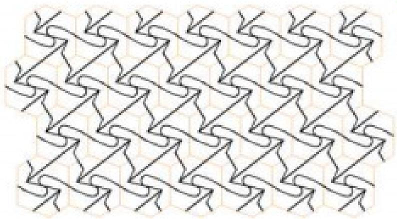


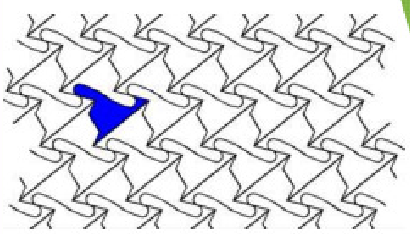
...assim como a tesselação de Dirichlet. Esta tesselação corresponde já a uma possível PAVIMENTAÇÃO do plano como também o é a triangulação de Delaunay.

À TESSELA de um ponto A dá-se a designação de DOMÍNIO DE DIRICHLET do ponto A da grelha. Note que os lados da tessela do ponto A se obtêm construindo as mediatrizes dos lados da grelha que concorrem em A.



A ideia base subjacente à construção de um PADRÃO para uma PAVIMENTAÇÃO PERIÓDICA do plano corresponde ao preenchimento de um domínio de Dirichlet ...





OBRIGADO **PELA** PARTICIPAÇÃO DE TODOS

Até a Próxima!