´

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Campus de presidente Prudente

MARCELO DOS REIS CARRION

A RAZÃO ÁUREA E A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI COMO RECURSOS DE APRENDIZAGEM DE SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS – PA E PG – NO ENSINO MÉDIO

PRESIDENTE PRUDENTE
2015

MARCELO DOS REIS CARRION

A RAZÃO ÁUREA E A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI COMO RECURSOS DE APRENDIZAGEM DE SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS – PA E PG – NO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional-PROFMAT, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", polo de Presidente Prudente.

Orientador: Prof Dr. Aylton Pagamisse

PRESIDENTE PRUDENTE
2015

Carrion, Marcelo dos Reis.
A razão áurea e a sequência de Fibonacci como recursos de aprendizagem de sequências numéricas – PA e PG – no ensino médio / Marcelo dos Reis Carrion. -- São José do Rio Preto, 2015
74 f. : il., tabs.

Orientador: Aylton Pagamisse
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Matemática (Ensino médio) - Estudo e ensino. 2. Sequências (Matemática) 3. Professores de matemática. 4. Aprendizagem baseada em problemas. 5. Matemática – Metodologia. I. Pagamisse, Aylton. II. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. III. Título.
CDU – 517.52

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE
UNESP - Campus de São José do Rio Preto

MARCELO DOS REIS CARRION

A RAZÃO ÁUREA E A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI COMO RECURSOS DE APRENDIZAGEM DE SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS – PA E PG – NO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional-PROFMAT, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", polo de Presidente Prudente.

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Aylton Pagamisse - UNESP - Presidente Prudente
Orientador

Prof^{a}. Dr^{a}. Michele de Oliveira Alves - UEL - Londrina

Prof. Dr. José Carlos Rodrigues - UNESP - Presidente Prudente

PRESIDENTE PRUDENTE
2015

RESUMO

Na última década, a aplicação de avaliações externas periódicas nacionais e internacionais tais como SAEB, ENEM, PROVA BRASIL e PISA possibilitou o monitoramento da evolução dos estudantes da educação básica brasileira, indicando uma piora crescente à medida que o aluno avança na direção das séries finais do ensino fundamental. Esse fato provoca uma defasagem ainda maior nos alunos durante o ensino médio fazendo com que haja um déficit considerável com relação ao nível de aprendizagem esperado. Internacionalmente, o cenário se mantém. Na edição de 2013 do PISA, o Brasil ocupou o 58º lugar entre 63 países participantes na avaliação em Matemática. O problema não possui solução simples, pois envolve questões curriculares, formação de professores, escolas mal equipadas, gestão escolar deficitária, famílias ausentes e alunos desmotivados.

O objetivo desse trabalho é colaborar com os professores de Matemática, principalmente do ensino médio, no sentido de fornecer subsídios para que as aulas sejam mais dinâmicas, envolventes, motivadoras e eficientes. Nesse sentido, estão destacados aspectos relevantes comuns à prática diária de professores de escolas cujos alunos obtiveram destaque em avaliações promovidas pela S.E.E. do Estado de São Paulo. As estratégias de ensino propostas têm início com a apresentação de um vídeo motivador sobre a sequência de Fibonacci e sua conexão com a razão áurea, a qual é o eixo condutor/motivador desse trabalho. Os aspectos históricos das sequências numéricas, definições, demonstrações e fórmulas da PA e PG são abordados em seguida juntamente com uma série de exercícios resolvidos para a utilização do professor. Também são apresentadas curiosidades e aplicações das PAs e PGs aproximando a Matemática da realidade e motivando o aluno, de modo a tornar a aprendizagem mais prazerosa e revestida de significado. Este trabalho é finalizado com sugestões de planos de aula com propostas de atividades visando proporcionar ao professor estratégias de ensino diversificadas objetivando uma melhora na qualidade de suas aulas.

Palavras-chave: matemática, aprendizagem, professor, aluno, Fibonacci

ABSTRACT

In the last decade, the application of national and international periodic evaluations and such as SAEB, ENEM, PROVA BRAZIL and PISA made possible monitoring the evolution of Brazilian's students of basic education, indicating an increasing worsening to the measure that the pupil advances in the direction of the final series of basic education. This fact still provokes a bigger imbalance in the pupils during average education making with that it has a considerable deficit with regard to the waited level of learning. Internationally, there is no change. In the edition of 2013 of PISA, Brazil occupied 58o place enters 63 participant countries in the evaluation in Mathematics. The problem does not possess simple solution, therefore it involves curricular questions, formation of professors, schools badly equipped, deficit pertaining to school management, absent families and not motivated pupils. The objective of this work is to collaborate with the professors of Mathematics, mainly of average education, in the direction to supply involving, motivational and efficient subsidies so that the lessons are more dynamic. In this sense, will highlight relevant issues common to the daily practice of school teachers whose students achieved prominence in assessments carried out by São Paulo State ESS. The teeeducation strategies proposals have beginning with the presentation of a motivational video about Fibonacci sequence and its connection with the golden reason, which is the conducting axle of this work. The historical aspects of the numerical sequence, definitions, demonstrations and formulas of PA and PG are boarded after that together with a series of exercises decided for the use of the teacher. Also curiosities and applications of PAs and PGs are presented approaching the Mathematics from reality and motivating the pupil, in order to become the coated learning most pleasant and coated with meaning. This work is finished with suggestions of plans of lesson with proposals activities aiming at to provide to professor diversified strategies of education objectifying an in the quality of its lessons.

Keywords: math, learning, teacher, student, Fibonacci.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 6
2 SOBRE ENSINAR E APRENDER MATEMÁTICA 11
3 A RAZÃO ÁUREA E A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI 19
3.4 A RAZÃO ÁUREA E GEOMETRIA 22
3.4.1 Obtenção do Número de Ouro Geometricamente 22
3.4.2 O retângulo áureo........ 24
3.4.3 A espiral áurea 27
3.4.4 Pentagrama........ 27
3.4.5 O triângulo áureo........ 28
3.4.7 O pentágono regular e a razão áurea........ 29
3.4.7 O decágono regular e a razão áurea........ 30
3.5 A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI E O NÚMERO DE OURO........ 31
4 SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS 34
4.1HISTÓRIA DAS PROGRESSÕES ARITMÉTICAS E GEOMÉTRICAS 34
4.2 DEFINIÇÃO........ 41
4.3 PROGRESSÃO ARITMÉTICA 42
4.4 PROGRESSÃO GEOMÉTRICA........ 44
4.5 PROBLEMAS DE PA E PG RESOLVIDOS........ 45
4.6 CURIOSIDADES E APLICAÇÕES DAS SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS 50
5 PLANOS DE AULA 56
6 CONSIDERAÇÕES FINAIS 72
7 REFERÊNCIAS........ 73

1 INTRODUÇÃO

A educação brasileira não possui motivos para comemorar. Pelo contrário. Nossos alunos, ao final do ensino médio, não dominam a norma culta da língua e tampouco conseguem resolver problemas simples de aritmética e álgebra.

Segundo dados divulgados pelo Instituto Nacional de Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep), os alunos do 5º ao 9º ano vêm apresentando resultados cada vez mais distantes das metas estabelecidas pelo Ministério da Educação (MEC), tanto em Língua Portuguesa quanto em Matemática. A Prova Brasil é uma avaliação bianual que avalia desde 2005 o nível de proficiência dos alunos dessas duas disciplinas nas escolas públicas do país e de acordo com as três últimas avaliações podemos observar que apesar de uma pequena melhora, o desempenho dos alunos se deteriora a medida que estes avançam para as séries finais do ensino fundamental. Ainda segundo o Inep, na avaliação de 2013, 35,6% dos alunos do 9º ano apresentaram baixo desempenho em Matemática, índice um pouco melhor que os 38,9% do ano de 2009, porém muito acima dos 13,3% obtidos por alunos do 5º ano na mesma avaliação.

No ensino médio a situação também não é nada animadora, pois segundo dados do PISA, Programa Internacional de Avaliação dos Estudantes, exame aplicado a alunos com idade entre 15 e 16 anos abordando conteúdos de Leitura, Ciências e Matemática, elaborado pela Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE), em sua edição de 2012, o Brasil ocupou a 58ª posição entre os 65 países avaliados.

Segundo Ocimar Munhoz Alavarse, Doutor em educação pela USP (Universidade de São Paulo), o país ainda tem muitos alunos com baixo desempenho nas áreas avaliadas.

"Quando a gente olha o Brasil nos resultados desse Pisa, não só a média geral é baixa como tem muita gente concentrada abaixo do nível adequado. Esses alunos que saem do ensino fundamental e são avaliados pela prova acabam tendo o desempenho que se espera de um aluno do 5º ou 6º ano". (http://educacao.uol.com.br/noticias/2013/12/03)

O cenário é desalentador. Mudanças são prementes. O fato é que a escola brasileira mudou muito pouco desde nossos avós e os professores, em sua maioria, continuam ensinando como se os alunos também não tivessem mudado.

Nas décadas de 1960 e 1970, considerando o nível de desenvolvimento da industrialização na América Latina, a política educacional vigente priorizou, como finalidade para o Ensino Médio, a formação de especialistas capazes de dominar a utilização de maquinarias ou de dirigir processos de produção (PCNEM 2000, p.5). Nessa perspectiva, durante o ensino médio, última etapa da educação básica, as dinâmicas educacionais privilegiavam a técnica e a memorização.

Os conteúdos eram trabalhados de modo compartimentado, sem preocupação com a aplicação e sem justificativas dos motivos pelos quais esses conteúdos seriam trabalhados.

Assim o modelo educacional vigente visava basicamente a formação profissional do indivíduo em detrimento de sua formação moral e cidadã. A qualidade educacional definia-se pelo objetivo de "formar um cidadão capaz de participar eficazmente das atividades produtivas da nação". Para tanto, "o saber que a escola democrática transmitirá terá de ser um saber das coisas e não um saber sobre as coisas, com que se contenta a escola tradicional" (Brasil/MEC, 1971, p. 15-16). Esse modelo predominou até o final da década de 80 com o advento da revolução tecnológica.

Na década de 1990 o ensino médio foi desmembrado em duas modalidades distintas e independentes: o ensino médio tradicional e o ensino técnico profissionalizante. De acordo com a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB/96) em seu artigo 35: O ensino médio, etapa final da educação básica, com duração mínima de três anos, terá como finalidades:

I - a consolidação e o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos no ensino fundamental, possibilitando o prosseguimento de estudos;

II - a preparação básica para o trabalho e a cidadania do educando, para continuar aprendendo, de modo a ser capaz de se adaptar com flexibilidade a novas condições de ocupação ou aperfeiçoamento posteriores;

III - o aprimoramento do educando como pessoa humana, incluindo a formação ética e o desenvolvimento da autonomia intelectual e do pensamento crítico;

IV - a compreensão dos fundamentos científico-tecnológicos dos processos produtivos, relacionando a teoria com a prática, no ensino de cada disciplina.

De acordo com o as Orientações Curriculares Para o Ensino Médio (MEC, 2004), a proposta pedagógica do Ensino Médio deve ter como referência a continuidade dos estudos, o exercício da cidadania e o mundo do trabalho, considerando-se:

a) a formação de pesquisadores para o desenvolvimento de novos conhecimentos, da ciência e do país;

b) os processos produtivos de bens, serviços e conhecimentos tecnológicos com os quais o aluno se relaciona no seu quotidiano, bem como os processos com os quais se relacionará no âmbito do trabalho.

No âmbito pedagógico e metodológico, conforme definido na LDB, os princípios norteadores da organização curricular são a interdisciplinaridade e a contextualização no trabalho e no exercício da cidadania. A reforma curricular emergiu, então, com pretensões de mudanças radicais na escola média, com as diretrizes instituindo os princípios de interdisciplinaridade, a organização do currículo por áreas de conhecimento, a contextualização dos conteúdos, a ênfase na aprendizagem, o protagonismo dos alunos, bem como o desenvolvimento de competências.

Com a nova proposta, o aluno tende a abandonar uma postura passiva, característica do ensino tradicional, e é estimulado a ser parte integrante do processo da construção do conhecimento.

Atualmente os alunos são irrequietos, questionadores, capazes de realizar várias tarefas simultaneamente e lidam com desenvoltura com a tecnologia. Nesse contexto, o docente deve atuar como mediador/facilitador/estimulador dos processos que almejam que o aprendiz tenha uma aprendizagem significativa. Assim, o aluno deve ter papel ativo em sua própria formação, deixando o papel de coadjuvante e assumindo o protagonismo na busca por uma aprendizagem eficaz.

Para assumir uma postura proativa é necessário que o aluno esteja motivado, fazendo com que todos os recursos mentais estejam disponíveis para trilhar o caminho em busca do conhecimento.

Muitos alunos têm uma visão distorcida do que realmente a Matemática representa, muitas vezes com a nossa colaboração, pois em nossa prática nada inovadora repetimos o modelo que conhecemos, ou seja, da mesma forma como aprendemos.

A verdadeira Matemática não se trata de uma disciplina baseada em fórmulas, regras e sem conexão com a realidade. Cabe ao professor fazer com que os alunos a vejam como ela realmente é: a ciência mãe, encantadora, base para as demais ciências, recheada de aspectos históricos interessantes e com reais aplicações no mundo real.

É razoável imaginar que muitas mudanças devam ocorrer para que a educação brasileira seja colocada nos trilhos. Essas mudanças passam obrigatoriamente pela formação docente, revisão da grade curricular e criação de um currículo básico a ser adotado em todo o país.

Mudanças dessas dimensões não são realizadas rapidamente e, por esse motivo, são propostas estratégias que dependem basicamente da ação docente.

Com esse trabalho pretende-se colaborar com os professores partilhando experiências, disponibilizando estratégias de ensino, citando algumas aplicações Matemáticas em diferentes áreas do conhecimento além de propor a utilização da tecnologia através da utilização de mídias alternativas, computador e softwares.

Inicialmente são discutidos aspectos que envolvem a aprendizagem/ensino de matemática e formas de torná-la mais atrativa, mais intuitiva e com menor dependência de fórmulas e regras. A motivação é um aspecto fundamental em se tratando do processo ensino/aprendizagem e, nesse sentido, o Capítulo 3 foi criado com a intenção de motivar o aluno aguçando sua curiosidade pelo tema sequências numéricas. Nesse capítulo são abordados a razão áurea e o número de ouro, o valor numérico de $\varnothing$ e sua conexão com a sequência de Fibonacci que possibilita a conexão com o tema central desse trabalho. No Capítulo 4, são apresentados aspectos formais das sequências numéricas, especialmente PA e PG, definições, propriedades, e deduções de fórmulas, além de uma série de exercícios resolvidos. Há nesse capítulo o cuidado de se contextualizar historicamente as sequências numéricas associando-as com fenômenos naturais e sociais com a intenção de aproximá-las da realidade e revesti-las de significado.

A aplicação dos conteúdos estudados é um dos aspectos mais questionados pelos alunos junto aos professores, portanto, no Capítulo 5 são apresentadas curiosidades e aplicações práticas das progressões aritméticas e geométricas em diversas áreas do conhecimento, tais como juros simples e compostos, decomposição de substâncias radioativas, fractais, crescimento populacional e Lei do resfriamento dos corpos.

O Capítulo 6, composto por sugestões de atividades diferenciadas possibilita o fechamento da estratégia idealizada e iniciada no Capítulo 2, isto é, subsidiar os colegas professores para que possam enriquecer sua prática diária, fazendo com que o conteúdo sequências numéricas PA e PG, pertencente à grade curricular do ensino médio das escolas públicas e privadas seja apresentado de forma contextualizada, permeada por aspectos históricos e enriquecida com aplicações. Espera-se que esse trabalho proporcione alternativas para que os professores consigam efetivar parcerias com seus alunos objetivando uma aprendizagem efetiva e revestida de significado.

2 SOBRE ENSINAR E APRENDER MATEMÁTICA

> **"A Matemática no Ensino Médio tem um valor formativo, que ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo, porém também desempenha um papel instrumental, pois é uma ferramenta que serve para a vida cotidiana e para muitas tarefas específicas em quase todas as atividades humanas". (PCN, 1999)**

Uma parcela considerável dos alunos acredita que a matemática é difícil, complexa, repleta de regras e fórmulas e acima de tudo sem conexão com a realidade.

> **"A falta de ligação entre a Matemática que se aprende na escola e os reais interesses dos alunos, que olham para a disciplina como tendo um nível de abstração exagerado e pouco compreensível (...) faz com que a vontade de aprender vá se perdendo, à medida que o nível de complexidade vai aumentando." (Diniz 2003, p. 26)**

Ensinar matemática não se limita à memorização de fórmulas, teoremas e resolução de exercícios sem que os alunos tenham sequer a noção de onde podem ser aplicados os conteúdos estudados.

Investir na desmistificação dessa imagem é uma tarefa árdua e que cabe primordialmente ao professor. De modo geral, os professores brasileiros aprendem nas universidades os conteúdos que devem ser ensinados, porém não aprendem como fazê-lo. O que ocorre é que os professores passam a reproduzir as dinâmicas às quais foram submetidos em sua formação específica, ou seja, os professores sabem dar aula, mas muitas vezes não conseguem ensinar. Segundo os resultados obtidos por estudantes da educação básica brasileira tanto em avaliações internas como externas, os alunos passam pela escola, porém aprendem muito pouco. As aulas estão sendo dadas. O que falta então? Como fazer com que os alunos tenham uma aprendizagem mais significativa e eficiente? Pelos resultados obtidos nas mais diversas avaliações internas (ENEM, PROVA BRASIL, etc) ou externas (PISA) podemos perceber que o desafio que enfrentamos é gigantesco. E o papel do professor nesse contexto? O professor deve ser capaz de pensar estratégias, redefinir rotas, estimular/provocar a reflexão do aluno, a formulação de hipóteses e sua verificação, a fim de proporcionar ao aluno oportunidades para aprimorar suas potencialidades. Um dos maiores desafios para o professor atualmente, principalmente para o professor de matemática, é o de conseguir motivar o aluno, formalizando um trabalho de parceria em busca de uma aprendizagem significativa. Todo professor de matemática gostaria de contar com alunos motivados e dispostos a aprender, o que dificilmente acontece. O indivíduo motivado demonstra o desejo de aprender, que é fundamental, pois no processo ensino-aprendizagem o aluno deve exibir uma atitude proativa, ser agente de sua própria formação buscando no professor o parceiro ideal na busca pelo conhecimento.

A motivação está associada ao interesse por algo ou quando algum objetivo deve ser atingido por alguém. A motivação ocorre sempre que precisamos atender nossas necessidades de qualquer ordem. Sempre que uma necessidade é contemplada elegemos uma nova que procuramos saciar e assim sucessivamente. A motivação, portanto, está associada à nossa vivência e às experiências que temos ao longo de nossas vidas.

Como relata Záboli (1999, p. 46):

> **Motivação é algo que leva os alunos a agirem por vontade própria. Ela inflama a imaginação, excita e põe em evidência as fontes de energia intelectual, inspira o aluno a ter vontade de agir, de progredir. Em suma, motivar é despertar o interesse e o esforço do aluno. É fazer o estudante desejar aprender aquilo que ele precisa aprender.**

Conforme Bzuneck (2000, p. 9) “a motivação, ou o motivo, é aquilo que move uma pessoa ou que a põe em ação ou a faz mudar de curso”.

Para motivar um aluno é necessário conhecer como ele aprende e investir em estratégias que mobilizem seus recursos cognitivos em busca da aprendizagem.

A utilização da aula expositiva, tão criticada atualmente, e tão utilizada pelos professores de matemática, pode ser extremamente útil caso seja utilizada com critério pelo professor. O grande diferencial é tornar a aula expositiva o mais atrativa possível. A combinação com mídias alternativas, tais como vídeos e simulações são bem vindas.

Quando inicia uma aula o professor precisa ter ideia do conhecimento prévio do aluno, isto é, o que ele sabe a respeito de um determinado tema para que possa intervir e auxiliá-lo a atingir os objetivos propostos. Saber o que o aluno sabe a respeito do tema a ser trabalhado é fundamental para que o ponto de partida seja definido, pois de acordo com os PCNEM (2000) “O jovem não inicia a aprendizagem escolar partindo do zero, mas com uma bagagem formada por conceitos já adquiridos espontaneamente, em geral mais carregados de afetos e valores por resultarem de experiências pessoais".

Nesse sentido, a interação do professor com os alunos é fundamental. Durante o desenvolvimento da aula, o professor deve fazer intervenções, questionando seus alunos para que a validação da estratégia de ensino seja feita a todo o momento de modo a permitir que alterações sejam efetuadas instantaneamente e sem prejudicar a dinâmica da aula. A participação dos alunos, portanto, é de suma importância e deve ser estimulada.

O professor não pode apenas ser um transmissor de informações, ele deve mediar a relação do educando com as informações, pois a produção de conhecimento é um fenômeno individual, fruto da interpretação de dados e informações obtidas.

A simples transcrição, na lousa, dos conteúdos retirados do material didático em nada contribui para estimular os alunos. O professor pode e deve contribuir sugerindo aplicações, citando aspectos históricos e curiosidades sobre o assunto em pauta.

Contextualizar historicamente os fatos e conceitos matemáticos é importante para que o aluno perceba que a Matemática não é ciência pronta e acabada e permite explicitar as conexões da Matemática com as demais ciências e consequentemente com a realidade.

E de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL,1999):

> **A História da Matemática pode oferecer uma importante contribuição ao processo de ensino e aprendizagem dessa área do conhecimento. Ao revelar a Matemática como uma criação humana, ao mostrar necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, ao estabelecer comparações entre os conceitos e processos matemáticos do passado e do presente, o professor cria condições para que o aluno desenvolva atitudes e valores mais favoráveis diante desse conhecimento (p. 42).**

Compreender a Matemática como a Ciência Mãe, cujos conceitos e propriedades são utilizados nas demais áreas do conhecimento é extremamente importante para o aluno, pois aprender algo que tem utilidade real motiva o aprendiz, logo, pesquise e mostre onde é possível aplicar os conceitos estudados. A interdisciplinaridade principalmente com física, química e biologia pode ser muito útil nesse processo.

O professor deve dedicar especial atenção à Linguagem Matemática, pois alguns termos emprestados da Língua Portuguesa mantém o significado, outros não.

Novamente os PCNs (1999, p. 251) dizem que: “É preciso que o aluno perceba a matemática como um sistema de códigos e regras que a tornam uma linguagem de comunicação de ideias e permite modelar a realidade e interpretá-la.”

A compreensão da linguagem matemática é essencial no entendimento de enunciados, no desenvolvimento das resoluções de problemas e, especialmente durante a aula expositiva quando o professor utiliza o recurso didático do método axiomático-dedutivo. As demonstrações são de extrema importância, pois validam o conhecimento matemático e garantem que o aluno esteja convencido da veracidade da proposição matemática em questão. A não utilização de demonstrações durante a aula expositiva pode frustrar o aluno, desmotivando-o.

A motivação do aluno contempla aspectos intrínsecos e extrínsecos e a atuação docente deve ocorrer de forma a maximizar as suas intervenções sejam no campo emocional ou no campo didático-pedagógico.

Uma pergunta permeia o pensamento da maioria dos professores de Matemática realmente interessados no sucesso de suas intenções pedagógicas: Minha aula favorece a aprendizagem de meus alunos? Sou um bom professor? Atendo às expectativas de meus alunos? Posso realmente fazer a diferença em sala de aula? Na busca por respostas a esses intrigantes questionamentos, George Pólya (1887 – 1985), professor húngaro, teórico do ensino de matemática, formulou os Dez Mandamentos Para o Bom Professor (*Revista do Professor de Matemática*, da Sociedade Brasileira de Matemática, nº10, 1º semestre de 1987). :

1. Tenha interesse por sua matéria.
2. Conheça sua matéria.
3. Procure ler o semblante dos seus alunos; procure enxergar suas expectativas e suas dificuldades; ponha-se no lugar deles.
4. Compreenda que a melhor maneira de aprender alguma coisa é descobri-la você mesmo.
5. Dê aos seus alunos não apenas informação, mas know-how, atitudes mentais, o hábito de trabalho metódico.
6. Faça-os aprender a dar palpites.
7. Faça-os aprender a demonstrar.

8. Busque, no problema que está abordando, aspectos que possam ser úteis nos problemas que virão - procure descobrir o modelo que está por trás da presente situação concreta.
9. Não desvende o segredo de uma só vez - deixe os alunos darem palpites antes - deixe-os descobrir por si próprios, na medida do possível.
10. Sugira; não os faça engolir à força.

Na mesma direção, uma pesquisa (http://fvc.org.br/estudos-e-pesquisas/2011/boas-praticas-docentes-ensino-matematica-688828.shtml) foi encomendada pela Fundação Victor Civita (FVC), junto à Fundação Cesgranrio com o apoio do Banco Itaú BBA e do Instituto Unibanco e gerou um banco de dados com informações que podem ser extremamente úteis para que fiquemos menos angustiados e sejamos mais confiantes no sucesso de nossa missão. Essas informações não são garantia de sucesso, mas oferecem pistas muito boas nessa direção. As informações foram reunidas a partir de um grupo de docentes da rede educacional paulista, escolhidos por seu desempenho individual nas Avaliações por Mérito promovidas pela secretaria da educação do estado de São Paulo e pelos resultados satisfatórios obtidos pelas escolas onde lecionam em pelo menos duas edições do Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo (Saresp) entre 2008 e 2010.

O estudo gerou as seguintes práticas:

- Prática 1: Dominar o conteúdo

  Dominar amplamente o conteúdo ministrado significa caminhar sobre solo firme, o professor se sente seguro e faz com que essa segurança gere credibilidade perante os alunos além de favorecer intervenções sempre com a intenção de produzir avanços em direção aos objetivos a serem alcançados.

- Prática 2: Estruturar a aula

  Planejar é fundamental nesse caso. O professor sabe onde deseja que seus alunos cheguem, por isso é necessário saber se há conhecimentos prévios que devam ser bem entendidos para seguir adiante. Se necessário fazer uma revisão rápida. Avaliar é imprescindível durante o processo, mesmo oralmente. Incentivar os alunos a argumentar também é necessário, pois estimula o raciocínio lógico além de aprimorar o discurso.

- Prática 3: Contextualizar o conteúdo

  Propor um problema que tenha conexão com a realidade pode ser estimulante para os alunos. Aprender técnicas de contagem após obter um a um todos os anagramas de uma palavra convence os alunos da utilidade do conteúdo trabalhado, tornando-o mais atrativo.

- Prática 4: Respeitar o tempo de aprendizagem

  As salas de aula são repletas de heterogeneidade, sendo assim é certo que durante as atividades propostas os ritmos sejam diferentes e desse modo o professor deve atuar para segurar a ansiedade daqueles que têm maior facilidade garantindo que todos tenham oportunidade de participar das atividades propostas.

- Prática 5: Usar o erro a favor da aprendizagem

  Os alunos devem ser encorajados a refletir, formular hipóteses e argumentar caso necessário. Em sala de aula o erro deve ser tratado como apoio para a aprendizagem e é papel do professor zelar para que o aluno se sinta à vontade para expressar-se sem o medo de ser ridicularizado.

- Prática 6: Promover o uso de estimativa

  Estimar não é sinônimo de chutar valores sem reflexão. Para que um aluno faça uma estimativa ele deve possuir um referencial que permita que ele desconfie de um resultado discrepante.

- Prática 7: Comunicar o conteúdo com clareza

  A comunicação é a chave de tudo, portanto o professor deve se dirigir aos alunos com clareza, tomando o cuidado de evitar frases muito extensas e verificando se os significados dos termos utilizados são conhecidos pelos alunos. Evitar competir com o som vindo dos alunos. Em caso de conversas paralelas ou brincadeiras, pare de falar e aguarde o silêncio da classe. Valorize-se e valorize os alunos que estão com você como ouvintes. Faça sempre que possível contato visual com os alunos, pois muito deles deixam transparecer suas dúvidas através de expressões faciais.

- Prática 8: Utilizar bem o quadro e os recursos tecnológicos
  Organização é fundamental nos apontamentos e nos registros das correções dos exercícios propostos como tarefa para que a leitura e compreensão por parte dos alunos não seja prejudicada. Atualmente, os alunos lidam muito bem com a tecnologia e esse pode ser um aliado do professor na tentativa de envolver o aluno nas estratégias rumo à aprendizagem. O uso do computador, softwares de apresentação, planilhas eletrônicas, simuladores e plotters podem ser de extrema utilidade para o professor, principalmente em atividade de construção geométrica onde a precisão é determinante nos resultados. O professor pode ser hábil com o compasso e régua, porém, dada a precariedade da precisão dos instrumentos os resultados obtidos podem ser frustrantes. Nesse caso a utilização de softwares tipo GEOGEBRA (disponível em https://www.**geogebra**.org) ou WINPLOT (disponível em http://math.exeter.edu/rparris/**winplot**.html) pode ser a solução.

- Prática 9: Promover relações entre procedimentos matemáticos
  Estabelecer relações entre conceitos matemáticos é fundamental, pois reforça a ideia da utilização de conceitos adquiridos e a aquisição de outros conceitos (aprender a aprender). Dissociar a álgebra da geometria analítica no estudo da reta, por exemplo, ou mesmo da equação horária do M.R.U.V. (Movimento Retilíneo Uniformemente Variado) e a função quadrática.

- Prática 10: Interagir com os alunos
  Entrar e sair da sala de aula falando sobre Matemática se recusando a abordar outros assuntos pode ser prejudicial no sentido de criar uma barreira entre o professor e o aluno. Podemos aproveitar os momentos de trabalho em sala de aula e caminhar pela sala, questionar os alunos sobre os resultados, orientando-os, enfim deixando claras as intenções com

relação ao aprendizado do aluno. Uma atenção especial deve ser dada aqueles alunos mais retraídos, calados e com dificuldade em se expressar publicamente nesse momento.

- Prática 11: Promover a interação entre os alunos
  A heterogeneidade dos alunos pode gerar bons frutos e nesse sentido as explanações orais e trabalhos em grupo (duplas ou trios) deve ser estimulada.

- Prática 12: Propor e corrigir a lição de casa
  A aula não termina com o sinal. Ela continua em casa quando o aluno vai realizar as tarefas sozinho. Suas dúvidas geram questionamentos que deverão ser sanados no ato da correção da tarefa pelo professor. Um detalhe não deve ser ignorado: estimule os alunos a acompanharem a correção da tarefa sem realizar a cópia dos exercícios errados ou não realizados. Insista para que no momento da correção os alunos dediquem a sua atenção apenas as resoluções na lousa.

Em seguida será detalhada uma estratégia de ensino contemplando os aspectos abordados até o momento. Não se trata de uma receita, trata-se apenas de uma referência para que os educadores possam implementar planos de aula eficientes tendo em vista a aprendizagem dos alunos.

3 A RAZÃO ÁUREA E A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

A proposta desse trabalho é apresentar estratégias alternativas contemplando os tópicos abordados anteriormente e apresentando como tema Sequências Numéricas: Progressão Aritmética e Progressão Geométrica que proporcionem uma aprendizagem efetiva e repleta de significado.

Na maioria dos materiais didáticos disponíveis as progressões aritmética e geométrica são apresentadas aos alunos de modo tradicional baseada em definições, propriedades e resolução de exercícios. O formalismo algébrico em excesso dificulta a aprendizagem pelo excesso de abstração e distanciamento da realidade do aluno.

A estratégia pedagógica sugerida investe na contextualização histórica e na aplicabilidade dos conceitos estudados. Nesse sentido, A Razão Áurea e o Número de Ouro são utilizados como catalisadores do processo ensino aprendizagem pelo seu potencial lúdico e as diversas conexões com as mais diversas áreas do conhecimento.

Durante o desenvolvimento do tema podemos explorar construções geométricas com régua e compasso, construções geométricas com auxílio de softwares gráficos (GEOGEBRA) além da irracionalidade de $\varnothing$ e sua presença na pintura, arquitetura, esculturas e fenômenos naturais.

De acordo com as possibilidades do professor e os recursos disponíveis na escola o professor pode iniciar a aula com a apresentação de vídeo sobre a Razão Áurea e o Número de Ouro utilizando um dos links:
https://www.youtube.com/watch?v=2VuS8JOkr7s
https://www.youtube.com/watch?v=_EDaNLRUyxI
https://www.youtube.com/watch?v=ziN7Nu5Niyw
https://www.youtube.com/watch?v=13v9I5WPg_Y

Na impossibilidade da apresentação de um dos vídeos sugeridos a aula pode ser iniciada com a apresentação da Razão Áurea e o Número de Ouro, a obtenção geométrica do valor numérico de $\varnothing$ e exemplos de sua presença em diversas formas geométricas planas como o pentagrama, retângulo áureo, espiral áurea, triângulo áureo, decágono áureo, de acordo com a sequência apresentada a seguir.

3.1 O NÚMERO DE OURO

O número de ouro ∅ (Phi), é um número irracional cujo valor aproximado é 1,618. Sua origem é desconhecida, mas desde a antiguidade está associado à perfeição estética e a padrões numéricos presentes na natureza**.**

Segundo Boyer (1974), no Egito, as pirâmides de Gizé (2550 a.C.) apresentam em suas dimensões o número de ouro: a razão entre a altura de uma de suas faces e a metade do lado da base é igual ao número de ouro. Os Pitagóricos ficaram atônitos ao não conseguirem expressar a razão entre a medida do lado do pentágono estrelado e a medida do lado do pentágono regular inscrito utilizando-se coeficientes inteiros, o que para os matemáticos da época era algo irracional, dando origem ao nome do conjunto dos números não racionais. Em 1855 o advogado e antiquário escocês A. H. Rhind (1833 - 1863) descobriu no Egito um documento datado de 1650 a.C. contendo 85 problemas copiados em escrita hierática pelo escriba Ahmes de um trabalho mais antigo. Nesse documento batizado papiro Rhind, em homenagem ao seu descobridor, há referências a uma razão sagrada, provavelmente o número de ouro.

Figura 3.1: Papiro de Rhind

3.2 A RAZÃO ÁUREA

A primeira definição da Razão Áurea aparece no livro Elementos de Euclides (300 a.C.), matemático grego conhecido como o “Pai da Geometria”. Na obra Euclides não aborda apenas conteúdos de geometria, mas também de teoria dos números e álgebra elementar (geométrica). O livro se compõe de quatrocentos e sessenta e cinco proposições distribuídas em treze livros ou capítulos, dos quais os seis primeiros são sobre geometria plana elementar, os três seguintes sobre teoria dos números, o livro X sobre incomensuráveis e os três últimos tratam sobre geometria no espaço.

O nome Razão Áurea foi dado por Kepler, filósofo, matemático e astrônomo alemão (1571-1630), que a este respeito escreveu:

"A Geometria possui dois grandes tesouros: um é o Teorema de Pitágoras, o outro, a divisão de um segmento em média e extrema razão."

Segundo Euclides, se um ponto C divide um segmento de reta AB em média e extrema razão então a razão entre segmento maior e o segmento menor é igual à razão entre o segmento inteiro e o segmento maior.

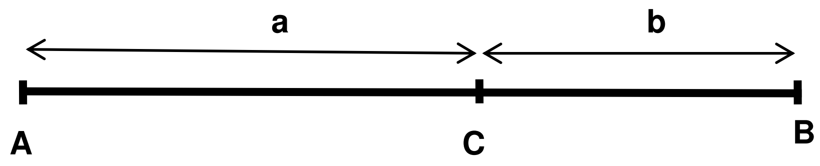


Figura 3.2: Segmento Áureo

Se o ponto C divide o segmento $\overline{AB}$ em média e extrema razão, então $\frac{a+b}{a}=\frac{a}{b}$.

3.3 O VALOR NUMÉRICO DE ∅

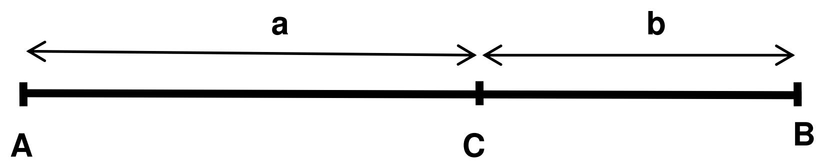


Figura 3.3: Segmento Áureo

$$med(\overline{AB})=a+b; med(\overline{AC})=a; med(\overline{BC})=b$$

$$\frac{a+b}{a}=\frac{a}{b}\Rightarrow a^2=ab+b^2$$

Particularmente para a=1, temos:

$$b^2+b-1=0\Rightarrow b'=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}; b''=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

Assim, $b=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, logo $\phi=\frac{a+b}{a}=\frac{a}{b}=\frac{1}{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}\cong 1{,}618$.

3.4 A RAZÃO ÁUREA E GEOMETRIA

Nessa sessão são apresentadas sugestões de construção geométrica com o auxílio de régua e compasso e de acordo com as possibilidades e recursos da escola há a alternativa da utilização do software GEOGEBRA, disponível em https://www.geogebra.org/.

3.4.1 Obtenção do Número de Ouro Geometricamente

- Considere o ponto médio do segmento AB.

Figura 3.4: Ponto médio

- Pelo ponto B traça-se o segmento BC, perpendicular a AB, de comprimento BC = AM. Os pontos A, B e C serão vértices do triângulo retângulo ABC com catetos AB e BC e hipotenusa AC.

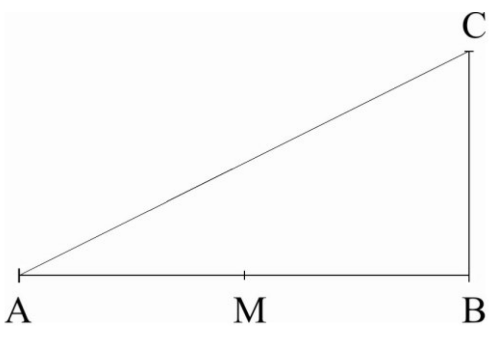


Figura 3.5: Triângulo retângulo

- Com centro em C, trace o arco de circunferência de raio BC até encontrar a hipotenusa AC no ponto D.

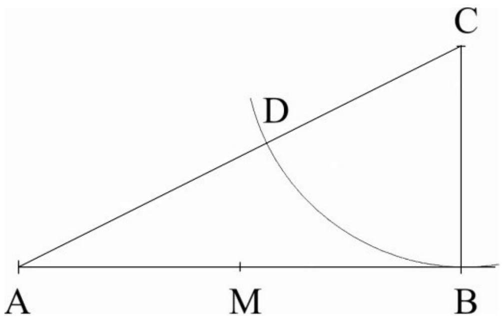


Figura 3.6: Construção do arco BD

- Com centro em A, trace o arco de circunferência de raio AD para obter o ponto P sobre AB.

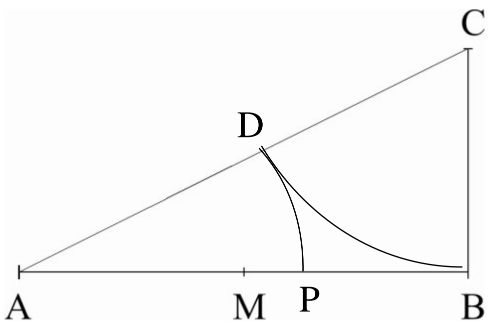


Figura 3.7: Construção do arco DP

O ponto P divide o segmento AB em média e extrema razão.

Algebricamente, temos:

$$AB = a \Rightarrow BC = \frac{a}{2}$$

$$Pitágoras \Rightarrow AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$AC^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow AC^2 = \frac{5.a^2}{4} \Rightarrow AC = \frac{\sqrt{5}.a}{2}$$

$$AD = AC - CD$$

$$CD = BC = \frac{a}{2}$$

$$AD = \frac{\sqrt{5}.a}{2} - \frac{a}{2} = \frac{\left(\sqrt{5}-1\right).a}{2}$$

$$\frac{AB}{AP} = \frac{AP}{PB} = \frac{a}{\frac{\left(1-\sqrt{5}\right).a}{2}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

3.4.2 O Retângulo Áureo

O retângulo áureo é um retângulo cujas dimensões são proporcionais ao número de ouro. O retângulo áureo é tido como um retângulo com dimensões perfeitas e, por isso largamente utilizado em jornais, revistas, logomarcas, cartões de crédito, na arquitetura, etc.

Pode-se construir um retângulo áureo partindo de um segmento **AE** = a e a partir deste, construir o quadrado **ABEF**, como abaixo:

i-)

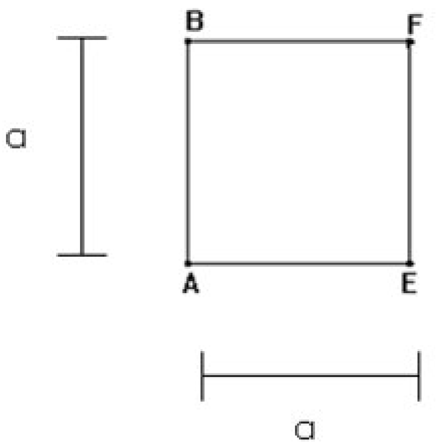


Figura 3.8: Quadrado ABFE

Marcar o ponto médio G, do segmento **AE**

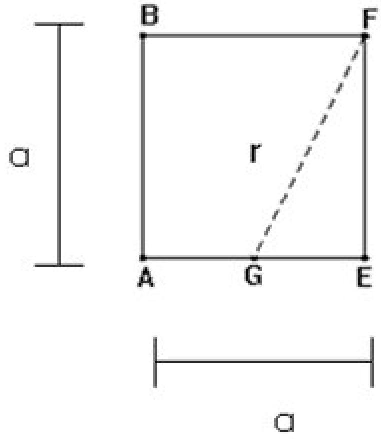


Figura 3.9: Ponto médio do Segmento AE

Com a ponta seca do compasso em **G** e abertura = **GF** traçar o arco **FD**, que jaz na reta **AE** e **E** é interno ao segmento **AD**.

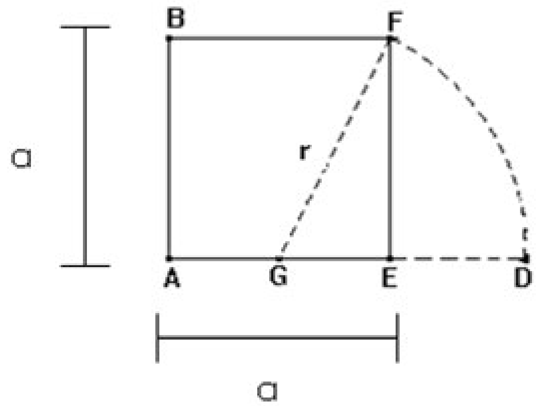


Figura 3.10: Arco FD

Prolongar o segmento **BF** e traçar **CD** perpendicular ao segmento **AD**.

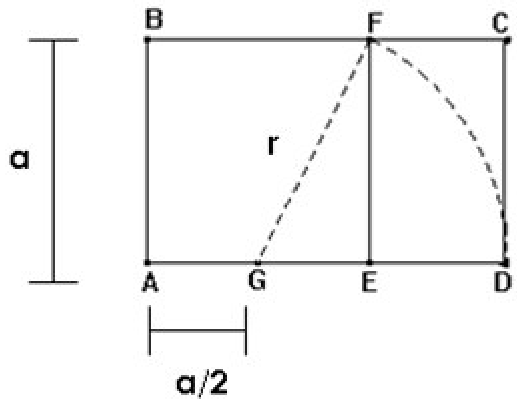


Figura 3.11: Segmento CD

GF = GD = r

E usando o fato de que o triângulo **EFG** é retângulo em **Ê**:

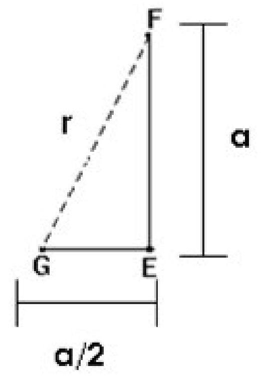


Figura 3.12: Triângulo retângulo EFG

Do Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo **EFG**, tem-se:

$$r = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

Logo, pode-se construir o retângulo ABCD de lados AB=CD=a e

AD=BC= $\dfrac{a}{2} + r = \dfrac{a}{2} + \dfrac{a\sqrt{5}}{2} = \dfrac{a(1+\sqrt{5})}{2}$

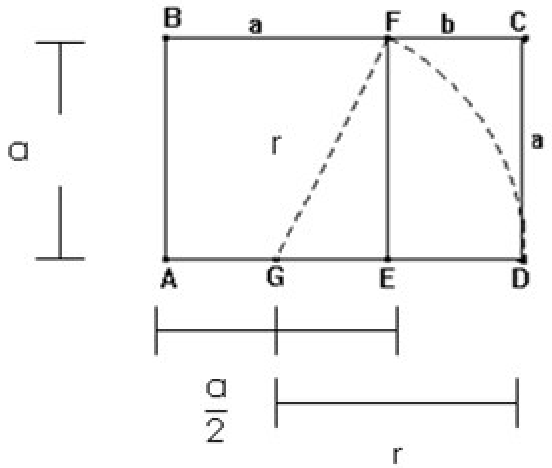


Figura 3.13: Retângulo ABCD

3.4.3 A Espiral Áurea

A partir de dois quadrados de lado 1, obtém-se um retângulo de lados 2 e 1. Anexando ao retângulo um quadrado de lado 2, constrói-se um novo retângulo 3x2. Anexando agora um quadrado de lado 3, obtemos um retângulo 5x3 e assim sucessivamente.

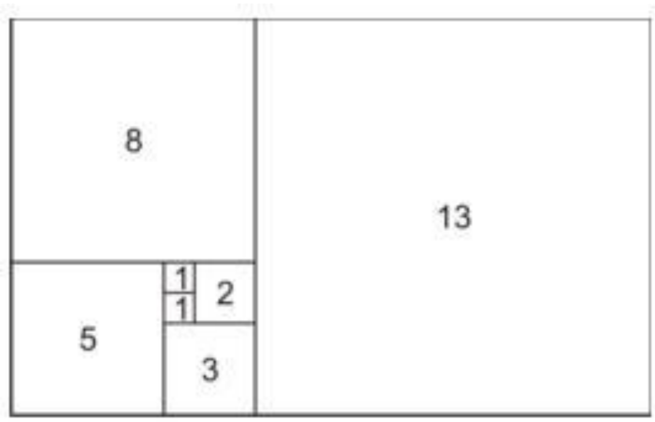


Figura 3.11: Construção da Espiral Áurea

Utilizando o compasso traça-se o quarto de circunferência inscrito em cada quadrado e assim obtém-se uma espiral formada pela concordância desses arcos.

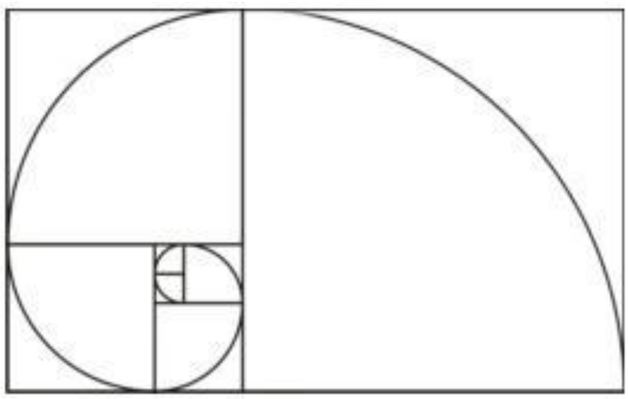


Figura 3.12: A Espiral Áurea

3.4.4 Pentagrama

O pentagrama, símbolo grego que representava os Pitagóricos (Boyer,1974) é um pentágono regular estrelado onde cada um dos cinco segmentos divide outros em média e extrema razão. O ponto de interseção entre duas diagonais divide cada uma delas na proporção áurea.

$$\phi = \frac{AB}{BC} = \frac{DE}{AE} = 1{,}618$$

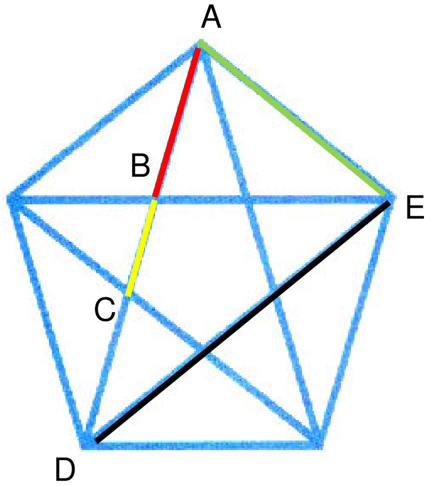


Figura 3.13: Pentagrama

3.4.5 O Triângulo Áureo

Dado o triângulo ABC, isósceles com ângulos internos medindo 36^o, 72^o e 72^o, traça-se a bissetriz do $\sphericalangle$ABC. O ponto P, intersecção da bissetriz com o lado AC é vértice do triângulo isósceles BCP, semelhante ao triângulo ABC.

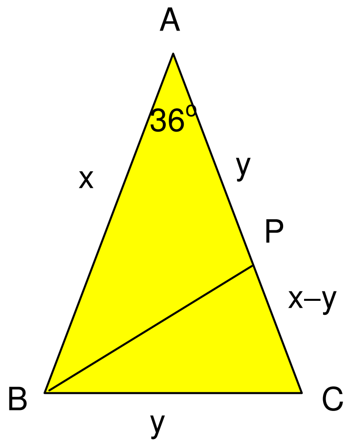


Figura 3.17: Triângulo Áureo

Da semelhança, temos:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AC}{BP} = \frac{BC}{CP} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{y}{x-y}$$

Tomando y=1

$$x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x' = \frac{1-\sqrt{5}}{2}; x'' = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Assim, temos que:

$$\frac{x}{y} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cong 1,618 = \phi$$

3.4.6 O Pentágono Regular e a Razão Áurea

A partir do pentágono regular de lado L inscrito na circunferência de centro O e raio R, traça-se o diâmetro AF e a corda BE. Os triângulos retângulos em destaque são semelhantes, pois possuem ângulos internos medindo 90°, 54°e 36°.

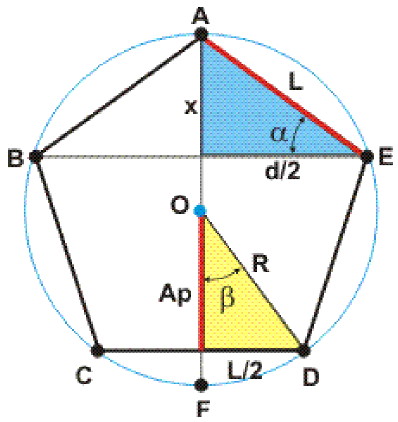


Figura 3.18: Pentágono regular

$$\alpha = \frac{AB}{2} = \frac{72^o}{2} = 36^o$$

$$\beta = DF = \frac{CD}{2} = \frac{72^o}{2} = 36^o$$

Da semelhança, tem-se: $\frac{L}{R} = \frac{x}{\frac{L}{2}}$ (1)

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo de ângulo agudo α:

$$x^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 = L^2 \Rightarrow x^2 = L^2 - \frac{d^2}{4}$$

O lado do pentágono regular, L, é o segmento áureo de d e consequentemente:

$$d = L.\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

Logo,

$$\frac{d}{L} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi$$

3.4.7 O Decágono Regular e a Razão Áurea

O decágono regular de lado L, inscrito na circunferência de centro O e raio R pode ser dividido em dez triângulos isósceles congruentes entre si, cuja base corresponde ao lado do decágono regular, os lados congruentes têm medida igual à medida do raio da circunferência circunscrita e ângulos internos medindo 36°, 72° e 72°.

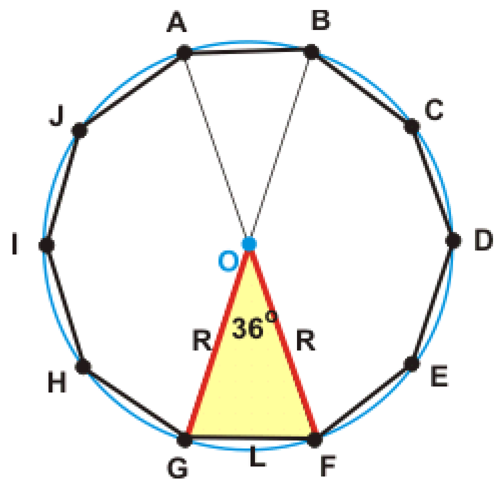


Figura 3.14: Decágono Regular

Traçando a bissetriz GP do ∢ OGF do triângulo GOF, defini-se o Δ FGP, semelhante ao triângulo GOF.

Da semelhança: $\dfrac{GO}{FG} = \dfrac{GF}{FP} = \dfrac{OF}{GP} \Rightarrow \dfrac{x}{y} = \dfrac{y}{x-y}$

Tomando y=1

$$x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x' = \frac{1-\sqrt{5}}{2}; x'' = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Assim, $\phi = \frac{x}{y} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cong 1{,}618$

logo $\frac{R}{L} = \phi$

3.5 A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI E O NÚMERO DE OURO

Leonardo Pisano, Leonardo de Pisa, ou simplesmente Fibonacci (fillius Bonacci) graças ao nome de seu pai, foi um conhecido matemático nascido em Pisa, Itália em 1175 (Eves, 2011). Na sua infância Fibonacci conheceu o Oriente e o Norte da África onde o sistema de numeração Indo-arábico era largamente utilizado. Influenciado pelo conhecimento matemático obtido em suas viagens Fibonacci escreveu em 1202 sua obra mais conhecida, o livro "Liber Abacci" (o livro dos ábacos), responsável pela difusão dos algarismos Indos-arábicos por toda a Europa. Foi na segunda edição dessa obra que Fibonacci apresentou um problema envolvendo a árvore genealógica de um casal de coelhos.

"Um casal de coelhos pode reproduzir-se após dois meses de vida e, a partir daí, produz um novo casal a cada mês. Começando com um único casal de coelhos recém-nascidos, quantos casais existirão ao final de um ano?"

O problema deve ser solucionado considerando que nenhum coelho morresse e que não houvesse problemas envolvendo cruzamentos consanguíneos.

Assim:

No primeiro mês, haveria apenas **um** casal, pois o primeiro casal ainda não poderia se reproduzir.

No segundo mês, o primeiro casal se reproduziria, havendo **dois** casais.

No terceiro mês, o primeiro casal se reproduziria novamente, mas não o outro, havendo **três** casais.

No quarto mês, os dois primeiros casais se reproduziriam, mas não o terceiro, havendo **cinco** casais e assim sucessivamente até o 12º mês.

Dessa forma, a quantidade de casais de coelhos mês a mês, obedece à sequência 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, totalizando 233 pares de coelhos ao final de 1 ano.

A sequência infinita obtida por Fibonacci pode ser representada pela lei de formação $F(n)=F(n-2)+F(n-1)$, com $F(1)=F(2)=1$ e $n \in N$, $n>2$.

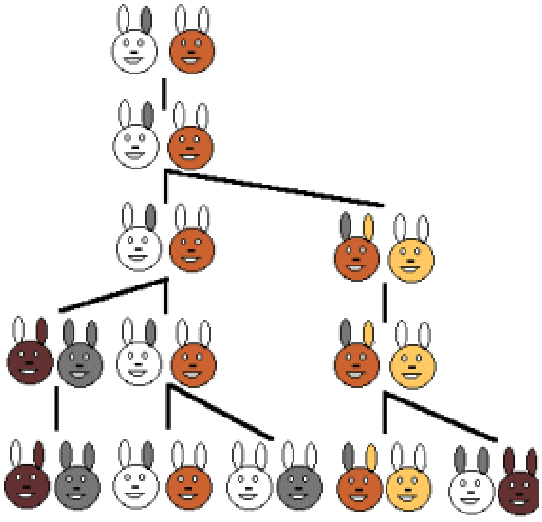


Figura 3.20: Árvore Genealógica de Casal de Coelhos

A sequência de Fibonacci está relacionada com a razão Áurea, pois considerando-se a razão entre dois números consecutivos da sequência de Fibonacci, observamos que essa razão tende para 1,618.

N	F(n)	F(n+1)/F(n)
1	1	
2	1	**1**
3	2	**2**
4	3	**1,5**
5	5	**1,666...**
6	8	**1,6**
7	13	**1,625**
8	21	**1,615...**
9	34	**1,619...**
10	55	**1,617...**
11	89	**1,618...**
12	144	**1,617...**
13	233	**1,618...**

Tabela 1: Razão entre números de Fibonacci consecutivos

Note que a partir de uma oscilação inicial a razão e estabiliza em 1,618. Graficamente:

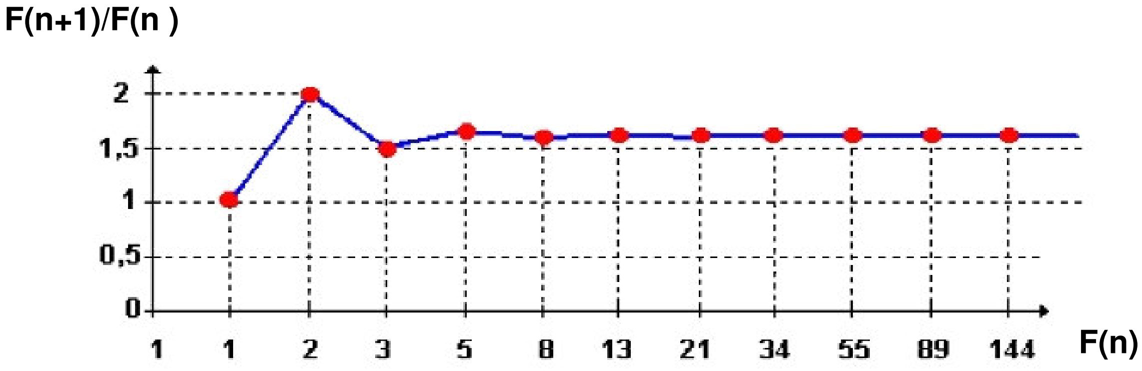


Figura 3.21: Razão entre números de Fibonacci consecutivos

4 SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS

Contextualizar historicamente os conteúdos matemáticos estudados pelos alunos em sala de aula desmistifica a ideia de que a matemática é uma disciplina distante da realidade, pois a matemática sempre esteve ao lado do homem nas mais diferentes áreas proporcionando o entendimento do universo em que está inserido e favorecendo a evolução humana nos mais diferentes contextos.

4.1 HISTÓRIA DAS PROGRESSÕES ARITMÉTICAS E GEOMÉTRICAS

As progressões foram estudadas desde povos muito antigos como os babilônicos e egípcios. Os povos que habitavam as margens do rio Nilo 5000 anos atrás observavam que os períodos de cheia obedeciam a padrões e, desse modo, poderiam estabelecer a melhor época para o plantio e assim garantir a sobrevivência.

Os babilônios (3000 a.C. à 300 d.C.) habitavam o vale dos rios Tigre e Eufrates e assim como os egípcios produziram conhecimento matemático relacionado com as atividades agrárias e comerciais e da engenharia que foram registrados em tábulas de argila que vêm sendo estudadas desde o século XIX. Dentre mais de 50.000 tábulas encontradas, 400 foram identificadas como estritamente matemáticas.

Na Mesopotâmia surgiram várias tabletas babilônicas muito interessantes, mas nenhuma delas foi tão extraordinária quanto a tableta Plimpton 322 (1900 a 1600 a.C.). Numa dessas tabletas, a progressão geométrica $1+2+2^2+...+2^9$ é somada de forma que a série de quadrados $1^2+2^2+3^2+...+10^2$ é achada. (Adaptado de Eves, Howard, 2011).

Figura 4.1: Tableta Babilônica

O papiro Rhind (ou Ahmes) data aproximadamente de 1650 a. C. e nada mais é do que um texto matemático na forma de manual prático que contém 85 problemas copiados em escrita hierática pelo escriba Ahmes de um trabalho mais antigo.
Esse papiro foi adquirido no Egito pelo egiptólogo escocês A. Henry Rhind, sendo mais tarde comprado pelo Museu Britânico.

O papiro Rhind é uma fonte primária rica sobre a matemática egípcia antiga, deixando evidências de que sabiam fazer a soma dos termos de uma progressão aritmética. O seguinte problema envolvendo progressões se encontra no papiro Rhind: “Divida 100 pães entre 5 homens de modo que as partes recebidas estejam em Progressão Aritmética e que um sétimo da soma das três partes maiores seja igual à soma das duas menores”.

Muitos dos cálculos no Papiro Rhind são evidentemente exercícios para jovens estudantes. Embora uma grande parte deles seja de natureza prática, em algumas ocasiões o escriba parece ter tido em mente enigmas ou recreações matemáticas. O problema 79, por exemplo, cita apenas “sete casas, 49 gatos, 343 ratos, 2041 espigas de trigo, 16. 807 hectares”. É presumível que o escriba estava tratando de um problema bem conhecido, em que uma das sete casas havia sete gatos, cada um deles come sete ratos, cada um dos quais havia comido sete espigas, cada uma delas teria produzido sete medidas de grão. O problema evidentemente não pedia uma resposta prática, que seria o número de medidas de grãos poupadas, mas a não-prática soma dos números de casas, gatos, ratos, espigas e medidas de grão.

Figura 4.2: Papiro Rhind

No Papiro de Rhind também aparece uma progressão geométrica muito interessante formada pelas frações 1/2, 1/4, 1/8, 1/16, 1/32, 1/64 do Hekat, (unidade comum do volume usada para medir quantidade de grãos). Os termos dessa sequência são conhecidos como frações dos olhos do deus Hórus.

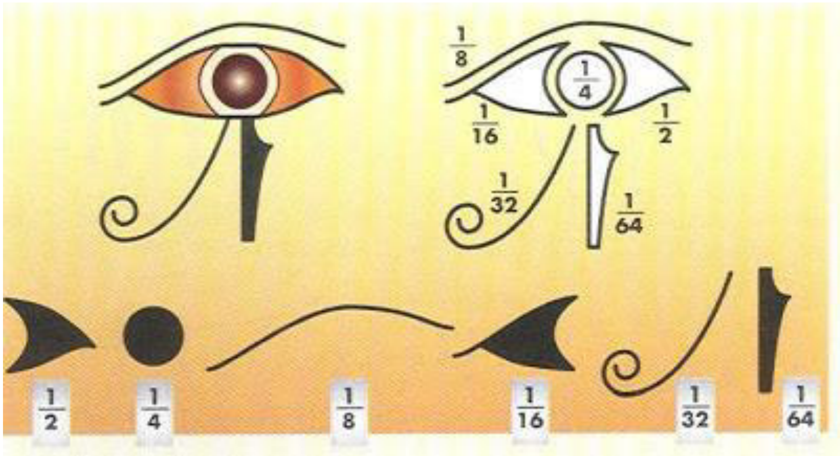


Figura 4.3: Olho de Hórus

O papiro Rhind é uma fonte primária rica sobre a matemática egípcia antiga, deixando evidências de que sabiam fazer a soma dos termos de uma progressão aritmética. O seguinte problema envolvendo progressões se encontra no papiro Rhind: “Divida 100 pães entre 5 homens de modo que as partes recebidas estejam em Progressão Aritmética e que um sétimo da soma das três partes maiores seja igual à soma das duas menores”.

Presume-se que se deve a Pitágoras (585 aC. – 500 aC.) e aos sábios gregos que viveram depois dele, a criação da Aritmética teórica, pois os pitagóricos conheciam as progressões aritméticas, as geométricas, as harmônicas e musicais, as proporções, os quadrados de uma soma ou de uma diferença.

Os Números Figurados se originaram através dos membros mais antigos da escola pitagórica em aproximadamente 600 a. C.. Esses números, que expressam o número de pontos em certas configurações geométricas, representam um elo de ligação entre a geometria e a aritmética.

Na figura abaixo se justifica a nomenclatura “números triangulares”:

Figura 4.4: Números triangulares

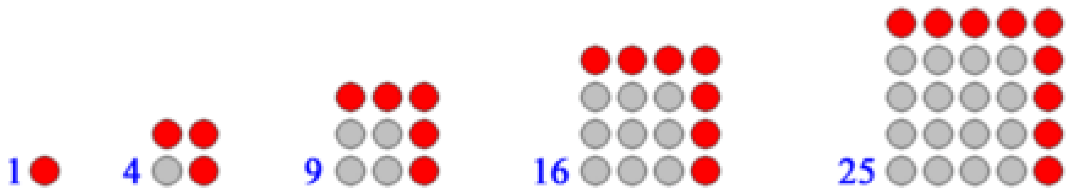


Figura 4.5: Números quadrados

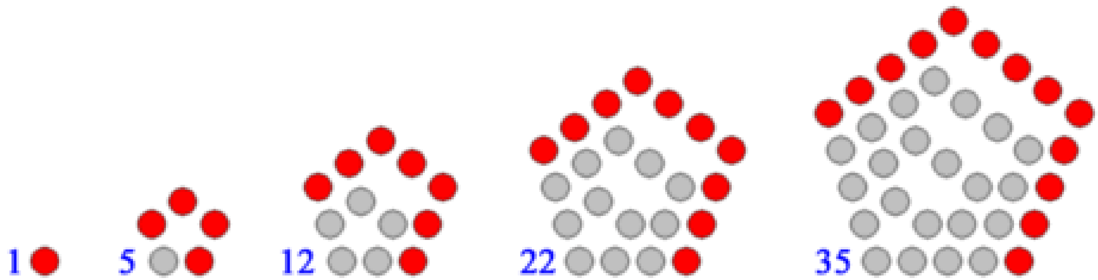


Figura 4.6: Números pentagonais

Evidentemente o enésimo número triangular Tn é dado pela soma da Progressão Aritmética, lembrando que a soma dos termos de uma Progressão Aritmética finita é a metade do produto do número de termos pela soma dos dois termos extremos, tem-se: $T_n = 1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n.(n+1)}{2}$

O grego Euclides de Alexandria (300 a.C.) também teve grande êxito na história da matemática, produzindo a obra Os Elementos.

Os Elementos se compõem de 465 proposições distribuídas em treze livros, e é no livro VIII que encontramos as proporções contínuas e Progressões Geométricas relacionadas, de forma que, se temos uma proporção contínua a : b = b : c = c : d, então a, b, c, d formam uma Progressão Geométrica.

O problema 21 do livro IV diz: “Encontre três números em Progressão Geométrica de maneira que a diferença entre dois quaisquer deles é um quadrado”. Segundo o autor do problema a resposta é 81/7, 144/7 e 256/7.

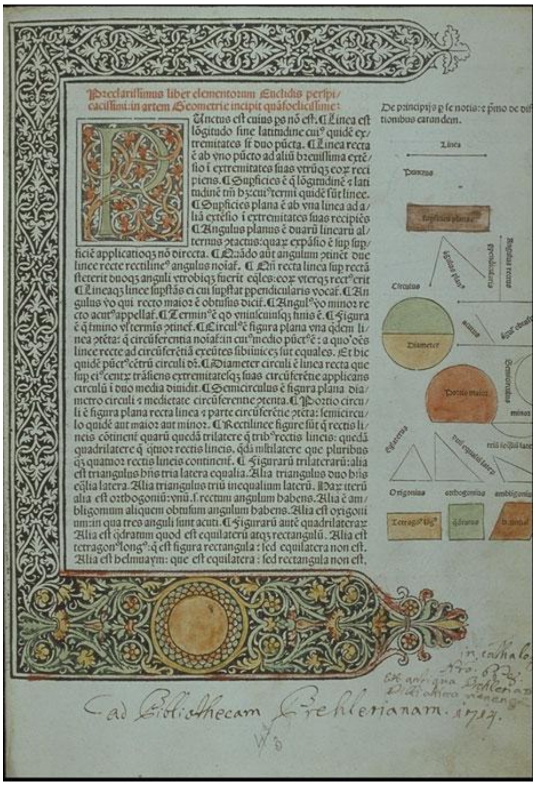


Figura 4.7: Página do livro Os Elementos
Fonte: http://special.lib.gla.ac.uk/exhibns/treasures/euclid.html

A proposição 35 do livro IX, o último dos três sobre teoria dos números, contém uma formula para a soma de números em "progressão geométrica", expressa em termos elegantes, mas poucos usuais:

"Se tantos números quantos quisermos estão em proporção continuada, e se subtrai do segundo e último número iguais ao primeiro, então assim como o excesso do segundo está para o primeiro, o excesso do último estará para todos os que o precedem".

Esse enunciado, é claro, é equivalente à fórmula:

$$\frac{a_{n+1} - a_1}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n} = \frac{a_2 - a_1}{a_1}$$

que por sua vez equivale a

$$S_n = \frac{a_1 - a_1 . r^n}{1 - r}$$

Os paradoxos de Zenão (490-425 a.C.) sobre o movimento desconcertaram matemáticos por séculos. Eles envolvem a soma de um número infinito de termos positivos a um número finito, o qual é a essência da convergência de uma série infinita de números.

Diofanto de Alexandria (século III d. C.) teve uma importância enorme para o desenvolvimento da álgebra e uma grande influência sobre os europeus. Ele escreveu três trabalhos, sendo o mais importante a Aritmética, que era composta por treze livros.

O problema 7 do livro III é o seguinte: "Encontre três números em Progressão Aritmética, sabendo-se que a soma de dois quaisquer deles é um quadrado. Segundo Diofanto, a resposta é 120 ½, 840 ½, 1560 ½.

Os hindus também foram hábeis aritméticos e deram contribuições significativas à álgebra, somando Progressões Aritméticas e Geométricas rapidamente. Os problemas de aritmética hindus comumente envolviam irracionais quadráticos, o teorema de Pitágoras, Progressões Aritméticas e permutações.

O Matemático hindu mais importante do século doze foi Bhaskara (1114 a cerca de 1185). O seu tratado mais conhecido, o "lilavati", contém numerosos problemas sobre os tópicos favoritos dos hindus: equações lineares e quadráticas, tanto determinadas quanto indeterminadas, simples mensuração, "progressões aritméticas e geométricas", radicais, tríadas pitagóricas e outros. Um deles cita o seguinte problema:

"Numa expedição para calcular os elefantes de seu inimigo, um rei marchou 2 yojanas no primeiro dia. Diga, calcular inteligentemente, a razão com que sua marcha diária aumentou, se ele alcançou a cidade do inimigo, a uma distância de 80 yojanas, em uma semana?"

Michael Stifel (1486- 1567), um grande algebrista alemão do século XVI, em sua obra mais importante, "Arithmética" salienta as vantagens de se associar uma "progressão aritmética" a uma "geométrica".

Por volta de 1590, John Napier (1550-1617) com seu grande conhecimento em progressões aritméticas e geométricas desenvolveu uma importante ferramenta de cálculo: o logaritmo, pois reduziu as multiplicações e divisões a simples adições e subtrações.

Johann Friederich Carl Gauss nasceu em Brunswick, Alemanha, em 30 de Abril de 1777. De família humilde, mas com o incentivo de sua mãe, obteve brilhantismo na sua carreira. Gauss deu sinais de ser um gênio antes dos três anos de idade. Nesta idade aprendeu a ler e a fazer cálculos aritméticos mentalmente. Aos dez anos de idade, durante uma aula de matemática seu professor pediu para que todos os alunos obtivessem a soma dos números de 1 a 100. Em poucos minutos Gauss apresentou o resultado correto. Até então, ninguém era capaz desse feito. Ele se baseou no fato de que a soma dos números opostos é sempre constante como mostra a figura a seguir. .

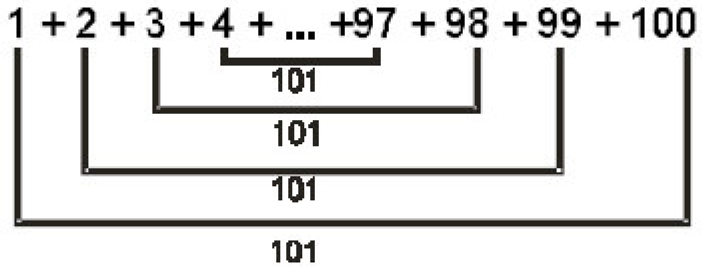


Figura 4.8: Soma dos termos de uma P.A

Então ele multiplicou a constante (101) pelo número de termos e dividiu pela metade, chegando a fórmula da soma da progressão aritmética:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2}.n$$

No Darwinismo – teoria estudada em Biologia, criada por Charles Robert Darwin também podemos encontrar as Progressões Aritméticas e Geométricas. Num dos quatro itens fundamentais da teoria Darwin, encontramos uma referência às Progressões Geométricas e Aritméticas, uma influência das ideias de Thomas Malthus, famoso economista.

Diz o item “As populações crescem em PG ao mesmo tempo em que as reservas alimentares para elas crescem apenas em P. A.”

Em consequência deste item, Darwin afirmou que “devido a tal desproporção, os indivíduos empenhar-se-iam numa luta pela vida, ao final da qual seriam selecionados os mais fortes ou os mais aptos – a seleção natural – de alguns indivíduos em detrimento de muitos outros”.

A comparação de Malthus entre o crescimento populacional e as reservas alimentares não é mais aceita atualmente, pois, apesar da maior taxa de crescimento populacional, não há uma desproporção tão grande como mostra o diagrama a seguir.

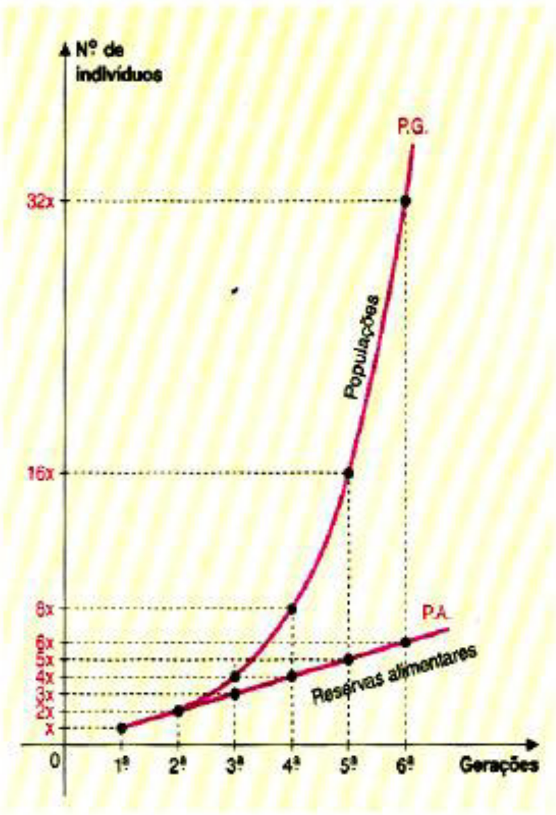


Figura 4.9: População x Reservas alimentares

Historicamente as sequências numéricas têm estado presente nas mais diversas áreas do conhecimento ao longo da evolução humana. Proporcionar ao aluno o acesso aos aspectos históricos dos conteúdos matemáticos pode favorecer a aprendizagem, pois conecta a matemática da sala de aula ao mundo real.

4.2 Definição

Uma sequência é toda função cujo domínio é o conjunto dos números naturais. Seja $n_0 \in N$, uma função f, cujo domínio é $\{n \in N / n \geq n_0\}$ ou $\{n \in N / n \leq n_0\}$, e que, associa a cada elemento deste conjunto um número real, é chamada uma sequência numérica. Quando o domínio é $\{n \in N / n \geq n_0\}$ pode-se afirmar que a sequência é infinita e, no outro caso, finita.

$(a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n, \ldots)$ sequência infinita.

$(a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n)$ sequência finita.

Para sequências, o número real associado por f ao natural n é chamado termo geral da sequência e notado por a_n, em lugar de f(n), como é usual para funções. As notações $\{a_n\}n \leq n_0$ ou $\{a_n\}n \geq n_0$ são utilizadas para a representação da sequência de termo geral a_n. Em linguagem matemática, temos:

f**:N→R** / f**(n) =** $\mathbf{a_n}$, onde n é o índice da sequência e a_n é o n-ésimo termo da sequência.

Exemplos:

- Números naturais: 0, 1, 2, 3, 4, 5,...
- Números pares: 0, 2, 4, 6, 8,...
- Números ímpares: 1, 3, 5, 7, 9,...
- Números quadrados: 1, 4, 9, 16, 25,...
- Números triangulares: 1, 3, 6, 10, 15,...
- Números de Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8,...
- Múltiplos de 5: 0, 5,10,15, 20,....
- Potências de base 10: 1, 10, 100, 1000, 10000,...

4.3 Progressão Aritmética

- Definição

Chama-se Progressão Aritmética – PA – a toda sequência numérica cujos termos, a partir do segundo, são iguais ao anterior somado com um valor constante denominado razão.

Exemplos:

A = (1, 5, 9, 13, 17, 21, ...), razão = 4 (PA crescente)

B = (3, 12, 21, 30, 39, 48, ...), razão = 9 (PA crescente)

C = (5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, ...), razão = 0 (PA constante)

D = (100, 90, 80, 70, 60, 50, ...), razão = -10 (PA decrescente)

- Termo Geral de uma Progressão Aritmética

Seja a PA genérica $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$ de razão r.

De acordo com a definição podemos escrever:

$a_2 = a_1 + 1.r$

$a_3 = a_2 + r = (a_1 + r) + r = a_1 + 2r$

$a_4 = a_3 + r = (a_1 + 2r) + r = a_1 + 3r$

....

Pode-se inferir (deduzir) das igualdades acima que: $a_n = a_1 + (n - 1) . r$. A expressão $\mathbf{a_n = a_1 + (n - 1) . r}$ é denominada termo geral da PA.

Nesta fórmula, $\mathbf{a_n}$ é o termo de ordem **n** (n-ésimo termo), **r** é a razão e $\mathbf{a_1}$ é o primeiro termo da Progressão Aritmética – PA.

- Propriedades das Progressões Aritméticas
  - **I.** Numa PA, cada termo (a partir do segundo) é a média aritmética dos termos vizinhos deste.
  - II. Numa PA, os termos opostos, ou equidistantes, ou seja, os que estão à mesma distância do termo central da PA, têm a mesma soma.

- P. A. de 3 termos

  A fim de facilitar a resolução de alguns problemas uma PA de três termos, genérica, pode ser representada da forma: $(x-r, x, x+r)$

- Interpolação aritmética

  Interpolar **n** meios aritméticos entre dois elementos significa determinar os números reais existentes entre os valores extremos de uma sequência numérica, de modo a torná-la uma Progressão Aritmética com **n+2** termos.

  $$a_1,\underbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}_{\text{n termos}},a_{n+2}$$

- Soma dos n primeiros termos de uma **Progressão Aritmética**

Seja a PA $(a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-1}, a_n)$.

A soma dos n primeiros termos $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-1} + a_n$, pode ser deduzida facilmente da aplicação da segunda propriedade acima.

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-1} + a_n$$

A expressão acima pode ser representada pela expressão equivalente:

$$S_n = a_n + a_{n-1} + ... + a_3 + a_2 + a_1$$

Somando membro a membro estas duas igualdades, obtem-se:

$$2.\ S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + ... + (a_n + a_1)$$

Logo, pela segunda propriedade acima, as n parcelas entre parênteses possuem o mesmo valor (são iguais à soma dos termos extremos $a_1 + a_n$).

Portanto:

$$2.Sn = (a_1 + a_n).n$$, onde n é o número de termos da PA.

Daí :

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2}.n$$

4.4 Progressão Geométrica

- Definição

Uma progressão geométrica - PG – pode ser entendida como qualquer sequência de números reais ou complexos, onde cada termo a partir do segundo, é igual ao anterior, multiplicado por uma constante denominada razão.

Exemplos:

(1,2,4,8,16,32, ...) PG de razão 2

(5,5,5,5,5,5,5, ...) PG de razão 1

(100,50,25, ...) PG de razão 1/2

(2,-6,18,-54,162, ...) PG de razão -3

- Termo Geral da PG

Seja a PG genérica: (a_1, a_2, a_3, a_4, ... , a_n) , onde a_1 é o primeiro termo, e a_n é o n-ésimo termo, ou seja, o termo de ordem n. Sendo q a razão da PG, da definição segue que:

$a_2 = a_1 . q$

$a_3 = a_2 . q = (a_1 . q) . q = a_1 . q^2$

$a_4 = a_3 . q = (a_1 . q^2) . q = a_1 . q^3$

....

....

Infere-se (deduz-se) que: $a_n = a_1 . q^{n-1}$, que é denominada fórmula do termo geral da PG.

- Propriedades principais

I. Em toda PG, um termo é a média geométrica dos termos imediatamente anterior e posterior.

Exemplo: PG (A,B,C,D,E,F,G...)

$B^2 = A . C$; $C^2 = B . D$; $D^2 = C . E$; $E^2 = D . F$ etc.

II. O produto dos termos equidistantes dos extremos de uma PG é constante.

Exemplo: PG (A,B,C,D,E,F,G,...)

$$A . G = B . F = C . E = D . D = D^2$$

- Soma dos n primeiros termos de uma PG

Seja a PG (a_1, a_2, a_3, a_4, ... , a_n , ...) . Para o cálculo da soma dos n primeiros termos S_n , considera-se:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_{n-1} + a_n$$

Multiplicando ambos os membros pela razão q:

$$S_n . q = a_1 . q + a_2 .q + ... + a_{n-1} . q + a_n .q .$$

Logo, conforme a definição de PG, a expressão acima pode ser reescrita da forma:

$$S_n . q = a_2 + a_3 + ... + a_n + a_n . q$$

Observe que $a_2 + a_3 + ... + a_n$ é igual a $S_n - a_1$. Logo:

$$S_n . q = S_n - a_1 + a_n . q$$

Daí, simplificando convenientemente, obtem-se seguinte fórmula da soma:

$$S_n = \frac{a_n.q - a_1}{q-1}$$

Segue que $a_n = a_1.q^{n-1}$, então a soma dos termos da PG poderá ser representada da forma:

$$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q-1}$$

- Soma dos termos de uma PG decrescente e ilimitada

Considere uma PG ILIMITADA (infinitos termos) e decrescente ($0<q<1$). Nestas condições, quando n tende ao infinito q^n tende a 0 e então a soma dos termos da PG ilimitada poderá ser representada da forma:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = l\lim_{n\to\infty} a_1.\frac{q^n - 1}{q-1} = \frac{a_1}{1-q}$$

4.5 PROBLEMAS PROPOSTOS E RESOLVIDOS

Problema1. Um pintor consegue pintar uma área de 5 m^2 no primeiro dia de serviço e, a cada dia, ele pinta 2 m^2 a mais do que pintou no dia anterior. Quantos m^2 ele conseguirá pintar no 14º dia?

Resolução

Do enunciado sabe-se que se trata de uma P.A. de razão 2 e primeiro termo igual a 5 e deseja-se obter o 14º termo, logo deve-se utilizar o termo geral da P.A.

$$a_n = a_1 + (n-1).r$$
$$a_{14} = 5 + (14-1).2$$
$$a_{14} = 5 + 13.2$$
$$a_{14} = 5 + 26$$
$$a_{14} = 31$$

No 14º dia o pintor conseguirá pintar 31m^2.

Problema 2. Quantos termos formam a PA (5, 10, ..., 785)?

Resolução

Sabe-se que a razão da P.A. é 5, o primeiro termo é 5 e o enésimo termo é 785. Assim, utilizando o termo geral da P.A., teremos:

$$a_n = a_1 + (n-1).r$$
$$785 = 5 + (n-1).5$$
$$780 = (n-1).5$$
$$156 = n-1$$
$$n = 157$$

A P.A. terá 157 termos.

Problema 3. O valor de x, de modo que os números 3x–1, x + 3 e x + 9 estejam, nessa ordem, em PA é:

Resolução

Na P.A. de 3 termos o termo médio é média aritmética dos extremos, assim:

$$x + 3 = \frac{3x - 1 + x + 9}{2}$$
$$x + 3 = \frac{4x + 8}{2}$$
$$x + 3 = 2x + 4$$
$$x = -1$$

O valor de x será −1.

Problema 4. Um estacionamento cobra R$ 6,00 pela primeira hora. A partir da segunda hora, os preços caem em progressão aritmética. O valor da segunda hora é R$ 4,00 e o da sétima é R$ 0,50. Quanto gastará o proprietário de um automóvel estacionado 5 horas nesse local?

Resolução

A primeira hora custa R$6,00 e não fará parte da P.A.

A partir da segunda hora, teremos uma P.A. cujo primeiro termo é 4 e o sexto termo é 0,50.

Assim, o valor a ser pago será dado por: $6+S_6$, onde S_6 corresponde à soma dos 6 termos da P.A. formada pelos valores a partir da segunda hora até a sexta hora.

$$S_6 = \frac{(a_1 + a_6).6}{2}$$

$$S_6 = \frac{(4+0,50).6}{2}$$

$$S_6 = \frac{4,5.6}{2}$$

$$S_6 = \frac{27}{2}$$

$$S_6 = 13,50$$

Desse modo a quantia a ser paga será R$6,000+R$13,50=R$19,50.

Problema 5. Um teatro tem 18 poltronas na primeira fila, 24 na segunda, 30 na terceira e assim na mesma sequência até a vigésima fila, que é a última. Determine o número de poltronas desse teatro.

As quantidades de poltronas das fileiras correspondem a P.A. $(18, 24, 30,....,a_{20})$.

Assim, $a_1=18$, $r=6$ e o total de poltronas será dado pela soma dos 20 termos da P.A.

$$S_{20} = \frac{(a_1 + a_{20}).20}{2}$$

$$a_{20} = a_1 + (20-1).r$$

$$a_{20} = 18 + 19.6$$

$$a_{20} = 132$$

$$S_{20} = \frac{(18+132).20}{2}$$

$$S_{20} = 1500$$

Problema 6. A razão da P.G. (a, a + 3, 5a – 3) é

Resolução

A razão de uma PG é constante e será dada pelo quociente entre dois termos consecutivos da sequência, logo:

$$\frac{a+3}{a}=\frac{5a-3}{a+3}$$
$$(a+3)^2=a.(5a-3)$$
$$a^2+6a+9=5a^2-3a$$
$$4a^2-9a-9=0$$

$$\Delta=(-9)^2-4.4.(-9)$$
$$\Delta=81+144$$
$$\Delta=225$$

$$a_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2.a}=\frac{-(-9)\pm\sqrt{225}}{2.4}=\frac{9\pm15}{8}$$
$$a_1=-\frac{6}{8}=-\frac{3}{4}$$
$$a_2=\frac{24}{8}=3$$

Assim, tem-se duas sequências:

Para a=$-\frac{3}{4}\Rightarrow\left(-\frac{3}{4},\frac{9}{4},-\frac{27}{4}\right)\Rightarrow q=\frac{\frac{9}{4}}{-\frac{3}{4}}=\frac{-\frac{27}{4}}{\frac{9}{4}}=-3$

Para a=3 $\Rightarrow(3,6,12\Rightarrow)q=\frac{6}{3}=\frac{12}{6}=2$

Problema 7. Ao escalar uma trilha de montanha, um alpinista percorre 256 m na primeira hora, 128 na segunda hora, 64 na terceira hora e assim sucessivamente. Determine o tempo (em horas) necessário para completar um percurso de 480 m.

Resolução

As distâncias percorridas pelo alpinista são termos da P.G. (256, 128, 64, ...) de primeiro termo 256, e razão $q=\frac{128}{256}=\frac{64}{128}=\frac{1}{2}$

Assim, a distância de 480m percorrida pelo alpinista será dada pela somatória dos termos da P.G.

$$Sn=a_1.\frac{q^n-1}{q-1}$$

$$480 = 256.\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\frac{1}{2} - 1}$$

$$480 = 256.\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{-\frac{1}{2}}$$

$$-240 = 256.\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1\right]$$

$$-\frac{240}{256} = \left(\frac{1}{2}\right)^n - 1$$

$$-\frac{15}{16} + 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{16}$$

$$n = 4$$

Problema 8. A medida do lado, o perímetro e a área de um quadrado estão, nessa ordem, em progressão geométrica. Qual a área do quadrado?

Resolução

Sendo x, a medida do lado do quadrado, 4x o seu perímetro e x^2 sua área, temos a P.G. de 3 termos: (x, 4x, x^2)

Então, 4x é média geométrica entre x e x^2.

Desse modo,

$$4x = \sqrt{x.x^2}$$

$$4x = \sqrt{x^3}$$

$$16x^2 = x^3$$

$$x^3 - 16x^2 = 0$$

$$x^2.(x - 16) = 0$$

$$x = 0; x = 16$$

A solução x=0 não convém, logo para x=16, a área do quadrado será 256

Problema 9. O sexto termo de uma P.G. é igual a 12500. Se a razão é igual a 5, qual é o terceiro termo?

Resolução

Temos que a_6=12500 e q=5, logo utilizando a expressão do termos geral da P.G., temos:

$$a_n = a_1.q^{n-1}$$
$$a_6 = a_1.5^{6-1}$$
$$12500 = a_1.5^5$$
$$a_1 = \frac{12500}{3125} = 4$$

Assim,

$$a_3 = 4.5^2$$
$$a_3 = 4.25$$
$$a_3 = 100$$

Problema 10. Uma bola é lançada, na vertical, de encontro ao solo, de uma altura h. Cada vez que bate ao solo, ela sobe até a metade da altura de que caiu. Determine a distância total percorrida pela bola em sua trajetória, até atingir o repouso.

Resolução

As distâncias percorridas pela bola a partir do momento em que é abandonada em queda livre da altura h correspondem aos termos da sequência $\left(h, \frac{h}{2}, \frac{h}{2}, \frac{h}{4}, \frac{h}{4}, \frac{h}{8}, \frac{h}{8}...\right)$.que pode ser decomposta em outras duas sequências

$\left(h, \frac{h}{2}, \frac{h}{4}, \frac{h}{8}, ...\right)$ e $\left(\frac{h}{2}, \frac{h}{4}, \frac{h}{8}, ...\right)$ que são P.Gs infinitas de razão $\frac{1}{2}$.

A distância total percorrida pela bola até o repouso será dada pela soma dos termos das duas sequências.

$$S = S_1 + S_2 \Rightarrow S = \frac{h}{1-\frac{1}{2}} + \frac{\frac{h}{2}}{1-\frac{1}{2}} \Rightarrow S = \frac{h}{\frac{1}{2}} + \frac{\frac{h}{2}}{\frac{1}{2}} \Rightarrow S = 2h + h = 3h$$

4.6 CURIOSIDADES E APLICAÇÕES DAS SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS

Se os conceitos são apresentados de forma fragmentada, mesmo que de forma completa e aprofundada, nada garante que o aluno estabeleça alguma significação para ideias isoladas e desconectadas umas das outras. Acredita-se que o aluno sozinho seja capaz de construir múltiplas relações entre os conceitos e formas de raciocínio envolvidos nos diversos conteúdos, no entanto o fracasso escolar e as dificuldades dos alunos frente a Matemática mostram claramente que isso não é verdade. (PCNEM, 1999. p.255)

Nesse sentido são apresentadas a seguir aplicações das progressões aritméticas e geométricas em diversas áreas do conhecimento.

- Matemática Financeira

No regime de capitalização simples o capital inicial aplicado (C) a uma determinada taxa (i) num determinado período (n) sofrerá um acréscimo constante (j), período a período, gerando o montante (M).

Observemos a evolução do montante período a período.

Inicialmente: $M_0=C$

Após 1 período: $M_1=C+J$

Após 2 períodos: $M_2=M_1+J=C+2J$

Após 3 períodos: $M_3=M_2+J=C+3J$

....

Após n períodos: $M_n=C+n.J$

A sequência M_0, M_1, M_2,..., M_n é uma progressão aritmética de primeiro termo $a_1=C$ e razão r=J

No regime de capitalização composta o capital inicial C, aplicado a uma taxa i, sofre ajustes período a período, configurando o que chamamos juro sobre juro.

DATA INICIAI	APÓS 1 PERÍODO	APÓS 2 PERÍODOS	APÓS 3 PERÍODOS	...	APÓS n PERÍODOS
$M_0=C$	$M_1=C.(1+i)$	$M_2=M_1.(1+i)=C.(1+i)^2$	$M_3=M_2.(1+i)= C.(1+i)^3$		$M_n=C.(1+i)^n$

Tabela 2: Evolução do montante a Juros compostos

A sequência M_0, M_1, M_2, ..., M_n é uma progressão geométrica de primeiro termo a_1= C e razão q=1+i

- Biologia

Quando a célula de um ser unicelular (protozoário, alga ou fungo) sofre uma mitose, gera duas células-filhas com a mesma informação genética da célula-mãe.

Dessa forma, a célula reproduziu-se assexuadamente.

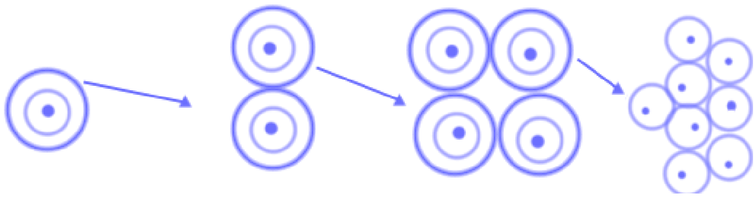
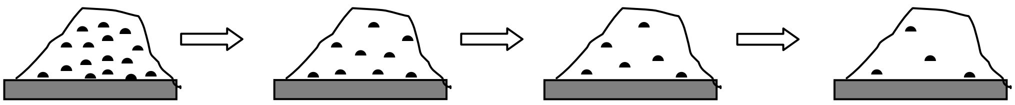


Figura 4.10: Reprodução assexuada

A evolução da quantidade de indivíduos corresponde a uma progressão geométrica de primeiro termo 1 e razão 2.

- Química

As massas de substâncias radioativas decaem periodicamente fazendo com que sua massa se reduza a metade da massa anterior. Esse período de tempo é conhecido como meia vida e varia de substância para substância.



m_0 $\qquad \frac{m_0}{2} \qquad \frac{m_0}{4} \qquad \frac{m_0}{8}$

Figura 4.11: Degradação da massa radioativa

A sequência obtida pela decomposição da substância radioativa é uma PG de primeiro termo $a_1=m_0$ e razão $q=1/2$.

- A Lenda do Xadrez

Há uma lenda que diz ter um rei perguntado ao inventor do jogo de xadrez o que ele queria como recompensa. O inventor respondeu então 1 grão de trigo pela primeira casa, 2 grãos de trigo pela segunda casa, 4 pela terceira, 16 pela quinta, e assim sucessivamente, sempre dobrando a quantia da nova casa.

O rei, apesar de ter concordado, não pode dar a recompensa ao inventor porque nem toda a produção de milho de seu reino daria o total da recompensa pedida.

A impossibilidade de o rei cumprir a promessa deve-se ao seguinte cálculo:

Como o tabuleiro de xadrez tem 64 casas, o rei teria que dar a soma dos 64 primeiros termos da PG:

1, 2, 4, 8, 16, 32, ... (onde a razão é q=2)

Assim, teria o rei que dar: $S_n = a_1(q^n - 1) / (q -1)$, ou seja:

$S_{64} = 1(2^{64}-1) / (2-1) = 2^{64} - 1 = 18446744073709551615$ grãos de trigo.

Realmente o rei não poderia cumprir a promessa de recompensar o inventor.

- Fractais

Mandelbrot em 1975 criou o termo Fractal que vem do latim, do adjetivo fractus, derivado do verbo frangere que significa quebrar, fracionar. De acordo com Mandelbrot, os fractais são formas geométricas abstratas de uma beleza incrível, com padrões completos que se repetem infinitamente, mesmo limitados a uma área finita. O autor constatou ainda que havia uma relação entre estes objetos e aqueles encontrados na natureza. Existem duas características frequentes na Geometria Fractal são elas:

Auto-similaridade: Um fractal costuma apresentar cópias aproximadas de si mesmo em seu interior. Um pequeno pedaço é similar ao todo. Visto em diferentes escalas a imagem de um fractal parece similar.

Complexidade Infinita: É uma propriedade dos fractais que significa que nunca conseguiremos representá-los completamente, pois a quantidade de detalhes é infinita. Sempre existirão reentrâncias e saliências cada vez menores.

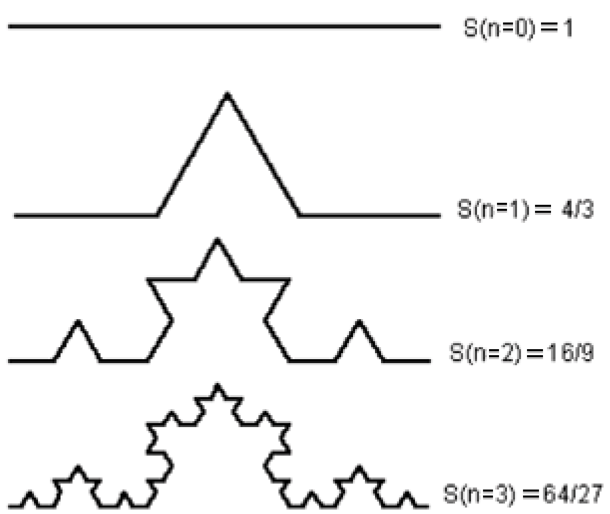


Figura 4.12: Os quatro primeiros níveis para a construção da curva de Koch

Note que a sequência formada pelos comprimentos da curva de Koch após cada interação é uma progressão geométrica de primeiro termo 1 e razão 4/3.

1, 4/3, 16/9, 64/27, ...

- Lei do resfriamento dos corpos:

Um indivíduo foi encontrado morto em uma sala com temperatura ambiente constante. O legista tomou a temperatura do corpo às 21:00 h e constatou que a mesma era de 32 graus Celsius. Uma hora depois voltou ao local e tomou novamente a temperatura do corpo e constatou que a mesma estava a 30 graus Celsius. Aproximadamente a que horas morreu o indivíduo, sabendo-se que a temperatura média de um corpo humano normal é de 37 graus Celsius?

A curva que associa a temperatura corporal ao tempo passa pelos pontos (21,32) e (22,30) onde abscissas representam o tempo e as ordenadas a temperatura do corpo e representam uma função exponencial decrescente.

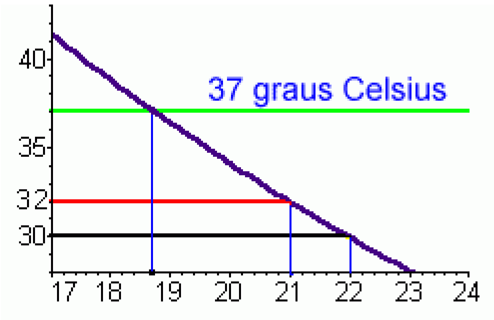


Figura 4.13: Lei do resfriamento dos corpos

Fonte: http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/medio/expolog/exponenc.htm

A curva que descreve este fenômeno é uma função exponencial da forma:

$f(t) = C\ e^{A\,t}$, então obtemos que:

$A = Ln(30)\text{-}Ln(32)$

$C = 32/\ (30/32)^{21}$

A função exponencial que rege este fenômeno de resfriamento deste corpo é dada por:

$f(t) = 124{,}09468\ e^{-0{,}0645385t}$ e quando $f(t) = 37$ temos que:

$t = 18{,}7504... = 18$ horas + 45 minutos.

- Crescimento populacional:

Em 1798, Thomas Malthus, no trabalho "An Essay on the Principle of Population" formulou um modelo para descrever a população presente em um ambiente em função do tempo. Considerou N=N(t) o número de indivíduos em certa população no instante t. Tomou as hipóteses que os nascimentos e mortes naquele ambiente eram proporcionais à população presente e a variação do tempo conhecida entre os dois períodos. Chegou à seguinte equação para descrever a população presente em um instante t: $N(t)=N_o\, e^{rt}$, onde N_o é a população presente no instante inicial t=0 e r é uma constante que varia com a espécie de população.

O gráfico correto desta função depende dos valores de N_o e de r, mas sendo uma função exponencial, a forma do gráfico será semelhante ao da função $y=Ke^{x}$.

Este modelo supõe que o meio ambiente tenha pouca ou nenhuma influência sobre a população.

Como aplicação numérica, considere-se uma colônia de bactérias se reproduzindo normalmente. Se num certo instante havia 200 bactérias na colônia, passadas 12 horas havia 600 bactérias. Quantas bactérias haverá na colônia após 36 horas da última contagem?

No instante inicial havia 200 bactérias, então $N_o=200$, após 12 horas havia 600 bactérias, então

$N(12)=600=200\, e^{r12}$, logo $e^{12r}=600/200=3$

assim

$\ln(e^{12r})=\ln(3)$

Como Ln e exp são funções inversas uma da outra, segue que $12r=\ln(3)$, assim:

$r=\ln(3)/12=0{,}0915510$

$N(48) = 200\, e^{48.(0{,}0915510)} = 16200$ bactérias

Então, após 36 horas da última contagem, ou seja, 48 horas do início da contagem, haverá 16200 bactérias.

5 PLANOS DE AULA

Nesse capítulo serão apresentadas sugestões de planos de aula relativos aos conteúdos relacionados às progressões aritméticas e geométricas, os quais poderão ser utilizados na íntegra ou mesmo adaptados pelo professor de acordo com sua estratégia de ensino.

Aula 1: Termo Geral da PA

1ª Etapa: apresentar aos alunos o seguinte exercício para que seja resolvido em grupos:

A companhia que administra uma rodovia quer colocar radares eletrônicos de controle de velocidade ao longo de 500 quilômetros. O primeiro radar deve ser instalado no Km 10, o os demais instalados a cada 40 km. Quantos radares devem ser instalados ao longo da rodovia?

Possivelmente os alunos devem, em sua maioria obter a quantidade de radares distribuindo-os ao longo dos 500 km da rodovia.

1º radar → Km 10

2º radar → 10+40 = 50 → Km 50

3º radar → 50+40=90 → Km 90

4º radar → 90+40=130 → Km 130

5º radar → 130+40=170 → Km 170

6º radar → 170+40=210 → Km 210

7º radar → 210+40=250 → Km 250

8º radar → 250+40=290 → Km 290

9º radar → 290+40=330 → Km 330

10º radar → 330+40=370 → Km 370

11º radar → 370+40=410 → Km 410

12º radar → 410+40=450 → Km 450

13º radar → 450+40=490 → Km 490

Assim, no quilômetro 490 seria colocado o décimo terceiro radar, portanto haveriam 13 radares no trecho planejado da rodovia.

2ª Etapa: resolver o exercício utilizando a fórmula do termo geral da PA destacando uma maior facilidade na obtenção do resultado.

Primeiro termo → $a_1=10$

Razão → $r= 40$

Número de termos → n (quantidade de radares)

Termo Geral → $a_n=a_1+(n-1).r$

Supondo $a_n = 500$ e considerando $n\in N$, temos:

$500=10 + (n-1).40$

$500=10+40n-40$

$530=40n$

$n=530/40$

$n=13,25$

Lembrando que a quantidade de radares deve ser um número natural, então devem ser instalados 13 radares ao longo da rodovia.

Para a obtenção do marco quilométrico onde será instalado o 13º radar basta substituir n=13 na expressão $a_n=a_1+(n-1).r$

$a_{13}=10+(13-1).40$

$a_{13}=10+12.40$

$a_{13}=10+480$

$a_{13}=490$

3ª Etapa: Sistematização dos conteúdos abordados (vide Capítulo 4)

Aula 2: Soma dos termos de uma PA

1ª Etapa: Primeiro momento: apresentar aos alunos o seguinte exercício para que seja resolvido em grupos:

Um atleta em fase de treinamento prepara-se pra voltar à prática esportiva de ciclismo depois de um tempo que ficou afastado. No entanto ele mesmo sabe que não pode pedalar a mesma quantia de quilômetros como antigamente, ou seja, tem que realizar um treinamento mantendo um crescimento constante. No primeiro dia ele deveria percorrer 3 km, no segundo dia 5 km, no terceiro dia 6 km e assim sucessivamente até o 12º dia. Determine a distância total percorrida pelo atleta durante os 12 dias de treinamento.

Provavelmente os alunos calculariam as distâncias percorridas diariamente e somariam as parcelas obtidas para obter a solução do exercício.

1º dia→ 3 km

2º dia→ 5 km

3º dia→ 5+3=8 km

4º dia→ 8+3=11 km

5º dia→11+3=14 km

6º dia→14+3=17 km

7º dia→17+3=20 km

8º dia→ 20+3=23 km

9º dia→ 23+3=26 km

10º dia→ 26+3=29 km

11º dia→ 29+3=32 km

12º dia→ 32+3=35 km

A distância total percorrida é 243Km

2ª Etapa: o professor apresenta aos alunos a estratégia de Gauss para a soma dos termos de uma PA e resolve o exercício utilizando a fórmula.

As distâncias percorridas pelo atleta diariamente, a partir do segundo dia, são elementos de uma PA formada por n=11 termos, de primeiro termo $a_1=5$ e razão 3.

Para n=11, temos: $a_{11}=5+(11-1).3=35$ km

$$S_{11} = \frac{5+35}{2}.12 = 240km$$

A distância total percorrida pelo atleta ao final dos 12 dias de treinamento será obtida por $3+S_{11}=3+240=243$ km

3ª Etapa: Sistematização da soma dos termos da PA como no capítulo 4.

Aula 3: Interpolação aritmética.

1ª Etapa: apresentar aos alunos o seguinte exercício para que seja resolvido em grupos:

Uma empresa foi contratada para instalar telefones entre o km 5 e o km 362 de uma rodovia de modo que a distância entre dois telefones consecutivos seja constante e igual a 3 km. Determinar quantos telefones serão utilizados.

Uma parcela dos alunos provavelmente somando 3 a cada marco quilométrico a partir do km 5 até o km 362, encontrando a solução do problema. Outros perceberiam que a distância entre o primeiro e o último telefone instalado é dada pela diferença 362 – 5 = 357km e poderiam concluir equivocadamente que deveriam ser instalados 357: 3 = 119 telefones na rodovia. Nesse caso o professor deve mostrar ao aluno que a estratégia utilizada foi válida, porém destacar que a razão 119 não corresponde ao total de telefones instalados e sim à quantidade de espaçamentos de 3 km existentes entre o primeiro e o último telefone. Assim, entre dois telefones haveria um espaçamento, entre três telefones haveria dois espaçamentos e entre n+1 telefones haveria n espaçamentos.

2ª Etapa: resolver o exercício utilizando interpolação aritmética

Inserir n telefones entre dois telefones já existentes configura uma PA com n+2 elementos, pois sabemos que a distância entre dois telefones consecutivos será sempre igual a 3 km, o que configura uma PA de primeiro termo $a_1=5$ e $a_n=362$. Assim, podemos utilizar a expressão do termo geral da PA, o que tornará a resolução do problema muito mais simples.

$$a_n=a_1+(n-1).r$$

$$362=5+(n-1).3$$

$$362=5+3n-3$$

$$362=3n+2$$

$$3n=362-2$$

$3n=360$

$n=360/3$

$n=120$ telefones

3ª Etapa: sistematizar interpolação aritmética como sugerido no Capítulo 4.

Aula 4: Termo Geral da PG

1ª Etapa: apresentar aos alunos o seguinte exercício para que seja resolvido em grupos:

Num torneio de tênis havia 4096 jogadores inscritos. A cada rodada as duplas que se enfrentarão são definidas por sorteio. O vencedor permanece na disputa e o perdedor é eliminado. Determine quantas partidas fará o vencedor do torneio.

Os alunos, percebendo a regularidade determinariam a quantidade decrescente de jogadores rodada a rodada.

1ª rodada $\rightarrow$ 4096

2ª rodada $\rightarrow$ 2048

3ª rodada $\rightarrow$ 1024

4ª rodada $\rightarrow$ 512

5ª rodada $\rightarrow$ 256

6ª rodada $\rightarrow$ 128

7ª rodada $\rightarrow$ 64

8ª rodada $\rightarrow$ 32

9ª rodada $\rightarrow$ 16

10ª rodada $\rightarrow$ 8

11ª rodada $\rightarrow$ 4

12ª rodada $\rightarrow$ 2

Obtendo assim a resposta do problema, pois o campeão terá disputado 12 jogos para sagrar-se campeão do torneio.

2ª Etapa: o professor apresenta aos alunos a expressão que determine o termo geral da PG e resolve o exercício.

As quantidades de jogadores, rodada a rodada, configuram uma PG decrescente com primeiro termo a_1=4096 (há 4096 jogadores na primeira rodada), último termo a_n=2 (o vencedor da última rodada é o campeão do torneio) e razão q=1/2 (a quantidade de jogadores cai pela metade rodada a rodada). Assim, dada a PG (4096, 2048, ..., 2) pretendemos determinar a quantidade de termos.

$$a_n = a_1.q^{n-1}$$

$$2 = 4096.\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\frac{2}{4096} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\frac{2}{2^{12}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$2^{-11} = (2^{-1})^{n-1}$$

$$2^{-11} = 2^{-n+1}$$

$$-n+1 = -11$$

$$-n = -11-1$$

$$-n = -12$$

$$n = 12$$

3ª Etapa: sistematizar a soma dos termos da PG como sugerido no Capítulo 4.

Aula 5: Quadrado de Koch

Aula disponível em http://objetoseducacionais2.mec.gov.br/, acessada em 02/10/2015

Conteúdos: PG, termo geral da PG, soma dos termos da PG

Estratégia: Estudar PG através do estudo dos fractais

Material necessário:

Folha de papel quadriculado (32cm × 44cm) ou folha pontilhada; lápis; borracha; calculadora; régua.

Figura 5. 1: Material necessário

Preparação:

Antes de iniciar a atividade, divida os alunos em duplas, lhes entregue uma Folha do Aluno e duas folhas de papel quadriculado (ou, se preferir, duas folhas pontilhadas ou duas folhas de papel milimetrado). Caso não seja usada a folha pontilhada, é necessário adequar a unidade utilizada para que o comprimento do lado do quadrado inicial seja múltiplo de 27, pois isso facilitará a construção do fractal. Também, como será justificado posteriormente, a largura e o comprimento da folha devem ter, no mínimo, o dobro da medida do lado do quadrado.

Etapa 1: os primeiros passos para a construção do Quadrado de Koch

1. Oriente os alunos para que desenhem, no centro da folha, um quadrado, como indicado na Preparação. Se estiver usando o anexo, utilize 28 pontinhos para cada lado;

2. Substitua cada segmento pelo padrão da Figura 5.2. Observe que serão formados segmentos com 1/3 do comprimento do lado do quadrado anterior, o que é equivalente a acrescentar a cada segmento do quadrado inicial outro quadrado de lado 1/3, e assim sucessivamente;

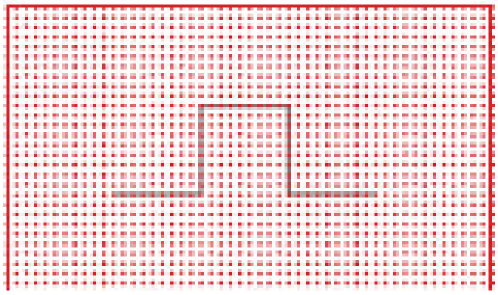


Figura 5.2: Padrão

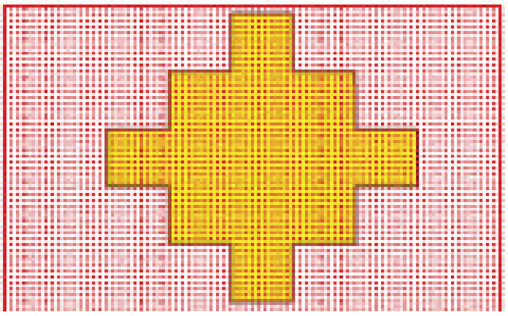


Figura 5.3: Fim do passo 2

3. Repita o procedimento três vezes, totalizando quatro passos. É importante substituir pelo padrão todos os segmentos resultantes do fim de cada um dos passos. Para uma melhor visualização da figura, ao final de cada passo, hachure-a.

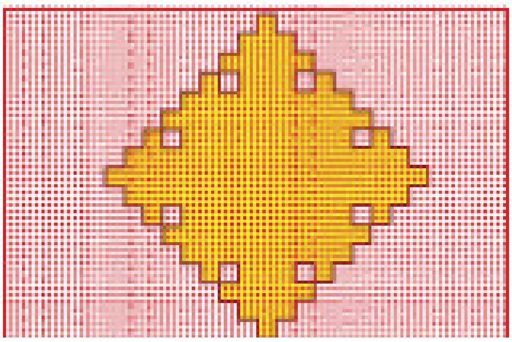


Figura 5.4: Fim do passo 3

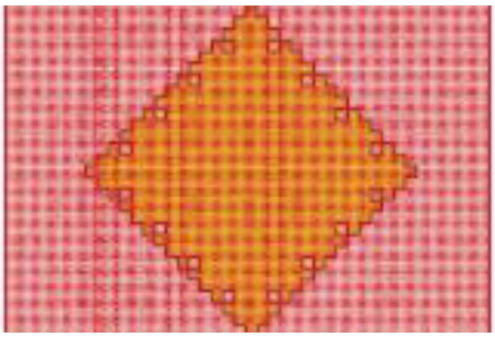


Figura 5.5: Fim do passo 4

Durante a construção, os alunos deverão completar uma linha da Tabela 2 ao final de cada passo. Para facilitar a análise dos dados na Etapa 2, peça para que eles considerem o comprimento do lado do primeiro quadrado como sendo 1 unidade.

Etapa 2: análise de dados.

Passos	Comprimento dos segmentos	Perímetro da figura	Área acrescentada
1	1	4	0
2	1/3	20/3	4/9
3	1/9	100/9	20/81
4	1/27	500/27	100/729

Tabela 2: Coleta de dados do experimento

Nesta etapa, com base nos dados da Tabela 2, coletados na Etapa 1, os alunos tentarão responder a algumas perguntas sobre o comprimento dos segmentos, perímetro e área da figura. Para isso, com exceção da "área da figura limite" que é dada pela soma dos termos de uma PG, é necessário que os alunos já conheçam a definição de Progressão Geométrica e saibam como encontrar seu termo geral.

Questões aos alunos:

1. Você saberia responder qual será o comprimento de cada segmento após o quinto passo? Por qual constante é necessário multiplicar o comprimento de um segmento para obter o comprimento do segmento obtido no passo seguinte?

2. Que tipo de sequência formam os valores dos comprimentos? Encontre uma expressão para o comprimento após o n-ésimo passo.

3. O que acontece com o comprimento dos segmentos quando repetimos o processo indefinidamente, ou seja, quando o valor de n torna-se muito grande?

4. Você saberia responder qual será o perímetro da figura após o quinto passo? Por qual constante é necessário multiplicar o perímetro de uma figura para obter o perímetro da figura no passo seguinte?

5. Que tipo de sequência formam os valores dos perímetros? Ache uma expressão para o perímetro da figura após o n-ésimo passo.

6. O que acontece com o perímetro quando repetimos o processo indefinidamente?

7. Você saberia responder qual será a área da figura após o quarto passo?

8. Calcule a área da figura após o quinto passo.

9. O que acontece com área quando repetimos o processo indefinidamente?

Soluções:

Os comprimentos dos segmentos das quatro figuras obtidas constitui a seguinte sequência: $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}$

A qual é uma PG com o primeiro termo $a_1 = 1$ e razão q = 1/3. Assim, a constante que deve ser multiplicada para obter os termos da sequência é igual a 1/3 e o comprimento dos segmentos após o quinto passo a será igual a $\frac{1}{3}.\frac{1}{27} = \frac{1}{81}$. Agora, como conhecemos o primeiro termo a_1 e a razão q, podemos escrever a expressão do termo geral da PG, ou seja, a expressão para o segmento após o n-ésimo passo:

$$a_n = 1.\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

Como a razão é menor que 1, à medida que n cresce, a_n decresce. E, se o valor de n torna-se muito grande, o valor de a_n torna-se muito pequeno, aproximando-se cada vez mais de zero. Neste caso, dizemos que o limite de a_n é zero quando n cresce ilimitadamente.

Os perímetros das quatro figuras obtidas são: $4, \frac{20}{3}, \frac{100}{9}, \frac{500}{27}$.

A sequência obtida configura uma PG com o primeiro termo $a_1 = 4$ e razão $q = \frac{5}{3}$. Assim, o fator que gera os termos da sequência é $\frac{5}{3}$ e o perímetro da figura após o quinto passo será igual a $\frac{5}{3}.\frac{500}{27} = \frac{2500}{81}$. . Agora, como conhecemos o primeiro termo $a_1 = 4$ e razão $q = \frac{5}{3}$ podemos escrever a expressão do termo geral da PG, ou seja, a expressão para o perímetro da figura após o n-ésimo passo: $a_n = 4.\left(\frac{5}{3}\right)^{n-1}$.

Como a razão é maior que 1, à medida que n cresce, a_n cresce. E, se o valor de n torna-se muito grande, o valor de a_n também se torna muito grande, crescendo ilimitadamente.

Em cada passo, são acrescentados novos padrões à figura e, observa-se pelas figuras 5.3, 5.4 e 5., também há um acréscimo à área. Deste modo, a área total da figura após o quarto passo será a soma da área do quadrado inicial com os acréscimos realizados nos passos 2, 3 e 4, ou seja, $1+\frac{4}{9}+\frac{20}{81}+\frac{100}{729}$

Para calcular a área da figura após o quinto passo, deve-se descobrir o acréscimo realizado a ela. Para isso, deve-se observar que, a partir do segundo passo, a área acrescentada forma a seguinte sequência:

$$\frac{4}{9},\frac{20}{81}e\frac{100}{729}$$

Visto que se trata de uma PG com o primeiro termo $a_1=\frac{4}{9}$ e razão $q=\frac{5}{9}$ temos que a área acrescentada após o quinto passo será $\frac{100}{729}.\frac{5}{9}=\frac{500}{6561}$

e assim a área da figura será igual a $1+\frac{4}{9}+\frac{20}{81}+\frac{100}{729}+\frac{500}{6561}=\frac{12497}{6561}$

Note que à medida que a quantidade de parcelas tende ao infinito a soma tende a 2.

$$\lim_{n\to\infty} S_n=1+\frac{4}{9}+\frac{20}{81}+\frac{100}{729}+\frac{500}{6561}+\frac{2500}{59049}+.\frac{12500}{531441}+...=2$$

Aula 6: Triângulo de Sierpinski (Aula disponível em http://www.neteducacao.com.br - acesso em 02/10/2015)

Conteúdo: PG, soma dos termos da PG

Estratégia: utilizar os fractais para introduzir a soma infinita dos termos de uma PG.
1ª Etapa: Introdução do tema – triângulo de Sierpinski

Antes de introduzir a atividade, os alunos já devem conhecer as principais características das progressões aritméticas e geométricas.
Inicie a aula explicitando algumas características dos fractais. Leve imagens para a

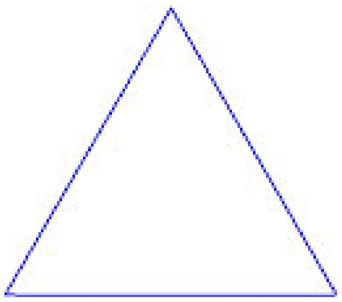
sala e mostre alguns fractais.

Nesse início, os alunos devem ter contato com as propriedades de auto-semelhança e a complexidade infinita dos fractais. Não entraremos em detalhes sobre a dimensão dos fractais.

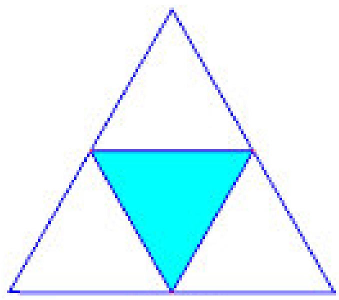
Em seguida, divida os alunos em duplas ou trios. Cada grupo precisará de:

• Régua.
• Compasso
• Folha sulfite
• Lápis e borracha.

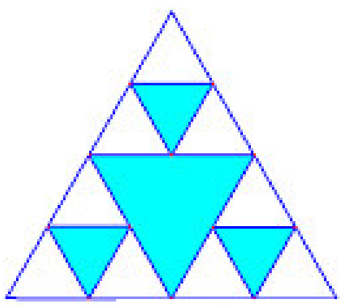
Entregue uma folha aos alunos com as seguintes instruções:



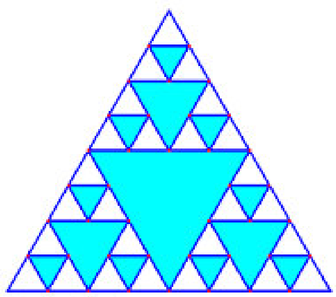
Triângulo original



Estágio 1



Estágio2



Estágio 3

Nesta etapa os alunos irão construir os quatro primeiros estágios do triângulo de Sierpinski e responder a um questionário no final.

TRIÂNGULO ORIGINAL

1º passo: Construa um triângulo equilátero com 16 cm de lado com auxílio da régua e compasso.

ESTÁGIO 1:

1º passo: Construa um triângulo equilátero com 16 cm de lado com auxílio da régua e compasso.
2º passo: Divida cada lado do triângulo em duas partes iguais (ou seja, encontre o ponto médio).
3º passo: Trace o triângulo no centro e ilustre-o da maneira que preferir.

ESTÁGIO 2:
1º passo: Repita o estágio um.
2º passo: Divida cada lado dos novos triângulos brancos em duas partes iguais (ou seja, encontre o ponto médio).
3º passo: Trace o triângulo no centro de cada triângulo branco e ilustre-os da maneira que preferir.

ESTÁGIO 3:
1º passo: Repita o estágio dois.
2º passo: Divida cada lado dos novos triângulos brancos em duas partes iguais (ou seja, encontre o ponto médio).
3º passo: Trace o triângulo no centro de cada triângulo branco e ilustre-os da maneira que preferir.

ESTÁGIO 4:
1º passo: Repita o estágio três.
2º passo: Divida cada lado dos novos triângulos brancos em duas partes iguais (ou seja, encontre o ponto médio).
3º passo: Trace o triângulo no centro de cada triângulo branco e ilustre-os da maneira que preferir.

QUESTÕES:
1. Escreva os cinco primeiros termos da sequência onde o 1º termo indica a quantidade de triângulos brancos no estágio original, o 2º termo indica a quantidade de triângulos brancos no estágio 1, e assim sucessivamente.

2. Qual é o próximo termo desta sequência?

3. O que acontece a cada novo termo?
4. Se continuarmos o processo, quantos triângulos brancos teremos no estágio 10?
5. Agora, vamos analisar o número total de triângulos em cada estágio. Escreva os cinco primeiros termos da sequência onde o 1º termo indica a quantidade de triângulos no estágio original, o 2º termo indica a quantidade de triângulos brancos no estágio 1, e assim sucessivamente.
6. Qual é o próximo termo desta sequência?
7. O que acontece a cada novo termo?
8. Quantos triângulos teremos se continuarmos o processo indefinidamente?

Observe que foi pedido ao aluno que, a cada etapa da construção do triângulo de Sierpinski, pintasse o triângulo do centro. De fato, o triangulo central deve ser removido, mas optou-se pela ilustração para facilitar o manuseio dos materiais e a aplicação da atividade.

2ª Etapa: Situação-Problema

Depois que os grupos terminarem de registrar as respostas comente que, se continuarmos o padrão da construção do triângulo de Sierpinski indefinidamente, serão obtidos infinitos triângulos. Em seguida, proponha a seguinte questão: Já que o número de triângulos é infinito, podemos dizer que a área pintada também será infinita?

O objetivo é gerar um conflito. Em geral, os alunos não aceitam com facilidade a ideia de que a soma da área de infinitos triângulos não é um número infinito. O professor pode conduzir a discussão da seguinte forma:

1. Construa a tabela com os valores da medida do lado do triângulo branco (cm) e a área de cada triângulo branco (cm^2) em cada estágio.

Estágio	Medida do lado do triângulo branco (cm)	Área de cada triângulo branco (cm^2)
0	16	$64\sqrt{3}$
1	8	$16\sqrt{3}$
2	4	$4\sqrt{3}$
3	2	$\sqrt{3}$
4	1	$\frac{\sqrt{3}}{4}$
5	½	$\frac{\sqrt{3}}{16}$

Tabela 3: Área de cada triângulo branco

2. Pergunte o que ocorre com a medida do lado do triângulo branco a cada novo termo. Espera-se que os alunos percebam que a cada novo termo a medida do lado do triângulo branco se reduz à metade.
3. Pergunte o que ocorre com a área do triângulo branco a cada novo termo. Espera-se que os alunos percebam que a cada novo termo a área do triângulo branco se reduz à quarta parte.
4. Peça aos alunos que calculem a área dos triângulos brancos nos seis primeiros estágios. Basta multiplicar a área do triângulo branco pela quantidade de triângulos brancos em cada estágio.
5. Pergunte o que ocorre com a soma da área dos triângulos brancos a cada novo termo. Espera-se que os alunos percebam que a cada novo termo a área do triângulo branco é multiplicada por $\frac{3}{4}$.
6. Peça aos alunos que calculem a área pintada do triângulo nos seis primeiros estágios. Basta subtrair a soma da área dos triângulos brancos da área do triângulo inicial.

Estágio	Área de cada triângulo branco (cm²)	Quantidade de triângulos brancos	Soma da área de cada triângulo branco (cm²)
0	$64\sqrt{3}$	1	$64\sqrt{3}$
1	$16\sqrt{3}$	3	$48\sqrt{3}$
2	$4\sqrt{3}$	9	$36\sqrt{3}$
3	$\sqrt{3}$	27	$27\sqrt{3}$
4	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	81	$\frac{81\sqrt{3}}{4}$
5	$\frac{\sqrt{3}}{16}$	243	$\frac{243\sqrt{3}}{16}$

Tabela 4: Soma das áreas dos triângulos brancos

7. Conclua, com os alunos, que a cada novo termo a área se aproxima à área do triângulo inicial, ou seja, a área tende a $64\sqrt{3}$. Esse valor é resultado de $64\sqrt{3}-\left(\frac{3}{4}\right)^{\infty}.64\sqrt{3}=64\sqrt{3}$

3ª Etapa: Sistematização dos conteúdos abordados

Sistematize a soma infinita de termos de uma PG, demonstração realizada no Capítulo 4. Em seguida, relacione a atividade anterior à fórmula e proponha novas questões.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A situação precária da educação brasileira é inquestionável. As avaliações externas nacionais e internacionais atestam essa realidade. Sabe-se que mudanças profundas devem ocorrer e os professores não podem ficar de mãos atadas aguardando o momento em que as autoridades e governantes entendam que sem uma educação de qualidade nosso país não experimentará um salto de qualidade tanto na produção de riquezas quanto na qualidade de vida de sua população.

Nesse sentido a participação do professor é decisiva e a utilização de estratégias de ensino diversificadas pode fazer diferença na aprendizagem dos nossos alunos.

Ensinar não é tarefa fácil e ensinar matemática é tarefa ainda mais difícil. Na intenção de amenizar essas dificuldades, no Capítulo 2, Sobre Ensinar e Aprender Matemática, foram apresentadas práticas diárias utilizadas por professores de escolas da rede pública do estado de São Paulo que vêm tendo desempenho satisfatório nas avaliações externas regulares a que vem sendo submetidas. São atitudes simples, mas que podem fazer a diferença na aprendizagem de nossos alunos. No mesmo capítulo, foi destacada a importância da motivação no ato de aprender. Alunos desmotivados abrem mão do protagonismo e assumem o papel de meros coadjuvantes em sua própria aprendizagem.

No Capítulo 3, Estratégia de Ensino, foram apresentados subsídios para que o tema sequências numéricas – PA e PG– trabalhado no ensino médio de escolas públicas e privadas no ensino médio, pudesse ser abordado de forma menos ortodoxa, investindo na contextualização histórica e no lúdico, sem abrir mão do conteúdo.

A sequência de Fibonacci e sua relação com a razão áurea possibilita o encantamento dos alunos e a tão sonhada motivação no ato de aprender.

Reproduzir o modelo de ensino tradicional ao qual a maioria dos professores foi submetida é assumir um risco altíssimo de fracassar, pois os alunos atualmente diferem muito dos alunos de outrora. Assim, espera-se que abordagem diferenciada das sequências numéricas, proposto nesse trabalho, possa contribuir provocando uma reflexão por parte dos colegas professores em relação a sua prática e os caminhos a serem trilhados na busca por uma aprendizagem significativa.

7 REFERÊNCIAS

BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática**. São Paulo: Edgard Blücher, 1974

BRASIL-MEC. Lei n. 5692/71 **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional.** Brasília, 1971.

BRASIL-MEC. Lei n. 9394/96 **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional.** Brasília, 1996.

BRASIL, Ministério da Educação e do Desporto. **Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio**. Brasília: SEF, 1998.

BRASIL. Orientações **Curriculares para o Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Secretaria de Educação Básica. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2004

BRASIL. Orientações **Curriculares para o Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Secretaria de Educação Básica. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, vol. 2, 2006.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio, Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Ministério da Educação. Brasília, 1999

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio, Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Ministério da Educação. Brasília, 2000
.

BZUNECK, J. A. **As crenças de auto-eficácia dos professores**. In: F.F. Sisto, G. de Oliveira, & L. D. T. Fini (Orgs.). Leituras de psicologia para formação de professores. Petrópolis, Rio de Janeiro: Vozes, 2000.

CARVALHO, Silva, COSTA, Maria Cecília. **Padrões Numéricos e Sequências.** São Paulo: Moderna, 1997.

DANTE, Luiz R. **Matemática: Contexto e Aplicações**. Vol. 1. São Paulo: Editora Ática, 2010.

D'AMBRÓZIO, Ubiratan. **Educação Matemática: da Teoria à Prática**. Papirus. Campinas. São Paulo. 2003

DINIS, Eduardo. **A ansiedade na Matemática**. Educação e Matemática, Lisboa, n.72, p.26, mar.- abr. 2003.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática.** Unicamp, 2011.

GIOVANNI, José Ruy (2002), **Matemática Fundamental: Uma nova abordagem** – Ensino Médio. Volume Único. São Paulo: FTD https://www.algosobre.com.br/matematica/funcoes-exponencial.html-Acesso em 02/10/2015

http://fvc.org.br/estudos-e-pesquisas/2011/boas-praticas-docentes-ensino-matematica-688828.shtml - Acesso em 15/08/2015

http://www.inep.gov.br/

http://www.neteducacao.com.br/experiencias-educativas/ensino-medio/matematica/soma-dos-termos-de-uma-progressao-geometrica

http://www.oecd.org/pisa/

LIMA, Elon Lages, et al. **A matemática do ensino médio**, Vol. 1, (5a edição), Coleção do Professor de Matemática, Sociedade Brasileira de Matemática, 2004.

LIMA, Elon Lages, et al. **A matemática do ensino médio**, Vol. 2, (5a edicão), Coleção do Professor de Matemática, Sociedade Brasileira de Matemática, 2004

MORA, David. **Aprendizaje y ensenãnza: Proyectos y estratégias para una educación matemática del futuro.** LaPaz, Bolivia: Campo Iris, 2003

RENZULLI, JOSEPH S. **Enrinriching Curriculum For All Students. Arlington Heights, IL: Skylight Professional Development, 2001.**

SOUZA, Joamir. **Novo Olhar Matemática**. Vol. 1. São Paulo: Editora FTD, 2010.

SOUZA, Júlio Cézar de Mello: **Matemática divertida e curiosa**. Rio de Janeiro: Record, 2001

ZÁBOLI, G. **Práticas de Ensino e Subsídios para a Prática Docente**. 10.ed. São Paulo: Editora Ática. 1999.

Autorizo a reprodução xerográfica para fins de pesquisa.

Marcelo dos Reis Carrion