



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA  
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

ABRAÃO VIEIRA DE LIMA

# UMA ABORDAGEM NUMÉRICA DA LEI DE RESFRIAMENTO DE NEWTON

BELÉM  
2016



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA  
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

ABRAÃO VIEIRA DE LIMA

# UMA ABORDAGEM NUMÉRICA DA LEI DE RESFRIAMENTO DE NEWTON

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal do Pará (PROFMAT-UFPA) como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre em Matemática

Orientador: **Dr. Anderson de Jesus Araújo Ramos**  
Agência Financiadora: **CAPES**

BELÉM  
2016

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)  
Sistema de Bibliotecas da UFPA

---

Lima, Abraão Vieira de, 1967 -

Uma abordagem numérica da lei de resfriamento de Newton / Abraão Vieira de Lima. - 2016.

Orientador: Anderson de Jesus Araújo Ramos.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará. Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Programa Pós-Graduação em Matemática (Mestrado Profissional), Belém, 2016.

1. Matemática-Estudo e ensino. 2. Diferenças finitas. 3. Lei de Resfriamento de Newton. 4. Decaimento exponencial. 5. Equações diferenciais-Soluções numéricas.  
Título.

CDD 22. ed. 372.7

---

# CERTIFICADO DE AVALIAÇÃO

ABRAÃO VIEIRA DE LIMA

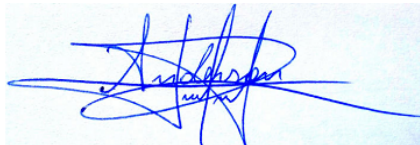
## UMA ABORDAGEM NUMÉRICA DA LEI DE RESFRIAMENTO DE NEWTON

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal do Pará (PROFMAT-UFGPA) como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre em Matemática.

DATA DA AVALIAÇÃO: 29 / 02 / 2016

CONCEITO: APROVADO

### Banca examinadora:



---

Dr. Anderson de Jesus Araújo Ramos (Orientador)  
Universidade Federal do Pará - UFPA / PPGME / PROFMAT



---

Dr. Anderson David de Souza Campelo (Membro)  
Universidade Federal do Pará - UFPA / PPGME / PROFMAT



---

Dr. Gesson José Mendes Lima (Externo)  
Secretaria de Estado de Educação - SEDUC



---

Dr. Sebastião Martins Siqueira Cordeiro (Externo)  
Universidade Federal do Pará - UFPA

Dedico este trabalho a minha família, pela paciência, compreensão e apoio, em especial ao meu pai, Lauro Lima, pela generosidade e expectativas em relação aos filhos.

## AGRADECIMENTOS

– “Não clama a sabedoria e o saber não faz ecoar a sua voz? ... Junto ao caminho, nas encruzilhadas das veredas ela se coloca; ao lado das portas, à entrada da cidade ... Está clamando: a vós, ó homens, clamo ... entendei a compreensão. Ouvi... aceitai a minha instrução ... eu, a sabedoria habito com a prudência, eu possuo conhecimento e discrição ... ouvi a minha instrução e sede sábios ... feliz o homem que me dá ouvidos ... porque o que me acha a vida.”

– Agradeço à fonte da sabedoria...

É claro que grande parte deste trabalho apoia-se no trabalho de vidas inteiras dedicadas ao desenvolvimento da ciência, grandes homens que inspiram a seguir seus ensinamentos. Sou grato a eles.

Agradeço aos professores em nome do meu orientador prof. Dr. Anderson Ramos pela dedicação; aos colegas da turma em nome do Márcio, nosso timoneiro, e ao Árison, companheiro de viagens; agradeço ao Welligton Oliveira pela inestimável ajuda.

Finalmente, agradeço aos meus irmãos, meus pais Lauro e Anita, ao amor da minha vida Berê, e demais pessoas queridas, cujo apoio incondicional não tem palavras.

*“Se vi mais longe foi por estar de pé sobre ombros de gigantes.”*

*Sir Isaac Newton.*

## Resumo

Instituto de Ciências Exatas e Naturais  
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

### Uma Abordagem Numérica da Lei de Resfriamento de Newton

por Abraão Vieira de Lima

Este trabalho buscar usar a interdisciplinaridade no âmbito da educação matemática para contribuir com o desenvolvimento da aprendizagem significativa e com isso melhorar a qualidade de ensino em matemática, visto que a mesma possibilita a formação de um ambiente de aprendizagem no qual uma gama de disciplinas são exploradas em torno do tema. Em particular, analisou-se o problema de transmissão de calor por convecção modelado por uma equação diferencial ordinária denominada Lei de Resfriamento de Newton, onde além de encontrar a solução analítica, também construiu-se uma fórmula recursiva usando o Método de Diferenças Finitas para obtenção da solução numérica. Os principais resultados alcançados no campos da análise numérica foram a limitação do erro global e a prova do decaimento exponencial da solução numérica. A comprovação desses resultados foram feitas através de simulações numéricas utilizando um software interativo de alta performance (MATLAB).

**Palavras-chave:** Lei de Resfriamento de Newton. Método de Diferenças Finitas. Decaimento Exponencial da Solução Numérica.



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ

## Abstract

Instituto de Ciências Exatas e Naturais  
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

### **An Numerical Approach to Newton's Cooling Law**

by Abraão Vieira de Lima

This work aims to use an interdisciplinary approach in the context of mathematics education to contribute to the development of meaningful learning and thereby improve the quality of education in mathematics, since it enables the formation of a learning environment in which a range of disciplines are explored around the theme. In particular, we analyzed the convective heat transfer problem patterned by an ordinary differential equation known as Newton's law of cooling which in addition to finding the analytical solution also constructed a recursive formula using the Finite Difference Method for obtaining the numerical solution. The main results achieved in the fields of numerical analysis were the overall error limitation and proof of decay exponentially the numerical solution. The proof of these results were made through numerical simulations using an interactive software of high performance (MATLAB).

**Key-words:** Newton's Cooling Law. Finite Difference Method. Exponential Decay of Numerical Solution.

# Sumário

<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
<b>1 CONCEITOS PRELIMINARES</b>	<b>4</b>
1.1 Alguns Aspectos Físicos . . . . .	4
1.1.1 Transmissão de Calor por Condução . . . . .	4
1.1.2 Transmissão de Calor por Convecção . . . . .	5
1.1.3 Transmissão de Calor por Radiação . . . . .	5
1.2 Alguns Aspectos Numéricos . . . . .	6
1.2.1 Série de Taylor . . . . .	6
1.2.2 Ordem de Aproximação de uma Fórmula de Diferença . . . . .	6
1.2.3 Erro de Truncamento Local e Erro Global . . . . .	7
1.3 Alguns Aspectos Computacionais - MATLAB . . . . .	7
1.3.1 Sintaxe e Comentários . . . . .	7
1.3.2 Estrutura de Repetição . . . . .	8
1.3.3 Anotações no Gráfico . . . . .	8
<b>2 TRANSFERÊNCIA DE CALOR POR CONVECÇÃO</b>	<b>9</b>
2.1 Lei de Resfriamento de Newton - LRN . . . . .	9
2.2 Solução Analítica da LRN . . . . .	11
<b>3 MÉTODO NUMÉRICO</b>	<b>12</b>
3.1 Método de Diferenças Finitas . . . . .	12
3.2 Consistência, Estabilidade e Convergência . . . . .	14
<b>4 MODELAGEM COMPUTACIONAL</b>	<b>16</b>
4.1 Discretização do Domínio Temporal $[0, T]$ . . . . .	16
4.2 Discretização da Lei do Resfriamento de Newton . . . . .	16
4.3 Programa em MATLAB . . . . .	20
4.4 Resultados de Simulações Numéricas . . . . .	22
<b>5 ALGUNS PROBLEMAS EM ABERTO</b>	<b>25</b>
<b>BIBLIOGRAFIA</b>	<b>30</b>

# INTRODUÇÃO

Há no ar uma constatação óbvia, cristalina e, que só agora, o Brasil está despertando para ela: o fato de que na base para o desenvolvimento de uma nação se destacam uma infraestrutura adequada e o desenvolvimento tecnológico, e que para a consecução desse alicerce é necessário a formação de bons profissionais como engenheiros e tecnólogos, e na base de sua formação estão as ciências exatas, a matemática, a física e a química. O nó da questão é que nossos estudantes, desde os anos iniciais de sua vida escolar, desenvolvem ojeriza pela matemática e, por extensão, pela física, já que são disciplinas visceralmente ligadas.

Há também a percepção de que o ensino da matemática vai mal das pernas. Segundo Druck (2003), ex-presidente da Sociedade Brasileira de Matemática, a percepção é de que "a qualidade do ensino da matemática atingiu, talvez seu mais baixo nível na história educacional do país". Pode-se perceber que a educação na atualidade passa por um momento de reflexão acerca das possibilidades de um ensino mais significativo, com perspectiva de superar processos antiquados de ensino que não atendem as expectativas dos professores e dos alunos no processo de ensino-aprendizagem.

Na tentativa de tornar as ciências exatas mais atrativas (ou menos repulsivas), hoje, parece ser consenso a necessidade de ensiná-las de forma contextualizada e que a interdisciplinaridade seja prática corrente no processo de ensino.

Como a matemática no cotidiano escolar não tem logrado atingir seus objetivos dada a dicotomia estabelecida entre a realidade e as práticas de ensino dessa disciplina, apresenta-se nesse contexto a interdisciplinaridade que, além de integrar tal conhecimento a outras áreas afins, o faz à própria realidade dos alunos contextualizando-a.

A contextualização do conteúdo de ensino permite um redirecionamento e redimensionamento, ao trazê-lo para dentro da experiência do aluno, o que permitirá que ele sinta que o saber não é apenas o acúmulo de conhecimentos técnico-científicos, mas sim uma ferramenta que o prepare para o futuro. É também o recurso para retirá-lo da condição de mero expectador passivo. A interdisciplinaridade utiliza o conhecimento de várias disciplinas para a compreensão de uma situação-problema. Mais do que, simplesmente, uma palavra de difícil pronúncia, o conceito de interdisciplinaridade fica claro quando se considera o fato trivial de que todo conhecimento mantém um diálogo permanente com outros conhecimentos. Também é de fácil constatação o fato de que algumas disciplinas se identificam e se aproximam, especialmente a física e a matemática, já que a física, com todo o seu arcabouço de leis e teorias se expressam quantitativamente em equações matemáticas. A interdisciplinaridade é uma integração de saberes.

Nos parâmetros curriculares nacionais do ensino médio, por exemplo, podemos destacar dois objetivos:

Compreender procedimentos e estratégias matemáticas que permitam ao aluno desenvolver estudos posteriores e adquirir uma formação científica geral.

Analisar e valorizar informações de diferentes fontes utilizando ferramentas matemáticas para formar uma opinião própria que lhe permita expressar-se criticamente sobre problemas da matemática, das outras áreas do conhecimento e da atualidade (BRASIL, 1999, p. 84-85).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática foram elaborados com o objetivo de orientar as escolas a planejarem seus currículos, de forma que possam prever situações em que os alunos tenham acesso aos conhecimentos socialmente elaborados e que são necessários ao exercer a cidadania. Que eles consigam evidenciar a importância que a Matemática tem para a compreensão do mundo em sua volta, e que também consigam perceber que esta área do conhecimento estimula a criatividade, o espírito investigativo e o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas.

A contextualização, associada a interdisciplinaridade, vem sendo divulgada pelo MEC como princípio curricular capaz de produzir uma evolução no ensino.

Nessa mesma perspectiva, no processo de ensino-aprendizagem é comum falar sobre a inserção das tecnologias, dado seu poder motivador sobre os alunos. Assim, surgiram inúmeras propostas de programas voltados ao ensino, sendo utilizados como ferramentas didático-pedagógicas para tornar o ensino da matemática mais palatável, interessante, criativo e agradável, visando estabelecer a necessidade da utilização dos recursos numérico-computacionais como suporte no ensino da matemática e de áreas afins, em particular ressaltamos o estudo de fenômenos físicos.

Neste contexto, destacamos que propostas de trabalhos didáticos que envolvam conteúdos de física direcionados à Calorimetria são bastante raras. Mais escassas ainda, quando são abordadas questões com enfoque numérico. Essa carência pode ser verificada através dos trabalhos publicados na área do ensino de física no Brasil. Encontra-se apenas uma dezena de trabalhos com esse enfoque e todos dirigidos apenas a simulações numéricas desprovidas de análise numérica. No ensino médio o conteúdo de Calorimetria é pouco estudado, na grande maioria das vezes é visto no ensino básico apenas os conceitos teóricos dos problemas de transmissão de calor, negligenciando assim o conteúdo matemático. Uma das grandes dificuldades apontadas pelo professor do ensino básico em trabalhar os conteúdos de Calorimetria no ensino médio está diretamente relacionada a falta de materiais didáticos que abordem o conteúdo matemático (geralmente equações diferenciais) de forma mais acessível, buscando no enfoque numérico uma alternativa auxiliar para o ensino. Devido a isto, muitos professores acabam não explorando adequadamente o conteúdo matemático presente neste imenso e importante ramo da física.

Diante desta problemática, nosso trabalho busca suprir parte dessa necessidade, pois apresentamos uma interessante abordagem numérica para o problema de transmissão de calor por convecção descrito pela Lei de Resfriamento de Newton, de forma bem didática e ilustrativa, mesclando com um pouco de análise numérica, inclusive apresentamos dois resultados interessantes que provam a estabilidade exponencial da solução numérica (Teorema 4.1) e a limitação do erro global (Teorema 4.2). Acreditamos que estes resulta-

dos numéricos referentes a Lei de Resfriamento de Newton são inéditos e que servirão de base para futuras investigações.

Iniciamos o Capítulo 1, com algumas preliminares referentes aos aspectos físicos e numéricos abordados neste trabalho.

No Capítulo 2, fazemos um rápido comentário da Lei de Resfriamento de Newton e mostramos os passos usados para encontrarmos a solução analítica.

No Capítulo 3, estudamos o Método Numérico de Diferenças Finitas, começando pelo estudo da Série de Taylor até as questões referentes a consistência, estabilidade e convergência.

No Capítulo 4, abordamos as questões referentes a modelagem computacional do problema, usando os conceitos estudados nos capítulos anteriores e apresentamos os principais resultados deste trabalho que são os Teoremas 4.1 e 4.2, seguidos de simulações numéricas.

Finalmente no Capítulo 5, apresentamos alguns problemas em aberto que pretendemos analisar futuramente.

# Capítulo 1

## CONCEITOS PRELIMINARES

Neste capítulo faremos uma introdução de alguns conceitos que serão necessários para o desenvolvimento dos próximos capítulos.

### 1.1 Alguns Aspectos Físicos

Sempre que existir um gradiente de temperatura no interior de um sistema ou que dois sistemas a diferentes temperaturas forem colocados em contato, haverá transferência de energia. O processo pelo qual a energia é transportada chama-se *transmissão de calor* (Kreith e Bohn, 2003; Kern 1987). Há três modos distintos de transmissão de calor: *condução, convecção e radiação*.

#### 1.1.1 Transmissão de Calor por Condução

A condução é um processo pelo qual o calor flui de uma região de temperatura mais alta para outra de temperatura mais baixa, dentro de um meio (sólido, líquido ou gasoso) ou entre meios diferentes em contato físico direto. Na transmissão de calor por condução, a energia é transmitida por meio de comunicação molecular direta, sem apreciável deslocamento das moléculas. Quando as moléculas em uma região adquirem uma energia cinética maior do que a das moléculas da região adjacente, por motivo de uma diferença de temperatura, as moléculas possuidoras de maior energia transmitirão parte de sua energia para as moléculas da região de temperatura mais baixa. A transferência de energia pode ocorrer pelo impacto elástico (como nos fluidos) ou por difusão de elétrons de movimento rápido das regiões de alta para as de baixa temperatura (como nos metais).

A relação básica para a transmissão de calor por condução foi proposta por Fourier em 1822. A equação elementar para a condução unidimensional no regime permanente denominada *Lei de Fourier* é:

$$q_{\kappa} = -\kappa A \frac{d\theta}{dx}, \quad (1.1)$$

onde:

- $q_{\kappa}$  : é o calor transmitido por condução por unidade de tempo (  $Kcal/h$  em unidades usuais ou  $J/s = W$  no SI);
- $\kappa$  : é a condutividade térmica do material ( $Kcal/(h \cdot m \cdot ^{\circ}C)$ );
- $A$  : é a área da secção através da qual o calor flui, medido perpendicularmente à direção

do fluxo ( $m^2$ );

•  $d\theta/dx$  : é o gradiente de temperatura na secção ao longo de  $x$  ( $^{\circ}C/m$  em unidades usuais ou  $K/m$ ).

### 1.1.2 Transmissão de Calor por Convecção

A convecção é um processo de transporte de energia pela ação combinada da condução de calor, armazenamento de energia e movimento de mistura. Ela é importante principalmente como mecanismo de transferência de energia entre uma superfície sólida e um líquido ou gás em movimento. A transferência de energia por convecção de uma superfície cuja a temperatura está acima daquela do fluido envolvente tem lugar em várias etapas. Primeiro, o calor flui por condução da superfície para as partículas adjacentes do fluido. A energia assim transferida serve para aumentar a temperatura e a energia interna dessas partículas fluidas (energia intrínseca de um elemento de matéria, em virtude da velocidade e da posição relativa das moléculas). Então, as partículas fluidas se movem para uma região de menor temperatura no fluido, onde se misturam e transferem uma parte de sua energia para outra partícula. O fluxo, nesse caso, é tanto de fluido com de energia. A energia é, em realidade, armazenada nas partículas fluidas e transportada como resultante do movimento de massa destas.

A transmissão de calor por convecção é classificada, de acordo com a forma com que o fluxo é gerado, em convecção natural e convecção forçada. Quando o movimento do fluido ocorre meramente como resultado das diferenças de densidade causadas pelos gradientes de temperatura, fala-se de convecção natural ou livre. Quando o movimento do fluido é induzido por algum agente externo (por exemplo bomba ou ventilador), o processo é chamado de convecção forçada.

O calor transmitido por unidade de tempo por convecção entre uma superfície e um fluido pode ser calculada pela seguinte relação denominada *Lei de Resfriamento de Newton*

$$\frac{d\theta}{dt} = -h_c A \Delta\theta, \quad (1.2)$$

onde:

- $d\theta/dt$  : é o calor transmitido por unidade de tempo por convecção ( $Kcal/h$  em unidades usuais ou  $W$  no SI);
- $h_c$  : é a o coeficiente médio de transmissão de calor por meio de convecção ( $Kcal/(h \cdot m^2 \cdot ^{\circ}C)$  ou  $W/(m^2 \cdot K)$ );
- $A$  : é a área de transmissão de calor ( $m^2$ );
- $\Delta\theta$  : é a diferença entre a temperatura da superfície  $\theta$  e a do fluido envolvente  $\theta_a$ , em um local especificado (geralmente bastante afastado da superfície)  $x$  ( $^{\circ}C$  em unidades usuais ou  $K$  no SI).

### 1.1.3 Transmissão de Calor por Radiação

A radiação é um processo pelo qual o calor é transmitido de um corpo a alta para um de mais baixa temperatura, quando tais corpos estão separados no espaço, ainda que exista vácuo entre eles. A radiação térmica ocorre por ondas eletromagnéticas, que podem transportar energia através de um meio transparente ou através do espaço. A energia transmitida dessa matéria é chamada de *calor radiante*.

A quantidade de energia que deixa a superfície como calor radiante depende da temperatura absoluta e da natureza da superfície. Um “irradiador perfeito” ou “corpo negro” emite energia radiante à vazão  $q_r$ , cuja relação denominada *Lei de Stefan-Boltzmann* é dada por:

$$q_r = \sigma A_e T_e^4, \quad (1.3)$$

onde:

- $q_r$  : é a energia radiante (  $Kcal/h$  em unidades usuais);
- $\sigma$  : é a constante dimensional com valor de  $4,88 \cdot 10^{-8} Kcal/(h \cdot m^2 \cdot K^4)$ ;
- $A_e$  : é a área da superfície do corpo emissor de calor ( $m^2$ );
- $T_e$  : é a temperatura da superfície emissora.

## 1.2 Alguns Aspectos Numéricos

### 1.2.1 Série de Taylor

Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função derivável até a ordem  $n + 1$  no intervalo aberto  $(a, b)$  com  $\frac{d^{(n+1)}f}{dx^{(n+1)}}$  contínua em  $[a, b]$  e seja  $x \in [a, b]$ . Então existe um  $\xi \in (a, b)$  tal que

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + h \frac{df(x)}{dx} + \frac{h^2}{2!} \frac{d^2 f(x)}{dx^2} + \frac{h^3}{3!} \frac{d^3 f(x)}{dx^3} \\ &+ \dots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} \frac{d^{(n-1)} f(x)}{dx^{(n-1)}} + \frac{h^n}{n!} \frac{d^n f(x)}{dx^n} + \mathcal{O}(h^{n+1}), \end{aligned} \quad (1.4)$$

onde

$$\mathcal{O}(h^{n+1}) = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \frac{d^{(n+1)} f(\xi)}{dx^{(n+1)}}, \quad (1.5)$$

é denominado erro de Lagrange. A Série de Taylor relaciona os valores da função e suas derivadas, num ponto  $x$ , com valores dessa mesma função numa vizinhança de  $x$ . Quando  $x = 0$ , chamamos simplesmente de Série de Mac-Laurin.

### 1.2.2 Ordem de Aproximação de uma Fórmula de Diferença

Seja  $\mathcal{F}(x, h)$  uma fórmula de diferença para aproximação da derivada de ordem  $n$  de uma função  $f(x)$  com erro  $\mathcal{E}(x, h)$ . Então:

$$\frac{d^n f(x)}{dx^n} = \mathcal{F}(x, h) + \mathcal{E}(x, h). \quad (1.6)$$

Dizemos que a fórmula  $\mathcal{F}(x, h)$  é de ordem  $p$  se  $\mathcal{E}(x, h) = h^p \mathcal{R}(x)$ , onde  $\mathcal{R}(x)$  não depende de  $h$ . Nesse caso usamos a notação  $\mathcal{E}(x, h) = O(h^p)$ . Essa notação significa que  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathcal{E}(x, h)}{h^p}$  é uma constante finita. Por exemplo no caso da fórmula centrada temos que:

$$\mathcal{F}(x, h) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \quad \text{e} \quad \mathcal{E}(x, h) = -\frac{h^2}{3!} \frac{d^3 f(\xi)}{dx^3}, \quad (1.7)$$



de forma que essa fórmula é de segunda ordem  $O(h^2)$ .

### 1.2.3 Erro de Truncamento Local e Erro Global

O erro cometido ao substituirmos a solução exata na equação de diferenças é chamado de *erro de truncamento local*. Então denotando  $f(x_i)$  a solução exata calculada no ponto  $x_i$  da malha e por  $\tau_i$  o erro de truncamento local cometido no cálculo de  $f_{i+1}$ , definimos

$$\tau_i := \frac{f(x_{i+1}) - f_{i+1}}{h}, \quad (1.8)$$

ponderado pelo passo  $h$  da malha. Isto nos permite dizer que o erro de truncamento local é uma medida de quanto a solução da equação diferencial discretizada na malha deixa de satisfazer a equação de diferenças.

Definimos o *erro global* em um ponto  $x_i$ , por

$$e_i := f(x_i) - f_i, \quad (1.9)$$

isto é, a diferença entre a solução exata no ponto  $x_i$  da malha e a solução aproximada. Note que diferentemente do caso do erro de truncamento local, a definição de erro global não assume que os valores anteriores utilizados no cálculo de  $f_i$  são exatos, e portanto o erro global como o nome sugere, pode conter toda espécie de erro que contamine a solução incluindo o erro de arredondamento do computador.

## 1.3 Alguns Aspectos Computacionais - MATLAB

Atualmente, o MATLAB é definido como um sistema interativo e uma linguagem de programação para computação técnica e científica em geral, integrando a capacidade de fazer cálculos, visualização gráfica e programação.

### 1.3.1 Sintaxe e Comentários

- “clear” : Remove todas as variáveis do espaço de trabalho;
- “clc” : Limpa a janela de comandos e coloca o cursor na posição inicial;
- “input” : Permite entrada de dados durante a execução do programa via teclado;
- “x = a : h : b” : Cria um vetor  $x$  começando com o valor  $a$ , incrementando-se do valor  $h$  até atingir o valor último ou o valor mais próximo possível de  $b$ ;
- “ = ” : Atribui um valor a uma variável;
- “ + ” : Adição;
- “ - ” : Subtração;
- “ \* ” : Multiplicação escalar;
- “ / ” : Divisão;
- “ , ” : Separa comandos dados em uma mesma linha;
- “ ; ” : Separa comandos dados em uma mesma linha. Se o último caractere da declaração é um ponto e vírgula, a impressão na tela é suprimida, mas a tarefa é realizada;
- “ % ” : Todo e qualquer caractere depois do símbolo de porcentagem é tomado como comentário;
- “abs(x)” : Valor absoluto de  $x$ ;

- “exp(x)” : Exponencial  $e^x$ ;

### 1.3.2 Estrutura de Repetição

A estrutura de repetição faz com que uma sequência de comandos seja executada repetidamente até que uma dada condição de interrupção seja satisfeita.

A estrutura **for-end** permite que um grupo de comandos seja repetido um número específico de vezes. Sua sintaxe é:

```
for < varivel >=< arranjo >  
< comandos >  
end
```

onde **<variável>** é a variável de controle que assume todos os valores contidos no vetor linha **<arranjo>**. Assim, o número de repetições da lista **<comandos>** é igual ao número de elementos no vetor **<arranjo>**. A variável de controle não pode ser redefinida dentro da estrutura **for-end**. O laço **for** é o controlador de fluxo mais simples e usado na programação MATLAB.

### 1.3.3 Anotações no Gráfico

O MATLAB possui comandos de fácil utilização para adicionar informações em um gráfico. Vejamos alguns deles:

- “figure” : Mostra a janela gráfica;
- “plot” : Comando para plotar gráficos bidimensionais;
- “grid” : Linhas de grade;
- “title” : Título do gráfico;
- “xlabel” : Título do eixo X;
- “ylabel” : Título do eixo Y.

## Capítulo 2

# TRANSFERÊNCIA DE CALOR POR CONVECÇÃO

*A convecção é um processo que consiste basicamente na transferência de calor envolvendo corpos fluidos (líquidos ou gases). A convecção é sinal de movimento, podendo ser natural ou forçada. Este processo de transferência de calor é modelado pela Lei de Resfriamento de Newton.*

### 2.1 Lei de Resfriamento de Newton - LRN

O estudo de Equações Diferenciais Ordinárias, ou simplesmente EDO's, aparece como uma das principais aplicações do estudo de derivadas e integrais para funções de uma variável. São inúmeras as aplicações de Equações Diferenciais, em diversas áreas, como: Física, Química, Biologia, Economia, Administração, entre outras. Este estudo começa no século XVII com os mesmos personagens responsáveis pela criação do Cálculo: Newton e Leibniz, motivados, em princípio, por problemas envolvendo a física. A preocupação dominante desde aquela época até meados do século XIX era a obtenção de soluções das equações em forma explícita.

Em 1701, Newton publicou (em latim e de forma anônima) na Phil. Trans. da Royal Society um artigo curto intitulado “Scala Graduum Caloris”, no qual ele estabeleceu uma relação entre a temperatura  $\theta$  e o tempo  $t$  em processos de resfriamento. Ele não escreve qualquer fórmula, mas expressa verbalmente sua lei de resfriamento:

Segundo Besson (apud Newton, 1701, p. 03),

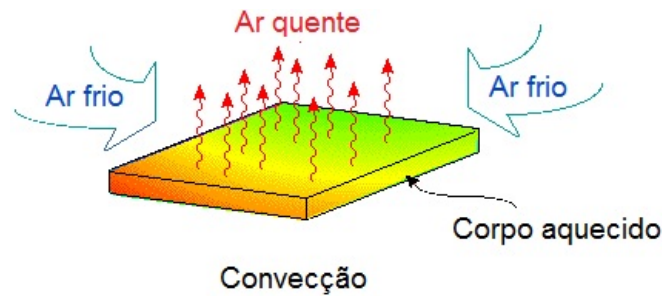
Ele escreve:

*“ O calor que um ferro quente, num determinado tempo, comunica com corpos frios perto dele, isto é, o calor que o ferro perde num determinado período de tempo é como todo o calor do ferro.”*

Newton observou que sua lei pode ser deduzida matematicamente a partir de uma relação linear entre a taxa de mudança de temperatura e a diferença de temperatura entre o objeto e o ambiente, ou seja, o método estava baseado no que hoje é conhecido como a Lei de Resfriamento de Newton. Uma ótima descrição desse trabalho foi feita por French (1993).

A Lei de Resfriamento de Newton analisa o tempo que um corpo finito (capacidade térmica finita) leva para atingir o equilíbrio térmico quando em contato com um reservatório térmico (capacidade térmica infinita) e a influência de alguns fatores nesse tempo. Vejamos a ilustração abaixo.

Figura 2.1: Corpo Finito



Para isso devemos considerar as seguintes hipóteses:

- i) A temperatura  $\theta$  é a mesma em todo o corpo e depende do tempo  $t$ ;
- ii) A temperatura  $\theta_a$  do meio ambiente (reservatório térmico) é constante com o tempo e é a mesma em todo meio ambiente;
- iii) O fluxo de calor através das paredes do corpo que é uma taxa de variação, pode ser representado pela derivada  $d\theta/dt$ , ou seja, a variação da temperatura do corpo em relação ao tempo, é proporcional à diferença entre as temperaturas do corpo e do meio ambiente, isto é,

$$\frac{d\theta}{dt} = -k(\theta - \theta_a), \quad (2.1)$$

onde  $k$  é a constante de convecção. É importante ressaltar que “este modelo foi considerado por Newton, estudando o caso de uma bola de metal aquecida, e é por isso que a hipótese 3 acima é chamada de Lei de Resfriamento de Newton” (FIGUEIREDO et al., 2008). Esta lei é válida apenas aproximadamente e de acordo com O’Sullivan (1990), ela pode ser aplicada com razoável sucesso em situações onde a temperatura do corpo não é muito diferente da temperatura ambiente e quando correntes de ar auxiliam o resfriamento (convecção forçada).

Na Lei de Resfriamento de Newton, a temperatura depende, exclusivamente, da variação do tempo. No entanto, existe um modelo mais completo que considera a temperatura variando de acordo com a posição  $x$  no instante de tempo  $t$ . Por exemplo, ao analisarmos a transferência de calor por condução em uma barra de metal, a temperatura dessa barra pode ser diferente dependendo do ponto onde a aferição está sendo feita. Dessa forma, a temperatura varia em função da posição e do tempo, ou seja, a temperatura é dada pela função  $\theta(x, t)$ . A equação obtida para este modelo é conhecida por Equação do Calor e expressa por

$$\theta_t(x, t) = K\theta_{xx}(x, t), \quad (2.2)$$

onde  $K$  é a constante de difusividade térmica. Para mais informações consulte Figueiredo (2005).

## 2.2 Solução Analítica da LRN

O método que é apresentado a seguir se aplica a equações diferenciais ordinárias de 1ª ordem de variáveis separáveis, tal como a equação que rege a Lei de Resfriamento de Newton.

Com efeito, considerando a equação (2.1) observamos que

$$\frac{d\theta}{dt} = -k(\theta - \theta_a) \iff \frac{d\theta}{\theta - \theta_a} = -k dt. \quad (2.3)$$

Integrando ambos os membros da equação acima (lado direito) obtemos

$$\int \frac{d\theta}{\theta - \theta_a} = -k \int dt, \quad (2.4)$$

e conseqüentemente,

$$\ln |\theta - \theta_a| - \ln C = -kt. \quad (2.5)$$

Desde que  $\theta > \theta_a$ , segue que

$$\theta(t) = \theta_a + Ce^{-kt}. \quad (2.6)$$

Quando conhecemos a temperatura inicial do corpo, isto é,  $\theta_0 = \theta(0)$ , podemos obter a constante  $C$  que aparece na solução. Sendo assim, a solução do problema de valor inicial é dada por

$$\theta(t) = \theta_a + (\theta_0 - \theta_a)e^{-kt}. \quad (2.7)$$

Note que a solução analítica (2.7) para a equação diferencial depende da temperatura inicial  $\theta_0$  do corpo, da temperatura do meio ambiente  $\theta_a$  e da constante  $k$ . Para mais detalhes da resolução analítica consulte Bronson (1997) ou Boyce et al. (2010).

# Capítulo 3

## MÉTODO NUMÉRICO

“A essência dos métodos numéricos está na discretização do contínuo. É esta discretização que torna finito o problema e portanto viabiliza sua solução através dos computadores.” (CUNHA, 1993).

### 3.1 Método de Diferenças Finitas

A ideia geral do método de diferenças finitas é a discretização das variáveis e a substituição das derivadas presentes na equação diferencial por aproximações envolvendo somente valores numéricos da função. Na prática substituem-se as derivadas pela razão incremental que converge para o valor da derivada quando o incremento tende a zero e assim dizemos então que o problema foi discretizado. A seguir, estabelecemos alguns conceitos referentes a discretização.

**Definição 3.1.1.** Chamamos partição de  $[a, b]$  qualquer  $P \subset [a, b]$  finito tal que  $a, b \in P$ . O conjunto das partições de  $[a, b]$  é denotado por  $\mathcal{P}[a, b]$ .

Se  $P \in \mathcal{P}[a, b]$ , então ao escrevermos  $P = \{t_0, t_1, \dots, t_N, t_{N+1}\}$  deixamos subentendido que  $a = t_0, t_1, \dots, t_n, \dots, t_N, t_{N+1} = b$ . Então, seja  $[0, T]$  um intervalo qualquer e  $\Delta t$  um parâmetro real positivo. Definimos a partição de passo  $\Delta t$  associada ao intervalo  $[0, T]$  pelo conjunto de pontos

$$P : 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n < \dots < t_N < t_{N+1} = T,$$

onde  $\Delta t = T/(N + 1)$  com  $n = 0, 1, 2, \dots, N, N + 1$ .

A ferramenta matemática essencial no cálculo de aproximações para as derivadas é a Série de Taylor, que relaciona valores da função e suas derivadas num ponto  $t$  com valores dessa mesma função numa vizinhança de  $t$ , ou seja, com valores de  $\theta(t \pm \Delta t)$ . Se  $\theta(t)$  tem derivadas até a ordem  $(n + 1)$  em  $t$ , então podemos escrever:

$$\theta(t + \Delta t) = \theta(t) + \Delta t \frac{d\theta(t)}{dt} + \frac{\Delta t^2}{2!} \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \dots + \frac{\Delta t^n}{n!} \frac{d^n\theta(t)}{dt^n} + \frac{\Delta t^{(n+1)}}{(n+1)!} \frac{d^{(n+1)}\theta(\eta_1)}{dt^{(n+1)}} \quad (3.1)$$

com  $\eta_1 \in [t, t + \Delta t]$  e

$$\theta(t - \Delta t) = \theta(t) - \Delta t \frac{d\theta(t)}{dt} + \frac{\Delta t^2}{2!} \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} - \dots - \frac{\Delta t^n}{n!} \frac{d^n\theta(t)}{dt^n} + \frac{\Delta t^{(n+1)}}{(n+1)!} \frac{d^{(n+1)}\theta(\eta_2)}{dt^{(n+1)}} \quad (3.2)$$

com  $\eta_2 \in [t - \Delta t, t]$ . Manipulando adequadamente as Séries de Taylor (3.1) e (3.2), com os devidos truncamentos, temos motivação para a construção dos operadores de diferenças progressivas, regressivas e centradas.

### Operador de Diferenças Progressivas

Para encontrarmos o operador de diferenças progressivas para a derivada de primeira ordem, consideramos o desenvolvimento da Série de Taylor até a terceira parcela, isto é, fazemos um truncamento escolhendo  $n = 1$  na equação (3.1) para obtermos

$$\theta(t + \Delta t) = \theta(t) + \Delta t \frac{d\theta(t)}{dt} + \mathcal{O}(\Delta t^2) \quad (3.3)$$

e conseqüentemente

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = \frac{\theta(t + \Delta t) - \theta(t)}{\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t), \quad (3.4)$$

onde  $\mathcal{O}(\Delta t) := -\frac{\mathcal{O}(\Delta t^2)}{\Delta t}$ . Isto nos motiva a usarmos a seguinte notação

$$d_t \theta_n := \frac{\theta_{n+1} - \theta_n}{\Delta t}, \quad (3.5)$$

com resíduo da ordem de  $\mathcal{O}(\Delta t)$  no tempo.

### Operador de Diferenças Regressivas

Para encontrarmos o operador de diferenças regressivas para a derivada de primeira ordem, consideramos o desenvolvimento da Série de Taylor até a terceira parcela, isto é, fazemos um truncamento escolhendo  $n = 1$  na equação (3.2) para obtermos

$$\theta(t - \Delta t) = \theta(t) - \Delta t \frac{d\theta(t)}{dt} + \mathcal{O}(\Delta t^2) \quad (3.6)$$

e conseqüentemente

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = \frac{\theta(t) - \theta(t - \Delta t)}{\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t), \quad (3.7)$$

onde  $\mathcal{O}(\Delta t) := \frac{\mathcal{O}(\Delta t^2)}{\Delta t}$ . Isto nos motiva a usarmos a seguinte notação

$$\bar{d}_t \theta_n := \frac{\theta_n - \theta_{n-1}}{\Delta t}, \quad (3.8)$$

com resíduo da ordem de  $\mathcal{O}(\Delta t)$  no tempo.

### Operador de Diferenças Centradas

Para encontrarmos o operador de diferenças centradas para a derivada de primeira ordem, consideramos o desenvolvimento da Série de Taylor até a quarta parcela, isto é, fazemos um truncamento escolhendo  $n = 2$  nas equações (3.1) e (3.2) para obtermos

$$\theta(t + \Delta t) = \theta(t) + \Delta t \frac{d\theta(t)}{dt} + \frac{\Delta t^2}{2!} \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \mathcal{O}_1(\Delta t^3) \quad (3.9)$$

$$\theta(t - \Delta t) = \theta(t) - \Delta t \frac{d\theta(t)}{dt} + \frac{\Delta t^2}{2!} \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} - \mathcal{O}_2(\Delta t^3). \quad (3.10)$$

Subtraindo as equações acima obtemos

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = \frac{\theta(t + \Delta t) - \theta(t - \Delta t)}{2\Delta t} + O(\Delta t), \quad (3.11)$$

onde  $O(\Delta t^2) := \frac{\mathcal{O}_1(\Delta t^3) + \mathcal{O}_2(\Delta t^3)}{\Delta t}$ . Isto nos motiva a usarmos a seguinte notação

$$\frac{d_t + \bar{d}_t}{2} \theta_n := \frac{\theta_{n+1} - \theta_{n-1}}{2\Delta t}, \quad (3.12)$$

com resíduo da ordem de  $O(\Delta t^2)$  no tempo. Para mais informações consulte Cuminato et al. (1996).

## 3.2 Consistência, Estabilidade e Convergência

Alguns conceitos são muito importantes para um melhor entendimento da dinâmica do Método de Diferenças Finitas. São os conceitos de consistência, estabilidade e convergência. O conceito de estabilidade é usado em diversos contextos e possui diferentes definições, embora todos estejam relacionados entre si. Por exemplo, em equações diferenciais ele quer dizer que pequenas alterações nos dados iniciais (e na própria equação) levam também a pequenas alterações na solução. Em métodos numéricos, que a solução numérica aproximada fique limitada, a medida que avançamos no tempo. Ambas seguem a mesma ideia, mas uma envolve a variação no tamanho do passo e a outra no tempo. Por outro lado, dizemos que um esquema numérico em diferenças finitas é consistente se o uso dos operadores de diferenças finitas nos fornece a aproximação do problema que de fato estamos discretizando, isto é, o método não introduz nenhum termo além dos já presentes na equação diferencial ou ainda, no limite com  $\Delta t \rightarrow 0$ , recuperamos o modelo contínuo. Nesse contexto temos as seguintes definições:

**Definição 3.2.1.** *O erro global no ponto  $t_n$  é definido por:*

$$e_n := \theta(t_n) - \theta_n,$$

onde  $\theta(t_n)$  é a solução exata calculada em cada ponto da discretização e  $\theta_n$  é a solução numérica aproximada.

**Definição 3.2.2.** *Um esquema numérico de diferenças finitas é estável se existe uma constante  $M > 0$  tal que,  $\|e_n\| < M$  para todo  $n \in N$ .*

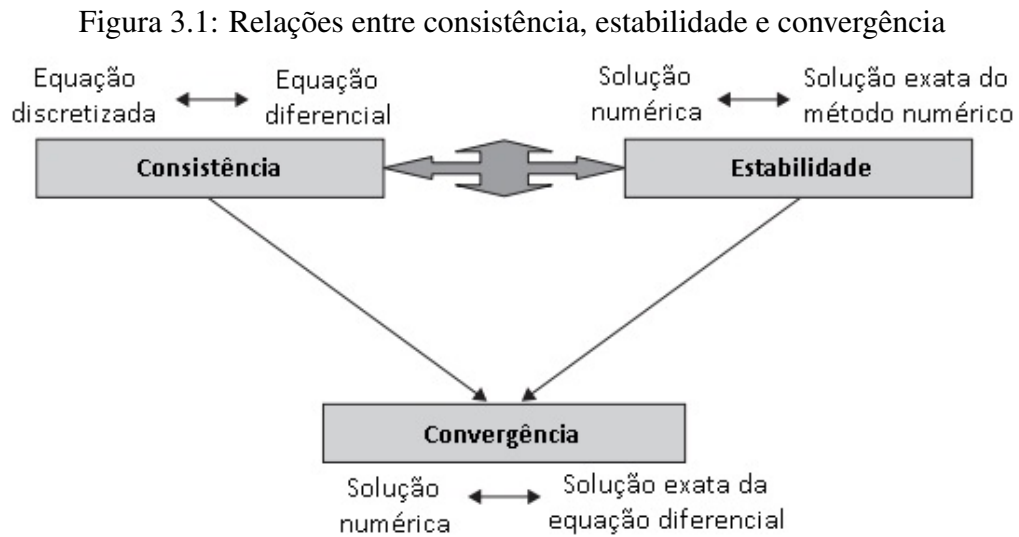
Quando formulamos um método numérico, o que se deseja é que haja a convergência da solução numérica (solução do método) para a solução da equação diferencial, mas isto é normalmente difícil de estabelecer porque o método numérico é definido por uma relação de recorrência, enquanto que a equação diferencial envolve uma função diferenciável. Contudo, consistência e estabilidade, são bem mais fáceis de serem provados do que a convergência, por isso, a convergência geralmente é mostrada através do Teorema de Equivalência de Lax.



**Teorema 3.1** (Equivalência de Lax). *Um esquema numérico de diferenças finitas é convergente se, e somente se, é consistente e estável.*

*Demonstração.* Ver Stkiwerda [13]. Cap. 10. □

O fluxograma abaixo, apresenta uma ideia bem prática deste teorema.



Este teorema é bastante útil pois basta verificar a consistência e a estabilidade para obtermos a convergência. Também é interessante ver que este teorema é de equivalência, ou seja, se queremos que um método seja convergente ele necessariamente deve ser consistente e estável.

De posse desses resultados conseguimos garantir que um esquema numérico em diferenças finitas converge para a solução exata.

# Capítulo 4

## MODELAGEM COMPUTACIONAL

“Os modelos de simulação fornecem a resposta de um sistema a um conjunto de informações de entrada, que incluem regras de decisão, permitindo ao tomador de decisão examinar as consequências de diversos cenários de um sistema existente ou de um sistema em projeto.” (SOARES, 1992).

### 4.1 Discretização do Domínio Temporal $[0, T]$

Consideramos um intervalo de tempo  $[0, T]$ , o qual foi dividido em  $(N + 1)$  partes iguais de comprimento  $\Delta t = T/(N + 1)$ , resultando num total de  $(N + 2)$  pontos. Com isso, obtemos uma partição uniforme de passo  $\Delta t$  dada por:

$$P : 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = n\Delta t < \dots < t_N < t_{N+1} = T,$$

com  $n = 0, 1, 2, \dots, N, N + 1$ . De acordo como mostra a ilustração abaixo.

Figura 4.1: Domínio Contínuo vs. Domínio Discretizado



### 4.2 Discretização da Lei do Resfriamento de Newton

Encontrar a solução analítica do problema contínuo não é tão difícil como podemos ver no Capítulo 2, bastou usarmos as técnicas de resolução de equações diferenciais ordinárias. Mas por outro lado, em se tratando de soluções numéricas, podemos obter uma solução bem simples usando os operadores de diferenças finitas, estudados no capítulo anterior.

Consideramos a equação diferencial ordinária, denominada Lei do Resfriamento de Newton

$$\frac{d\theta}{dt} = -k(\theta - \theta_a). \quad (4.1)$$

Usando o operador de diferenças finitas progressiva para a aproximação da derivada de 1ª ordem no tempo, obtemos a seguinte equação

$$\frac{\theta_{n+1} - \theta_n}{\Delta t} = -k(\theta_n - \theta_a). \quad (4.2)$$

Segue daí que

$$\theta_{n+1} = (1 - k\Delta t)\theta_n + k\Delta t\theta_a, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (4.3)$$

Percebemos que o uso desse operador, nos fornece um esquema numérico explícito, isto é, a solução numérica no passo de tempo seguinte  $\theta_{n+1}$ , depende apenas da solução numérica no passo de tempo anterior  $\theta_n$ .

A seguir, usamos a recursividade sobre  $n$  para provarmos o principal resultado dessa seção, ou seja, o teorema que garante o decaimento exponencial da solução numérica 4.3, tal como ocorre no contínuo.

**Teorema 4.1** (Estabilidade Exponencial). *A solução numérica do esquema (4.3) decai exponencialmente para  $\theta_a$  com  $0 < \Delta t < 1/k$  e  $n \rightarrow \infty$ , ou seja,*

$$\theta_n = \theta_a + (\theta_0 - \theta_a)(1 - k\Delta t)^n,$$

onde  $\Delta t = T/(N + 1)$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

*Demonstração.* Consideramos o esquema numérico em diferenças finitas (4.3)

$$\theta_{n+1} = (1 - k\Delta t)\theta_n + k\Delta t\theta_a$$

e usamos a recursividade sobre  $n \in \mathbb{N}$ . Portanto, segue que:

Para  $n = 0$ ,

$$\theta_1 = (1 - k\Delta t)\theta_0 + k\Delta t\theta_a.$$

Para  $n = 1$ ,

$$\theta_2 = (1 - k\Delta t)\theta_1 + k\Delta t\theta_a = (1 - k\Delta t)^2\theta_0 + (1 - k\Delta t)k\Delta t\theta_a + k\Delta t\theta_a.$$

Para  $n = 2$ ,

$$\begin{aligned} \theta_3 &= (1 - k\Delta t)\theta_2 + k\Delta t\theta_a \\ &= (1 - k\Delta t)^3\theta_0 + (1 - k\Delta t)^2k\Delta t\theta_a + (1 - k\Delta t)k\Delta t\theta_a + k\Delta t\theta_a. \end{aligned}$$

e assim, sucessivamente.

:

:

Para  $n = m$  temos,

$$\begin{aligned}\theta_m &= (1 - k\Delta t)\theta_{m-1} + k\Delta t\theta_a \\ &= (1 - k\Delta t)^m\theta_0 + (1 - k\Delta t)^{m-1}k\Delta t\theta_a + \dots + (1 - k\Delta t)k\Delta t\theta_a + k\Delta t\theta_a.\end{aligned}$$

De forma geral, afirmamos que

$$\theta_n = (1 - k\Delta t)^n\theta_0 + \sum_{i=0}^{n-1} (1 - k\Delta t)^i k\Delta t\theta_a, \quad \forall n \in \mathbb{N} - \{0\}. \quad (4.4)$$

Agora provamos por indução matemática que a fórmula recursiva (4.4), é válida para todo  $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ . De fato, para  $n = 1$  o resultado é trivial. Agora supomos que é válida para  $n = m \in \mathbb{N} - \{0\}$ , ou seja,

$$\theta_m = (1 - k\Delta t)^m\theta_0 + \sum_{i=0}^{m-1} (1 - k\Delta t)^i k\Delta t\theta_a, \quad (4.5)$$

e provamos que vale para  $n = m + 1$ . Com efeito, segue de (4.3) que

$$\theta_{m+1} = (1 - k\Delta t)\theta_m + k\Delta t\theta_a. \quad (4.6)$$

Substituindo (4.5) em (4.6) obtemos

$$\begin{aligned}\theta_{m+1} &= (1 - k\Delta t)\left((1 - k\Delta t)^m\theta_0 + \sum_{i=0}^{m-1} (1 - k\Delta t)^i k\Delta t\theta_a\right) + k\Delta t\theta_a \\ &= (1 - k\Delta t)^{m+1}\theta_0 + \sum_{i=0}^{m-1} (1 - k\Delta t)^{i+1} k\Delta t\theta_a + k\Delta t\theta_a.\end{aligned} \quad (4.7)$$

Fazendo a mudança de variável  $j = i + 1$  temos

$$\theta_{m+1} = (1 - k\Delta t)^{m+1}\theta_0 + \sum_{j=1}^m (1 - k\Delta t)^j k\Delta t\theta_a + k\Delta t\theta_a \quad (4.8)$$

e conseqüentemente segue o resultado

$$\theta_{m+1} = (1 - k\Delta t)^{m+1}\theta_0 + \sum_{j=0}^m (1 - k\Delta t)^j k\Delta t\theta_a. \quad (4.9)$$

Portanto, provamos por indução que a fórmula recursiva (4.4) é válida para todo  $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ .

A fim de provarmos o decaimento exponencial da solução numérica, adicionamos e subtraímos o somatório

$$\sum_{i=0}^{n-1} (1 - k\Delta t)^i \theta_a$$

na equação recursiva (4.4). Com isso, obtemos

$$\begin{aligned}
\theta_n &= (1 - k\Delta t)^n \theta_0 + \sum_{i=0}^{n-1} (1 - k\Delta t)^i k\Delta t \theta_a + \sum_{i=0}^{n-1} (1 - k\Delta t)^i \theta_a - \sum_{i=0}^{n-1} (1 - k\Delta t)^i \theta_a \\
&= (1 - k\Delta t)^n \theta_0 + \sum_{i=0}^{n-1} (1 - k\Delta t)^i \theta_a - \sum_{i=0}^{n-1} (1 - k\Delta t)^i (1 - k\Delta t) \theta_a \\
&= (1 - k\Delta t)^n \theta_0 + \sum_{i=0}^{n-1} (1 - k\Delta t)^i \theta_a - \sum_{i=0}^{n-1} (1 - k\Delta t)^{i+1} \theta_a. \tag{4.10}
\end{aligned}$$

Observamos ainda que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n-1} (1 - k\Delta t)^i \theta_a &= \theta_a + (1 - k\Delta t)\theta_a + (1 - k\Delta t)^2\theta_a + \dots + (1 - k\Delta t)^{n-1}\theta_a \\
\sum_{i=0}^{n-1} (1 - k\Delta t)^{i+1} \theta_a &= (1 - k\Delta t)\theta_a + (1 - k\Delta t)^2\theta_a + \dots + (1 - k\Delta t)^n\theta_a.
\end{aligned}$$

Subtraindo as duas equações acima obtemos

$$\sum_{i=0}^{n-1} (1 - k\Delta t)^i \theta_a - \sum_{i=0}^{n-1} (1 - k\Delta t)^{i+1} \theta_a = \theta_a - (1 - k\Delta t)^n \theta_a. \tag{4.11}$$

Finalmente, substituindo (4.11) em (4.10) obtemos o resultado

$$\theta_n = \theta_a + (\theta_0 - \theta_a)(1 - k\Delta t)^n. \tag{4.12}$$

□

**Nota:** O Teorema 4.1, além de provar o decaimento exponencial da solução numérica, também mostra que a solução numérica é de certa forma consistente com a solução exata, pois usando a Série de Taylor é fácil verificar que

$$(1 - k\Delta t)^n \approx e^{-k\Delta t n} = e^{-kt_n} \rightarrow e^{-kt} \quad \text{com} \quad n \rightarrow \infty. \tag{4.13}$$

Por outro lado, a questão da estabilidade numérica do método é verificada através do teorema abaixo, usando a Definição 3.2.1.

**Teorema 4.2.** *O erro global  $e_n$  associado ao esquema numérico (4.3) é limitado.*

*Demonstração.* De fato, sabemos que

$$e_{n+1} = \theta(t_{n+1}) - \theta_{n+1},$$

onde

$$\theta(t_{n+1}) = (1 - k\Delta t)\theta(t_n) + k\Delta t\theta_a + \Delta t\tau_n$$

é a solução exata, aplicada no ponto  $t_{n+1}$  da malha com erro de truncamento  $\tau_n$  e

$$\theta_{n+1} = (1 - k\Delta t)\theta_n + k\Delta t\theta_a.$$

é a solução numérica aproximada em diferenças finitas. Subtraindo as duas equações acima temos

$$e_{n+1} = (1 - k\Delta t)e_n + \Delta t\tau_n.$$

Agora usamos a norma  $\|\cdot\|$  definida pelo valor absoluto, ou seja,

$$\|e_n\| := |e_n|.$$

Segue daí, que

$$\|e_{n+1}\| \leq |1 - k\Delta t|\|e_n\| + \Delta t\|\tau_n\|.$$

Usando a recursividade sobre  $n$  na desigualdade acima obtemos

$$\|e_n\| \leq |1 - k\Delta t|^n \|e_0\| + \sum_{i=0}^{n-1} \Delta t |1 - k\Delta t|^i \|\tau_{n-(1+i)}\|, \quad \forall n \geq 1 + i.$$

Desde que  $0 < 1 - k\Delta t < 1$ , tomamos  $\tau := \max_{0 \leq j \leq n-1} \|\tau_j\|$  e escrevemos

$$\|e_n\| \leq |1 - k\Delta t|^n \|e_0\| + \Delta t n \tau = |1 - k\Delta t|^n \|e_0\| + t_n \tau \leq |1 - k\Delta t|^n \|e_0\| + T\tau.$$

Por construção, escolhemos  $\|e_0\| = 0$  e tomamos  $M = T\tau < \infty$  para obtermos então o resultado esperado, ou seja,

$$\|e_n\| \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

□

Unindo estes dois resultados (Teoremas 4.1 e 4.2) ao Teorema 3.1 temos por garantida a convergência do esquema numérico (4.3).

## 4.3 Programa em MATLAB

A seguir, fazemos uma descrição didática do programa em MATLAB referente a implementação computacional do esquema numérico em diferenças finitas.

**1º Passo:** Primeiramente limpamos a memória e o console.

```
1 clear
2 clc
```

**2º Passo:** Entramos com a variável  $T$  e informamos o número de partes em que queremos dividir o intervalo de tempo  $[0, T]$ .

```

1 T = input('Digite um valor inteiro para o tempo T =')
2 N = input('Digite um valor inteiro para as partições N =')
3 deltat = T/N;
4 t = 0:deltat:T;

```

**3º Passo:** Informamos o valor numérico das constantes que serão usadas no modelo.

```

1 theta_a = input('Digite um valor para a temperatura ambiente
   theta_a =')
2 theta_0 = input('Digite um valor para a temperatura inicial
   theta_0 =')
3 k = input('Digite um valor para a constante de convecção k =')

```

**4º Passo:** Inserimos a solução exata da equação diferencial.

```

1 theta = theta_a + (theta_0 - theta_a)*exp(-k*t);

```

**5º Passo:** Inserimos a fórmula recursiva referente a solução numérica.

```

1 for n = 1:N
2     theta_h(1) = theta_0;
3     theta_h(n+1) = (1-k*deltat)*theta_h(n) + k*deltat*theta_a;
4 end

```

**6º Passo:** Inserimos a fórmula referente erro de aproximação.

```

1 erro = abs(theta - theta_h);

```

**7º Passo:** Por último, plotamos os gráficos da solução exata, da solução numérica e do erro.

```

1 figure
2 plot(t,theta,'b',t, theta_h, 'ro','LineWidth',2.5)
3 grid on
4 legend('Solução Exata','Solução Numérica')
5 xlabel('\bf Tempo (h)')
6 ylabel('\bf Temperatura (°C)')
7 figure
8 plot(t,erro,'r','LineWidth',2.5)
9 xlabel('\bf Tempo (h)')
10 ylabel('\bf Erro')
11 grid on

```

## 4.4 Resultados de Simulações Numéricas

Nesta seção mostramos alguns resultados de simulações numéricas usando o programa descrito acima em 01 (uma) aplicação.

Suponha que um cadáver seja encontrado em condições suspeitas no instante  $t_0 = 0$ . A temperatura do corpo é medida imediatamente pelo perito e o valor obtido é  $\theta_0 = 29^\circ C$ . O corpo é retirado da cena do suposto crime e 02 (duas) horas depois sua temperatura é novamente medida e o valor encontrado é  $\theta_1 = 23^\circ C$ . O crime parece ter ocorrido durante a madrugada e o corpo foi encontrado pela manhã bem cedo. A perícia então faz a suposição adicional de que a temperatura do meio ambiente entre a hora da morte  $t_m$  e a hora em que o cadáver foi encontrado  $t_0$  tenha se mantido mais ou menos constante  $T \approx 20^\circ C$ . A perícia sabe também que a temperatura normal de um ser humano vivo é de  $37^\circ C$ . Com esses dados como a perícia pode determinar a hora do crime?

**Solução:** Por questão de organização optamos por colocar os dados nas tabelas abaixo.

Tabela 4.1: Tempo em relação aos eventos

Tempo	Evento
$t_m = ?$	Instante da morte
$t_0 = 0 \text{ h}$	Instante da chegada dos peritos
$t_1 = 2 \text{ h}$	Instante após a chegada dos peritos

Tabela 4.2: Temperatura em relação aos eventos

Tempo	Evento
$\theta(t) = 37^\circ C$	Temperatura normal do ser humano vivo
$\theta_a = 20^\circ C$	Temperatura do meio ambiente
$\theta_0 = 29^\circ C$	Temperatura do corpo medida na chegada dos peritos
$\theta(2) = 23^\circ C$	Temperatura do corpo medida após 2(duas) horas

A seguir, devemos encontrar a constante de resfriamento  $k$  usando a solução exata

$$\theta(t) = \theta_a + (\theta_0 - \theta_a)e^{-kt}.$$

Portanto temos

$$23 = 20 + (29 - 20)e^{-2k}.$$

Aplicando logaritmo na equação acima obtemos

$$k = \frac{\ln 3}{2} \approx 0,5493.$$

Conhecendo o valor da constante  $k$ , usamos mais uma vez a solução exata para estimar a hora da morte  $t_m$ .

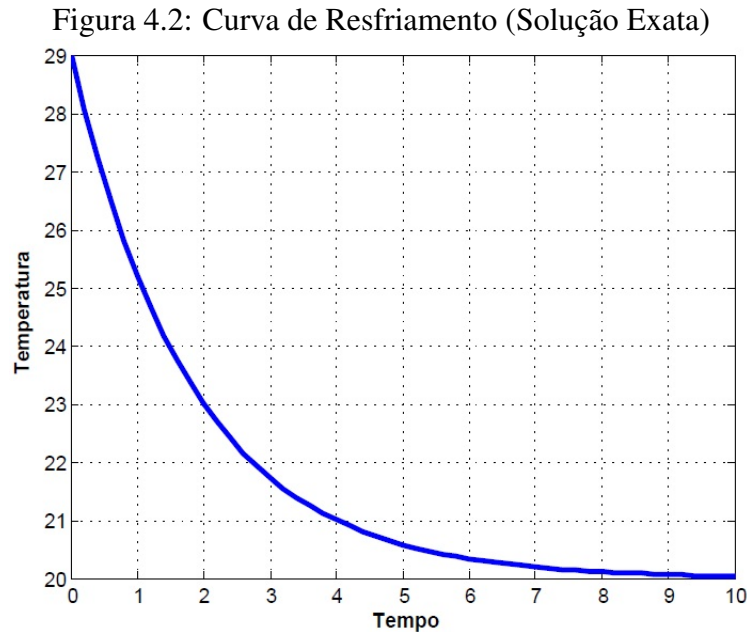
$$37 = 20 + (29 - 20)e^{-\frac{\ln 3}{2}t_m} \iff 17 = 9e^{-\frac{\ln 3}{2}t_m}.$$



Assim obtemos que

$$t_m = 2 \frac{\ln\left(\frac{9}{17}\right)}{\ln 3} \approx -1,1577h.$$

Portanto, o crime ocorreu há um pouco mais de 01 (uma) hora antes do corpo ser encontrado. Vejamos o gráfico.



Analisando o gráfico da Figura 4.2 percebemos claramente que a temperatura  $\theta(t)$  caminha para se estabilizar num valor em torno de  $20^\circ C$ , que é a temperatura ambiente  $\theta_a$ , ou seja,  $\theta_a = 20^\circ C$ .

A seguir, analisamos a solução numérica e fizemos um comparativo com a solução exata.

**Aproximação Numérica:** Consideramos os mesmos dados iniciais do problema contínuo e usamos a solução numérica (4.3), ou seja,

$$\theta_{n+1} = (1 - k\Delta t)\theta_n + k\Delta t\theta_a. \quad (4.14)$$

Neste experimento consideramos os seguintes parâmetros:  $T = 10h$ ,  $N + 1 = 50$  e  $\Delta t = 0,2$ . Com isso, obtemos a seguinte partição:

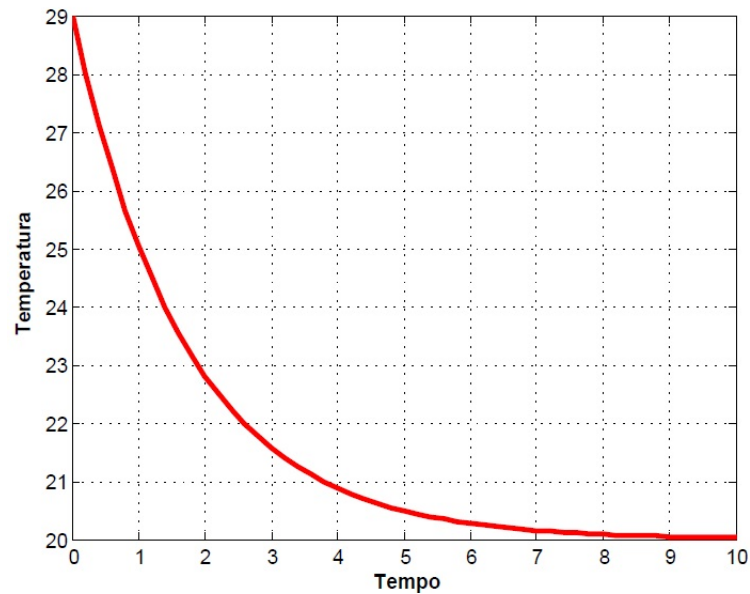
$$P : 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 0,2n < \dots < t_{49} < t_{50} = 10.$$

Consequentemente, adotando  $k = 0,5493$ ,  $\Delta t = 0,2$  e  $\theta_a = 20$  obtemos a fórmula recursiva

$$\theta_{n+1} = 0,8901\theta_n + 2,1972. \quad (4.15)$$

O gráfico da solução numérica (4.15) pode ser visualizado na figura abaixo.

Figura 4.3: Curva de Resfriamento (Solução Numérica)



Para termos uma visão melhor do erro gerado pela aproximação numérica fizemos um comparativo entre os dois gráficos (solução exata e solução numérica) e também plotamos um gráfico com o erro cometido pela aproximação numérica.

Figura 4.4: Sol. Exata vs. Sol. Numérica

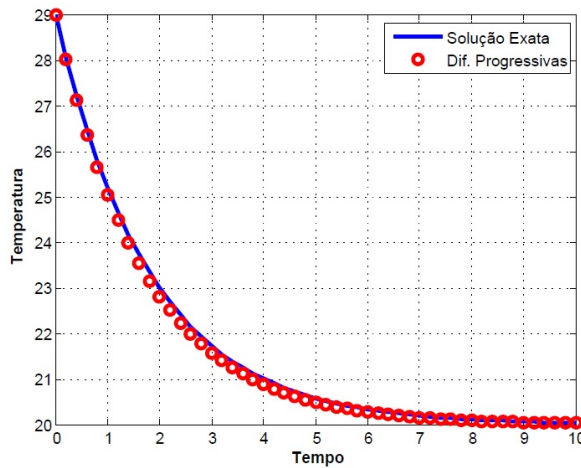
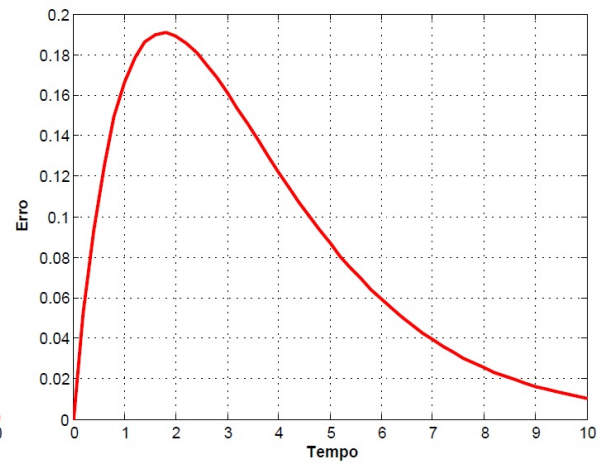


Figura 4.5: Erro de aproximação



Note que analisando o gráfico de erro na Figura 4.5, observamos que o erro atinge o valor máximo no intervalo de tempo (1, 2), portanto quanto mais distante estiver  $t_n$  do intervalo (1, 2), melhor será a aproximação numérica.

# Capítulo 5

## ALGUNS PROBLEMAS EM ABERTO

Neste trabalho apresentamos uma abordagem numérica usando o Método de Diferenças Finitas para a Lei de Resfriamento de Newton através do operador de diferenças progressivas. Com isso, obtemos a fórmula recursiva

$$\theta_{n+1} = (1 - k\Delta t)\theta_n + k\Delta t\theta_a, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (5.1)$$

a qual provamos ser consistente, estável e portanto convergente. Com tudo observamos que as soluções numéricas obtidas a partir de outros operadores de diferenças finitas, tais como

**Diferenças Regressivas:**

$$\bar{d}_t\theta_n := \frac{\theta_n - \theta_{n-1}}{\Delta t}. \quad (5.2)$$

**Diferenças Centradas:**

$$\frac{d_t + \bar{d}_t}{2}\theta_n := \frac{\theta_{n+1} - \theta_{n-1}}{2\Delta t}. \quad (5.3)$$

também podem ser analisadas. Portanto, achamos por bem criar esta seção fornecendo dicas de questões em aberto neste trabalho, visando com isso, incentivar a pesquisa e deixar o leitor ciente de que muito ainda se pode fazer mesmo dentro de um campo onde pensamos estar totalmente consolidado.

Deixamos a cargo do leitor a tarefa de investigar as questões referentes a consistência e estabilidade para esses dois casos (diferenças regressivas e centradas), mas adiantamos algumas simulações numéricas que servirão de motivação para conjecturas.

**Caso I: Diferenças Regressivas.** A solução numérica obtida a partir do operador de diferenças regressivas é dada por

$$\theta_n = \frac{1}{1 + k\Delta t}\theta_{n-1} + \frac{k\Delta t}{1 + k\Delta t}\theta_a, \quad \forall n \in \mathbb{N} - \{0\}. \quad (5.4)$$

Considerando os mesmos dados usados na simulação numérica realizada na Seção 4.4 obtemos os seguintes gráficos:

Figura 5.1: Sol. Exata vs. Sol. Numérica

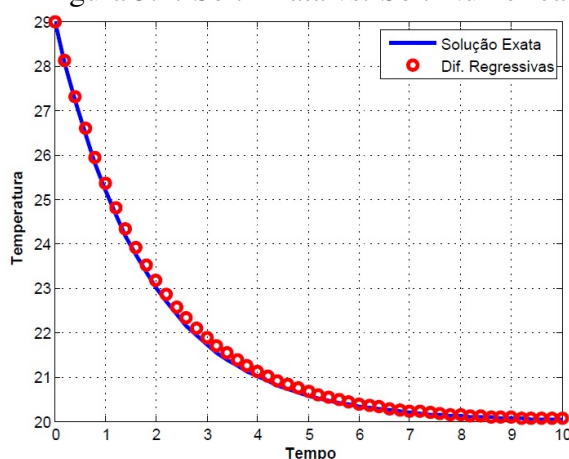
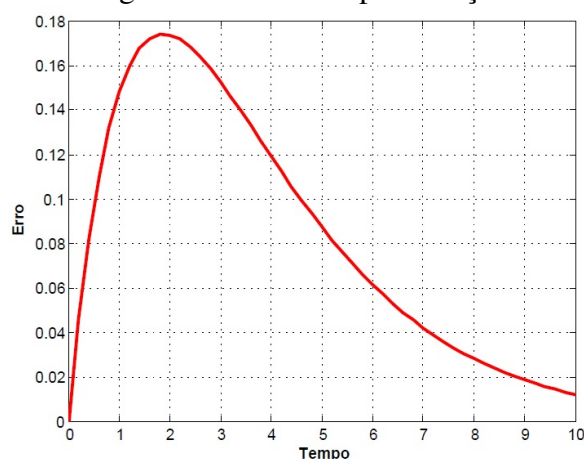


Figura 5.2: Erro de aproximação



De imediato percebemos que a solução numérica obtida do método de diferenças finitas regressivas é compatível com a solução exata (Figura 5.1) e além disso o erro (Figura 5.2) é decrescente a partir de um certo instante  $t \in (1, 2)$ .

Listamos abaixo alguns pontos a serem investigados:

- A estabilidade exponencial da solução numérica a partir da forma recursiva (5.4), tal como provada no Teorema (4.1);
- A limitação do erro global, seguindo os passos do Teorema (4.2);
- Qual soluções numérica (diferenças progressivas ou regressivas) fornece a melhor aproximação para a solução exata?

**Caso II: Diferenças Centradas.** A solução numérica obtida a partir do operador de diferenças centradas é dada por

$$\theta_{n+1} = \theta_{n-1} - 2k\Delta t\theta_n + 2k\Delta t\theta_a, \quad \forall n \in \mathbb{N} - \{0\}. \quad (5.5)$$

Considerando os mesmos dados usados na simulação numérica realizada na Seção 4.4 obtemos os seguintes gráficos:

Figura 5.3: Solução Exata

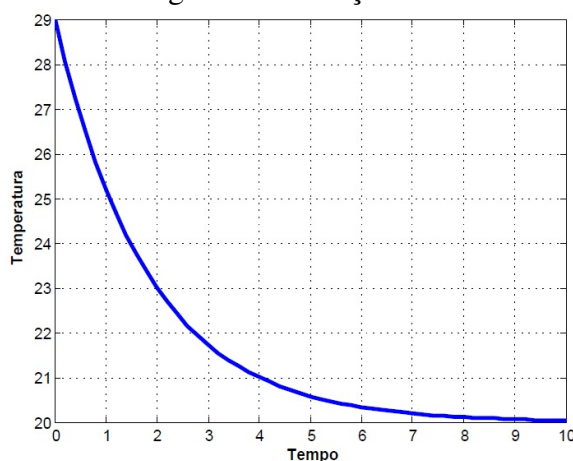
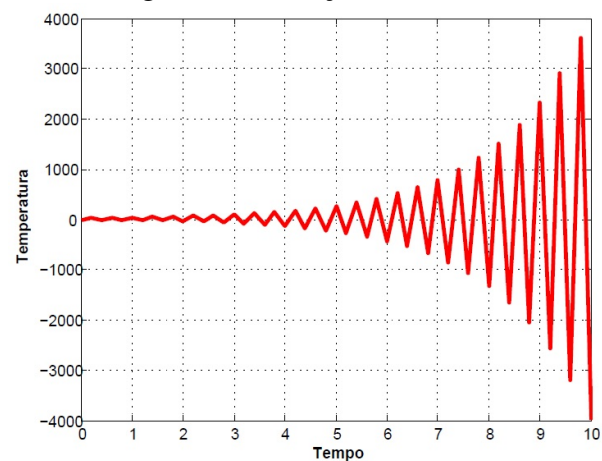


Figura 5.4: Solução Numérica



Neste caso notamos que a solução numérica (Figura 5.4) obtida do método de diferenças

finitas centradas (5.5) não é compatível com a solução exata (Figura 4.3). Para esse caso, será necessário uma investigação mais aprofundada, talvez analisar o erro global seja um bom começo, ou seja, precisamos analisar a norma do erro global dado pela estimativa

$$\|e_n\| \leq M, \quad (5.6)$$

e constatar uma possível dependência da constante  $M$  do parâmetro de malha  $\Delta t$  ou do número  $n$  de pontos.

# CONCLUSÃO

Procuramos mostrar que é possível trabalhar a interdisciplinaridade através do uso do computador para aprofundar o estudo de Matemática e Física no Ensino Médio, em problemas nos quais o conhecimento de Cálculo Diferencial e Integral é exigido. Esse tratamento propicia ao aluno não só a possibilidade de estudar um conjunto maior de problemas físicos, como também o introduz, de forma intuitiva, às ideias do Cálculo Numérico e do Cálculo Diferencial e Integral.

Apesar da utilização crescente de computadores como elemento no fornecimento de informações e também como agente auxiliar na construção do conhecimento, existe ainda uma grande resistência dos professores e alunos em utilizá-lo como ferramenta para o desenvolvimento e aprendizagem na área científica. Essa resistência na maioria dos casos se dá em função do desconhecimento de linguagens de computação. A discussão que apresentamos tenta vencer essa resistência, mostrando como se pode usar o computador para resolver um problema importante em Física (Lei de Resfriamento de Newton), utilizando apenas alguns conceitos de Análise Numérica e um pouco de programação.

No decorrer de nossas investigações percebemos que são poucos os trabalhos que tratam esse fenômeno físico do ponto de vista da análise numérica. Sendo assim, vimos uma excelente oportunidade de abordar este tema dando um enfoque mais básico sem perder o rigor da análise numérica.

Por fim, queremos ressaltar que a interdisciplinaridade é uma ferramenta auxiliar importante no processo de ensino/aprendizagem e mais, diante do que expomos, acreditamos que nosso trabalho acrescentará muito ao conhecimento do professor e do aluno, uma vez que saímos da zona de conforto e ousamos apresentar meios criativos para um ensino interdisciplinar, abrangendo conhecimentos variados de matemática, física e computação.

# Referências Bibliográficas

- [1] Besson, U. **The History of the Cooling Law: When the Search for Simplicity can be an Obstacle**. Sci and Educ. 2010.
- [2] Boyce, W. E. e DiPrima, R. C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. 9. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2010.
- [3] BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias/Ministério da educação**. Brasília: Ministério da Educação/Secretaria de educação Média e Tecnológica, 1999.
- [4] Bronson, R. **Moderna Introdução as Equações Diferenciais**. 3. ed. São Paulo: Editora McGraw-Hill do Brasil, 1977.
- [5] Cuminato, J.A. e Meneguette Jr., M. **Discretização de Equações Diferenciais Parciais: Técnicas de Diferenças Finitas**, 2. ed. SBMAC, 1996.
- [6] Cunha, C. **Métodos Numéricos para as Engenharias e Ciências Aplicadas**. 1. ed. Campinas: Editora da UNICAMP, 1993.
- [7] Druck, S. **O drama do ensino da Matemática**. 2003 Disponível em: <<http://www1.folha.uol.com.br/folha/sinapse/ult1063u343.shtml>>. Acesso em: 11 jan. 2016.
- [8] Figueiredo, D. G. **Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais**. 4. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2005.
- [9] Figueiredo, D. G e Neves, A. F. **Equações Diferenciais Aplicadas**. 3. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2008.
- [10] French, A.P. **Isaac Newton's Thermometry**. The Physics Teacher. 31, 208, 1993.
- [11] Newton, I. **Scala Graduum Caloris, Calorum Descriptiones and Signa (Scale of the Degrees of Heat)**. Phil. Trans. 22, 824 – 9, 1701.
- [12] O'Sullivan C. T. **Newton's Law of Cooling- A Critical Assessment**. Am. J. Phys. 58, 956 – 960, 1990.
- [13] Stkiwerda, John C. **Finite Difference Schemes and Partial Differential Equation**. 2. ed. Jiam, 1989.
- [14] Soares, L.F. G. **Modelagem e Simulação Discreta de Sistemas**. São Paulo: Ed. Campus, 1992.

- [15] Kreith, F. e Bohn, M. S. **Princípios de Transferência de Calor**. São Paulo: Thomson, 2003.
- [16] Kern, D. Q. **Processos de Transmissão de Calor**. Rio de Janeiro: Ed. Guanabara, 1987.