



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA  
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

JHONATAN DA SILVA LIMA

BELÉM 400 ANOS: APLICAÇÕES DAS RELAÇÕES  
MÉTRICAS DO TRIÂNGULO RETÂNGULO E LEI DOS  
COSSENO NA CIDADE DAS MANGUEIRAS

BELÉM

2016



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA  
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

JHONATAN DA SILVA LIMA

## BELÉM 400 ANOS: APLICAÇÕES DAS RELAÇÕES MÉTRICAS DO TRIÂNGULO RETÂNGULO E LEI DOS COSSENOS NA CIDADE DAS MANGUEIRAS

Dissertação apresentada como requisito parcial para  
obtenção do grau de mestre em Matemática pelo Programa  
de Mestrado Profissional (PROFMAT) da Universidade  
Federal do Pará.

Orientadora: Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Rubia Gonçalves Nascimento

BELÉM

2016

Lima, Jhonatan da Silva, 1989-  
Belém 400 anos: aplicações das relações métricas do  
triângulo retângulo e lei dos cossenos na cidade das  
mangueiras / Jhonatan da Silva Lima. - 2016.

Orientadora: Rubia Gonçalves Nascimento.  
Dissertação (Mestrado) - Universidade  
Federal do Pará, Instituto de Ciências Exatas e  
Naturais, Programa de Pós-Graduação em  
Matemática (Mestrado Profissional), Belém, 2016.

1. Trigonometria. 2. Geometria-Problemas,  
questões, exercícios. 3. Pitágoras, Teorema de.  
4. Lei dos cossenos. 5.  
Trigonometria-Metodologia-Conhecimentos e  
aprendizagem. I. Título.

CDD 22. ed. 516.24

---

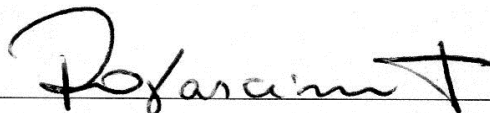
JHONATAN DA SILVA LIMA

BELÉM 400 ANOS: APLICAÇÕES DAS RELAÇÕES MÉTRICAS DO  
TRIÂNGULO RETÂNGULO E LEI DOS COSSENOS NA CIDADE  
DAS MANGUEIRAS

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática do Programa de Mestrado Profissional em Rede Nacional (PROFMAT-IMPA) da Universidade Federal do Pará, avaliado pela seguinte banca examinadora:

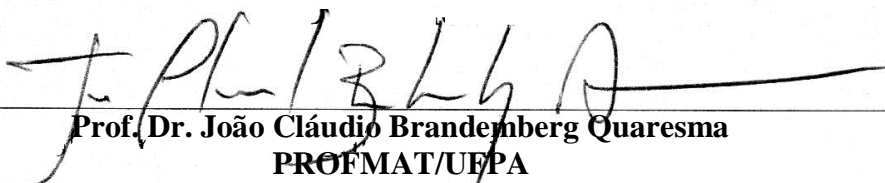
Aprovada em: 09 de março de 2016

BANCA EXAMINADORA



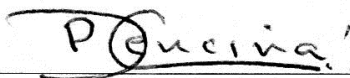
---

**Orientadora: Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Rúbia Gonçalves Nascimento**  
**PROFMAT/UFPA**



---

**Prof. Dr. João Cláudio Brandenberg Quaresma**  
**PROFMAT/UFPA**



---

**Prof. Dr. Ducival Carvalho Pereira**  
**Universidade Estadual do Pará**

*Dedico este trabalho aos meus pais:*

*Antônio Alves e Maria Lima.*

*E aos meus amigos:*

*Ana Carla Luz;*

*Elisângela Costa;*

*Emanuele Ramos;*

*Emariele Pardal;*

*Izonete Ferreira;*

*Sérgio Henrique Furtado.*

## **AGRADECIMENTOS**

A Deus por ter me ajudado através da minha fé.

Minha trajetória não teria sido a mesma sem meus colegas MÁRCIO RODRIGO DA ROCHA PINHEIRO e ROGÉRIO SENA.

A minha orientadora Professora Dra. Rúbia Gonçalves Nascimento pela atenção e esforço em fazer um trabalho relevante.

Aos meus colegas do Profmat 2014 pelo companheirismo e por vários momentos que serão levados por toda minha vida.

Aos professores do curso que desempenharam um papel muito importante na minha formação durante esses dois anos.

Aos diretores das escolas nas quais trabalho pela imensa compreensão e colaboração nesse período.

*"A matemática, senhora que ensina o homem a ser simples e modesto, é a base de todas as ciências e de todas as artes."*

**(Malba Tahan)**

# Resumo

O objetivo deste trabalho é elaborar questões sobre relações métricas no triângulo retângulo, Teorema de Pitágoras e Lei dos cossenos em um contexto urbano e com isso, homenagear os 400 anos de Belém do Pará. A metodologia utilizada será através de resolução de problemas que é uma ferramenta bastante defendida por estudiosos que acreditam que com ela é possível obter resultados significativos no processo de ensino e aprendizagem. Será realizado um breve histórico sobre a fundação dessa cidade e com isso resgatar uma parte da memória e sua evolução até hoje com o título de "Metrópole da Amazônia". Dessa forma, construímos algumas aplicações nos pontos turísticos de Belém com o direcionamento necessário para a assimilação do conteúdo em questão.

Palavras-chave: trigonometria, resolução de problemas, teorema de Pitágoras e lei dos cossenos.



# Abstract

The aim of this paper is to prepare questions about metric relations in rectangle triangle , Pythagorean theorem and law of cosines in an urban context and thereby honor the 400th anniversary of Belém do Pará. The methodology will be through problem solving that is a tool rather advocated by teachers who believe that is possible to achieve significant results in the process of teaching and learning. There will be a brief history of the foundation of this city and thus redeem a portion of memory and its evolution to date with the title of "Metropolis of Amazon". Thus, we build some applications in the sights of Belém with the guidance necessary for the assimilation of the content in question.

keywords: trigonometry, problem solving, Pythagoream theorem and cosine rule.

# Lista de Figuras

1.1	Igreja da Sé . . . . .	6
1.2	Palácio dos Governadores . . . . .	6
1.3	Casa das Onze Janelas . . . . .	7
1.4	Capela São João Batista . . . . .	7
1.5	Igreja de Sant'Anna . . . . .	8
1.6	Basílica de Nossa Senhora de Nazaré . . . . .	9
1.7	Bosque Rodrigues Alves . . . . .	9
1.8	Complexo Ver-o-Peso . . . . .	10
1.9	Espaço São José Liberto . . . . .	11
1.10	Estação das Docas do Pará . . . . .	11
1.11	Forte do Castelo . . . . .	12
1.12	Museu de Arte Sacra . . . . .	12
1.13	Parque da Residência . . . . .	13
1.14	Mangal das Garças . . . . .	14
1.15	Parque Zoobotânico Emílio Goeldi . . . . .	14
1.16	Praça da República . . . . .	15
1.17	Theatro da Paz . . . . .	16
1.18	Círio de Nossa Senhora de Nazaré . . . . .	17
2.1	Mercado Ver-o-Peso . . . . .	20
2.2	O Pensador . . . . .	20

2.3	Quadriláteros Semelhantes . . . . .	21
2.4	Retas Paralelas. . . . .	22
2.5	Losangos. . . . .	22
2.6	Triângulos Semelhantes. . . . .	23
2.7	Triângulos Semelhantes: caso 1. . . . .	24
2.8	Triângulos Semelhantes: caso 2. . . . .	25
2.9	Triângulos Semelhantes: caso 3. . . . .	26
2.10	Triângulo Retângulo. . . . .	27
2.11	Triângulos Retângulos. . . . .	27
2.12	Triângulos Retângulos 2. . . . .	28
2.13	Triângulos Retângulos ABC e AHB. . . . .	28
2.14	Triângulos Retângulos ABC e AHC. . . . .	29
2.15	Triângulos Retângulos AHB e AHC. . . . .	29
2.16	Circunferência com cordas. . . . .	31
2.17	Circunferência com um triângulo retângulo . . . . .	32
2.18	Teorema de Pitágoras por Euclides. . . . .	33
2.19	Razões Trigonométricas . . . . .	34
2.20	Definição das Principais Razões Trigonométricas . . . . .	35
2.21	Lei do Cossenos: caso $\hat{A} < 90^\circ$ . . . . .	36
2.22	Lei do Cossenos: caso $\hat{A} > 90^\circ$ . . . . .	37
3.1	Trajeto do Círio. . . . .	40
3.2	Modelo matemático do trajeto do Círio de Nazaré. . . . .	40
3.3	Pôr-do-sol no Portal da Amazônia. . . . .	41
3.4	Modelo matemático do Pôr-do-sol no Portal da Amazônia. . . . .	41
3.5	Pátio do Museu São José Liberto. . . . .	42
3.6	Modelo matemático do pátio do Museu. . . . .	43
3.7	Outro modelo matemático do pátio do Museu. . . . .	43

3.8	Modelo matemático da gangorra. . . . .	44
3.9	Pista do aeroporto Val de Cans. . . . .	45
3.10	Modelo matemático da pista do aeroporto Val de Cans. . . . .	46
3.11	Farol de Belém . . . . .	47
3.12	Modelo matemático do Farol. . . . .	47
3.13	Margem do Rio Guamá. . . . .	48
3.14	Praça Amazonas. . . . .	49
3.15	Praça Amazonas. . . . .	50
3.16	Modelo matemático de corrimão. . . . .	51
3.17	Modelo matemático do gavião perseguindo a cobra. . . . .	52

# Sumário

<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
<b>1 Um breve histórico da fundação de Belém e seus principais pontos turísticos</b>	<b>4</b>
1.1 A Fundação de Belém . . . . .	4
1.2 Antonio Landi e sua contribuição na arquitetura de Belém . . . . .	5
1.2.1 Igreja da Sé . . . . .	5
1.2.2 Palácio dos Governadores . . . . .	6
1.2.3 Casa das Onze Janelas . . . . .	7
1.2.4 Capela de São João Batista . . . . .	7
1.2.5 Igreja de Sant'Anna da Campina . . . . .	8
1.3 Principais pontos turísticos de Belém . . . . .	8
1.3.1 Basílica de Nossa Senhora de Nazaré . . . . .	8
1.3.2 Bosque Rodrigues Alves . . . . .	9
1.3.3 Complexo Ver-o-peso . . . . .	10
1.3.4 Espaço São José Liberto . . . . .	10
1.3.5 Estação das Docas . . . . .	11
1.3.6 Forte do Castelo . . . . .	12
1.3.7 Museu de Arte Sacra . . . . .	12
1.3.8 Parque da Residência . . . . .	13
1.3.9 Parque Naturalístico Mangal das Garças . . . . .	13
1.3.10 Parque Zoobotânico Emílio Goeldi . . . . .	14

1.3.11	Praça da República . . . . .	15
1.3.12	Theatro da Paz . . . . .	15
1.4	A maior procissão católica do Norte: Círio de Nossa Senhora de Nazaré . . . . .	16
<b>2</b>	<b>Relações Métricas no Triângulo Retângulo e Lei dos Cossenos</b>	<b>18</b>
2.1	Um breve histórico da Trigonometria . . . . .	18
2.2	Semelhança . . . . .	19
2.2.1	Figuras Semelhantes . . . . .	19
2.2.2	Polígonos Semelhantes . . . . .	20
2.3	Semelhança de triângulos . . . . .	22
2.4	Casos de semelhança de triângulos . . . . .	23
2.4.1	1º Caso de semelhança: Ângulo - Ângulo (A.A.) . . . . .	23
2.4.2	2º Caso de semelhança: Lado - Ângulo - Lado (L.A.L.) . . . . .	24
2.4.3	3º Caso de semelhança: Lado - Lado - Lado (L.L.L.) . . . . .	25
2.5	Elementos de um triângulo retângulo . . . . .	26
2.5.1	Semelhanças em um triângulo retângulo . . . . .	27
2.6	O Teorema de Pitágoras . . . . .	30
2.6.1	Primeira demonstração : semelhança de triângulos . . . . .	31
2.6.2	Segunda demonstração : utilizando circunferência e teorema das cordas. . . . .	31
2.6.3	Terceira demonstração : Euclides, do livro Elementos. . . . .	33
2.7	Principais relações trigonométricas no triângulo retângulo . . . . .	34
2.8	Lei dos Cossenos . . . . .	36
2.8.1	1º Caso: $\hat{A} < 90^\circ$ . . . . .	36
2.8.2	2º Caso: $\hat{A} = 90^\circ$ . . . . .	37
2.8.3	3º Caso: $\hat{A} > 90^\circ$ . . . . .	37
<b>3</b>	<b>Aplicações na Cidade das Mangueiras</b>	<b>39</b>
3.1	Aplicação 1: trajeto do Círio de Nazaré; . . . . .	39

3.2	Aplicação 2: a distância que os olhos alcançam na linha do horizonte na Bahia de Guajará;	41
3.3	Aplicação 3: parede do Museu São José Liberto;	42
3.4	Aplicação 4: gangorra no Portal da Amazônia;	44
3.5	Aplicação 5: comprimento de uma nova pista no aeroporto;	45
3.6	Aplicação 6: altura da torre no Mangal das Garças;	46
3.7	Aplicação 7: largura do Rio Guamá em m determinado ponto;	48
3.8	Aplicação 8: comprimento do maior contorno da Praça Amazonas;	49
3.9	Aplicação 9: corrimão de uma escada no Forte do Castelo;	50
3.10	Aplicação 10: distância percorrida por uma cobra e um gavião, no museu Emílio Goeldi;	51
	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>	<b>53</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>54</b>

# Introdução

A Matemática pode nos proporcionar situações nas quais podemos descobrir o verdadeiro valor de sua essência. É de suma importância que tratemos essa ciência como ponto motivador nas aulas, pois, através dela é possível resolver problemas interessantes, fato que a deixa mais prazerosa e trás maior proximidade com quem está diante dessa situação.

A resolução de problemas é uma tendência no ensino da Matemática que vem, cada vez mais, tomando forças nas escolas deste país. Trata-se de uma metodologia que visa o aprendizado do aluno através de uma perspectiva que ele mesmo constrói seu conhecimento com estratégias e competências a cerca do objeto a ser estudado.

Segundo Lupinacci (2004), "a Resolução de Problemas é um método eficaz para desenvolver o raciocínio e para motivar os alunos para o estudo da Matemática. O processo ensino e aprendizagem pode ser desenvolvido através de desafios, problemas interessantes que possam ser explorados e não apenas resolvidos." Desta forma, é necessário realizar um elo concreto nesse processo de ensino aprendizagem no que visa a absorção do conhecimento.

Além disso, os Parâmetros Curriculares Nacionais (1998) cita que resolução de problemas possibilita aos alunos mobilizar conhecimentos e desenvolver a capacidade para uma aprendizado eficaz. Assim, os alunos terão oportunidade de ampliar o leque de conteúdos acerca de conceitos e procedimentos matemáticos bem como ampliar a visão que têm dos problemas, da Matemática, do mundo em geral e desenvolver sua autoconfiança.

Na intenção de concretizar esse processo de aprendizagem, Polya (1978) elabora uma sequência que propõe uma intervenção segura durante as aulas. Afirma que resolver problemas consistem em quatro passos: compreensão, concepção de um plano, execução do plano e verificação da solução do problema.

Sob essa ótica, faremos aplicações de situações-problemas de relações métricas e lei dos cossenos envolvendo a cidade de Belém. Um dos principais motivos que nos influenciou a elaboração dessa proposta foi a unificação do acesso às universidades públicas, estaduais e federais, pelo Exame



Nacional do Ensino Médio (ENEM). Antes disso, cada instituição de ensino superior tinha a responsabilidade de elaborar o seu processo seletivo de ingresso e sempre eram levantadas questões voltadas para nossa realidade paraense. Com essa unificação, perdemos um pouco a identidade e reconhecimento, inclusive de outras instituições, das questões que eram formuladas.

Foi com intuito de tentar resgatar um pouco essa identidade que resolvemos aplicar esse conteúdo do do ensino básico na "Cidade das Mangueiras".

O objetivo geral desse trabalho de conclusão de curso é elaborar questões que envolvem o conteúdo citado acima com a cidade de Belém e com isso teremos como consequência uma singela homenagem a esta já que em Janeiro de 2016 completou 400 anos. Com esse eixo geral, introduziremos alguns objetivos específicos como: resgatar traços da memória da criação de Belém e sua arquitetura; estimular a elaboração que questões voltadas para realidade dessa cidade; relacionar a matemática com o cotidiano do aluno através de resoluções de problemas e com isso relacionar conceitos como semelhança e relações métricas no triângulo retângulo, Teorema de Pitágoras e Lei dos cossenos na construções ou pontos turísticos da cidade.

No primeiro capítulo, cujo título é "Um breve histórico da fundação de Belém e seus principais pontos turísticos", será feita uma abordagem histórica sobre a fundação de Belém em Janeiro de 1616, pelo comandante Francisco Caldeira Castelo Branco. Em seguida, será mostrado com essa cidade evoluiu durante um século depois de sua fundação através da arquitetura de Antonio Landi, italiano trazido para Belém com o intuito de projetar Igrejas e outras construções que enaltecesse uma cidade com desenvolvimento a todo vapor aos moldes europeus. Logo mais, será mostrado alguns pontos turísticos e tradições que fazem de Belém a metrópole da Amazônia.

No segundo capítulo, nomeado "Relações Métricas no Triângulo Retângulo e Lei dos Cossenos", faremos um breve histórico sobre a Trigonometria, trataremos semelhança de figuras em um contexto geral e com os polígonos, estabeleceremos duas condições necessárias e suficientes para que sejam semelhantes. Logo após, chegaremos as relações métricas desse triângulo e através delas faremos uma demonstração sobre o conhecido Teorema de Pitágoras. Para enriquecer este capítulo, faremos mais duas demonstrações desse teorema com o objetivo de mostrar que na matemática há vários caminhos que podem levar a um mesmo resultado. Finalmente, abordaremos a lei dos cossenos e sua demonstração em três casos distintos em relação ao ângulo escolhido.

O terceiro e último capítulo, intitulado "Aplicações das relações métricas, Teorema de Pitágoras e Lei dos cossenos na Cidade das Mangueiras", trará as aplicações resolvidas e comentadas sobre o conteúdo definido no capítulo anterior. Nesta parte, utilizaremos a "Cidade das Mangueiras" como inspiração na criação de situações problemas. Traremos uma contextualização mais próxima o pos-

sível da realidade, pois dessa forma acreditamos termos maior sucesso na aquisição do conhecimento matemático.

Nas considerações finais, haverá uma reflexão sobre os resultados que podem ser obtidos com esse trabalho.

# Capítulo 1

## Um breve histórico da fundação de Belém e seus principais pontos turísticos

Belém do Pará é uma cidade histórica e em seus 400 anos já passou por muitas descobertas, conquistas, lutas e transformações. Neste capítulo, será tecido um breve comentário sobre sua criação, seus principais fundadores e personagens que contribuíram para seu desenvolvimento social e cultural, além de seus principais pontos turísticos e o Círio de Nazaré. Ao longo desses 400 anos houve, em Belém, diversos cenários que foram cruciais para a consolidação de vários títulos como Metrópole da Amazônia, Cidade Morena e Cidade das Mangueiras.

### 1.1 A Fundação de Belém

A capital vizinha São Luis, no Maranhão, é um marco para a história de Belém, pois foi planejado a partir dela, pelos portugueses, a conquista da terra nova no vale do rio Amazonas com o intuito de garantir proteção contra os invasores europeus.

Segundo Amaral (2004), a preocupação de Portugal começou em 1615 com a possível ameaça dos franceses, que fundaram a cidade de São Luis, em 1612, em ocupar a região que hoje é Belém. Para evitar tal ocupação, foi enviado Francisco Caldeira Castelo Branco para defender o território português e, como consequência, fundar a cidade de Belém.

A embarcação de Castelo Branco saiu do cais do Porto de São Luis, no dia 25 de dezembro de 1615, levando uma tropa de 120 soldados. A tripulação avista a Baía de Guajará quase 20 dias depois de sua saída, enfrentando tempestades e rios estreitos.

Quando Belém foi fundada, a baía era um grande mangue com um terreno elevado, propi-

ciando a construção de uma base que protegesse a entrada da Amazônia, pois era um local de acesso difícil. Tal base construída recebe o nome de Forte do Presépio, por conta do período natalino, que ajudou a defender a terra de outras potências que queriam conquistar aquele território.

Ainda existem prédios que contam parte desta história, conservando a arquitetura da época, principalmente em seus beirais. O processo de povoamento continua crescendo e as grandes obras datam do século XVIII, trazendo a marca do arquiteto Antônio Landi.

## **1.2 Antonio Landi e sua contribuição na arquitetura de Belém**

Giuseppe Antonio Landi, nome original de Antônio Jose Landi, nasceu em Bolonha, na Itália, em 1713. Por ser desenhador, arquiteto, gravador, geógrafo e astrônomo, formando-se em Arquitetura e Perspectiva na Academia Clementina na década de 1730, é convidado a compor a Comissão de Demarcação de Fronteiras entre Portugal e Espanha na América do Sul, assim levantando as características geográficas, físicas e astronômicas da Amazônia.

Como desenhador de História Natural entre 1754 e 1761, seu desempenho é reconhecido pelo governador do Pará, Francisco Xavier de Mendonça Furtado, reunindo as anotações feitas nas mais variadas expedições que realizou pelos rios da Amazônia.

Sendo arquiteto, o artista realiza esculturas, pinturas, projetos e obras das quais se destacam a Igreja de Sant'Anna, o Palácio dos Governadores e a Capela de São João Batista em Belém.

### **1.2.1 Igreja da Sé**

A catedral de invocação de Santa Maria da Graça da cidade de Belém do Grão Pará, hoje conhecida como Catedral Metropolitana de Belém ou Igreja da Sé, está localizada na Praça Frei Caetano Brandão, bairro da Cidade Velha.



Figura 1.1: Igreja da Sé

Fonte: [www.boeingonline.com.br](http://www.boeingonline.com.br)

Foto: [Argentino.Miglio/www.feriasbrasil.com.br](http://Argentino.Miglio/www.feriasbrasil.com.br)

Reconstruída em 1755 pelo arquiteto Antônio Landi, em estilo barroco-colonial e neoclássico, destacam-se os painéis pintados e ricamente emoldurados nos altares, substituindo as imagens tradicionais.

### 1.2.2 Palácio dos Governadores

O Palácio dos Governadores, atualmente chamado de Palácio Lauro Sodré, onde está situado o Museu do Estado do Pará (MEP), possui dois pavimentos e aspectos arquitetônicos relativos ao período colonial.



Figura 1.2: Palácio dos Governadores

Fonte: [www.farm4.static.flickr.com](http://www.farm4.static.flickr.com)

O Palácio Lauro Sodré é conhecido por ser um dos trabalhos mais nobres e influentes do arquiteto italiano.

### 1.2.3 Casa das Onze Janelas

Landi propõe a transformação de uma das casas do senhor de engenho, Domingos da Costa Bacelar, em Hospital Real Militar, seguindo os padrões do Palácio dos Governadores, construindo, assim, as onze janelas nas fachadas, as quais deram origem ao nome de a Casa das Onze Janelas, como é conhecida nos dias atuais.



Figura 1.3: Casa das Onze Janelas

Fonte: [www.rodtur.blogspot.com.br](http://www.rodtur.blogspot.com.br)

Hoje, o local recebe exposições temporárias e mantém um acervo com obras de artistas como Tarsila do Amaral e Alfredo Volpi, atraindo turistas que visitam a cidade.

### 1.2.4 Capela de São João Batista

A capela de São João Batista foi construída devido à necessidade de se ter um local provisório para o culto e acolhida do Santíssimo Sacramento, no período em que a Igreja da Sé estava em fase de conclusão.



Figura 1.4: Capela São João Batista

Fonte: [www.belempara.com.br](http://www.belempara.com.br)

Com sua nave octogonal coberta com uma cúpula, é única em Belém. As pinturas do altar principal e das laterais são feitas para que emitam volumes e relevos.

### **1.2.5 Igreja de Sant'Anna da Campina**

A Igreja de Sant'Anna da Campina, localizada no Bairro do Campina, tem imenso valor para a cidade de Belém, pois sendo a segunda igreja a ser construída, a edificação é uma joia do estilo Barroco, além de ser o local onde estão guardados os restos mortais do arquiteto Antônio José Landi.



Figura 1.5: Igreja de Sant'Anna

Fonte: [www.g1.globo.com](http://www.g1.globo.com)

A igreja começou a ser construída na década de 60 do século XVIII, com o intuito de sediar a paróquia do bairro. Contudo, por conta da complexidade da obra e escassez de recursos financeiros, só foi inaugurada vinte anos mais tarde.

## **1.3 Principais pontos turísticos de Belém**

Belém, capital do Pará, Cidade das Mangueiras, de culinária forte com peixes e temperos, do carimbó, das belas praias de água doce, do Círio de Nazaré, dos casarões centenários das invasões portuguesas e holandesas. Da Igreja da Sé, Palácio dos Governadores, Casa das Onze Janelas, Capela São João Batista e Igreja de Sant'Anna, além de alguns outros pontos turísticos que serão citados abaixo.

### **1.3.1 Basílica de Nossa Senhora de Nazaré**

A Basílica Santuário Nossa Senhora de Nazaré é uma das igrejas mais belas da cidade de Belém do Pará. Tem um estilo neoclássico e sua história se mistura com a maior festa religiosa dos paraenses, o Círio de Nazaré.



Figura 1.6: Basílica de Nossa Senhora de Nazaré

Fonte: [www.noelbs.blogspot.com.br](http://www.noelbs.blogspot.com.br)

Ela foi erguida em 1852, no mesmo local em que o cabloco Plácido encontrou, às margens do Igarapé Murucutu, a imagem de Nossa Senhora. Sua construção foi inspirada na Igreja de São Paulo de Roma e tornou-se santuário no ano de 2006.

### 1.3.2 Bosque Rodrigues Alves

O Bosque Rodrigues Alves - o Jardim Botânico da Amazônia - surge no alge do extrativismo da Borracha em meio ao processo de modernização da urbanização da cidade. Bosque Municipal do Marco da Léguas, uma referência do limite da cidade, é o primeiro nome dado a esse bosque que trazia como ideário de qualidade de vida a valorização do ar, da luz e da água.



Figura 1.7: Bosque Rodrigues Alves

Fonte: [www.noticias.orm.com.br](http://www.noticias.orm.com.br)

Após várias reformas, das quais a mais importante delas é creditada a Antônio Lemos, o bosque possui hoje grutas, riachos, cascatas, viveiros e definição espacial.



### 1.3.3 Complexo Ver-o-peso

O complexo Ver-o-peso, fundado em Março de 1687, funcionou, inicialmente, como entreposto fiscal, criando ali um posto de fiscalização e tributos - Casa do Haver o Peso - lugar em que com uma balança um funcionário público mediava as transações comerciais.

Em 1839, com a extinção da repartição, o espaço foi arrendado e destinado a venda de peixe fresco. Desde então, é composto pelo mercado de carne, mercado de peixe, praça de alimentação, solar do beira e feira do açai.



Figura 1.8: Complexo Ver-o-Peso

Foto: divulgação GecParatur

Ao longo do tempo, visando às necessidades e gostos da Belle Époque, o Ver-o-Peso sofreu várias modificações, como o aterramento da baía do guajará, ampliação do mercado de carne e construção do porto. O conjunto foi tombado pelo Instituto do Patrimônio Histórico Nacional (IPHAN) em 1997.

### 1.3.4 Espaço São José Liberto

Inaugurado em 11 de outubro de 2002, o Espaço São José Liberto é uma referência de território criativo e turístico de Belém do Pará. O prédio principal data de 1749 e foi erguido para ser o convento de São José. Com a expulsão dos jesuítas do Brasil, o prédio abrigou, ao longo de mais de dois séculos de existência, olaria, quartel, depósito de pólvora, hospital, cadeia pública e presídio.



Figura 1.9: Espaço São José Liberto

Foto: Geraldo Ramos - Igama/Divulgação

O Espaço São José Liberto é um espaço concebido para abrigar setores criativos e categorias culturais, como patrimônio, expressões culturais, artes de espetáculo, criações culturais e funcionais, promovendo geração de trabalho e renda, empreendedorismo criativo, inovação, design e capacitação profissional, tendo a cultura e o turismo como elementos transversais do seu funcionamento.

### 1.3.5 Estação das Docas

O antigo porto fluvial em Belém, em 2000, se transforma em um dos espaços mais representativos do Pará: A Estação das Docas. Por oferecer gastronomia, moda, lazer e eventos, é um complexo turístico de referências nacionais. Dos 32 mil metros quadrados, 500 metros de extensão são voltados para orla, comportando três armazéns e um terminal para embarque e desembarque de passageiros.



Figura 1.10: Estação das Docas do Pará

Fonte: [www.estacaodasdocas.com.br](http://www.estacaodasdocas.com.br)

O armazém 1 foi batizado como Boulevard das Artes; armazém 2, Boulevard da Gastronomia; e o armazém 3, Boulevard de Feiras e Exposições. Além disso, compõe o complexo: o Teatro Maria Sylvania Nunes e o Anfiteatro São Pedro Nolasaco.

### 1.3.6 Forte do Castelo

Localizado às margens do Rio Guamá, o Forte do Presépio, como também é conhecido, guarda tesouros da história da Amazônia. Fazendo alusão à chegada da expedição de Castelo Branco em 25 de dezembro de 1615, fica localizado no Centro Histórico da capital paraense, sendo um dos espaços mais visitados de Belém.



Figura 1.11: Forte do Castelo

Fonte: [www.portalamazonia.com.br](http://www.portalamazonia.com.br)

Tombado pelo IPHAN, o Forte faz parte do Complexo Feliz Lusitânia, projeto de preservação dos espaços históricos de Belém.

### 1.3.7 Museu de Arte Sacra

O Museu de Arte Sacra é um complexo composto pela Igreja de Santo Alexandre e pelo palácio episcopal. Ambos foram construídos para ter a igreja como centro irradiador. A decoração é caracterizada pela arte barroca na qual se destacam as peças produzidas pelos jesuítas e pelos índios. A igreja também funciona para espetáculos teatrais e recitais.



Figura 1.12: Museu de Arte Sacra

Fonte: [www.carlafalconi.files.wordpress.com](http://www.carlafalconi.files.wordpress.com)

Esse museu também foi projetado por Antonio Landi e tem um acervo com cerca de 320 peças expostas no primeiro pavimento do palácio episcopal e na igreja.

### **1.3.8 Parque da Residência**

A partir de 1934, o Parque da Residência foi a residência oficial dos governadores do Pará e teve como primeiro morador Magalhães Barata. Também foi lar dos governadores Enéas Martins (1913-1917) e Lauro Sodré (1917-1921).



Figura 1.13: Parque da Residência

Fonte: [www.boeingonline.com.br](http://www.boeingonline.com.br)

Por ser também um Anfiteatro, torna-se uma boa opção para quem quer assistir a peças de teatro ou a apresentações musicais ao ar livre, ou ainda, simplesmente, sentar e aproveitar a paisagem. Na Praça do trem, um vagão de trem da antiga estrada de ferro Belém-Bragança, que tantas vezes transportou o governador Magalhães Barata pelo interior do estado, agora permite ao visitante do parque aproveitar o clima de "Belém-província".

### **1.3.9 Parque Naturalístico Mangal das Garças**

O Parque foi criado em 2005 pelo Governo do Estado Pará como consequência da revitalização de uma área de cerca de 40.000 metros quadrados. Às margens do Rio Guamá, a antiga área alagada com extenso aningal transformou-se em um belo ponto turístico de Belém.



Figura 1.14: Mangal das Garças

Foto: João Ramid

Com lagos, aves, vegetação típica, equipamentos de lazer e restaurante, o Mangal das Garças representa um pedaço de toda riqueza amazônica em plena cidade, um verdadeiro oásis para aqueles que valorizam a natureza.

### 1.3.10 Parque Zoobotânico Emílio Goeldi

Fundado em 1866 e vinculado ao Ministério da Ciência e Tecnologia e Inovação do Brasil, tem suas atividades concentradas no estudo científico dos sistemas naturais e sócio culturais da Amazônia. Realiza pesquisas, promove inovação científica, forma recursos humanos, conserva acervos e comunica conhecimento nas áreas de ciências naturais e humanas relacionadas à Amazônia.



Figura 1.15: Parque Zoobotânico Emílio Goeldi

Fonte: [www.g1.globo.com](http://www.g1.globo.com)

O Museu Emílio Goeldi, como também é chamado, mantém dois periódicos científicos: o "Boletim do Museu Paraense Emílio Goeldi. Ciências Humanas" e "Boletim do Museu Paraense Emílio Goeldi. Ciências Naturais", ambos criados em 1994.

### 1.3.11 Praça da República

O Largo da Campina, primeiro nome dado a tão conhecida hoje Praça da República, que também já foi chamada de Largo da Pólvora, era um imenso terreno descampado localizado entre o bairro da Campina e a estrada que levava a Ermida de Nossa Senhora de Nazaré. Já foi um imenso armazém para depósito de pólvora; porém, a mudança do que hoje representa a Praça da República começou a ser realizado em 1850, quando algumas árvores em forma desordenada foram plantadas.



Figura 1.16: Praça da República

Fonte: [www.noticias.orm.com.br](http://www.noticias.orm.com.br)

Em 1889, foi idealizada a construção de um monumento em homenagem a República. Porém, foi Antonio Lemos que fez a Praça da República a merecedora da beleza que os paraenses conhecem, modificando completamente a aparência do logradouro, trocando, inclusive, a pavimentação das ruas que limitavam a praça.

### 1.3.12 Theatro da Paz

Fundado em 15 de fevereiro de 1878, durante o período áureo do Ciclo da Borracha, o Theatro da Paz foi uma construção da época de grandes progressos. Belém foi considerada "A Capital da Borracha" e por esse motivo faltava um teatro de grande porte, capaz de receber espetáculos do gênero lírico. Para isso, o governo da província contrata o engenheiro militar José Tiburcio de Magalhães que dá início ao projeto arquitetônico inspirado no Teatro Scalla de Milão (Itália).



Figura 1.17: Theatro da Paz

Fonte: [www.theatrodapaz.com.br](http://www.theatrodapaz.com.br)

Foi a primeira casa de espetáculos construída na Amazônia e tem características grandiosas: 1.100 lugares, acústica perfeita, lustres de cristal, piso em mosaico de madeiras nobres, afrescos nas paredes e teto, dezenas de obras de arte, gradis e outros elementos decorativos revestidos com folhas de ouro.

#### **1.4 A maior procissão católica do Norte: Círio de Nossa Senhora de Nazaré**

Às margens do igarapé Murutucú, foi encontrada pelo caboclo Plácido José de Souza uma pequena imagem da Senhora de Nazaré, que teria sido levada por ele para sua choupana, porém, no dia seguinte, a imagem não estaria mais lá e, ao procurá-la, encontrou-a novamente no local em que tinha achado pela primeira vez. Como o ocorrido sucedeu-se várias vezes, construiu uma pequena capela no local.

Para homenagear a Virgem de Nazaré, foi autorizada pelo Vaticano, em 1792, a realização da primeira procissão organizada pelo Presidente da Província do Pará, capitão-mor Dom Francisco de Souza Coutinho. O primeiro Círio foi realizado no dia 08 de setembro de 1793, não tendo, nesses primeiros anos, data fixa para a sua ocorrência. A partir de 1901, por determinação do bispo Dom Francisco do Rêgo Maia, a procissão começou a ser realizada sempre no segundo domingo de outubro.

O Círio de Nazaré é realizado há mais de dois séculos no Pará. Uma das maiores e mais belas homenagens católicas do Brasil e do mundo. Reúne cerca de dois milhões de pessoas (romeiros) em uma caminhada de fé. O percurso de 3,6 quilômetros tem início na Catedral de Belém e segue até a Praça Santuário de Nazaré onde, durante 15 dias, a imagem permanece em exposição para os fiéis.



Figura 1.18: Círio de Nossa Senhora de Nazaré

Fonte: [www.fatoscuriososdahistoria.com](http://www.fatoscuriososdahistoria.com)

Por ser uma grande festa católica, o Círio de Belém foi registrado pelo IPHAN, em 2004, como patrimônio cultural de natureza imaterial.



## Capítulo 2

# Relações Métricas no Triângulo Retângulo e Lei dos Cossenos

Nesse capítulo será abordado um breve histórico sobre a Trigonometria. Além disso, um estudo no triângulo retângulo e suas relações métricas obtidas por semelhança. Em seguida, com essas relações, obteremos o Teorema de Pitágoras. Finalmente, a Lei dos Cossenos será demonstrada em três casos específicos de um dos ângulos internos. Todas as figuras planas deste capítulo, como triângulos e circunferências, foram construídas no software Geogebra pelo próprio autor deste trabalho.

### 2.1 Um breve histórico da Trigonometria

A palavra Trigonometria origina-se do grego: Trigonos (Triângulo) e Metrôm (medida). Dessa forma, pode-se entender Trigonometria como medida de triângulos. A aplicabilidade da trigonometria possui registros por babilônios e antigos egípcios fundamentalmente na agrimensura e na astronomia, pois utilizando as relações existentes entre as medidas dos lados e dos ângulos era possível determinar comprimentos inacessíveis como a distância entre dois planetas.

A literatura relata que Hiparco (190 - 125 a.C.) é considerado o mais influente astrônomo da Antiguidade. Ele foi responsável por desenvolver trabalhos de suma importância no observatório de Rodas. Neste período, lhe foi dado todo mérito a determinação do mês lunar médio e até um catálogo com cerca de 850 estrelas. Na Grécia, introduziu a divisão do círculo em  $360^\circ$  e, além disso, conseguiu estabelecer uma relação sobre pontos na superfície terrestre com latitudes e longitudes. Por esses motivos e também pelo fato de escrever a primeira tabela trigonométrica, Hiparco ficou conhecido como o "Pai da Trigonometria".

Registros e pesquisas arqueológicas indicam que bem antes da Era Cristã, o céu era cuidadosamente estudado para se entender os movimentos dos objetos celestes visíveis a olho nu. As estimativas de distâncias, tamanhos e posições já eram pensadas a partir dos triângulos, pela prática da triangulação, técnica utilizada para determinar distâncias desde que conhecido um lado e dois ângulos de um triângulo, pois com essas informações é possível calcular o terceiro ângulo e os outros dois lados.

Se no início, a Trigonometria era bastante utilizada no estudo da agrimensura e astronomia, hoje percebemos a sua utilização em diversas áreas do conhecimento, inclusive na Medicina, onde, por exemplo, as ultrassonografias, por meio da emissão e reflexão (eco) de ultrassons, permite fazer investigações no interior do corpo humano.

## 2.2 Semelhança

Há algum tempo, o desenho de figuras e seu estudo era feito a mão e não tinha recursos para auxiliar nesse processo. Os estudiosos dispunham apenas de materiais como régua e muita habilidade e esboçavam traços com perfeição.

Muitas atividades podem ser realizadas utilizando recursos como ampliação ou redução do tamanho original de algum objeto ou pessoa. Podemos ver claramente esses recursos na revelação de uma fotografia, elaboração da planta de uma casa, maquetes de construções civis e até esculturas.

Com a tecnologia, esses recursos ficaram mais fáceis de serem executados. Atualmente, os computadores e máquinas copiadoras fazem ampliação e redução de figuras em um simples toque ou execução de um comando.

### 2.2.1 Figuras Semelhantes

A origem da palavra **semelhante** vem do latim *similare*, que significa "parecer com, ter a mesma aparência". No entanto, a semelhança de figuras é distinta com o sentido que usamos no cotidiano como sinônimo de "parecido", por exemplo, ao comparar o rosto de duas pessoas.

Como a trigonometria e a geometria estão bastante associadas nesse ramo da matemática, o conceito de figuras semelhantes se dá a partir da ideia de que duas figuras são semelhantes se uma puder ser obtida da outra por meio de uma transformação - ampliação ou redução - preservando a forma ou através de movimentos como rotação e translação.

No dia a dia, é comum encontrarmos figuras semelhantes.



Figura 2.1: Mercado Ver-o-Peso

Foto: divulgação GecParatur

Observe que houve uma redução da primeira imagem para a segunda, mantendo a mesma forma.

Outro exemplo que podemos observar semelhança é a escultura *O pensador*, criada pelo artista plástico francês August Rodin. Essa obra chama bastante atenção por ter ricos detalhes para demonstrar a expressão corporal de uma pessoa pensando.

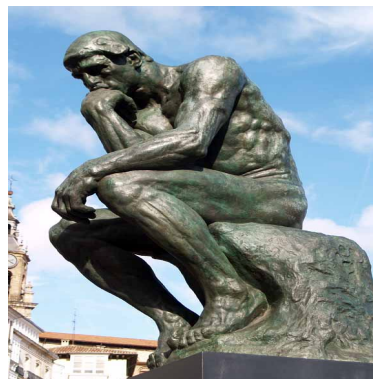


Figura 2.2: O Pensador

Fonte: [www.elianedelacerda.com/2015/04/o-pensador](http://www.elianedelacerda.com/2015/04/o-pensador)

Um fato interessante sobre esta escultura é que sua primeira versão tinha 72 centímetros de altura. Em 1904, Rodin resolveu expor outra versão, feita de bronze, com altura de 1,83 metro de altura, mantendo o formato original em outra proporção.

### 2.2.2 Polígonos Semelhantes

Observe os dois polígonos abaixo:

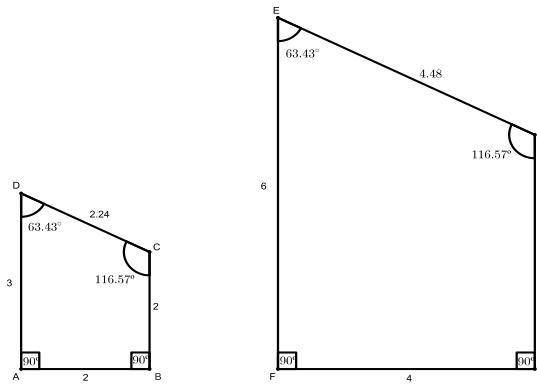


Figura 2.3: Quadriláteros Semelhantes

Note que os ângulos correspondentes possuem as medidas iguais, ou seja, são congruentes.

$$\angle A = \angle F$$

$$\angle B = \angle G$$

$$\angle C = \angle H$$

$$\angle D = \angle E$$

Além disso, as medidas dos lados correspondentes são proporcionais.

$$\frac{\overline{FE}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{FG}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{GH}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{HE}}{\overline{CD}} = 2$$

A razão entre as medidas dos lados correspondentes é chamada de **razão de semelhança** ou **coeficiente de proporcionalidade**. No exemplo supracitado, temos a razão de semelhança igual a 2.

Portanto, dois polígonos são semelhantes quando os ângulos correspondentes são congruentes e os lados correspondentes são proporcionais.

Agora observe os polígonos apresentados a seguir:

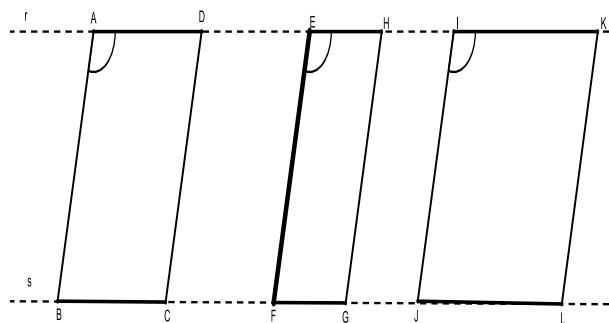


Figura 2.4: Retas Paralelas.

Temos duas retas,  $r$  e  $s$ , paralelas, e os ângulos correspondentes, em destaque, são congruentes. Porém, analisando os paralelogramos, dois a dois, é possível perceber que os lados correspondentes não são proporcionais e, desse modo, não formam pares de polígonos semelhantes.

Outro exemplo pode ser analisado. Veja os quadriláteros abaixo:

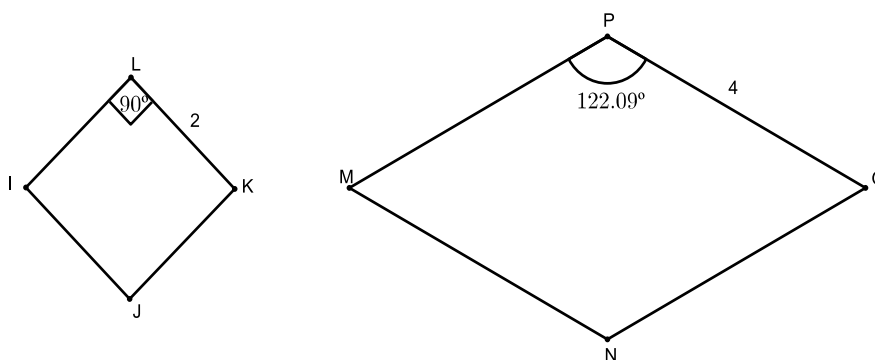


Figura 2.5: Losangos.

O quadrado IJKL e o losango MNOP tem lados correspondentes proporcionais. Mas, os ângulos correspondentes não são congruentes. Por esse motivo, o quadrado e o losango não são semelhantes.

### 2.3 Semelhança de triângulos

Dois triângulos são semelhantes se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices de tal maneira que os ângulos correspondentes sejam iguais e lados correspondentes sejam proporcionais.

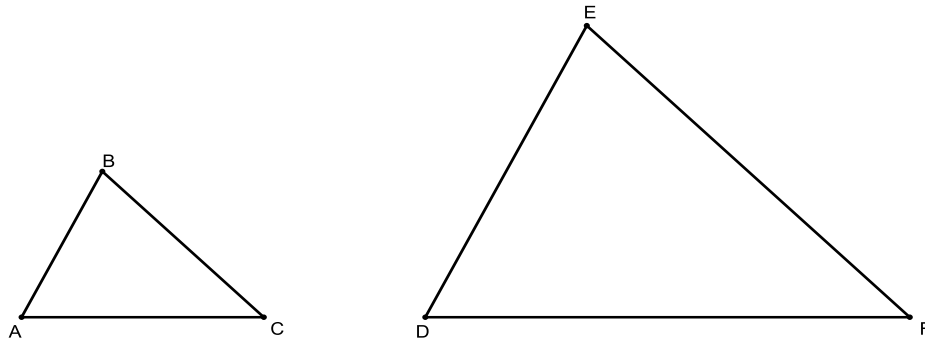


Figura 2.6: Triângulos Semelhantes.

Para que os triângulos ABC e DEF sejam semelhantes é necessário que:

$$\angle A = \angle D$$

$$\angle B = \angle E$$

$$\angle C = \angle F$$

e

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = k$$

O quociente comum  $k$  entre as medidas dos lados correspondentes é chamado de razão de proporcionalidade entre dois triângulos. A seguir vamos analisar os casos de semelhança de triângulos.

## 2.4 Casos de semelhança de triângulos

Há situações nas quais temos triângulos parecidos, não é necessário verificar se todos os ângulos são iguais e todos os lados correspondentes são proporcionais. Basta verificar algumas condições. Essas condições são os casos de semelhança de triângulos.

### 2.4.1 1º Caso de semelhança: Ângulo - Ângulo (A.A.)

**Teorema 2.1.** *Dados dois triângulos ABC e DEF, se  $\angle A = \angle D$  e  $\angle C = \angle F$ , então os triângulos são semelhantes.*

Considere os triângulos ABC e DEF abaixo, de tal forma que  $\angle A = \angle D$  e  $\angle C = \angle F$ :

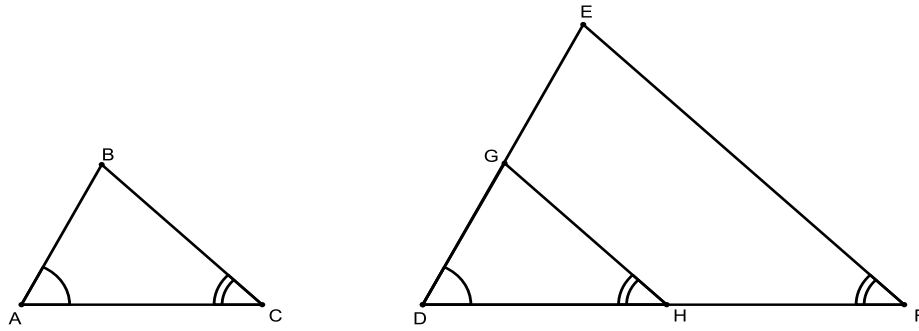


Figura 2.7: Triângulos Semelhantes: caso 1.

Já que a soma dos ângulos internos de um triângulo é  $180^\circ$ , então pelo fato de  $\angle A = \angle D$  e  $\angle C = \angle F$ , é possível concluir que  $\angle B = \angle E$ . Basta provar que há uma proporcionalidade nas medidas dos lados. Para isso, marcando  $H$  no segmento  $\overline{DF}$ , de tal forma que  $\overline{DH} = \overline{AC}$ . Pelo ponto  $H$ , foi traçado o segmento  $\overline{GH}$ , paralelo a  $EF$ , tal que  $\overline{GH} = \overline{BC}$ . Tem-se, assim, o triângulo  $DGH$  congruente ao triângulo  $ABC$ . A partir daí podemos escrever a proporção:

$$\frac{\overline{DH}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{DG}}{\overline{DE}}$$

Como  $DH = AC$  e  $DG = AB$  então, temos:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{DE}}$$

Analogamente, temos:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}}$$

#### 2.4.2 2º Caso de semelhança: Lado - Ângulo - Lado (L.A.L.)

**Teorema 2.2.** *Se, em dois triângulos  $ABC$  e  $DEF$  tem-se  $\angle A = \angle D$  e  $\frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{DE}}$ , então os triângulos são semelhantes.*

Construa o triângulo  $HIJ$  que tenha  $HI = DF$ ,  $\angle H = \angle A$  e  $\angle I = \angle C$ .

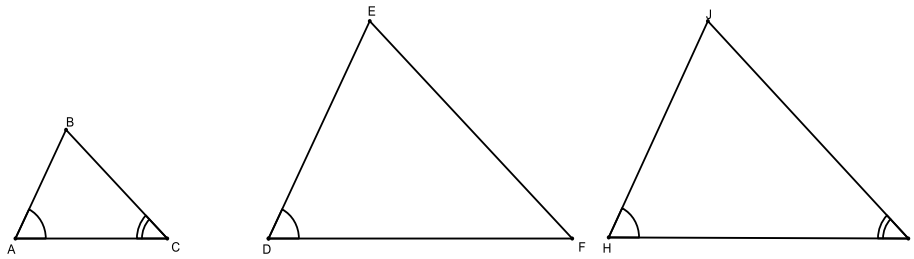


Figura 2.8: Triângulos Semelhantes: caso 2.

Segundo o teorema 2.1, os triângulos  $ABC$  e  $HIJ$  são semelhantes, logo:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{HI}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{HJ}}$$

Como  $HI = DF$ , e por hipótese  $\frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{DE}}$  e pela igualdade acima então:

$$HJ = DE$$

Como, por construção  $HI = DF$  e  $\angle H = \angle A = \angle D$  e  $ABC$  e  $HIJ$  são semelhantes, concluímos que  $ABC$  e  $DEF$  são semelhantes.

### 2.4.3 3º Caso de semelhança: Lado - Lado - Lado (L.L.L.)

**Teorema 2.3.** *Se, em dois triângulos  $ABC$  e  $DEF$  tem-se*

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{FE}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{ED}}$$

*então os triângulos são semelhantes.*



Construa um triângulo  $HIJ$  que tenha  $\angle H = \angle A$ ,  $HI = DF$ ,  $HJ = DE$ . Por hipótese temos:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{HI}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{HJ}}$$

Portanto, pelo teorema 2.2, os triângulos  $ABC$  e  $HIJ$  são semelhantes.

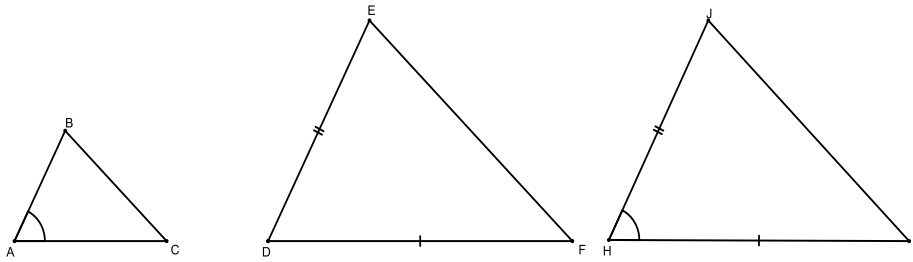


Figura 2.9: Triângulos Semelhantes: caso 3.

Da igualdade acima decorre que:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{HI}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{IJ}}$$

Segue-se que  $IJ = FE$ . Como, por construção,  $HI = DF$  e  $HJ = DE$  então os triângulos  $HIJ$  e  $DEF$  são congruentes. Como  $ABC$  e  $HIJ$  são semelhantes, então, por transitividade,  $ABC$  e  $DEF$  também são semelhantes.

## 2.5 Elementos de um triângulo retângulo

Desde a antiguidade já havia registro de utilização de triângulos retângulos na agrimensura. Esse tipo de triângulo tem uma riqueza quando traçamos segmentos e fazemos relações entre as medidas dos seus lados. Tais relações são aplicações de semelhanças, mas, antes disso, devemos apresentar que elementos fazem parte do triângulo retângulo.

Um triângulo chama-se retângulo quando o valor de um dos seus ângulos internos for de  $90^\circ$ , ou seja, um ângulo reto e, como consequência disso, os outros dois ângulos serão agudos.

No triângulo abaixo podemos classificar cada segmento.

Nesse triângulo retângulo, o lado  $\overline{BC}$  que fica oposto ao ângulo reto é o de maior medida e recebe o nome de **hipotenusa**; os lados adjacentes ao ângulo reto,  $\overline{AB}$  e  $\overline{AC}$ , são chamados de **catetos**.

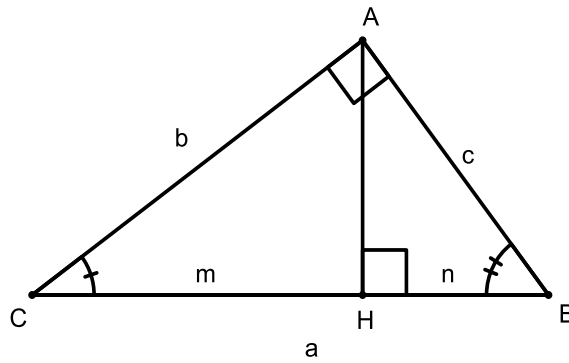


Figura 2.10: Triângulo Retângulo.

Ao traçar o segmento  $\overline{AH}$ , perpendicular à hipotenusa, temos a altura relativa em relação à  $\overline{BC}$ .

### 2.5.1 Semelhanças em um triângulo retângulo

Podemos separar o triângulo ABC em dois outros triângulos retângulos: AHC e AHB.

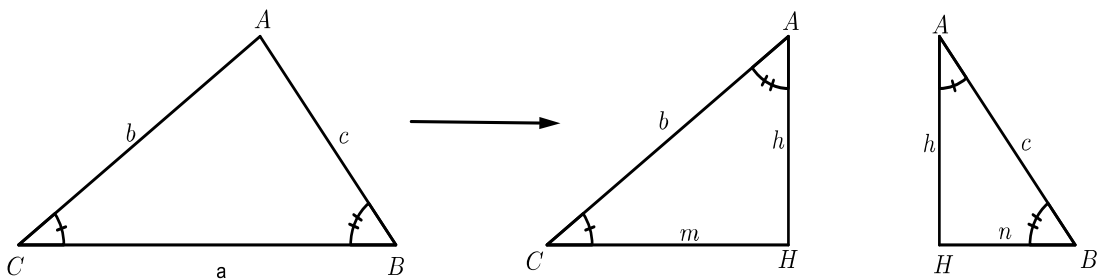


Figura 2.11: Triângulos Retângulos.

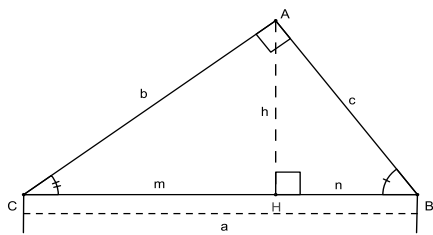
Note que o triângulo ABC é semelhante tanto ao triângulo AHC como ao AHB, pois os ângulos  $\angle A$  e  $\angle H$  são retos e, além disso, o ângulo  $\angle B$  é comum ao triângulo ABC e AHB. Da mesma forma que o ângulo  $\angle C$  é comum ao ABC e AHC.

Com essa afirmação, podemos observar que os triângulos AHC e AHB também são semelhantes entre si, pois a medida dos ângulos correspondentes são iguais.

Usando o fato de que os três triângulos são semelhantes entre si, podemos estabelecer algumas relações entre as medidas dos seus lados.

Considerando os triângulos ABC e AHB, temos:

Como todos os lados correspondentes são proporcionais, é possível escrever as seguintes proporções:



Onde :  
*a* : medida da hipotenusa  
*b* e *c* : medidas dos catetos  
*h* : medida da altura relativa a hipotenusa  
*m* e *n* : medidas das projeções dos catetos sobre a hipotenusa

Figura 2.12: Triângulos Retângulos 2.

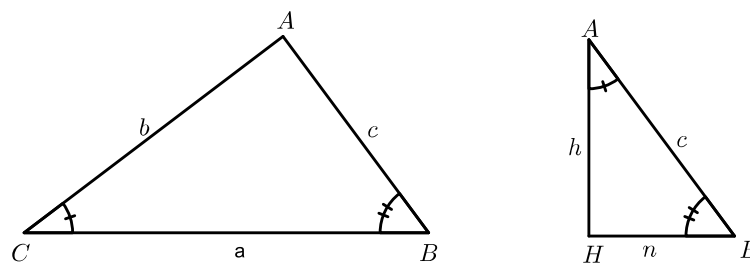


Figura 2.13: Triângulos Retângulos ABC e AHB.

$$\begin{aligned} \frac{a}{c} &= \frac{c}{n} \\ c^2 &= a \cdot n \end{aligned} \tag{2.1}$$

Assim como:

$$\begin{aligned} \frac{a}{c} &= \frac{b}{h} \\ a \cdot h &= b \cdot c \end{aligned} \tag{2.2}$$

E também:

$$\begin{aligned} \frac{c}{n} &= \frac{b}{h} \\ c \cdot h &= b \cdot n \end{aligned} \tag{2.3}$$

Ao analisar os triângulos ABC e AHC, temos:

Como todos os lados correspondentes são proporcionais, é possível escrever as seguintes proporções:

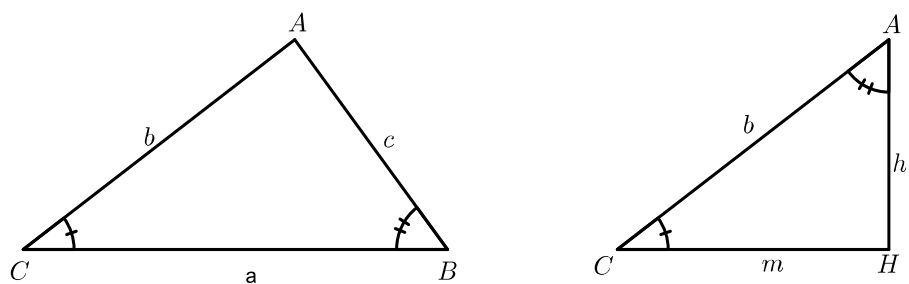


Figura 2.14: Triângulos Retângulos ABC e AHC.

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} &= \frac{c}{h} \\ a \cdot h &= b \cdot c \end{aligned} \quad (2.4)$$

Assim como:

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} &= \frac{b}{m} \\ b^2 &= a \cdot m \end{aligned} \quad (2.5)$$

E também:

$$\begin{aligned} \frac{c}{h} &= \frac{b}{m} \\ c \cdot m &= b \cdot h \end{aligned} \quad (2.6)$$

Finalmente, vamos analisar os triângulos AHB e AHC:

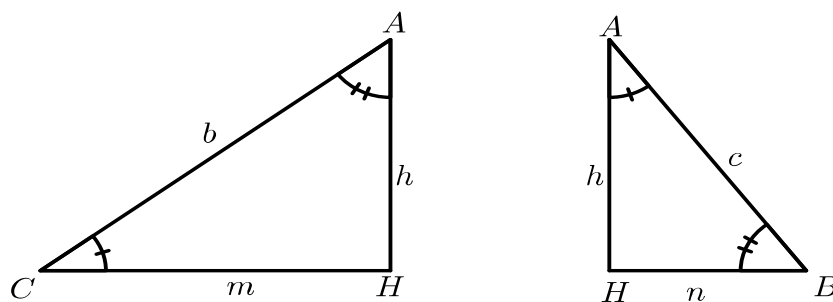


Figura 2.15: Triângulos Retângulos AHB e AHC.

Deste triângulo, podem ser retiradas as seguintes relações:

$$\begin{aligned}\frac{c}{b} &= \frac{h}{m} \\ c.m &= b.h\end{aligned}\tag{2.7}$$

Assim como:

$$\begin{aligned}\frac{h}{m} &= \frac{n}{h} \\ h^2 &= m.n\end{aligned}\tag{2.8}$$

E por último:

$$\begin{aligned}\frac{c}{b} &= \frac{n}{h} \\ c.h &= b.n\end{aligned}\tag{2.9}$$

A partir dessas relações podemos demonstrar um dos Teoremas mais conhecidos da antiguidade. O Teorema de Pitágoras.

## 2.6 O Teorema de Pitágoras

Matemático e filósofo, Pitágoras foi um grego, nascido na ilha de Samos, que viajou por muitos lugares como Pérsia e Egito e, por onde passava, deixava um legado importante para a matemática. Fundou a Escola Pitagórica que consistia em um centro de estudo além da Matemática, bem como outras áreas como Ciências, Filosofia, etc.

Seu nome foi dado a um teorema que, apesar de os babilônios e egípcios já o utilizarem em marcação de terras, Pitágoras foi o primeiro a demonstrá-lo. Com esse teorema, é possível estabelecer uma relação entre a hipotenusa e os catetos de um triângulo retângulo.

Embora exista diferentes demonstrações do Teorema de Pitágoras, a seguir serão apresentadas apenas três.

**Teorema 2.4.** *Em todo triângulo retângulo, a soma dos quadrados das medidas dos catetos é igual ao quadrado da medida da hipotenusa.*

### 2.6.1 Primeira demonstração : semelhança de triângulos

Como já foram vistas algumas relações métricas no triângulo retângulo, se somarmos membro a membro 2.1 e 2.5 da página 28 e 29 será obtido o seguinte resultado:

$$c^2 + b^2 = a.n + a.m \quad (2.10)$$

$$c^2 + b^2 = a.(n + m)$$

$$c^2 + b^2 = a.a$$

$$c^2 + b^2 = a^2 \quad c.q.d.$$

### 2.6.2 Segunda demonstração : utilizando circunferência e teorema das cordas.

Antes de demonstrar o teorema de Pitágoras, vamos demonstrar o Teorema da Cordas de uma circunferência.

**Teorema 2.5.** Se duas cordas,  $EF$  e  $CD$ , de uma circunferência  $f$ , se intersectam em  $A$  então

$$\overline{AF} \cdot \overline{AE} = \overline{AC} \cdot \overline{AD}$$

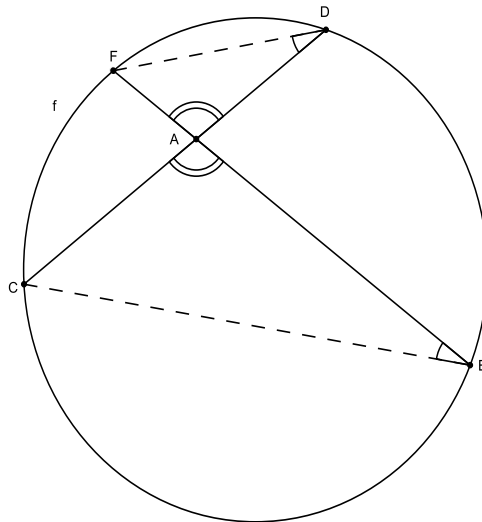


Figura 2.16: Circunferência com cordas.

Note que os triângulos  $FAD$  e  $CAE$  são semelhantes pelo caso  $A.A.$ , pois os ângulos  $\widehat{FAD}$  e  $\widehat{CAE}$  são opostos pelo vértice  $A$  e por isso tem o mesmo valor, além disso, os ângulos  $\widehat{CDF}$  e  $\widehat{CEF}$  formam o mesmo arco  $\widehat{CF}$ , logo também são iguais. Aplicando a proporção entre os lados correspondentes temos:

$$\frac{AF}{AC} = \frac{AD}{AE} \quad (2.11)$$

$$AF \cdot AE = AC \cdot AD$$

Considere a circunferência  $f$ , de raio  $a$  e centro  $B$ , na qual foram traçadas duas cordas,  $\overline{CD}$  e  $\overline{EF}$ , perpendiculares entre si, de modo que se intersectam em  $A$  e além disso,  $EF$  passa pelo centro  $B$ . A partir daí, tome o triângulo  $ABC$ , retângulo em  $A$ .

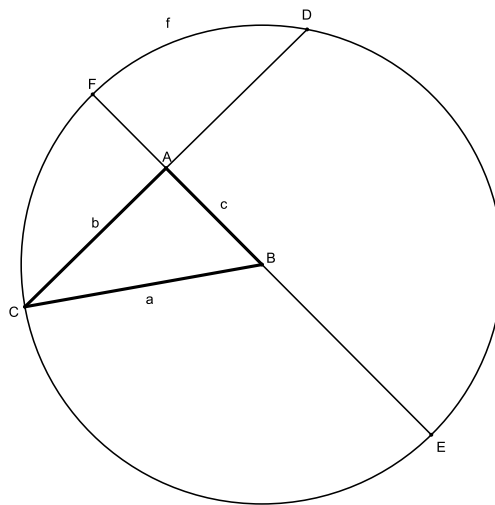


Figura 2.17: Circunferência com um triângulo retângulo .

Pelo Teorema das cordas 2.5, temos:

$$\overline{AF} \cdot \overline{AE} = \overline{CA} \cdot \overline{AD} \quad (2.12)$$

Contudo, pela figura sabemos que :

$$\begin{aligned} \overline{AF} &= a - c \\ \overline{CA} &= b \\ \overline{AE} &= a + c \\ \overline{AD} &= b \end{aligned} \quad (2.13)$$

A igualdade  $AC = AD = b$  se deve ao fato de que dada uma corda passando pelo centro, esta vai ser mediatriz de qualquer outra corda que for perpendicular a ela.

Substituindo 2.13 em 2.12, temos:

$$\begin{aligned}
 (a - c).(a + c) &= b.b & (2.14) \\
 a^2 - c^2 &= b^2 \\
 a^2 &= b^2 + c^2 & c.q.d.
 \end{aligned}$$

Essa demonstração foi atribuída ao W. Rupert em 1900.

### 2.6.3 Terceira demonstração : Euclides, do livro Elementos.

Essa demonstração é feita por igualdade de áreas de triângulos, utilizando o fato de que dados dois ou mais triângulos, com a medida de suas bases iguais e mesma altura, terão a mesma área. Para isso, Euclides utiliza uma figura que é descrita como moinho de vento, cauda de pavão e cadeira de noiva.

Considere um triângulo ABC retângulo em A. Constrói-se sobre o lado BC, o quadrado BDEC, e sobre os lados AB e AC, os quadrados BAGF e CAHK, respectivamente. Com a finalidade de surgirem triângulos, são traçados os segmentos  $\overline{FC}$ ,  $\overline{BK}$ ,  $\overline{DA}$ ,  $\overline{EA}$  e  $\overline{AL}$  paralelo a  $\overline{BD}$ . Veja a figura:

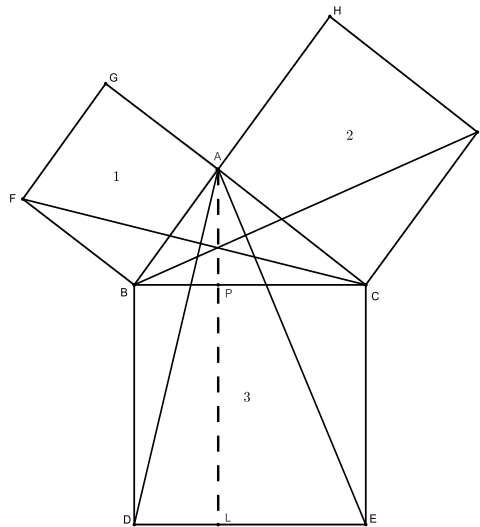


Figura 2.18: Teorema de Pitágoras por Euclides.

A primeira observação que podemos fazer é que os triângulos ABD e FBC são semelhantes pelo caso L.A.L. (lado-ângulo-lado) e congruentes, pois os lados AB e FB são iguais, da mesma forma que BD e BC e além disso, o  $\widehat{ABD}$  é formado pelo ângulo reto mais o  $\widehat{ABC}$ , assim como o ângulo  $\widehat{FBC}$  é formado por um ângulo reto mais  $\widehat{ABC}$ , portanto são congruentes.

Se chamarmos de  $A_1$  a área do quadrado 1 e  $A_2$  a área do quadrado 2, teremos:



$$c^2 = 2A(FBC) = A(BPLD) \quad (2.15)$$

Analogamente:

$$b^2 = 2A(BCK) = A(PCEL) \quad (2.16)$$

Somando as equações 2.15 e 2.16, temos:

$$c^2 + b^2 = A(BPLD) + A(PCEL) = a^2 \quad c.q.d. \quad (2.17)$$

## 2.7 Principais relações trigonométricas no triângulo retângulo

Como na próxima sessão precisaremos de notações trigonométricas para a demonstração da lei dos cossenos, fixaremos nesta sessão tais relações.

Dado um ângulo agudo  $\angle B$ , marcamos sobre um dos seus lados os pontos  $A_1, A_2, A_3, \dots$  e traçamos por eles, as perpendiculares  $\overline{A_1C_1}, \overline{A_2C_2}, \overline{A_3C_3}, \dots$ , conforme a figura abaixo.

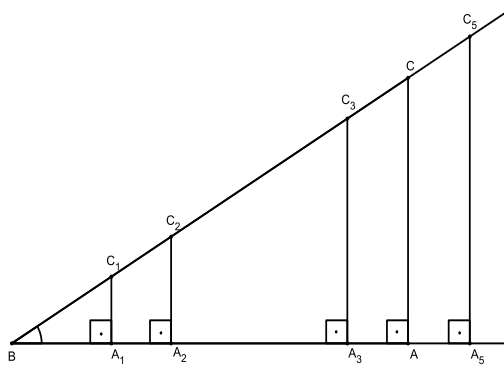


Figura 2.19: Razões Trigonômicas

Os triângulos  $BA_1C_1, BA_2C_2, BA_3C_3$ , etc. são todos semelhantes entre si. Então:

1. fixado  $\angle B$ , o cateto oposto a  $\angle B$  e a hipotenusa são diretamente proporcionais.

$$\frac{\overline{A_1C_1}}{\overline{BC_1}} = \frac{\overline{A_2C_2}}{\overline{BC_2}} = \frac{\overline{A_3C_3}}{\overline{BC_3}} = \dots$$

2. fixado  $\angle B$ , o cateto adjacente a  $\angle B$  e a hipotenusa são diretamente proporcionais.

$$\frac{\overline{BA_1}}{\overline{BC_1}} = \frac{\overline{BA_2}}{\overline{BC_2}} = \frac{\overline{BA_3}}{\overline{BC_3}} = \dots$$

3. fixado  $\angle B$ , os catetos oposto e adjacente a  $\angle B$  são diretamente proporcionais.

$$\frac{\overline{A_1C_1}}{\overline{BA_1}} = \frac{\overline{A_2C_2}}{\overline{BA_2}} = \frac{\overline{A_3C_3}}{\overline{BA_3}} = \dots$$

Das razões construídas acima, verificamos que elas não dependem do tamanho dos triângulos  $\Delta BA_1C_1, \Delta BA_2C_2, \Delta BA_3C_3, \dots$ , mas sim apenas do valor do ângulo  $\angle B$ .

Considerando assim um triângulo retângulo e fixando um ângulo agudo  $\angle B$ , temos:

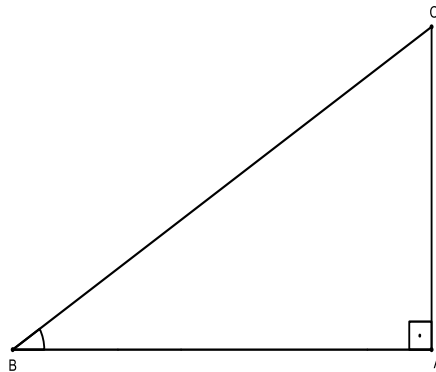


Figura 2.20: Definição das Principais Razões Trigonômicas

1. *Sen* de um ângulo agudo é a razão entre o cateto oposto ao ângulo e a hipotenusa.

$$\text{sen } \angle B = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$$

2. *Cosseno* de um ângulo agudo é a razão entre o cateto adjacente ao ângulo e a hipotenusa.

$$\text{cos } \angle B = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$$

3. *Tangente* de um ângulo agudo é a razão entre o cateto oposto ao ângulo e cateto adjacente ao ângulo.

$$\text{tg } \angle B = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$$

Considerando a razão  $\frac{\text{sen } \angle B}{\text{cos } \angle B}$ , temos:

$$\frac{\text{sen } \angle B}{\text{cos } \angle B} = \frac{\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}}{\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \cdot \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \text{tg } \angle B$$

Logo:

$$\text{tg } \angle B = \frac{\text{sen } \angle B}{\text{cos } \angle B}$$

## 2.8 Lei dos Cossenos

**Teorema 2.6.** Em um triângulo  $ABC$  qualquer, de lados  $a$ ,  $b$  e  $c$ , opostos respectivamente aos ângulos  $\widehat{A}$ ,  $\widehat{B}$  e  $\widehat{C}$ , valem as relações:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos\widehat{A}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2.a.c.\cos\widehat{B}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2.a.b.\cos\widehat{C}$$

Fixaremos a demonstração em  $\widehat{A}$ , pois de forma análoga se pode chegar as outras relações.

Considere  $H$  o pé da altura relativa ao lado  $AC$  e  $h$  sua medida. Analisamos, separadamente, os casos  $\widehat{A} < 90^\circ$ ,  $\widehat{A} = 90^\circ$  e  $\widehat{A} > 90^\circ$ .

### 2.8.1 1º Caso: $\widehat{A} < 90^\circ$

Na figura 2.21, o ponto  $H$  pertence ao lado  $AC$ , podemos escrever as seguintes equações:

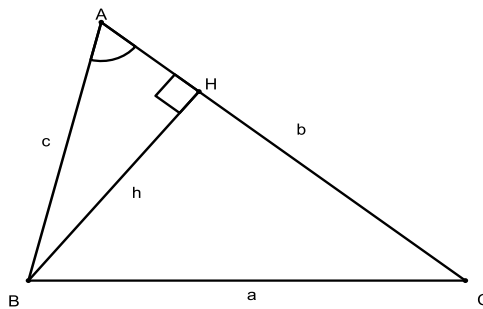


Figura 2.21: Lei do Cossenos: caso  $\widehat{A} < 90^\circ$ .

$$\overline{AH} = c.\cos\widehat{A} \quad (2.18)$$

e

$$h = c.\sen\widehat{A} \quad (2.19)$$

Substituindo as equações 2.19 e 2.18 em 2.20, temos:

$$a^2 = h^2 + \overline{CH}^2 \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned}
&= h^2 + (b - \overline{AH})^2 \\
&= (c \cdot \widehat{\text{sen}}\hat{A})^2 + (b - \overline{AH})^2 \\
&= b^2 + c^2 \cdot (\widehat{\text{sen}}^2\hat{A} + \widehat{\text{cos}}^2\hat{A}) - 2 \cdot b \cdot c \cdot \widehat{\text{cos}}\hat{A} \\
&= b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \widehat{\text{cos}}\hat{A}
\end{aligned}$$

### 2.8.2 2º Caso: $\hat{A} = 90^\circ$

Note que, neste caso,  $\widehat{\text{cos}}90^\circ = 0$  segue o teorema de Pitágoras, pois a altura  $h$  coincide com o lado  $\overline{BA}$ .

### 2.8.3 3º Caso: $\hat{A} > 90^\circ$

Neste caso, de acordo com a figura 2.22, o pé da altura não pertence mais ao segmento  $\overline{AC}$ , pois é externo ao triângulo  $ABC$ .

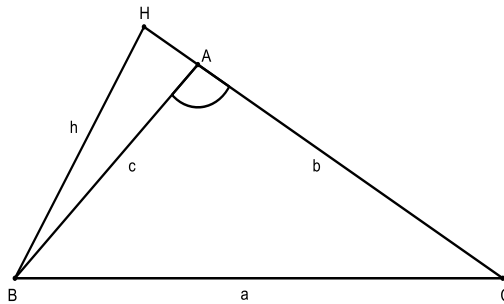


Figura 2.22: Lei do Cossenos: caso  $\hat{A} > 90^\circ$ .

Porém, como  $\widehat{BAH} = 180^\circ - \hat{A}$  e  $\widehat{\text{cos}}(180^\circ - \hat{A}) = -\widehat{\text{cos}}\hat{A}$ , aplicando relações trigonométricas no triângulo  $BHA$ , temos:

$$\overline{AH} = -c \cdot \widehat{\text{cos}}\hat{A} \quad (2.21)$$

e

$$h = c \cdot \widehat{\text{sen}}\hat{A} \quad (2.22)$$

Como o triângulo  $BCH$  é retângulo, por Pitágoras, temos:

$$\begin{aligned} a^2 &= h^2 + \overline{CH}^2 & (2.23) \\ &= h^2 + (b + \overline{AH})^2 \\ &= (c.\widehat{\text{sen}}\hat{A})^2 + (b - c.\widehat{\text{cos}}\hat{A})^2 \\ &= b^2 + c^2 - 2.b.c.\widehat{\text{cos}}\hat{A} \end{aligned}$$

No próximo capítulo, veremos como podemos aplicar esses conceitos na "Cidade das Mangueiras". Faremos uma lista de exercícios que vão trazer esse conteúdo mais próximo da nossa realidade.

## Capítulo 3

# Aplicações na Cidade das Mangueiras

É possível fazer inúmeras aplicações com triângulos na Cidade das Mangueiras. Contextualizaremos situações que envolvam semelhança, relações métricas do triângulo retângulo e lei dos cossenos. Os dados das questões apresentadas serão reais para que tenhamos uma maior proximidade possível da realidade.

Traremos questões clássicas da Trigonometria adaptadas no contexto paraense. Mostraremos como um modelo real de uma situação problema pode ser transformado em um modelo matemático e desta forma aplicaremos o conteúdo em questão de forma concreta, sem a preocupação de reproduzir cálculos que não tenham algum direcionamento para a vida do aluno, pois desta forma, acreditamos que haja produção do conhecimento sobre componentes matemáticos.

### 3.1 Aplicação 1: trajeto do Círio de Nazaré;

O mapa indica parte do trajeto do Círio de Nossa Senhora de Nazaré: Mercado de Ferro, na Boulevard Castilho França, até o início da Av. Presidentes Vargas (770m aproximadamente) e a partir daí até o início da Praça da República (560 m). O encontro da Blvd. Castilho França com Av. Presidente Vargas forma um ângulo de  $80^\circ$ . Quantos metros os fiéis caminhariam, se fosse possível fazer percurso que vai do Mercado de Ferro até o início da Praça da República o mais curto possível? (Dados:  $\sin 80^\circ = 0,98$ ;  $\cos 80^\circ = 0,17$ ;  $\operatorname{tg} 80^\circ = 5,67$ ).



Figura 3.1: Trajeto do Círio.

Fonte: Google Maps

Vejamos o modelo matemático que traduz essa situação:

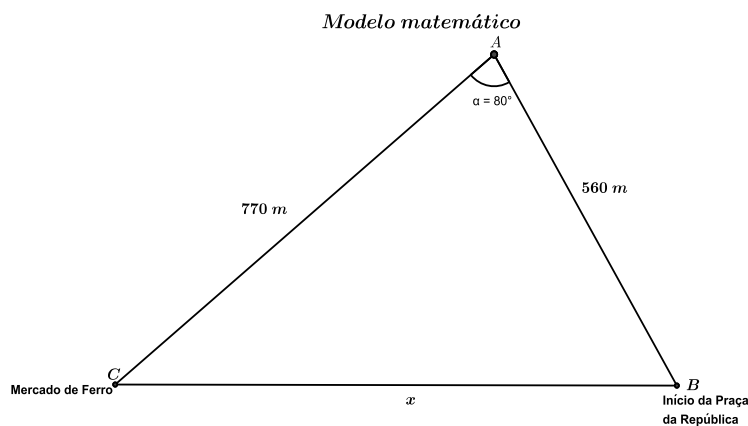


Figura 3.2: Modelo matemático do trajeto do Círio de Nazaré.

Neste caso, temos um triângulo do qual é fornecido a medida de dois dos seus lados e o ângulo que esses lados formam entre si. Um solução pode ser feita a partir da Lei dos cossenos.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos\hat{A} \quad (3.1)$$

$$x^2 = 770^2 + 560^2 - 2.770.560.\cos 80^\circ$$

$$x \approx 870 \text{ m}$$

Se fosse possível fazer o trajeto, que sai do Mercado Velho até o início da Praça da República, em linha reta, este teria 870 metros.

### 3.2 Aplicação 2: a distância que os olhos alcançam na linha do horizonte na Bahia de Guajará;

Marcos, sob uma altura de 1,70 m , avista o pôr-do-sol do Portal da Amazônia, um ponto turístico na orla de Belém. Encantado com a cena, teve a brilhante ideia de calcular a distância relativa da linha do horizonte. Para isso, descobriu que a distância aproximada do raio da terra mede 6400 km. Ajude Marcos resolver esse problema.

Observe a situação real que Marcos está tentando descobrir:

*Modelo real;*

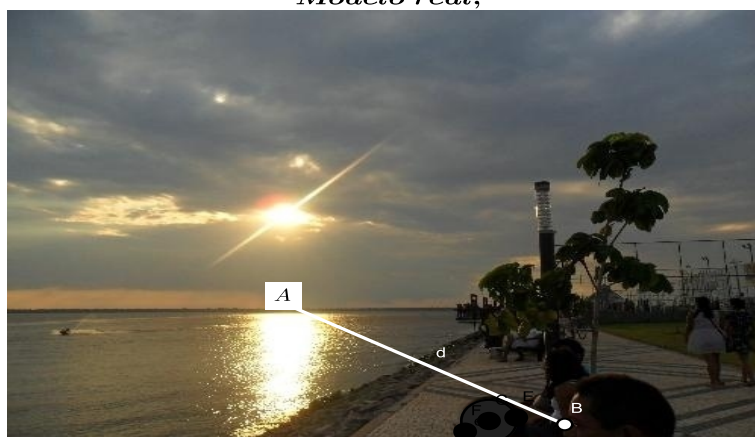
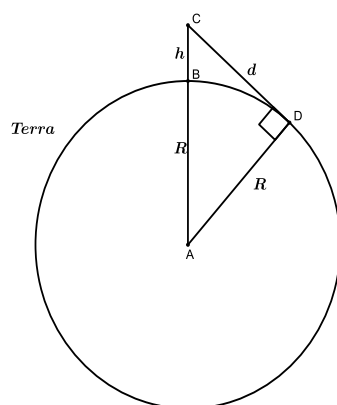


Figura 3.3: Pôr-do-sol no Portal da Amazônia.

Foto: Juarez Brito dos Santos

Podemos atribuir o seguinte modelo para a situação:



*Faça as seguintes considerações :*  
 $\overline{BC}$  = altura da visão de Marcos;  
 $\overline{AB} = \overline{AD}$  = raio da Terra;  
 $\overline{CD}$  = linha do horizonte  
sob os olhos de Marcos;

Figura 3.4: Modelo matemático do Pôr-do-sol no Portal da Amazônia.

Sabemos que a linha do horizonte é tangente à superfície da Terra, formando um ângulo de  $90^\circ$  com o raio  $R$ . Da mesma forma, Marcos, em pé está perpendicular a superfície. Temos um triângulo retângulo em  $D$ . Utilizando o Teorema 2.4 da página 30, temos:



$$\begin{aligned}
 a^2 &= b^2 + c^2 & (3.2) \\
 (R + h)^2 &= d^2 + R^2 \\
 (6400000 + 1,70)^2 &= d^2 + 6400000^2 \\
 d^2 &= (6400000 + 1,70)^2 - 6400000^2 \\
 d^2 &= 21760002,89 \\
 d &\approx 4665 \text{ m}
 \end{aligned}$$

Portanto, a distância procurada é aproximadamente 4665 metros.

### 3.3 Aplicação 3: parede do Museu São José Liberto;

Inaugurado em 11 de outubro de 2002, o Museu São José Liberto é uma referência de território criativo e turístico de Belém do Pará. O prédio principal data de 1749 e foi erguido para ser o convento de São José. No espaço interno do museu, há um pátio com uma fonte de água centralizado. Nessa fonte colocou-se um pedra, no ponto A, para demarcar o centro daquela construção. Dessa pedra, é possível visualizar uma das paredes internas,  $\overline{BC}$ , com 24,60 metros de comprimento. Sabendo que o ângulo  $B\hat{A}C$  é de  $100,8^\circ$ , determine a distância que a pedra se encontra dessa parede. Dados:  $\text{sen } 100,8^\circ = 0,98$ ;  $\text{cos } 100,8^\circ = -0,18$  e  $\text{tg } 100,8^\circ = -5,24$ ;



Figura 3.5: Pátio do Museu São José Liberto.

Fonte: [www.tripadvisor.com.br](http://www.tripadvisor.com.br)

Uma solução para esse problema é através da Lei dos cossenos para calcular a distância da pedra a qualquer um dos vértices,  $B$  ou  $C$  da parede, pois a pedra está centralizada.

*Modelo matemático*

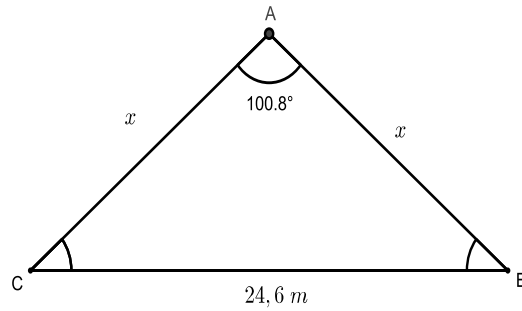


Figura 3.6: Modelo matemático do pátio do Museu.

Pela lei dos cossenos, temos:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos\hat{A} & (3.3) \\ 24,6^2 &= x^2 + x^2 - 2.x.x.\cos 100,8^\circ \\ 605,16 &= 2.x^2 - 2.x^2.(-0,18) \\ 2,36.x^2 &= 605,16 \\ x^2 &= 256,42 \\ x &\approx 16,01 \text{ m} \end{aligned}$$

De posse da distância da pedra ao ponto  $B$ , para determinar o comprimento dessa pedra a parede, precisa-se traçar um ponto  $D$ , em  $BC$ , de tal forma que  $AD$  seja perpendicular a parede, formando assim o triângulo  $ADB$ , retângulo em  $D$ .

*Modelo matemático*

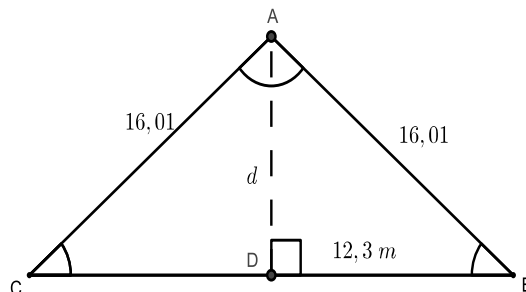


Figura 3.7: Outro modelo matemático do pátio do Museu.

Pelo Teorema 2.4 podemos calcular a distância  $AD$  chamada de  $d$ :

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad (3.4)$$

$$16,01^2 = d^2 + 12,3^2$$

$$d^2 = 256,32 - 151,29$$

$$d^2 = 105,03$$

$$d \approx 10,24 \text{ m}$$

Portanto, a distância da pedra no ponto  $A$  à parede  $BC$  é de 10,24 metros.

### 3.4 Aplicação 4: gangorra no Portal da Amazônia;

O Portal da Amazônia é um local muito agradável na orla de Belém. É propício para passeios em família, prática de esportes e lazer. Pensando nas crianças, foi projetado uma gangorra  $DC$  de 240 cm de comprimento que será apoiada em uma base  $AB$  de 60 cm de altura, situado bem no centro do brinquedo. Calcule a altura máxima  $DE$  que esse brinquedo alcança em relação ao solo perfeitamente plano.

#### Modelo matemático

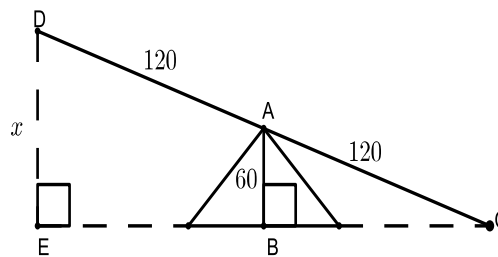


Figura 3.8: Modelo matemático da gangorra.

Como o triângulo  $ABC$  é retângulo em  $B$ , podemos aplicar o Teorema 2.4 para calcular  $BC$ :

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad (3.5)$$

$$120^2 = 60^2 + BC^2$$

$$BC^2 = 14400 - 3600$$

$$BC^2 = 10800$$

$$BC \approx 104 \text{ cm}$$

Pelo fato da base está no centro do brinquedo, o segmento  $EB$  também mede 104 cm. E pelo triângulo  $DEC$ , retângulo em  $E$ , temos:

$$\begin{aligned}
 a^2 &= b^2 + c^2 & (3.6) \\
 240^2 &= x^2 + 208^2 \\
 x^2 &= 57600 - 43264 \\
 x^2 &= 14336 \\
 x &\approx 120 \text{ cm}
 \end{aligned}$$

Neste caso, a altura máxima que a altura atinge é de 120 cm.

### 3.5 Aplicação 5: comprimento de uma nova pista no aeroporto;

O Aeroporto Internacional Val de Cans, em Belém, possui duas pistas com comprimentos 1,8 km e 2,8 km que recebem diariamente centenas de vôos nacionais e internacionais. Para aliviar o fluxo de aterrissagem, deseja-se construir uma nova pista para vôos domésticos e nacionais de pequeno porte. A nova pista será construída partindo do final da primeira pista até o final da segunda pista, como indica a figura, formando o triângulo  $CDE$ . Sabendo que o ângulo  $\widehat{CED}$  tem medida de  $42^\circ$ , o comprimento de parte das pistas  $CE$  e  $DE$  medem, respectivamente, 0,5 km e 1,4 km, determine o comprimento da nova pista  $CD$ . Dados  $\sin 42^\circ = 0,67$ ,  $\cos 42^\circ = 0,74$  e  $\text{tg}42^\circ = 0,9$ ;



Figura 3.9: Pista do aeroporto Val de Cans.

Fonte: Infraero.com

Como queremos calcular o comprimento do lado oposto a um ângulo e temos os valores dos lados adjacentes a esse ângulo, podemos utilizar a lei dos cossenos para resolver essa situação. Veja uma solução:

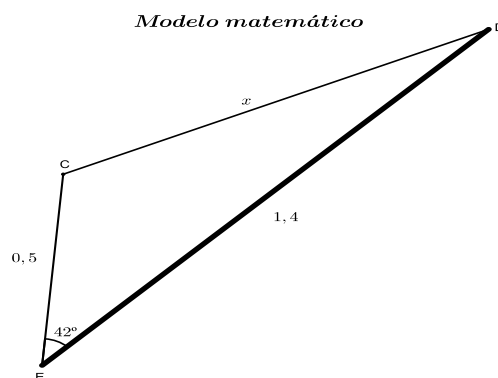


Figura 3.10: Modelo matemático da pista do aeroporto Val de Cans.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos\hat{A} \quad (3.7)$$

$$x^2 = 0,5^2 + 1,4^2 - 2.0,5.1,4.\cos 42^\circ$$

$$x^2 = 0,25 + 1,96 - 1,4.0,74$$

$$x^2 = 0,25 + 1,96 - 1,04$$

$$x^2 = 1,17$$

$$x \approx 1,08 \text{ km}$$

O comprimento da nova pista do aeroporto Val de Cans deverá medir um pouco mais que 1km.

### 3.6 Aplicação 6: altura da torre no Mangal das Garças;

É possível calcular a altura de uma torre utilizando um espelho plano e uma fita métrica. Uma pessoa, sabendo sua altura, coloca um espelho plano em um ponto no chão de tal forma que esse objeto fique posicionado entre a pessoa e a torre. Com uma fita métrica, é realizada a medição da distância entre a torre e o espelho, assim como a distância dele para a pessoa que consegue visualizar o reflexo do topo da torre em um determinado ponto.

Nesse contexto, considere o Farol de Belém no Parque Naturalístico Mangal das Garças. Os pontos  $A, B, C$  e  $D$  são, respectivamente, a parte mais alta, a base da torre, o ponto onde vai ficar o espelho e a altura da pessoa de 1,75 m de altura que coloca o espelho no chão a uma distância de 15 m da base do farol. Ela se afasta 0,55 m do espelho e já consegue ver o reflexo da parte mais alta do farol no objeto. Com esses dados, calcule a altura do farol.

Vejamos o modelo matemático dessa situação:



Figura 3.11: Farol de Belém  
Foto: Flávio Henrique Cardoso.

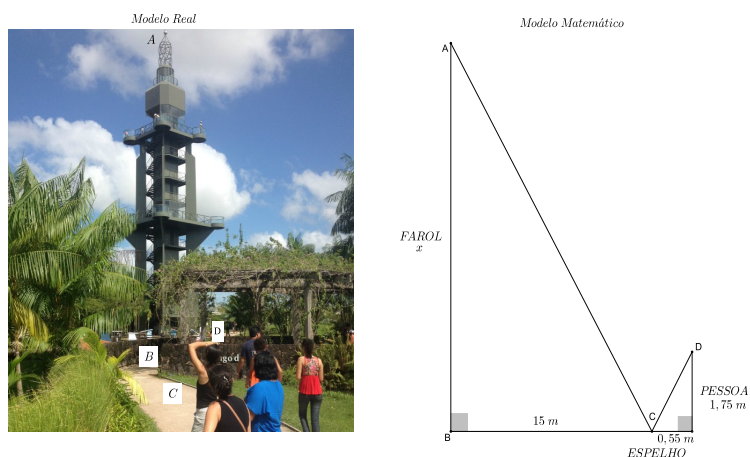


Figura 3.12: Modelo matemático do Farol.

Pelo fato do observador está vendo o reflexo do topo do farol a uma certa distância, implica que o reflexo incide com o mesmo ângulo da projeção. Neste caso, temos dois triângulos semelhantes pelo caso A.A.

Aplicando a proporção nos lados correspondentes, temos:

$$\begin{aligned} \frac{x}{1,75} &= \frac{15}{0,55} & (3.8) \\ 0,55 \cdot x &= 1,75 \cdot 15 \\ 0,55x &= 26,25 \\ x &= 47,72 \text{ m} \end{aligned}$$

Com isso, chegamos a conclusão de que a altura do farol é de 47,72 m.

### 3.7 Aplicação 7: largura do Rio Guamá em m determinado ponto;

Considere um ponto  $B$ , fixo na margem do Rio Guamá, oposta a Universidade Federal do Pará (UFPA). Seja um ponto  $A$ , na margem da universidade, de tal forma que  $\overline{AB}$  seja perpendicular às margens. Com uma fita métrica, marque 50 metros e nesse ponto  $C$ , coloque uma estaca de madeira perpendicular ao chão. A partir dele, pronlongue um segmento de 30 metros onde será marcado um ponto  $D$  de sorte que os pontos  $A$ ,  $C$  e  $D$  estejam alinhados. Em seguida, caminhe 792 metros, perpendicularmente ao segmento  $AD$ , no sentido da universidade, onde poderá ser visto a estaca entre você e o ponto fixo na margem oposta. Com esses dados é calcule o comprimento do Rio Guamá naquele local.

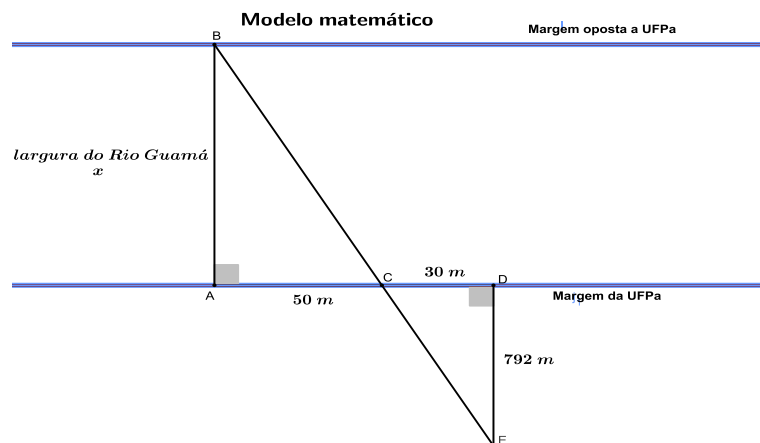


Figura 3.13: Margem do Rio Guamá.

Temos novamente, mais um caso de semelhança de triângulos. Tanto o triângulo  $BAC$  como o  $EDC$  possuem o ângulo reto e além disso, tem os ângulos  $\widehat{ACB}$  e  $\widehat{ECD}$  opostos pelo vértice e por esse motivo tem a mesma medida. Aplicando a proporcionalidade nos lados correspondentes, temos:

$$\begin{aligned}\frac{x}{792} &= \frac{50}{30} & (3.9) \\ 30 \cdot x &= 792 \cdot 50 \\ 30x &= 39600 \\ x &= 1320 \text{ metros}\end{aligned}$$

Temos a largura de 1320 metros do Rio Guamá no ponto estabelecido.

### 3.8 Aplicação 8: comprimento do maior contorno da Praça Amazonas;

A praça Amazonas está localizada no bairro do Jurunas e fica próximo ao Espaço São Liberto. Tem um formato triangular retangular com uma via de passagem pelo gramado, que vai de um vértice do ângulo reto até a calçada maior, como ilustrado na figura abaixo. Considere que a largura da via de passagem não influencia na situação. Sabendo que esta via divide o contorno maior do gramado em dois pedaços, um de 32 metros e outro de 18 metros, o contorno b mede quantos metros?

*Modelo real*



Figura 3.14: Praça Amazonas.

Fonte: orm.com.br



## Modelo matemático

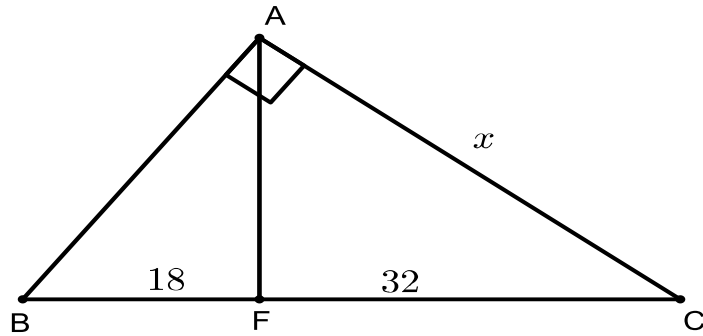


Figura 3.15: Praça Amazonas.

Fonte: Geogebra

Para resolver este problema precisaremos da relação 2.5:

$$b^2 = a.m \quad (3.10)$$

$$b^2 = 50.32$$

$$b^2 = 1600$$

$$b = \sqrt{1600}$$

$$b = 40 \text{ metros}$$

No entanto, o contorno b pedido mede 40 metros.

### 3.9 Aplicação 9: corrimão de uma escada no Forte do Castelo;

A figura abaixo, representa o projeto de uma escada que será colocada no Forte do Castelo. Contém cinco degraus de mesma largura e o corrimão ficará a uma altura de 90 cm da parte mais alta da escada. Quanto deve ser o comprimento total do corrimão?

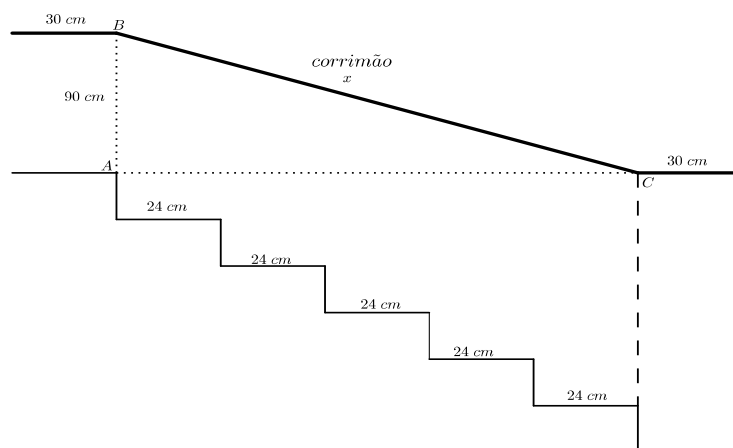


Figura 3.16: Modelo matemático de corrimão.

Fonte: Geogebra

Neste caso, temos o triângulo  $ABC$ , retângulo em  $A$ . A hipotenusa deste triângulo é a parte do corrimão que está faltando, os catetos são 90 cm e 120 cm (equivalente aos cinco segmentos de 24 cm que formam esse cateto). Temos:

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad (3.11)$$

$$x^2 = 90^2 + 120^2$$

$$x^2 = 8100 + 14400$$

$$x^2 = 22500$$

$$x = \sqrt{22500}$$

$$x = 50 \text{ cm}$$

Portanto, o corrimão terá o comprimento de 50 cm mais 60 cm da parte paralela ao chão, ou seja, 110 cm de corrimão.

### 3.10 Aplicação 10: distância percorrida por uma cobra e um gavião, no museu Emílio Goeldi;

*Problema de autoria do Bhakara, adaptado.*

Certo dia, no Museu Emilio Goeldi, estava um gavião no alto de uma coluna vertical de 6 metros de altura, ao pé do qual fica a toca de uma cobra. De repente, o gavião vê a cobra, que está a 18

metros da toca.

A cobra também vê o gavião, e corre para a toca.

O gavião faz um vôo em linha reta e alcança a cobra antes que ela atinja a toca. Sabendo que o gavião voou a mesma distância percorrida pela cobra, diga quantos metros da toca a cobra foi alcançada.

### *Modelo matemático*

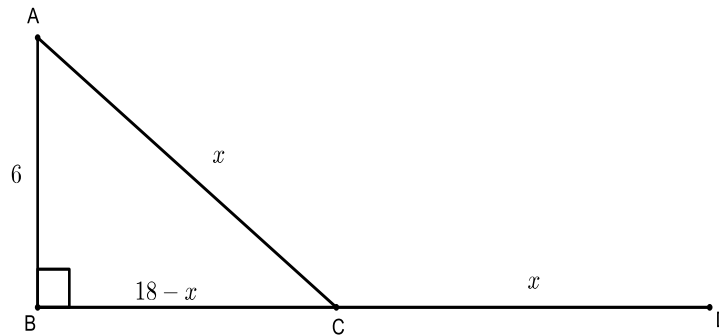


Figura 3.17: Modelo matemático do gavião perseguindo a cobra.

Fonte: Geogebra

Temos mais um aplicação sobre o Teorema de Pitágoras. Nesse caso, o gavião encontra-se em cima do mastro  $AB$ , a cobra no ponto  $D$  que ao percorrer a distância  $x$  na direção de sua toca, é alcançada pelo gavião. Forma-se então, o triângulo  $ABC$  retângulo em  $B$ . E pelo teorema mencionado, temos:

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad (3.12)$$

$$x^2 = 6^2 + (18 - x)^2$$

$$x^2 = 36 + 324 - 36x + x^2$$

$$36x = 324 + 36$$

$$36x = 360$$

$$x = 10 \text{ m}$$

Porém, a distância que a cobra foi alcançada pelo gavião foi a 8 metros da toca.

## Considerações Finais

Durante todo processo de produção deste trabalho de conclusão de curso, foi possível detectar algumas dificuldades como a elaboração de questões consistentes e com um aproximação do que acontece na realidade. No entanto, os objetivos foram cumpridos estabelecendo um elo entre o ensino da Matemática e concretização desse conhecimento. Resgatar alguns traços da história de Belém foi de suma importância para levantar variáveis que direcionaram a produção deste documento.

Com este material, voltado para professores do segundo ano do ensino médio, há uma satisfação em criar materiais para a assimilação do conteúdo ministrado, além de aproximar um contexto paraense nas aulas de matemática. Nesse percurso, sugere-se que haja sempre um diálogo sobre o passado e o presente de uma cidade que passou por diversas fases até se consolidar como "Metrópole da Amazônia".

É possível que haja situações que podem criar certas barreiras nesse processo de ensino aprendizagem. Contudo, a resolução de problemas como uma metodologia de ensino da matemática contribui de forma eficaz na produção do conhecimento. Cabe ao professor fazer intervenções e reflexões sobre a importância desse método.

Em relação aos conteúdos envolvidos, ficou claro que há um leque de aplicações que podem nos aproximar de um contexto histórico. As relações métricas do triângulo retângulo, bem como o Teorema de Pitágoras e a lei dos cossenos podem ter significados diferente a partir dessa abordagem sugerida.

Nessa perspectiva, o professor torna-se um mediador meio a esse processo de ensino. Cabendo a ele despertar o entusiasmo do corpo discente, com isso, desenvolvendo a capacidade de formular seus próprios conceitos sobre o que está se pretendendo.

No entanto, esse ciclo se concretiza se for desenvolvido um pensamento crítico no aluno, fazendo com que ele seja capaz de entender o problema, elaborar um plano, executá-lo e em seguida verificar se o resultado condiz com o que está sendo requisitado.

# Referências Bibliográficas

- [1] AMARAL, Ribeiro do. **Fundação de Belém do Pará: jornada de Francisco Caldeira de Castelo Branco**. Brasília: Senado Federal, Conselho Editorial, 2004.
- [2] BARBOSA, João Lucas Marques. **Geometria Euclidiana Plana** - Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 1997.
- [3] BIACHINI, Edwaldo **MATEMÁTICA BIACHINI**. São Paulo: Moderna, 2011.
- [4] BIGODE, Antonio José Lopes. **Projeto Velear: matemática**. São Paulo: Scipione, 2012.
- [5] BRASIL, Ministério da Educação e da Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais (Matemática)**. Brasília: A Secretaria, 1998.
- [6] DANTE, L.R. **Didática da Resolução de Problemas de Matemática**. 2ªed. São Paulo: Ática, 1998.
- [7] DANTE, Luiz Roberto. **MATEMÁTICA: contextos e aplicações**. São Paulo: Ática, 2013.
- [8] GIOVANNI, José Ruy; CASTRUCCI, Benedito; GIOVANNY JR, José Ruy. **A conquista da Matemática**. São Paulo: FTD, 2012.
- [9] LEONARDO, Fabio Martins de. **Projeto Araribá: matemática**. São Paulo: Moderna, 2010.
- [10] LUPINACCI, M. L. V. e BOTIN, M. L. M. **Resolução de problemas no ensino de matemática**. Anais do VIII Encontro Nacional de Educação Matemática, Recife, 2004.
- [11] MORI, Iracema; Onaga, Dulce Satiko. **Matemática: ideias e desafios**. São Paulo: Saraiva, 2012.
- [12] MUNIZ NETO, Antonio Caminha. **Geometria - Coleção PROFMAT**. Rio de Janeiro: SBM, 2013.
- [13] POLYA, G. A. **A arte de Resolver Problemas**. Tradução: Heitor Lisboa de Araújo. Interciência, 1978.
- [14] RIBEIRO, J. **MATEMÁTICA: ciência, linguagem e tecnologia**. São Pàulo: Scipione, 2011.

- [15] SMOLE, Kátia Stocco; DINIZ, Maria Ignez. **MATEMÁTICA: ensino médio, volume 2.** São Paulo: Saraiva, 2010.
- [16] [www.portal.ufpa.br/imprensa/noticia.php?cod=7863](http://www.portal.ufpa.br/imprensa/noticia.php?cod=7863), acesso em: 29 de janeiro de 2016.
- [17] [enciclopedia.itaucultural.org.br/pessoa206974/antonio-landi](http://enciclopedia.itaucultural.org.br/pessoa206974/antonio-landi), acesso em: 29 de janeiro de 2016.
- [18] <http://blog.turismo.gov.br/pelo-brasil/regi>
- [19] <https://ufpadoisponzero.wordpress.com/2013/07/30/paroquia-de-santana-da-campina-de-1727-a-1952/>
- [20] <http://www.revistamuseu.com.br/naestrada/naestrada.asp?id=3947>
- [21] <http://www.ciriodenazare.com.br/portal/historia.php>
- [22] [www.belemdopara.tur.br/atracoes-turisticas/335-mercado-ver-o-peso.html](http://www.belemdopara.tur.br/atracoes-turisticas/335-mercado-ver-o-peso.html)
- [23] [www.panoramadoturismo.com.br/belem-complexo-ver-o-peso-celebra-386-anos/](http://www.panoramadoturismo.com.br/belem-complexo-ver-o-peso-celebra-386-anos/)
- [24] [www.estacaodasdocas.com.br/institucional/sobre](http://www.estacaodasdocas.com.br/institucional/sobre)
- [25] <http://diariodopara.com.br/N-125605-PRACA+DA+REPUBLICA>
- [26] <http://noticias.orm.com.br/noticia/praca+da+republica>
- [27] [www.museu-goeldi.br](http://www.museu-goeldi.br)
- [28] <http://www.mangaldasgarcas.com.br/sobre/>
- [29] <http://www.overmundo.com.br/overblog/rodrigues-alves-o-jardim-botanico-da-amazonia>
- [30] <http://noticias.orm.com.br>
- [31] <http://www.culturapara.art.br/museus-galerias>
- [32] <http://www.basilicadenazare.com.br/pagina/historico-da-basilica>
- [33] <http://www.portalamazonia.com.br/cultura/turismo/forte-do-presepio-marco-da-colonizacao-do-para/>
- [34] [www.theatrodapaz.com.br](http://www.theatrodapaz.com.br)
- [35] <http://www.saojoseliberto.com.br/institucional>