UNIVERSIDADE ESTADUAL DE SANTA CRUZ

DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

LORENA OSS DE SOUSA

SISTEMA DE NUMERAÇÃO E APLICAÇÕES.

Ilhéus – BA

2016

LORENA OSS DE SOUSA

SISTEMA DE NUMERAÇÃO E APLICAÇÕES.

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade Estadual de Santa Cruz, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Matemática Básica.

Orientador: Prof . Dr. Sérgio Mota Alves

Ilhéus – BA

LORENA OSS DE SOUSA

SISTEMA DE NUMERAÇÃO E APLICAÇÕES.

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade Estadual de Santa Cruz, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Trabalho aprovado. Ilhéus 15 de janeiro de 2016.

Prof. Dr. Sérgio Mota Alves – Orientador UESC

Prof. Dr. Vinícius Algusto Takahashi Arakawa, UESC

Prof. Ms. Roque da Silva Lyrio, IFBA, Valença.

Ilhéus - 2016

S725 Sousa, Lorena Oss de.

Sistema de numeração e aplicações/ Lorena Oss de Sousa. – Ilhéus, BA: UESC, 2016.

50f. : il.

Orientador: Sérgio Mota Alves.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de Santa Cruz. Mestrado Profissional em Matemática.

Inclui referências.

1. Aritmética. 2. Numeração. 3. Matemática – Estudo e ensino. I. Título.

CDD 513

Dedico este trabalho primeiramente a Deus, por ser excessencial em minha vida, meu guia, socorro presente na hora da angústia, à Nossa Senhora Aparecida, à minha mãe Maria José Oss, ao meu Pai Sebastião Bernardes de Sousa, ao meu Irmão Luciano e a meus amigos que sempre me apoiaram.

AGRADECIMENTOS

Meus sinceros agradecimentos:

À Deus e Nossa Senhora Aparecida, por ter me dado força e saúde para superar todas as dificuldades.

A Universidade Estadual de Santa Cruz, pela oportunidade de fazer o PROFMAT.

Ao professor Dr. Sérgio Mota Alves, pela orientação, apoio e confiança.

Ao professor Dr. Vinícius Arakawa, pela coorientação deste trabalho.

Agradeço a todos os professores por me proporcionar o conhecimento não apenas científico, mas a manifestação do caráter e a afetividade da educação no processo de formação profissional, por tanto que se dedicaram a mim, não somente por terem me ensinado, mas por terem me feito aprender.

Agradeço a minha mãe Maria José Oss, heroína que me deu apoio, incentivo nas horas difíceis, de desânimo, cansaço e nos infinitos momentos de choro.

Ao meu pai, Sebastião Bernardes, que apesar de todas as dificuldades me fortaleceu e que para mim foi muito importante.

Ao meu irmão Luciano Oss que apesar da distância sempre me apoiou.

Aos meus Avós Pedro e Anna e, consequentemente aos meus tios e primos, pelo amor e apoio incondicional.

Ao companheiro Djalma Tadeu pelo apoio e paciência.

Meus agradecimentos aos amigos Aldo José e Jorge Ricardo, meus companheiros de trabalho e irmãos, que Deus me deu de presente, que fizeram parte da minha formação e que irão continuar fazendo parte da minha vida.

A todos que direta ou indiretamente fizeram parte da minha formação.

À turma PROFMAT 2013 e 2015.

A todos vocês “muito obrigada”!

A CAPES pelo apoio financeiro.

ABSTRACT

Since the earliest times, man has used a very intuitive sense of numbers. With the expansion of civilizations and the need to count, group and organize their possessions came the first form count. However, it was necessary to systematize the way they counted to meet the needs that arose with the passage of time. After the systematization of the counting process, it is clear that not all numbering systems were simple to use, such as non-positional numbering systems that only used the addition of amounts that each symbol represented. By contrast, there were the positional numbering systems, whose symbol would have its value changed according to the position it occupied in writing the number. The purpose of this work is to use of some numbering systems in order to aid understanding of mathematical content, such as divisibility and divisibility criteria, in addition to present some applications and peculiarities of numbering schemes presented here. We will also show that we can work with generalized way numbering systems, avoiding the convenience that the decimal numbering system promotes, as the system adopted by almost the entire planet.

Keywords: Arithmetic, Number Systems, Severability Criteria.

RESUMO

Desde os tempos mais primitivos, o homem utilizava uma noção bem intuitiva de números. Com a expansão das civilizações e com a necessidade de contar, agrupar e organizar seus bens surgiu a primeira forma de contagem. No entanto, foi necessário que sistematizassem a maneira como eles contavam para suprir as necessidades que surgiam com a passar do tempo. Depois da sistematização do processo de contagem, percebe-se que nem todos os sistemas de numeração eram simples de serem utilizados, como por exemplo, os sistemas de numeração não posicionais que utilizavam apenas a adição de quantidades que cada símbolo representava. Em contrapartida, surgiram os sistemas de numeração posicional, cujo símbolo teria seu valor alterado de acordo com a posição que ocupava na escrita do número. A proposta desse trabalho é a utilização de alguns sistemas de numeração com o objetivo de auxiliar a compreensão de conteúdos matemáticos, como por exemplo, divisibilidade e critérios de divisibilidade, além de apresentar algumas aplicações e peculiaridades dos sistemas de numeração aqui apresentados. Mostraremos também, que é possível trabalhar com sistemas de numeração de maneira generalizada, fugindo à comodidade que o sistema de numeração decimal promove, por ser o sistema adotado por quase todo o planeta.

Palavras chaves: Aritmética, Sistemas de Numeração, Critérios de Divisibilidade.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Desde os tempos mais primitivos, o homem utilizava uma noção bem intuitiva de números. Com a expansão das civilizações e com a necessidade de contar, agrupar e organizar seus bens, rebanhos e etc, surgiu a primeira forma de contagem, utilizando pedras. No entanto, foi necessário que sistematizassem a maneira como eles contavam para suprir as necessidades que surgiam com o passar do tempo. A partir de então, surgiram os primeiros sistemas de numeração, como por exemplo, o sistema de numeração romano, egípcio, grego dentre outros.

Depois da sistematização do processo de contagem, percebe-se que nem todos os sistemas de numeração eram simples de serem utilizados, um exemplo claro, era os sistemas de numeração não posicional, que utilizavam apenas a adição de quantidades que cada símbolo representava. Em contra partida, surgiram os sistemas de numeração posicional, cujo símbolo teria seu valor alterado de acordo com a posição que ocupava na escrita do número.

Por ser natural, trabalhamos com o sistema de numeração decimal, pois, tornou-se o sistema mais adotado pelas civilizações atuais, no entanto, é importante que outros sistemas sejam conhecidos. Devido a grande dificuldade de se trabalhar com sistemas que não utilizam à base 10 como padrão, resolvemos neste trabalho, mostrar, que na realidade, é possível generalizar todas as aplicações do sistema decimal para um sistema de numeração em uma base qualquer, para tanto, dividimos o presente trabalho em capítulos.

No primeiro capítulo, mostraremos um pouco da história dos sistemas de numeração. Falaremos a respeito dos sistemas de numeração egípcia, romana e grega, devido à sua grande importância para o desenvolvimento das civilizações antigas. Faremos um confronto entre os sistemas de numeração posicional e não posicional, com o objetivo de mostrar qual sistema possui maior praticidade em sua utilização, e ainda, faremos um breve comparativo entre os sistemas de numeração que julgamos mais essenciais, com o intuito de mostrar qual seria o sistema de numeração ideal para utilizarmos cotidianamente, além de citarmos diversas características interessantes presentes em cada sistema de numeração escolhido.

No segundo capítulo, mostraremos que é sempre possível trabalhar com sistema de numeração em uma base b qualquer, ou seja, generalizaremos o conceito de sistemas de numeração, bem como efetuar as operações numéricas de adição e multiplicação nessa base. Faremos, também, um breve relato a respeito dos sistemas de numeração decimal, binário, ternário, quinário, sistema de numeração na base 7 e o sistema duodecimal. Evidenciaremos algumas peculiaridades do sistema binário, ternário e duodecimal, e mostraremos, ainda, como efetuar conversões de uma base numérica para outra, com o objetivo de mostrar que trabalhar com sistemas de numeração em uma base qualquer não é algo complicado, é simplesmente questão de adaptação.

No terceiro capítulo, definiremos divisibilidade, mostraremos algumas propriedades que auxiliam no desenvolvimento dos critérios de divisibilidade, definiremos critérios de divisibilidade em uma base *b* qualquer e por fim, mostraremos alguns critérios de divisibilidade no sistema de numeração decimal.

No quarto capítulo, mostraremos algumas aplicações em forma de truques. A primeira aplicação será baseada em problemas, propostos pelo matemático Martin Gardner (1914 – 2010) que através do seu trabalho inspirou centenas de leitores a apreciar e a querer saber mais sobre o vasto mundo da matemática, problemas estes, que utilizam cartas de baralho como suporte, para mostrar de maneira divertida, como se trabalhar divisibilidade por 3 e por 9. Na segunda aplicação, mostraremos um truque que envolve divisibilidade por 7, 11 e 13, com o objetivo de apresentar alguns conceitos de divisibilidade de maneira simples, tornando o aluno um investigador para descobrir o porquê de o truque ser possível. A terceira aplicação "Resgatando o dígito perdido" é baseada no critério de divisibilidade por 9, no entanto no decorrer da explicação de como é possível resgatar o dígito perdido, faremos algumas abordagens no mínimo curiosas a respeito dos restos de divisões por 9 e mostraremos que a diferença entre um número inteiro e soma de seus algarismos é sempre divisível por 9. A quarta aplicação, intitulada por "Adivinhação Egípcia" é baseada na maneira que os egípcios efetuavam suas multiplicações, que recorriam à decomposição de um número como soma de potências de 2 e também está relacionada ao algoritmo das divisões sucessivas para transformar um número escrito na base 10 para base 2. Por fim, temos a quinta aplicação, que é baseada em um desafio proposto por um Rei Maligno à Princesa Generosa para que seu Príncipe seja libertado, nesta aplicação, é necessário que a Princesa tenha conhecimento a respeito dos sistemas de numeração em uma base *b* qualquer, para determinar qual a melhor base que tornar possível a solução do desafio proposto pelo Rei.

1 UM POUCO DA HISTÓRIA

Nos tempos mais primitivos o homem trabalhava com números de forma bem intuitiva. Com a necessidade de verificar a quantidade de ovelhas em seu rebanho, ou outros bens, surgiu a primeira forma de contagem, onde era comparada a quantidade de ovelhas com certa quantidade de pedras, se ao fim do dia sobrassem pedras o rebanho estaria menor, se faltassem pedras o rebanho estaria maior. Naquele tempo era complicado fazer contagem de grandes quantidades, afinal, contava-se, um, dois ou muitos. A partir de grupos com três ou mais elementos dizia-se que havia muitos elementos naquele determinado grupo.

Havendo a necessidade de contar quantidades ainda maiores, foi imprescindível que sistematizasse o processo de contagem, e a partir de então surgem às primeiras ideias para um sistema de contagem que lhes pudesse ser útil. Diversos povos desenvolveram seu próprio sistema de contagem, onde estabeleceram regras, para facilitar o ato de contar, além de tornar possível a escrita através da criação de símbolos, pois, havia a necessidade de registrar suas atividades. O processo da criação dos sistemas de contagem deu início, ao que hoje chamamos, de sistema de numeração, que consiste em um conjunto de símbolos capaz de representar qualquer quantidade, de forma simples e rápida.

1.1 SISTEMAS DE NUMERAÇÃO ANTIGOS

Alguns sistemas de numeração antigos, não adotavam um sistema posicional, ou seja, bastava apenas escolher um conjunto de símbolos e regras que permitiam formar números através da repetição de símbolos e a soma de seus valores. Podemos citar como exemplo, os sistemas de numeração egípcio, romano e grego.

1.1.1 SISTEMA DE NUMERAÇÃO EGÍPCIO

Com a descoberta do *Papiro de Rhind*, escrito por volta de 1650 a.C, o Egito se tornou o grande foco da história da matemática, devido à quantidade de problemas que o papiro apresentava, foi descoberto também, provavelmente dois séculos mais tarde, o *Papiro de Moscou,* que continha 25 problemas. Esses papiros se tornaram referência para a história que conhecemos hoje da matemática egípcia, inclusive seu sistema de numeração.

Os egípcios desenvolveram um sistema de numeração que consistia em agrupar objetos em grupos de dez, no entanto enfrentavam um pequeno problema para simbolizar o zero, dessa forma, utiliza símbolos distintos dos símbolos básicos para representar os múltiplos de 10. Esse sistema de numeração focava em sete números chaves: $1, 10, 100, 1.000, 10.000, 100.000, 1.000.000$ cuja representação era feita conforme figura abaixo.

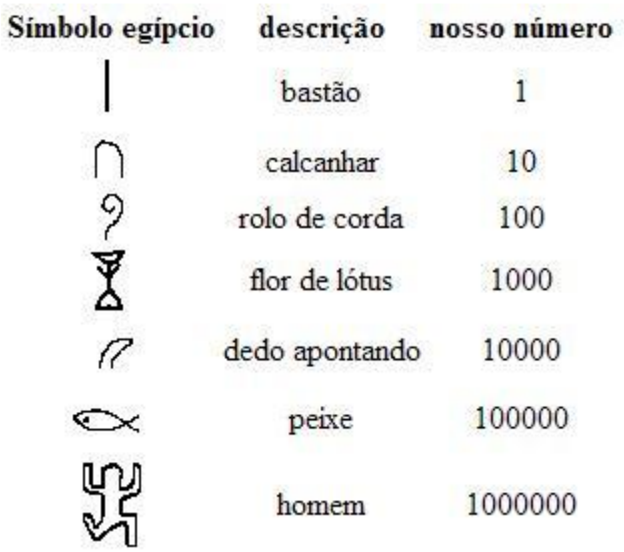


Figura 1 - Símbolos Egípcios

1.1.2 SISTEMA DE NUMERAÇÃO ROMANO

O Império Romano deixou grandes marcas na história das civilizações, e uma dessas, foi a criação do seu sistema de numeração, possuindo apenas sete símbolos e as repetições desses símbolos eram feitas no máximo três vezes. Eles utilizavam letras do seu alfabeto para representar números e algumas delas se posicionavam em diferentes lugares para expressar maior ou menor valor.

As letras e os seus respectivos valores estão representados na tabela abaixo:

I	1
V	5
X	10
L	50
C	100
D	500
M	1000

Tabela 1 - Símbolos Romanos

O sistema de numeração romano adotava não só a idéia da adição dos valores que cada símbolo representava, mas também levavam em consideração algumas regras básicas:

- Os Números V, L e D não repetiam;
- O número I coloca-se à esquerda V ou de X;
- O número X coloca-se à esquerda de L e C;
- O número C coloca-se a esquerda de D ou de M;
- Se o símbolo de maior valor for colocado primeiro que o símbolo de menor valor, somamos os números. Por exemplo: $XIII = 10 + 3$

- Se o símbolo de menor valor for colocado primeiro que o símbolo de maior valor, subtraímos os números, por exemplo: $CM = 1000 - 100$.
- Usava-se uma barra sobreposta ao um símbolo ou a um grupo de símbolos para multiplicar seu valor por 1000, exemplo: $\overline{V} = 5000$.

Uma curiosidade no sistema de numeração romano era a ausência de uma letra relacionada ao número zero. Esse fato se deu, porque, os romanos não estavam interessados na realização de cálculos, a ideia era apenas utilizar números representativos de quantidades.

Quando houve o desenvolvimento da expansão comercial, o sistema de numeração romano começou a ser questionado, pois, os cálculos matemáticos tornavam-se cada vez mais importantes e a ausência de uma letra que representasse o zero fazia com os cálculos fossem ainda mais complexos, além de não possuírem técnicas matemáticas tão eficazes.

1.1.3 SISTEMA DE NUMERAÇÃO GREGO

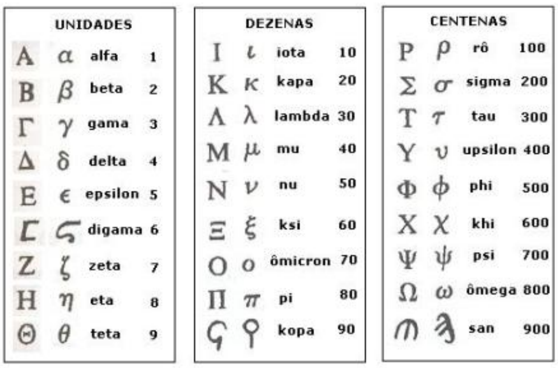
Os gregos ficaram conhecidos como pais da filosofia e da democracia. Na filosofia, por exemplo, temos um grande destaque, o filósofo Pitágoras que também contribuiu de forma generosa para a matemática, e sua contribuição mais conhecida hoje, é o “O Teorema de Pitágoras”.

Os gregos também possuíam um sistema de numeração próprio, que, a primeira vista, não era um dos mais fáceis. Eles utilizavam 27 letras para representar os números: e essas 24 letras eram do alfabeto grego e três letras eram do alfabeto fenício.

O sistema de numeração grego, também conhecido como sistema jônico aditivo, obedecia algumas regras básicas, como por exemplo, separar os números em grupos de 9, da seguinte forma:

- Os números de 1 a 9, eram representados pelas nove letras iniciais do alfabeto grego;
- Os números de 10 a 90 eram representados pelas nove letras seguintes;
- Os últimos símbolos representavam as centenas de 100 a 900;

Segue figura com as representações desses números:



UNIDADES				DEZENAS				CENTENAS			
Α	α	alfa	1	Ι	ι	iota	10	Ρ	ρ	rô	100
Β	β	beta	2	Κ	κ	kapa	20	Σ	σ	sigma	200
Γ	γ	gama	3	Λ	λ	lambda	30	Τ	τ	tau	300
Δ	δ	delta	4	Μ	μ	mu	40	Υ	υ	upsilon	400
Ε	ϵ	epsilon	5	Ν	ν	nu	50	Φ	ϕ	phi	500
Ϝ	ϛ	digama	6	Ξ	ξ	ksi	60	Χ	χ	khi	600
Ζ	ζ	zeta	7	Ο	ο	ômicron	70	Ψ	ψ	psi	700
Η	η	eta	8	Π	π	pi	80	Ω	ω	ômega	800
Θ	θ	teta	9	Ϙ	ϙ	kopa	90	Ϡ	ϡ	san	900

Figura 2 - Símbolos Gregos

Quando um número ultrapassava 1000 era necessário colocar um pequeno sinal, semelhante ao acento agudo, abaixo ou acima, e à esquerda da sequência de símbolos. E as dezenas de milhares eram representadas de forma multiplicativa, eles usavam o M (10000) abaixo do numeral a ser multiplicado.

Exemplo 1:

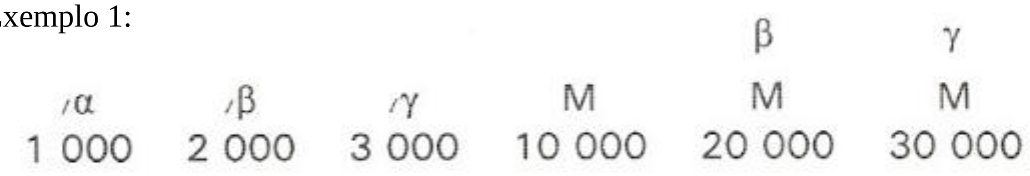


Figura 3 - Sistema Jônico

Para representar os números intermediários, como por exemplo, 12, 15, 19, 28 e etc, os gregos utilizavam a justaposição dos símbolos, do maior valor para o menor, e adicionavam os valores de cada símbolo.

Exemplo 2: $12 = \iota\beta; 15 = \iota\varepsilon;\ \ 19 = \iota\theta; 20 = \kappa\eta$

Antes do sistema jônico aditivo, os gregos possuíam um sistema mais antigo conhecido como sistema de numeração ático (Acrofônico) semelhante ao sistema dos Romanos na maneira de operar, ou seja, usavam o princípio aditivo e os símbolos eram repetidos quantas vezes necessárias para obter o número desejado.

Os símbolos utilizados eram os seguintes:

I = 1, Π = 5, Δ = 10, H = 100, X = 1000, e M = 10000

Se observarmos, os números de base 10 eram representados pelas letras iniciais das palavras gregas correspondentes a eles: Δ para 10 (deka), H para 100 (Hekaton), X para 1000 (Khilioi) e M para 10000 (Myrioi).

1.2 SISTEMA DE NUMERAÇÃO POSICIONAL × NÃO POSICIONAL

A idéia de um sistema que utilizava apenas a adição das quantidades que cada símbolo representava, parecia suficiente para suprir as necessidades da época, no entanto, com o passar do tempo, era preciso realizar cálculos cada vez mais complexos, o que tornava o sistema de numeração não posicional muito trabalhoso, já que, o valor de um símbolo independe da posição que ocupa no conjunto de símbolos que representam um número.

Para que o método de contagem se tornasse ainda mais viável naquela época, primeiramente os povos antigos tiveram que deixar de depender das mãos como principal objeto de contagem, e buscar ferramentas mais eficientes para desenvolverem esse processo, foi a partir de então que surgiu o ábaco.

O ábaco é um instrumento de cálculo muito antigo, que teve sua versão primitiva no Oriente Médio por volta do século III a.C, no entanto, foram os chineses que aperfeiçoaram e utilizam até os dias atuais, com tal precisão e rapidez que desafiam uma simples calculadora.

Figura 4 - Ábaco

Devido ao desenvolvimento dos povos da antiguidade, utilizar um sistema de numeração que consistia apenas em agrupamentos de objetos, se tornava cada vez mais ineficaz, portanto a ideia de representar quantidades através da posição que o algarismo ocupa quando representa certo número, facilitava o ato de registrar e operar com grandes quantidades.

O surgimento do sistema de numeração posicional deu-se através da contribuição de muitos povos, mas, foi na Ásia, no vale do rio Indo, que surgiu o sistema que utilizamos atualmente, o sistema de numeração indo – arábico. O grande feito desse sistema se dava pela praticidade de se representar qualquer número e pela pequena quantidade de símbolos que possuía.

O sistema posicional indo-arábico permite representar qualquer quantidade numérica utilizando apenas 10 símbolos, e por esse motivo ficou conhecido como sistema de numeração decimal. Talvez a principal razão de se trabalhar com a base 10 seja pelo simples fato de que os povos antigos utilizavam, primeiramente, os dedos das mãos como ferramenta para a contagem.

Todo número, nesse sistema, pode ser representado por uma sequência $a_r a_{r-1} \dots a_1 a_0$, onde a posição que cada algarismo ocupa, define seu valor. Por exemplo, no número 4444, cada 4 a depender da posição que ocupa, representa uma quantidade diferente, ou seja, o segundo 4 da direita para esquerda é dez vezes maior que o primeiro, o terceiro 4 é dez vezes maior que o segundo e assim por diante, dessa forma o número 4444 nada mais é que a soma das seguintes parcelas 4+40+400+4000, onde cada parcela possui valor dez vezes maior que a anterior.

O sistema posicional revolucionou o processo de contagem, tornando o ato de calcular mais fácil e eficaz. Observe no exemplo a seguir, uma adição feita no sistema posicional e outra utilizando um sistema de numeração não posicional:

Exemplo 3:

$$\begin{array}{r} 2468 \\ \underline{+1432} \\ 3900 \end{array} \qquad \begin{array}{r} {}_{+}MCDLXVIII \\ \underline{MCDXXII} \\ MMMCM \end{array}$$

O sistema posicional é mais eficiente quando é preciso resolver multiplicações e divisões, por exemplo, imagine multiplicar $MCDXXV$ por III sem transcrever o número para o sistema posicional. No entanto, os povos egípcios possuíam um método muito interessante para efetuar qualquer multiplicação, eles utilizavam a multiplicação por 2.

Exemplo 4:

Suponha que fosse necessário multiplicar 15×32. Criava-se uma tabela onde a primeira linha consistia em escrever o número 32 ao lado do número 1 e a partir de então realizavam sucessivas multiplicações por 2. Na coluna iniciada por 1, as multiplicações não devem ultrapassar 15. No desenvolvimento da multiplicação, na coluna onde o 1 se encontra, somavam-se os valores cujo resultado é 15, são eles: $1 + 2 + 4 + 8 = 15$, finalizava-se o processo somando os valores correspondentes aos algarismos 1, 2, 4 e 8, ou seja, $32 + 64 + 128 + 256 = 480$.

1	32
2	64
4	128
8	256

Tabela 2 - Multiplicação Egípcia

Apesar de grandes contribuições, o sistema de numeração posicional sofreu resistência na Europa por questões políticas e religiosas, e, portanto iniciou-se uma grande disputa entre os abacistas, que afirmavam que o sistema posicional não representava uma grande vantagem, afinal, o uso do ábaco supria grande parte das necessidades de efetuarem cálculos da época, e os algoristas, que defendiam o sistema posicional pela praticidade de efetuar contas complexas apenas com o uso de papel e lápis.

Mesmo com grande resistência o sistema posicional, conhecido como sistema de numeração indo-arábico, foi sendo disseminado na Europa por volta dos séculos XII – XIII, devido à influência de um grande matemático italiano, conhecido como Fibonacci.

A disputa entre os abacistas e algoristas permaneceu por vários séculos. Mesmo após a vitória dos algoristas, o uso do ábaco permaneceu para conferir se os cálculos feitos a mão estavam realmente corretos.

1.3 COMPARAÇÃO ENTRE OS SISTEMAS DE NUMERAÇÃO

Como os sistemas de numeração posicional são práticos e eficazes, faremos algumas comparações entre eles com o objetivo de identificar quais os mais indicados para melhor representar algumas situações.

Observe que, quando nos referimos a algum sistema de numeração, implicitamente estamos nos referindo a uma base que define esse sistema, por exemplo, o sistema de numeração atual é um sistema de numeração posicional com 10 símbolos, por esse motivo, é conhecido como sistema de numeração de base 10.

Geralmente as bases não interferem de maneira significativa na resolução dos cálculos, afinal quando operamos, operamos a quantidade que o número representa e não os algarismos em si, portanto não iremos encontrar nenhum critério para avaliar os sistemas de numeração em relação à resolução de cálculos.

Avaliaremos, por exemplo, qual sistema de numeração é mais viável para determinadas representações numéricas, além de outros aspectos.

Note que, algumas representações decimais se tornam mais viáveis em uma base numérica diferente da base 10, como por exemplo, o número fracionário $\frac{1}{3}$, que pode ser representado na forma decimal como $(0{,}333\ldots)_{10}$ (base 10), possui uma representação bem mais simples se representado na base ternária (base 3), ou seja, teríamos $(0{,}333\ldots)_{10} = (0{,}1)_3$, contudo, mesmo um determinado número sendo representado de uma forma mais simples em uma outra base, esse não seria motivo suficiente para avaliarmos um sistema de numeração.

Para avaliarmos um sistema de numeração é necessário analisarmos qual sistema é mais prático e menos dúbio de se trabalhar, por exemplo, nas bases numéricas ímpares a noção de paridade não é suficientemente clara, e, portanto trabalhar com esse tipo base não seria tão simples, fugindo ao objetivo de encontrarmos uma base cuja praticidade seja especialmente sua característica marcante. Por exemplo, para descobrirmos a paridade de um número qualquer em uma base b basta somarmos os valores dos símbolos, se o resultado for par, o número nessa base é par, caso contrário o número será ímpar.

Note que o sistema de numeração binário, aparentemente pode ser um sistema cuja praticidade pode ser uma de suas características marcantes, afinal, possui apenas dois símbolos para representar qualquer número e é fácil identificar quando um número é ou não par. No entanto, trabalhar com bases numéricas muito pequenas, nos causaria alguns transtornos, como por exemplo, a representação de alguns números pode se tornar muito extensa. Observe que o número $(53)_{10}$ possui uma escrita simples na base 10, já na base 2, a escrita é um tanto mais complicada $(110101)_2$.

Evidentemente, trabalhar com bases numéricas muito grandes é inviável, por exemplo, se tomássemos o sistema de numeração de base 60, como o sistema de numeração atual, teríamos que utilizar 60 símbolos distintos para representarmos qualquer número, além da tabuada multiplicativa se tornar 6 vezes maior que a atual, o que nos causaria um grande transtorno para efetuarmos cálculos relativamente simples utilizando essa base. É claro que trabalhar com um sistema de numeração diferente do usual sempre poderá causar algumas dificuldades, no entanto, isso é apenas questão de adaptação.

Embora não sendo um sistema de numeração tão conhecido, o sistema de base 12 é um sistema interessante de se trabalhar, por possuir um grande número de divisores, o que facilita o reconhecimento dos divisores de um número qualquer escrito nessa base, por exemplo, para identificarmos os divisores de um número α escrito na base 12 basta verificar se α é divisível por $2, 3, 4,$ e 6. É um sistema que possui dois símbolos a mais que o sistema decimal e, portanto operar com números nessa base não seria tão trabalhoso.

É claro, que não seria conveniente mudar o sistema de numeração decimal por algum outro, afinal, esse sistema é adotado pela maior parte do planeta o que o torna insubstituível.

Dessa forma, trabalhar com novos sistemas de numeração deve ser feito no ambiente em que for melhor aproveitado, como por exemplo, o sistema de numeração binário, que é de extrema importância para a linguagem computacional, dentre outros casos de aplicabilidade.

Como, existem diversos tipos de sistemas de numeração posicional, e cada um possui características específicas. No próximo capítulo, abordaremos a respeito de sistemas de numeração posicional em uma base qualquer, e mostraremos como operar neste sistema.

2 SISTEMA DE NUMERAÇÃO POSICIONAL EM UMA BASE QUALQUER

Um sistema de numeração posicional consiste em escolhermos uma base e trabalharmos de forma, que certa quantidade de unidades deve constituir uma unidade de ordem imediatamente superior, um exemplo simples, é o sistema de numeração decimal cuja junção de 10 unidades nos dá uma dezena, a junção de 10 dezenas obtém-se uma centena e assim por diante.

Um sistema em uma base qualquer (que chamaremos de base b), é um conjunto de b símbolos $\{0, 1, 2, \ldots, b-1\}$ que utilizamos para representar quaisquer números. O Teorema a seguir nos garante que é sempre possível a representação desses números nessa base b.

Teorema 1: Seja b um número natural e $M = \{0, 1, 2, \ldots, b-1\}$ com $b > 1$. Todo número natural n pode ser representado, de modo único, da seguinte maneira:

$$n = a_0 + a_1 b + a_2 b^2 + \cdots + a_r b^r$$

onde $r \geq 0$, $a_i \in M$, com $i = 0, 1, 2, \ldots, r$ e $a_r \neq 0$.

Demonstração: Vamos mostrar a existência da representação por indução em n.

Se $n < b$, neste caso, basta tomar $n = a_0$ e a representação está definida.

Suponha agora, $n \geq b$ e que para todo $q \in \mathbb{N}$ entre $1 \leq q < n$ a representação esteja definida.

Pelo algoritmo de Euclides temos $n = bq + a_0$, com $a_0 \in M$. Observe que de $q < n$, pois, caso contrário teríamos:

$$n = bq + a_0 \geq bq > q \geq n$$

absurdo.

Pela hipótese de indução podemos escrever q na base b, ou seja,

$$q = a_0 + a_1 b + a_2 b^2 + \cdots + a_r b^{r-1}$$

com $a_0 \in M$ e $a_0 \neq 0$.

Logo, $n = b(a_0 + a_1 b + a_2 b^2 + \cdots + a_r b^{r-1}) = a_0 + a_1 b + a_2 b^2 + \cdots + a_r b^r$, o que conclui a existência da representação.

Devemos garantir a unicidade da escrita e também faremos por meio do segundo princípio de indução.

É fácil ver que para $n \leq b$ a unicidade é óbvia. Suponhamos que $n > b$, e que a unicidade é válida para todo q, com $1 \leq q < n$. Suponhamos também que n tenha duas representações em b:

$$n = b(a_1 + a_2b^2 + \cdots + a_rb^{r-1}) + a_0 = b(c_1 + c_2b^2 + \cdots + c_{r-1}b^{r-1}) + c_0$$

Sendo $b > a_0$ e $b > c_0$, pela unicidade do Algoritmo de Euclides, temos que $a_0 = c_0$ e $\left(a_1 + a_2b^2 + \cdots + a_rb^{r-1}\right) = \left(c_1 + c_2b^2 + \cdots + c_{r-1}b^{r-1}\right) = q$. Como $q < n$, pela hipótese de indução obtemos $r = s$ e $a_1 = c_1 = \cdots = a_r = c_r$. Logo a representação é única. ■

Dessa forma, podemos perceber que independente da base a ser utilizada a representação numérica sempre será possível.

2.1 OPERAÇÕES NUMÉRICAS

Escolhida a base b como sistema de numeração padrão veremos como proceder com as operações de adição e multiplicação.

2.1.1 ADIÇÃO EM UMA BASE QUALQUER

Considere dois números quaisquer $\alpha = a_ra_{r-1} \ldots a_1a_0$ e $\beta = c_mc_{m-1} \ldots c_1c_0$ escritos na base b. Pelo Teorema 1 temos:

$$\alpha = a_0 + a_1b + a_2b^2 + \cdots + a_rb^r \text{ e } \beta = c_0 + c_1b + c_2b^2 + \cdots + c_mb^m$$

Considere também $a_r \neq 0$ e $c_m \neq 0$, com $m \geq r$.

Vejamos como realizar a adição entre esses dois números.

Note que: $$\alpha = a_0 + a_1b + a_2b^2 + \cdots + a_rb^r$$

$$\beta = c_0 + c_1b + c_2b^2 + \cdots + c_mb^m$$

Então, $\alpha + \beta = (a_0 + a_1b + a_2b^2 + \cdots + a_rb^r) + (c_0 + c_1b + c_2b^2 + \cdots + c_mb^m)$

Evidenciando os termos da base de mesmo índice, obtemos:

$$\alpha + \beta = c_mb^m + c_{m-1}b^{m-1} + \cdots + c_{r+1}b^{r+1} + (a_r + c_r)b^r + \cdots + (c_1 + a_1)b + c_0 + a_0$$

Portanto, para adicionar dois números α e β numa base b basta adicionar seus coeficientes.

Caso tenhamos $c_i + a_i \geq b$, então $c_i + a_i = b + x$, com $0 \leq x < b$. Dessa forma, se $c_0 + a_0 = b + x$ então:

$$\alpha + \beta = c_mb^m + c_{m-1}b^{m-1} + \cdots + c_{r+1}b^{r+1} + (a_r + c_r)b^r + \cdots + (c_1 + a_1)b + b + x$$

$$\alpha + \beta = c_mb^m + c_{m-1}b^{m-1} + \cdots + c_{r+1}b^{r+1} + (a_r + c_r)b^r + \cdots + (c_1 + a_1 + 1)b + x$$

2.1.2 MULTIPLICAÇÃO EM UMA BASE QUALQUER

Vejamos agora como proceder com a multiplicação em uma base b.

Considere os mesmo números α e β, tal que:

$$\alpha = a_0 + a_1 b + a_2 b^2 + \cdots + a_r b^r \text{ e } \beta = c_0 + c_1 b + c_2 b^2 + \cdots + c_m b^m$$

Então, o produto $\alpha \times \beta$ é uma adição de termos do tipo $a_i c_j b^{i+j}$. Caso o produto entre dois coeficientes seja maior que b, devemos realizar o processo para que esse resultado seja menor que b. Dessa maneira, podemos escrever $a_i b_j = qb + t$, onde q é quociente da divisão de $a_i b_j$ por b e t o resto. Observe que multiplicando $a_i b_j = qb + t$ por b^{i+j} em ambos os membros da igualdade obtemos $a_i b_j b^{i+j} = qb^{i+j+1} + tb^{i+j}$, onde q e t são inteiros positivos menores que b.

2.2 TABELAS DE ADIÇÃO E MULTIPLICAÇÃO EM ALGUMAS BASES NUMÉRICAS

Nosso objetivo é mostrar as diferentes tabelas de adição e a multiplicação em alguns sistemas de numeração específicos, por exemplo, nos sistemas de numeração decimal, binário, ternário, quinário, sistema de numeração na base 7 e duodecimal.

2.2.1 SISTEMA DE NUMERAÇÃO DECIMAL

O sistema que normalmente utilizamos é o sistema de numeração decimal, pois, os agrupamentos são feitos de 10 em 10 unidades, ou seja, o agrupamento de 10 unidades simples forma uma dezena, 10 dezenas formam uma centena, 10 centenas formam uma milhar e assim por diante. Esse sistema utiliza apenas de 10 símbolos para representar qualquer número, de forma que todo número natural n é escrito como:

$$n = a_0 + a_1 10 + a_2 10^2 + \cdots + a_r 10^r$$

onde $r \geq 0$ e $a_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}$; para $i = \{0, 1, 2, \ldots, r\}$ e o representamos por $a_r a_{r-1} \ldots a_1 a_0$ com a_i sendo um dígito de n.

Por exemplo:

$$11547 = 7 + 4 \times 10 + 5 \times 10^2 + 1 \times 10^3 + 1 \times 10^4$$

Como o sistema de numeração decimal é o sistema de numeração oficial adotado por quase todos os povos do planeta, a tabela de adição e multiplicação é de fácil compreensão.

Vejamos como se comporta as tabelas de adição e multiplicação na base 10:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Tabela 3 - Adição na base 10

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	0	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	0	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	0	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	0	9	18	27	36	45	54	63	72	81

Tabela 4 - Multiplicação na base 10

2.2.2 TABELAS DE ADIÇÃO E MULTIPLICAÇÃO NA BASE BINÁRIA

O sistema binário (base 2) é constituído apenas de dois símbolos 0 e 1 capazes de representar qualquer quantidade utilizando somente sequências de 0 e 1, neste caso os agrupamentos são feitos de 2 em 2 e a representação é da forma:

$$x = a_0 + a_1 2^1 + \cdots + a_{n-1} 2^{n-1} + a_n 2^n$$

ou de modo geral teremos a seguinte representação: $x = (a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0)_2$

Observe que o número $(53)_{10}$ é escrito no sistema binário como $(110101)_2$, de forma que $(53)_{10} = 1 \times 2^0 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^4 + 1 \times 2^5$.

Tabela de Adição na base 2:

	0	1
0	0	1
1	1	10

Tabela 5 - adição na base 2

Tabela de Multiplicação na base 2:

	0	1
0	0	0
1	0	1

Tabela 6 - Multiplicação na base 2

2.2.3 TABELAS DE ADIÇÃO E MULTIPLICAÇÃO DA BASE TERNÁRIA

O sistema de numeração ternário é o sistema de base 3, ou seja, utiliza três símbolos $\{0, 1, 2\}$ distintos para representar qualquer número.

Um número ρ na base 3 é da forma $\rho = a_0 + a_1 3 + \cdots + a_{n-1} 3^{n-1} + a_n 3^n$. Tabela de adição na base 3:

	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	10
2	2	10	11

Tabela 7 - Adição na base 3

Tabela de multiplicação na base 3:

	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	11

Tabela 8 - Multiplicação na base 3

2.2.4 TABELAS DE ADIÇÃO E MULTIPLICAÇÃO DE BASE QUINÁRIA

O sistema de numeração quinário, é o sistema de numeração que utiliza a base 5, ou seja, são necessários cinco símbolos distintos para representar qualquer número $\{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Um número qualquer na base 5 pode ser escrito como $\mu = a_0 + a_1 5 + \cdots + a_{n-1} 5^{n-1} + a_n 5^n$.

Tabela de Adição na base 5:

	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	0	2	3	4	10
2	2	3	4	10	11
3	3	4	10	11	12
4	4	10	11	12	13

Tabela 9 - Adição na base 5

Tabela de Multiplicação na base 5:

	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	12	13
3	0	3	12	14	22
4	0	4	13	22	31

Tabela 10 - Multiplicação na base 5

2.2.5 TABELAS DE ADIÇÃO E MULTIPLICAÇÃO NA BASE 7

O sistema de numeração na base 7 utiliza sete símbolos distintos para representar qualquer número.

Um número qualquer pode ser escrito na base 7 como:

$$\alpha = a_0 + a_1 7 + \cdots + a_{n-1} 7^{n-1} + a_n 7^n$$

Tabela de adição na base 7:

	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6	10
2	2	3	4	5	6	10	11
3	3	4	5	6	10	11	12
4	4	5	6	10	11	12	13
5	5	6	7	11	12	13	14
6	6	10	11	12	13	14	15

Tabela 11 - Adição na base 7

Tabela de multiplicação na base 7:

	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6
2	0	2	4	6	11	13	15
3	0	3	6	14	15	21	24
4	0	4	11	15	22	16	33
5	0	5	13	21	16	34	42
6	0	6	15	24	33	42	51

Tabela 12 - Multiplicação na base 7

2.2.6 TABELAS DE ADIÇÃO E MULTIPLICAÇÃO NA BASE 12

O sistema de numeração duodecimal é o sistema de base 12, ou seja, utiliza 12 símbolos $\{0, 1, 2\ ,3, 4,\ 5,\ 6, 7, 8, 9,\ A, B\}$ distintos para representar um número qualquer.

Um número no sistema duodecimal pode ser escrito da forma:

$$\beta = a_0 + a_1 12 + \cdots + a_{n-1} 12^{(n-1)} + a_{n-1} 12^n$$

Tabela de adição na base 12:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	10
2	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	10	11
3	3	4	5	6	7	8	9	A	B	10	11	12
4	4	5	6	7	8	9	A	B	10	11	12	13
5	5	6	7	8	9	A	B	10	11	12	13	14
6	6	7	8	9	A	B	10	11	12	13	14	15
7	7	8	9	A	B	10	11	12	13	14	15	16
8	8	9	A	B	10	11	12	13	14	15	16	17
9	9	A	B	10	11	12	13	14	15	16	17	18
A	A	B	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
B	B	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A

Tabela 13 - Adição na base 12

Tabela de multiplicação na base 12:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B
2	0	2	4	6	8	A	10	12	14	16	18	1ª
3	0	3	6	9	10	13	16	19	20	23	26	29
4	0	4	8	10	14	18	20	24	28	30	34	38
5	0	5	A	13	18	21	26	2B	34	39	42	47
6	0	6	10	16	20	26	30	36	40	46	50	56
7	0	7	12	19	24	2B	36	41	48	53	5ª	65
8	0	8	14	20	28	34	40	48	54	60	68	74
9	0	9	16	23	30	39	46	53	60	69	76	83
A	0	A	18	26	34	42	50	5ª	68	76	84	92
B	0	B	1ª	19	38	47	55	65	74	83	92	A1

Tabela 14 - Multiplicação na base 12

2.3 PECULIARIDADES DOS SISTEMAS DE NUMERAÇÃO BINÁRIO, TERNÁRIO E DUODECIMAL.

Nesta seção, comentaremos a respeito de algumas peculiaridades do sistema de numeração binário, ternária, sistema de numeração de base 7 e duodecimal.

2.3.1 SISTEMA DE NUMERAÇÃO BINÁRIO

Alguns povos antigos da Austrália e da Polinésia já utilizavam esse sistema de numeração, embora, com alguma imperfeição.

Do ponto de vista matemático, o sistema binário é o mais prático por utilizar apenas dois símbolos distintos e o mais simples para realizar as operações fundamentais. Apesar da simplicidade desse sistema de numeração, a desvantagem se dá pela representação extensa de alguns números, por exemplo, o número $(2015)_{10}$ é escrito da forma $(11111011111)_2$.

Mesmo com alguma desvantagem, o sistema se torna muito útil para o uso computacional, ou seja, os computadores usam a base 2 para efetuar o processamento de dados. Todo computador possui em seu processador um código, chamado código da máquina, que são representados por sequência de bits. O bit, na realidade, é como são chamados os dígitos 0 ou 1 do sistema binário de numeração. Um agrupamento de 8 bits corresponde a um byte, por exemplo, cada símbolo digitado no teclado alfa–numérico do computador possui um conjunto singular de oito dígitos binários para representá-lo.

2.3.2 SISTEMA DE NUMERAÇÃO TERNÁRIO

Uma propriedade notável do sistema de numeração ternária é a capacidade numérica que possui, ou seja, é quantidade de números que pode ser escrito com uma quantidade determinada de dígitos. Por exemplo: para escrevermos os 1000 primeiros números da base 10, são necessários 30 dígitos (10 para cada ordem), no entanto, se pensarmos no sistema binário, com 30 dígitos (15 pares de 0 e 1), podemos representar $2^{15} = 32768$ números, isto é, podemos escrever números de até 15 ordens binárias. Portanto, dizemos que o sistema binário tem maior capacidade que o sistema decimal de numeração.

Se utilizarmos a capacidade numérica como meio de avaliarmos um sistema de numeração, é fácil perceber que o sistema de numeração ternária é o mais indicado, pois, é o sistema de numeração capaz de escrever uma maior quantidade de números comparada ao sistema decimal e binário com uma quantidade determinada de dígitos.

Dada uma base qualquer b, considerando n dígitos, é possível escrevermos números de até $\frac{n}{b}$ ordens. A capacidade numérica desse sistema será dada por $b^{\frac{n}{b}}$.

Considere $n = 60$, a tabela abaixo nos mostra que sistema de numeração ternária tem maior capacidade numérica.

Base	Potência	Capacidade numérica
2	2^{30}	1.073.741.824
3	3^{20}	3.486.784.401
4	4^{15}	1.073.741.824
5	5^{12}	244.140.625
6	6^{10}	60.466.176
10	10^{6}	1.000.000
12	12^{5}	248.832
15	15^{4}	50.625
20	20^{3}	8.000
30	30^{2}	900
60	60^{1}	60

Tabela 15 - Capacidade numérica de algumas bases

Portanto a base 3 é a base do sistema de numeração de maior capacidade.

2.3.3 SISTEMA DE NUMERAÇÃO DUOCECIMAL

O sistema duodecimal está intimamente ligado ao corpo humano e tudo indica que essa ligação ocorreu na antiguidade com os povos sumérios, pois, eles usavam um método particular de contagem. Quando contavam, moviam o polegar da mão direita sobre as falanges dos outros quatro dedos, como cada dedo possui 3 falanges, então era possível contar até 12 com apenas uma mão. Já a mão esquerda era utilizada para contar quantas mãos direitas haviam sido completadas na contagem.

Note que cinco dedos da mão esquerda vezes 12 falanges da mão direita encontramos o número 60 que é à base da contagem para a medida de arcos e ângulos, e expressamos, também, a unidade de tempo em grupos de 60, ou seja, 60 segundos nos dá 1 minuto e 60 minutos nos 1 hora.

Outra particularidade do sistema duodecimal é o grande número de divisores que essa base possui, o que facilita verificar se um número escrito nessa base é divisível por 2, 3, 4 e 6, ou seja, basta verifica se último algarismo do número é divisível por 2, 4, 3 ou 6.

Um exemplo interessante de contagem na base 12 é a dúzia, muito utilizada em alguns ramos do comércio atual. Antigamente, em alguns países de língua espanhola, se utilizavam a gruesa que significava 12 dúzias.

2.4 CONVERSÃO DE UM NÚMERO DE UMA BASE NUMÉRICA PARA OUTRA

Como vimos, há inúmeros sistemas de numeração, e a possibilidade de escrever um mesmo número em diversas bases é bastante curioso, afinal, o mesmo número possui diferentes representações em bases distintas, por exemplo, o número 7 do sistema decimal, equivale ao número 10 no sistema de numeração cuja base é 7.

Vejamos um exemplo de como proceder com a conversão de um número no sistema decimal para o sistema de base 7.

Exemplo: Considere o número $(1035)_{10}$. Como proceder para escrevê-lo na base 7?

Todo número escrito na base 10 para ser convertido em uma outra base, basta utilizar divisões sucessivas cujo dividendo seja exatamente o número que representa a base para a qual desejamos converter.

Como desejamos converter o número $(1035)_{10}$ para a base 7, devemos efetuar divisões sucessivas de $(1035)_{10}$ por 7.

1035	7		
6	147	7	
	0	21	7
		0	3

Neste caso o número $(1035)_{10} = (3006)_7$.

Note que para escrevermos a representação numérica de $(1035)_{10}$ na base 7, foi necessário trabalharmos com o último quociente das divisões sucessivas e os restos, além de utilizarmos a ordem reversa como a representação desejada.

Agora faremos o processo de conversão da base 7 para a base 10.

Considere o número $(3006)_7$.

Para efetuarmos a conversão de $(3006)_7$ para a base 10 é necessário escrevermos o número $(3006)_7$ como $3 \times 7^3 + 0 \times 7^2 + 0 \times 7 + 6 \times 7^0$ e resolvermos os cáculos, logo $(3006)_7 = (1035)_{10}$.

Se desejamos converter um número escrito na base 5 para a base 12 de uma maneira prática, primeiramente, precisamos convertê-lo para a base 10, e a partir de então, convertê-lo para a base 12.

Considere o número $(24423)_5$. Para convertê-lo para o sistema duodecimal, primeiramente devemos convertê-lo para a base 10 e daí convertê-lo para a base 12.

Vejamos:

$$(24423)_5 = 2 \times 5^4 + 4 \times 5^3 + 4 \times 5^2 + 2 \times 5 + 3$$

$$(24423)_5 = (1863)_{10}$$

Agora devemos converter $(1863)_{10}$ para a base 12 através das divisões sucessivas.

1863	12		
3	155	12	
	11	12	12
		0	1

Dessa forma obtemos: $(1863)_{10} = 1 \times 12^3 + 0 \times 12^2 + B \times 12 + 3$, daí, $(1863)_{10} = (10B3)_{12}$

Portanto $(24423)_5 = (10B3)_{12}$.

Vejamos, como converter da base 2 para a base 4

Exemplo 5: Considere o número $(10101010)_2$, iremos convertê-lo para a base 4.

Note que $4 = 2^2$, portanto devemos agrupar os algarismos do número $(10101010)_2$ em grupos de 2 da direita para esquerda, assim obtemos $(10 / 10 / 10 / 10)_2$, agora basta convertê-lo da base 2 para a base 10 e o resultado obtido estará automaticamente na base 4, dessa forma:

$$(10 / 10 / 10 / 10)_2 = (2222)_4 = (170)_{10}$$

Note que o processo é mesmo para convertermos da base 3 para a base 9.

Exemplo 6: Considere o número $(110201)_3$, iremos convertê-lo para a base 9.

Como $9 = 3^2$, devemos agrupar os algarismos do número $(110201)_3$ de 2 em 2 da direita para esquerda e em seguida converter cada grupo para a base 10, o resultado obtido é o número obtido na base 9.

$$(11 \,/\, 02 \,/\, 01)_3 = (421)_9 = (343)_{10}$$

Observando o processo de conversão da base 4 para 2 e da base 9 para a base 3, é possível perceber que se uma base é potência inteira da outra é fácil converter um número escrito nessas bases de maneira direta.

Trabalhando agora com as bases 27, 9 e 3 e também com as bases 16, 4 e 2, vejamos os respectivos valores dos 27 símbolos do sistema de base 27 equivalentes no sistema de base 9 e base 3, e dos 16 símbolos do sistema de base 16 equivalentes no sistema de base 4 e base 2.

Base 16	Base 8	Base 4	Base 2
0	00	000	0000
1	01	001	0001
2	02	002	0010
3	03	003	0011
4	03	010	0100
5	05	011	0101
6	06	012	0110
7	07	013	0111
8	10	020	1000
9	11	021	1001
A	12	022	1010
B	13	023	1011
C	14	030	1100
D	15	031	1101
E	16	032	1110

Tabela 16 - Conversão da base 16 para a base 2

Base 27	Base 9	Base 3
0	00	000
1	01	001
2	02	002
3	03	010
4	04	011
5	05	012
6	06	100
7	07	101
8	08	102
9	10	100
A	11	101
B	12	102
C	13	110
D	14	111
E	15	112
F	16	120
G	17	121
H	18	122
I	20	200
J	21	201
K	22	202
L	23	210
M	24	211
N	25	212
O	26	220
P	27	221
Q	28	222

Tabela 17 - Conversão da base 27 para a base 3

Note que, cada símbolo do sistema de base 27 corresponde a três símbolos no sistema de base 3, o mesmo acontece com os símbolos da base 16, cada um deles corresponde a quatro símbolos na base 2, portanto, para a conversão de uma base para outra, basta fazer a simples substituição do valor correspondente de um dígito em uma base pelos dígitos correspondentes da outra.

3 DIVISIBILIDADE

Divisibilidade é uma característica ou particularidade daquilo que é possível dividir. Como nem sempre é possível dividir um número inteiro por outro, estabelecemos essa possibilidade através da relação de divisibilidade.

Definição 1: Dados dois números inteiros a e b, diremos que a divide b, quando existir $c \epsilon \mathbb{Z}$ tal que $b = ca$.

Por exemplo:

- Podemos dizer que 5 divide 15, pois, $15 = 3 \times 5$;
- Podemos dizer que 2 divide 18, pois, $18 = 9 \times 2$;

Dessa forma podemos dizer que 5 é um divisor de 15 ou um fator de 15 ou, ainda, que 15 é um múltiplo de 5.

De maneira geral, se a divide b, podemos dizer que a é um divisor de b ou um fator de b ou, ainda, que b é um múltiplo de a ou, simplesmente, que b é divisível por a.

Adotaremos a notação $a|b$ quando a dividir b e $a \nmid b$ quando a não dividir b. A sentença $a|b$ não representa nenhuma operação nos inteiros, e também não representa uma fração, é apenas uma afirmação que diz existir um $c \in \mathbb{Z}$ tal que $b = ca$.

A seguir algumas propriedades da divisibilidade.

Proposição 1: Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Tem-se que:

I. $1|a$, $a|a$ e $a|0$ se $a \neq 0$
II. a divide b se, e somente se, $|a|$ divide $|b|$.
III. Se $a|b$ e $b|c$, então $a|c$.

Mostraremos apenas as propriedades I e III.

Demonstração:

Propriedade I: Por definição temos que se $a|b$ então existe $c \epsilon \mathbb{Z}$ tal que $b = ca$, como $a = a \cdot 1$, $a = 1 \cdot a$ e $0 = 0 \cdot a$ logo a propriedade I é verificada.

Propriedade III: Como $a|b$ e $b|c$, então existem f, $g \epsilon \mathbb{Z}$ tais que $b = fa$ e $c = gb$. Substituindo o valor de b na equação $c = gb$, obtemos:

$$c = g(fa) = (gf)a$$

portanto $a|c$. ■

Proposição 2: Se $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, então se $a|b$ e $c|d \Longrightarrow ac|bd$.

Demonstração:

Se $a|b$ e $c|d$, então existem $f, g \in \mathbb{Z}$, tal que $b = fa$ e $d = gc$, multiplicando membro a membro ambas as equações obtemos $bd = (fa)(gc) = (fg)(ac)$, logo, $ac|bd$.

Em particular se $a|b$, então $ac|bc$, para todo $c \in \mathbb{Z}$. ■

Proposição 3: Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$ tais que $a|(b \pm c)$. Então $a|b \iff a|c$.

Demonstração:

Suponha que $a|(b + c)$, então existe $f \in \mathbb{Z}$ tal que $b + c = fa$.

Agora se $a|b$, então existe $g \in \mathbb{Z}$ tal que $b = ga$. Substituindo o valor de b na equação $b + c = fa$ obtemos $ga + c = fa \Rightarrow c = fa - ga = (f - g)a$, logo $a|c$.

A demonstração da implicação contrária é análoga.

Por outro lado se $a|(b - c)$ e $a|b$, pelo caso anterior, temos que $a| - c$, o que implica que $a|c$. ■

Proposição 4: Se $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ são tais que $a|b$ e $a|c$, então para todo $x, y \in \mathbb{Z}$, temos $a|(xb + yc)$.

Demonstração: Como $a|b$ e $a|c$ então existem $f, g \in \mathbb{Z}$ tais que $b = fa$ e $c = ga$. Logo $xb + yc = x(fa) + y(ga) = (xf + yg)a$, o que prova o resultado.

Embora existam mais proposições a respeito de divisibilidade, focaremos apenas nessas quatro, pois, serão suficientes para o definirmos alguns critérios de divisibilidade. ■

3.1 CRITÉRIOS DE DIVISIBILIDADE EM UMA BASE QUALQUER

Critérios de divisibilidade, na realidade, são métodos que utilizamos para descobrir se um número inteiro é divisível por outro sem necessariamente efetuarmos a divisão.

Nosso intuito é mostrar que podemos desenvolver esses métodos para uma base qualquer, dessa forma apresentaremos um teorema que nos garante essa possibilidade.

Teorema 2: Considere n um número natural escrito na base b, isto é, $n = a_0 + a_1 b + a_2 b^2 + \cdots + a_r b^r$, com $r \neq 0$ e $a_j \in M = \{0, 1, \ldots, b - 1\}$ para $j = 0, \ldots, r$. Seja d um divisor de b. Assim valem os seguintes critérios:

a) n é divisível por b se, e somente se, o algarismo das unidades de n, na base b, é zero.

Demonstração: Como n está escrito na base b. Pelo Algoritmo de Euclides, temos $n = bq + a_0$, para algum $q \in \mathbb{N}$.

Por hipótese, n é divisível por b, então, $n = bk$ para algum $k \epsilon \mathbb{N}$. Dessa forma podemos reescrever $n = bq + a_0$ como $bk = bq + a_0 \Longrightarrow a_0 = (k - q)b$, ou seja, a_0 é múltiplo de b, como $a_0 \in M$ então $a_0 = 0$, isto é, o algarismo das unidades de n na base b é zero.

Reciprocamente, se o algarismo da unidade de n escrito na base b for zero, então $n = bq + 0$, para algum $q \in \mathbb{N}$, logo n é múltiplo de b e, portanto é divisível por b.■

b) n é divisível por b^t com $t \in \mathbb{N}$ e $1 \leq t \leq r$ se, e somente se, os últimos t algarismos de n, na base b, são zero.

Demonstração: Como n está escrito na base b, temos que:

$$n = a_0 + a_1 b + \cdots + a_{t-1} b^{t-1} + a_t b^t$$

Por hipótese n divisível por b^t, então, $n = b^t k$ para algum $k \in \mathbb{N}$. Dessa forma, podemos reescrever $n = a_0 + a_1 b + \cdots + a_{t-1} b^{t-1} + a_t b^t$ como

$$b^t k = a_0 + a_1 b + \cdots + a_{t-1} b^{t-1} + a_t b^t \Longrightarrow a_0 = b(b^{t-1} k - a_1 - \cdots - a_t b^{t-1})$$

logo a_0 é múltiplo de b, como $a_0 \in M$, então $a_0 = 0$.

Se repetirmos o mesmo processo $t - 2$ vezes, obteremos: $a_1 = a_2 = \cdots = a_{t-1} = 0$. De forma que os últimos t algarismos de n sejam iguais a zero.

Reciprocamente, se $n = a_t b^t + a_{t-1} b^{t-1} + \cdots + a_1 b + a_0$, por hipótese $a_{t-1} = a_t = \cdots = a_0 = 0$ então $n = a_t b^t + 0$, logo n é múltiplo de b e, portanto divisível por b.■

c) n é divisível por d^t com $t \in \mathbb{N}$ e $1 \leq t \leq r$ se, e somente se, $a_0 + a_1 b + \cdots + a_t b^t$ for divisível por d^t.

Demonstração: Como n é da forma $n = a_0 + a_1 b + \cdots + a_{t-1} b^{t-1} + a_t b^t$ e d é um divisor de b, então $b = dc$, para algum $c \in \mathbb{N}$. Dessa forma, pode reescrever n como:

$$n = a_0 + a_1 b + \cdots + a_{t-1} b^{t-1} + a_t (dc)^t$$

Por hipótese n é divisível por d^t e d é divisor de b, logo $n = d^t k$, para algum $k \epsilon \mathbb{N}$. Então, podemos reescrever $n = a_0 + a_1 b + \cdots + a_{t-1} b^{t-1} + a_t (dc)^t$ como segue:

$$d^t k = a_0 + a_1 b + \cdots + a_{t-1} b^{t-1} + a_t (dc)^t \Longrightarrow a_0 + a_1 b + \cdots + a_{t-1} b^{t-1} = d^t (k - a_t c^t)$$

Portanto $a_0 + a_1 b + \cdots + a_{t-1} b^{t-1}$ é múltiplo de d^t.

Reciprocamente, como $n = a_0 + a_1 b + \cdots + a_{t-1} b^{t-1} + a_t b^t$ e d é divisor de b, e ainda, por hipótese, $a_0 + a_1 b + \cdots + a_{t-1} b^{t-1}$ é múltiplo de d^t, então n é divisível por d^t.■

Note que é possível identificar se um número é divisível por outro sem necessariamente efetuarmos a divisão, para tanto, utilizaremos os critérios de divisibilidade.

3.1.1 CRITÉRIOS DE DIVISIBILIDADE NA BASE 10

Vejamos alguns critérios de divisibilidade para a base 10.

Teorema 3: Um número natural n é divisível por 10 se, e somente se, o seu algarismo das unidades é 0.

Demonstração: Note que n pode ser escrito da forma $n = 10q + a_0$. Como desejamos que n seja divisível por 10, então $n = 10K$, com $K \in \mathbb{N}$. Assim:

$$\begin{gathered} n = 10q + a_0 \\ 10K = 10q + a_0 \\ 10K - 10q = a_0 \\ 10(K - q) = a_0 \end{gathered}$$

Dessa forma a_0 é divisível por 10, logo $a_0 = 0$, visto que $a_0 = \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$. É imediato, concluir que se $a_0 = 0$, temos que n é divisível por 10. ■

3.1.2 CRITÉRIO DE DIVISIBILIDADE POR 2

Teorema 4: Um número é divisível por 2 se, e somente se, o algarismo das unidades é par.

Demonstração: Considere n par, ou seja, n pode ser escrito da forma $n = 2m$, com $m \in \mathbb{N}$.

Sendo $m = a_0 + a_1 10 + \cdots + a_{r-1} 10^{r-1} + a_r 10^r$ podemos reescrever m como $m = 10(a_1 + \cdots + a_{r-1} 10^{r-2} + a_r 10^{r-1}) + a_0$, tome $a_1 + \cdots + a_{r-1} 10^{r-2} + a_r 10^{r-1} = M$, então $m = 10 \times M + a_0$, substituindo $m = 10 \times M + a_0$ em $n = 2m$, obtemos:

$$n = 2(10 \times M + a_0) = 2(10 \times M) + 2a_0$$

Como $2a_0 \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$, então o algarismo das unidades de n é $0, 2, 4, 6$ e 8.

Reciprocamente, o número que possui algum dos algarismo $0, 2, 4, 6$ ou 8 na unidade, é par. De fato, se escrevermos $n = 10 \times M + a_0$, como $a_0 = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ então:

$$n = 2(5 \times M + b) = 2M_0$$

donde n é par. ■

3.1.3 CRITÉRIO DE DIVISIBILIDADE POR 3 E 9

Teorema 5: Um número n é divisível por 3 ou por 9 se, e somente se, a soma de seus algarismos for um múltiplo de 3 ou 9, respectivamente.

Demonstração:

Tome um número n na base 10, logo $n = a_0 + a_1 10 + \cdots + a_{n-1}10^{n-1} + a_n 10^n$, se subtrairmos de n a soma dos seus algarismos, ou seja, $a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1} + a_n$, obtemos a seguinte equação:

$$n - (a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1} + a_n) = a_0 - a_0 + a_1 10 - a_1 + \cdots + a_{n-1}10^{n-1} - a_{n-1} + a_n 10^n - a_n$$

$$n - (a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1} + a_n) = (10 - 1)a_1 + \cdots + (10^{n-1} - 1)a_{n-1} + (10^n - 1)a_n$$

$$(a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1} + a_n) = n - [(10 - 1)a_1 + \cdots + (10^{n-1} - 1)a_{n-1} + (10^n - 1)a_n]$$

Como, por hipótese n é divisível por 9, então $n = 9k$, com $k \in \mathbb{N}$. Daí, obtemos:

$$(a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1} + a_n) = 9k - (10 - 1)a_1 + \cdots + (10^{n-1} - 1)a_{n-1} + (10^n - 1)a_n$$

Sendo $(10 - 1)a_1 + \cdots + (10^{n-1} - 1)a_{n-1} + (10^n - 1)a_n$ um múltiplo de 9 então:

$(a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1} + a_n) = 9k'$, com $k' \in \mathbb{N}$.

Por tanto a soma dos algarismos de n também é divisível por 9.

Reciprocamente, se a soma dos algarismos de um número n for divisível por 9, ou seja, se $(a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1} + a_n) = 9q$, com $q \in \mathbb{N}$, então:

$$n = (10 - 1)a_1 + \cdots + (10^{n-1} - 1)a_{n-1} + (10^n - 1)a_n + 9q$$

Logo n é divisível por 9. ■

Se considerarmos n ou $(a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1} + a_n)$ múltiplos de 3 e utilizarmos os mesmos argumentos da demonstração acima, fica provado que todo número n é divisível por 3 se, e somente se, as somas dos seus algarismos é divisível por 3.

3.1.4 CRITÉRIO DE DIVISIBILIDADE POR 7

Esse critério de divisibilidade não acompanha o mesmo raciocínio dos outros critérios citados anteriormente. Neste caso, é necessário repetir um determinado processo até encontrar um determinado valor que seja facilmente verificado como múltiplo de 7. Vejamos:

Um número natural $n = a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0$ é divisível por 7 se, e somente se, o número que não contém o algarismo das unidades $(a_n a_{n-1} \dots a_1)$ subtraído do dobro do algarismo das unidades $(2a_0)$ for divisível por 7, ou seja:

$$(a_n a_{n-1} \dots a_1) - (2a_0) = 7k \Rightarrow n = 7k'$$

Se o número obtido for grande, repita o processo até verificar a divisão por 7.

Primeiramente iremos justificar o processo analisando a seguinte afirmação:

Se $n = a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0$ é divisível por 7, então, $(a_n a_{n-1} \dots a_1) - (2a_0) = 7k$.

Vejamos:

Seja $n = a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0$ divisível por 7. Suponha que $(a_n a_{n-1} \dots a_1) - (2a_0) = tk$, com t e k primos, então $(a_n a_{n-1} \dots a_1) = tk + (2a_0)$.

Note que $n = a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0 = 10(a_n a_{n-1} \dots a_1) + a_0$, assim:

$$10(a_n a_{n-1} \dots a_1) + a_0 = 10(tk + 2a_0) + a_0$$

$$10(a_n a_{n-1} \dots a_1) + a_0 = 10tk + 21a_0$$

Como $n = a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0$ é divisível por 7, devemos ter $10tk + 21a_0$ divisível por 7, no entanto isso só será possível se t ou k for igual a 7. $\blacksquare$

Agora, analisaremos a seguinte afirmação:

Se $(a_n a_{n-1} \dots a_1)$ subtraído do dobro do algarismo das unidades $(2a_0)$ for divisível por 7, então, $n = a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0$ é divisível por 7.

Seja $(a_n a_{n-1} \dots a_1) - 2a_0 = 7k$, para algum $k \in \mathbb{N}$, então $(a_n a_{n-1} \dots a_1) = 7k + 2a_0$. Note que:

$$n = a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0 = 10(a_n a_{n-1} \dots a_1) + a_0 = 10(7k + 2a_0) + a_0 = 70k + 21a_0$$

Portanto n é divisível por 7. $\blacksquare$

3.1.5 CRITÉRIO DE DIVISIBILIDADE POR 11

O critério de divisibilidade por 11 é bem diferente dos métodos já citados anteriormente, antes de demonstrarmos como proceder para saber se um número é ou não divisível por 11 devemos conhecer o lema a seguir.

Lema: Para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que $10^n = 11 \times q_n + (-1)^n$, onde $q_n \in \mathbb{N}$. Em outras palavras, para qualquer potência n-ésima de 10, pode ser escrita como soma de um múltiplo de 11 com a potência $(-1)^n$.

Por exemplo: Considere as potências $10, 10^2, 10^3, 10^4$ e 10^5, podemos escrevê-las como a soma de um múltiplo de 11 com a potência $(-1)^n$.

$10 = 11 \times 1 - 1$

$10^2 = 11 \times 9 + (-1)^2$

$10^3 = 11 \times 91 + (-1)^3$

$10^4 = 11 \times 909 + (-1)^4$

$10^5 = 11 \times 9091 + (-1)^5$

Para mostrarmos que de fato o lema é válido para qualquer potência n-ésima de 10, iremos demonstrá-lo através da indução finita.

Demonstração:

Para $n = 1$ temos $10 = 11 \times 1 - 1$ e portanto a afirmação é verdadeira. Suponha, agora que a proposição seja verdadeira para todo $n = k$, ou seja, $10^k = 11 \times q_k + (-1)^k$. Devemos mostrar a validade da proposição para $n = k + 1$.

Considere $10^{k+1} = 10 \times 10^k$, por hipótese indução temos que $10^k = 11 \times q_n + (-1)^n$, então:

$10^{k+1} = 10 \times 10^k = 10 \cdot \left(11 \times q_k + (-1)^k\right)$

$10^{k+1} = 11 \cdot \left(10 \times q_k\right) + 10 \times (-1)^k$

$10^{k+1} = 11 \cdot (10 \times q_k) + (11 - 1) \times (-1)^k$

$10^{k+1} = 11 \cdot (10 \times q_k) + 11 \times (-1)^k + (-1)^{k+1}$

$10^{k+1} = 11 \cdot \left(10 \times q_k + (-1)^k\right) + (-1)^{k+1}$

Tome $10 \times q_k + (-1)^k = q_{k+1}$, logo $10^{k+1} = 11 \times q_{k+1} + (-1)^{k+1}$, assim concluímos a demonstração. ■

De posse dos conhecimentos prévios para entendermos o critério de divisibilidade por 11 iremos enunciá-lo e demonstrá-lo.

Teorema 6: Um número natural n é divisível por 11 se, e somente se, quando somamos os seus dígitos de ordem par e subtraímos os dígitos de ordem ímpar, o resultado é divisível por 11.

Demonstração: Tome um n escrito na base 10, ou seja, $n = a_r 10^r + a_{n-1} 10^{r-1} + \cdots + a_1 10^1 + a_0$.

De acordo com lema anterior, podemos substituir todas as n-ésimas potências de 10 por múltiplos de 11 somados às potências n-ésimas de (-1). Assim:

$n = a_r (11 \times q_r + (-1)^r) + \cdots + a_1 (11 \times q_1 - 1) + a_0$

$n = 11 \cdot (a_r q_r + \cdots + a_2 q_2 + a_1 q_1) + a_0 - a_1 + a_2 - \cdots + (-1)^r a_r$

Se, por hipótese, n é múltiplo de 11, então $a_0 - a_1 + a_2 - \cdots + (-1)^r a_r$ também é múltiplo de 11.

Reciprocamente, se $a_0 - a_1 + a_2 - \cdots + (-1)^r a_r$ é múltiplo de 11, então:

$n = 11 \cdot (a_r q_r + \cdots + a_2 q_2 + a_1 q_1) + a_0 - a_1 + a_2 - \cdots + (-1)^r a_r$

$n = 11 \cdot (a_r q_r + \cdots + a_2 q_2 + a_1 q_1) + 11k.$

Por tanto n é múltiplo de 11. $\blacksquare$

4 APLICAÇÕES

Neste capítulo, nosso objetivo é apresentar algumas aplicações que podem ser utilizadas em sala de aula para introduzir conceitos e conteúdos relacionados com divisibilidade, tendo em vista, que os discentes se sentem mais atraídos por desafios em forma de jogos ou enigmas que instigam a curiosidade e o interesse de saber o que há por trás de cada jogo ou desafio.

4.1 APLICAÇÃO 1: TRUQUES COM CARTAS DE BARALHO

Os truques com cartas são famosos especialmente entre os mágicos e são ótimos para aguçar a curiosidade de quem aprecia as apresentações. No mundo da matemática, não são, necessariamente, os mágicos que roubam a sena com seus truques quase indecifráveis, um exemplo claro é o matemático Matin Gardner (1914 – 2010) que se dedicou a divulgar interessantes enigmas e desafios matemáticos e, durante sua vida escreveu mais de 70 obras, por esse motivo, iremos apresentar dois problemas de sua autoria e mostraremos como solucionar esses desafios.

Problema 1: Nove cartas de um baralho de cartas, com valores diferentes, do um (Ás) ao nove (9), são misturadas dentro de um chapéu. Em seguida retiram-se as nove cartas, uma a uma, e alinham-se as cartas ao longo de uma fila, à medida que são retiradas, de modo a formar um número com nove algarismos. Qual é a probabilidade de um número obtido ser divisível por 9?

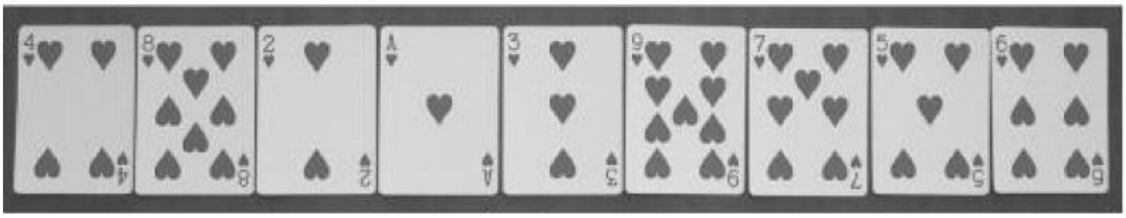


Figura 5 - Ilustração do problema 1

O que torna esses desafios interessantes é que, à primeira vista, o leitor tem ideia de que os cálculos por trás desses problemas são muito sofisticados, quando na verdade, apenas os conhecimentos que envolvam critérios de divisibilidade, são suficientes para a sistematização e resolução desse problema.

A solução do problema 1 é bem simples, no entanto, é necessário que o leitor conheça o critério de divisibilidade por 9. Como vimos anteriormente um número é divisível por 9 se, e somente se, a soma de seus algarismos for divisível por 9. De acordo com a figura 5 temos que o número descrito pela retirada das cartas de baralho foi o número 482139756, cuja soma dos algarismos é $4+8+2+1+3+9+7+5+6=45$ como $45=4+5=9$ então o número descrito acima é divisível por 9. É fácil ver que qualquer número descrito pelas 9 cartas será sempre divisível por 9, ou seja, a probabilidade é de 100%, afinal a soma $1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$ e portanto divisível por 9.

Problema 2: Se repetirmos o mesmo procedimento do problema 1, mas agora com 4 cartas, com valores diferentes, do um (Ás) ao quatro (4), qual é a probabilidade de o número obtido ser divisível por 3?

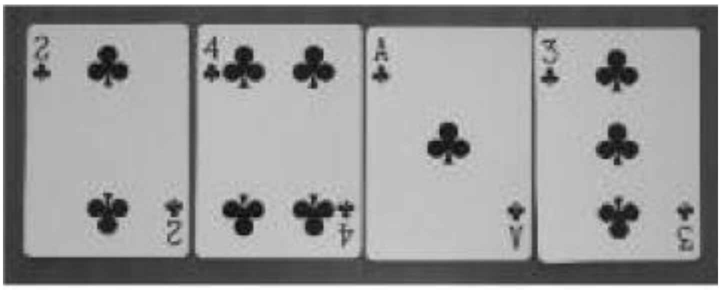


Figura 6 - Ilustração do Problema 2

Novamente o leitor, para solucionar esse problema, deve ter conhecimento a respeito dos critérios de divisibilidade. Neste caso, deve-se conhecer o critério de divisibilidade por 3, a saber: um número é divisível por 3 se, e somente, a soma de seus algarismos for divisível por 3. Neste caso, a probabilidade é de 0% pois, qualquer número descrito pelas cartas de baralho tem soma $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ como 10 não é divisível por 3, então nenhum número formado por esses 4 algarismos será divisível por 3.

4.2 APLICAÇÃO 2: UM TRUQUE COM DIVISIBILIDADE

A sensação de desvendar truques matemáticos é de extrema realização, aguçando assim, a criatividade e a busca por algo mais instigante e mais desafiador. Na realidade não é necessário ser um gênio da matemática para desvendar o que ocorre durante a realização dos truques, basta ter os conhecimentos matemáticos necessários para entendê-lo.

Por exemplo: Pense em número de 3 algarismos (eu pensei em 245).

Escreva-o duas vezes formando um número de 6 algarismos (no meu caso encontrei 245245).

Divida esse número por 13 (o meu resultado foi 18865)

Divida o número 188665 por 11 (o meu resultado foi 1715)

Divida o número 1715 por 7 (o meu resultado foi 245)

Agora faça o mesmo com o número que você pensou e verá que:

- As divisões serão exatas
- O número final será o que você escolheu

Por que isto acontece?

Observe que ao duplicarmos o número de 3 algarismos para obtermos o número de 6 algarismos, na realidade encontramos um novo número que é múltiplo do primeiro, ou seja, $245245 = 245 \times 1000 + 245$ ou ainda $245245 = 245 \times 1001$.

As divisões por $13, 11$ e 7 são exatas, pois, o número $1001 = 13 \times 11 \times 7$, então o número $245245 = 245(13 \times 11 \times 7)$ e dessa forma o "mistério" está explicado, ou seja, ao duplicarmos um número sempre de 3 algarismos, na realidade, multiplicamos o número original por $13, 11$ e 7.

Os truques mostrados a seguir, são retirados do livro "Mágica, Matemática e outros Mistérios" de Sampaio e Malagutti.

4.3 APLICAÇÃO 3: RESGATANDO O DÍGITO PERDIDO

Imagine que esteja assistindo uma aula e, de repente, o professor lhe propõe o seguinte desafio:

O professor pede para que você escreva, em segredo, um número inteiro, de quatro ou cinco algarismos, que não precisam ser diferentes entre si e, que não faça uso do algarismo zero.

Em seguida o professor pede-lhe para calcular a soma dos algarismos do número que você escolheu.

Suponha que tenha escolhido o número 73214. A soma dos algarismos deste número é 17.

O professor pede que suprima um dos algarismos de seu número, riscando-o e, com os algarismos que restaram formar um novo número alterando a ordem dos algarismos como quiser.

Neste caso, você pode suprimir, do seu número original, o algarismos 4 e, em seguida, com os algarismos restantes, formar o número 1237.

Novamente, o professor pede que subtraia desse novo número (1237), a soma dos algarismos do número original. Você encontrará $1237 - 17 = 1220$.

O professor pede que lhe informe o resultado dessa subtração e, ouvindo o resultado, revela imediatamente o algarismo suprimido do número original.

A pergunta que fazemos é: "como isso é possível?"

Para que esse truque seja possível, é necessário que o professor conheça o critério de divisibilidade por 9. Como citamos anteriormente, um número é divisível por 9 se, e somente se a soma de seus algarismos for divisível por 9.

Antes da explicação sobre como encontrar o dígito perdido, daremos algumas explicações adicionais.

Por exemplo, para sabermos qual o resto da divisão de 73214 por 9, calculamos a soma dos algarismos $7+3+2+1+4=17$. O resto da divisão de 17 por 9 é 8. Note que, $7+3+2+1+4=17$ e $1+7=8$, ou seja, o resto da divisão de 73214 por 9 é 8.

Dessa forma, a diferença entre um número inteiro e a soma de seus algarismos é sempre divisível por 9, já que os restos das divisões por 9 são os mesmos.

Por exemplo, $73214-(7+3+2+1+4)=73197$ é divisível por 9, pois,

$$7\times 10000+3\times 1000+2\times 100+1\times 10+4-(7+3+2+1+4)=$$
$$=7\times 9999+3\times 999+2\times 99+1\times 9$$

Voltando à explicação da descoberta do dígito perdido.

De acordo a situação descrita à cima, a pessoa submetida ao truque do professor, escolheu o número 73214 e suprimiu o algarismo 4, e com, os algarismos restantes formou o novo número 1237.

A diferença $1237-(7+3+1+2+4)=1220$ não será um número divisível por 9, pois, foi suprimido o algarismo 4 do número original.

Foi informado ao professor o resultado 1220, somando os algarismos desse resultado obtemos 5, revelando ao professor que não encontrou um 9 ao final por falta de 4 unidades e, portanto o dígito perdido é o algarismo 4.

4.4 APLICAÇÃO 4: ADIVINHAÇÃO EGÍPCIA

O professor pede a uma pessoa que pense em um número de 10 a 100. O professor executa então os seguintes passos:

a) Pergunta a pessoa se o número pensado é par ou ímpar. Ouvindo a resposta, se for par, pede à pessoa que divida o número por 2. Se for ímpar, pede à pessoa que subtraia 1, e em seguida divida o resultado por 2.
b) Pergunta então se o novo resultado é par ou ímpar.
c) O procedimento continua com cada novo resultado. Isto é, o mágico pergunta se o número resultante é par ou ímpar e, ouvido a resposta pede à pessoa que repita o procedimento descrito no item (a). O professor pede a pessoa para avisá-lo quando o resultado tornar-se igual a 1, quando então os cálculos da pessoa termina.

O professor vai fazendo anotações enquanto a pessoa lhe passa as informações solicitadas e, quando é informado de que o resultado é igual a 1, ele revela imediatamente à pessoa o número pensado por ela.

Como foi possível a súbita descoberta do professor?

Suponhamos que a pessoa tenha escolhido o número 74. Vamos simular o que foi feito pelo voluntário e quais foram às anotações do professor.

Número pensado pelo voluntário e resultado das sucessivas divisões por 2	Anotações do mágico (cada número ímpar informado pelo voluntário é selecionado)
74 (número pensado)	1
37	2
18	4
9	8
4	16
2	32
1	64

Tabela 16 – Adivinhação egípcia

O professor anota, nos sucessivos estágios da brincadeira, potências de 2 iniciando por $2^0 = 1$. Em seguida, o professor soma as potências de 2 selecionadas pela cor cinza, $64 + 8 + 2 = 74$, e resgata o número que foi pensado.

O mistério desse truque, está relacionado ao algoritmo das divisões sucessivas para transformar um número escrito na base 10 para a base 2.

O passo a passo descrito, sempre permite ao professor a composição do número pensado como soma de potências de 2.

Se nos remetermos à história, veremos que esse truque foi inspirado pelo algoritmo da multiplicação dos antigos egípcios, que recorria à decomposição de um número como soma de potências de 2.

4.5 APLICAÇÃO 5: OS CALENDÁRIOS MÁGICOS DO APAGÃO

Neste truque, o professor exibe sequencialmente cinco calendários, que supostamente, diz ele, foram elaborados à época do racionamento de energia elétrica do país, vulgo "apagão".

Cada calendário apresenta algumas datas destacadas. Essas datas, diz o professor, foram propostas como datas em que as empresas de produção industrial teriam que desligar suas máquinas, como forma de racionamento de energia elétrica. Com esse calendário, segundo o professor, ele pode adivinhar a data de aniversário de qualquer um dos espectadores.

Tendo escolhido um espectador para participar da brincadeira, ao exibir cada calendário pergunta-lhe se o dia de seu aniversário aparece em destaque ou não.

Os calendários exibidos, com os seus dias demarcados, devem obedecer aos seguintes padrões. Os números destacados são indicados em negrito, e sublinhados.

calendário 1

dom	seg	ter	qua	qui	sex	sab
		1	2	**3**	4	**5**
6	**7**	8	**9**	10	**11**	12
13	14	**15**	16	**17**	18	**19**
20	**21**	22	**23**	24	**25**	26
27	28	**29**	30	**31**		

calendário 2

dom	seg	ter	qua	qui	sex	sab
		1	**2**	**3**	4	5
6	**7**	8	9	**10**	**11**	12
13	**14**	**15**	16	17	**18**	**19**
20	21	**22**	**23**	24	25	**26**
27	28	29	**30**	**31**		

calendário 3

dom	seg	ter	qua	qui	sex	sab
		1	2	3	**4**	**5**
6	**7**	8	9	10	11	**12**
13	**14**	**15**	16	17	18	19
20	**21**	**22**	**23**	24	25	26
27	**28**	**29**	**30**	**31**		

calendário 4

dom	seg	ter	qua	qui	sex	sab
		1	2	3	4	5
6	7	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
13	**14**	**15**	16	17	18	19
20	21	22	23	**24**	**25**	**26**
27	**28**	**29**	**30**	**31**		

calendário 5

dom	seg	ter	qua	qui	sex	sab
		1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	**16**	**17**	**18**	**19**
20	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**
27	**28**	**29**	**30**	**31**		

Figura 7 - Calendário Mágico do Apagão

A explicação do truque envolve conhecimentos a respeito de potências de 2.

Suponha que a pessoa faça aniversário no dia 09 de setembro. O mágico observa o primeiro número grifado em cada calendário que aparece o número 9 grifado, indicado pelo espectador. No caso do nosso exemplo, os calendários indicados, com o 9 grifado, serão os calendários 1 e 4. Os primeiros números grifados nesses calendários são 1 e 8, o professor faz mentalmente a soma 1 + 8 obtendo 9.

A pessoa dirá que é do signo de virgem. O professor observa que o signo de virgem é das pessoas nascidas de 23 de agosto a 22 de setembro. Como a pessoa faz aniversário no dia 9, ela só pode ter nascido em setembro.

Ao ler o horóscopo, o professor terá à mão uma tabela dos signos dos zodíacos, como a seguinte:

Signo	Datas
Áries	21/03 a 20/04
Touro	21/04 a 20/05
Gêmeos	21/05 a 20/06
Câncer	21/06 a 21/07

Leão	22/07 a 22/08
Virgem	23/08 a 22/09
Libra	23/09 a 22/10
Escorpião	23/10 a 21/11
Sagitário	22/11 a 21/12
Capricórnio	22/12 a 20/01
Aquário	21/01 a 19/02
Peixes	20/02 a 20/03

Tabela 18 - Signos do Zodíaco

Se a pessoa fizer aniversário dia 21 e for de Câncer, ou dia 20, e for de Peixes, o mágico poderá adicionalmente perguntar se a pessoa é do primeiro ou do último decanato de seu signo.

Os primeiros dias grifados, nos cincos calendários, são as cinco primeiras potências de 2: $2^0, 2^1, 2^2, 2^3$, e 2^4. Cada inteiro positivo pode ser expresso, de uma única maneira, como potência de 2 ou como soma de potências de 2 distintas entre si. O primeiro calendário mostra grifados apenas os números expressados por somas de potências de 2 em que o número 1 participa. O segundo calendário mostra grifados os números expressados por tais somas em que o número 2 participa. Os calendários 3, 4 e 5 mostram, grifados, os números expressados por somas tendo a participação das potências 4, 8 e 16, respectivamente.

Assim, por exemplo, o único número a aparecer nos calendários 1, 4 e 5 será $1 + 8 + 16 = 25$.

4.6 APLICAÇÃO 6: O TRIUNFO DA PRINCESA GENEROSA

O Rei maligno aprisionou o príncipe da Princesa Generosa e para salvá-lo é preciso que ela resolva um desafio proposto pelo Rei, caso contrário o príncipe será executado. O desafio consiste em adivinhar 3 números de dois algarismos a, b e c que o Rei escrevera secretamente nos livros oficiais do reino. Para isso a Princesa deve fornecer três números X, Y e Z e logo depois que o Rei anunciar o valor da soma $aX + bY + cZ$, a Princesa deverá dizer os valores de a, b e c.

Para que a Princesa Generosa resolvesse o problema proposto pelo Rei maligno, foi necessário conhecimento a respeito de bases numéricas, neste caso, base 100, ou seja, para salvar o príncipe, foi suficiente a Princesa Generosa dizer os números $X = 100^2$, $Y = 100$ e $Z = 100^0$, dessa forma o número será escrito como $(abc)_{100}$.

REFERÊNCIAS

CHAVES, Ana P.; PORTO, Thiago. **O Rei Maligno e a Princesa Generosa: Sobre Bases Numéricas e Critérios de Divisibilidade.** Disponível em: < https://www.researchgate.net/publication/275097340_O_REI_MALIGNO_E_A_PRINCESA_GENEROSA_SOBRE_BASES_NUMERICAS_E_CRITERIOS_DE_DIVISIBILIDADE>. Acesso em: 16 nov. 2015.

HEFEZ, A. **Aritimética**. Coleção PROFMAT. 1ª edição. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

JUNQUEIRA, Luís C. de Souza. **Critérios de Divisibilidade.** 2001. Monografia, Universidade Federal de Santa Catarina, 2001.

JURKIEWICZ, Samuel. **Divisibilidade e Números Inteiros – Introdução à Aritmética Modular.** Disponível em: < http://www.ebah.com.br/content/ABAAAAjdYAH/divisibilidade-numeros-inteiros>. Acesso em: 20 nov. 2015.

MIYASCHITA, Wagner Yuwamamoto. **Sistemas de Numeração – Como funcionam e como são estruturados os números.** Disponível em: < http://wwwp.fc.unesp.br/~mauri/TN/SistNum.pdf>. Acesso em: 29 out. 2015.

NETO, Angelo Papa. **Material Teórico – Módulo de Divisibilidade Critérios de Divisibilidade**. Disponível em: <http://matematica.obmep.org.br/uploads/material_teorico/5obdvodxmnk8c.pdf>. Acesso em: 14 dez. 2015.

SAMPAIO, João C.; MALAGUTTI, Paulo L. **Mágicas, Matemática e outros msitérios**.

SANTOS, Anderson Flávio dos. **Sistemas de Numeração Posicionais e não Posicionais.** 2014. 80f. Dissertação (mestrado profissionalizante), Universidade Estadual Paulista, 2014.

TEIXEIRA, R. C. **Critérios de divisibilidade e truques com cartas.** Disponivel em: <https://repositorio.uac.pt/bitstream/10400.3/3435/1/Ricardo%20C%20Teixeira%20A65.pdf>. Acesso em: 7 dez. 2015.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS