Teorema Fundamental da Álgebra: Ferramentas para Demonstrar para Alunos do Ensino Médio.

Autor: Claudio D'Alessandro Salvado

Orientadores: Carlos Gustavo T. de A. Moreira

Rafael de Mattos Grisi

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, a meu avô, Miécio D'Alessandro Salvado, e a meu padrinho, Adolfo Munhoz, pela sua paciência e incentivo durante a nossa convivência. Sei que, se possível fosse, vocês estariam aqui comigo fisicamente para me prestigiar.

Também tenho que agradecer aos meus pais, pois se não fosse pelo amor deles, nunca teria tido os ensinamentos básicos para estar aqui presente.

A minha esposa, Luana Monteiro Sotero, eu agradeço pelo suporte, pelo amor, pela confiança em mim, pelas palavras de carinho e conforto, e principalmente, pela paciência que teve comigo durante essa jornada.

Agradeço ao amigo, e membro da banca, Rafael Grisi. Se não fosse por ele essa empreitada nem teria começado. Foi você que me apresentou ao PROFMAT, e agora também estará presente na sua conclusão.

Aos mestres do PROFMAT o meu eterno apreço. Sem vocês não seria impossível me aperfeiçoar e melhorar meu rendimento profissional.

Lista de figuras

Sumário

1. Introdução

O estudo da matemática sempre foi destinado à maneira como se chega na solução dos problemas, e para isso precisamos de axiomas, postulados, proposições, teoremas, lemas e corolários. E todos eles são necessários para o bom entendimento da matemática.

Com os axiomas e postulados podemos provar as proposições, os lemas, os teoremas e os corolários. Alguns são de fácil demonstração, outras são de maior complexidade. Mas o que é importante é a demonstração como ferramenta do entendimento da matemática.

O estudo da matemática deve ter como início o incentivar a curiosidade dos alunos, e esse caminho é tentar mostrar, e demonstrar, todo o seu conteúdo. Nem sempre é possível fazer as demonstrações, pois é necessária uma matemática superior ao nível dos alunos. Nesses casos o professor deve encaminhar o entendimento dos alunos a uma descoberta intuitiva e, de certa forma, interessante. Por exemplo: alunos do sétimo ano do ensino fundamental aprendem os números inteiros e racionais. Através da bijeção nos naturais com o conjunto dos inteiros e racionais podemos mostrar que ambos têm o mesmo tamanho. Os alunos nessa série não sabem o que é função ou bijeção, logo devemos mostrar aos alunos que é possível contar cada um dos elementos de cada conjunto, e podemos incluir aí os naturais, e assim mostrar que todos esses conjuntos possuem o mesmo tamanho. A ideia da bijetividade está contida na explicação do professor, mas não está formalizada. E o aluno compreende e entende o conceito.

Quando podemos utilizar todo o ferramental matemático para fazer as demonstrações devemos usá-lo, pois o aluno tem que conhecer como se chega no resultado que ele vai usar, como por exemplo a Lei dos Cossenos. Seja no nono ano do ensino fundamental, ou no primeiro ano do ensino médio deve ser demonstrada com todos os artifícios possíveis, e a idade dos alunos permitem que seja entendido cada passo lógico na demonstração do teorema.

As demonstrações geométricas são as mais usadas pelos professores para explicitar que os teoremas são demonstráveis. Mas infelizmente somente alguns teoremas são demonstrados e, normalmente, não se cobram mais demonstrações em provas, tanto no ensino fundamental, quanto no médio. As demonstrações algébricas, como por exemplo a fórmula da resolução de equações quadráticas, têm suas demonstrações no livro didático, e o professor, na maioria das vezes passa por cima, e nem a faz no quadro, nem comenta com seus alunos.

Alguns fatores contribuem para que os resultados algébricos deixem de ser demonstrados: o primeiro é que, diferente da geometria, normalmente não há algo visual para o aluno. Em segundo lugar os professores, por terem um conteúdo para passar, não dão atenção devida às demonstrações, normalmente apenas dizendo que não é necessário ver a demonstração, ou pior, por não saberem como demonstrar o teorema algébrico. Neste último caso o professor simplesmente passa pelo teorema nem querendo explicar o conteúdo.

Mesmo com uma certa rejeição por parte dos alunos, as demonstrações das proposições, lemas, teoremas e corolários ajudam na fixação do conteúdo e melhora a percepção da matemática, afinal matemática não é somente um amontoado de contas e problemas.

O objetivo desse trabalho é incentivar a demonstração, para o ensino médio, do Teorema Fundamental da Álgebra, mostrando o passo a passo para que o professor possa introduzir uma demonstração adequada para os alunos de um importante teorema.

2. Histórico:

2.1 Os números complexos

Os números complexos foram aparecendo, na história da matemática, naturalmente, pela necessidade de se resolver equações de segundo grau. Os Sumérios já sabiam resolver equações de segundo grau nas tábulas de argilas encontradas, datadas de aproximadamente entre 1900 e 1600 A.C. e utilizando o método de completar quadrados. E, aparentemente, eles sabiam que um número negativo não possuía raiz quadrada. A tábula *Plimpton 322* trazia vários ternos pitagóricos, o que demonstra esse conhecimento.

Os gregos também resolviam algumas equações de segundo grau, porém usando régua e compasso. Quando Roma invade a Grécia Helenista, a matemática grega entra em declínio, mas *Heron de Alexandria* (Séc I d.C.), tentou determinar o volume de um tronco de cone, que requeria computar a raiz quadrada de 81−144, embora que, no mundo helenístico, números negativos não fossem aceitos.

Com o fim do Império Romano e a ascensão do Cristianismo, a Europa entrou na Idade das Trevas e o desenvolvimento da Matemáticas passou para as mãos dos árabes e hindus.

Na Índia, as pesquisas no campo da álgebra avançaram muito. O maior exemplo disso é a fórmula de resolução de equações quadráticas, atribuída a Bhaskara, mas descoberta pelo matemático hindu Sridhara, no século 11. Dependendo da equação o discriminante pode ser negativo, mas esse resultado, nessa época, não chegava a ser considerado. Os matemáticos afirmavam que o problema não tinha solução.

No século XVI a matemática voltou a ser estudada na Europa, entre outros lugares na Itália. E foi na península italiana que se percebeu que os números conhecidos não eram suficientes, e assim a criação do conjunto dos números complexos foi concebida.

Girolamo Cardano nasceu em Pavia, em 1501 e faleceu em Roma, em 1576. Foi um excepcional cientista, porém de caráter duvidoso. Ele é descrito como violento, trapaceiro, invejoso, entre outras características menos nobres. Escreveu o *Liber de Ludo Aleae*, onde introduziu a ideia de probabilidade, porém ensinava maneiras de trapacear nos jogos. Também foi autor do *Ars Magna*, considerado o compendio de álgebra da época, publicado em 1545.

Nicoló Fontana, apelidado de Tartaglia, também era italiano e com excelente talento matemático. Nasceu em Bréscia em 1500, e faleceu em 1557 em Veneza. Seu apelido veio de um incidente na infância, onde foi severamente ferido na boca, por golpes de sabre. E pela cicatriz deixada Nicoló teve problemas de fala, eis a origem do seu apelido, Tartaglia, que em italiano significa gago. Escreveu diversas obras, entre elas uma tradução dos *Elementos* de Euclides, e um tratado de aritmética, o *General Trattato di e Misure*, conhecido como o melhor tratado de aritmética do Século XVI.

Aproximadamente em 1510 um matemático italiano, Scipione Del Ferro, encontrou uma forma geral de resolver as equações cúbicas de forma $x^3 + px + q = 0$, mas infelizmente morreu antes de publicar sua descoberta. Um dos seus alunos, chamado Antonio Maria Fior, conhecia a solução de seu mestre, e assim tentou ganhar notoriedade. Nesta mesma época, Tartaglia começava a ganhar certa notoriedade. Então Fior desafiou o matemático para um desafio, onde propôs que resolvesse uma equação cúbica. Tartaglia sabia que seu oponente sabia resolver tais equações, mas mesmo assim aceitou o desafio. Ao final, Tartaglia não só resolveu as equações propostas, como também desenvolveu um método geral para resolução de equações cúbicas na forma $x^3 + px^2 + q = 0$. Tartaglia ganhou o desafio, e Fior saiu humilhado.

Nessa mesma época, Cardano estava escrevendo a *Pratica Arithmeticae Generalis*, um livro com ensinamentos de álgebra, aritmética e geometria. Quando soube que existia a resolução de tais equações, Cardano pediu para Tartaglia que revelasse sua fórmula, e este negou. Após pedidos, ameaças, súplicas e uma promessa de não publicar, Tartaglia ensinou a Cardano como resolver as equações cúbicas. Na sua obra *Ars Magna*, Cardano, como poderia ser previsto, traiu a palavra dada a Tartaglia e publicou a resolução das equações cúbicas. A fórmula Trataglia-Cardano que resolve equações cúbicas do tipo $x^3 = ax + b$ é:

$$x = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3}} - \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3}}$$

Nesta mesmo obra Cardano também trabalhou com equações quadráticas, e esbarrou em alguns problemas que ele designou como "manifestamente impossível". Um exemplo desses problemas é o seguinte: "Divida 10 em duas partes cujo produto é 40". O problema recai numa equação de segundo grau, $x^2 - 10x + 40 = 0$, e suas raízes são $5 + \sqrt{-15}$ e $5 - \sqrt{-15}$. Apesar de Cardano achar o esforço inútil, essa foi a primeira vez onde se escreveu uma raiz quadrada de um número negativo.

Ainda no Século XVI, o matemático italiano Rafael Bombelli (1526 – 1572) no seu livro *l'Algebra* (1572), pela primeira vez viu a necessidade das raízes negativas. Quando Bombelli aplica a fórmula de Tartaglia-Cardano na equação $x^3 = 15x + 4$, obtém:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

Uma das raízes dessa equação é $x = 4$, e com esse dado Bombelli afirma que esse valor está implícito na expressão para as raízes da equação. Também afirma que é possível achar um sentido para a expressão $2 \pm \sqrt{-121}$, e que seria possível definir operações, como adição, multiplicação, radiciação, para expressões análogas a essa.

Essa foi a primeira vez na história da matemática que se admitiu a existência de soluções para equações que antes eram consideradas impossíveis.

No Século XVII, René Descartes, filósofo e matemático francês (1596 – 1650), em seu livro *Discurso do Método*, fala: "Nem sempre as raízes verdadeiras (positivas) ou falsas (negativas) de uma equação são reais. As vezes elas são imaginárias". Esse é o motivo pelo qual a $\sqrt{-1}$ é chamada de ***número imaginário***.

A grande dificuldade de se admitir a existência desses números nessa época foi a inexistência de representações geométricas ou de uma interpretação física.

O trabalho de outros matemáticos foi expandindo o conhecimento dos números complexos. John Wallis, inglês (1616 – 1703), já considerava as raízes negativas e complexas, no seu livro *Tratise on Algebra*. Abraham de Moivre, francês (1667 – 1754), relacionou a trigonometria com os números complexos. Jean le Rond d'Alembert, enciclopedista francês (1717 – 1783) também estudou os números complexos. Roger Cotes, inglês (1682 – 1716), foi o primeiro matemático a escrever o que hoje se chama de *Fórmula de Euler* ($\cos x + isen\, x$).

Leonhard Euler, suíço (1707 – 1783), foi o responsável por uma padronização da matemática. Estudou o complexo $z = a + bi$, onde $i^2 = -1$. A ele também está ligado o número *e*, também conhecido como número de Euler. E assim escreveu a, assim conhecida, fórmula de Euler: $e^{i\theta} = \cos\theta + isen\,\theta$.

O matemático e cartógrafo norueguês Caspar Wessel (1745 – 1818) foi o primeiro a descrever a interpretação geométrica dos números complexos como pontos de um plano complexo. Na mesma época que Wessel fazia seus estudos sobre a geometria dos números complexos, o matemático francês Jean-Robert Argand (1768 – 1822) também fazia estudos nessa área, e em 1806 publicava o *Ensaio Sobre o Método de Representar Quantidades Imaginárias*.

Johann Carl Friedrich Gauss, alemão (1777 – 1855), também estudou a geometria dos complexos. Em 1831 usou pela primeira vez o nome números complexos.

Em 1833, o matemático irlandês William Rowan Hamilton (1805 – 1865) comunicou a Academia Real Irlandesa um artigo onde definia a álgebra dos números complexos como uma álgebra de pares ordenados reais.

2.2 O Teorema Fundamental da Álgebra

Muito antes do descobrimento e formalização dos números complexos o matemático francês François Viète (1540 – 1603) mostrou equações polinomiais com coeficientes reais de grau *n* com *n* raízes.

Aparentemente, o matemático alemão Peter Roth (1580 – 1617) foi o primeiro escritor que, explicitamente, teorizou o Teorema Fundamental da Álgebra quando afirmou que equações polinomiais de grau *n* possuem *n* raízes.

Em 1629, o matemático belga Albert Girard (1595 – 1632) publicou *Invention Nouvelle em l'Algèbre*. Nessa publicação de 63 páginas Girard entendeu a formação dos coeficientes das potências a partir das somas de suas raízes e seus produtos, entendeu o uso das raízes negativas em problemas geométricos. Girard também falou das raízes imaginárias, e compreendeu que as equações poderiam ter tanto raízes reais, como imaginárias.

Em 1637 Descartes publica um apêndice ao *Discurso do Método* chamado *La Géometrie*. Ali ele dá os primeiros passos para juntar a álgebra com a geometria, criando assim a Geometria Analítica. Neste trabalho ele descreve todo o conhecimento da época sobre as equações polinomiais, e observa que um polinômio P(x), com coeficientes reais e variável real x, que se anula em um número real α, é divisível por $(x - \alpha)$.

Em 1702, o alemão Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716), tentando integrar uma função dada pela divisão de dois polinômios com coeficientes reais, para publicar no *Acta Eruditorum*, uma revista científica fundada por ele mesmo, considera a questão se é sempre possível fatorar um polinômio real em fatores lineares ou quadráticos. Infelizmente Liebniz achara um contraexemplo na fatoração de $x^4 + r^4$, onde *r* é um número real:

$$x^4 + r^4 = (x^2 + r^2 i)(x^2 - r^2 i) = \left(x + r\sqrt{i}\right)\left(x - r\sqrt{i}\right)\left(x + r\sqrt{-i}\right)\left(x - r\sqrt{-i}\right)$$

E o produto de cada dois fatores não era um polinômio quadrático real. O que Leibniz não percebeu é que as raízes de *i* e – *i*, poderiam ser escritas na forma $a + bi$. Assim, escrevendo:

$$\sqrt{i} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i, \text{ e } \sqrt{-i} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i,$$

teríamos que a multiplicação do primeiro com o terceiro fator, e a do segundo com o quarto fator encontraríamos dois polinômios quadráticos.

$$x^4 + r^4 = \left(x^2 + r\sqrt{2}x + r^2\right)\left(x^2 - r\sqrt{2}x + r^2\right)$$

Em 1742 Euler enunciou que um polinômio com coeficientes reais pode ser fatorado como um produto de fatores lineares, mas não conseguiu provar de uma maneira geral, apenas para polinômios reais de grau menor ou igual a 6. Também enunciou, nessa mesma época, que se um polinômio que possui raízes imaginárias tem, então, uma raiz na forma $a + bi$.

J. d'Alembert, em 1789, também estava pesquisando um método para integrar uma função dada pela divisão de dois polinômios com coeficientes reais, usando o processo chamado, hoje, de *Método das Frações Parciais*, encontra uma demonstração difícil para o Teorema Fundamental da Álgebra. Essa demonstração continha um erro, que foi corrigido em 1851 por Victor Puiseux, matemático francês (1820 – 1883).

Joseph-Louis Lagrange, matemático italiano (1736 – 1813), em 1772, corrigiu a prova de Euler na demonstração do *Teorema Fundamental da Álgebra*, porém a sua demonstração também apresentava lacunas. Lagrange, em correspondências, já afirmava que os números imaginários se tornaram universalmente aceitos como parte da matemática.

Pierre Simon Laplace, matemático e astrônomo francês (1749 – 1827), apresentou, em 1795, uma nova demonstração do *Teorema Fundamental da Álgebra*, diferente da de Euler A demonstração era mais elegante, porém também era incompleta.

Em 1798 outra prova do teorema foi publicada no artigo "On the roots os equations", na ThePhilosophical Transactions of The Royal society, pelo reverendo e matemático inglês James Wood (1760 – 1839). A sua prova também tinha falhas. Recentemente, nos anos 2000, sua prova foi reabilitada.

Gauss, em sua tese de doutorado, em 1799, apresenta uma demonstração do *Teorema Fundamental da Álgebra*. Esta demonstração, como todas as outras anteriores, também apresenta falhas. As falhas da demonstração de Gauss são corrigidas por Alexander Ostrowski, matemático ucraniano (1893 – 1986). Em 1816 Gauss apresenta a sua segunda prova do teorema. A prova está correta dessa vez, porém utiliza um teorema que só seria provado mais tarde, o *Teorema do Anulamento*: Se f for contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e se $f(a)$ e $f(b)$ tiverem sinai contrários, então existirá pelo menos um c em $[a, b]$ tal que $f(c) = 0$.

Ainda em 1816 Gauss mostra sua terceira prova do teorema, agora usando a *Teoria da Integração*. Gauss ainda apresentaria uma quarta demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra, em 1849. Desta vez o teorema é enunciado para polinômios com variável e coeficientes complexos.

O suíço Argand publicou, em 1806, um esboço de uma demonstração do teorema em um ensaio sobre a representação dos complexos. Em 1814 ele publica a primeira prova correta do teorema Fundamental da Álgebra, enunciado para polinômios com coeficientes complexos. Entretanto é interessante salientar que Argand acabou utilizando um resultado, a existência do mínimo de uma função contínua, que só seria estabelecido por Karl Wilhelm Theodor Weierstrass, matemático alemão (1815 – 1897). Apesar de ser uma prova simples, devido a lacuna desse resultado, a prova não é elementar, e foi relegada a um segundo plano no Século XX. Esse fato ocorreu devido ao Teorema Fundamental da Álgebra ser apresentado, nessa época, como consequência do Teorema de Liouville, provado por Joseph Liouville (1809 – 1882), e que diz que uma função complexa inteira e limitada é constante.

O matemático inglês John Edensor Littlewood (1885 – 1977) apresenta, em 1946, uma prova do teorema feita por contradição e indução,

O matemático holandês Theo de Jong, em 2009, apresentou uma nova versão da primeira prova de Gauss, mas não é elementar, pois utiliza o *Teorema dos Multiplicadores de Lagrange*.

3. Abordagens dos conhecimentos prévios para as demonstrações

O teorema Fundamental da Álgebra necessita de alguns conhecimentos prévios para sua demonstração. Alguns, para não dizer muitos, não são do escopo do Ensino Médio ou Fundamental, logo se faz necessário algumas formas de transmitir esses conhecimentos de forma que se complete cada um dos requisitos para cada demonstração.

Antes de começar qualquer uma das demonstrações é sempre bom lembrar aos alunos alguns resultados de números complexos e a definição de polinômio.

O conjunto dos números complexos é necessário para o entendimento das demonstrações, é interessante que os alunos tenham conhecimento de suas propriedades e as demonstrações servem para preparar os alunos para os resultados finais.

Um conceito importante a ser fixado é o de *conjugado de um número complexo*.

Definição: Seja $z = a + bi, a, b \in \mathbb{R}$, um número complexo. Chama-se ***conjugado de z*** o número complexo:

$$\bar{z} = a = bi$$

É imediato que:

I) $z = \bar{z}$. Pois $z = a + 0i = a$ e $\bar{z} = a - 0i = a$.

II) $\overline{(\bar{z})} = z$. Pois se $\bar{z} = a - bi$, temos que $\overline{(\bar{z})} = \overline{a - bi} = a + bi = z$.

Proposição: O produto de um complexo pelo seu conjugado é sempre um número real não negativo.

Demonstração: Seja $z = a + bi, a, b \in \mathbb{R}$, um número complexo, e $\bar{z}$ seu conjugado.

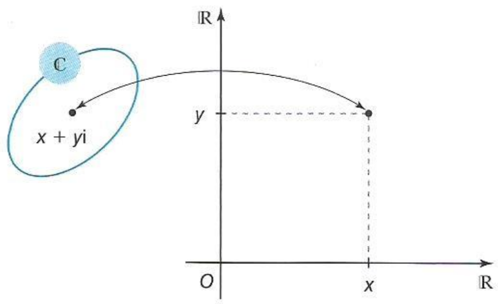
Multiplicando z por $\bar{z}$, temos:

$$z \cdot \bar{z} = (a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 - abi + abi - (bi)^2 =$$

$$= a^2 - b^2 i^2 = a^2 - b^2(-1) = a^2 + b^2$$

E, $a^2 + b^2$, é um número real não negativo. ■

A representação geométrica dos números complexos usa o *plano de Armand-Gauss*. Esse plano faz uma associação dos números complexos na forma $z = a + bi$ com um par ordenado *(a,b)*. Esse ponto no plano cartesiano complexo é chamado de **afixo**. A vantagem de poder fazer essa associação é poder ver a geometria dos complexos.

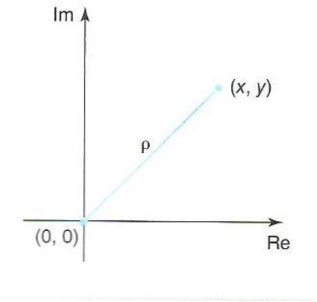


O módulo de um número real, por uma interpretação geométrica, é a distância da origem ao ponto. Ou seja:

$$|x| = \overline{OA}$$

Analogamente fazemos o mesmo com os complexos. Mas com a diferença que eles são um ponto do plano, e não um ponto na reta.

Definição: O **módulo** de um número complexo $z = a + bi$, com $\{x, y\} \subset \mathbb{R}$, é a distância do ponto (x,y) à origem (0,0) do plano de Armand-Gauss.



Para calcular o valor do módulo é só usar o *Teorema de Pitágoras*.

Sendo $z = x + yi$, temos:

$$|z|^2 = x^2 + y^2 \Leftrightarrow$$

Aplicando a raiz quadrada nos dois membros,

$$\Leftrightarrow \sqrt{|z|^2} = \sqrt{x^2 + y^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \blacksquare$$

A interpretação geométrica do módulo de um complexo é o Lugar Geométrico dos pontos equidistantes do centro do plano de Armand-Gauss, ou seja, é uma circunferência de centro na origem do plano.

É fácil mostrar que o L. G. é uma circunferência.

Proposição: Seja z um número complexo na forma $z = x + yi$, com $\{x, y\} \subset \mathbb{R}$, o L.G. das imagens de $|z| = r$ é uma circunferência.

Demonstração: Seja $z = x + yi$ um complexo na sua forma algébrica.

Se $|z| = r$ e $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, temos que:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = r$$

Elevando os dois membros ao quadrado, temos:

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad ■$$

Que é a equação de uma circunferência com centro na origem.

Podemos ampliar esse conceito usando a uma equação modular, onde subtraímos z de um complexo dado, assim fazemos o translado do centro da circunferência.

Proposição: Seja $z = x + yi$ um complexo na forma algébrica, com $\{x, y\} \subset \mathbb{R}$. Sendo $a + bi$, um complexo na forma algébrica, com $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$, então o Lugar geométrico das imagens de $|z - (a + bi)| = r$ é uma circunferência de raio r e centro em *(a,b)*.

Demonstração: Seja $z = x + yi$ um complexo na sua forma algébrica, e $a + bi$ um complexo qualquer.

$$|z - (a + bi)| = r \Leftrightarrow |x + yi - a - bi| = r \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |(x - a) + (y - b)i| = r \Leftrightarrow \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = r$$

Elevando os dois membros ao quadrado, temos:

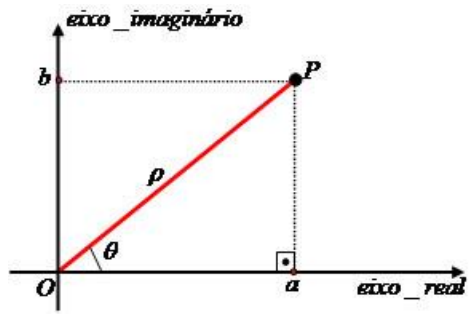
$$\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = r \Leftrightarrow (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

E esta é a equação reduzida da circunferência de raio r e centro em *(a,b)*.■

Ainda existe outra forma de escrever um número complexo. É a forma *polar*, ou *trigonométrica*. Assim um número complexo na forma $z = a + bi$ pode ser escrito na forma $z = \rho(cos\theta + isen\theta)$, onde ρ é o módulo e θ é o argumento desse complexo. É interessante que o professor tenha demonstrado anteriormente essa relação entre as duas formas de escrever os números complexos.

Demonstração: *Transformação da forma algébrica para a forma trigonométrica de um número complexo.*

Seja z um número complexo na forma $z = a + bi$. Podemos marcar esse afixo no plano complexo como na figura abaixo.



Na figura temos um triângulo retângulo, onde tiramos que:

$$\left.\begin{array}{r} \cos\theta = \dfrac{a}{\rho} \\ sen\,\theta = \dfrac{b}{\rho} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \rho\cos\theta \\ b = \rho sen\,\theta \end{cases}$$

Assim, substituindo em $z = a + bi$, temos:

$$z = a + bi \Leftrightarrow z = \rho\cos\theta + \rho isen\,\theta \Leftrightarrow z = \rho(\cos\theta + isen\,\theta) \quad \blacksquare$$

Outro conceito que os alunos devem saber é a potenciação de números complexos, mas para alcançar esse resultado os alunos devem antes saber como se resolve a multiplicação e divisão de complexos na forma trigonométrica.

Teorema: Se $z = \rho(\cos\alpha + isen\,\alpha)$ e $w = \lambda(\cos\beta + isen\,b)$ são formas trigonométricas dos números complexos z e w, então:

$$z \cdot w = \rho \cdot \lambda(\cos(\alpha+\beta) + isen\,(\alpha+\beta))$$

Demonstração: sejam z e w dois números complexos na forma trigonométrica.

$$z = \rho(\cos\alpha + isen\,\alpha)$$

$$w = \lambda(\cos\beta + isen\ b)$$

Calculando $z \cdot w$:

$$z \cdot w = \rho(\cos\alpha + isen\ \alpha) \cdot\ \lambda(\cos\beta + isen\ \beta) =$$

$$=\ \rho \cdot \lambda(\cos\alpha \cdot \cos\beta + icos\ \alpha \cdot sen\ \beta + isen\ \alpha\ \cdot\ \cos\beta + i^2 sen\ \alpha\ \cdot\ sen\ \beta) =$$

Como $i^2 = -1$, temos:

$$= \rho \cdot \lambda\big((\cos\alpha \cdot \cos\beta -\ sen\ \alpha\ \cdot\ sen\ \beta) + i(sen\ \alpha\ \cdot\ \cos\beta + cos\ \alpha \cdot sen\ \beta)\big) =$$

Da trigonometria temos que:

$$sen\ (a + b) = sen\ a \cdot \cos b + sen\ b \cdot \cos a$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - sen\ a\ \cdot sen\ b$$

Assim temos que:

$$= \rho \cdot \lambda\big(\cos(\alpha + \beta) + isen\ (\alpha + \beta)\big) \quad \blacksquare$$

A *Propriedade Associativa da Multiplicação* permite a extensão dessa fórmula para o produto de mais de dois números complexos. Assim podemos multiplicar z_1, z_2, z_3, ..., z_n, com $n \geq 2$. Então teríamos:

$$z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_n = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot\ \cdots\ \cdot \rho_n(\cos(\alpha_1 + \alpha_2 +\ \cdots + \alpha_n) + isen(\alpha_1 + \alpha_2 +\ \cdots + \alpha_n))$$

Teorema: Se $z = \rho(\cos\alpha + isen\ \alpha)$ e $w = \lambda(\cos\beta + isen\ b)$ são formas trigonométricas dos números complexos *z* e *w*, com $w\ \neq\ 0,$ então:

$$\frac{z}{w} = \frac{\rho}{\lambda}(\cos(\alpha - \beta) + isen\ (\alpha - \beta))$$

Demonstração: sejam *z* e *w* dois números complexos na forma trigonométrica.

$$z = \rho(\cos\alpha + isen\ \alpha)$$

$$w = \lambda(\cos\beta + isen\ b)$$

Calculando $\frac{z}{w}$:

$$\frac{z}{w} = \frac{z \cdot \overline{w}}{w \cdot \overline{w}} = \frac{\rho(\cos\alpha + isen\,\alpha) \cdot \lambda(\cos\beta - isen\,\beta)}{|w|^2} =$$

Da trigonometria sabemos que $-sen\,\beta = sen\,(-\beta)$ e que $\cos\beta = \cos(-\beta)$. Assim temos que:

$$= \frac{\rho(\cos\alpha + isen\,\alpha) \cdot \lambda(\cos(-\beta) + isen(-\beta))}{|w|^2} =$$

$$= \frac{\rho \cdot \lambda\big(\cos(\alpha - \beta) + isen\,(\alpha - \beta)\big)}{\lambda^2}$$

Cancelando o λ do numerador e do denominador, temos que:

$$\frac{z}{w} = \frac{\rho}{\lambda}\big(\cos(\alpha - \beta) + isen\,(\alpha - \beta)\big) \ \blacksquare$$

Para demonstrar a o **Teorema de De Moivre** usamos o *Axioma da Indução*. Caso os alunos não conheçam é interessante apresenta-lo, pois é uma ferramenta poderosa de demonstração envolvendo os números naturais.

Axioma de Indução: Seja *P(n)* uma propriedade relativa ao número natural n. Suponhamos que:

i) *P(1)* é válida;
ii) Para todo $n \in \mathbb{N}$, a validez de *P(n)* implica a validez de *P(n')*, onde *n'* é o sucessor de *n*.

Assim *P(n)* é válida qualquer que seja o número natural.

Esse axioma é usado, também, na **Demonstração 2**, então é importante que os alunos tenham uma noção sobre esse tópico.

Uma vez conhecendo a multiplicação e divisão de complexos, e o Axioma de Indução, temos que demonstrar a potenciação dos números complexos. Esse resultado é usado nas demonstrações a seguir.

Teorema de De Moivre: Se $z = \rho(\cos\alpha + isen\,\alpha)$é a forma trigonométrica de um número complexo não nulo *z* e *n* é um número inteiro qualquer, então:

$$z^n = \rho^n(\cos n\alpha + isen\,n\alpha)$$

Demonstração: Essa demonstração vai ser dividida em duas partes. Uma para n ≥ 0, e outra para n < 0.

1ª parte: n ≥ 0

Vamos indicar por *P(n)* a propriedade a ser provada, e aplicar o Axioma da Indução.

I) *P(0)* é verdadeira, pois, para n = 0, temos que:

$$z^0 = 1 = 1(\cos 0 + isen\,0) = 1^0(\cos 0\alpha + isen\,0\alpha)$$

II) Agora provaremos a validade da implicação:

P(k) é verdadeira ⇒ *P(k + 1)* é verdadeira para todo $k \in \mathbb{Z}_+$.

Isto é:

$$z^k = \rho^k(\cos k\alpha + isen\,k\alpha) \Rightarrow z^{k+1} = \rho^{k+1}(\cos(k+1)\alpha + isen\,(k+1)\alpha)$$

Temos:

$$z^{k+1} = z^k \cdot z = \rho^n(\cos k\alpha + isen\,k\alpha) \cdot \rho(\cos\alpha + isen\,\alpha)$$

Aplicando o resultado da multiplicação de complexos na forma trigonométrica, concluímos que:

$$z^{k+1} = z^k \cdot z = \rho^n(\cos k\alpha + isen\,k\alpha) \cdot \rho(\cos\alpha + isen\,\alpha) =$$

$$= \rho^{k+1}(\cos(k+1)\alpha + isen\,(k+1)\alpha)$$

Logo, é válida a implicação citada em (II). ■

Como *P(n)* satisfaz (I) e (II), concluímos que, pelo Axioma da Indução, *P(n)* é verdadeira para todo $n \in \mathbb{Z}_+$.

2ª parte: n < 0

Sabemos que $z^n = \frac{1}{z^{-n}}$. Como – *n > 0*, temos, pela primeira parte:

$$z^n = \frac{1}{z^{-n}} = \frac{1}{\rho^{-n}(\cos(-n)\alpha + isen\,(-n)\alpha)} = \frac{1(\cos 0 + isen\,0)}{\rho^{-n}(\cos(-n)\alpha + isen\,(-n)\alpha)}$$

Aplicando o resultado da divisão de complexos na forma trigonométrica, temos:

$$z^n = \frac{1(\cos 0 + isen\,0)}{\rho^{-n}(\cos(-n)\alpha + isen\,(-n)\alpha)} = \frac{1}{\rho^{-n}}(\cos\big(0 - (-n\alpha)\big) + isen\,(0 - (-n\alpha)))$$

Logo:

$$z^n = \rho^n(\cos n\alpha + isen\,n\alpha) \quad \blacksquare$$

Os alunos devem saber a definição de polinômio, ou função polinomial, assim como a terminologia de cada uma de suas partes.

Definição: *Polinômio na variável x é toda expressão P(x) que pode ser apresentada na forma*

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

Onde $\{a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n\} \subset \mathbb{C}$, $\{n, n-1, n-2, \cdots, 1, 0\} \in \mathbb{N}$ *e a variável x pode assumir qualquer valor complexo.*

Cada uma das parcelas $a_n x^n, a_{n-1}x^{n-1}, a_{n-2}x^{n-2}, \cdots, a_1 x, a_0$ *é um* ***termo*** *ou* ***monômio*** *do polinômio, sendo* a_0 *o* ***termo independente****. O termo independente pode ser escrito como* $a_0 x^0$.

Os números complexos $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \cdots, a_1$ *e* a_0 *são os coeficientes do polinômio.*

Um polinômio é chamado de ***identicamente nulo*** *se todos seus coeficientes forem iguais a zero. Indicamos o polinômio identicamente nulo por P(x) = 0.*

*O **grau** de um polinômio não identicamente nulo é o maior valor do **expoente** da variável dentre os termos de **coeficientes não nulos**.*

*A **raiz** de um polinômio P(x) para todo número complexo α tal que P(α) = 0. A raiz também é chamada de **zero do polinômio**.*

Proposição: Para todo número natural **n**, temos $\overline{(z^n)} = (\bar{z})^n$.

Demonstração: Usando o **Axioma da Indução**, temos:

I) A igualdade se verifica para n = 0, pois:

$$\overline{(z^0)} = \bar{1} \text{ e } (\bar{z})^0 = 1$$

II) Admitindo que a igualdade é verdadeira para **n**, vamos provar que ela é verdadeira para n + 1, isto é:

$$\overline{(z^n)} = (\bar{z})^n \Rightarrow \overline{(z^{n+1})} = (\bar{z})^{n+1}$$

$$\overline{(z^{n+1})} = \overline{z^n \cdot z^1} = \overline{(z^n)} \cdot \overline{(z^1)} = (\bar{z})^n(\bar{z})^1 = (\bar{z})^{n+1}$$

Teorema das Raízes Conjugadas:

Consideremos um polinômio P(x) de grau **n** e coeficientes reais.

Se o número imaginário $z = a + bi, a, b \in \mathbb{R}$, é raiz de P(x), temos:

a) $\bar{z}$ também é raiz de P(x).
b) $\bar{z}$ tem a mesma multiplicidade de z.

Demonstração:

a) Seja $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, onde $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$ são números reais. Se z é raiz de P(x), temos P(z) = 0:

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 \qquad (I)$$

Calculemos P($\bar{z}$):

$$P(\bar{z}) = a_n(\bar{z})^n + a_{n-1}(\bar{z})^{n-1} + \cdots + a_1\bar{z} + a_0 \qquad (II)$$

Já que $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$ são reais, temos:

$$\begin{aligned} a_n &= \overline{a_n} \\ a_{n-1} &= \overline{a_{n-1}} \\ &\vdots \\ a_0 &= \overline{a_0} \end{aligned}$$

Usando esse fato e que para um número complexo qualquer ω é válido que:

$$(\overline{\omega})^n = \overline{(\omega^n)}$$

A igualdade *(II)* transforma-se em:

$$P(\bar{z}) = \overline{a_n}\overline{(z^n)} + \overline{a_{n-1}}\overline{(z^{n-1})} + \cdots + \overline{a_1}\bar{z} + \overline{a_0} =$$

$$= \overline{(a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0)} = \overline{P(z)} = 0$$

Assim, se $P(\bar{z}) = 0$, $\bar{z}$ é raiz de P(x). ■

b) Temos que $z = a + bi$ e $\bar{z} = a - bi$. Suponhamos que *z* seja raiz de multiplicidade **m**, com $m \geq 1$. Já que *z* e $\bar{z}$ são raízes de P(x), temos:

$$P(x) = (x - z)(x - \bar{z}) \cdot A(x) = [x^2 - (z + \bar{z})x + z\bar{z}] \cdot A(x) =$$

$$= [x^2 - 2ax + (a^2 + b^2)] \cdot A(x)$$

Vamos considerar que: $B(x) = x^2 - 2ax + (a^2 + b^2)$.

Observando que P(x) e B(x) tem coeficientes reais, concluímos que A(x) também tem coeficientes reais.

Se a multiplicidade de *z* for 1, ou seja, m = 1, então *z* não será raiz de A(x) e, consequentemente, $\bar{z}$ também não será raiz de A(x). O que nos leva a concluir que o conjugado também será raiz simples. Podemos afirmar, com essa conclusão, que, se *z* é raiz simples, seu conjugado também será raiz simples.

Se a multiplicidade de *z* for maior que 1, ou seja, m > 1, então *z* deverá ser raiz de A(x), mas levando em conta que A(x) tem coeficientes reais, $\bar{z}$ também será raiz de A(x).

Aplicando o raciocínio o número necessário de vezes, chegaremos a conclusão que *z* e $\bar{z}$ tem a mesma multiplicidade. ■

3.1 Demonstração 1: Analítica

Para a demonstração 1, que é a demonstração analítica, é necessário que os alunos entendam o que é um disco compacto. Para isso pode-se explicar através de dez definições.

No plano complexo chamamos de disco, ou bola, o conjunto de pontos no plano onde:

- Disco, ou Bola Aberta: $B_R(z_0) = \{z|\ |z - z_0| < R\}$
- Disco, ou Bola Fechada: $B_R(z_0) = \{z|\ |z - z_0| \leq R\}$
- Circunferência: $B_R(z_0) = \{z|\ |z - z_0| = R\}$

A partir dessas informações temos as seguintes definições:

Definição 1: Um ponto w ∈ A é chamado **ponto interior** do conjunto A se esse conjunto A contém um disco aberto de centro em w. (o disco aberto deve estar todo contido no conjunto A)

Definição 2: Um conjunto qualquer A é dito aberto se todos os seus pontos são **pontos interiores**.

Definição 3: Um conjunto qualquer A é dito **fechado** se seu conjunto complementar, no plano, é um conjunto aberto, ou seja, A é fechado ⇔A^C é aberto.

Definição 4: Chama-se **fronteira** de um conjunto qualquer A ao conjunto de pontos z tais que qualquer disco aberto centrado em z contém pontos de A e de seu complementar.

Observação: A fronteira de um conjunto A é também fronteira do seu complementar A^C.

Definição 5: Um ponto w ∈ A é dito **ponto de acumulação** de um conjunto A se qualquer disco aberto centrado em w contém infinitos pontos de A.

Definição 6: Um ponto w ∈ A é dito **ponto isolado** de um conjunto A se esse ponto não é ponto de acumulação de A.

Definição 7: Um conjunto aberto A é dito **conexo** se, e somente se, quaisquer dois pontos de A podem ser ligados por um caminho todo contido no conjunto A.

Nesse ponto é interessante mostrar o que seria um conjunto **conexo**. Esse conceito não é conhecido pelos alunos. Eles conhecem o conceito de figura convexa, em geometria plana, e visto no Ensino Fundamental.

Definição 8: Um conjunto aberto e conexo é chamado de **região do plano**.

Definição 9: Um conjunto A do plano complexo é **limitado** se existe um real positivo K tal que $|z| \leq K, \forall z \in \mathbb{C}$.

Definição 10: Um conjunto fechado e limitado é chamado de **conjunto compacto**.

Desigualdade Triangular:

É uma propriedade dos módulos.

Sendo x e y números reais, então:

I) $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Demonstração:

Sejam x e y dois números reais. Vamos considerar duas hipóteses:

$$x + y \geq 0 \text{ ou } x + y < 0$$

1º caso: $x + y \geq 0$

$$x + y \geq 0 \Rightarrow |x + y| = x + y$$

$$x \leq |x| \text{ e } y \leq |y| \Rightarrow x + y \leq |x| + |y|$$

Assim temos: $|x + y| \leq |x| + |y|$

2º caso: $x + y < 0$

$$x + y < 0 \Rightarrow -x - y > 0 \xRightarrow{1^{\text{º}}\ caso} |-x - y| \leq |-x| + |-y|$$

Como:

$$\begin{cases} |-x - y| = |x + y| \\ |-x| = |x| \\ |-y| = |y| \end{cases}$$

Vem: $|x + y| \leq |x| + |y|$ ■

II) $|x - y| \leq |x| + |y|$

Demonstração:

Sejam x e y dois números reais.

$$|x-y| = |x+(-y)|$$

Já sabemos, por (I) que: $|x+(-y)| \leq |x| + |-y|$, assim temos que:

$$|x-y| \leq |x| + |-y|$$

Como $|y| = |-y|$, ficamos com:

$$|x-y| \leq |x| + |y| \quad \blacksquare$$

III) $|x-y| \geq |x| - |y|$

Demonstração:

Sejam x e y dois números reais.

$$\left.\begin{array}{r} |x| = |y-(y-x)| \\ |y-(y-x)| \leq |y| + |y-x| \end{array}\right\} \Rightarrow |x| \leq |y| + |y-x| \Rightarrow$$

Arrumando a desigualdade, temos;

$$\Rightarrow |y-x| \geq |x| - |y|$$

Como $|y-x| = |x-y|$, temos:

$$|x-y| \geq |x| - |y| \quad \blacksquare$$

IV) $|x+y| \geq |x| - |y|$

Demonstração:

Sejam x e y dois números reais.

$$|x+y| = |x-(-y)| \geq |x| - |-y| = |x| - |y| \quad \blacksquare$$

3.2 Demonstração 2: Algébrica

Essa demonstração necessita de que os alunos já conheçam o *Axioma da Indução*, e já descrito acima.

Outro conceito utilizado é o conceito de *Produtório*.

Definição: Sejam k e n números naturais, com $k \leq n$. Também seja a sequência $(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_k, \cdots, a_n, \cdots)$. O produto dos termos a_k até a_n pode ser representado por:

$$\prod_{i=k}^{n} a_i = a_k \cdot a_{k+1} \cdot \cdots \cdot a_n$$

Assim podemos multiplicar os termos de uma sequência. A quantidade de termos multiplicados é $n - k + 1$.

É necessário, por fim, ter uma noção do que é um *Corpo*.

Na Álgebra temos uma estrutura chamada **Anel**. Essa estrutura consiste de um conjunto e duas operações, adição e multiplicação e que segue os seguintes axiomas:

- Axiomas da adição

A1. Associatividade: Quaisquer que sejam a, b, c ∈ ℝ, tem-se (a + b) + c = a + (b + c).

A2. Comutatividade: Quaisquer que sejam a, b ∈ ℝ, tem-se a + b = b + a.

A3. Elemento neutro: Existe 0 ∈ R tal que a + 0 = 0 + a = a, qualquer que seja a ∈ ℝ.

A4. Simétrico: Todo elemento a ∈ ℝ possui um simétrico em R, denotado por –a, tal que a + (–a) = (–a) + a = 0.

- Axiomas da multiplicação

M1. Associatividade: Quaisquer que sejam a, b, c ∈ ℝ, tem-se (a . b) . c = a . (b . c).

M2. Comutatividade: Quaisquer que sejam a, b ∈ ℝ, tem-se a . b = b . a.

M3. Elemento neutro: Existe 1 ∈ ℝ tal que 1 ≠ 0 e a . 1 = 1 . a = a, qualquer que seja a ∈ ℝ.

D1. - Axioma da distributividade:

Quaisquer que sejam a, b, c $\in \mathbb{R}$, tem-se a . (b + c) = a . b + a . c e (a + b) . c = a . c + b . c.

Esses axiomas são tratados no Ensino Fundamental. E assim concluímos que os Inteiros, os Racionais, os Reais e os Complexos são anéis.

Para se ter um **Corpo** temos que adicionar a esses axiomas a existência do *inverso multiplicativo*.

M4. Inverso multiplicativo: Todo elemento a $\neq$ 0 em $\mathbb{R}$ possui um inverso multiplicativo em $\mathbb{R}$, denotado por a^{-1} ou 1/a, tal que a . a^{-1} = a^{-1}. a = 1.

Um **Corpo** pode ser chamado de **Corpo Ordenado** se houver uma relação de ordem dentro do conjunto. E as relações binárias, soma e multiplicação, respeitam essa ordem.

Se K é um conjunto onde $(K, +, \cdot)$ é um *corpo*, $(K, +, \cdot, \leq)$ é um corpo ordenado se:

a) $\leq$ é uma relação de ordem total em *K*.
b) Se $\forall a, b, c \in K$ temos $a \leq b$ então $a + c \leq b + c$
c) Se $\forall a, b \in K$ temos $0 \leq a$ e $0 \leq b$ então $0 \leq a \cdot b$

Proposição: Se $\forall a, b, c, d \in K$ temos $a \leq b$ e $c \leq d$, então $a + c \leq b + d$.

Demonstração: Se $a \leq b$ então pela relação (b) temos:

$$a \leq b \Leftrightarrow a + c \leq b + c$$

Se $c \leq d$ então pela relação (b) temos:

$$c \leq d \Leftrightarrow c + b \leq d + b$$

Assim, se temos que $a + c \leq b + c$ e $c + b \leq d + b$, concluímos que $a + c \leq d + b$.

O **Corpo Ordenado** tem outras propriedades, mas a que é importante para a demonstração é que *o quadrado de qualquer número diferente de zero é positivo*.

O **Corpo Real Fechado** é o tipo de *corpo* que tem, em comum com os ***reais***, a propriedade que – *1* não é o quadrado de algum elemento, nem a soma de quadrados.

$$x_1, x_2, \cdots, x_n \in K \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \neq -1$$

As seguintes propriedades, para os números reais, são consequências de um **Corpo Real Fechado**:

a) Todo polinômio de grau ímpar tem, pelo menos, uma raiz.
b) $\mathbb{R}$ pode ser ordenado, e essa ordem é única
c) O subconjunto de $\mathbb{R}$ formado pelos quadrados define a ordem, ou seja, é o conjunto dos números positivos.

4. O Teorema Fundamental da Álgebra

O Teorema Fundamental da Álgebra é enunciado da seguinte forma:

"Todo polinômio não constante com coeficientes complexos tem uma raiz complexa. "

Seguem três demonstrações do teorema.

4.1 Demonstração 1: Analítica

Seja *P(z)* um polinômio não constante, com grau(P) ≥ 1, onde

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

Seja **D** o disco fechado, de raio *R* centrado em 0.

Lema 1: Existe um raio positivo do disco onde se o módulo do complexo z é maior que o raio dado, então o módulo de *P(z)* é maior que o módulo de a_0.

$$\exists R > 0 \; tal \; que \; |z| \geq R \Rightarrow |P(z)| > |a_0|$$

Demonstração:

Seja P(z), sem perda de generalização, um polinômio mônico.

Se

$$|z| \geq R \Rightarrow |P(z)| = |z^n + a_{n-1}z^{n-1} + a_{n-2}z^{n-2} + \cdots + a_1 z + a_0| \geq$$

$$\geq |z^n| - |a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0|$$

Como:

$$|a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0| \leq |a_{n-1}z^{n-1}| + |a_{n-2}z^{n-2}| + \cdots + |a_1 z| + |a_0| \leq$$

Seja $M = máx\{1, |a_0|, |a_1|, \cdots, |a_{n-2}|, |a_{n-1}|\}$.

Se $R = 3nM$, temos:

$$|z| \geq R; |a_{n-1}z^{n-1} + a_{n-2}z^{n-2} + \cdots + a_1 z + a_0| \leq nMR$$

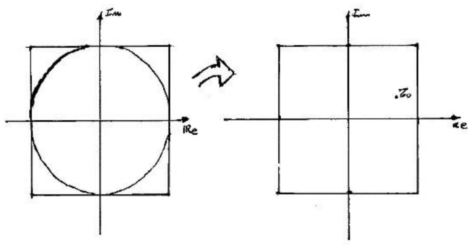
$$|P(z)| \geq |z^n| - |a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0| \geq R^n - nMR^{n-1} =$$

$$= R^{n-1}(R - nM) = 2nMR^{n-1} \geq 2M \geq 2|a_0| > |a_0|$$

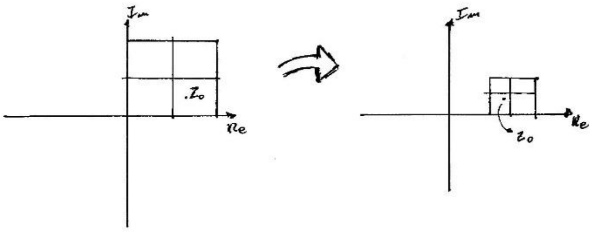
$$|a_0| = |P(0)| \Rightarrow \min_{z \in \mathbb{C}} |P(z)| = \min_{z \in B(O,R)} |P(z)|$$

Como **D** é compacto, e $|P|$ é uma função contínua em $\mathbb{C}$ em $\mathbb{R}$, a restrição a **D** de $|P|$ tem um mínimo. Usando o argumento dos quadrados encaixantes é fácil perceber que vamos chegar a um ponto do disco.

Vamos supor que o disco **D** esteja contido num quadrado, ou seja, $\boldsymbol{D} \subset [-R, R]^2$. Então o mínimo está dentro do quadrado.



O mínimo estará em uma das partes. Escolhendo a parte onde o mínimo é atingido, e eliminando as partes onde o mínimo não se encontra, particionamos novamente, e assim sucessivamente, até que apenas se restrinja a um único ponto, que será o mínimo.



Vamos assumir que esse mínimo seja z_0, ou seja, um ponto de **D** onde o mínimo é atingido é z_0.

Logo, z_0 está no interior de **D** e, portanto, precisamos mostrar que $P(z_0) = 0$.

Lema 2: Se $P: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é um polinômio não constante e $z_0 \in \mathbb{C}$ é tal que $P(z_0) \neq 0$ então: $\exists z \in \mathbb{C}$ com $|P(z)| < |P(z_0)|$.

Demonstração: Vamos analisar o comportamento próximo de z_0.

Seja $f(h) = P(z_0 + h)$.

Vamos mostrar que $\exists h \in \mathbb{C}$, com $|h|$ pequeno, tal que

$$|P(z_0 + h)| = |f(h)| < |f(0)| = |P(z_0)|$$

$f(h) = P(z_0 + h)$ é um polinômio não constante, senão $P(z) = f(z - z_0)$ seria constante.

$f(h) = P(z_0) + C_k h^k + C_{k+1} h^{k+1} + \cdots + a_n h^n$, com $C_k \neq 0$, $C_n = a_n$, $1 \leq k \leq n$.

Seja $w \in \mathbb{C}$, tal que $w^k = -\frac{P(z_0)}{C_k}$.

Vamos considerar que $h = \varepsilon w$, com $\varepsilon > 0$ pequeno.

Logo:

$$C_k h^k = C_k \varepsilon^k w^k = -\varepsilon^k P(z_0)$$

Seja $M = \max\{1, |C_k|, |C_{k+1}|, \cdots, |C_n|\}$

Temos:

$$|C_{k+1} h^{k+1} + \cdots + C_n h^n| \leq |C_k||h^k| + |C_{k+1}||h^{k+1}| + \cdots + |C_n||h^n| \leq$$

$$\leq M|h^k| + M|h^{k+1}| + \cdots + M|h^n|$$

Supondo $|h| \leq 1$, então:

$$|C_{k+1} h^{k+1} + \cdots + C_n h^n| \leq (n-k)M|h^{k+1}| < nM|h^{k+1}| = nM\varepsilon^{k+1}|w^{k+1}|$$

Então:

$$|f(h)| \leq |P(z_0) + C_k h^k| + |C_{k+1} h^{k+1} + \cdots + C_n h^n| \leq$$

$$\leq |P(z_0) - \varepsilon^k P(z_0)| + nM\varepsilon^{k+1}|w|^{k+1} = |(1-\varepsilon^k)P(z_0)| + nM\varepsilon^{k+1}|w|^{k+1} =$$

$$= (1-\varepsilon^k)|P(z_0)| + nM\varepsilon^{k+1}|w|^{k+1} = |P(z_0)| - \varepsilon^k|P(z_0)| + nM\varepsilon^{k+1}|w|^{k+1}$$

Vamos tomar $\varepsilon = \min\left\{\frac{P(z_0)}{2nM|w|^{k+1}}, \frac{1}{|w|}\right\}$

Temos, então, $|h| = |\varepsilon w| \leq 1$ e $nM\varepsilon^{k+1}|w|^{k+1} = \varepsilon^k nM\varepsilon|w|^{k+1} \leq \varepsilon^k \frac{|P(z_0)|}{2}$

Logo,

$$|f(h)| \leq |P(z_0)| - \varepsilon^k|P(z_0)| + \varepsilon^k \frac{|P(z_0)|}{2} = |P(z_0)| - \varepsilon^k \frac{|P(z_0)|}{2} < |P(0)|$$

Assim temos que z_0 é um zero de P(z).

4.2 Demonstração 2: Algébrica

Para esta demonstração temos que saber previamente dois fatos sobre o corpo dos Reais:

a) Qualquer polinômio de grau ímpar tem pelo menos um zero real;
b) Todo número real não negativo tem raiz quadrada.

Desta segunda afirmação podemos afirmar que:

"Se ***a*** e ***b*** forem dois números reais, então existem dois números complexos z_1 e z_2 tais que o polinômio $z^2 + az + b$ é igual a $(z - z_1)(z - z_2)$".

Se um polinômio P(z) tem coeficientes complexos, o polinômio $Q(z) = P(z) \cdot \overline{P(\bar{z})}$ tem coeficientes reais e se o número complexo z_0 for raiz de Q(z) então z_0, ou seu conjugado, é raiz de P(z). Desta forma, podemos demonstrar o teorema para um polinômio de coeficientes reais.

Vamos demonstrar o teorema por indução ao menor inteiro não negativo k, tal que 2^k divide o grau n de P(z).

Se $k = 0$, então n é ímpar e, desta forma, P(z) tem alguma raiz real.

Vamos supor que $n = 2^k m$, com m ímpar e $k > 0$, e também que o teorema já se encontra demonstrado no caso e que o grau do polinômio é da forma $2^{k-1}m'$, com m' ímpar.

Seja F um corpo que contém $\mathbb{C}$ e as raízes de P(z) (é possível provar que tais corpos existem), este um polinômio com coeficientes complexos. Então o corpo F contém $\mathbb{C}$, e existem elementos $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n$ de F tais que

$$P(z) = (z - z_1)(z - z_2)\cdots(z - z_n)$$

Para um número real t, seja:

$$Q_t(z) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \left(z - z_i - z_j - t z_i z_j\right)$$

Os coeficientes de $Q_t(z)$ são polinômios simétricos nos z_i com coeficientes reais. Assim podemos exprimir como polinômios com coeficientes reais nos polinômios simétricos elementares nas raízes z_i, ou seja, em $-a_1, a_2, -a_3, \cdots, (-1)^n a_n$, logo Q_t tem coeficientes reais.

O grau de Q_t é igual a $\frac{n(n-1)}{2} = 2^{k-1}m(n-1)$, onde $m(n-1)$ é ímpar. Então, pela hipótese de indução, Q_t tem alguma raiz real. Logo, $z_i + z_j + t z_i z_j$ é real para dois elementos distintos i e j de {1, 2, ..., n}. Como existem mais números reais do que pares (i, j), é possível encontrar números reais distintos t e s tais que $z_i + z_j + t z_i z_j$ e $z_i + z_j + s z_i z_j$ sejam reais, para os mesmos i e j. Consequentemente, tanto a soma, quanto o produto entre z_i e z_j são números reais e, portanto, z_i e z_j são números complexos, pois são as raízes do polinômio $z^2 + (z_i + z_j)z + z_i z_j$.

4.3 Demonstração 3:

Para demonstrar o TFA, vamos usar a ideia que as funções polinomiais são contínuas ao longo do plano.

Considere uma função polinomial $p: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, dada por:

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0,$$

onde a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0, são números complexos. Então p é uma função definida nos complexos, ou seja, cada ponto do plano complexo tem uma imagem que também é um número complexo. Vamos provar que existe um complexo z_0 tal que a sua imagem seja igual a zero, $p(z_0) = 0$. Em outras palavras, existe um ponto do plano complexo que, passando por p, tem sua imagem na origem.

Vamos considerar, de modo intuitivo, que as imagens, através de p, de círculos do plano complexo com centro na origem. Por que são círculos? Como p é uma função contínua, a imagem de uma curva contínua e fechada, deve ser outra curva contínua e fechada. É importante salientar que não é necessariamente uma curva simples, a curva pode cruzar a si própria.

Consideremos um círculo $|z| = r$, e vamos ver a imagem desse círculo quando aplicado no polinômio $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$.

Exprimindo z na sua forma polar: $z = (\cos\theta + isen\ \theta)$, temos:

$$p(z) = a_n\big(r(\cos\theta + isen\ \theta)\big)^n + a_{n-1}\big(r(\cos\theta + isen\ \theta)\big)^{n-1} + \cdots$$
$$+ a_1\big(r(\cos\theta + isen\ \theta)\big) \quad + a_0$$

Ou seja:

$$p(z) = a_n\big(r^n(\cos n\theta + isen\ n\theta)\big) + a_{n-1}\big(r^{n-1}(\cos(n-1)\theta + isen\ (n-1)\theta)\big) + \cdots$$
$$+ a_1\big(r(\cos\theta + isen\ \theta)\big) \quad + a_0$$

Quando z percorre o círculo de raio r, seu argumento θ varia de 0 a 2π. Em consequência z^2 tem argumento 2θ va variar de 0 a 4π, e assim por diante. Logo z^n tem argumento $n\theta$ varia de 0 a $2n\pi$. Isso também significa que quando z percorre uma vez o círculo anterior, z^2 vai percorrer duas vezes, e assim por diante, onde concluímos que z^n vai percorrer n vezes o círculo dado.

Assim o polinômio $p(z)$ é a soma de n complexos, a_0, z, que percorre uma vez o círculo, z^2, que percorre duas vezes o círculo, até z^n, que percorre o círculo n vezes. A imagem do círculo é a soma de todos as parcelas, o que não é simples de calcular. Porém podemos descobrir o que acontece com a curva nos casos extremos, ou seja, quando r é muito pequeno, ou r é muito grande. Isso fica mais claro quando pomos r^n em evidência:

$$p(z) = r^n\Big[a_n(\cos n\theta + isen\ n\theta) + \frac{a_{n-1}}{r}(\cos(n-1)\theta + isen\ (n-1)\theta) + \cdots$$
$$+ \frac{a_1}{r^{n-1}}(\cos\theta + isen\ \theta) + \frac{a_0}{r^n}\Big]$$

Para valores próximos de zero, as potências de r serão valores cada vez menores, ou seja, $r > r^2 > \cdots > r^{n-1} > r^n$, porém $\frac{1}{r} < \frac{1}{r^2} < \cdots < \frac{1}{r^{n-1}} < \frac{1}{r^n}$. Assim, a imagem do polinômio é um círculo centrado em a_0, com pouca perturbação dos outros termos.

Para valores grandes de r, a trajetória de $p(z)$ vai ser um círculo de centro na origem e raio r^n, ligeiramente perturbado pelas contribuições das outras parcelas.

Então temos que para valores bem pequenos de r a curva descrita por $p(z)$ é uma curva fechada em torno do complexo $a_0 + 0i$ e próxima desse complexo. Assim percebemos que a origem do plano é exterior a essa curva. Quando os valores de r são grandes, a curva descrita por $p(z)$ se comporta como um círculo de centro na origem. Para que o centro passe do exterior para o interior da curva significa que, para algum valor de r a curva passa pela origem e, assim, que $p(z) = 0$ possua, pelo menos, uma raiz complexa. Assim toda equação polinomial tem uma raiz complexa.

5. As demonstrações em aula:

Nos dias 2 e 9 de setembro foram ministradas quatro aulas com o intuito de ver qual a melhor forma de transmitir o conteúdo para turmas do terceiro ano do Ensino Médio. O Colégio Pedro II, Campus Humaitá II.

As aulas foram em dois turnos, para abranger alunos diferenciados. Os alunos do turno da manhã tiveram aulas no período da tarde, e os alunos da tarde tiveram aulas no período da manhã. Os alunos foram voluntariamente assistir as aulas. Nas turmas da manhã compareceram 18 alunos nos dois dias, e nas turmas da tarde 15 alunos compareceram nos dois dias. As aulas tiveram 1 hora e 30 minutos de duração cada.

No primeiro dia eu comecei a falar sobre o histórico dos números complexos, brevemente, e do teorema. Também explanei sobre os resultados gerais dos complexos, e entreguei uma folha com esses resultados. O conteúdo dessas folhas se encontra no capítulo sobre o conhecimento necessário para as demonstrações.

Comecei a falar da demonstração 3, pois julguei mais fácil o entendimento. Eles entenderam bem como a demonstração se passou.

No final da aula comecei a falar sobre o corpo dos reais. Eles perceberam que a construção do corpo veio acontecendo desde o sexto ano do Ensino Fundamental. Nessa série eles aprendem as primeiras propriedades, nos números naturais, como a comutatividade da soma e multiplicação. Depois, no sétimo ano as propriedades são expandidas para os números inteiros e racionais, onde são expandidas. No oitavo ano eles aprendem os números reais.

Também falei sobre o produtório, conceito que eles não veem no Ensino Médio, e também expliquei o Princípio da Indução, e comecei a demonstração 2.

Essa demonstração foi mais complicada para o entendimento. Segundo eles, o problema maior é a quantidade de conhecimento prévio para o entendimento. Apesar das dificuldades os alunos perceberam que algumas demonstrações envolvem um conhecimento matemático um pouco mais encorpado. Esse conhecimento pode ser passado de forma mais clara para os alunos, para que eles possam compreender as demonstrações.

Pelo fato de ter que explicar mais sucintamente os conhecimentos prévios das duas demonstrações previas, não consegui tempo para fazer a demonstração 1. Mas os alunos começaram a entender a desigualdade triangular. Posso supor que talvez eles tivessem uma pequena dúvida em um outro ponto da demonstração, porém seria de melhor entendimento do que a demonstração 2.

A conclusão desse estudo é que é possível demonstrar o Teorema Fundamental da Álgebra para alunos do Ensino Médio. Entretanto é necessário ensinar conceitos diferentes e novos para os alunos.

6. Referências:

HEFEZ, A. e VILLELA, M. L. T. **Polinômios e equações algébricas. Coleção PROFMAT.** Rio de Janeiro: SBM, 2012.

NETO, A. A. (et al). **Conjuntos e funções. Noções de matemática. Vol 1.** São Paulo: Editora Moderna, 1982.

NETO, A. A. (et al). **Números complexos, polinômios e equações algébricas. Noções de matemática. Vol 7.** São Paulo: Editora Moderna, 1982.

LIMA, E. L. (et al). **A matemática no ensino médio.** Rio de Janeiro: SBM, 2006.

PAIVA, M. R. **Matemática (Ensino Médio). Vol 3.** São Paulo: Editora Moderna, 2009.

_____, **Teorema Fundamental da Álgebra.** Wikipédia. Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Teorema_fundamental_da_%C3%A1lgebra. Acesso em julho de 2015.

OLIVEIRA, O. R. B. de. **Teorema fundamental da álgebra (TFA).** 2011. Disponível em: https://www.ime.usp.br/~oliveira/TFACOLEGIAL5.pdf. Acesso em julho de 2015.

CORNÉLIO, T. P e PRADO, D. L. do. **Teorema fundamental da álgebra.** 2015. Disponível em: http://www.ime.unicamp.br/~ftorres/ENSINO/MONOGRAFIAS/Thalita2_EA_2015.pdf. Acesso em outubro de 2015.

BROLESI, F. F. **Teorema fundamental da álgebra.** 2006. Disponível em: http://www.profezequias.net/fabio-fogliarini-brolesi.pdf. Acesso em julho de 2015.

ROQUE, T. e CARVALHO, J. B. P. de. **Tópicos de história da matemática. Coleção PROFMAT.** Rio de Janeiro: SBM, 2012.

EVES, H. **Introdução à história da matemática.** Campinas: Editora da UNICAMP, 2002.

BOYER, C. B. e MERZBACH, U. C. **História da matemática.** São Paulo: Editora Edgard Blücher LTDA., 2002.

ROBERTS, C. **Introduction to mathematical proofs: A transition.** Disponível em: https://books.google.com.br/books?id=NjBLnLyE4jAC&pg=PA332&lpg=PA332&dq=peter+roth+arithmetica+philosophica&source=bl&ots=MAz5CqaJo1&sig=kkhyznes0ZI6nzT9qOK

YtIAQNDY&hl=pt-BR&sa=X&ved=0ahUKEwjKit_8q-3KAhXBFZAKHTO8DJAQ6AEINjAE#v=onepage&q=peter%20roth%20arithmetica%20philosophica&f=false. Acesso em janeiro 2016.

CERRI C. e MONTEIRO M. S. **História dos números complexos**. Disponível em: http://www.ime.usp.br/~martha/caem/complexos.pdf. Acesso em janeiro de 2015.

_____, **Número complexo**. Wikipédia. Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_complexo. Acesso em janeiro de 2016.

JÚNIOR U. P. **A história dos números complexos: "das quantidades sofisticadas de Cardano às linhas orientadas de Argand"**. Disponível em: http://www.pg.im.ufrj.br/pemat/12%20Ulicio%20Pinto.pdf. Acesso em janeiro de 2016.

_____, **Girolamo Cardano**. Wikipédia. Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Girolamo_Cardano. Acesso em janeiro de 2016.

_____, **Girolamo Cardano**. Disponível em: http://www.santarita.g12.br/matematicos/gm1/girolamo_cardano.htm. Acesso em janeiro de 2016.

_____, **Tartaglia**. Wikipédia. Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Tartaglia. Acesso em janeiro de 2016.

_____, **Nicolo Tartaglia**. Disponível em: http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/Biographies/Tartaglia.html. Acesso em janeiro de 2016.

_____, **Rafael Bombelli**. Wikipédia. Disponível em: https://en.wikipedia.org/wiki/Rafael_Bombelli. Acesso em janeiro de 2016.

_____, **Bombelli**. Disponível em: http://learn-math.info/portugal/historyDetail.htm?id=Bombelli. Acesso em 2016.

_____, **René Descartes**. Wikipédia. Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Ren%C3%A9_Descartes. Acesso em janeiro de 2016.

_____, **René Descartes**. Disponível em: http://www.ime.unicamp.br/~calculo/ambientedeensino/modulos/history/descartes/descartes.html. Acesso em janeiro de 2016.

_____, **John Wallis**. Wikipédia. Disponível em: https://en.wikipedia.org/wiki/John_Wallis. Acesso em janeiro de 2016.

_____, **John Wallis**. Disponível em: http://www.dec.ufcg.edu.br/biografias/JohnWall.html. Acesso em janeiro de 2016.

_____, **John Wallis**. Disponível em: http://learn-math.info/portugal/historyDetail.htm?id=Wallis. Acesso em 2016.

_____, **Wallis**. Disponível em: http://learn-math.info/portugal/historyDetail.htm?id=Wallis. Acesso em janeiro de 2016.

_____, **Abraham de Moivre**. Wikipédia. Disponível em: https://en.wikipedia.org/wiki/Abraham_de_Moivre. Acesso em janeiro de 2016.

_____, **Abraham de Moivre**. Disponível em: http://www.dec.ufcg.edu.br/biografias/AbraMoiv.html. Acesso em janeiro de 2016.

_____, **Abraham de Moivre**. Disponível em: http://apprendre-math.info/portugal/historyDetail.htm?id=De_Moivre. Acesso em janeiro de 2016.

_____, **Jean le Rond d'Alembert**. Wikipédia. Disponível em: https://en.wikipedia.org/wiki/Jean_le_Rond_d%27Alembert. Acesso em janeiro de 2016.

_____, **Jean le Rond d'Alembert**. Disponível em: http://ecalculo.if.usp.br/historia/dalembert.htm. Acesso em janeiro de 2016.

_____, **Roger Cotes**. Wikipédia. Disponível em: https://en.wikipedia.org/wiki/Roger_Cotes. Acesso em janeiro de 2016.

_____, **Roger Cotes**. Disponível em: http://learn-math.info/portugal/historyDetail.htm?id=Cotes. Acesso em janeiro de 2016.

_____, **Leonard Euler**. Wikipédia. Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Leonhard_Euler. Acesso em janeiro de 2016.

_____, **Leonard Euler**. Disponível em: http://www.ime.unicamp.br/~calculo/ambientedeensino/modulos/history/euler/euler.html. Acesso em janeiro de 2016.

_____, **Caspar Wessel**. Wikipédia. Disponível em: https://en.wikipedia.org/wiki/Caspar_Wessel. Acesso em janeiro de 2016.

_____, **Caspar Wessel**. Disponível em: http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Wessel.html. Acesso em janeiro de 2016.

_____, **Jean Robert Argand**. Wikipédia. Disponível em: https://en.wikipedia.org/wiki/Jean-Robert_Argand. Acesso em janeiro de 2016.

_____, **Jean Robert Argand**. Disponível em: http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Argand.html. Acesso em janeiro de 2016.

_____, **Johann Carl Friedrich Gauss**. Wikipédia. Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Carl_Friedrich_Gauss. Acesso em janeiro de 2016.

_____, **Johann Carl Friedrich Gauss**. Disponível em: http://www.dec.ufcg.edu.br/biografias/JohaGaus.html. Acesso em janeiro de 2016.

_____, **William Rowan Hamilton**. Wikipédia. Disponível em: https://en.wikipedia.org/wiki/William_Rowan_Hamilton. Acesso em janeiro de 2016.

_____, **William Rowan Hamilton**. Disponível em: http://www.matematica.br/historia/hamilton.html. Acesso em janeiro de 2016.

_____, **François Viète**. Wikipédia. Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Fran%C3%A7ois_Vi%C3%A8te. Acesso em janeiro de 2016.

_____, **François Viète**. Disponível em: http://ecalculo.if.usp.br/historia/viete.htm. Acesso em janeiro de 2016.

_____, **François Viète**. Disponível em: http://www.apprendre-math.info/portugal/historyDetail.htm?id=Viete. Acesso em janeiro de 2016.

_____, **Albert Girard**. Disponível em: http://www.dec.ufcg.edu.br/biografias/AlbertGi.html. Acesso em janeiro de 2016.

_____, **Albert Girard**. Disponível em: http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Girard_Albert.html. Acesso em janeiro de 2016.

_____, **Gottfried Wilhelm Leibniz**. Wikipédia. Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Gottfried_Wilhelm_Leibniz. Acesso em janeiro de 2016.

_____, **Gottfried Wilhelm Leibniz**. Disponível em: http://ecalculo.if.usp.br/historia/leibniz.htm. Acesso em janeiro de 2016.

_____, **Gottfried Wilhelm Leibniz**. Disponível em: http://www.ime.unicamp.br/~calculo/ambientedeensino/modulos/history/leibniz/leibniz.html. Acesso em janeiro de 2016.

_____, **Victor Puiseux**. Wikipédia. Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Victor_Puiseux. Acesso em janeiro de 2016.

_____, **Victor Puiseux**. Disponível em: http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Puiseux.html. Acesso em janeiro de 2016.

_____, **Joseph-Louis Lagrange**. Wikipédia. Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Joseph-Louis_Lagrange. Acesso em janeiro de 2016.

_____, **Joseph-Louis Lagrange**. Disponível em: http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/history/Biographies/Lagrange.html. Acesso em janeiro de 2016.

_____, **Pierre Simon Laplace**. Wikipédia. Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Pierre_Simon_Laplace. Acesso em janeiro de 2016.

_____, **Pierre Simon Laplace**. Disponível em: http://www.fem.unicamp.br/~em313/paginas/person/laplace.htm. Acesso em janeiro de 2016.

_____, **James Wood**. Wikipédia. Disponível em: https://en.wikipedia.org/wiki/James_Wood_(mathematician). Acesso em janeiro de 2016.

_____, **Alexander Ostrowski**. Wikipédia. Disponível em: https://en.wikipedia.org/wiki/Alexander_Ostrowski. Acesso em janeiro de 2016.

_____, **Alexander Ostrowski**. Disponível em: http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/Biographies/Ostrowski.html. Acesso em janeiro de 2016.

_____, **Joseph Liouville**. Wikipédia. Disponível em: https://en.wikipedia.org/wiki/Joseph_Liouville. Acesso em janeiro de 2016.

_____, **Joseph Liouville**. Disponível em: http://www2.stetson.edu/~efriedma/periodictable/html/Lu.html. Acesso em janeiro de 2016.

______, **John Edensor Littlewood**. Wikipédia. Disponível em: https://en.wikipedia.org/wiki/John_Edensor_Littlewood. Acesso em janeiro de 2016.

______, **John Edensor Littlewood**. Disponível em: http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Littlewood.html. Acesso em janeiro de 2016.