INSTITUTO NACIONAL DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

PEDRO PAULO CAVALCANTE

TÉCNICAS DE TABULEIRO EM PROBLEMAS OLÍMPICOS: UMA COMPARAÇÃO DE SOLUÇÕES

Rio de Janeiro
2016

PEDRO PAULO CAVALCANTE

TÉCNICAS DE TABULEIRO EM PROBLEMAS OLÍMPICOS: UMA COMPARAÇÃO DE SOLUÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT do Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof Dr Roberto Imbuzeiro Oliveira

Rio de Janeiro

2016

Dedicatória: Dedico Aos meus
filhos, Pedro Paulo, Vitor e Guilherme
e a minha mãe, Ana Maria.

AGRADECIMENTOS

Ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, coordenado pela Sociedade Brasileira de Matemática, pela oportunidade de realizar meu trabalho na minha área de pesquisa.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pela provisão de bolsa de mestrado.

Ao meu orientador, Roberto Imbuzeiro, pela disponibilidade em me auxiliar neste trabalho, com comentários e instruções fundamentais.

Ao meu amigo, Antonio Marcus Dias Moreira, por colaborar neste trabalho estudando, pesquisando e resolvendo questões olímpicas sobre tabuleiro.

A todos os professores, monitores e colegas de classe do PROFMAT do IMPA que de alguma forma contribuíram para a conclusão do meu mestrado.

Descobrir consiste em olhar
para o que todo mundo está vendo e
pensar uma coisa diferente.

Roger Von Oech

RESUMO

A proposta deste trabalho é produzir um texto matemático abordando técnicas de resolução de exercícios sobre tabuleiros nas olimpíadas de matemática. Vamos expor aqui algumas técnicas para resolver exercícios e comparar soluções nossas com a da banca para assim analisar quais seriam as formas mais vantajosas para facilitar o raciocínio do estudante ao abordar este tema.

Palavras Chave: Técnicas de problemas sobre Tabuleiro; Exercícios e Olimpíadas de Matemática.

ABSTRACT

The purpose of this work is to produce a mathematical text addressing problem solving techniques on trays in Mathematics Olympiads. Expose here some techniques for solving exercises and compare our solutions with the banks so as to analyze what would be the most advantageous ways to facilitate the student's reasoning to address this issue.
Keywords: Technical problems on board; Exercises and Mathematics Olympics.

Lista de Figuras

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Observando os problemas de Olimpíadas de Matemática, percebemos uma grande incidência de questões que envolvem tabuleiros. O estudo combinatório desses exercícios requer raciocínio lógico e a escolha de caminhos favoráveis que nos levem a desencadear a resolução do problema de forma breve e inteligível.

Ao longo das edições das olimpíadas, encontramos diversos problemas sobre tabuleiros na Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas públicas (OBMEP), na Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM), na Olimpíada de Maio, na Olimpíada Ibero Americana, na Olimpíada Internacional de Matemática (IMO), na Canguru de Matemática, na Olimpíada dos Países de Língua Portuguesa, em olimpíadas regionais e em muitas outras olimpíadas pelo mundo.

Neste trabalho vamos mostrar alguns exercícios resolvidos de olimpíadas de matemática e analisar resultados de situações com alunos em sala de aula, observando o desenvolvimento do raciocínio do estudante quando exposto a problemas que envolvem tabuleiros de forma lúdica e concreta.

Os capítulos 2 e 3 foram feitos em conjunto com dois autores: Antonio Marcus Dias Moreira e Pedro Paulo Cavalcante. Já os capítulos 4 e 5 foram produções individuais do autor deste trabalho.

No capítulo 2 temos um pouco da história dos jogos de tabuleiros e das olimpíadas de matemática.

No capítulo 3, com o objetivo de produzir um texto matemático que aborde as técnicas de resoluções de exercícios sobre tabuleiros, mostraremos cinco técnicas utilizadas na resolução de exercícios sobre tabuleiros. Essas técnicas são estudadas com base em problemas olímpicos com soluções elaboradas pelo autor. As técnicas apresentadas nesse capítulo foram apresentadas pelos autores no III Colóquio de Matemática da Região Centro-oeste em Novembro de 2013 e na VII Bienal da Sociedade Brasileira de matemática em Novembro de 2014.

Por fim, apresentamos no capítulo 5 as considerações finais do nosso trabalho.

2 Contextualização[1]

Neste capítulo falaremos um pouco sobre a história dos jogos de tabuleiros desde o início da civilização até os dias atuais. Também falaremos sobre a história das Olimpíadas de Matemática, com a criação da IMO em 1894 até o sucesso da OBMEP em dias atuais.

2.1 BREVE HISTÓRIA SOBRE TABULEIROS

Desde de que se conhece a civilização sabemos da existência de jogos. Vejamos o texto retirado do site http://www.jogos.antigos.nom.br/artigos.asp, em 18/11/2015.

> *"Desde os mais remotos tempos, quando a espécie humana surgiu no planeta, nasceu junto a ela uma necessidade vital para seu crescimento intelectual: jogar.*
>
> *Manuscritos milenares falam de jogos praticados em todas as regiões do planeta. Dificilmente se poderá delinear exatamente qual foi o primeiro jogo surgido no mundo. Adeptos da teoria Darwiniana afirmam que foi um jogo chamado de Jogo da Evolução, praticado pelos Neanderdhal. Consta que era um jogo bem simples e rude, jogado com um grande osso. Marcava-se pontos destroçando a cabeça dos adversários e com isso conseguindo o domínio de territórios."*

Apesar de não possuirmos dados concretos, diz-se que os primeiros jogos de tabuleiros surgiram milhares de anos antes de Cristo como forma de lazer e entretenimento entre as pessoas da época. Um dos jogos mais antigos que conhecemos é o Senet, que tem registros de 2000 anos antes de Cristo. O senet é jogado num tabuleiro retangular e conforme tradição da época, os donos dos jogos eram enterrados com eles para que suas almas tivessem lazer eterno.

---

[1] Este capítulo é comum aos Trabalhos de Conclusão de Curso do Profmat de Antonio Marcus Dias Moreira e Pedro Paulo Cavalcante.

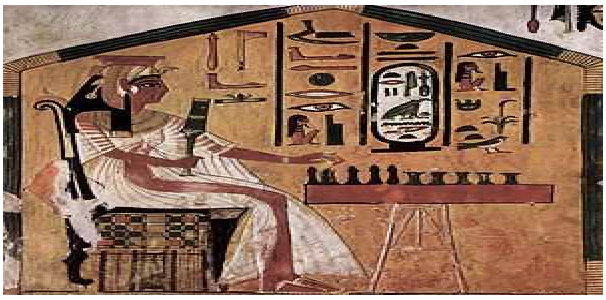


Figura 1 - Nefertari jogando Senet. Pintura da tumba da Rainha Nefertari do Egito (1295 – 1255 a.C.)

Fonte: http://pt.wikipedia.org/wiki/Senet

Outro jogo muito antigo e jogado até hoje é o xadrez. Várias são as histórias sobre a origem do xadrez[2], mas talvez a mais curiosa delas seja a dos grãos de soja. Um Brâmane apresentou o xadrez a um Rei para que ele saísse da depressão após ter perdido uma guerra. O tabuleiro era o mesmo dos dias atuais, quadrado, 8X8, preto e branco se alternando em casas vizinhas. O rei, extremamente satisfeito por ter saído da sua profunda depressão, sugeriu que o Brâmane fizesse um pedido para recompensar seu gesto de apresenta-lo ao jogo. Então ele pediu ao rei que lhe desse um grão de soja na primeira casa do tabuleiro, dois grãos no segundo, quatro no terceiro e assim sucessivamente até a 64ª casa do tabuleiro. Achando o pedido do Brâmame humilde, o rei lhe concedeu tal pedido. Se arrependeu mais tarde por ter aceitado pois até hoje não teríamos grãos suficientes para pagar o tal Brâmame[3].

Porém, embora diversas civilizações antigas tenham sido apontadas como o berço do xadrez, na atualidade a maioria dos pesquisadores concorda que o jogo tenha se originado na Índia por volta do século VI, com regras diferentes das atuais e denominado Chaturanga em sânscrito.

---

[2] Histórias sobre xadrez disponível em CASTRO, Celso. Uma história cultural do xadrez. Cadernos de Teoria da Comunicação, Rio de Janeiro, V.1, n°2, p.3-12,1994.

[3] Ver mais no Livro Ávila, Geraldo. Várias faces da matemática: tópicos para licenciatura e leitura geral. São Paulo, editora Blucher, 2010. (Cap 6, pag.47)

Figura 2 – Tabuleiro de xadrez

(Fonte: http://www.soxadrez.com.br/conteudos/tabuleiro_pecas/)

O jogo de damas também é muito popular, sendo jogado em praças de todo Brasil nos dias de hoje. Pouco se sabe da sua origem. No Brasil o jogo de Damas foi introduzido como esporte em 1935[4].

Outro conhecido nosso e muito jogado nas escolas é o jogo da velha. Dizem que foi nomeado na Inglaterra, quando mulheres se reuniam no fim da tarde para tomar chá, conversar e bordar. Daí, as mais idosas, sem habilidade para bordar se reuniam para jogar em um tabuleiro 3X3, com peças em forma de cruz e outras redondas. Temos também o Resta um, que usualmente é um presente dado a crianças entre 8 e 12 anos. É um jogo de tabuleiro em forma de cruz com 33 casas, jogado com 32 peças, onde o objetivo é deixar apenas uma peça no tabuleiro, saltando umas sobre as outras.

[4] Retirado de http://www.xadrezregional.com.br/damas_hist.html, acesso em 18/11/2015, 03:48

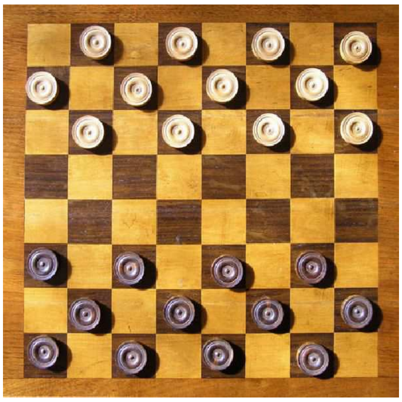


Figura 3 – Tabuleiro de damas

(Fonte: http://www.ilhadotabuleiro.com.br/jogos/damas/imagem/18611)

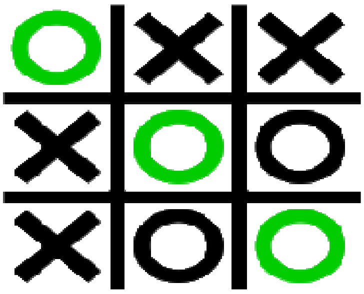


Figura 4 - Exemplo de um jogo da velha em que o círculo O ganha a partida

(Fonte: http://pt.wikipedia.org/wiki/Jogo_da_velha)

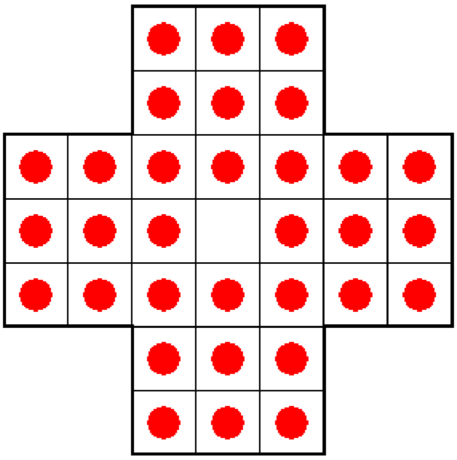
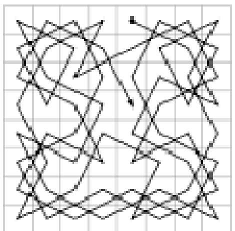
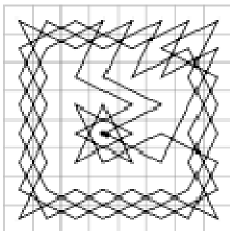


Figura 5 - Jogo resta um

(Fonte: http://gervasio010.blogspot.com.br/2010/11/jogo-resta-um.html)

Existem na história dos tabuleiros diversas produções de problemas que encantam os admiradores da matemática. Um problema clássico é o dos cavalos, registrado no livro Bagavantabháskara, escrito por volta do século XVI. O problema consiste no movimento de um cavalo percorrendo o tabuleiro vazio. Ele deve visitar todas as casas apenas uma vez em movimentos consecutivos. Atualmente existem diversas soluções para esse problema, inclusive as ditas abertas e fechadas, de acordo com a última posição do cavalo no tabuleiro. Se na última casa tivermos a possibilidade de retornar a casa inicial, dizemos que é uma solução fechada. Caso contrário ela é aberta.





1	48	31	50	33	16	63	18
30	51	46	3	62	19	14	35
47	2	49	32	15	34	17	64
52	29	4	45	20	61	36	13
5	44	25	56	9	40	21	60
28	53	8	41	24	57	12	37
43	6	55	26	39	10	59	22
54	27	42	7	58	23	38	11

(a) Solução aberta   (b) Solução fechada   (c)Solução com refinamento matemático onde a soma das colunas e fileiras é 260

Figura 6 (a), (b) e (c) – Soluções do problema do cavalo

(Fonte: http://pt.wikipedia.org/wiki/Problema_do_cavalo)

Os jogos de tabuleiros hoje em dia estão disponíveis em diversas plataformas online. Conseguimos jogar no computador e no celular. Um dos jogos muito jogados, apesar de não ser de tabuleiro propriamente dito é o Tetris, que tem como princípio o encaixe de quadriminós e cada linha completa é eliminada. Perde o jogo aquele que chegar na última linha do “tabuleiro”. Também temos o Sudoku, muito vendido em revistas, que consiste em completar um tabuleiro 9X9 com números de 1 a 9 sem repeti-los em nenhuma linha e em nenhuma coluna, além de ter os números de 1 a 9 contidos em subtabuleiros 3X3.

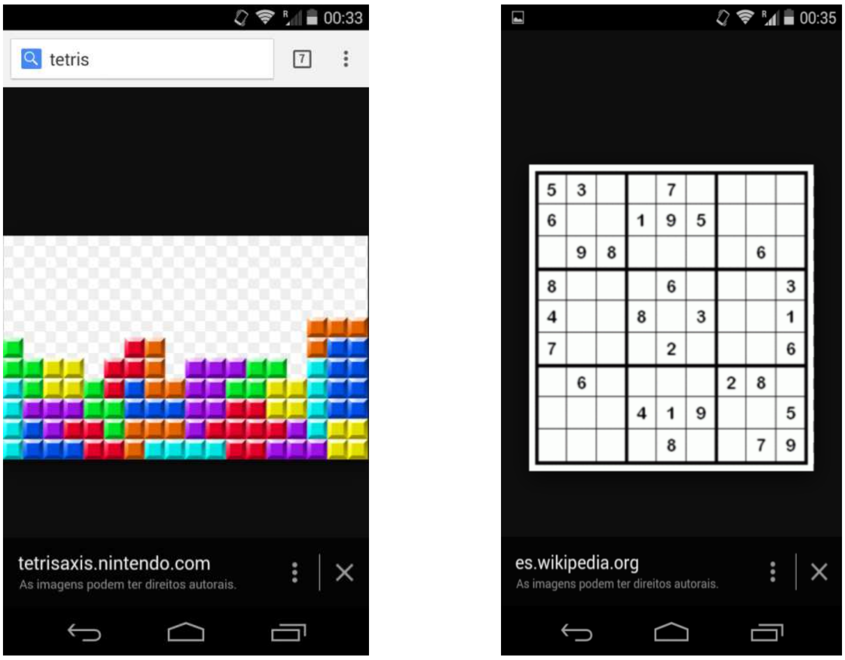


Figura 7 - Fotos de capturas de tela de um smartphone com o jogo tetris a esquerda e o jogo sodoku a direita.

(Fonte: capturas de tela do celular do Autor.)

Enfim, como podemos ver, os tabuleiros estão no nosso dia a dia, seja na história, nas bancas, no computador ou na palma de nossa mão através de telefones celulares.

2.2 AS OLIMPÍADAS DE MATEMÁTICA

As Olimpíadas de Matemática estão cada vez mais presentes no dia a dia dos estudantes. Essas competições matemáticas têm o objetivo de melhorar o ensino de matemática no nosso país, através de estímulos a alunos e professores. O intuito com isso, é descobrir jovens com talento matemático excepcional e colocá-los em contato com matemáticos profissionais e instituições de pesquisa de alto nível, como o IMPA, propiciando condições favoráveis para a formação e o desenvolvimento de uma carreira de pesquisa. Para entendermos melhor o que são as olimpíadas de matemática, vamos ler o texto retirado do sitio da OBM[5]:

"As Olimpíadas de Matemática, nos moldes atuais, são disputadas desde 1894, quando foram organizadas competições na Hungria. Com o passar dos anos ,competições similares foram se espalhado pelo leste europeu, culminando, em 1959, com a organização da 1ª Olimpíada Internacional de Matemática, na Romênia, com a participação de países daquela região.

A Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) organizou em 1979 a 1ª Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM). Ao longo destes anos, a OBM passou por diversas mudanças em seu formato (veja abaixo quadro ilustrativo), mantendo a ideia central que é a de estimular o estudo da Matemática pelos alunos, desenvolver e aperfeiçoar a capacitação dos professores, influenciar na melhoria do ensino, além de descobrir jovens talentos.

Dentre os premiados são selecionados aqueles que formam as equipes brasileiras na Olimpíada do Cone Sul (4 estudantes, com até 16 anos); na Olimpíada Internacional de Matemática (6 estudantes do ensino médio, com até 19 anos); na Olimpíada Ibero-americana (4 estudantes, com até 18 anos) e na Competição Internacional de Matemática (universitários).Estas competições são realizadas anualmente, sempre em um país diferente."

[5]Disponível em < http://www.obm.org.br/opencms/quem_somos/breve_historico/>, acesso em 18/11/2015, 02:29.

A maior competição de Matemática do Brasil é a OBMEP[6] – Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas. Apresentando uma média de 19 milhões de alunos participantes por ano realizando, teve seu maior evento em 2010, onde 19.665.928 alunos foram inscritos para realizar a prova da primeira fase. Em 2014 a OBMEP distribuiu 6500 medalhas a alunos participantes, onde todos receberão uma bolsa durante um ano no Programa de Iniciação Científica Júnior.

Além dessas, existem diversas competições regionais de matemática. Há Olimpíadas estaduais e municipais no Brasil, entre elas dos municípios de João Pessoa, Duque de Caxias e São Carlos e nos estados do Rio de Janeiro, Minas Gerais, Alagoas, Pará e Ceará.

As olimpíadas de matemática apresentam problemas que estimulam o raciocínio lógico dos estudantes. Os problemas costumam vir das seguintes áreas: Álgebra, Geometria, Teoria dos números e Combinatória. Esta última, por sua vez, apresenta alta incidência de questões envolvendo tabuleiros. Este tipo de problema requer estratégias peculiares para resolução, que sempre necessitam de raciocínio lógico e escolha de caminhos favoráveis. Escolher um caminho errado pode nos levar a obtenção de resoluções muito longas ou até mesmo inserir elementos alheios à resolução dos problemas, que nos levarão a resultados equivocados. No próximo capítulo apresentaremos algumas técnicas que podem ser utilizadas na resolução deste tipo de problema.

[6] Disponível em <http://portal.mec.gov.br/component/tags/tag/32707>, acesso em 02/02/2016, 13:06.

3 ALGUMAS TÉCNICAS DE RESOLUÇÃO PARA PROBLEMAS DE TABULEIRO[7]

O objetivo deste capítulo é ajudar alunos e professores a determinarem caminhos que facilitem achar soluções para problemas envolvendo tabuleiros. Para isso, vamos mostrar cinco técnicas utilizadas para resolução desses tipos de exercícios, enfatizando-as com exemplos retirados das principais olimpíadas brasileiras e internacionais. Damos as estas técnicas os seguintes nomes:

1. Marcação de casas:
2. Movimentos e preenchimento de um tabuleiro
3. Cobertura de tabuleiros (Poliminós)
4. Redução a um caso menor
5. Simetria em jogos

3.1 MARCAÇÃO DE CASAS

Marcar as casas de um tabuleiro significa definir um comportamento para o nosso problema. Seja com cores ou de modo numérico, utilizando dois, três ou quatro tipos de marcação, o importante é identificarmos qual padrão é interessante para iniciarmos a solução. Talvez esta seja a técnica mais utilizada em problemas com tabuleiros já que muitas vezes temos que marcar as casas de um tabuleiro para nos guiar, estabelecer padrões ou instituir coberturas. Vamos começar com um problema simples de marcação que nos ajudará como identificar o que queremos nesta seção.

Problema 1 – (OBM 2005 – Nível 1 - 1ª Fase)

> As nove casas de um tabuleiro 3x3 devem ser pintadas de forma que cada coluna, cada linha e cada uma das duas diagonais não tenham duas casas de mesma cor. Qual é o menor número de cores necessárias para isso?
>
> A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

[7] Este capítulo é comum aos Trabalhos de Conclusão de Curso do Profmat de Antonio Marcus Dias Moreira e Pedro Paulo Cavalcante.

Solução:

Seja o tabuleiro 3X3 abaixo, com linhas e colunas rotuladas por a, b, c e 1, 2, 3, respectivamente.

	1	2	3
a			
b			
c			

Vamos chamar as cores de A, B, C, assim sucessivamente. Sem perda de generalidade marcamos a casa a1 com a cor A. Logo, as casas b1 e c1, também sem perda de generalidade, devem ter as cores B e C conforme a figura abaixo.

	1	2	3
a	A		
b	B		
c	C		

Podemos deduzir automaticamente que a casa a2 não pode ser pintada com A, mas pode com B ou C. Pintaremos com B.

	1	2	3
a	A	B	
b	B		
c	C		

A casa b2 não pode ser pintada com nenhuma das cores existentes, mesmo se tivéssemos escolhidos a cor C no passo anterior, uma nova cor para pintar b2 é inevitável. Logo pintaremos b2 com uma cor D.

	1	2	3
a	A	B	
b	B	D	
c	C		

A casa c2 não pode ser pintada por B, C nem D, mas pode por A. Logo, pintemos com A.

	1	2	3
a	A	B	
b	B	D	
c	C	A	

A casa a3 não pode ser pintada com nenhuma das cores existentes no tabuleiro. Pintemos com a cor E.

	1	2	3
a	A	B	E
b	B	D	
c	C	A	

A casa b3 não pode ser pintada com B, D nem E. Pode ser pintada com A ou C. A escolha é indiferente pois como a linha c já tem as cores A e C, sua escolha não altera a pintura do tabuleiro. Então, por escolha, pintemos com a cor A.

	1	2	3
a	A	B	E
b	B	D	A
c	C	A	

A casa c3 pode ser pintada com a cor B.

	1	2	3
a	A	B	E
b	B	D	A
c	C	A	B

Portanto, temos a seguinte configuração:

A	B	E
B	D	A
C	A	B

Reparamos que na 1ª coluna temos de escolher três cores. Na 2ª coluna independente da escolha da cor de a2 (B ou C), b2 será pintado com uma nova cor. Já na 3ª coluna, se escolhermos para a2 a cor B, a3 tem de ser uma nova cor, e se a2 for pintada por C, c3 terá uma nova cor.

Já sabemos que podemos utilizar apenas cinco cores. Vamos supor que dispomos apenas de quatro cores, A, B, C e D.

A cor A iremos por no meio do tabuleiro e depois iremos tentar distribuir as cores de modo que consigamos cumprir a condição do enunciado.

	A	

B		D
	A	
C		?

Como podemos ver, ficamos sem opção para preencher a casa destacada. Assim, o menor número de cores necessárias que podemos utilizar são cinco. Resposta letra C.

Este é um exemplo que podemos fazer para pensar bem na forma que decidimos marcar um tabuleiro. Observar as consequências do que marcamos é fundamental. Ver os nossos objetivos, que no caso do problema acima era não permitir que tivéssemos linhas, colunas e diagonais com as mesmas cores.

No próximo exemplo, utilizaremos, para marcar as casas, a coloração do tipo xadrez para resolver o problema.

Problema 2 – (OBM 2001 – Nível 2 – 3ª Fase)

As 42 crianças de uma escola infantil deram as mãos formando uma fila e cada uma delas recebeu um número da seguinte maneira: a primeira delas ficou com o número 1, a segunda ficou com o número 2 e, assim sucessivamente, até a última, que ficou com o número 42. Continuando de mãos dadas, foram para um pátio, onde cada uma delas ficou sobre uma lajota quadrada; duas crianças com números consecutivos ficaram em lajotas vizinhas com um lado comum (ou seja, do lado esquerdo, do lado direito, na frente ou atrás, mas nunca em diagonal). Ao relatar esse fato para a diretora, a inspetora Maria fez o desenho a esquerda, mostrando a posição de três crianças sobre o retângulo formado pelas 42 lajotas, sobre as quais estavam as crianças. Num outro comunicado, a inspetora Célia fez outro desenho, mostrado a direita, com a posição das mesmas crianças sobre o mesmo retângulo. Ao receber os dois desenhos a diretora disse a uma das inspetoras: "O seu desenho está errado".

a) Com qual das duas inspetoras a diretora falou? Qual foi o raciocínio da diretora?

b) Complete o desenho correto satisfazendo as condições do enunciado.

	11	20				
	31					

(Desenho de Maria)

	11	20				
	31					

(Desenho de Célia)

Solução:

Resolveremos apenas o item a) do problema.

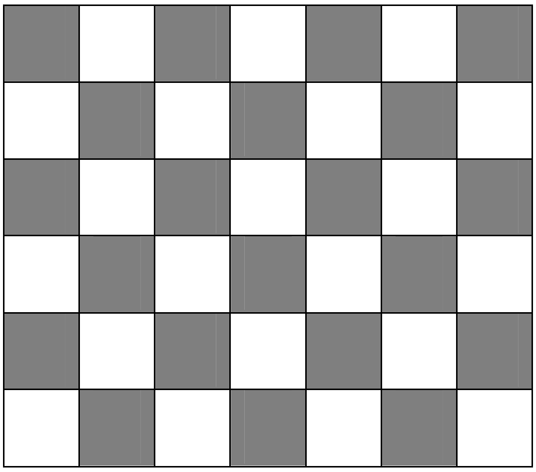
Neste exercício iremos utilizar um conceito matemático comumente utilizado em problemas olímpicos: a paridade. Apesar de a ideia de paridade ser extremamente simples, combinada com um pouco de imaginação ela se torna uma poderosa ferramenta na resolução de problemas matemáticos envolvendo números inteiros, sobretudo quando queremos provar que é impossível o resultado de algum tipo de contagem dado um certo valor.

A primeira coisa é pensar qual seria a melhor forma de marcar este tabuleiro. Pelas regras do problema, é impossível elas ficarem de mãos dadas na diagonal. Ou elas ficam na horizontal ou, na vertical. Outra informação importante é que, se as crianças são numeradas com um número par, elas ficarão de mãos dadas com duas crianças com numeração ímpares. Por exemplo, a criança de número 10 dá as mãos para as crianças de números 9 e 11. Da mesma forma, a criança com numeração ímpar dará as mãos para duas crianças de numeração par. Portanto, uma marcação dupla, considerando pares e ímpares é interessante, observando que eles estarão sempre na horizontal ou vertical.

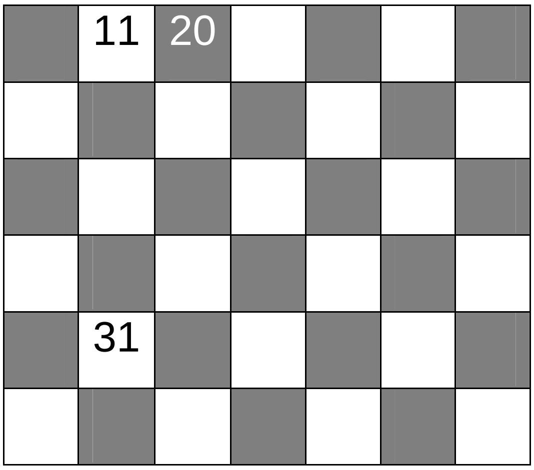
Chamemos I de ímpares e P de pares

I	P	I	P			
P	I	P				
I	P					
P						

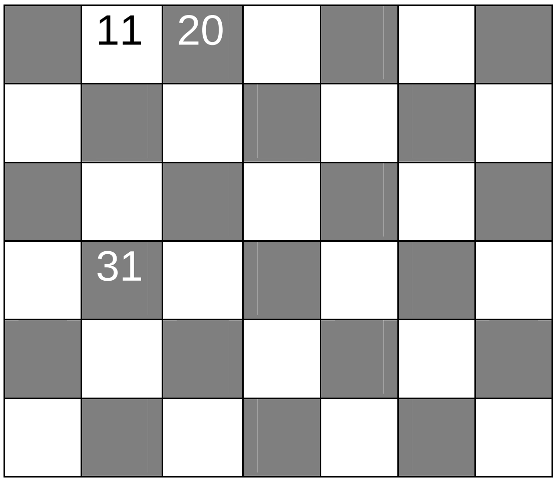
Se continuarmos a marcar, vemos que fica com uma marcação similar ao tabuleiro de xadrez. Logo, podemos fazer desse jeito:



Com essa configuração, podemos afirmar então que uma cor é dos pares e a outra é dos ímpares. Assim, de acordo com o enunciado, temos:



(Desenho de Maria)

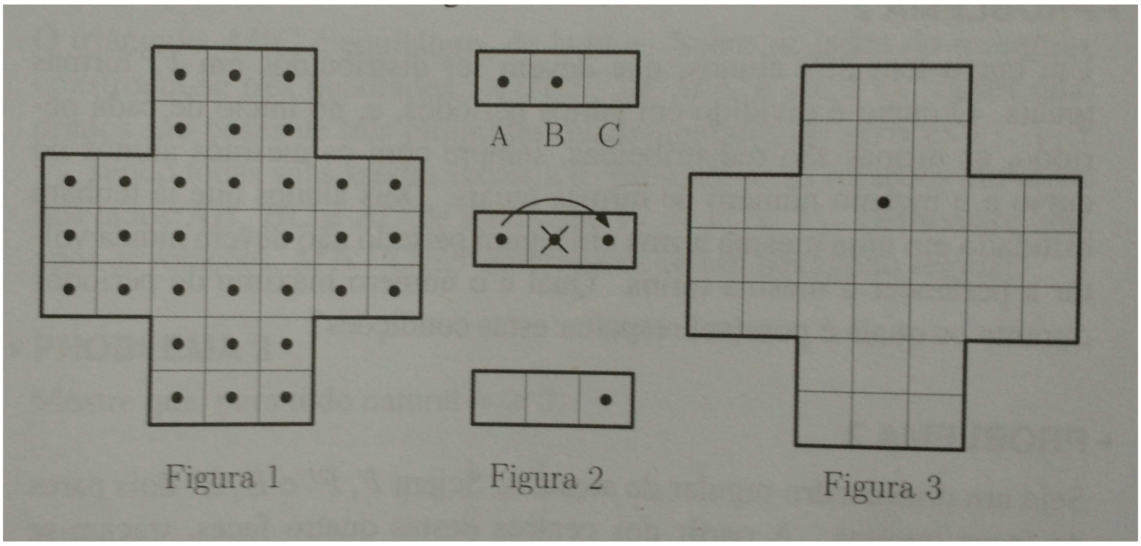


(Desenho de Célia)

No segundo tabuleiro, temos números ímpares em cores diferentes, o que é impossível pela nossa marcação. Portanto, a diretora falou com a Célia.

Problema 3 – (OBM 1986 – Nível Sênior)

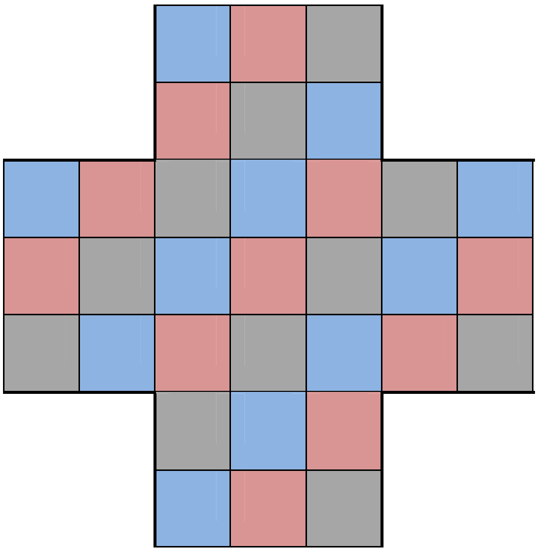
A figura 1 mostra o tabuleiro do jogo ”resta um”. Começa-se o jogo com peças em todas as casas, exceto na central, que inicialmente está vazia. São permitidas jogadas da seguinte forma: Suponha três casas imediatas A, B e C situadas em linha reta horizontal ou vertical e dispostas na ordem A, B, C ou C, B, A. Se A ou B Estiverem ocupadas por peças e C vazia, então a peça que ocupa A pode saltar para C, retirando-se do jogo a que está em B (veja figura 2). O objetivo do jogo é remover do tabuleiro todas as peças, exceto uma. Diga se é possível, partindo da posição inicial e fazendo apenas os movimentos permitidos, chegar a posição final mostrada na figura 3.



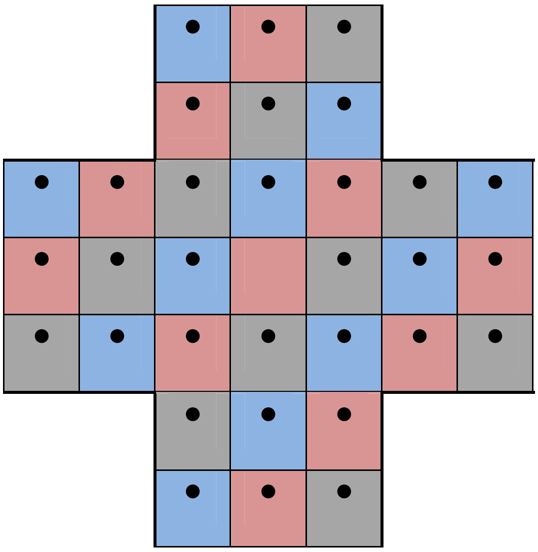
Solução:

Inicialmente vamos pensar como funciona o jogo do resta um. Cada jogada envolve três casas: a casa de onde sai o pino, a casa que vai receber o pino e a casa que é “pulada” na jogada. Então, é plausível que utilizemos uma marcação tripla neste tabuleiro.

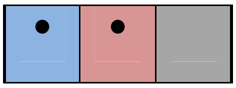
Vamos marcar este tabuleiro de modo que sempre tenhamos uma jogada envolvendo casas com três cores diferentes.

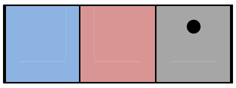


Podemos perceber que cada uma das cores está em 11 casas. Na disposição inicial do “resta um” temos 11 casas azuis com peças, 11 casas cinzas com peças e 10 casas vermelhas com peças. Notem que novamente aparece o conceito de paridade neste exercício.



O ponto crucial é o seguinte: a cada movimento do “resta um” altera-se o número de casas ocupadas de cada cor, pois pensemos como exemplo: retiramos a peça da casa azul e colocamos na casa cinza, “pulando” a casa vermelha. Logo a casa azul que estava ocupada não está mais assim como a casa vermelha. Já a casa cinza que estava vazia passou a ser ocupada.





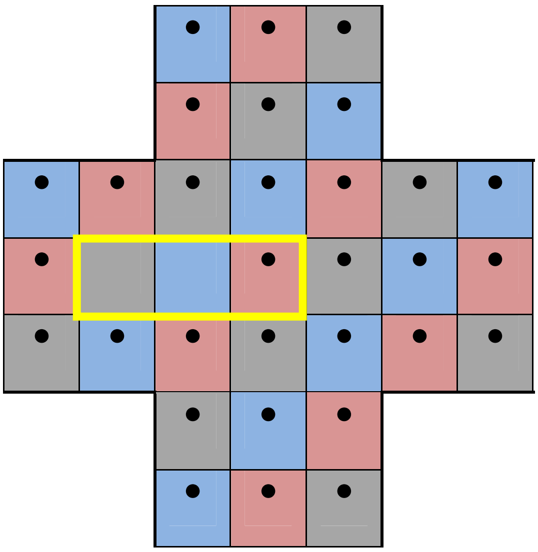
Vejamos três movimentos como exemplo, agora no tabuleiro do resta um:

Começamos com

A = 11

C = 11

V = 10

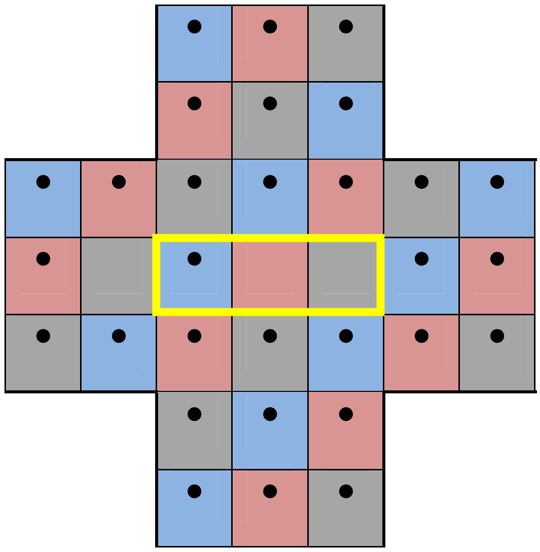


Após o primeiro movimento temos

A = 10

C = 10

V = 11

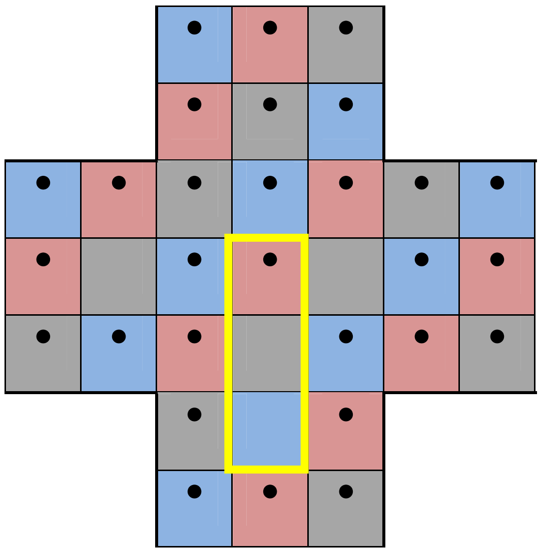


Após o segundo movimento temos

A = 11

C = 9

V = 10



Após o terceiro movimento temos:

A = 10

C = 8

V = 11

O ponto principal é que A, C e V trocam de paridade a cada jogada. Isto implica que as cores azul e cinza sempre têm a mesma paridade, ou seja, se eu tenho um número par de peças nas casas azuis, também tenho um número par de peças nas casas cinzas, e vice-versa. Já o vermelho tem paridade distinta das outras duas. Quando o vermelho é ímpar, as outras duas cores são pares e quando o vermelho é par, as outras duas são impares. Como no jogo deve sobrar apenas uma peça, duas cores devem ter zero peças e a outra cor deve ter uma peça. Considerando que as cores azul e cinza têm a mesma paridade, obrigatoriamente ambas devem ter zero no fim do jogo e a peça restante deve ficar em uma casa vermelha. Como a disposição do enunciado mostra a última peça em uma casa azul, é impossível chegar à posição final indicada.

Assim, apenas marcando as casas, muitas vezes chegamos diretamente ao resultado pretendido. Não existe uma fórmula de como marcar as casas, mas se pensarmos com cuidado no nosso objetivo no problema, conseguimos em geral deduzir nossa marcação de forma simples.

3.2 MOVIMENTOS E PREENCHIMENTO DE UM TABULEIRO

Questões que envolvem perguntas do tipo “qual o número mínimo de movimentos” ou “preencha o tabuleiro de modo que”, aparecem usualmente em provas de Olimpíadas de Matemática.

Para esse tipo de problemas devemos ter bastante atenção, pois, apesar de muitas vezes não terem um alto grau de dificuldade, podemos ficar envolvidos muito tempo aplicando tentativas. Um roteiro interessante para resolvermos esses exercícios é:

1. Qual o padrão de movimentos que é dado pelo exercício ou qual padrão queremos encontrar?
2. De qual forma não existe chance de eu fechar o ciclo de movimento ou de percurso em um tabuleiro?
3. Quais opções eu tenho?

Problema 1 – (OBM 2002 – Nível 2 – 2ª Fase)

João gosta de verificar propriedades do jogo de xadrez em um tabuleiro 5x5. Num de seus experimentos, João coloca um cavalo na casa inferior esquerda do tabuleiro 5x5. Qual o número mínimo de movimentos do cavalo para que ele possa chegar a qualquer casa do tabuleiro 5x5?

Solução:

Vamos as nossas perguntas:

1) Qual o padrão de movimentos que é dado pelo problema ou qual padrão queremos encontrar?

Resposta: Utilizaremos o movimento de um cavalo, ou seja, anda duas casas em uma direção e, logo em seguida, uma casa na direção perpendicular (movimento em L)

2) De qual forma não existe chance de eu fechar o ciclo de movimento ou de percurso em um tabuleiro?

Resposta: Se eu quero descobrir o número mínimo de movimentos, não devemos fazer movimentos que voltem para a mesma casa. Devemos sempre ir para casas não ocupadas.

3) Quais opções eu tenho?

Resposta: O interessante nesse exercício é marcar as casas que já foram ocupadas com números, para não repetirmos movimentos. A única opção é verificar todos os movimentos possíveis a partir da casa determinada.

Vejamos o tabuleiro abaixo:

C				

Com um movimento podemos chegar apenas a duas casas. As marcaremos com o número 1.

	1			
		1		
C				

Agora vamos analisar quais as possibilidades de movimento do cavalo a partir das casas marcadas com 1. Lembrando que, não vamos marcar as casas já visitadas.

2		2		
	2		2	
2	1			2
		1	2	
C		2		2

As casas marcadas com 2 necessitam apenas de dois movimentos para serem ocupadas.

Iremos repetir o processo para o terceiro movimento:

2	3	2	3	
3	2	3	2	3
2	1		3	2
3		1	2	3
C	3	2	3	2

Repetindo o processo para o quarto movimento:

2	3	2	3	4
3	2	3	2	3
2	1	4	3	2
3	4	1	2	3
C	3	2	3	2

Como todas as casas já estão preenchidas, podemos afirmar que quatro é o número mínimo de movimentos para chegar em qualquer casa do tabuleiro, pois o cavalo já possui um movimento com o número de casas pré-determinadas, não admitindo atalhos.

Problema 2 – (OBM 1998 – Nível 2 – 3ª Fase)

Em um jogo existem 20 buracos vazios em fila e o jogador deve colocar um pino em cada buraco de acordo com as seguintes regras:

a) Se colocar um pino em um buraco e se os dois buracos vizinhos estiverem vazios, o pino permanece.

b) Se colocar um pino em um buraco e se um dos buracos vizinhos estiver ocupado, o pino deste buraco vizinho deve ser retirado.

c) Se colocar um pino em um buraco e se os dois buracos vizinhos estiverem ocupados, então um dos pinos vizinhos deve ser retirado.

Determine qual é o número máximo de pinos que podem ser colocados.

Solução:

Ao contrário de outros exercícios, neste padrão queremos fechar o ciclo, ou seja, encontrar a forma de completar o máximo de casas vazias do tabuleiro abaixo.

Vamos ver o que acontece em quatro casas deste tabuleiro:

Colocando um pino na primeira casa

•			

Agora pino na terceira casa

•		•	

Colocando um pino na segunda casa, vamos optar por retirar o pino da terceira

●	●		

Colocando um pino na quarta casa temos:

●	●		●

Usaremos a lógica de nunca colocarmos um pino entre uma casa ocupada e uma casa vazia. Se tivermos a opção de colocar entre duas, essa será nossa prioridade, sempre retirando o pino da direita. Caso contrário, colocamos ela entre duas casas vazias.

Seguindo essa regra, teremos a seguinte sequência:

1	●																			
2	●		●																	
3	●	●																		
4	●	●		●																
5	●	●	●																	
6	●	●	●		●															
7	●	●	●	●																
8	●	●	●	●		●														
9	●	●	●	●	●															
10	●	●	●	●	●		●													
11	●	●	●	●	●	●														
12	●	●	●	●	●	●		●												
13	●	●	●	●	●	●	●													
14	●	●	●	●	●	●	●		●											
15	●	●	●	●	●	●	●	●												
16	●	●	●	●	●	●	●	●		●										
17	●	●	●	●	●	●	●	●	●											
18	●	●	●	●	●	●	●	●	●		●									
19	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●										
20	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●		●								
21	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●									
22	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●		●							
23	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●								

24	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●		●						
25	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●							
26	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●		●					
27	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●						
28	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●		●				
29	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●					
30	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●		●			
31	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●				
32	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●		●		
33	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●			
34	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●		●	
35	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●		
36	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●		●

Portanto, em 36 movimentos, conseguimos colocar 19 pinos, que é o número máximo de peças que é possível colocar neste tabuleiro, pois sempre que colocamos um pino, alguma casa vizinha fica sem pino. Logo não é possível ocupar todo o tabuleiro.

Problema 3 – (Olimpíada de Maio – 2007)

Um tabuleiro 7x 7 tem uma lâmpada em cada uma de suas 49 casas, que pode estar acesa ou desligada. A operação permitida é escolher 3 casas consecutivas de uma linha ou de uma coluna que tenham duas lâmpadas vizinhas entre si acesas e a outra desligada, e trocar o estado das três.

Quer dizer:

Exiba uma configuração de exatamente 8 lâmpadas acesas localizadas nas primeiras 4 linhas do tabuleiro tais que, mediante uma sucessão de operações permitidas, cheguemos a ter uma única lâmpada acesa no tabuleiro e que esta esteja localizada na última linha. Mostre a sequência de operações que se utilizam para alcançar o objetivo.

Solução:

Vamos as nossas perguntas.

1) Qual o padrão de movimentos que é dado pelo exercício ou qual padrão queremos encontrar?

Resposta: O padrão dado no enunciado, conforme a figura, e que devemos ter início nas quatro linhas superiores do tabuleiro 7X7.

2) De qual forma não existe chance de eu fechar o ciclo de movimento ou de percurso em um tabuleiro?

Resposta: Devemos analisar quais formas não teremos mais de uma casa acesa no tabuleiro e a única casa acesa deve estar na última linha.

3) Quais opções eu tenho?

Resposta: Podemos marcar oito casas aleatoriamente na parte superior do tabuleiro e fazer por tentativas. Porém, alguns exercícios vale a pena começarmos pelo fim, ou seja, colocamos uma única casa acesa na última linha e fazemos o percurso inverso, visando chegar a oito casas acesas nas quatro linhas superiores.

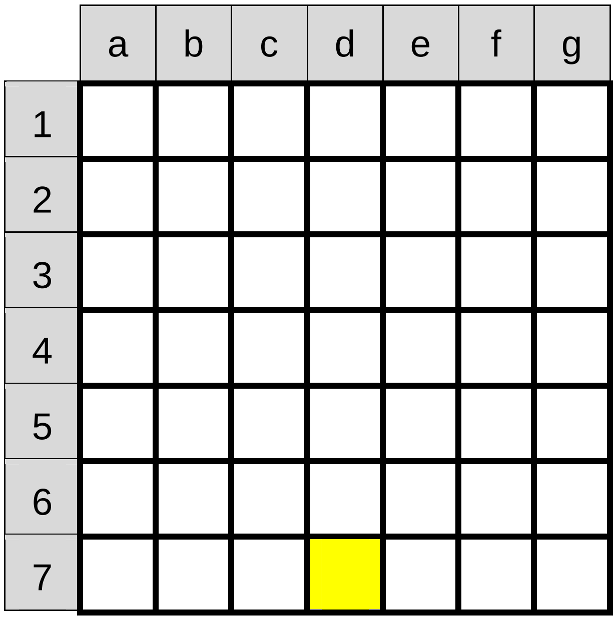
Vale ressaltar que, como a cada movimento eu apago uma luz e começo com oito luzes acesas, devo fazer exatamente sete movimentos.

Importante destacar que os movimentos são inversíveis, por isso começar pelo fim. Isso significa que quando eu faço determinado movimento, eu consigo, com apenas um movimento, voltar a posição anterior.

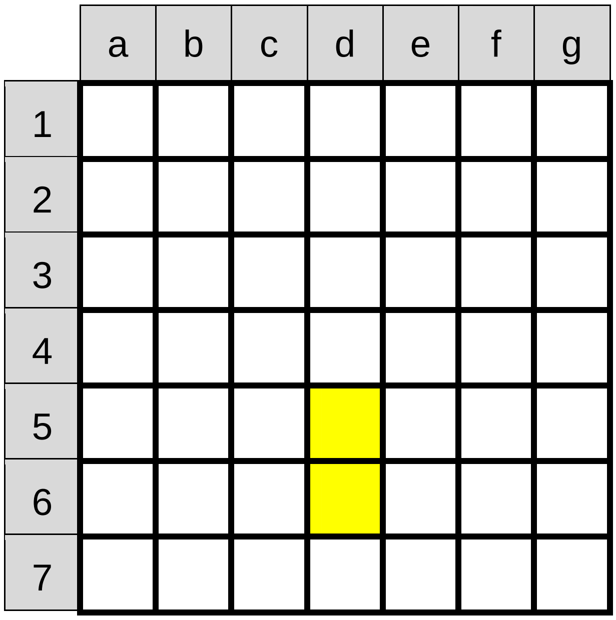
Vamos inicialmente numerar as linhas e nomear as colunas.

	a	b	c	d	e	f	g
1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							

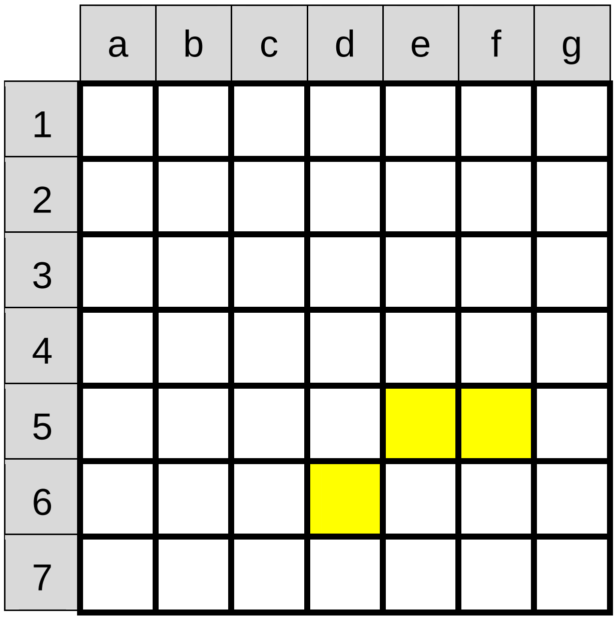
Vamos colocar a casa central da última linha (d7) acesa:



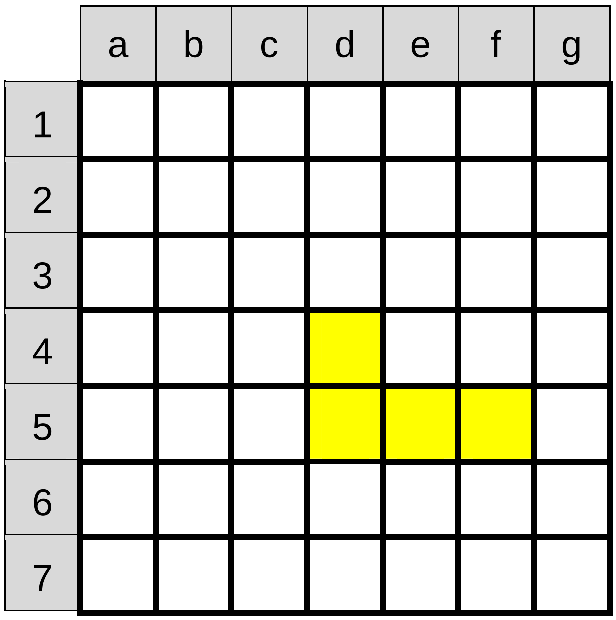
Como queremos subir para as quatro primeiras linhas, nosso raciocínio deve ser sempre procurar subir no tabuleiro. Logo, é interessante o primeiro movimento ser subindo.



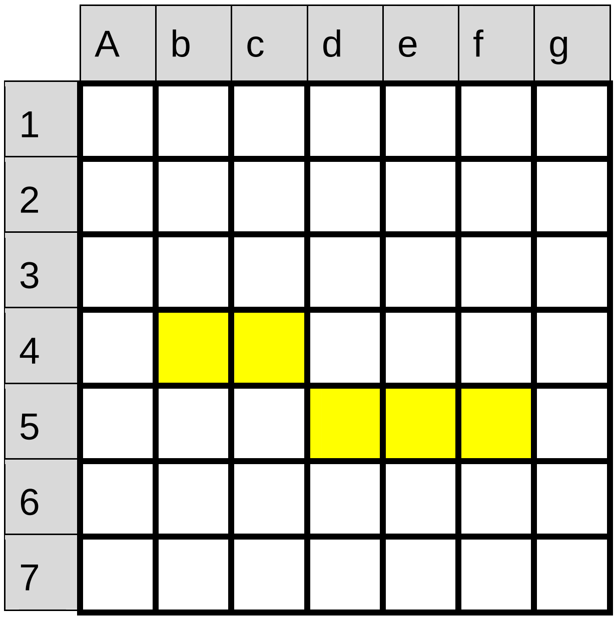
Se eu subir a casa d5, eu inviabilizo a casa d6 de subir. Logo, faremos o movimento para abrir caminho para d6, apagando d5 e acendendo e5 e f5.



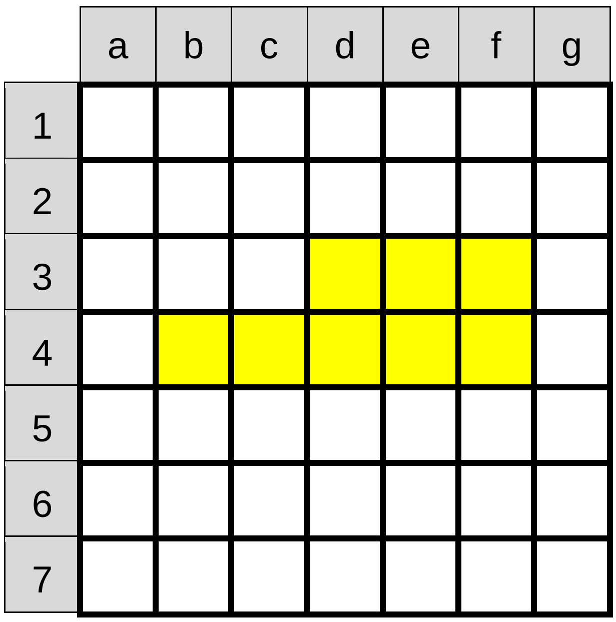
Assim podemos fazer o movimento de apagar d6 e acender d5 e d4.



Seguindo a mesma lógica, vamos abrir o caminho para d5, apagando d4 e acendendo c4 e b4.



Os outros três movimentos são similares, apagando d5, e5 e f5 e acendendo d4, d3, e4, e3, f4 e f3



Que é uma solução para o problema. Porém, não devemos escrever assim, pois o enunciado pede a sequencia de operações. Logo, vamos formalizar esta solução.

As acesas inicialmente são b4, c4, d3, d4, e3, e4, f3 e f4

Quadro de movimentos:

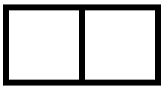
MOVIMENTO	APAGA	APAGA	ACENDE
1	d3	d4	d5
2	e3	e4	e5
3	f3	f4	f5
4	b4	c4	d4
5	d4	d5	d6
6	f5	e5	d5
7	d5	d6	d7

Note que d7 é a única casa acesa do tabuleiro e que está na última linha como pediu o enunciado.

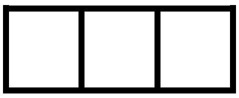
3.3 COBERTURA DE TABULEIROS (POLIMINÓS)

A ideia desta seção é desenvolver o raciocínio de cobertura de tabuleiro através de poliminós, que são peças obtidas unindo-se quadrados 1x1 pelas arestas. Por se tratar de um assunto muito atraente, ele se destaca nas principais olimpíadas de matemática. Cobrir tabuleiro com poliminós é como completar as peças de um quebra-cabeça e para isso, precisamos de raciocínio lógico de combinações que nos levem ao objetivo da cobertura. Vamos começar a desenvolver essa técnica de cobertura de tabuleiro mostrando as peças de alguns poliminós:

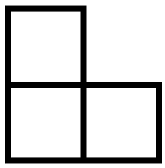
- Dominó



- Triminó

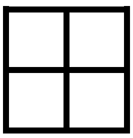


Triminó reto

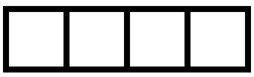


L-triminó

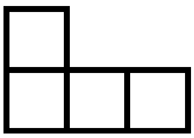
- Tetraminó



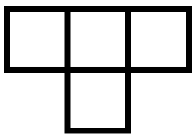
Quadrado tetraminó



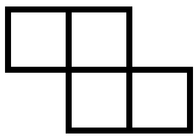
Tetraminó reto



Ltetraminó



T-tetraminó



Z-

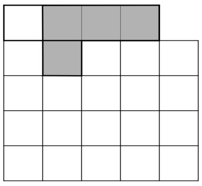
[8]Os pentaminós possuem 12 peças e os hexaminós 35 peças. O número de peças de um poliminó a partir da ordem sete é grande e não convém mostrar aqui.

---

[8] Informações retirada das páginas 64 e 65 do livro "21 Aulas de Matemática Olímpica" do Carlos Yuzo Shine, Editora SBM.

Problema 1 – (OBM 2013 – Nível 1 – 1ª Fase)

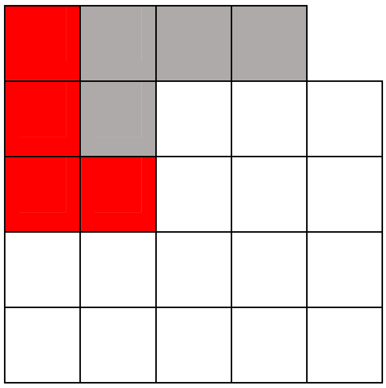
Luísa tem seis peças iguais formadas por 4 quadradinhos de área 1. Ela quer encaixar todas essas peças no quadriculado formado por 24 quadradinhos de área 1 e já colocou uma dessas peças, em destaque na figura abaixo, e as peças podem ser colocadas em qualquer orientação. De quantas maneiras diferentes ela pode terminar seu trabalho?



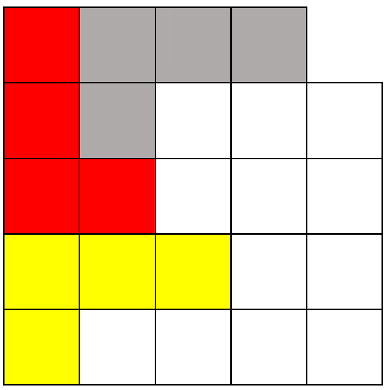
A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Solução:

Só há uma possibilidade para encaixar uma peça que cubra as duas primeiras casas da primeira coluna, que é colocar uma peça na posição vertical conforme a figura (peça vermelha):

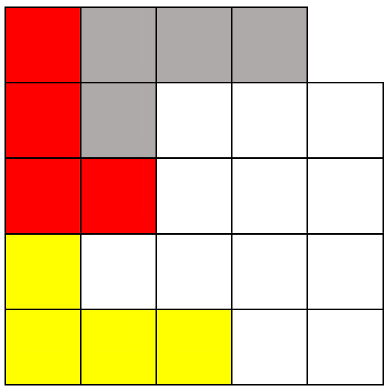


Agora, vamos pensar para encaixar nossa segunda peça. Analisando a figura vemos que as duas últimas casas da primeira coluna obrigatoriamente têm que receber uma peça na posição horizontal, que pode ser disposta de duas formas diferentes, conforme as figuras abaixo:

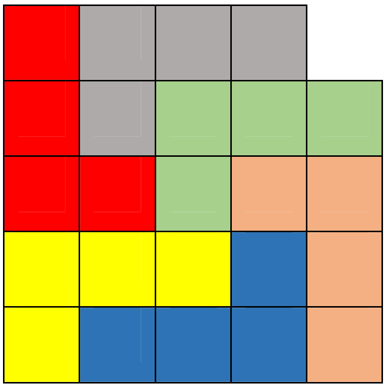


1°modo

2°modo

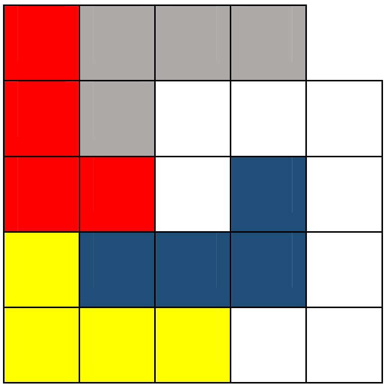


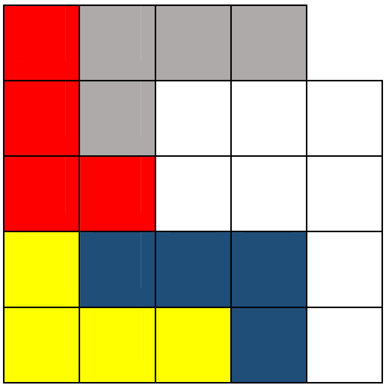
A partir do 1°modo só temos uma forma de continuar o preenchimento

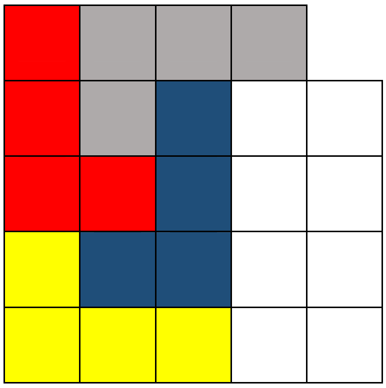


Assim, com esta configuração temos uma maneira de completar o quadriculado.

Já com o 2° modo, temos três modos de encaixar a próxima peça

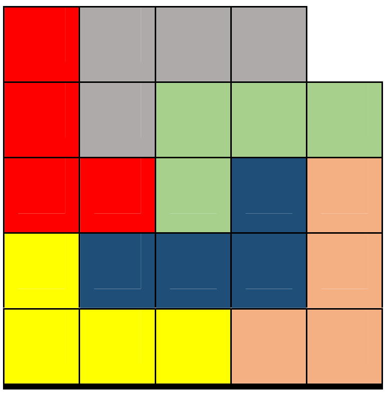




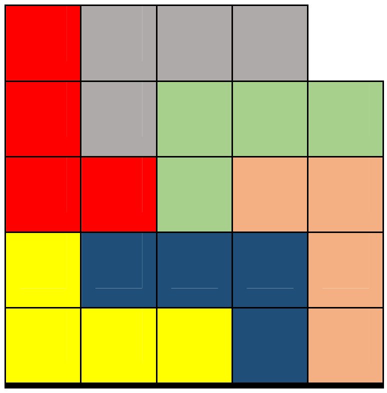


Modo 2.1 Modo 2.2 Modo 2.3

Analisando o modo 2.1, só teremos uma maneira de encaixar os próximos quadriculados.

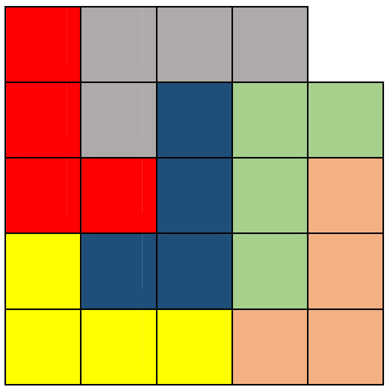


Assim como no modo 2.1 o modo 2.2 também só tem uma maneira de completar o quadriculado.

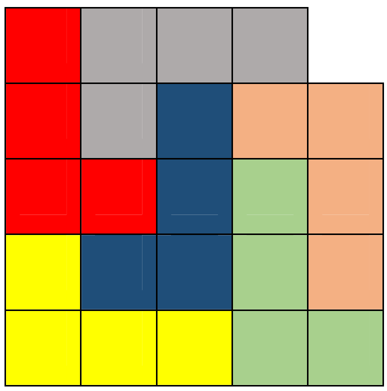


Já o modo 2.3 possui duas maneiras de completar o quadriculado

1ª maneira:



2ª maneira

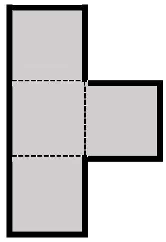


Desta forma, o 2°modo possui quatro maneiras distintas de se completar o quadriculado.

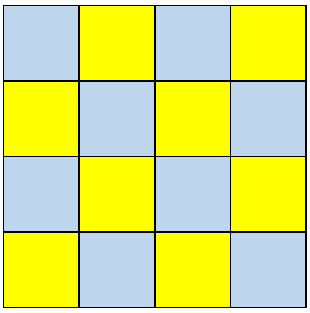
Logo, Luísa possui 5 maneiras diferentes de terminar seu trabalho.

Problema 2 – (OBMEP 2014 – Nível 2 – 2ª Fase)

Maria possui muitas peças, todas iguais, formadas por quatro quadradinhos, como mostra a figura ao lado. Sem sobrepor peças, ela tenta cobrir todas as casas de vários tabuleiros quadrados, fazendo coincidir aos quadradinhos das peças com os do tabuleiro.



a) Desenhe na figura abaixo uma maneira de cobrir um tabuleiro 4X4 com essas peças.

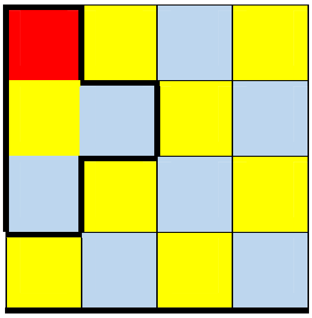


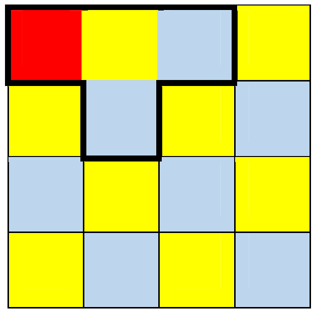
b) Explique por que nenhum tabuleiro quadrado pode ser coberto com exatamente vinte peças.

c) Explique por que Maria nunca conseguirá cobrir um tabuleiro 10X10 com suas peças.

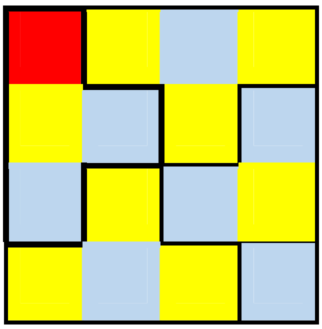
Solução:

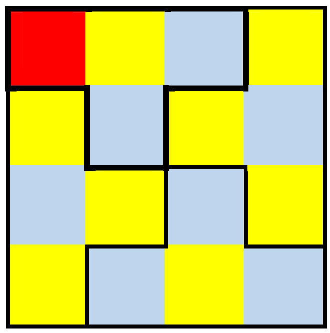
a) Vamos pintar de vermelho a casa da primeira linha e primeira coluna para fixarmos a colocação da primeira peça, e isso podemos fazer de dois modos.





Fixada a primeira peça, basta agora encaixar as outras peças para cobrir o tabuleiro.





Desta forma, as figuras acima apresentam as duas únicas formas possíveis, a menos da rotação, de cobrir o tabuleiro 4x4 com essas peças.

b) Cada peça possui 4 quadrados. Desta forma, com 20 peças teremos 4x20=80 quadrados. Como 80 não é um número quadrado perfeito, pois 80 = 2^4 x 5, não é possível cobrir um tabuleiro quadrado com 20 peças.

c) Para cobrir um tabuleiro 10x10, Maria necessita de 25 peças, pois cada peça possui 4 quadrados e 4x25 = 100 = 10x10. Do item a) podemos observar que cada peça cobre 3 quadradinhos de uma cor e 1 da outra cor. Assim, o tabuleiro através da distinção das cores das casas, possui dois modelos de peças. O modelo 1 que cobre exatamente uma casa amarela e três azuis e o modelo 2 que cobre três casas amarelas e uma azul.

Supondo que Maria conseguisse cobrir o tabuleiro com as 25 peças e sabendo que o tabuleiro possui 50 casas amarelas e 50 casas azuis, teremos duas situações a analisar:

<u>1ª situação</u>: o número de peças do modelo 1 é par.

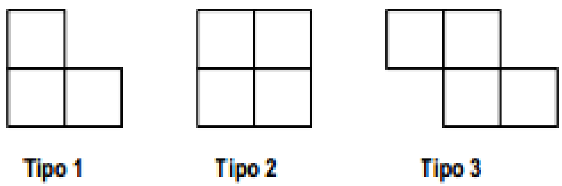
Se isso ocorrer o número de peças do modelo 2 é ímpar pois, só a soma de par com impar pode resultar em 25. Nesta situação, teríamos um número ímpar de casas azuis pois, 3 x par + ímpar resulta em um número ímpar. Esta situação é absurda porque o número de casas azuis é 50 que é par.

<u>2ª situação</u>: o número de peças do modelo 1 ímpar.

Se isso ocorrer o número de peças do modelo 2 é par pois, só a soma de par com impar pode resultar em 25. Nesta situação, teríamos um número ímpar de casas amarelas, pois 3 x par + ímpar resulta em um número ímpar. Esta situação é absurda porque o número de casas azuis é 50 que é par.

Problema 3 – (OLIMPÍADA DE MAIO – Nível 2 – 2008)

Matias cobriu um tabuleiro quadrado de 7x7, dividido em casas de 1x1, com peças dos três tipos a seguir



sem buracos nem superposições, e sem sair do tabuleiro.

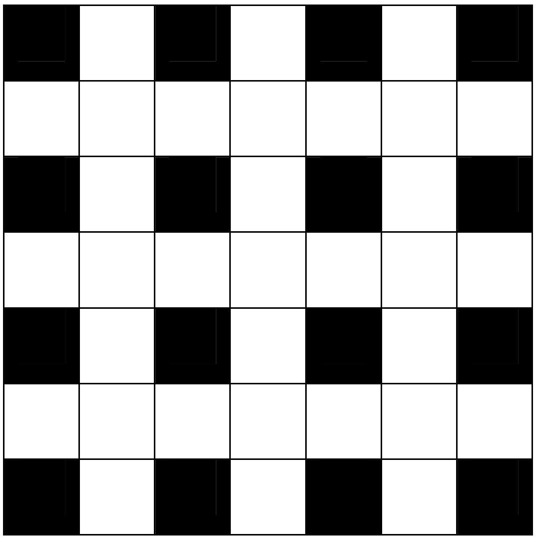
Cada peça do tipo 1 cobre exatamente 3 casas e cada peça do tipo 2 ou do tipo 3 cobre exatamente 4 casas.

Determine a quantidade de peças do tipo 1 que Matias pode ter utilizado.

(As peças podem girar e ser viradas).

Solução:

Para cobrir o tabuleiro, nossa ideia fundamental é marcar este tabuleiro antes de dispor as peças. Conforme vimos na seção 3.1, onde tratamos de marcação de casas, toda marcação nossa deve ter uma lógica e cumprir um determinado objetivo. Aqui vamos nos propor marcar o tabuleiro de modo que cada peça possa, no máximo, cobrir uma dessas casas pintadas, pois assim podemos definir o número mínimo de peças que podemos utilizar.



Note pela marcação do tabuleiro acima, que Matias utilizaria, pelo menos, 16 peças para cobrir todo o tabuleiro.

Desta forma, se a, b e c são as quantidades de peças do tipo 1, tipo 2 e tipo 3, respectivamente, que Matias pode ter usado, então teremos:

$$a + b + c \geq 16 \quad \text{(I).}$$

Agora, se contarmos o número de casas teremos:

$$3a + 4b + 4c = 49 \text{ (II)}$$

Multiplicando por 4 a inequação (I), temos:

$$4a + 4b + 4c \geq 64$$

$$a + \underbrace{3a + 4b + 4c}_{\text{(II)}} \geq 64$$

Substituindo (II) em (I):

$$a + 49 \geq 64$$

$$a \geq 64 - 49$$

$$a \geq 15$$

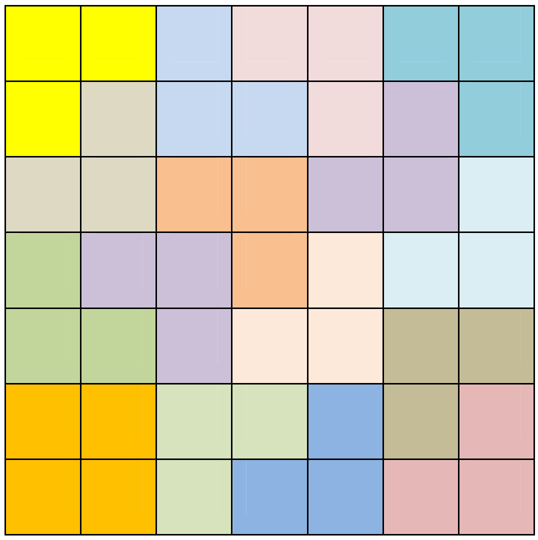
Portanto, Matias utilizou no mínimo 15 ou 16 peças do tipo 1.

Porém, se considerarmos a = 16, teremos pela equação (II) que:

$$3 \bullet 16 + 4b + 4c = 49$$

Logo, 4b + 4c = 1. Como 1 não é múltiplo de 4, temos que Matias usou exatamente 15 peças do tipo1.

Exemplo:



3.4 REDUÇÃO A UM CASO MENOR

Muitas vezes nos deparamos nas olimpíadas de matemática com problemas envolvendo tabuleiros mxn, contendo linhas e colunas muito grandes, até mesmo infinitas. Estes casos são impossíveis transportar para o papel. Entretanto, podemos verificar recorrências que, aplicadas em um caso menor, estabelecem um padrão que nos leva aos resultados. Nesta seção veremos alguns desses casos, onde, para um tabuleiro suficientemente grande, conseguimos uma versão reduzida que nos apresenta resultados similares.

Para melhor compreensão do assunto, vejamos as resoluções dos problemas a seguir.

Problema 1 – (OBM 2008 – Nível 2 – 3ª Fase)

Em cada casa de um tabuleiro n x n, colocamos um dos números 1, 2, 3, 4, de modo que cada casa tem exatamente uma casa vizinha com o mesmo número. E possível fazer isso quando

(a) n = 2007?

(b) n = 2008?

Observação. Duas casas são vizinhas se possuem um lado em comum.

Solução:

Inicialmente, vamos observar o padrão que temos. Cada casa deve ter exatamente uma casa vizinha com o mesmo número. Logo, estamos falando que deve existir um dominó que contenha os mesmos números e será encaixado nas casas do tabuleiro e nunca podemos ter dominós com os mesmos números tendo lados adjacentes.

Vejamos dois exemplos em um tabuleiro 4x4:

1	4	1	4
1	4	1	4
2	3	2	3
2	3	2	3

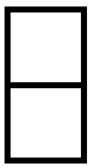
(I)

ou

1	1	4	4
2	2	3	3
4	4	1	1
3	3	2	2

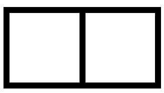
(II)

No primeiro tabuleiro utilizamos dominós na vertical e conseguimos um exemplo de configuração desejada pelo enunciado.



Dominó na vertical

Já no segundo tabuleiro, a configuração do problema foi fechada com dominós na horizontal.



Dominó na horizontal

Vamos pensar nas figuras (I) e (II) como se fossem espécies de "carimbos". O tabuleiro 8 x 8 pode ser "carimbado" de modo que cumpra as exigências do enunciado. Vejamos como fica se utilizarmos a figura (II):

1	1	4	4	1	1	4	4
2	2	3	3	2	2	3	3
4	4	1	1	4	4	1	1
3	3	2	2	3	3	2	2
1	1	4	4	1	1	4	4
2	2	3	3	2	2	3	3
4	4	1	1	4	4	1	1
3	3	2	2	3	3	2	2

Se expandirmos a ideia, chegaremos à conclusão que podemos usar esses carimbos em tabuleiros do tipo 4n x 4n. Logo no tabuleiro 2008x2008 é possível, pois 2008 = 4 x 502. Entretanto, para um tabuleiro 2007x2007, essa disposição é impossível, já que não seria possível "carimbar" todo o tabuleiro. De fato, um tabuleiro 2007x2007 tem um número ímpar de casas, logo é impossível cumprir a exigência do enunciado, pois não encaixaríamos todas as peças do nosso dominó.

Problema 2 - (Olimpíada Iberoamericana de Matemática – 2008)

> Os números 1, 2, 3, . . ., 2008^2 são distribuídos num tabuleiro 2008 × 2008, de modo que em cada casa haja um número distinto. Para cada linha e cada coluna do tabuleiro calcula-se a diferença entre o maior e o menor dos seus elementos. Seja S a soma dos 4016 números obtidos.
>
> Determine o maior valor possível para S.

Solução:

Inicialmente vamos frisar que a importância de usar um tabuleiro menor em um problema desse tipo é visualizar de modo mais simples o comportamento da questão e expandir o raciocínio para casos maiores.

Queremos maximizar o valor de S. Como o tabuleiro tem um número par de casas e é um tabuleiro quadrado, vamos observar o que faríamos para maximizar as diferenças em um tabuleiro 4 x 4.

1	12	11	15	=14
9	4	14	10	=10
7	13	3	8	=10
16	6	5	2	=14
=15	=9	=11	=13	

Deste tabuleiro menor podemos destacar que:

1. As casas destacadas em amarelo não influenciam em nada as diferenças e a soma S é alcançada com a seguinte expressão:

   2 x (16 + 15 + 14 + 13) – 2 x (1 + 2 + 3 + 4) = 96

2. Se pensarmos em uma nomenclatura semelhante a matrizes, os elementos da diagonal principal são os menores números e da diagonal secundária os maiores números.

Vamos utilizar o mesmo raciocínio pensando agora em um tabuleiro n x n com n par.

Vamos considerar a sequência de números K=(1, 2, 3, ..., n, ..., n^2-1, n^2)

Os n menores números são (1, 2, 3, ..., n-1, n)

Os n maiores números são (n^2, n^2-1, ..., n^2-n+1)

Conforme o item (2), vamos distribuir os n menores números na diagonal principal do tabuleiro e os n maiores na diagonal secundária. Conseguimos chegar à conclusão o disposto no item (1) também se aplica a este tabuleiro nxn. Logo, temos

$S=2 \times (n^2 + n^2 -1 + n^2 – 2 + ... + n^2 – n + 1) – 2 \times (1 + 2 + 3 + ... + n)$ Utilizando a formula de Soma de Progressões aritméticas:

$S = 2 * ((n^2 + (n^2– (n – 1)))*(n/2) – (1 + n)*(n/2))$

$S = (n^2 + (n^2– (n – 1)))*(n) – (1 + n)*(n)$ $S = (2n^2 – n + 1)*(n) – (n^2 + n)$

$S = 2n^3 – n^2 + n – n^2 – n$

$S = 2n^3 – 2n^2$

$S = 2n^2 (n – 1)$

Como nosso n no caso é 2008, temos como solução $2 \times 2008^2 \times 2007$ = 16.184.704.896.

Logicamente em uma olimpíada de matemática não seria necessário efetuar a multiplicação.

Problema 3 – (Olimpíada de Maio – 2007)

> Seja $n > 2$ um inteiro par. Nas casas de um tabuleiro de nxn devem-se colocar fichas de modo que em cada coluna a quantidade de fichas seja par e distinta de zero, e em cada linha a quantidade de fichas seja ímpar. Determinar a menor quantidade de fichas que precisamos colocar no tabuleiro para cumprir esta regra. Mostrar uma configuração com essa quantidade de fichas e explicar porque com menos fichas não se pode cumprir a regra.

Solução:

Aqui temos que buscar uma situação que seja necessária e suficiente para resolver o problema.

Inicialmente vamos analisar a situação das colunas. Este tabuleiro tem n colunas. Logo, como cada coluna tem que ter pelo menos duas fichas, podemos afirmar desde já que temos que usar pelo menos 2n fichas.

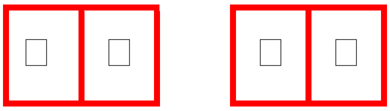
Se conseguirmos uma configuração com todas as linhas com uma quantidade ímpar de fichas e 2n fichas no total, conseguimos resolver nosso problema.

Vamos avaliar o menor tabuleiro possível para o problema que é o 4 x 4: Queremos tentar resolver nosso problema com 2n fichas, que no caso são 8 fichas.

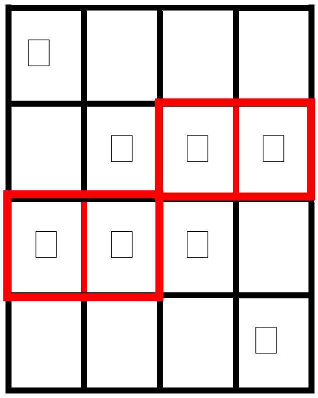
Inicialmente usaremos a estratégia de por uma ficha em cada diagonal.

□			
	□		
		□	
			□

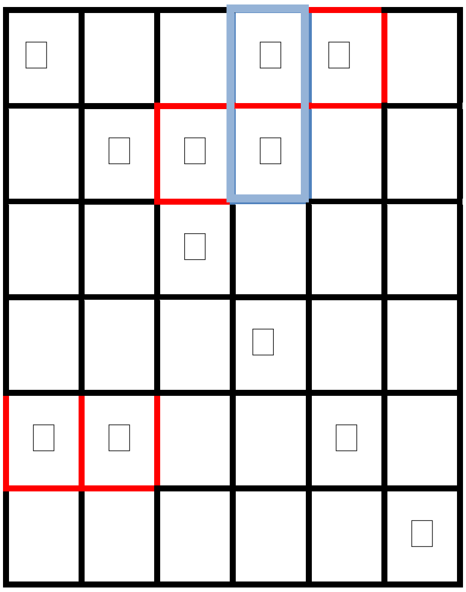
Já utilizamos 4 fichas. Nos restam apenas quatro. Vamos pegar estas fichas restantes e pensar em duas peças de dominós conforma a figura abaixo:



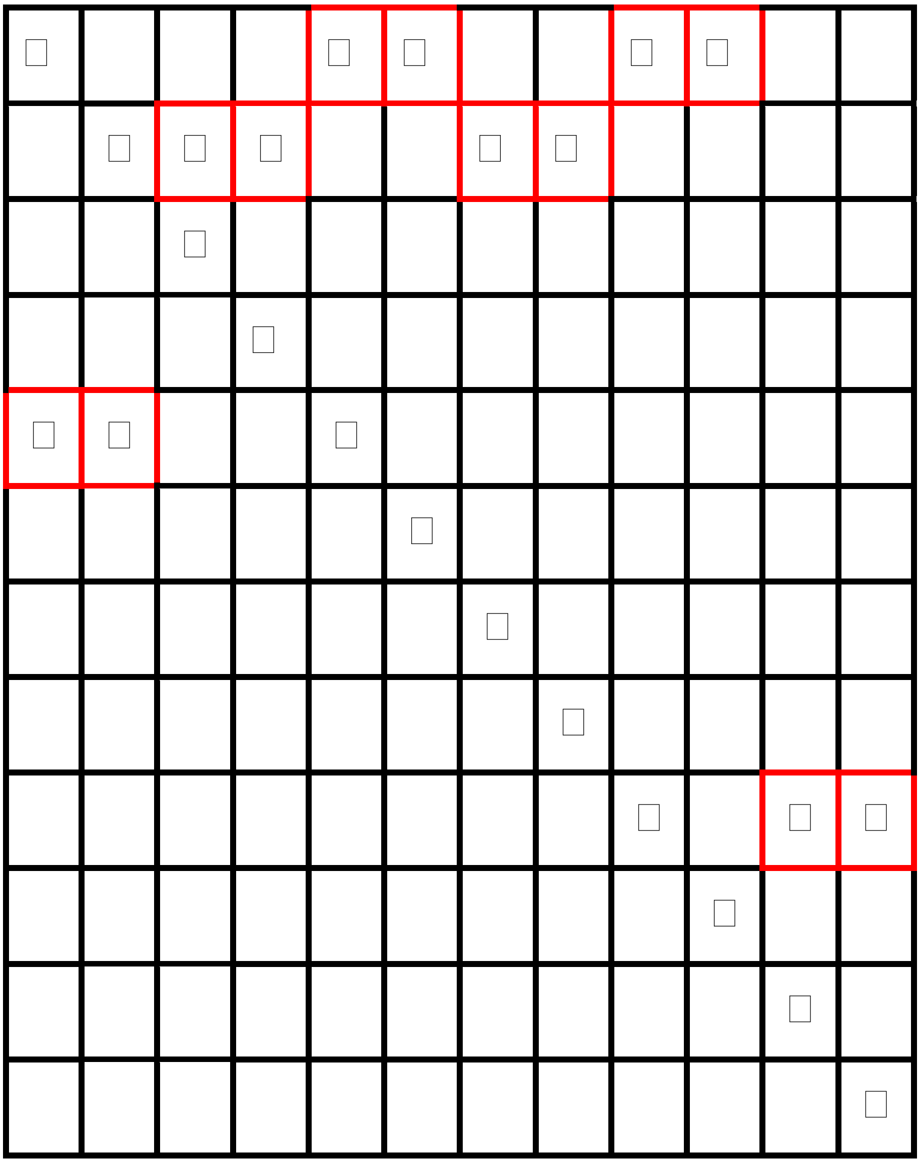
Vamos encaixar estas peças nas linhas de modo que nenhuma coluna seja ocupada por mais de duas peças.



Está claro que conseguimos resolver o problema do tabuleiro 4x4 com 8 fichas. Se estendermos o raciocínio para um tabuleiro nxn, iremos chegar a conclusão que é possível chegar a solução do problema proposto utilizando 2n peças e preenchendo o tabuleiro com n peças nas casas da diagonal e utilizando n/2 dominós nas linhas de modo que nenhum ocupe a mesma coluna.



Exemplo de situação não permitida: uma coluna com duas peças (conforme marcado em azul)



Exemplo de uma configuração possível em um tabuleiro 12x12.

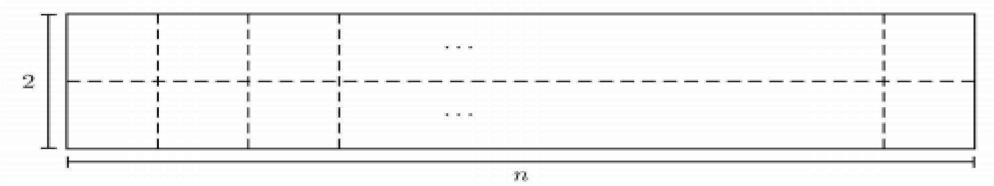
3.5 SIMETRIA EM JOGOS

Existem variados jogos que vem sendo abordados em problemas de olimpíadas de matemática no qual exige-se do aluno a descoberta de uma estratégia vencedora de um dos jogadores, ou seja, que um deles possa ganhar sempre, independentemente de como seu adversário jogue. Consideraremos nesta seção jogos de jogadores que se alternam nas jogadas e que são obrigados a jogar na sua rodada. Além disso, suponhamos que os dois jogadores não cometam erros, afinal queremos descobrir qual jogador possui uma estratégia vencedora. A técnica abordada nesta seção é baseada na ideia de simetria, que é uma estratégia simples e comum em problemas olímpicos.

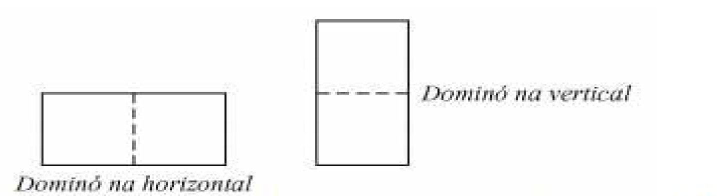
Problema 1 – (OBM 2004 – Nível 1 – 3ª Fase)

Arnaldo e Bernaldo disputam um jogo num tabuleiro 2 × n:

As peças do jogo são dominós 2 × 1. Inicialmente Arnaldo coloca um dominó cobrindo exatamente duas casas do tabuleiro, na horizontal ou na vertical. Os jogadores se revezam colocando uma peça no tabuleiro, na horizontal ou na vertical, sempre cobrindo exatamente duas casas do tabuleiro. Não é permitido colocar uma peça sobre outra já colocada anteriormente



Quem não conseguir colocar uma peça no tabuleiro perde.



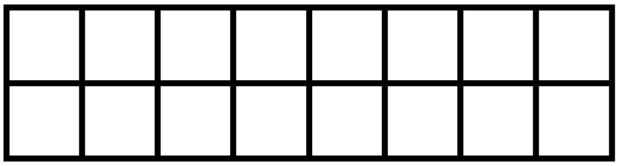
Qual dos dois jogadores tem uma estratégia vencedora, ou seja, uma estratégia que o leva à vitória quaisquer que sejam as jogadas de seu adversário, para:

(a) n = 2004?

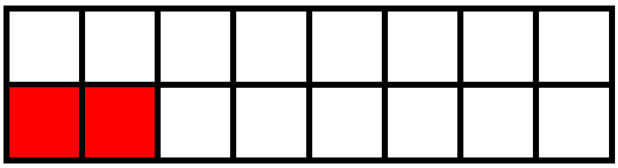
(b) n = 2005?

Solução:

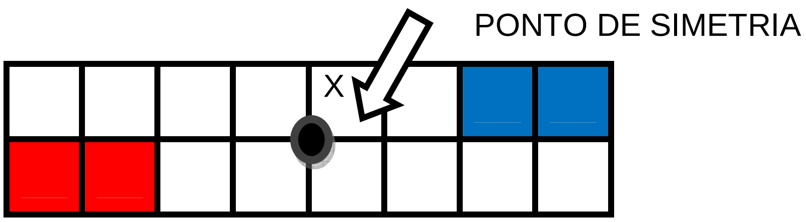
No item (a) temos um número par de colunas. Utilizando o pensamento visto na seção anterior, jogaremos em um tabuleiro 2x8.



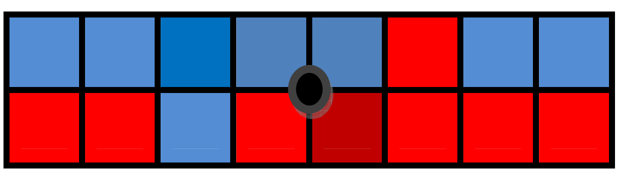
Vamos pensar na dinâmica deste jogo. A estratégia vencedora é colocar a última peça no tabuleiro, pois isto impossibilita o nosso adversário de jogar. Vamos supor que Arnaldo começou pondo a peça na posição mostrada abaixo: (para fins de ilustração, vamos utilizar as peças vermelhas para Arnaldo e as azuis para Beraldo).



Agora Beraldo vai utilizar a estratégia da simetria, ou seja, fazer a mesma jogada que Arnaldo utilizando um ponto de simetria. O que significa isso? Beraldo vai achar o ponto central da figura e reproduzir a jogada de Arnaldo simetricamente, conforme o ilustrado:



Mantendo a lógica, obteremos o seguinte resultado:



Como cada jogador pôs o mesmo número de peças, a vez de jogar é de Arnaldo. Como ele não tem a possibilidade de encaixar nenhuma peça, ele perdeu o jogo.

O raciocínio para n = 2004 é similar, pois Beraldo vai manter as jogadas de modo simétrico e Arnaldo não irá conseguir gerar situações que o faça vencer o jogo. Logo, para 2004 jogadas teremos como vencedor sempre Bernaldo, o segundo jogar, sendo necessário e suficiente que coloque, a cada jogada, o dominó na mesma posição (vertical ou horizontal) que Arnaldo de forma simétrica, utilizando a estratégia do ponto de simetria.

Já no item (b), para n = 2005, quem vence é Arnaldo, pois após colocar o primeiro dominó na posição vertical na primeira ou na última coluna, ele poderá utilizar a mesma estratégia de Beraldo no item (a).

Generalizando podemos concluir que, a estratégia vencedora desse jogo se verifica através da paridade de n. Se n for par, quem começa o jogo perde e se n for ímpar quem começa ganha. Basta que os jogadores sigam as técnicas utilizadas nos itens (a) e (b) da solução acima.

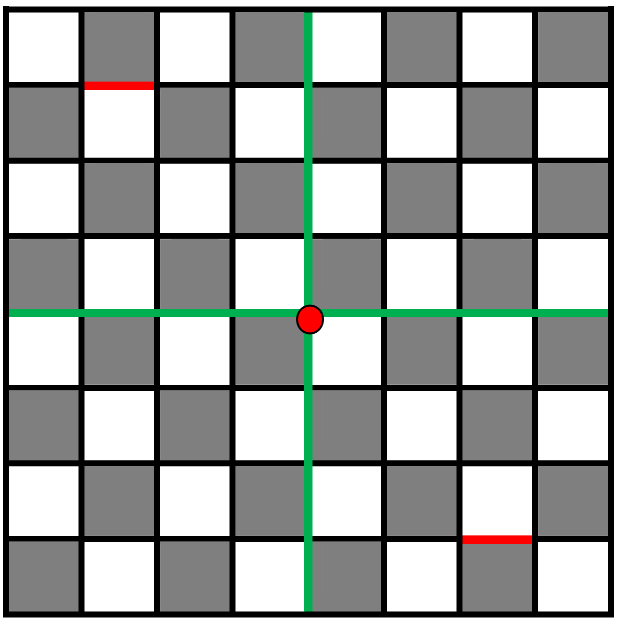
Problema 2 – (OBM 2002 – Nível 1 – 3ª Fase)

São dados um tabuleiro de xadrez (8X8) e palitinhos do tamanho dos lados das casas. Dois jogadores jogam alternadamente e, em cada jogada, um dos jogadores coloca um palitinho sobre um lado de uma casa do tabuleiro, sendo proibido sobrepor palitinhos.

Vence o jogador que conseguir completar primeiro um quadrado 1X1 de palitinhos. Supondo que nenhum jogador cometa erros, qual dos dois jogadores tem a estratégia vencedora, ou seja, consegue vencer independentemente de como jogue seu adversário?

Solução:

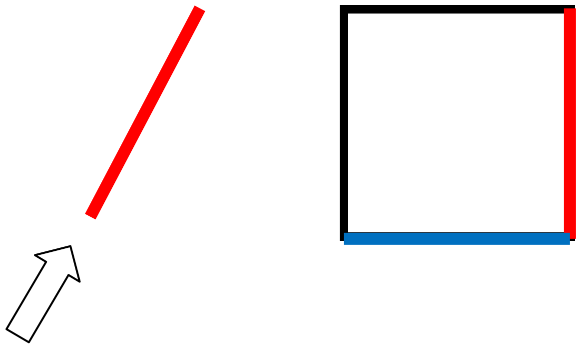
Visualizando um tabuleiro 8X8 reparamos que suas casas possuem posições simétricas em relação ao centro do tabuleiro, localizado no ponto vermelho na figura abaixo.



(Os lados pintados de vermelho são simétricos em relação ao centro do tabuleiro.)

O objetivo do jogo é completar primeiro com palitinhos um quadrado 1x1. Vale observar que se algum jogador puser o terceiro palito em um quadrado ele perde.

Exemplo:



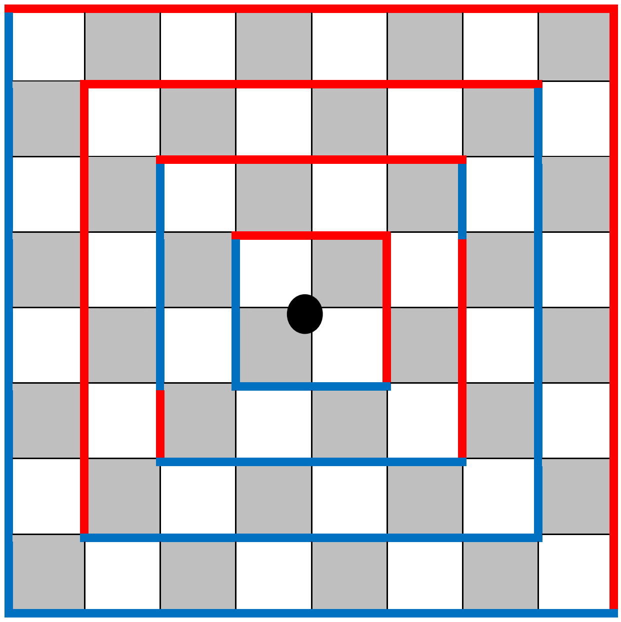
Se colocar o palito vermelho perde!

O vermelho perde, pois o azul vai poder fechar o quadrado.

Então vamos raciocinar. Nós não queremos de jeito nenhum colocar o terceiro palito em um quadrado. Logo, temos que forçar o nosso adversário a fazer isso. Pela lógica, se ele joga primeiro, ele tem que ser o primeiro a colocar o terceiro palito e nós temos que força-lo a isso.

Vamos fazer isso utilizando a simetria, pois se cada vez que ele fizer um movimento nós fizermos a mesma coisa, ele vai ficar sem opções antes da gente.

Portanto, quando ele for obrigado a pôr o terceiro palito no quadrado, nós vamos e fechamos esse quadrado ganhando o jogo. Vejamos um jogo onde quem começa é o palito vermelho:



Ambos puseram a mesma quantidade de palitos até agora. Logo é a vez do vermelho jogar. Ele é obrigado a pôr o terceiro palito e fatalmente perder o jogo. Podemos ver que o azul sempre posicionou seus palitos de forma simétrica ao vermelho em relação ao centro do tabuleiro.

Observando a simetria acima, o segundo jogador então sempre vencerá o jogo se puser seu palito simetricamente oposto, em relação ao centro, a cada jogada do primeiro jogador. Vale observar que o segundo jogador deve abandonar a estratégia assim que o seu adversário puser o terceiro palito, pois ele terá a oportunidade de completar o quadrado.

Problema parecido, e ainda mais interessante, caiu no mesmo ano e fase da questão anterior, só que agora no nível 2. Vejamos a seguir.

Problema 3 – (OBM 2002 – Nível 2 – 3ª Fase)

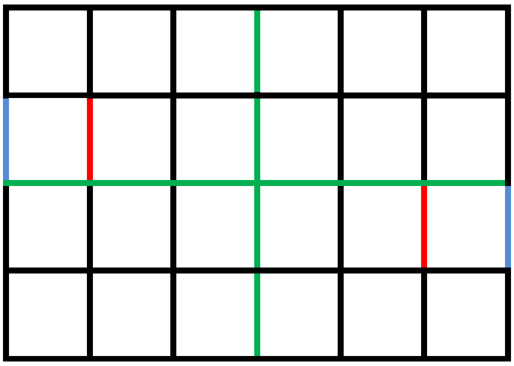
> São dados um tabuleiro quadriculado $m \times n$ e palitinhos do tamanho dos lados das casas. Dois jogadores jogam alternadamente e, em cada jogada, um dos jogadores coloca um palitinho sobre um lado de uma casa do tabuleiro, sendo proibido sobrepor palitinhos.
>
> Vence o jogador que conseguir completar primeiro um quadrado 1×1 de palitinhos. Supondo que nenhum jogador cometa erros, qual dos dois jogadores tem a estratégia vencedora, ou seja, consegue vencer independentemente de como jogue seu adversário?

Solução:

No problema anterior resolvemos um tabuleiro 8X8 a partir da simetria dos lados em relação ao centro. Percebemos então, que nesse novo problema devemos encontrar a simetria do tabuleiro m x n. Para isso, observaremos as paridades de m e n.

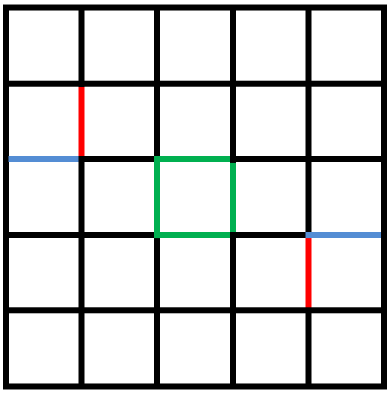
Se m e n são pares devemos ter a simetria dos lados das casas em relação ao centro.

par X par



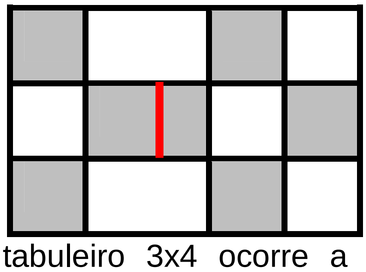
Se m e n são ambos impares devemos ter a simetria dos palitos em relação a casa central do tabuleiro, vejamos:

impar X impar



Nos casos em que as paridades de m e n são iguais, o segundo jogador terá uma estratégia vencedora jogando simetricamente em relação a cada jogada do primeiro jogador. Quando o primeiro jogador colocar o terceiro palito em uma das casas, o segundo jogador abandona a estratégia e completa a casa com o quarto palito e vence o jogo.

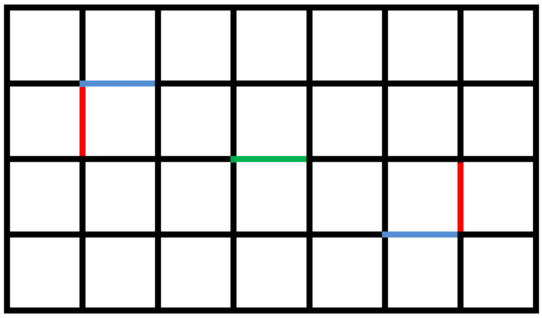
Agora, vamos analisar quando m e n têm paridades diferentes. Como exemplo, mostraremos o que acontece quando jogamos num tabuleiro 3X4.



A simetria nesse tabuleiro 3x4 ocorre a partir do lado central do tabuleiro, paralelo em relação a m=3 (impar). A estratégia agora cabe ao primeiro jogador, colocando seu primeiro palito neste lado (destacada de vermelho na figura acima) e em seguida imitar simetricamente as jogadas do segundo jogador, em relação ao lado central pintado de vermelho. Quando estiver todas as casas preenchidas com dois palitos e a vez do segundo jogar preenchendo uma casa com três palitos e aí o primeiro jogador vence a partida colocando o quarto palito na casa.

Neste caso de m e n terem paridades diferentes, a simetria ocorre no lado central paralelo a “m” ou “n” impar. Repare na figura:

par X impar



Em resumo, se m e n tem paridades iguais o segundo jogador tem a estratégia vencedora e se m e n tem paridades diferentes o primeiro jogador tem a estratégia vencedora.

4. ANÁLISE DE PROBLEMAS OLÍMPICOS SOBRE TABULEIROS

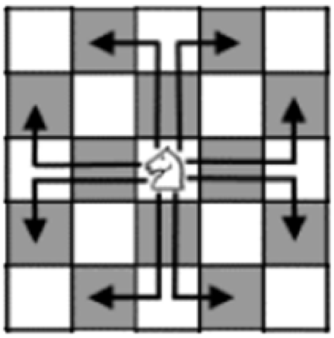
Neste capítulo, ordenamos as questões por dificuldade de acordo com a nossa percepção. Vamos apresentar nove questões com soluções da banca retiradas dos sítios da OBM e da OBMEP ou de autores que encontramos nas publicações da Revista Eureka. Apenas em um exercício não conseguimos encontrar nenhuma solução. Iremos comentar as soluções encontradas e faremos uma solução alternativa para servir como base de comparação. Por fim faremos algumas considerações e compararemos as soluções.

4.1 OBM 2012 – Nível 2 – 2ª Fase

Técnica utilizada: Movimentos e preenchimento de tabuleiro

João gosta de verificar propriedades do jogo de xadrez em um tabuleiro 5 × 5. Num de seus experimentos, João coloca um cavalo na casa inferior esquerda do tabuleiro 5 × 5. Qual o número mínimo de movimentos do cavalo para que ele possa chegar a qualquer casa do tabuleiro 5 × 5?

Observação: O cavalo movimenta-se em L, isto é, anda duas casas em uma direção e, logo em seguida, uma casa na direção perpendicular, como ilustrado na figura abaixo:



4.1.1 Solução da Banca (retirada de www.sbm.org.br em 25/01/2016)

1. [Resposta 04]

Na figura a seguir, os números representam o número mínimo de movimentos que o cavalo deve fazer para chegar na respectiva casa. Portanto, é possível verificar que o número mínimo de movimentos para se chegar em qualquer casa do tabuleiro é 04.

2	3	2	3	4
3	2	3	2	3
2	1	4	3	2
3	4	1	2	3
	3	2	3	2

Imagem retirada do site da SBM.

4.1.2 Solução do Autor

Vamos fazer as marcações das casas com números da seguinte forma:

O cavalo sai da casa inferior esquerda do tabuleiro, que chamaremos de posição 0. Vamos marcar as casas que podem receber o cavalo no primeiro movimento com o número 1. Vamos marcar com o número 2 as casas que recebem o cavalo no segundo movimento e assim sucessivamente. Vamos marcar somente as casas que ainda não foram marcadas.

z				
0				

	1			
		1		
0				

2		2		
	2		2	
2	1			2
		1	2	
0		2		2

2	3	2	3	
3	2	3	2	3
2	1		3	2
3		1	2	3
0	3	2	3	2

2	3	2	3	4
3	2	3	2	3
2	1	4	3	2
3	4	1	2	3
0	3	2	3	2

Podemos observar que qualquer casa do tabuleiro pode ser visitada com quatro movimentos.

4.1.3 Comparação entre as soluções

São bem parecidas. Foi utilizada a mesma estratégia.

Vale a pena observar que o tabuleiro utilizado na solução da banca tem as casas pintadas em preto e branco. Os movimentos impares ocupam as casas pretas e os movimentos pares ocupam as casas brancas. Neste exercício não é muito importante esse tipo de marcação, mas para outros exercícios é fundamental observar essas marcações do tabuleiro.

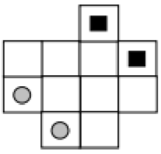
4.2 OBM 2006 – 3ª Fase

Técnica utilizada: Movimentos e preenchimento de tabuleiro

A partir do tabuleiro mostrado nas figuras abaixo e quatro peças, duas circulares cinzas e duas quadradas pretas, Esmeraldinho inventou o seguinte jogo:

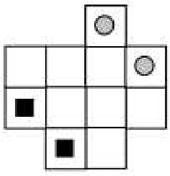
- Inicialmente, as peças são colocadas no tabuleiro como mostra a figura 1.

Figura 1

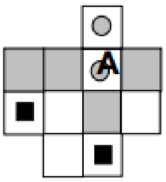


- A meta do jogo é, após um certo número de movimentos, trocar as peças de posição, chegando na situação mostrada na figura 2.

Figura 2



- Cada movimento consiste em mover uma das quatro peças uma ou mais casas acima, abaixo, à esquerda ou à direita; todavia, tal peça não pode "pular" nenhuma peça que, eventualmente, esteja no caminho, ou ocupar uma casa onde já existe uma peça. Por exemplo, a peça marcada com A só pode se mover para alguma das casas destacadas em cinza.

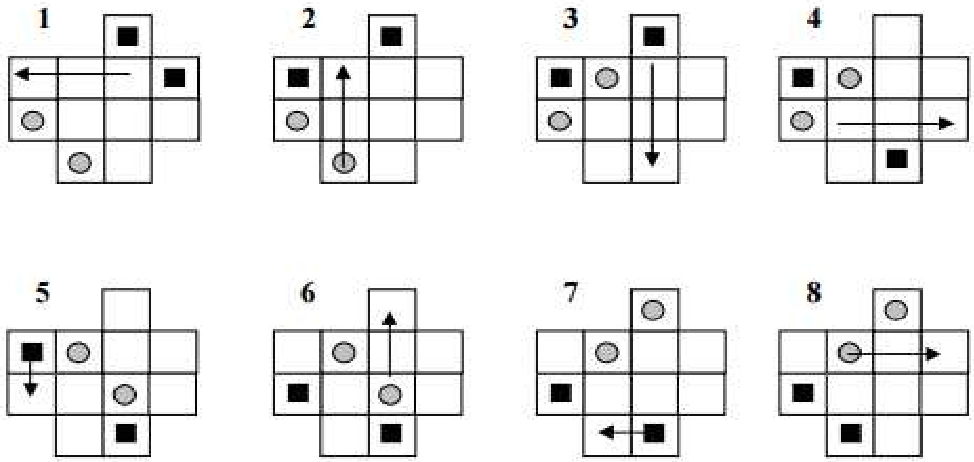


- Os movimentos dos círculos e dos quadrados são alternados. O jogo começa com um movimento de um dos quadrados. Determine a menor quantidade total de movimentos necessários para terminar o jogo. Mostre, passo-a-passo, através de desenhos, como movimentar as peças com esta quantidade de movimentos e prove que não é possível terminar o jogo com menos movimentos.

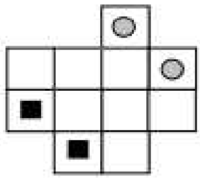
4.2.1 Solução de Leonardo Burato retirada da Revista Eureka

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 5: LEONARDO BURATO FOUREAUX (LINHARES - ES)

Com 8 movimentos.



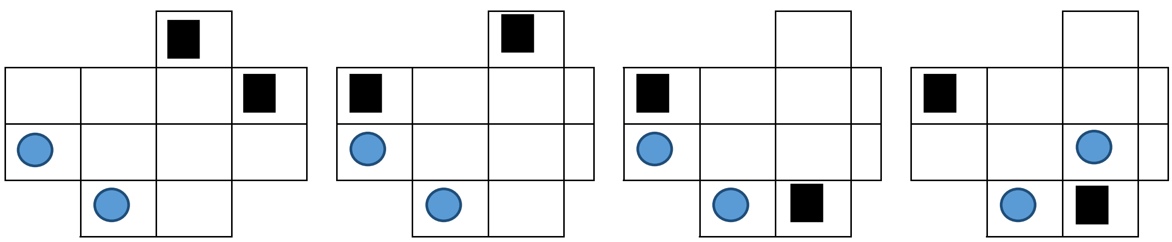
Resultado final

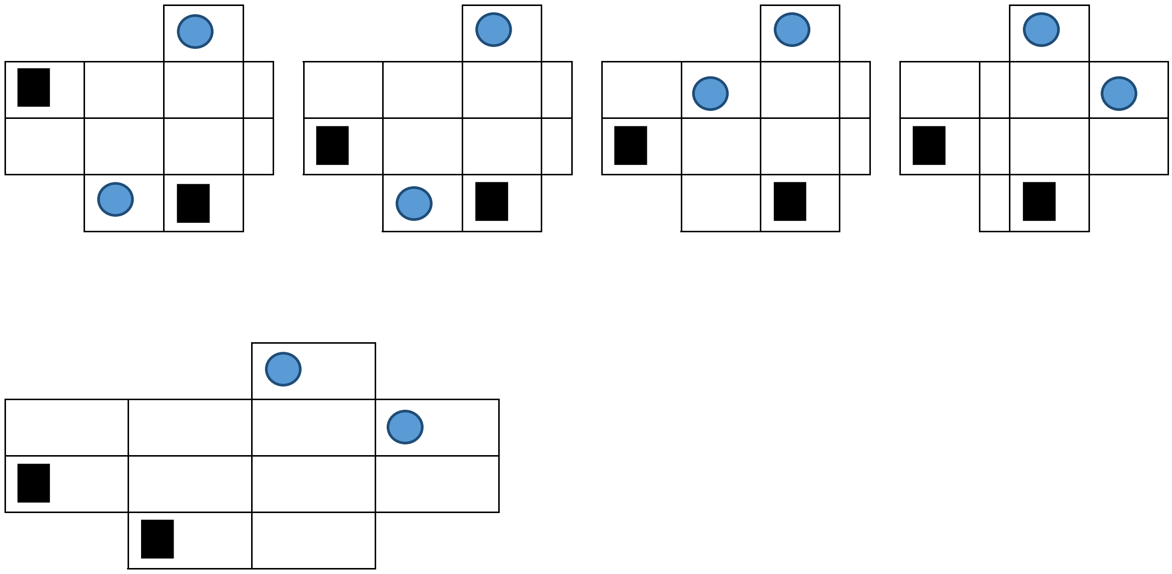


Não existe outra maneira de mover as peças com menos movimentos, pois o mínimo de cada peça para chegar ao lugar da outra é de 2 movimentos e sendo 4 peças, são no mínimo 4 · 2 = 8 movimentos.

4.2.2 Solução do Autor

Todas as peças, para ocupar o lugar das outras, precisam realizar dois movimentos, pois estão sempre em L. Como são quatro peças, é impossível fazer com menos de oito movimentos. Vamos mostrar agora que é possível fazer com 8 movimentos. Basta observarmos o exemplo abaixo:





Determinamos que oito é o mínimo de movimentos para que possamos trocar as peças de posição.

4.2.3 Comparação entre as soluções

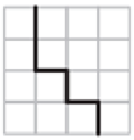
As soluções são idênticas. Vale destacar que o Leonardo faz os movimentos e depois fala que o mínimo é mesmo de 8. Na nossa solução fizemos na ordem inversa, o que não afeta o desenvolvimento da questão.

4.3 OBMEP 2015 – 2ª Fase – Nível 3

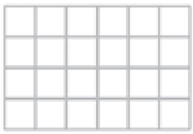
Técnicas utilizadas: Movimentos e Preenchimento de tabuleiro / Redução a um caso menor

Monica desenha caminhos poligonais em tabuleiros formados por um 1 cm de lado. Cada caminho começa e termina na borda do tabuleiro, contém somente esses dois pontos da borda e nunca passa duas vezes pelo mesmo ponto.

Exemplo, no tabuleiro 4x4 ao lado, ela desenhou um desses caminhos com 6cm de comprimento.



a) Trace um possível caminho desenhado por Monica no tabuleiro 4x6 abaixo, com 16 cm de comprimento.



b) Explique por que o comprimento, em centímetros, do maior caminho que Monica pode desenhar em um tabuleiro $m \times n$ é igual a

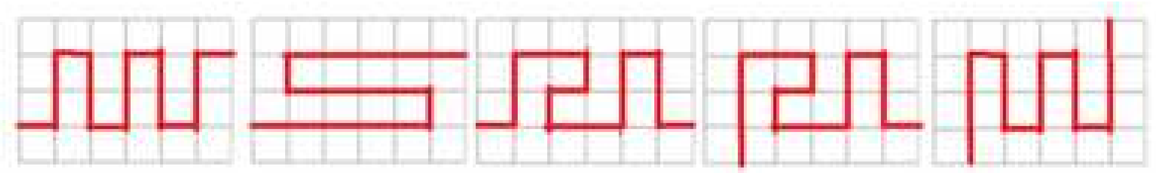
$$(m-1)\cdot(n-1)+1$$

c) Há vários tipos diferentes de tabuleiros retangulares com 100 quadradinhos. Monica formou tabuleiros de todos esses tipos e, em cada um, ela desenhou um caminho com o maior comprimento possível. Qual o comprimento do maior desses caminhos?

4.3.1 Solução da Banca (retirada do site www.obmep.org.br em 25/01/2016)

Item a)

Podemos traçar várias linhas poligonais diferentes de comprimento 16 cm, as quais dividem o tabuleiro em duas regiões. Abaixo estão alguns exemplos.



Item b)

O comprimento de qualquer linha poligonal que começa e termina na borda do tabuleiro sempre será igual à quantidade de vértices dos quadradinhos que estão no interior do tabuleiro pelos quais o caminho passa, mais um. Assim, a linha poligonal de maior comprimento deve ter os seus pontos inicial e final no contorno do tabuleiro e passar por todos os vértices dos quadradinhos que estão no seu interior. Sempre é possível fazer um caminho assim, por exemplo serpenteando o interior do tabuleiro como na primeira figura acima. O número de vértices dos quadradinhos que estão no interior do tabuleiro $m \times n$ é $(m-1)\cdot(n-1)$, pois, nos lados do contorno do tabuleiro temos $(m-1)$ e $(n-1)$ pontos. Portanto, o tamanho da linha poligonal de maior comprimento é $(m-1)\cdot(n-1)+1\ cm$.

Item c)

Dentre todos os tabuleiros possíveis com 100 casas, o comprimento da maior linha poligonal que Mônica traçou é 82 cm, pois para os comprimentos dos lados de tabuleiros retangulares com 100 quadradinhos temos as possibilidades listadas no quadro abaixo.

Comprimentos dos lados $m \times n$	Comprimento da maior poligonal $(m-1)(n-1)+1$
1×100	$0 \times 99 + 1 = 1$ cm
2×50	$1 \times 49 + 1 = 50$ cm
4×25	$3 \times 24 + 1 = 73$ cm
5×20	$4 \times 19 + 1 = 77$ cm
10×10	$9 \times 9 + 1 = 82$ cm

4.3.2 Solução do Autor

Vamos apenas falar sobre o item b), que tem a ver com o teor deste trabalho, pois o item a) pode ser feito por tentativas, de modo completamente intuitivo e o item c) tem uma resolução meramente aritmética, o que torna nossa solução idêntica à da banca, já exposta acima.

No item b), o exercício pede que mostremos que o maior caminho possível é $(m-1)\cdot(n-1)+1$. Neste trabalho vamos procurar utilizar em todas as questões que envolvem vértices de um tabuleiro $m \times n$, um tabuleiro $(m+1)\times(n+1)$, onde os vértices estariam "contidos" nas casas desse tabuleiro maior. Nossa justificativa é que um tabuleiro $m \times n$ tem $m+1$ vértices em todas as suas linhas e $n+1$ vértices em todas as suas colunas.

O	O	O	…….	O	O	O
O	O	O		O	O	O
O	O	O		O	O	O
.						.
.						.
.						.
.						.
.						.
O	O	O		O	O	O
O	O	O		O	O	O
O	O	O	…….	O	O	O

(O) é cada vértice do tabuleiro mxn

Obs: Vale ressaltar que duas casas marcadas no nosso tabuleiro representa um caminho de 1 cm, três casas um caminho de 2 cm, quatro casas um caminho de 3 cm e k casas um caminho de k-1 cm.

Vamos supor que existe um caminho de comprimento $(m-1)\cdot(n-1)+2$ ou maior. Isso significa que podemos marcar neste nosso tabuleiro $(m-1)\cdot(n-1)+3$.

Nosso tabuleiro tem (m+1)(n-1) casas. Somando as casas que temos na primeira e última linha e primeira e última coluna, que representam os vértices das bordas, temos o total de $2m+2n+2$.

O enunciado é claro ao dizer que só podemos utilizar dois vértices das bordas. Logo o total de casas que podemos pintar é (m+1)(n+1) + 2 – 2m – 2n.

Escrevendo $m+n+mn+1+2-2m-2n$ de forma reduzida temos $(m-1)\cdot(n-1)+2$.

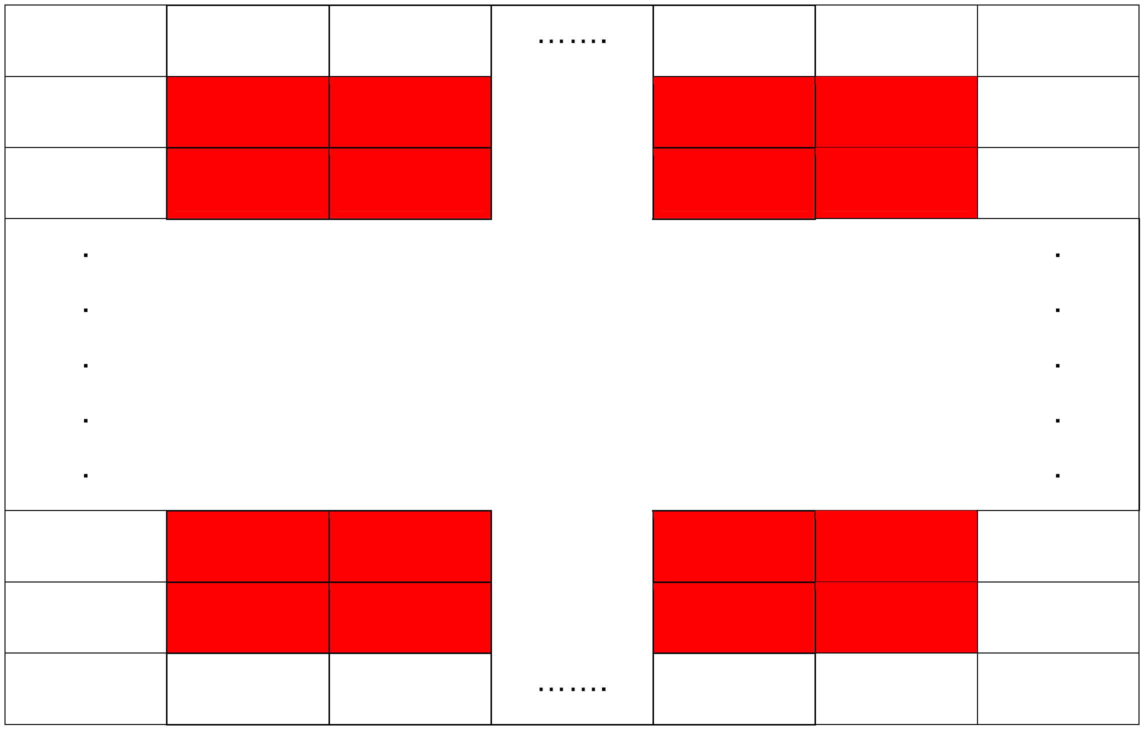
Isto mostra que nossa suposição leva a uma contradição. Portanto não a caminho de comprimento $(m-1)\cdot(n-1)+2$

Vamos mostrar agora que é possível construir um caminho pintando $(m-1)\cdot(n-1)+2$ casas.

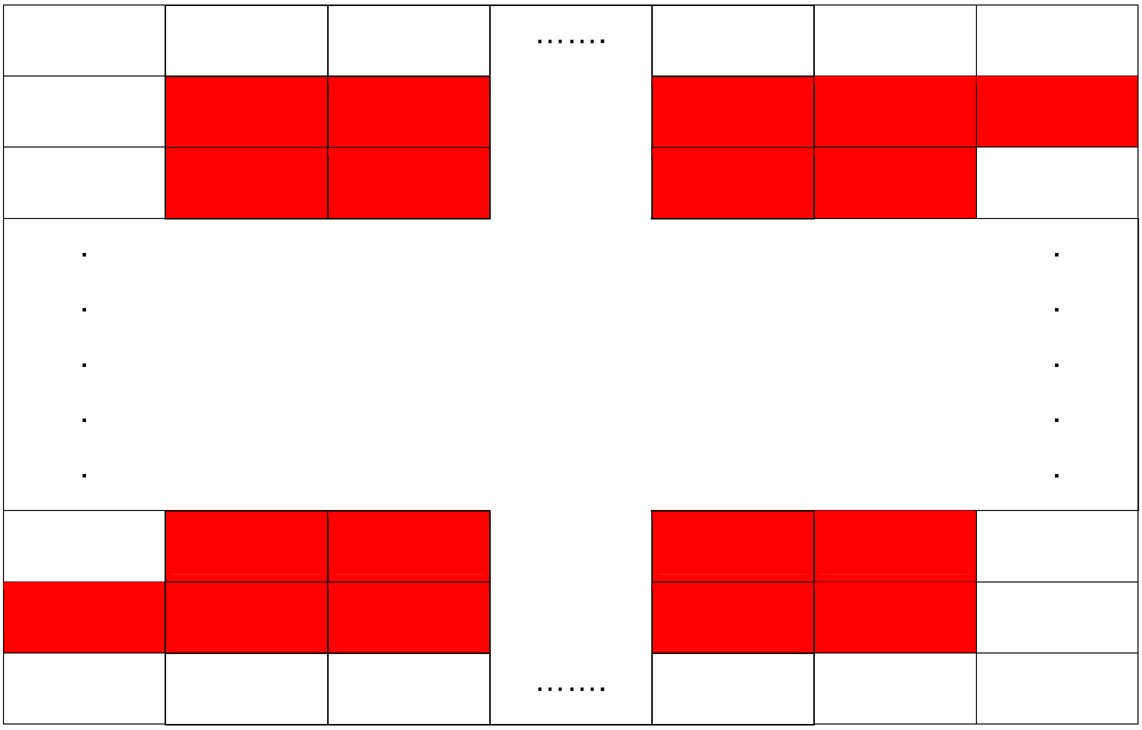
Vale ressaltar que as casas pintadas fazem uma bijeção com os caminhos pedidos no enunciado. Fazemos deste modo para a solução ficar mais visual e de melhor entendimento.

$(m-1)\cdot(n-1)$ é a quantidade das casas que não pertencem nem a primeira linha, primeira coluna, última linha e última coluna do nosso tabuleiro, ou seja, são as casas internas do tabuleiro.

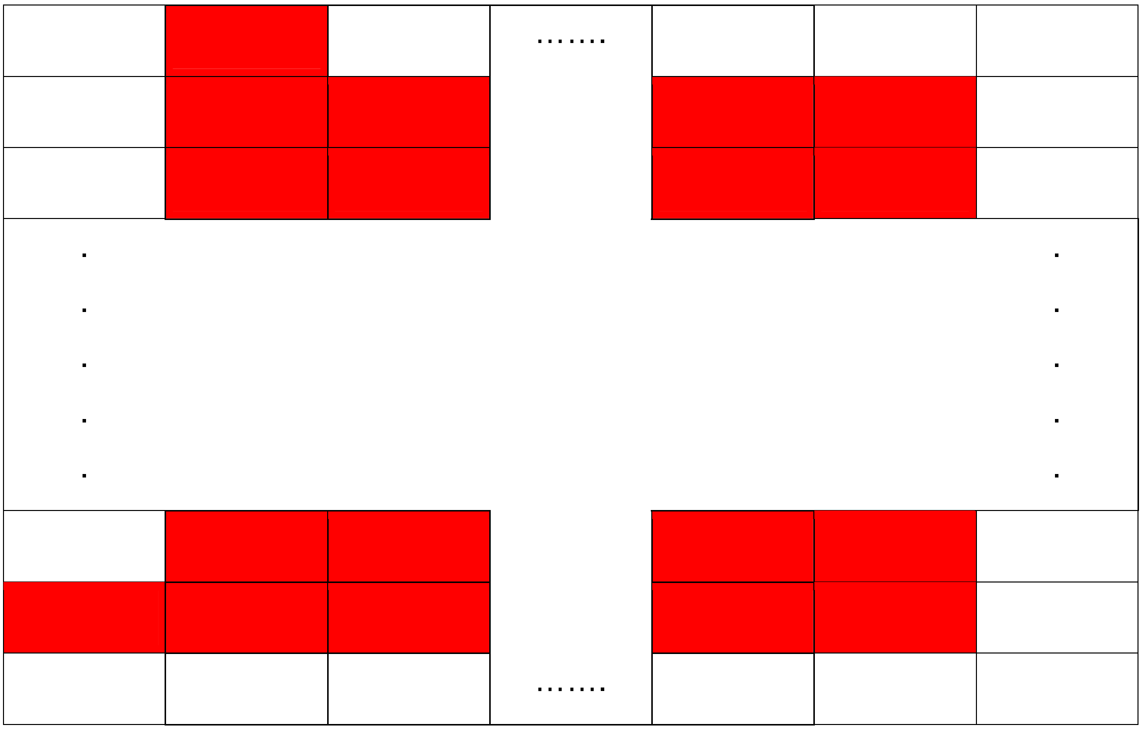
Vamos então pintar todas as casas internas considerando m impar (a paridade de n não vai alterar nossa solução, pois iremos pintar o nosso tabuleiro imaginando um caminho horizontal):



Agora que já preenchemos $(m-1)\cdot(n-1)$ casas, vamos pintar as duas da borda que nós é permitido pelo enunciado. Como m é ímpar, as casas que podemos preencher para o caminho existir são casas na primeira e na última coluna. Vide exemplo abaixo:



Se me fosse par, devemos pintar nas bordas uma casa na primeira coluna e outra casa na primeira ou na ultima linha.



Mostramos assim que é possível preencher o tabuleiro com $(m-1)\cdot(n-1)+2$ casas pintadas e que é impossível fazer com $(m-1)\cdot(n-1)+3$ casas. Logo o maior caminho é com $(m-1)\cdot(n-1)+2$ casas pintadas, o que é o mesmo que dizer que nosso caminho tem $(m-1)\cdot(n-1)+1cm$.

4.3.3 Comparação entre as soluções

O gabarito oficial destaca que devemos passar por todos os vértices do interior do tabuleiro e afirma que isto é sempre possível. Um leitor que tenha mais dificuldade na visualização desta figura em um tabuleiro $m\times n$ não vai compreender esta possibilidade. Em contrapartida, a estrutura do exercício mostra claramente o uso da técnica de redução a um caso menor quando no item a) ele pede para preenchermos um caminho de 16 cm no tabuleiro 4x6. Para explorar melhor esta técnica o ideal seria que o enunciado do item a) pedisse para o aluno preencher o maior caminho possível ou pedir a medida do maior caminho naquele tabuleiro para o aluno descobrir que o valor era 16 cm. Já na nossa solução procuramos utilizar marcações de casas para mostrar a impossibilidade de formar um caminho maior e a possibilidade de pintar o número de casas pedidas no enunciado, mostrando a relação entre o necessário e o suficiente.

4.4 OBM 2006 – Nível 1 – 1ª Fase

Técnicas utilizadas: Movimentos e preenchimento de um tabuleiro / Marcação de casas

Sara foi escrevendo nas casas de um tabuleiro 95 por 95 os múltiplos positivos de 4, em ordem crescente, conforme a figura a seguir.

4	8	12	16	20	...	376	380
760	756	752	748	744	...	388	384
764	→	→	→	→	...	→	→
←	←	←	←	←	...	←	←
⋮							
							U

O número que Sara escreveu onde se encontra a letra U é:

A) 35192

B) 35196

C) 36100

D) 36104

E) 36108

4.4.1 Solução da Banca (retirada do site www.obm.org.br em 25/01/2016)

O tabuleiro contém $95 \times 95 = 9025$ casas. Nas linhas ímpares, a sequência é crescente e nas linhas pares, é decrescente. Portanto, na 95ª linha, a última casa da direita apresenta o maior múltiplo de 4 no tabuleiro, ou seja, Sara escreveu na casa U o número $9025 \times 4 = 36100$.

4.4.2 Solução do Autor

Inicialmente, vamos perceber que o tabuleiro é formado da seguinte forma:

4x1	4x2	4x3	4x4	4x5	•••	4x94	4x95
4x190	4x189	4x188	4x187	4x186	•••	4x97	4x96
4x191	→	→	→	→	•••	→	→
←	←	←	←	←	•••	←	←
⋮							
							U

Vamos reescrevê-lo e marcar suas casas da seguinte forma:

1	2	3	4	5	•••	94	95
190	189	188	187	186	•••	97	96
191	→	→	→	→	•••	→	→
←	←	←	←	←	•••	←	←
⋮							
							U

Podemos claramente perceber que nas linhas impares da última coluna, ficam os múltiplos impares de 95. Logo, o valor de U é 95x95x4 = 36100. Portanto, letra C.

4.4.3 Comparação entre as soluções

A solução do Autor pode parecer mais complicada que a solução da Banca, porém pode ser muito útil para exercícios desse tipo. Vamos a uma adaptação deste exercício que ilustra esse ponto:

4.4.3.1 Exercício adaptado

Sara foi escrevendo nas casas de um tabuleiro 85 por 73 os múltiplos positivos de 4, em ordem crescente, conforme a figura a seguir.

4	8	12	16	20	•••	284	288	292
584	580	576	572	568	•••	304	300	296
588	→	→	→	→	•••	→	→	→
←	←	←	←	←	•••	←	←	←
⋮								
								24820

Sara colocou uma letra U na casa formada pela 18ª linha e 32ª coluna. Qual o valor de U?

Podemos resolver esse problema a partir de soluções com marcação ou soluções basicamente aritméticas. Entretanto uma solução aritmética seria bastante enfadonha.

Uma solução com marcação de tabuleiro:

Sabemos que as linhas que tem a primeira casa vermelha são ordenadas de modo crescente e às que tem a primeira casa branca são ordenadas de modo decrescente.

1	2	3	4	5	•••	71	72	73
146	145	144	143	142	•••	76	75	74
147	→	→	→	→	•••	→	→	→
←	←	←	←	←	•••	←	←	←
⋮								
								6205

Como a linha é par, sabemos que o primeiro elemento da linha é 4 x 18 x 73 = 5256 e que ela é decrescente. A cada casa que "pulamos", diminuímos o valor em 4. Como para chegar na 32ª casa desta linha devemos "pular" 31 casas, temos:

Logo, o 32º elemento é 5256 – 4 x 31 = 5132

Outra solução com marcação:

Sabemos que as linhas que tem a primeira casa vermelha são ordenadas de modo crescente e às que tem a primeira casa branca são ordenadas de modo decrescente.

A última casa da linha 17 é 4 x 17 x 73 = 4964. Logo, a uĺtima casa da 18ª linha é 4968. Para chegar na casa 32 da 18ª linha, devemos andar (73 – 32) casas, ou seja 41 casas.

Portanto, U = 4968 + 4 x 41 = 5132

4.5 OBM 2007 – 2ª Fase – Nível 2

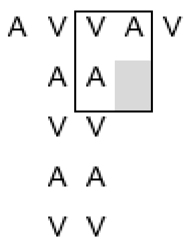
Técnica utilizada: Cobertura de tabuleiros

Um quadrado 4x4 é dividido em 16 quadrados unitários. Cada um dos 25 vértices desses quadrados deve ser colorido de vermelho ou azul. Ache o número de colorações diferentes tais que cada quadrado unitário possua exatamente dois vértices vermelhos.

4.5.1 Solução da Banca (retirada do site www.obm.org.br em 25/01/2016)

Vamos começar colorindo a primeira linha de vértices. Cada coloração dessa linha é uma sequência de letras "A" e "V", por exemplo, A V V A V. Observe que, uma vez colorida a primeira linha, se aparecerem duas letras consecutivas iguais, o restante dos vértices do tabuleiro já estão determinados.

De fato, ao aparecer dois V's consecutivos, os dois vértices imediatamente abaixo deles deverão ser coloridos com dois A's, os que estão mais abaixo deverão ter dois V's, e assim por diante. Isto completa a coloração dessas duas colunas. Dessa forma, cada coluna vizinha também estará determinada, pois em cada retângulo teremos três vértices previamente coloridos, o que obriga o quarto vértice a ter sua cor determinada. Então, para cada sequência de A's e V's na primeira linha que contém pelo menos duas letras iguais consecutivas, há exatamente uma maneira de colorir o tabuleiro. Como há $2^5 - 2 = 30$ de tais sequências, contamos 30 colorações possíveis.



Falta-nos analisar um segundo caso, em que não há duas letras consecutivas iguais na primeira linha. Há duas possibilidades de sequências: começando com A ou começando com V.

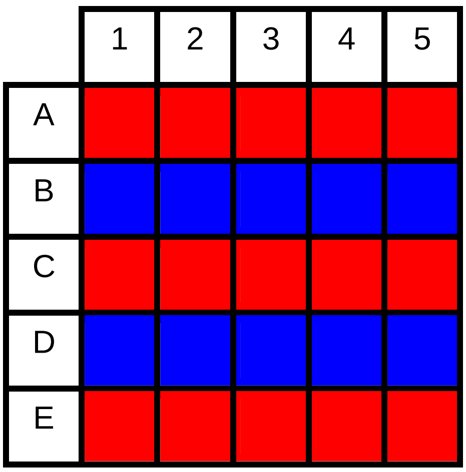
A	V	A	V	A
V				

Para cada uma dessas sequências, há duas maneiras de escolhermos a primeira letra da segunda linha. Uma vez escolhida esta letra, a segunda linha inteira também estará determinada. Para a primeira letra da terceira linha também há 2 possibilidades. Com este raciocínio, cada vez que escolhemos a primeira letra de uma linha, determinamos a coloração desta linha. Logo, como há duas maneiras de escolhermos a primeira letra de cada linha, há $2^5 = 32$ maneiras de colorirmos o tabuleiro, neste segundo caso. Logo, o total de colorações é igual a $30 + 32 = 62$.

Observação: Veja que, no caso geral, para um quadrado $n \times n$, o raciocínio é análogo. No primeiro caso, teremos $2^{n+1} - 2$ colorações; no segundo caso, mais 2^{n+1}. Logo, teremos $2 \cdot 2^{n+1} - 2 = 2^{n+2} - 2$ colorações.

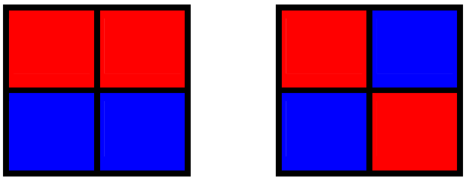
4.5.2 Solução do Autor:

Inicialmente, vamos tratar os 25 vértices como um tabuleiro 5x5 onde queremos que todo quadrado 2x2 formado por quatro casas tenha duas casas vermelhas e duas casas azuis conforme o exemplo abaixo:

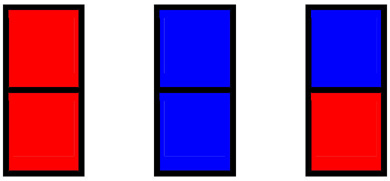


Para facilitar a compreensão da nossa solução, nomeamos as linhas com letras e as colunas com números. Por exemplo, chamaremos a casa da 3ª linha e 4ª coluna de C4.

Existem apenas dois tipos de quadrados 2×2 com quatro casas possíveis, considerando suas rotações:



Logo, vamos supor que esses quadrados sejam formados por dois dominós dentre os três abaixo, podendo usar o mesmo dominó duas vezes.



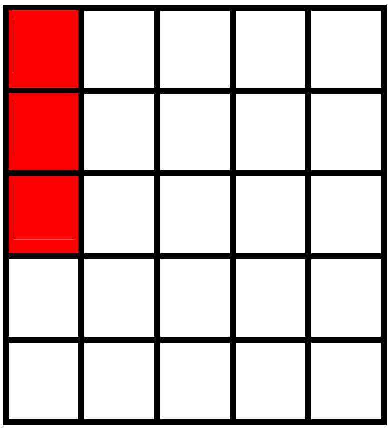
Peça A Peça B Peça C

Fixado isso, vamos iniciar a solução do nosso problema.

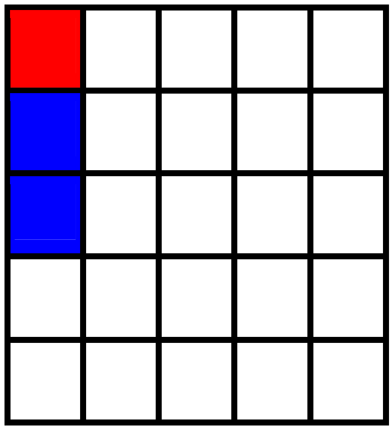
No tabuleiro 5x5 podemos encaixar 12 peças de dominós, ocupando assim 24 casas. Vamos dizer que a casa que sobra é a casa A1. Como podemos preencher este tabuleiro. Vamos convencionar para iniciar a solução que A1 é vermelha.

Agora vamos colocar os dominós um a um neste tabuleiro. Vamos escolher para encaixar nosso primeiro dominó a casas B1-C1. Poderia ser qualquer uma, mas esta escolha facilitará a visão do leitor.

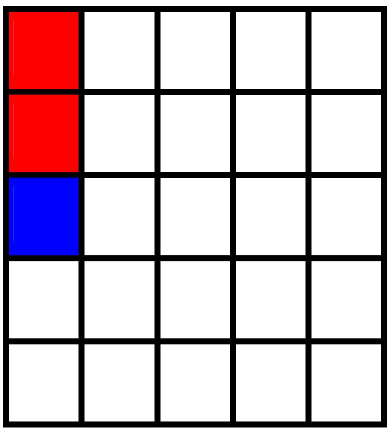
Podemos encaixar nosso primeiro dominó de quatro formas tendo em vista que a peça C pode girar. Vamos ver as quatro combinações possíveis:



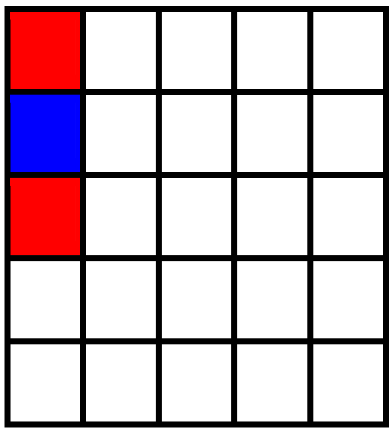
(I)



(II)

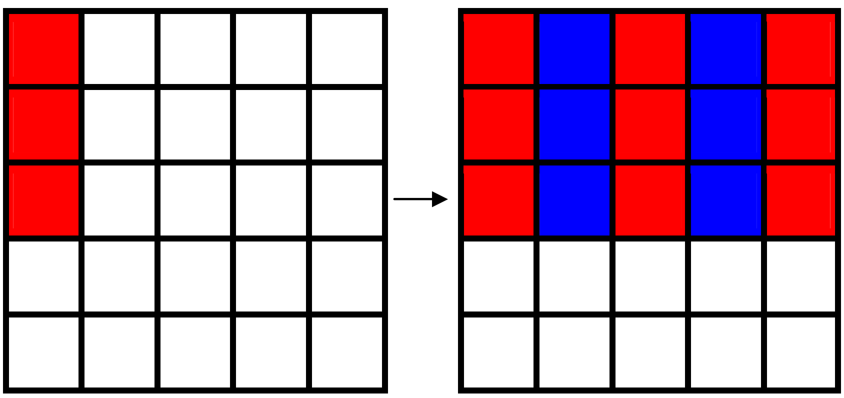


(III)

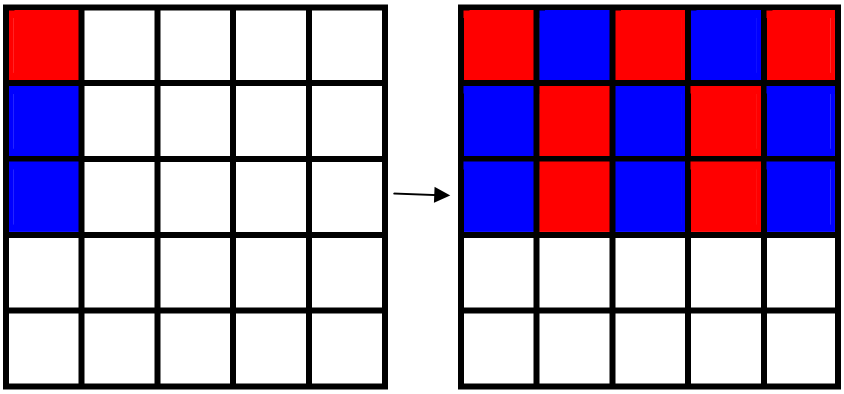


(IV)

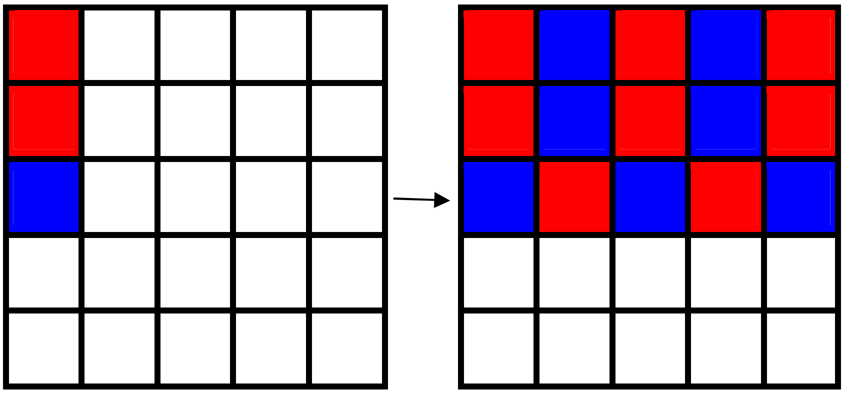
Observando os tabuleiros I, II e III, podemos facilmente concluir que estes encaixes obrigam que as três primeiras linhas tenham seus dominós já definidos para o encaixe. Estas figuras vão possuir as seguintes configurações:



(I) (V)



(II) (VI)

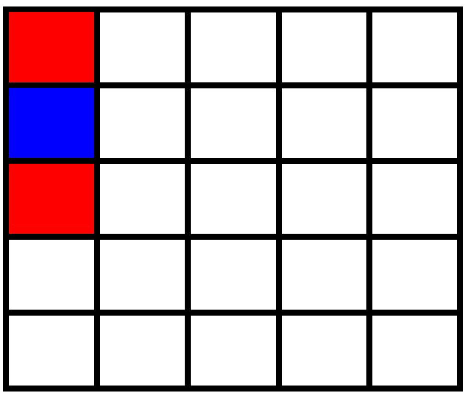


(III) (VII)

Vistas estas três formas, podemos perceber que os tabuleiros V, VI e VII permitem qualquer dominó nas casas D1-E1. Logo, assim como na casa B1-C1, temos quatro opções. Isto obriga as demais casas terem uma única opção. Logo temos 4 formas de completar os tabuleiros V, VI e VII. Portanto temos 3x4=12 opções para colorir o tabuleiro.

Vamos agora estudar as possibilidades de preencher o tabuleiro IV.

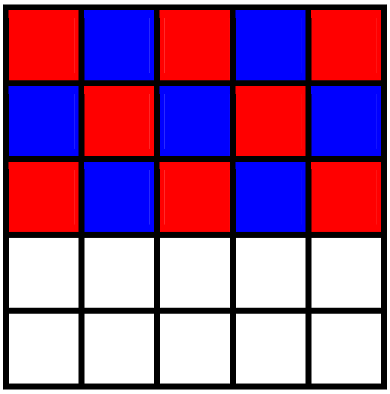
O tabuleiro IV inicialmente tem esta coloração:



Com essa coloração, as casas A2-B2 podem receber peças do tipo C colocadas em qualquer disposição. Ou seja, temos duas opções para encaixar o dominó neste espaço. O mesmo acontece com A3-B3, A4-B4 e A5-B5. Fazendo qualquer coloração nessas duas primeiras linhas, veremos que a terceira linha fica apenas com uma opção. Portanto temos 2x2x2x2=16 formas distintas de preencher as três primeiras linhas do nosso tabuleiro.

Porém, em quinze delas, a quarta e a quinta linha ficam somente com uma opção de coloração também,

Apenas quando as três primeiras linhas do tabuleiro apresentam o formato abaixo que teremos variações:



Podemos perceber que as casas D1-E1 podem receber qualquer das quatro opções de dominós. Porém, quando escolhemos qual dominó por em D1-E1, todos os outros que posso encaixar ja estão definidos. Logo neste caso temos 4 combinações possíveis.

O total de configurações é 12 + 15 + 4 = 31

Vamos supor que a casa A1 agora é azul e não vermelha. Fazendo o processo de forma análoga também chegamos a 31 configurações distintas, apenas invertendo as cores.

Portanto temos 31+31=62 colorações diferentes de modo que cada quadrado unitário do tabuleiro 4x4 tenha exatamente dois vértices vermelhos.

4.5.3 Comparação entre as soluções

A solução da banca busca marcar uma linha para fixar a solução do problema enquanto o autor prefere buscar o preenchimento do tabuleiro de forma, digamos, menos sofisticada. Para o leitor, a solução da banca tem uma leitura mais difícil, uma vez que busca uma generalização. Inclusive ao fim da solução, a banca observa a forma geral do preenchimento de um tabuleiro nxn. Como o exercício não pedia isso, acreditamos que a solução do autor seja de melhor entendimento, além de ter maior apelo visual.

4.6 OBM 2007 – Nível 2 – 3ª Fase

Técnicas utilizadas: Simetria em jogos / Redução a um caso menor

Quadradinhos iguais estão arrumados formando um tabuleiro n × n. Ludmilson e Ednalva jogam o seguinte estranho jogo. Cada jogada de Ludmilson consiste em retirar 4 quadradinhos que formem um quadrado 2 × 2. Cada jogada de Ednalva consiste em retirar apenas 1 quadradinho. Ludmilson e Ednalva jogam alternadamente, sendo Ludmilson o primeiro a jogar. Quando Ludmilson não puder fazer sua jogada, então Ednalva fica com todas as pecas restantes do tabuleiro. Ganha o jogo aquele que possuir mais quadradinhos no final. Diga se e possível que Ednalva ganhe o jogo, não importando como Ludmilson jogue, em cada um dos seguintes casos:

a) n = 10.

b) Caso geral (n qualquer).

4.6.1 Solução da Banca

BASEADA NA SOLUÇÃO DE JOÃO MENDES VASCONCELOS (FORTALEZA – CE) – Retirada da Revista EUREKA! nº 28 paginas 47, 48 e 49.

a) Se *n* é par, dividimos o tabuleiro em $\frac{n^2}{4}$ quadrados 2×2. Em cada jogada, Ludmilson retira um quadrado 2×2 desses em que dividimos o tabuleiro. Nas primeiras $\left\lfloor \frac{n^2}{8} \right\rfloor$ jogadas, Ednalva retirou quadrados pertencentes a, no máximo, $\left\lfloor \frac{n^2}{8} \right\rfloor$ desses quadrados 2×2. Assim, se $k-1<\frac{n^2}{8}$, no momento de Ludmilson fazer a *k*-ésima jogada, foram tocados no máximo $k-1+\left\lfloor \frac{n^2}{8} \right\rfloor<\frac{n^2}{8}+\frac{n^2}{8}=\frac{n^2}{4}$ desses quadrados 2×2, e portanto sobra algum desses quadrados para Ludmilson retirar. Assim, Ludmilson consegue retirar pelo menos $\left\lceil \frac{n^2}{8} \right\rceil$ desses quadrados, que contêm $4\left\lceil \frac{n^2}{8} \right\rceil \geq \frac{n^2}{2}$ quadrados 1×1, ficando com pelo menos a metade dos quadradinhos do tabuleiro.

Se n = 10, $4\left\lceil \frac{n^2}{8} \right\rceil = 4 \cdot 13 = 52 > \frac{10^2}{2}$, e Ludmilson de fato ganha o jogo.

Obs.: $\lceil x \rceil$ denota o menor inteiro que é maior ou igual a x

b) Para fazermos o caso geral, dividiremos em casos:

Primeiro caso: *n* é par:

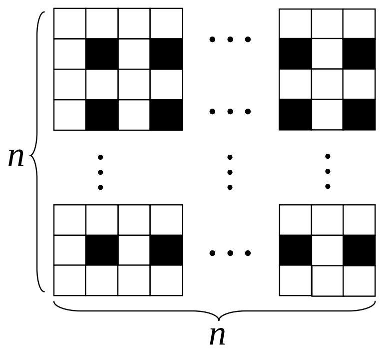
Como vimos acima, Ludmilson consegue retirar pelo menos metade dos quadradinhos do tabuleiro, e logo Ednalva não consegue ganhar o jogo. Na verdade Ludmilson ganha se n for da forma $4k + 2$ e o jogo empata se n for da forma $4k$.

Segundo caso: *n* é ímpar.

Nós faremos uma pintura como segue:

A cada duas linhas, uma ficará em branco e outra será pintada em um quadradinho sim e um não.

Veja a figura para melhor compreensão:



Como n é ímpar, as linhas pintadas terão um quadradinho pintado a menos que os não pintados. Pelo mesmo motivo, o número de linhas pintadas será uma unidade menor que o de não pintadas. Isso garante que o número de casas pintadas seja mínimo e nós possamos ter ao mesmo tempo todos os quadrados 2×2 com uma casa pintada. Agora vamos contar o número de quadrados pintados:

Em cada linha pintada, nós temos $\frac{n-1}{2}$ quadrados pintados.

Como são $\frac{n-1}{2}$ linhas pintadas, o total de quadradinhos pintados será $\frac{(n-1)^2}{4}$.

A estratégia de Ednalva se resume a retirar, a cada jogada, um quadradinho preto até que não reste mais nenhum. Percebemos também que a cada jogada de Ludmilson ele também retira um quadradinho preto obrigatoriamente, já que todos os quadrados 2×2 do tabuleiro estão pintados em uma casa.

Desse modo, após $\left\lceil \frac{(n-1)^2}{8} \right\rceil$ jogadas de Ludmilson, e $\left\lfloor \frac{(n-1)^2}{8} \right\rfloor$ jogadas de Ednalva, são retiradas $\left\lceil \frac{(n-1)^2}{8} \right\rceil + \left\lfloor \frac{(n-1)^2}{8} \right\rfloor = \frac{(n-1)^2}{4}$ casas pintadas, ou seja, todas as casas pintadas, e Ludmilson não consegue mais jogar. Como, ao final, Ludmilson tem $4\left\lceil \frac{(n-1)^2}{8} \right\rceil \leq 4\left(\frac{(n-1)^2}{8} + \frac{1}{2} \right) = \frac{(n-1)^2}{2} + 2 < \frac{n^2}{2}$ quadradinhos (pois $n \geq 3$ nesse caso), Ednalva vence sempre nesse caso.

4.6.2 Solução do Autor

Vamos pensar inicialmente no objetivo do jogo: Ludmilson quer retirar o maior número possível de peças na partida enquanto Ednalva quer impossibilitar Ludmilson de retirar peças, uma vez que as peças que sobrarem ficam para ela.

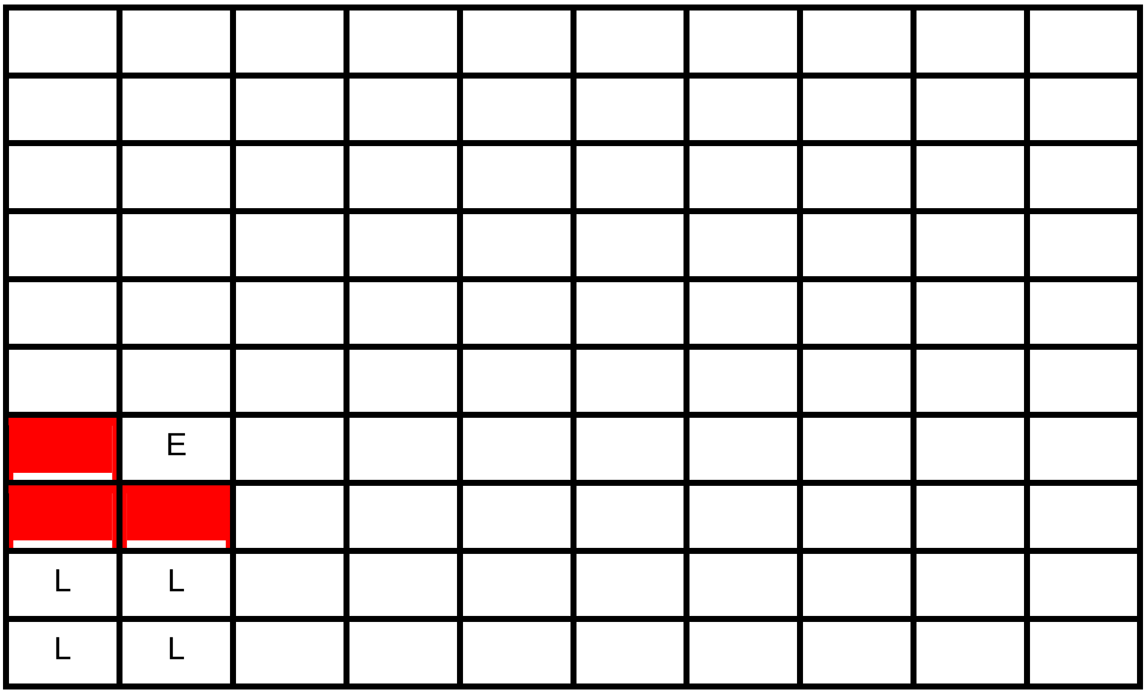
Ludimilson retira a cada jogada dele um quadrado 2×2 enquanto Ednalva retira uma única peça. Logo Ludmilson vai jogar de modo que o tetraminó que ele retire não deixe peças mortas e Ednalva vai jogar para eliminar tetraminós.

Vamos marcar de L as jogadas de Ludmilson e de E as jogadas de Ednalva. Inicialmente vejamos exemplos de jogadas ruins, que eles não devem fazer.

		E							
L	L								
L	L								

Esta jogada de Ludmilson é ruim pois ele esta deixando duas peças as quais ele não vai poder retirar. A jogada de Ednalva também é ruim pois ela não impossibilita Ludmilson de retirar nenhuma peça.

Vamos olhar agora uma jogada aparentemente mais inteligente, onde ambos realizaram o melhor movimento:



Ludmilson retira seu quadrado de modo que não deixa nenhuma peça “morta” para Ednalva enquanto Ednalva impossibilita Ludmilson de retirar três peças (marcadas em vermelho). Ou seja, conseguimos perceber neste tabuleiro que a cada quadrado que Ludmilson tira, Ednalva consegue retirar uma peça e “matar” três, o que equivale a ambos retirarem a mesma quantidade por jogada.

Como nosso tabuleiro é 10x10, isto significa que temos 25 quadrados 2×2 neste tabuleiro. Como é Ludmilson que começa, ele consegue retirar pelo menos 13 quadrados 2×2 , o que significa que ele retira 52 peças. Logo Ednalva nunca vai vencer Ludmilson neste tabuleiro.

b) Generalizando a situação, podemos ver que sempre que tivermos o tabuleiro com n par Ednalva não vai vencer pois ambos sempre retiram a mesma quantidade de peças por jogada (Repetindo, por mais que Ednalva retire apenas uma peça ela consegue matar 3, conforme visto no item a)).

Para n impar a situação é um pouco diferente, pois não conseguimos fazer uma cobertura com quadrados 2×2 .

Quadrados 2×2 só cobrem tabuleiros onde a ordem das linhas e colunas é par. Quando um dos dois é ímpar sempre irá sobrar a quantidade de casa equivalente a uma linha ou coluna vazia. Isso faz com que Ednalva já tenha uma vantagem de n quadradinhos Sobre Ludmilson. Como Ludmilson só consegue retirar quatro peças a mais que Ednalva, se n for impar maior que quatro, Ednalva já ganhou o jogo. Para n=3 o resultado é óbvio pois um tabuleiro 3x3 só possui um tetraminó quadrado. Assim sobram 5 peças e Ednalva vence. Portanto, Ednalva vence sempre que o tabuleiro for de ordem ímpar.

4.6.3 Comparação entre as soluções

No item a) temos a famosa “pegadinha”. O aluno que ler este enunciado fica tendenciado a provar que é possível que Ednalva vença. Nós aqui também ficamos inclinados a acreditar nisso, o que fez com que nossa solução demorasse um pouco mais também. A solução da Eureka generaliza o item a) para n par, enquanto nós nos prendemos a n=10 para generalizar apenas no item b). Neste item, a solução da Eureka cria toda uma demonstração para provar que Ednalva vence para n ímpar. Deixemos claro que o enunciado pede para dizer se é possível. Logo mostrar as possibilidades através de figuras e deduções é válido, como nós fizemos.

4.7 OBM 2010 – 2ª Fase – Nível 3

Técnica utilizada: Cobertura de tabuleiros

Considere um tabuleiro 2015 × 37, pintado como um tabuleiro de xadrez. Cada linha e coluna tem um botão que inverte a cor de cada casinha da linha ou coluna correspondente, num total de 2015 + 37 = 2052 botões. Quantas colorações diferentes do tabuleiro podem ser obtidas?

4.7.1 Solução da banca (retirada do site www.obm.org.br em 25/01/2016)

A resposta é 2^{2051}. Primeiro, note que o que determina a cor final da casinha é a paridade da soma da quantidade de vezes que os botões da sua linha ou da sua coluna são apertados. Com isso, concluímos que:

- apertar duas vezes o mesmo botão é o mesmo que não apertar o botão;
- a ordem em que os botões são apertados não importa.

Com isso, podemos escolher apertar ou não cada botão, dando duas escolhas para cada, em um total de 2^{2052} combinações dos botões.

Sejam L e C os conjuntos dos botões apertados nas linhas e nas colunas, respectivamente. Denote por $\overline{L}$ e $\overline{C}$ os conjuntos dos botões **não** apertados nas linhas e nas colunas, respectivamente. Portanto:

- as casas nas interseções das linhas e colunas correspondentes a L e C mudam de estado duas vezes, ou seja, se mantêm iguais;
- as casas nas interseções das linhas e colunas correspondentes a $\overline{L}$ e C mudam de estado uma vez, ou seja, mudam de cor;
- as casas nas interseções das linhas e colunas correspondentes a L e $\overline{C}$ mudam de estado uma vez, ou seja, mudam de cor;
- as casas nas interseções das linhas e colunas correspondentes a $\overline{L}$ e $\overline{C}$ não mudam de cor.

Em resumo: (L, C) e $(\overline{L}, \overline{C})$ não mudam e $(\overline{L}, C)$ e $(L, \overline{C})$ mudam.

Note que se fizermos outra combinação de botões, correspondentes a $\overline{L}$ e $\overline{C}$ (ou seja, apertamos os botões que não apertamos na outra combinação e vice-versa), obtemos a mesma configuração. Reciprocamente, se temos uma configuração, podemos identificar as casas que não mudaram, e com isso, encontrar (L, C) ou $(\overline{L}, \overline{C})$. Mas esses pares são correspondentes entre si, então cada tabuleiro é gerado por exatamente dois pares.

Então cada configuração pode ser obtida de duas maneiras e logo há $\frac{2^{2052}}{2} = 2^{2051}$ configurações.

4.7.2 Solução do autor

Inicialmente vamos pensar na situação. Cada linha e cada coluna tem duas configurações distintas apenas, considerando que nenhum botão foi apertado. Logo, apertar o botão duas vezes é o mesmo que não apertar. Então podemos convencionar que cada botão pode ser apertado uma vez ou não pode ser apertado.

Agora vamos considerar cada configuração uma sequencia de apertos no botão. Vamos observar um tabuleiro 3x4:

	C1	C2	C3	C4
L1				
L2				
L3				

Um exemplo de sequencia seria L1, C2, C4, L3

Outro exemplo seria L3, C1

Ou seja, podemos montar sequencias de um a sete elementos, que é a totalidade dos botões que temos.

Logo, considerando a totalidade das sequencias que existem e incluindo a configuração inicial, podemos afirmar que a quantidade de configurações possíveis é a soma da sétima linha do Triangulo de Pascal, ou seja, 2^7 configurações.

Porém, vamos analisar as sequencias (L1, C2, C4, L3) e (L2, C1, C3). Estas sequencias apresentam a mesma configuração, pois todas as casas que trocam de cor na sequencia A também trocam de cor na sequencia B. Então temos uma relação neste tabuleiro onde cada configuração pode ser representada por duas sequencias distintas.

Por outro lado, dadas duas sequencias cuja intersecção é não vazia ou é vazia, mas na união das duas sequencias não constam todos os botões, nunca teremos uma configuração igual, pois as casas que trocam e cor em uma sequencia são diferentes das casas que trocam de cor na outra sequencia. Só teremos uma igualdade de configurações quando todas as casas forem apertadas na mesma paridade em ambas as sequencias, ou seja, se uma casa troca de cor um número ímpar de vezes em uma sequencia, na outra tem que ser apertada um número ímpar de vezes. Se isso não acontecer com todas as casas, as configurações serão diferentes. E isso só vai acontecer quando uma sequencia tem todos os elementos que não tem na outra.

Logo, devemos pegar o nosso resultado e dividir por 2. Então a resposta seria $\frac{2^7}{2} = 2^6$.

Podemos estender este pensamento para qualquer tabuleiro de qualquer tamanho que a resposta será 2^{n-1}, onde n é o número de botões. Logo o tabuleiro do enunciado possui 2^{2051} configurações distintas.

4.7.3 Comparação entre as soluções

As soluções utilizam a mesma lógica. A diferença é que a banca já faz o processo no tabuleiro 2015x37 enquanto o autor utiliza o recurso de reduzir a um caso menor, visando facilitar seu entendimento e ajudar a compreensão de quem lê.

4.8 IMO – 1999

Técnica utilizada: Cobertura de tabuleiros

Considere um tabuleiro quadrado $n \times n$, onde n é um inteiro positivo par fixo. O tabuleiro está dividido em n^2 quadrados unitários. Dizemos que dois quadrados distintos do tabuleiro são *adjacentes* se eles têm um lado comum. Marcam-se N quadrados unitários do tabuleiro de tal forma que qualquer quadrado (marcado ou não) é adjacente a pelo menos um quadrado marcado.

Determine o menor valor possível para N.

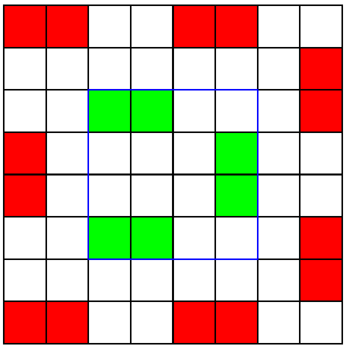
4.8.1 Solução da Banca

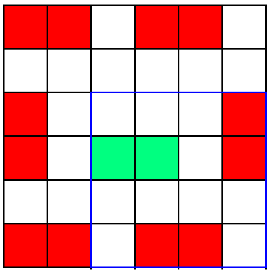
Adaptação da solução de Humberto Silva Naves (Goiânia - GO):

(Revista Eureka nº6)

Vamos criar um algorítmo para preencher estes quadrados $n \times n$.

Quando pintarmos um dos quadradinhos temos que pintar pelo menos outro quadradinho adjacente.





Procedemos da seguinte maneira:

Pintamos os dois quadradinhos do canto superior esquerdo (1,1) e (1,2). "Caminhamos" no sentido horário no bordo do quadrado, de modo que pintamos 2 quadradinhos e pulamos outros 2. Isso é possível pois o número de quadradinhos no bordo é múltiplo de quatro. Agora formamos outro quadrado menor de canto superior (3,3) e continuamos o mesmo procedimento para este quadrado,que também possui lado de medida par e assim sucessivamente.

O número de quadrados pintados vai ser:

$$N(n \times n) = 2n - 2 + N\big((n-4) \times (n-4)\big)$$

Este algorítmo determina o menor *N*, pois cada quadradinho só possui um, e somente um "vizinho" pintado.

Essa construção mostra por indução que é possível marcar $\frac{n^2}{4} + \frac{n}{2}$ quadrados e obter uma solução.

Para provar que esse número de quadrados marcados é o menor possível associamos a cada quadrado coordenadas (x, y) com $1 \leq x \leq n$ e $1 \leq y \leq n$. Se considerarmos os quadrados $\{(x, y) \mid (x$ e y são ímpares e $x + y \equiv 2\ (mod\ 4))$ ou $(x$ é ímpar, y é par e $x + y \equiv n + 1\ (mod\ 4))\}$ verificamos que nenhuma peça é adjacente a mais de um dos quadrados deste conjunto. Como este conjunto tem $\frac{n^2}{4} + \frac{n}{2}$ elementos, necessitamos no mínimo esta quantidade de peças.

4.8.2 Solução do Autor

A primeira parte da solução iremos manter aqui da mesma forma.

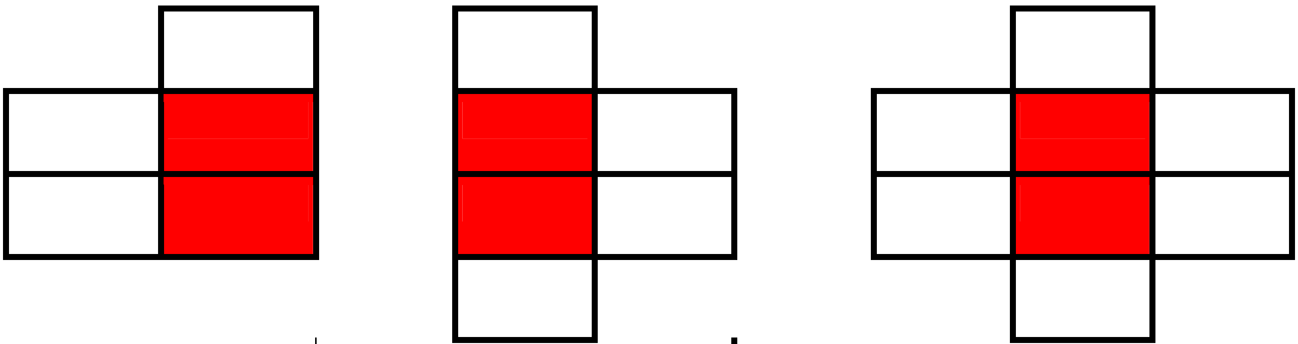
A prova da segunda parte, ou seja, provar que não é possível utilizar menos quadrados marcados, faremos de modo diferente.

Inicialmente vamos convencionar que quadrados marcados são vermelhos e quadrados não marcados são brancos.

Vimos que é possível completar o problema proposto com todos os quadrados brancos tocando apenas um lado de um único quadrado vermelho. Logo, mesmo se tirarmos um quadrado vermelho, a solução ótima terá todos os quadrados brancos tocando apenas um quadrado vermelho.

Além disso, sabemos que os quadrados vermelhos sempre formarão dominós, pois eles também tem que ter pelo menos uma fronteira comum.

Com estas informações, podemos afirmar que todo tabuleiro $n \times n$ pode ser marcado com três tipos de poliminós:



Pentaminó (aparecem quando colocamos um dominó no canto do tabuleiro)	Hexaminó (aparecem quando colocamos um dominó na borda do tabuleiro)	Octaminó (aparecem quando colocamos um dominó no tabuleiro sem encostar na borda)

Nenhum outro poliminó pode aparecer, pois consideramos que em cada dominó vermelho que colocamos no tabuleiro, todas as casas brancas que fazem fronteira com o dominó pertencem ao nosso poliminó.

Segundo a primeira parte da prova, sabemos que é possível preencher o tabuleiro em $n^2/4 + n/2$. Se x for o número de pentaminós, y o número de hexaminós e z o número de octaminós, logo são verdadeiras as equações?

- $x + y + z = n^2/8 + n/4$ (quantidade de dominós vermelhos)
- $5x + 6y + 8z = n^2$

- $3x + 4y + 6z = 3n^2/4 – n/2$ (quantidade de peças brancas)

Queremos provar que se deixarmos de pintar K quadradinhos vermelhos não conseguimos resolver o problema. Isso é o mesmo que afirmar que o sistema de equações abaixo só é possível se K=0. Vamos considerar k par pois já conseguimos deduzir que um quadrado vermelho sempre está colado com outro, formando assim um dominó.

- $x + y + z = n^2/8 + n/4 – K$ (I)
- $5x + 6y + 8z = n^2$ (II)
- $3x + 4y + 6z = 3n^2/4 – n/2 + K$ (III)

Onde n é um número par fixo.

Substituindo a equação II em III temos:

$$y = n – 2k – 3x/2$$

Substituindo y em II teremos:

$$z = n^2/8 – 3n/4 + x/2 + 3K/2$$

Vamos agora substituir y e z em I:

$$x + n – 2K – 3x/2 + n^2/8 -3n/4 + x/2 + 3K/2 = n^2/8 + n/4 – K$$

Simplificando teremos

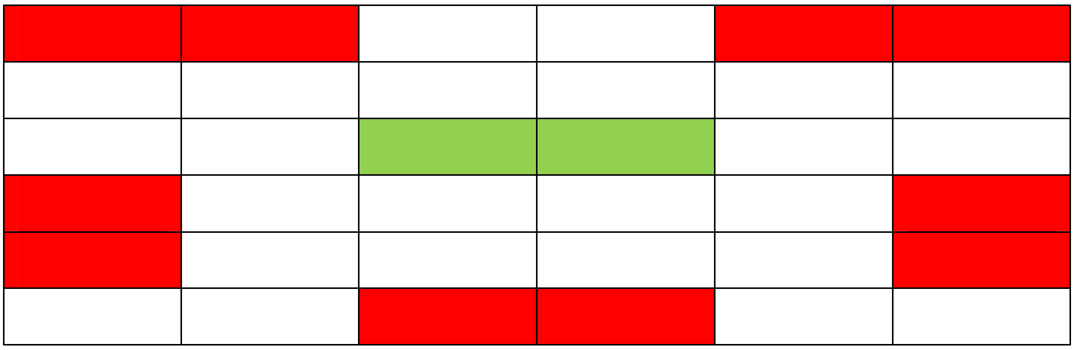
$$-2K +3K/2 + K = 0$$

$$K = 0$$

O que completa a prova.

4.8.3 Comparação entre as soluções

Inicialmente, vamos observar na solução da revista Eureka um erro no tabuleiro 6x6, onde a marcação foi feita errada. O tabuleiro correto é



Este erro não influi no desenvolvimento da solução, logo podemos deduzir que é apenas um erro gráfico, sem relevância no desenvolvimento.

Vale destacar neste tabuleiro que existe uma simetria em relação ao eixo vertical do tabuleiro, que é a linha que separa a terceira e a quarta coluna. Já no tabuleiro 8x8 a simetria acontece com relação ao eixo horizontal. Estendendo o raciocínio para tabuleiros maiores, veremos que a simetria existe em todos os tabuleiros. Quando n é múltiplo de 4, a simetria é em relação ao eixo horizontal. Quando não é múltiplo de 4 a simetria acontece com relação ao eixo vertical. Lembrando que n é sempre um numero par.

A simetria, apesar de não ter sido nossa opção, poderia ser um caminho para resolver o problema.

Quanto a segunda parte do exercício, que foi feita diferente da solução que tínhamos da Revista Eureka, escolhemos um caminho que pode ser mais longo mas exige menos conhecimento matemático. Para um aluno do ensino médio, a aritmética modular não é algo que ele conhece, ou seja, iria ler a solução e não compreender. Logicamente alguns poderiam argumentar que a 3ª fase da OBM é feita apenas para alunos especiais, preparados. Mas um aluno que quer se preparar por meios próprios pode não ter esse conhecimento e não compreender a solução. Por isso optamos por utilizar um sistema linear onde o aluno poderia chegar a prova apenas desenvolvendo o sistema pelo método da substituição. Utilizar os poliminós na solução foi uma alternativa para, além de auxiliar na construção do sistema, concretizar a solução do problema para o leitor visualizar a construção do pedido no enunciado através de peças.

4.9 OBM 1999 – 3ª Fase

Técnica utilizada: Marcação de casas

Temos um tabuleiro quadrado 10 x 10.

Desejamos colocar *n* peças em casas do tabuleiro de tal forma que não existam 4 peças formando em retângulo de lados paralelos aos lados do tabuleiro.

Determine o maior valor de *n* para o qual é possível fazer esta construção.

4.9.1 Solução da Banca

O problema é equivalente a encontrar subconjuntos A_1, A_2, …, A_{10} do conjunto {1, 2, 3, …, 10} cuja soma do número de elementos seja a maior possível tais que a interseção de dois quaisquer deles tenha no máximo um elemento (A_i é o conjunto das posições das peças na i-ésima linha do tabuleiro). Se A_i tem k_i elementos então há $C_{k_i}^2 = \frac{k_i(k_i-1)}{2}$ subconjuntos de 2 elementos não pode pertencer a dois dos conjuntos A_i, e há no total $C_{10}^2 = 45$ subconjuntos de 2 elementos de

{1, 2,…,10}. Assim, devemos ter $\sum_{i=1}^{10} \frac{k_i(k_i-1)}{2} \le 45$.

Por outro lado, se existem i, j com $k_j > k_i + 1$, temos $C_{k_i+1}^2 + C_{k_j-1}^2 = \frac{k_i(k_i+1)}{2} + \frac{(k_j-1)(k_j-2)}{2} = \frac{k_i(k_i+1)}{2} + \frac{k_j(k_j-1)}{2} + k_i + 1 - k_j < C_{k_i}^2 + C_{k_j}^2$. Assim para minimizar $\sum_{i=1}^{10} \frac{k_i(k_i-1)}{2}$ mantendo $\sum_{i=1}^{10} k_i$ fixo devemos ter $|k_i - k_j| \le 1$ para todo i, j. Se observamos que $5C_4^2 + 5C_3^2 = 5 \cdot 6 + 5 \cdot 3 = 45$, concluímos que se

$\sum_{i=1}^{10} \frac{k_i(k_i-1)}{2} \le 45$ então $\sum_{i=1}^{10} k_i \le 5 \cdot 4 + 5 \cdot 3 = 35$, valendo a igualdade se e só se 5 dos k_i são iguais a 4 e os outros 5 iguais a 3. Para que a construção seja possível nesse caso precisamos de que cada par de elementos apareça em exatamente um dos conjuntos A_i . Nesse caso, cada elemento de {1, 2, 3…, 10} deve aparecer em 3 conjuntos com 4 elementos ou em um conjunto com 4 elementos e 3 conjuntos com 3 elementos (pois cada um dos outros 9 elementos aparece exatamente uma vez junto com ele). Como haveria 5 conjuntos com 4 elementos, o número médio de conjuntos com 4 elementos aos quais cada elemento pertence é 2, donde há elementos que pertencem a 3 conjuntos com 4 elementos (pois um elemento não pode pertencer a exatamente 2 conjuntos com 4 elementos). Assim, podemos supor sem perda de generalidade que A_1 = {1, 2, 3, 4}, A_2 = {1, 5, 6, 7} e A_3 = { 1, 8, 9, 10}, mais então qualquer outro conjunto de 4 elementos deve estar contido em {2, 3, …, 10}, e portanto deve intersectar um dos conjunto A_1, A_2, A_3, A_4, em pelo menos 2 elementos. Portanto, não é possível que $\sum_{i=1}^{10} k_i$ seja igual a 35. Por outro lado é possível construir exemplos com $\sum_{i=1}^{10} k_i = 34$, como abaixo:

A_1 = {1, 2, 3, 4}, A_2 = {1, 5, 6, 7}, A_3 = { 2, 5, 8, 9}, A_4 = {3, 6, 8, 10},

A_5 = {1, 9, 10}, A_6 = { 2, 7, 10}, A_7 = {3, 7, 9}, A_8 = {4, 5, 10}, A_9 = { 4, 6, 9} e A_{10} = {4, 7, 8}.

•	•	•	•						
•				•	•	•			
	•			•			•	•	
		•			•		•		•
•								•	•
	•					•			•
		•				•		•	
			•	•					•
			•		•			•	
			•			•	•		

4.9.2 Solução do Autor

Inicialmente vamos marcar este tabuleiro com coordenadas, como se fosse um tabuleiro de batalha naval, utilizando as letras, ao invés de A, B, C, utilizaremos A1, A2, A3:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A1										
A2										
A3										
A4										
A5										
A6										
A7										
A8										
A9										
A10										

Formar um retângulo neste tabuleiro é o mesmo que dizer que marcamos duas linhas em duas colunas iguais.

Exemplo: Marcamos as linhas A1 e A4 nas colunas 7 e 9. Está formado assim um retângulo.

Não queremos que isto aconteça. Portanto, só podemos ter duas ou mais colunas marcadas em uma única linha.

Para resolver essa questão vamos pensar em cada linha como um conjunto A_i e os números das colunas representam elementos. Então, nenhum conjunto $k = \{a, b\}$, com a e b distintos e $1 \leq a, b \leq 10$, $a, b \in \mathbb{N}$, pode estar contido em mais de um A_i.

Como são dez elementos, existem $C_{10}^2 = 45$ conjuntos K distintos que satisfazem o proposto.

Devemos buscar conjuntos A_i de modo que cada conjunto K esteja contido em exatamente um dos A_{is}, de modo a maximizar o número total de elementos.

Para achar a melhor forma de distribuir estes conjuntos K, devemos resolver a equação abaixo:

$$u_1 + \sum_{j=2}^{10} C_j^2 \cdot u_j = 45$$

Onde u_j é a quantidade de conjuntos $A_i$que possuem j elementos, ou seja, contém C_j^2 conjuntos K.

Vale ressaltar que sabemos que $\sum_{j=1}^{10} u_j = 10$.

A única solução inteira dessa equação é $u_4 = 5$, $u_3 = 5$ e os demais

$u_j = 0$.

Isto significa que temos 5 conjuntos A_i com 4 elementos e 5 conjuntos A_i com 3 elementos. Vamos então construir estes conjuntos.

Vamos levar em consideração que vamos sempre conseguir encaixar o maior número de elementos se a intersecção entre dois conjuntos for não vazia. Logo, pela nossa análise feita aqui, a intersecção só pode ser unitária.

Tomemos, sem perda de generalidade, que A_1= {1, 2, 3, 4}

Com o objetivo de maximizar o tamanho dos $A_{i,s}$, escreveremos A_2com apenas um elemento na intersecção com A_1. Podemos então ter, por exemplo, A_2 = {1, 5, 6, 7}.

Escreveremos A_3 com apenas um elemento na intersecção com A_1 e um outro elemento na intersecção com A_2. Qualquer conjunto que satisfaça essa condição serve para nossa hipótese. Tomemos então A_3 = {2, 5, 8, 9}.

Repetindo o processo para A_4, tomemos A_4 = {3, 6, 8, 10}

Quando formos fazer em A_5 o mesmo processo ficamos impossibilitados pois teremos que ter 4 elementos distintos onde cada um pertence a um A_i diferente.

Vejamos:

- de A_1tomamos o 4. Logo não nos serve o 1, 2, 3.
- de A_2tomamos o 5. Logo não nos serve o 1, 6, 7.
- de A_3 tomamos o 8. Logo não nos serve o 2, 5 e 9.
- o único que em tese nos serve de A_4 é o 10, mas não pode aparecer no mesmo conjunto que 8 por A_4 já conter

  K = {8, 10}.

Logo é impossível construir A_5com 4 elementos.

Vamos tentar então resolver a equação para 44, 43, 42, 41, até conseguir um resultado válido.

Deixaremos para o leitor verificar que as equações abaixo não possuem soluções inteiras positivas.

$$u_1 + \sum_{j=2}^{10} C_j^2 \cdot u_j = 44$$

$$u_1 + \sum_{j=2}^{10} C_j^2 \cdot u_j = 43$$

Faremos então

$$u_1 + \sum_{j=2}^{10} C_j^2 \cdot u_j = 42$$

Achamos nesta equação as soluções inteiras positivas $u_4 = 4$, $u_3 = 6$ e os demais $u_j = 0$.

Isto significa que podemos montar 4 conjuntos A_i com 4 elementos e 6 conjuntos A_i com 3 elementos.

Isto é possível, conforme exemplo abaixo:

A1 = {1, 2, 3, 4}
A2 = {1, 5, 6, 7}
A3 = {2, 5, 8, 9)
A4 = {4, 6, 9}
A5 = {3, 6, 8, 10}
A6 = {4, 5, 10}
A7 = {4, 7, 8}
A8 = {2, 7, 10}
A9 = {3, 7, 9}
A10 = {1, 9, 10]

Podemos perceber que $\sum_{i=1}^{10} \#A_i = 34$.

Logo podemos marcar 34 casas. Vejamos no tabuleiro:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A1	O	O	O	O						
A2	O				O	O	O			
A3		O			O			O	O	
A4				O		O			O	
A5			O			O		O		O
A6				O	O					O
A7				O			O	O		
A8		O					O			O
A9			O				O		O	
A10	O								O	O

4.9.3 Comparação entre as soluções

As duas soluções usam o mesmo princípio de conjuntos. A solução da banca parte do número de elementos do mesmo conjunto enquanto nossa solução utiliza os subconjuntos de dois elementos que devem estar em conjuntos A_i distintos. A principal diferença é que a banca utiliza as combinações de modo bem formal e complexo, enquanto autor busca utilizar uma linguagem mais simples, mesmo que não seja simples achar as soluções inteiras de uma equação com dez incógnitas.

5. CONCLUSÃO

Nosso objetivo neste trabalho era discorrer sobre as técnicas que podemos utilizar para resolver exercícios sobre tabuleiros em olimpíadas de matemática. Inicialmente resolvemos quinze exercícios para ilustrar as técnicas que sugerimos.

No capítulo 4 fizemos comparações entre exercícios com resoluções que utilizam nossas técnicas e outras soluções, seja de alunos olímpicos que estavam na revista Eureka ou de resoluções da Banca.

Podemos concluir que muitas vezes a solução da banca, apesar de ser mais completa e generalizada, cria dificuldade para o entendimento de um leitor que não está acostumado com a simbologia matemática. Também existem algumas soluções da banca que envolvem conteúdos que não são ministrados no ensino médio, o que atrapalha um estudante comum de se preparar por conta própria para uma olimpíada. As nossas resoluções, apesar de algumas vezes serem mais longas que as da banca, visaram trabalhar as técnicas propostas neste trabalho e utilizar somente conteúdos os quais um aluno compreenderia ao ler a resolução.

Acredito que as bancas das olimpíadas devem sim ter soluções generalizadas inclusive para poder manter uma boa pauta de correção, porém deve divulgar soluções mais acessíveis, para entendimento mais simples dos alunos.

Por fim, chegamos à conclusão que na maioria das vezes as técnicas propostas aqui neste trabalham ajudam o aluno a estruturar seu raciocínio neste tipo de exercício além de facilitar o entendimento de quem lê a solução de um exercício deste tipo.

6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AOBM; ‘Página oficial da OBM na internet’. Disponível em http://www.obm.org.br

Fomin, Dimitri; Genkin, Sergey... [et al.]; **Círculos Matemáticos.** Tradução de Valéria de Magalhães Iório. Rio de janeiro: IMPA, 2012. 292p.

IMPA; ‘Página oficial da OBMEP na internet’. Disponível em http.obmep.org.br

IMPA; ‘Página oficial do POTI na internet’. Disponível em http://poti.impa.br

Shine, Carlos Yuzo. **21 Aulas de matemática Olímpica**. Rio de Janeiro: SBM, 2009. 280 p.

Tao, Terence. **Como resolver problemas matemáticos**. 1ªed. Rio de Janeiro: SBM, 2013. 163p.