SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

NOÇÕES DE CÁLCULO I NO ENSINO MÉDIO: APLICABILIDADE EM DIVERSAS ÁREAS DO CONHECIMENTO

Rogério Sena

Orientador: Prof. Dr. Renato Fabrício Costa Lobato

BELÉM
Abril de 2016

Rogério Sena

NOÇÕES DE CÁLCULO I NO ENSINO MÉDIO: APLICABILIDADE EM DIVERSAS ÁREAS DO CONHECIMENTO

Dissertação submetida à Coordenação Acadêmica do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional na Universidade Federal do Pará, oferecido em associação com a Sociedade Brasileira de Matemática, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:Prof. Dr. Renato Fabrício Costa Lobato

BELÉM
Abril de 2016

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da UFPA

Sena, Rogério, 1970-
Noções de cálculo I no ensino médio: aplicabilidade em diversas reas do conhecimento / Rogério Sena. - 2016.

Orientador: Renato Fabrício Costa.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Programa de Pós-Graduação em Matemática (Mestrado Profissional), Belém, 2016.

1. Cálculo. 2. Matemática-Conhecimentos e aprendizagem. 3. Tecnologia educacional-Matemática. 4. Geogebra-Software. 5. Funções (Matemática). I. Título.

CDD 22. ed. 515

Rogério Sena

NOÇÕES DE CÁLCULO I NO ENSINO MÉDIO: APLICABILIDADE EM DIVERSAS ÁREAS DO CONHECIMENTO

Dissertação submetida à Coordenação Acadêmica do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional na Universidade Federal do Pará, oferecido em associação com a Sociedade Brasileira de Matemática, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:Prof. Dr. Renato Fabrício Costa Lobato

Aprovada em 01 de Abril de 2016, por

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Renato Fabrício Costa Lobato
Universidade Federal do Pará
(Presidente)

Prof. Dr. José Augusto Nunes Fernandes
Universidade Federal do Pará

Prof. Dr. João Furtado de Souza
Universidade Federal do Pará

BELÉM
Abril de 2016

“Não tente ser uma pessoa de sucesso.
Em vez disso, seja uma pessoa de valor”
Albert Einstein

Agradecimentos

✓A Deus, pela força e esperança dada nessa minha nova jornada.

✓A minha mãe Maria do Carmo Sena, pelo amor e esforços envidados para que eu seguisse sempre enfrente.

✓Ao meus filhos Rodrigo Cézar T. Sena, Robson T. Sena e Rogério Sena Jr, pela compreensão e por serem as razões da minha vida.

✓Aos meus netos Kauã Cézar Passos Sena e Laura Yasmin Passos Sena, por todos os dias trazerem alegria pra minha vida.

✓A minha companheira Diane Nazaré T. Silva, pelo incentivo e amor incondicional a mim dispensado.

✓A todos os amigos(as) da turma Profmat, pela ajuda e pelos momentos agradáveis que passamos juntos.

✓A Universidade Federal do Pará.

✓A todo corpo docente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, por me proporcionarem um aprendizado de qualidade.

✓Ao Prof. Dr. **Renato Fabrício Costa Lobato**, pela orientação nesse trabalho e por toda contribuição para realização do mesmo.

✓Enfim, a todos que de alguma forma contribuiram nessa caminhada do mestrado.

RESUMO

Neste trabalho mostramos noções vistas no Cálculo I aplicadas em diversas áreas do conhecimento tais como: funções marginais e índice de Gini na Administração e Economia; valor futuro e presente no fluxo de renda na Matemática Financeira; modelagem do problema de biologia populacional na Biologia; decaimento radioativo na Química e derivadas temporais e trabalho de uma força na Física; analisamos o significado de taxa de variação, ponto de máximo e mínimo em diversos exemplos de aplicação; comentamos a necessidade que tais noções sejam abordadas a partir da educação básica e apresentamos um estudo mais dinâmico com a utilização do software Geogebra.

Palavras-chave: Cálculo I. Função. Educação Básica. Geogebra.

ABSTRACT

We show views notions in Calculus I applied in various areas of knowledge such as marginal functions and Gini index in Business and Economics; future value and present the income stream in Financial Mathematics; modeling of population biology problem in biology; radioactive decay in chemistry and time derivatives and work of a force in physics; We are analyzing the meaning of rate of change, maximum point and the minimum in many application examples; commented the need that such notions are addressed from the basic education and present a more dynamic study using the Geogebra software.

keywords: Calculus I. Function. High School. Geogebra.

Lista de Figuras

Sumário

INTRODUÇÃO

Segundo as normas [6] do Programa de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT), os TCC (dissertações) devem versar sobre temas específicos pertinentes ao currículo de Matemática do Ensino Básico que tenham impacto na prática didática em sala de aula. Uma proposta desse trabalho é intervir no currículo da educação básica com possíveis consequências em sala, a partir do estudo das noções do Cálculo I nesta modalidade de ensino. Sabemos que existem instituições de nível superior como o Centro de Instrução Almirante Braz de Aguiar (CIABA), por exemplo, que contemplam nos conteúdos programáticos [7] de seus processos seletivos as noções do Cálculo I, justificando seu ensino.

Nesse sentido, mostramos algumas aplicações das noções do Cálculo I (Limite, Derivada e Integral) em diversas áreas do conhecimento, dando um enfoque mais dinâmico através da utilização do software Geogebra. Enfatizamos a necessidade da abordagem dessas noções a partir do ensino básico, principalmente no ensino médio, pois se configura como uma significativa ferramenta no estudo de funções com a qual é possível ampliar o nível de abrangência, favorecendo a aprendizagem dos conteúdos e, consequentemente, capacitando os alunos na perspectiva de ingressarem em instituições que exijam tais noções e, também, para uma futura aplicabilidade em vários campos profissionais, outra proposta desse trabalho.

Atualmente o governo, seguindo determinação do PNE, está discutindo propostas da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) para definir os objetivos da aprendizagem na educação pública. O documento vai reformular e determinar o currículo mínimo para todos os alunos das escolas de educação básica do Brasil. Segundo o documento preliminar, o currículo terá 60% de conteúdos comuns para a Educação Básica do ensino público e do privado. Os 40% restantes serão determinados regionalmente, considerando as escolhas de cada sistema educacional. A proposta final deverá ser entregue até abril deste ano ao Conselho Nacional de Educação. (http://g1.globo.com/educacao/noticia/2015/09/)

O Conselho Diretor da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) relançou, em novembro de 2014, estudos com vista à elaboração de uma proposta curricular para os diferentes segmentos da Matemática. No caso do Ensino Médio, o estágio atual das suas conclusões já foi endossado pelo Conselho Diretor e é apresentado como uma contribuição da SBM ao debate do tema na comunidade e à construção da Base Nacional Comum que está sendo levada a cabo pelo Governo Federal. Nessa proposta consta, na seção Temas Complementares, o estudo de Taxa de variação Média e Instantânea com as seguintes habilidades: calcular a taxa de variação média, calcular a taxa de variação instantânea, determinar o coeficiente angular da reta tangente a uma curva num determinado ponto e resolver problemas que envolvam taxas de variação média e instantânea. (http://www.sbm.org.br/destaque/contribuicao-da-sbm-para-a-discussao-sobre-curriculo-de-matematica)

Observamos que, em nossa opnião, as escolas vem reduzindo o ensino médio a dois anos e transformando o terceiro ano em um cursinho preparatório para o Enem que, apesar de ser um mecanismo de democratização do acesso às políticas públicas de educação, é um dos grandes responsáveis pelo currículo dessa etapa uma vez que "ditam" o modelo de Ensino Médio.

Aliado a essa situação ainda temos os seguintes dados alarmantes: No Brasil, pouco mais da metade dos jovens terminam o ensino médio aos 19 anos de idade: 54,3%. O indicador foi calculado com base na Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios (Pnad) de 2013, realizada pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE). De acordo com as projeções da Meta 4 do Todos pela Educação, em 2013, esses percentuais deveriam ser de 84%. A taxa de distorção idade-série mostra a proporção de alunos com atraso escolar de dois anos ou mais em relação à série que deveriam estar cursando. Os dados mostram que, de forma geral, a porcentagem está regredindo desde 2007: caiu de 42,5% para 29,5% em 2013. De acordo com o Censo Escolar 2011, a taxa de abandono nessa etapa do ensino é de 9,2%, sendo que no 1º ano o índice de desistência é ainda maior, 11,6%. O Ideb do ensino médio vem se mantendo estagnado em 3,7 nos últimos anos. (http://revistaeducacao.uol.com.br/textos/214/artigo338126-1.asp)

Na avaliação da Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE), divulgada em fevereiro de 2016, a maior parte dos 64 países desenvolvidos ou emergentes envolvidos na pesquisa fez pouco progresso para diminuir a quantidade de estudantes que não aprendem o mínimo necessário na escola. O Brasil é um dos poucos que tiveram melhora, com queda de 18% no número de alunos nessa situação em Matemática, nos últimos dez anos. A nota no Programa de Avaliação Internacional (Pisa) também cresceu nesse período e chegou a quase 400 pontos. Mas continua bem abaixo da média geral, de quase 500 pontos. No ranking, o país está entre os seis piores. (http://www.ormnews.com.br/noticia/estudantes-brasileiros-melhoraram-em-matematica-diz-estudo)

Diante do exposto, fica evidente a necessidade de uma reforma curricular que, além de capacitar efetivamente o aluno em determinados conteúdos, sejam "atraentes" na perspectiva de corrigir as distorções supra mencionadas.

Nesse trabalho apresentaremos, no capítulo 1, fundamentação teórica para o ensino das noções do Cálculo na Educação Básica. No capítulo 2 um breve histórico sobre o Cálculo: sua contextualização histórica e seu ensino nas escolas brasileiras a partir de 1930. No capítulo 3, faremos uma abordagem teórica sobre as noções de limite, derivada e integral. No capítulo 4 apresentaremos alguns exemplos de aplicações das noções de Cálculo I em diferentes áreas do conhecimento.

Capítulo 1

O CÁLCULO NA EDUCAÇÃO BÁSICA

1.1 Fundamentação Teórica

Segundo a proposta dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) [14], o currículo do Ensino Médio deve ser estruturado de forma a assegurar ao aluno a possibilidade de ampliar e aprofundar os conhecimentos matemáticos adquiridos no Ensino Fundamental de forma integrada com outras áreas do conhecimento e orientada pela perspectiva histórico-cultural na qual estão ligados os temas em estudo. Isto é proposto visando a preparação do aluno para o trabalho, exercício da cidadania e também a continuação de seus estudos em níveis superiores.

É comum ouvir reclamações dos estudantes de todos os níveis sobre a Matemática, em especial sobre o quão distante da realidade ela é ou parece ser e, ultimamente, o mau desempenho dos alunos tem desencadeado um número elevado de discussões na busca de caminhos para uma melhora. Neste universo, em nível superior, enquadra-se o Cálculo Diferencial e Integral, disciplina introdutória de vários cursos, considerada básica porque visa ofertar sólida formação em relação a conteúdos gerais que, por sua vez, sustentarão aprendizagens posteriores em disciplinas específicas.

A respeito da abrangência e importância do estudo de Cálculo, Lopes [11] faz uma reflexão afirmando que:

> O Cálculo Diferencial e Integral permite, nas mais variadas áreas do conhecimento, como Engenharia, Química, Física, Biologia, Economia, Computação, Ciências Sociais, Ciências da Terra, etc, a análise sistemática de modelos que permitem prever, calcular, otimizar, medir, analisar o desempenho e performance de experiências, estimar, proceder análises estatísticas e ainda desenvolver padrões de eficiência que beneficiam o desenvolvimento social, econômico, humanístico dos diversos países do mundo. (LOPES, 1999, p.125)

Logo, o Cálculo pode ser utilizado para que problemas das mais diversas áreas de conhecimento possam ser resolvidos, o que justifica seu ensino. Entretanto, o desempenho dos acadêmicos frente a essa disciplina tem se revelado insatisfatório, gerando excessivo número de reprovações. Segundo Rezende [15], as dificuldades encontradas frente à disciplina de Cálculo I não representam a situação particular de uma instituição:

> O problema relativo ao ensino de Cálculo se apresenta na grande maioria das universidades brasileiras. Engana-se porém quem acredita que o problema é cultural e/ou específico do sistema educacional brasileiro. Em verdade, o problema vai além de nossas fronteiras e se encontra presente também no âmbito educacional dos países "desenvolvidos". (REZENDE, 2004, p.22)

Vários fatores contribuem para o insucesso dos alunos neste componente curricular e um deles é a carência de conhecimentos matemáticos relativos aos níveis fundamental e médio, considerados essenciais para a abordagem dos conteúdos de Cálculo Diferencial e Integral I, conforme relata Barbosa [4]:

> Certamente, a falta de elo, de um relacionamento maior entre os níveis de ensino, principalmente entre o nível secundário e o universitário, tem trazido grandes dificuldades na relação ensino-aprendizagem dos alunos que fazem a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I. (BARBOSA, 1994, p.02)

O relato acima evidencia que a transição para o ensino superior está trazendo dificuldades para alunos e professores, pois muitos estudantes apresentam lacunas em termos de conhecimentos pré-requisitos. Em muitos casos, essa falta de bagagem matemática, que deveria ter sido adquirida pelo aluno em seu percurso escolar, é reflexo de uma aprendizagem mecânica bastante estimulada na escola, que serve para "passar" nas avaliações, com pouca retenção e não requer compreensão.

Portanto, o estudo do Cálculo na Educação Básica poderia contribuir para corrigir os problemas mencionados e, segundo Geraldo Ávila [3]:

> O conceito de derivada pode ser ensinado, com grande vantagem, logo na primeira série do segundo grau, ao lado do ensino de funções.

Para Ávila o ensino do Cálculo é de grande importância, pois além de ajudar no tratamento de inúmeras propriedades das funções e de ter aplicações interessantes em problemas de máximo e mínimo, crescimento e decrescimento, dentre outras, integra-se com muitas das ciências conhecidas, pois o Cálculo pode tornar o estudo de alguns destes tópicos mais simples e compreensíveis para os alunos do Ensino Médio.

Capítulo 2

UM BREVE HISTÓRICO SOBRE O CÁLCULO

2.1 Contextualização Histórica

Acreditamos que professores "negligenciam" a história da ciência que ensinam por diversos motivos, por exemplo, falta de tempo para comentar fatos históricos. Klein apud Tahan [16] afirma que: "O professor que ensina a Matemática desligada de sua parte histórica, comete verdadeiro atentado contra a ciência e contra a cultura em geral".

Os PCNs [14] de Matemática também mencionam a importância da história da Matemática ao afirmar que:

> Em muitas situações, o recurso à História da Matemática pode esclarecer ideias matemáticas que estão sendo construídas pelo aluno, especialmente para dar respostas a alguns "porquês" e, desse modo, contribuir para a constituição de um olhar mais crítico sobre os objetos de conhecimento.

Portanto, é recomendável que o professor fale um pouco sobre a história do Cálculo para os alunos. Nesse sentido, segundo Maria José Aragão [1] o grande contributo do século XVII, para a Matemática, foi a invenção do *cálculo infinitesimal*, principalmente, por Newton na Inglaterra e Leibniz na Alemanha, independentemente um do outro.

Isaac Newton (1642-1727), matemático e físico inglês, era essencialmente um físico e considerava a Matemática como um instrumento. A noção de infinito já era conhecida desde há muito, desde o tempo de Eudóxo de Cnidos e Arquimedes. Fermat e Descartes retomaram a noção. Newton, com apenas vinte e um anos, já assimilara bastante os conhecimentos essenciais da Matemática e, trabalhando incansavelmente, após três anos, criou o Cálculo Infinitesimal. Newton precisava medir a velocidade de um ponto móvel em cada porção do percurso e em qualquer instante, ou seja, precisava conhecer em cada instante quanto aumentava ou diminuia a velocidade. Seguiu o conceito de acréscimo, ou de decréscimo, de uma grandeza em relação a outra e a dependência das variações de uma grandeza em função de outra. Então, da necessidade de conhechecer o que foi "acrescentado", ou "subtraído" surge o conceito de *derivada* ou *diferencial* e a razão de infinitésimos, tornando-se então a razão do quê chamou de fluxões. Atualmente a estes cálculos chamam-se *Cálculo Diferencial.* Porém Newton foi mais longe. Admitindo uma certa entidade como função de outra, e que a derivada dessa função é igual à segunda grandeza, Newton quis saber se poderia haver uma função Y(x) cuja derivada seria igual à função de x. Se for possível obter esse valor, então obter-se-á a antiderivada da função de x, ou seja, a sua *primitiva* ou o seu *integral.*

A associação do Cálculo Integral com o Cálculo Diferencial deu origem ao Cálculo Infinitesimal. Newton descobriu-o através de meios especificamlente físicos.

Newton publicou as suas teorias no seu trabalho *Philosophiae Naturalis Principiae Mathematica* em 1687, ostentando a autorização de impressão de Samuel Peys, presidente da Royal Society. Este livro, que imortalizou o trabalho de Newton, exerceu influência no pensamento, e é considerado ter paralelo apenas noutro trabalho, a *Origin of Species* de Charles Darwin, em 1859. O *Principiae* é constituído por três partes, o livro 1 é um tratado de mecânica com uma série de definições, axiomas e leis de movimento; O livro 2 trata do movimento num meio resistente, discute casos nos quais a resistência varia, o movimento pendular num meio resistente e a resistência de projéteis e como é a propagação do movimento ondulatório através de um fluido; O livro 3 intitulado *Os Sistemas do Mundo* abre com as "Regras para filosofar". A maior parte do livro constitui uma visão para a compreensão da teoria planetária, lua, cometas e apresenta uma teoria sobre as marés e conclui com "scholium" que expressa a visão de Newton sobre a ciência e a religião.

A invenção do Cálculo Infinitesimal levou a uma contenda grave entre Newton e Leibniz.

Ambos desenvolveram este ramo da Matemática, que é a base da maior parte da Física moderna, de modo completamente independente. Sabe-se agora, que Newton descobriu o Cálculo algum tempo antes de Leibniz, mas publicou o trabalho muito mais tarde. Leibniz cometeu o erro de apelar para Royal Society para decidir a contenda. Newton, como presidente, nomeou uma comissão independente, constituida apenas por amigos seus, "por coincidência". Foi Newton quem redigiu o relatório da comissão e conseguiu que a Royal Society o publicasse, acusando Leibniz de plágio.

Da história desta controversa contenda, resultou que Newton conseguiu para si vantagem. Leibniz foi um inventor independente. A notação usada por Leibniz com "d" para Cálculo Diferencial, ou dx, foi superior à notação de Newton com o uso de pontos como símbolos. Por último, a devoção excessiva pelo método matemático de Newton não contribuiu para o desenvolvimento da Matemática na Grã-Bretanha durante o século XVIII, até os símbolos por pontos terem sido excluídos das universidades.

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), filósofo, jurista, matemático e historiador alemão, era filho de um jurista, professor da Universidade de Leipzig. Perdeu o pai com seis anos de idade e entrou para a universidade aos quinze anos para frequentar o curso de Direito. Dois anos depois, foi frequentar a Universidade de Lena, após o conhecimento que teve das obras de Kepler, Galileu e Descartes. Em 1666 apresentou-se para o exame do curso de Direito, com vinte anos, mas não conseguiu aprovação em Leipzig. E não teria sido por falta de conhecimentos, mas por inveja e aversão dos seus professores de Direito, por ser tão jovem. Inscreveu-se então na Universidade de Nuremberga onde obteve aprovação por unanimidade e foi-lhe oferecida a cátedra de Direito, mas Leibniz não aceitou. Seguiu a carreira diplomática que lhe proporcionou contato com os expoentes máximos da cultura europeia. Em Londres, frequentou a Royal Society e apresentou a sua máquina de calcular. Foi eleito membro estrangeiro da sociedade. Encorajado por Huygens, prosseguiu os seus estudos de Matemática. Inventou o Cálculo Infinitesimal, tal como Newton, mas por processo estritamente racional. Na sua publicação *De arte combinatória*, idealizou um método simbólico na lógica, com regras formais, que se começou a usar a partir de 1693. Na verdade, Leibniz atribuiu todas as suas descobertas matemáticas ao melhoramento que introduziu na notação. A notação dx para um aumento infinitesimal de x e o símbolo $\int$ para o integral de hoje são ainda invenções de Leibniz. O cálculo foi desenvolvido por Newton e os dois matemáticos acusaram-se mutuamente de plágio, já que nenhum deles publicou o seu trabalho durante um período considerável. Enquanto Newton aproximou o cálculo da dinâmica de Galileu, Leibniz aproximou-o da Geometria algébrica de Descartes. Aplicou os seus métodos à solução de vários problemas em Geometria e Mecânica.

Leibniz publicou suas descobertas com relutância e deliberadamente com obscuridade, em 1684. Passou os últimos anos da sua vida na biblioteca de Hanôver entregue à investigação no domínio da história e a escrever obras e reflexões de interesse filosófico.

Os métodos de Newton e Leibniz são distintos. No entanto, as justificativas de Newton não parecem ser, matematicamente falando, tão diferentes das de Leibniz. A diferença principal entre eles estava no modo de expor suas teorias. Os resultados são apresentados na linguagem da geometria sintética. Preocupado desde o princípio em fundar um Cálculo universal, os métodos de Leibniz são apresentados como métodos e algoritmos, o que, juntamente com a praticidade da notação, fez com que tivessem uma melhor recepção do que o de Newton.

Figura 2.1: Personagens Importantes para o Cálculo

Fonte: www.matematiques.com.br

2.2 O Ensino do Cálculo na Educação Básica no Brasil

A Reforma Francisco Campos de 1931 dividiu o ensino secundário no Brasil em dois ciclos: o ***fundamental*** (cinco anos de duração) e o ***complementar*** (dois anos de duração). Na quinta série do fundamental já constava o ensino das noções de ***derivada***, conforme Dassie [5]:

> **Quinta série - Aritmética, Álgebra e Geometria:** [...] Derivada de um polinômio inteiro em x; Noção de Limite; Derivada de $\sqrt{x}$; Derivada de $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ e $\cot x$; Interpretação geométrica da noção de derivada; Aplicação da noção de derivada ao estudo da variação de algumas funções simples; Processos elementares de desenvolvimento em série; Convergência de uma série; Desenvolvimento em série do seno, cosseno e tangente; Problema inverso da derivação; Primitivas imediatas; Aplicação ao cálculo de certas áreas; Volumes do Prisma, Cilindro, Cone e Pirâmide e dos respectivos troncos; Volume da Esfera e suas partes; Estudo sucinto das seções cônicas. (Bruno Alves Dassie, 2008, p. 248.)

Conforme consta no artigo 4º do Decreto Federal de 1931, relacionado ao curso complementar, o aluno estudaria por dois anos as seguintes matérias:

> **Art 4º:** O Curso Complementar, obrigatório para os candidatos à matrícula em determinados institutos de Ensino Superior, será feito em dois anos de estudo intensivo, com exercícios e trabalhos práticos individuais, e compreenderá as seguintes matérias: Alemão ou Inglês, Latim, Literatura, Geografia, Geofísica e Cosmografia, História da Civilização, Matemática, Física, Química, História Natural, Biologia Geral, Higiene, Psicologia e Lógica, Sociologia, Noções de Economia e Estatística, História da Filosofia e Desenho. (Brasil, 1931)

O curso complementar se subdividia em curso pré-médico, curso pré-politécnico e curso pré-jurídico. O ensino de ***Noções de Cálculo***, além de estar no curso no pré-politécnico, estava presente no pré-médico como podemos observar no programa:

> [...] 19- Derivadas e Diferenciais das funções de uma variável; definições, notações e interpretação geométrica. 20- Funções de mais de uma variável. Derivadas e diferenças parciais. Diferença total. 21- Derivadas e diferenciais sucessivas. 22- Desenvolvimento em série de funções de uma variável. Fórmula de Taylor. Resto da fórmula de Taylor. Expressão de Lagrange. Fórmula de Mac-Laurin. Aplicações as funções elementares. 23- Formas indeterminadas. Regra de L'Hopital. 24- Estudo das curvas definidas por equação de duas varíáveis resolvidas em relação a uma delas. Tangentes e normais. Assíntotas, Concavidade, Máximo e Mínimo. Pontos de Inflexão. Pontos Notáveis. (Otone e Silva, 2006, p. 58)

Os alunos que ingressassem no pré-politécnico, também estudariam os conceitos do Cálculo Diferencial, conforme Otone e Silva [13]:

> [...] Limites. [...] Função contínuas. [...] Funções elementares. Diferença finita, derivada, diferencial. Cálculo das derivadas e das diferenciais. Aplicação às funções elementares. Teorema de Rolle. [...] Regra de L'Hopital. Comparação das funções exponencial e logarítmica com polinômios. [...] Máximos e Míninos. Estudo da variação de uma função. Representação cartesiana. (Otone e Silva, 2006, p. 60)

Em 1942, uma nova legislação (decreto-lei nº 4.244), a ***Lei Orgânica do Ensino Secundário***, conhecida como Reforma Capanema, modificou a organização curricular do secundário. Separando em dois ciclos, o Ginasial (quatro anos de duração) e o Colegial (três anos de duração). O ensino secundário apresentava em seu programa curricular o estudo de conceitos do Cálculo no terceiro ano do curso Científico do Colegial e na terceira série do curso Clássico do Colegial. Entre eles, o ensino de derivadas e aplicações envolvendo problemas de máximos e mínimos.

Em 1951, a Portaria nº 966 do Ministério de Educação e Saúde incumbiu o colégio Pedro II da elaboração das disciplinas de todo o curso secundário. Todas as escolas brasileiras deveriam seguir esse programa e, para a terceira série do curso colegial, o programa proposto para o ensino de Matemática no secundário era o seguinte:

> Conceito de função; Representação cartesiana; Reta e Círculo; Noção intuitiva de Limite e continuidade; Noções sobre derivadas e primitivas; Interpretações e aplicações; Introdução à teoria das equações; Polinômios; divisibilidade por $x \pm a$; Problemas de composição, transformação e pesquisa de raízes; equações de tipos especiais. (Brasil, 1951)

Mas, a partir de 1960, o ensino de Cálculo foi sendo excluído das escolas brasileiras. Os defensores da Matemática Moderna priorizavam outros tópicos que melhor se prestavam às necessidades que eles consideravam modernas e, por outro lado, não haveria muito espaço no programa, já que o rigor e o formalismo que se exigia da Teoria dos Conjuntos e vários detalhamentos axiomáticos, tomavam muito tempo. Além disso, o ensino de Cálculo exigia um estudo detalhdo dos números reais, o que levava muito tempo, e por isso seria totalmente inviável. Também o vestibular da época não cobrava mais, em seu edital, o estudo de Cálculo.

Capítulo 3

UM POUCO SOBRE O CÁLCULO

O objetivo deste capítulo é apresentar as noções de Limite, Derivada e Integral, no âmbito da Educação Básica, de uma forma bem intuitiva, fugindo de algumas formalidades e rigor que o assunto requer quando estudado no ensino superior. Será dada mais ênfase as propriedades e técnicas que serão utilizadas no capítulo 4, necessárias para o entendimento das aplicações que exibiremos.

3.1 Noção de Limite

O conhecimento das noções de limite é importante para o desenvolvimento do Cálculo e todas as técnicas mais significativas, incluindo diferenciação e integração.

- **O que é limite?**

Comecemos com uma função simples $f(x) = 2x + 3$. O valor númerico de $f(x)$ quando $x = 2$ é igual a $f(2) = 2 \cdot 2 + 3 = 7$. Isso quer dizer que o ponto $(2, 7)$ pertence gráfico de $f(x)$. Estudemos, agora, os valores da função f quando x assume valores próximos de 2, porém diferentes de 2, conforme mostram os quadros 3.1 e 3.2.

Quadro 3.1: x aproximando-se de 2 pela esquerda

x	1.5	1.8	1.9	1.99	1.999
$f(x)$	6	6.6	6.8	6.98	6.998

Fonte: Autoral

Quadro 3.2: x aproximando-se de 2 pela direita

x	2.5	2.25	2.1	2.01	2.001
$f(x)$	8	7.5	7.2	7.02	7.002

Fonte: Autoral

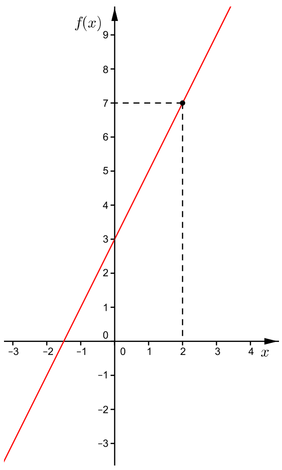
Notamos que quanto mais o valor de x se aproxima de 2 mais a imagem $f(x)$ se aproxima de 7. Ainda que não se soubesse que $f(2) = 7$ seria possível descobrir um provável resultado utilizando um número suficientemente próximo de 2, como 1,99999. É óbvio que f tende ao ponto $(2, 7)$, e é isso o que significa limite.

- **Definição:** Limite é o ponto máximo ao qual uma função tende com um dado valor da variável x, não importando se ela o alcança ou não. Em linguagem matemática nosso exemplo fica escrito da seguinte forma:

$$\boxed{\lim_{x \to 2} f(x) = 7}$$

e lê-se: "O limite de $f(x)$ quando x tende a 2 é igual a 7". Veja o gráfico de $f(x)$ (figura 3.1) a seguir:

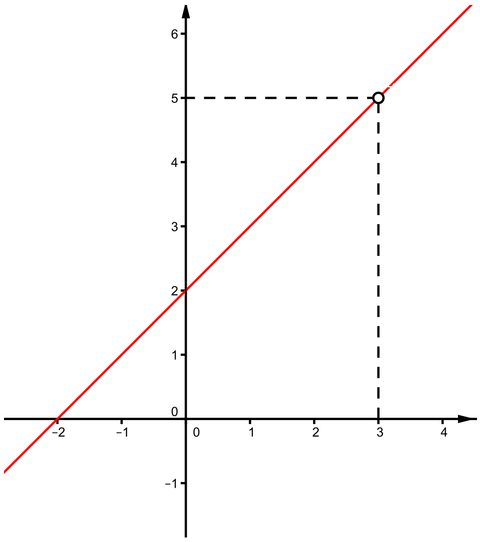
Figura 3.1: Gráfico da função $f(x) = 2x + 3$



Fonte: Autoral-Geogebra

Analisemos agora, um exemplo um pouco mais desenvolvido. Consideremos a função $g(x) = \dfrac{x^2 - x - 6}{x - 3}$. No 1º ano do Ensino Médio os estudantes aprendem a determinar domínio de uma função. No caso de $g(x)$, claramente há uma restrição, pois o denominador de uma fração nunca pode ser zero. Construíndo o gráfico no Geogebra, temos a figura 3.2:

Figura 3.2: Gráfico da Função: $g(x) = \dfrac{x^2 - x - 6}{x - 3}$



Fonte: Autoral-Geogebra

Como fizemos no exemplo anterior, se tomarmos número incrivelmente próximo de $x = 3$, por exemplo, $x = 2,99999$ teremos $g(2,99999) = 4,99999$. Assim, ainda que $g(x)$ não esteja definida para $x = 3$ o $\lim\limits_{x \to 3} g(x) = 5$. Esse é um exemplo de limite existente porque a função tende a um valor apesar de não alcançá-lo na verdade.

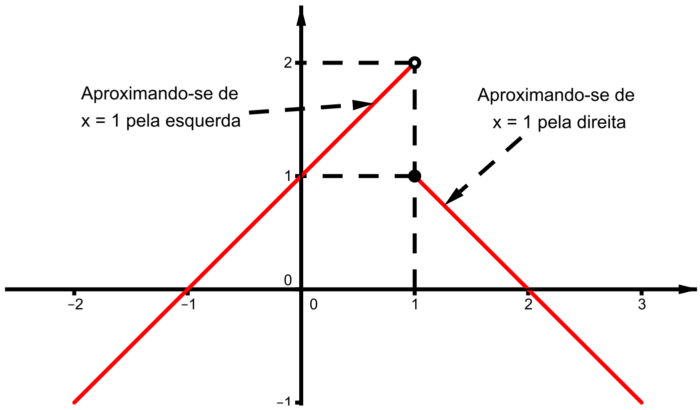
3.1.1 Limites Laterais

Consideremos a função $h(x) = \begin{cases} x+1, & x < 1 \\ 2-x, & x \geq 1 \end{cases}$ representada pelo gráfico da figura 3.3.

Se tomarmos valores de x aproximando-se de 1 *pela esquerda*, ou seja, por valores menores do que 1, então os valores de $h(x)$ aproximam-se de 2. Assim, $\lim\limits_{x \to 1^-} h(x) = 2$ e é chamado *limite à esquerda.*

Se tomarmos valores de x aproximando-se de 1 *pela direita*, ou seja, por valores maiores do que 1, então os valores de $h(x)$ aproximam-se de 1. Assim, $\lim\limits_{x \to 1^+} h(x) = 1$ e é chamado *limite à direita.*

Figura 3.3: Gráfico da Função *h(x)*



Fonte: Autoral-Geogebra

- **Quando Existe um Limite?**

Com o que já vimos até aqui é possível determinar se o limite de uma função existe ou não. Para que exista limite de uma função f em um valor x, generalizando com $x = a$, devem ocorrer três condições:

1. O limite pela esquerda deve existir em $x = a$;
2. O limite pela direita deve existir em $x = a$;
3. Os limites pela esquerda e pela direita devem ser iguais.

A figura 3.3 acima mostra o gráfico da função *h(x)*. Onde existe limite nesse gráfico? Analisando os valores de x em 1 e 2 observamos que em $x = 2$ existe limite, ao passo que em $x = 1$ não existe limite, pois, nesse ponto, apesar de existir limites pela esquerda e pela direita eles são diferentes, o que contraria a 3ª condição.

Visualmente, existe limite se o gráfico não quebrar nesse ponto. Para o gráfico de *h(x)* em questão, há uma quebra em $x = 1$, mas não em $x = 2$, o que significa que não existe limite na quebra, mas pode existir num intervalo do gráfico. Quando dizemos que um limite existe, isso significa que esse limite é igual a um **número finito**. Alguns limites são iguais ao infinito ou infinito negativo, mas nesses caso dizemos que os limites *não existem*.

Assim, o limite de uma função em um determinado valor de x é o valor a que a função tende; mesmo que a função não esteja definida em um determinado ponto, ainda assim pode haver limite nesse ponto; se houver quebra no gráfico, então não há limite no ponto da quebra; o limite existe em um ponto $x = c$, quando os limites pela esquerda e pela direita existem e são iguais.

- **Avaliando Limites Numericamente**

Até o momento, aproximamos limites usando valores de x suficientemente próximos ao número de que estávamos nos aproximando. Porém, com o passar do tempo, esse método torna-se exaustivo. Vamos verificar os principais processos para avaliar limites.

A grande maioria dos limites pode ser avaliada por meio de três técnicas: **substituição, fatoração e conjugação**. Normalmente, apenas uma dessas técnicas vai funcionar em determinado problema de limite, então deve-se tentar um método de cada vez até achar aquele que funcione.

3.1.2 Técnica da Sustituição

Se as funções forem contínuas muitos limites podem ser avaliados simplesmente utilizando-se o valor de x do qual se aproxima na função. O termo especial para isso é método da substituição (ou método da substituição direta). Por exemplo, avaliando a função $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$, quando x tende a 1, basta utilizar o número do qual estamos nos aproximando como variável:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} (x^3 - 2x^2 + 1) = (1)^3 - 2(1)^2 + 1 = 0$$

À medida que nos aproximamos de $x = 1$ a partir da esquerda ou da direita, a função tende a 0, o que garante a existência do limite. Então, $\lim_{x \to 1} f(x) = 0$

3.1.3 Técnica da Fatoração

Consideremos a função $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$. Vamos calcular o limite de *f(x)*, quando x tende a 2 aplicando o método da substituição.

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{2^2-4}{2-2} = \frac{0}{0}$$

O que é uma indeterminação. Então estamos diante de um problema que o método da substituição não consegue resolver. Nesse caso, o método da fatoração torna-se eficaz. Notemos que o numerador dessa fração é uma diferença de quadrados perfeitos. Dessa forma, podemos reescrever o limite assim:

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x+2)(x-2)}{(x-2)}$$

Cancelando os fatores $(x-2)$, obtemos $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} (x+2)$. Agora sim podemos aplicar o método da subtituição, pois a indeterminação que aparecera já não existe. Dessa forma:

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}(x+2) = (2+2) = 4$$

.

3.1.4 Técnica da Conjugação

Caso a substituição e a fatoração não tenham funcionado a conjugação pode resolver o problema, apesar de este método ser bastante restritivo em relação aos já comentados, pois é útil apenas para limites que contêm radicais.

A ideia desse método é multiplicar pares conjugados, pois aparecerá uma diferença de quadrados. Dessa forma, é possível eliminar os radicais. Porém esse método só deve ser aplicado caso o da substituição não tenha funcionado.

Por exemplo, para calcular o $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$

Primeiramente, usando o método da substituição, temos: $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{4}-2}{4-4} = \dfrac{0}{0}$. Como já vimos, esse resultado é uma indeterminação. Logo, usando o método da conjugação, multiplicando o numerador e o denominador da fração pelo conjugado de $\sqrt{x}-2$, que é $\sqrt{x}+2$. Da :

$$\lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} = \lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{x})^2-2^2}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} = \lim_{x\to 4}\frac{(x-4)}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}$$

Cancelando os fatores $(x-4)$, segue que: $\lim_{x\to 4}\frac{1}{\sqrt{x}+2}$. Aplicando o método da substituição, temos:

$$\lim_{x\to 4}\frac{1}{\sqrt{4}+2} = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}$$

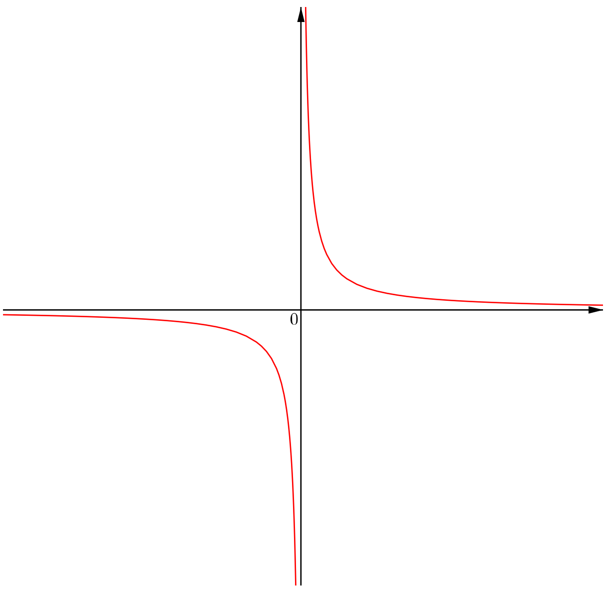
.

Portanto, para calcular o limite de uma função quando a variável x tende a um valor finito basta utilizar uma das técnicas supra mencionadas.

3.1.5 Limites e infinito

Até o momento, analisamos limites à medida que x se aproximava de um número finito. Agora, iremos avaliar limites onde x se aproxima do infinito ou infinito negativo. Para isso, analisemos o gráfico 3.4 da função $f(x) = \frac{1}{x}$.

Figura 3.4: Gráfico da Função $f(x) = \frac{1}{x}$



Fonte: Autoral-Geogebra

Notamos que a medida que tomamos valores de x cada vez maiores, ou seja, aproximando-se do infinito o valor da função fica cada vez menor, mas nunca chega a zero. Portanto, $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = 0$. Analogamente, quando tomamos valores, cada vez menores, de x a função f também aproxima-se de zero, logo $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0$. O gráfico de f possui uma assíntota horizontal. Portanto, observa-se que: $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{a}{x^n} = 0, \forall a \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$.

Em Matemática, uma assíntota de uma curva C é um ponto ou uma curva de onde os pontos de C se aproximam à medida que se percorre C. Quando C é o gráfico de uma função, em geral o termo assíntota refere-se a uma reta. Calcular o limite no infinito ou no infinito negativo de uma função racional é o mesmo que determinar o local da sua assíntota.

3.1.6 Usando a álgebra para calcular limites no infinito

Em geral avaliar limites no infinito é um pouco diferente de avaliar limites comuns; a substituição, a fatoração e a conjugação não vão funcionar. Por exemplo, vamos analisar:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x+2}{5x-1}$$

.

Aplicando o método da substituição, isto é, inserindo ∞ no lugar de x em qualquer uma das funções irracionais, obtemos $\dfrac{\infty}{\infty}$, que é uma interminação e não igual a 1, já que ∞ não é um número. Logo, a ideia para se resolver limites desse tipo é olhar para o grau do polinômio do numerador e denominador, ou seja, para a maior potência de cada polinômio. Daí, colocamos x em evidência da seguinte maneira:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x+2}{5x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x(3+\frac{2}{x})}{x(5-\frac{1}{x})}$$

Usando o fato de que $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{a}{x^n} = 0, \forall a \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, então: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$. Cancelando os fatores x no numerador e denominador segue que:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x(3+\frac{2}{x})}{x(5-\frac{1}{x})} = \frac{3+0}{5-0} = \frac{3}{5}$$

Portanto, de uma maneira geral, digamos que vamos calcular $\lim\limits_{x\to\infty} r(x)$ sendo que *r(x)* é definida como uma fração cujo numerador, *n(x)*, e denominador, *d(x)* são simplesmente polinômios. Comparando os graus (expoentes maiores) de *n(x)* e *d(x)*, tem-se:

- Se o grau do numerador for mais alto, então $\lim_{x\to\infty} r(x) = \infty$ ou $-\infty$ (não há limite porque a função cresce ou decresce infinitamente.
- Se o grau do denominador for maior, então $\lim_{x\to\infty} r(x) = 0$.
- Se os graus forem iguais, então $\lim_{x\to\infty} r(x)$ é igual ao *coeficiente principal* de *n(x)* dividido pelo *coeficiente principal* de *d(x)*.

3.1.7 Continuidade de uma função

Quando se estuda Cálculo alguns dos mais importantes teoremas da área trazem uma condição muito significativa: a **continuidade**. Na verdade, quase nenhuma de nossas conclusões mais importantes em Cálculo (inclusive o seu Teorema Fundamental) funciona se as funções em questão não forem contínuas. Testar a continuidade em uma função é muito similar a testar a existência de limites em uma função.

Intuitivamente uma função é contínua, se não houver buracos, quebras ou saltos; que pode ser desenhada por completo sem precisar levantar o lápis.

A definição matemática de continuidade faz muito sentido se mantivermos uma coisa em mente: enquanto os limites nos dizem a que tende uma função, a continuidade garante que a função chegue lá. Uma função *f(x)* é contínua em um ponto $x = c$ se as três condições a seguir forem verdadeiras:

- $\lim_{x\to c} f(x)$ existe;
- *f(c)* é definida;
- $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$.

Em outras palavras, o limite existe em $x = c$ (o que significa que a função tende a um valor finito); a função existe em $x = c$ (o que significa que não há um “buraco"); e o limite é igual ao valor da função (ou seja, o valor numérico da função em x é igual ao valor a que ela tende).

A maioria das funções estudadas no Ensino Médio têm a garantia de serem contínuas em qualquer ponto de seu domínio, incluindo funções polinomiais, exponenciais, logarítmicas, racionais e trigonométricas. A maioria das funções descontínuas encontradas devem-se a pontos indefinidos em funções racionais e saltos devido a funções definidas por várias sentenças.

3.2 Noção de Derivada

A derivada de uma função $y = f(x)$ num ponto $x = x_0$, é igual ao valor da tangente trigonométrica do ângulo formado pela tangente geométrica à curva representativa de $y = f(x)$, no ponto $x = x_0$, ou seja, a derivada é o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função no ponto x_0.

A derivada de uma função $y = f(x)$, pode ser representada também pelos símbolos:

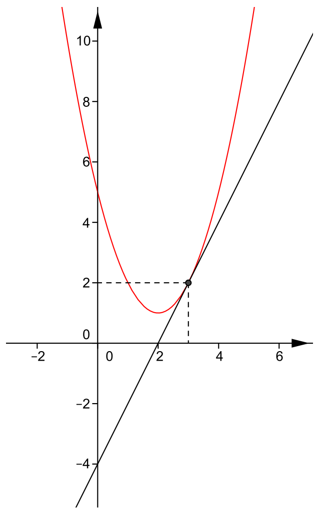
$$y',\ f' \text{ ou } \frac{dy}{dx}$$

A derivada de uma função *f(x)* no ponto x_0 é dada por:

$$\frac{df}{dx}(x_0) = f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Geometricamente, a derivada é utilizada para encontrar a reta tangente a uma curva num determinado ponto. Vejamos o gráfico de $f(x) = x^2 - 4x + 5$ e a reta tangente no ponto $x_0 = (3, 2)$ (figura 3.5).

Figura 3.5: Reta tangente no ponto $x_0 = (3, 2)$



Fonte: Autoral-Geogebra

3.2.1 Algumas Derivadas Básicas

Nas fórmulas a seguir, *f(x)* e *g(x)* são funções da variável x e a, b, c, n são constantes.

- Derivada de uma constante: $\dfrac{d}{dx}(c) = 0$
- Derivada da potência: $\dfrac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$
- Soma ou Subtração: $\dfrac{d}{dx}[f(x) \pm g(x)] = \dfrac{d}{dx}f(x) \pm \dfrac{d}{dx}g(x) = f'(x) \pm g'(x)$
- Produto por uma constante: $\dfrac{d}{dx}[cf(x)] = c\dfrac{d}{dx}f(x) = cf'(x)$
- Derivada do produto: $\dfrac{d}{dx}[f(x) \cdot g(x)] = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
- Derivada do quociente: $\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$
- Derivada de uma função composta: $\dfrac{d}{dx}\left[f \circ g\right](x) = f'[g(x)] \cdot g'(x)$

3.2.2 Regra da Cadeia

A fórmula $\dfrac{d}{dx}\left[f \circ g\right](x) = f'[g(x)] \cdot g'(x)$ é conhecida como **regra da cadeia**. Ela pode ser escrita como:

$$\boxed{\frac{du}{dx} = \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}}$$

3.2.3 Outras Derivadas Importantes

- Derivada da função seno: $\frac{d}{dx}[sen(f(x))] = cos[f(x)] \cdot f'(x)$
- Derivada da função cosseno: $\frac{d}{dx}[cos(f(x))] = -sen[f(x)] \cdot f'(x)$
- Derivada da função logarítmo: $\frac{d}{dx}\left[\lg_a^{(f(x))}\right] = \frac{1}{f(x) \cdot \ln a} \cdot f'(x)$
- Derivada do logarítmo natural: $\frac{d}{dx}\left[\ln(f(x))\right] = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$
- Derivada da função exponencial: $\frac{d}{dx}\left[a^{f(x)}\right] = a^{f(x)} \cdot \ln a \cdot f'(x)$

3.3 Noção de Integral

3.3.1 Integrais Indefinidas

Da mesma forma que a adição e a subtração, a multiplicação e a divisão, a menos de uma constante, a operação inversa da derivação é a antiderivação ou integração indefinida.

Dada uma função *g(x)*, qualquer função *f(x)* tal que $f'(x) = g(x)$ é chamada integral indefinida ou antiderivada de *g(x)*. Exemplos:

- 1) Se $f(x) = \frac{x^5}{5}$, então $f'(x) = \frac{5x^4}{5} = x^4 = g(x)$ é a derivada de *f(x)*. Uma das antiderivadas de $g(x) = x^4$ é $\frac{x^5}{5}$.
- 2) Se $f(x) = x^3$, então $f'(x) = 3x^2 = g(x)$. Uma das antiderivadas ou integrais indefinidas de $g(x) = 3x^2$ é $f(x) = x^3$.
- 3) Se $f(x) = x^3 + 4$, então $f'(x) = 3x^2 = g(x)$. Uma das antiderivadas ou integrais indefinidas de $g(x) = 3x^2$ é $f(x) = x^3 + 4$.

Nos exemplos 2 e 3 podemos observar que tanto x^3 quanto $x^3 + 4$ são integrais indefinidas para $3x^2$. A diferença entre quaisquer destas funções (chamadas funções primitivas) é sempre uma constante, ou seja, a integral indefinida de $3x^2$ é x^3+C, onde C é uma constante real.

3.3.2 Propriedades das Integrais Indefinidas

São imediatas as seguintes propriedades:

- P_1 : $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$, ou seja, a integral da soma, ou da diferença, é a soma, ou diferença das integrais.
- P_2 : $\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$, ou seja, a constante multiplicativa pode ser retirada do integrando.
- P_3 : $\frac{d}{dx} \int [f(x)dx] = f(x)$, ou seja, a derivada da integral de uma função é a própria função.

3.3.3 Integração por Substituição

Seja a expressão $\int g[f(x)] \cdot f'(x)dx$. Através da substituição $u = f(x)$ por $u' = f'(x)$ ou $\frac{du}{dx} = f'(x)$, tem-se:

$$\int g[f(x)] \cdot f'(x)dx = \int g(u)du = h(u) + C = h[f(x)] + C$$

Admitindo que se conhece $\int g(u)du$. O método da substituição de variável exige a identificação de *u* e *u'* ou *u* e *du* na integral dada.

3.3.4 Integrais Definidas

Seja uma função *f(x)* definida e contínua num intervalo real $[a, b]$. A integral definida de *f(x)*, de **a** até **b**, é um número real, e é indicada pelo símbolo:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx}$$

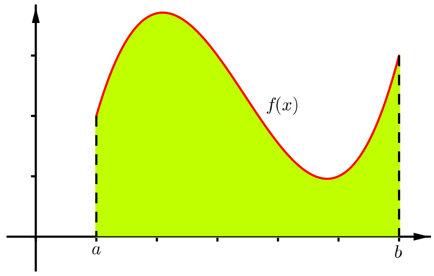
Onde:

- a é o limite inferior de integração;

- b é o limite superior de integração;
- $f(x)$ é o integrando.

Se $f(x) \geq 0$, $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ representa a área entre o eixo x e a curva *f(x)*, para $a \leq x \leq b$.

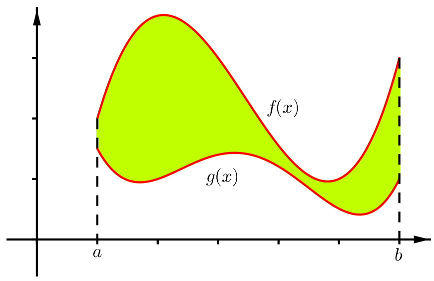
Figura 3.6: Área sobre a curva *f(x)*



Fonte: Autoral-Geogebra

Se $f(x) \geq g(x)$, $\displaystyle\int_a^b [f(x) - g(x)]dx$, representa a área entre as curvas *f(x) e g(x)*, para $a \leq x \leq b$.

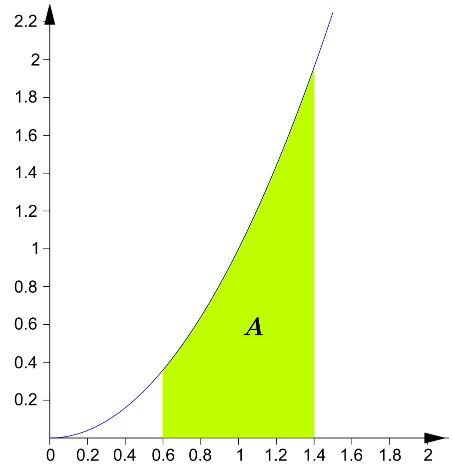
Figura 3.7: Área entre as curvas *f(x) e g(x)*



Fonte: Autoral-Geogebra

Cálculo de integrais definidas constituem-se técnicas para determinação de áreas. Ela serve para obter áreas mais complicadas de calcular pelos métodos tradicionais. Por exemplo, como calcular a área a seguir (figura 3.8) dada pela região embaixo da função $f(x) = x^2$ entre $x = 0.6$ e $x = 1.4$?

Figura 3.8: Integral de $f(x) = x^2,\ 0.6 \leq x \leq 1.4$



Fonte: Autoral-Geogebra

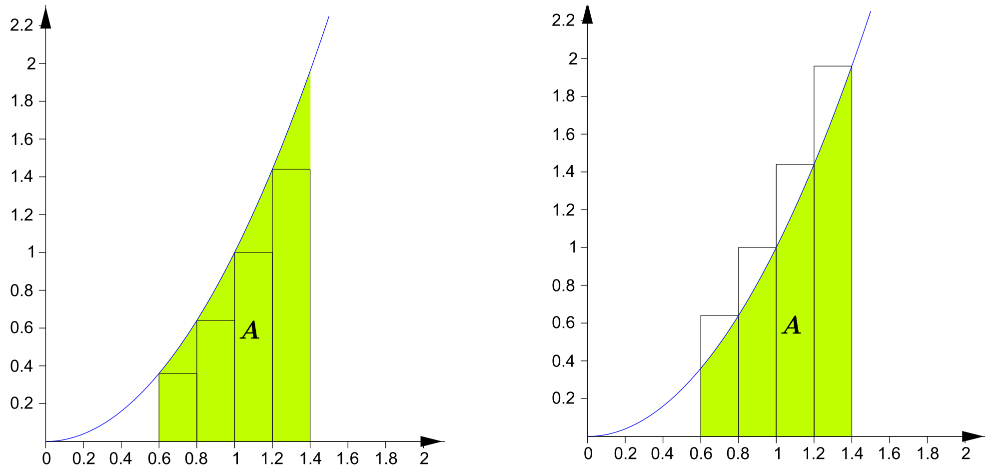
3.3.5 Soma de Riemann

Podemos estimar a área **A**, calculando uma área aproximada, usamos retângulos do seguinte modo:

Figura 3.9: Somas de Riemann

(a) Soma de Riemann Inferior

(b) Soma de Riemann Superior

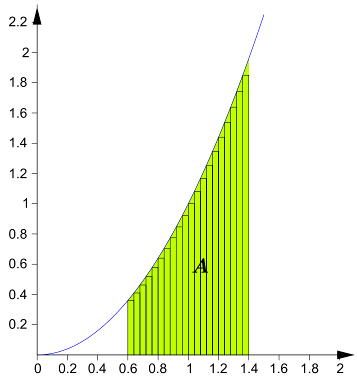


Fonte: Autoral-Geogebra

Percebemos que a soma das áreas dos retângulos na figura 3.9a é menor que a área **A** e, na figura 3.9b é maior que **A**. Essas duas situações de somas de retângulos chamamos de ***soma de Riemann***, e como foi visto, ela tem duas formas diferentes de ser tomada.

Agora, podemos escolher uma dessas aproximações e fazer o número de retângulos tender a um número infinito deles. Quanto mais retângulos for construído, mais próximo da área se chega, vejamos a figura 3.10:

Figura 3.10: Soma de Riemann com 20 retângulos



Fonte: Autoral-Geogebra

Observamos que o espaço entre o gráfico e os retângulos diminui bastante e, quanto mais retângulos forem acrescentados no intervalo, mais se aproxima da área real.

Generalizando, vamos tomar um intervalo que vai de a até b em uma função *f(x)*. Dividimos (partição) em n intervalos para termos a base Δx dos retângulos. Daí, temos:

$$\boxed{\Delta x = \frac{b-a}{n}}$$

Na figura 3.10 temos: $\Delta x = \dfrac{1.4-0.6}{20} = \dfrac{0.8}{20} = 0.04$

• **Soma de Riemann pela esquerda (S_n):** Para a Soma de Riemann à esquerda, aproxima-se a função pelo seu valor no ponto final à esquerda, dando múltiplos retângulos com base Δx e altura $f(a+i\Delta x)$ para $i = 0, 1, 2, ..., n-1$, e adicionando as áreas resultantes, temos:

$$S_n = f(x_0) \cdot \Delta x + f(x_1) \cdot \Delta x + f(x_2) \cdot \Delta x + ... + f(x_{n-1}) \cdot \Delta x$$

Onde $x_i = a + i\Delta x$ com i variando de $i = 0$ até $i = n - 1$.

• **Soma de Riemann pela direita (S_n):** Nessa soma, aproxima-se a função de seu valor no ponto final à direita. São gerados, então, múltiplos retângulos de base Δx e altura $f(a + i\Delta x)$. Tomando para $i = 1, 2, ..., n$ e adicionando as áreas resultantes, temos:

$$S_n = f(x_1) \cdot \Delta x + f(x_2) \cdot \Delta x + f(x_3) \cdot \Delta x + ... + f(x_n) \cdot \Delta x$$

Onde $x_i = a + i\Delta x$ com i variando de $i = 1$ até $i = n$.

Através desse processo nasce a integral que é o limite da soma de Riemann quando pegamos infinitos retângulos, ou seja, $n \to \infty$. A integral de Riemann é um valor absoluto e equivale à área compreendida entre a curva e o eixo das abscissas.

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} S_n = \int_a^b f(x)dx}$$

3.3.6 Cálculo da Integral Definida

Seja *F(x)* uma antiderivada qualquer de *f(x)*. Então:

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

• **Exemplos:**

• 1) $\displaystyle\int_0^1 xdx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$

• 2) $\displaystyle\int_1^2 (x^2+2)dx = \left[\frac{x^3}{3} + 2x\right]_1^2 = \left(\frac{2^3}{3} + 2\cdot 2\right) - \left(\frac{1^3}{3} + 2\cdot 1\right) = \frac{20}{3} - \frac{7}{3} = \frac{13}{3}$

• $\displaystyle\int_0^{\frac{\Pi}{4}} (cox)dx = [senx]_0^{\frac{\Pi}{4}} = sen\frac{\Pi}{4} - sen0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

3.3.7 Propriedades das Integrais Definidas

- $P_1) \displaystyle\int_a^a f(x)dx = 0$, pois $\displaystyle\int_a^a f(x)dx = [F(x)]_a^a = F(a) - F(a) = 0$
- $P_2) \displaystyle\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$, pois $\displaystyle\int_b^a f(x)dx = F(a) - F(b)$
- $P_3) \displaystyle\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$, como nas integrais indefinidas.
- $P_4) \displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, com $a \leq c \leq b$

Como propomos, foi apresentado, nesse capítulo, técnicas para a utilização das noções de Limites, Derivadas e Integrais de uma forma bem intuitiva. Em nenhum momento, os rigores e formalismos que o assunto requer, quando estudado em nível superior, foram abordados e acreditamos que, as técnicas apresentadas, estão ao alcance de entendimento dos alunos da Educação Básica.

Capítulo 4

APLICAÇÃO EM OUTRAS ÁREAS DO CONHECIMENTO

O Cálculo é usado em diversos ramos das ciências físicas, na ciência da computação, estatística, engenharia, economia, medicina e em outras áreas cujas aplicações podem ser modeladas e resolvidas com a utilização das suas técnicas. Observamos novamente que, em nenhum momento nesse trabalho, o aluno do Ensino Médio necessitará conhecer os assuntos de nível superior para entender e resolver os problemas ou seja, tudo que será tratado está ao alcance dos alunos desse nível de ensino. O que se pretende é explorar as competências e habilidades matemáticas que podem ser desenvolvidas no aluno, a partir do conhecimento e aplicação das suas noções.

- A Física faz uso intensivo do Cálculo. Os conceitos na mecânica clássica são interrelacionados pelo Cálculo. A massa de um objeto de densidade conhecida, o momento de inércia dos objetos, assim como a energia total de um objeto dentro de um sistema fechado podem ser encontrados usando o Cálculo;

- A teoria do eletromagnetismo de Maxwell e a teoria da relatividade geral de Einstein também podem ser expressas na linguagem do Cálculo Diferencial. Outro exemplo histórico do uso do Cálculo na física é a segunda lei de Newton que usa a expressão "taxa de variação" que se refere à derivada: A **taxa de variação** do momento de um corpo é igual à força resultante que age sobre o corpo e na mesma direção;

- A química também usa o Cálculo para determinar as variações na velocidade das reações e no decaimento radioativo;

• Na esfera da medicina, o Cálculo pode ser usado para encontrar o ângulo ótimo na ramificação dos vasos sanguíneos para maximizar a circulação;

• Na economia o Cálculo permite a determinação do lucro máximo fornecendo uma fórmula para calcular facilmente tanto o custo marginal quanto a renda marginal;

• Também há utilização das noções do Cálculo nas seguintes situações: Medições de variações constantes da corrente elétrica; estimativa da variação de um tumor na terapia radioativa; previsão de resultados econômicos; fabricação de embalagens pelo menor custo; fluxo máximo de tráfego em uma ponte; cálculo do número de poços petrolíferos a serem abertos para obter uma produção mais eficiente; cálculo da expansão de uma mancha de óleo no mar; etc.

Veremos, nesse capítulo, algumas dessas aplicações em diversas áreas do conhecimento como, por exemplo, a ilustração da figura 4.1. Faremos a modelagem e a resolução desse tipo de problema, estudado no Ensino Médio, utilizando as técnicas do Cálculo Diferencial e Integral.

Figura 4.1: Taxa de crescimento de uma cultura de bactérias

Fonte: www.matematiques.com.br

4.1 O Cálculo na Economia e Administração

4.1.1 Funções Marginais

Nesta seção, veremos algumas Funções Marginais como, por exemplo, o **Custo Marginal**, a **Receita Marginal**, o **Lucro Marginal** e o **Custo Médio Marginal**. Para entender o significado econômico do termo *"marginal"*, vamos analisar a seguinte situação:

Em uma indústria, na produção de **q** unidades de um certo tipo de aparelho, o custo **C**, em reais, foi estudado e suponhamos que $C = 0,1q^3 - 18q^2 + 1.500q + 10.000$. Nessas condições vamos responder e relacionar as respostas das perguntas: Qual o custo quando são produzidos 50 aparelhos? Qual o custo na produção do 51º aparelho? Qual a taxa de variação do custo em relação à quantidade quando $q = 50$?

• Para determinar o custo quando são produzidos 50 aparelhos, basta substituir $q = 50$ na funçaõ custo:

$$q = 50 \Rightarrow C(50) = 0,1 \cdot 50^3 - 18 \cdot 50^2 + 1.500 \cdot 50 + 10.000 = 52.500$$

Então, para a fabricação de 50 aparelhos, o custo é de R\$ 52.500,00

• Para determinar o custo na produção do 51º aparelho, como já sabemos qual o custo para fabricar 50 aparelhos, basta calcular o custo para fabricar 51 aparelhos

$$q = 51 \Rightarrow C(51) = 0,1 \cdot 51^3 - 18 \cdot 51^2 + 1.500 \cdot 51 + 10.000 = R\$ \, 52.947,10$$

e calcular a diferença dos custos

$$C(51) - C(50) = 52.947,10 - 52.500,00 = 447,10$$

Então, para a fabricação do 51º aparelho, o custo é de R\$ 447,10, ou seja, nesse caso, foram gastos R\$ 447,10 por uma unidade. Também podemos interpretar tal resultado de outra maneira: no nível de produção de 50 aparelhos, o custo adicional para a produção de mais uma unidade é de R$ 447,10.

• Para determinar a taxa de variação do custo, em relação a q quando $q = 50$, lembramos que a Taxa de Variação no ponto $q = 50$ é sinônimo da ***derivada*** da função C no ponto $q = 50$, ou seja, devemos calcular C'(50). Portanto, calculamos a função derivada do custo, C'(q), e substituimos $q = 50$ nessa função:

$$C(q) = 0,1q^3 - 18q^2 + 1.500q + 10.000 \Rightarrow C'(q) = 0,3q^2 - 36q + 1.500$$

$$q = 50 \Rightarrow C'(50) = 0,3 \cdot 50^2 - 36 \cdot 50 + 1.500 = 450 \Rightarrow C'(50) = 450$$

Então, a taxa de variação do custo em $q = 50$ é $C'(50) = 450$ (R$/unidade). lembrando que, para a fabricação do 51º aparelho, o custo encontrado para uma unidade foi de R$ 447,10, notamos que tal valor ***"é próximo"*** da taxa de variação 450 (R$/unidade) em $q = 50$. A intenção é mostrar que não é casual a proximidade entre os valores 447,10 e 450 encontrados, ou seja, existe um vínculo entre o custo na fabricação do 51º aparelho e a taxa de variação em $q = 50$. Como obtivemos o valor 447,10 fazendo C(51) - C(50), podemos reescrever essa diferença como C(50+1) - C(50). Dividindo essa diferença dos custos pela diferença das quantidades, obteremos a ***Taxa de Variação Média*** (T_{vm}) do custo em relação à quantidade no intervalo de 50 até 51, ou seja:

$$T_{vm} = \frac{C(51) - C(50)}{51 - 50} = \frac{C(50+1) - C(50)}{1} = 447,10$$

Então, a Taxa de variação média de C(q) para o intervalo de 50 até 50 + h é dada por:

$$\frac{C(50+h) - C(50)}{h}$$

Como a derivada da função custo no ponto $q = 50$ é obtida ao calcular o limite da divisão:

$$\frac{C(50+h) - C(50)}{h}$$

para $h \to 0$, temos:

$$C'(50) = \lim_{h \to 0} \frac{C(50+h) - C(50)}{h} = 450$$

Então, o acréscimo de custo para o acréscimo de 1 unidade produzida, C(51) - C(50) = 447,10, é conhecido como ***Custo Marginal***. Portanto, custo marginal, representa o custo adicional para a produção de mais 1 unidade.

Percebemos pelos cálculos que tal valor pode ser aproximado pelo cálculo da derivada do custo, C'(q), no ponto $q = 50$, ou seja, C'(50). Como tal aproximação é bastante razoável e como o significado da derivada do custo em um ponto está intimamente ligado ao cálculo do custo marginal, além, é claro, da rapidez e praticidade de calcular o custo marginal a partir da derivada do custo, os economistas costumam também considerar o ***Custo Marginal***, em nível produção dado, como a ***derivada da função custo*** em um ponto dado. Portanto, em análises econômicas e administrativas, definimos a ***função Custo Marginal***, simbolizada por C_{mg}, como a ***derivada da função custo:***

C_{mg} = ***Função custo marginal*** = C'(q)

Estendendo para outras situações práticas e análises os raciocínios desenvolvidos que nos levaram a conceituar o *Custo Marginal*, dessa forma, temos:

• A ***Receita Marginal*** nos dá a variação da receita correspondente ao aumento de uma unidade na venda de um produto. A ***função Receita Marginal*** é obtida pela ***derivada da função receita***. Se a função Receita é simbolizada por R(q), então:

R_{mg} = ***Função Receita Marginal*** = R'(q)

• O ***Lucro Marginal*** nos dá a variação do lucro correspondente ao aumento de uma unidade na venda de um produto. A ***função Lucro Marginal*** é obtida pela ***derivada da função lucro.*** Se a função lucro é simbolizada por L(q), então:

L_{mg} = ***Função Lucro Marginal*** = L'(q)

• O ***Custo Médio Marginal*** nos dá a variação do custo médio de um produto correspondente ao aumento de uma unidade na produção dele. A ***função Custo Médio Marginal*** é obtida pela ***derivada da função Custo Médio.*** Se a função custo médio é simbolizada por C_{me} $\left(C_{me} = \dfrac{C(q)}{q}\right)$, então:

$$C_{memg} = \textbf{\textit{função Custo Médio Marginal}} = C'_{me}(q)$$

▲ **Exemplo resolvido 1:** Suponhamos que em uma fábrica de portões eletrônicos, o custo ao se produzir q unidades de um tipo de portão é $C = 5q^2 + 50q + 125$, e queremos:

a) Obter as funções Custo Marginal, Custo Médio e Custo Médio Marginal;

b) Obter o número de portões produzidos que dá o custo médio mínimo. Obtenha também o custo médio mínimo;

c) Esboçar o gráfico do custo médio;

d) Esboçar, sobrepostos, os gráficos do custo médio e do custo marginal.

▼**Resoluções:**

a) A função Custo Marginal (C_{mg}) é a derivada da função Custo, então:

$$C_{mg} = C'(q) \Rightarrow C_{mg} = 2 \cdot 5q^{2-1} + 50^{1-1} + 0 = 10q + 50 \Rightarrow C_{mg} = 10q + 50$$

A função Custo Médio (C_{me}) é dada por: $C_{me} = \dfrac{C(q)}{q}$, então:

$$C_{me} = \frac{5q^2 + 50q + 125}{q} = 5q + 50 + \frac{125}{q}$$

A função Custo Médio Marginal (C_{memg}) é a derivada da função Custo Médio, então:

$$C_{memg} = C'_{me} \Rightarrow 5 + 0 + \frac{0 \cdot q - 125 \cdot 1}{q^2} = 5 - \frac{125}{q^2} \Rightarrow C_{memg} = 5 - \frac{125}{q^2}$$

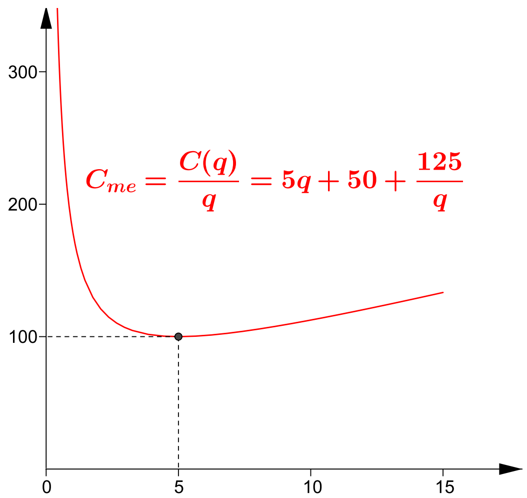
b) Fazendo $C_{memg} = 0$, temos: $5 - \dfrac{125}{q^2} = 0 \Rightarrow q^2 = \dfrac{125}{5} = 25 \Rightarrow q = \pm\sqrt{25} = \pm 5 \Rightarrow q = 5$

Agora, substituindo $q = 5$ em C_{me}, temos: $C_{me}(5) = 5 \cdot 5 + 50 + \dfrac{125}{5} = 25 + 50 + 25 = 100$

Portanto, deve ser produzido 5 portões para obter um custo médio de R$ 100.

c) Gráfico da função Custo Médio (C_{me})

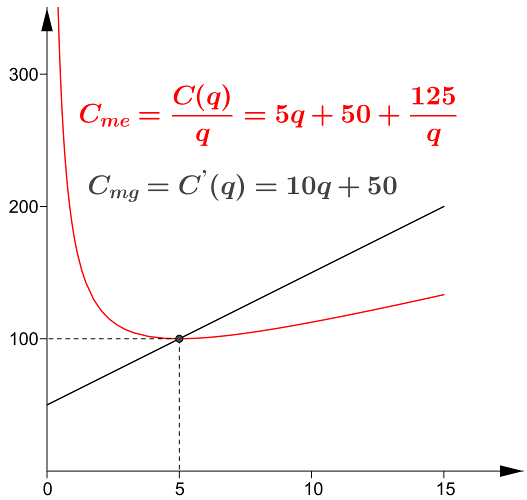
Figura 4.2: Gráfico da Função Custo Médio



Fonte: Autoral-Geogebra

d) Gráfico da função Custo Médio com a função Custo Marginal

Figura 4.3: Gráfico da Função Custo Médio x Custo Marginal



Fonte: Autoral-Geogebra

Obs: Vemos, no gráfico da figura 4.3, que o ***Custo Médio Mínimo*** ocorre em um ponto em que o ***Custo Marginal*** é igual ao ***Custo Médio:*** $C_{mg} = C_{me}$, de fato, vejamos:

$$(C_{me})' = \left(\frac{C(q)}{q}\right)' \Rightarrow C_{memg} = \frac{C'(q) \cdot q - C(q) \cdot 1}{q^2} \Rightarrow C_{memg} = \frac{C'(q) \cdot q - C(q)}{q^2}$$

Fazendo o Custo Médio marginal igual a zero, $C_{memg} = 0$, temos: $\dfrac{C'(q) \cdot q - C(q)}{q^2} = 0$

Supondo $q \neq 0$ tal divisão é zero somente se o numerador for zero, ou seja:

$$C'(q) \cdot q - C(q) = 0 \Rightarrow C'(q) \cdot q = C(q) \Rightarrow C'(q) = \frac{C(q)}{q} \Rightarrow \boxed{\mathrm{C}_{mg} = C_{me}}$$

▲ **Exemplo resolvido 2:** Suponhamos que o custo total envolvido na fabricação de x calculadoras seja dado por $C(x) = 0.02x^2 + 4x + 110$, e queremos:

a) Encontrar o Custo Real envolvido na fabricação da 50º calculadora;

b) Encontrar a função Custo Marginal;

c) Determinar e interpretar C'(49).

▼ **Resoluções:** Então, temos:

a) O custo real na fabricação da 50º calculadora é dado por: $C(50) - C(49)$, logo:

$C(50) = 0.02 \cdot (50)^2 + 4 \cdot 50 + 110 = 50 + 200 + 110 = 360$

$C(49) = 0.02 \cdot (49)^2 + 4 \cdot 49 + 110 = 48.02 + 196 + 110 = 354.02$

$C(50) - C(49) = 360 - 354.02 = 5.98$

Portanto, o custo real é de R$ 5.98

b) A função Custo Marginal é a derivada da função Custo, logo:

$$C_{mg}(x) = C'(x) = 0.04x + 4$$

c) $C'(49) = 0.04 \cdot 49 + 4 = 1.96 + 4 = 5.96 \Rightarrow C'(49) = C_{mg}(49) = R\$\ 5.96$

$C'(49)$ indica a taxa de variação em $x = 49$, ou seja, o custo marginal na produção da 50º calculadora. Observamos a ***proximidade*** com o Custo Real, onde os cálculos foram mais simples com o uso da noção de derivada.

▲ **Exemplo resolvido 3:** Suponhamos que em uma fábrica de ventiladores, a receita na venda de um tipo de ventilador é dada por $R(q) = 400q - 5q^2$. Suponha que o custo para produção dos ventiladores seja dado por $C(q) = 0.5q^2 + 70q + 200$. Desejamos determinar:

a) A quantidade "ótima"produzida que minimiza os custos;

b) A quantidade produzida que maximiza a receita;

c) A quantidade produzida que maximiza o lucro.

▼ **Resoluções:**

a) Devemos fazer o Custo Médio igual ao Custo Marginal: $C_{me} = C_{mg}$, então:

$$C_{me} = \frac{C(q)}{q} = \frac{0.5q^2 + 70q + 200}{q} = 0.5q + 70 + \frac{200}{q}$$

$C_{mg} = C'(q) = q + 70$, daí temos:

$$0.5q + 70 + \frac{200}{q} = q + 70 \Rightarrow \frac{200}{q} = 0.5q \Rightarrow q^2 = \frac{200}{0.5} \Rightarrow q^2 = 400 \Rightarrow q = \pm\sqrt{400} \Rightarrow q = \pm 20 \Rightarrow q = 20$$

Logo, devem ser produzidos 20 ventiladores para que o custo seja mínimo

b) Devemos fazer a Receita Marginal igual a zero: $R_{mg}(q) = R'(q) = 0$, então:

$$R'(q) = 400 - 10q = 0 \Rightarrow 10q = 400 \Rightarrow q = 40$$

Logo, a produção de 40 ventiladores maximiza a receita.

c) Devemos fazer o Lucro Marginal igual a zero: $L_{mg}(q) = L'(q)$, então:

$L(q) = R(q) - C(q) \Rightarrow L(q) = 400q - 5q^2 - (0.5q^2 + 70q + 200) = 400q - 5q^2 - 0.5q^2 - 70q - 200 = -5.5q^2 + 330q - 200 \Rightarrow L'(q) = -11q + 330 = 0 \Rightarrow 11q = 330 \Rightarrow q = 30$
Logo, a produção de 30 ventiladores maximiza o lucro.

4.1.2 Índice de Gini

Um dos números mais trazidos para discussões sobre liberalismo econômico é o índice de Gini, criado em 1912 pelo italiano Corrado Gini. Esse índice (que é melhor descrito como um coeficiente) pode ser usado como medida de dispersão de variáveis de uma amostra, como altura, peso, número de filhos, por exemplo, mas seu uso mais comum é para medir a desigualdade de renda entre as pessoas em uma economia.

Esse índice, denotado por **G**, apresenta uma variação numérica dentro do intervalo $0 \leqslant G \leqslant 1$, determinando duas situações extremas, à medida que G se aproxima de **zero** ou de **um**. Na primeira situaçao $(G \to 0)$, podemos afirmar que está ocorrendo uma pequena dispersão ou pequena desigualdade na renda de uma região ou população; porém, a segunda situação, quando $(G \to 1)$, implica uma grande dispersão ou grande desigualdade na renda de uma dada população.

A **curva de Lorenz**, por sua vez, carateriza a representação da proporção acumulada da população em porcentagem subdividida no eixo horizontal, com a proporção acumulada correspondente da renda, em porcentagem, dessa mesma população, no eixo vertical.

Apesar de sua fórmula matemática ser complexa, é relativamente simples de ser explicado com um exemplo. Podemos supor uma economia de apenas dez pessoas, sendo que a renda da primeira delas é de R$ 1.000, a da segunda é de R$ 2.000, e assim por diante até a última de renda igual a R$ 10.000. Vamos colocar esses dados, nessa ordem, no quadro 4.1.

Quadro 4.1: Distribuição das rendas (Realidade x Igualdade)

Renda	Acumulada	Renda	Acumulada
1.000	1.000	5.500	5.500
2.000	3.000	5.500	11.000
3.000	6.000	5.500	16.500
4.000	10.000	5.500	22.000
5.000	15.000	5.500	27.500
6.000	21.000	5.500	33.000
7.000	28.000	5.500	38.500
8.000	36.000	5.500	44.000
9.000	45.000	5.500	49.500
10.000	55.000	5.500	55.000

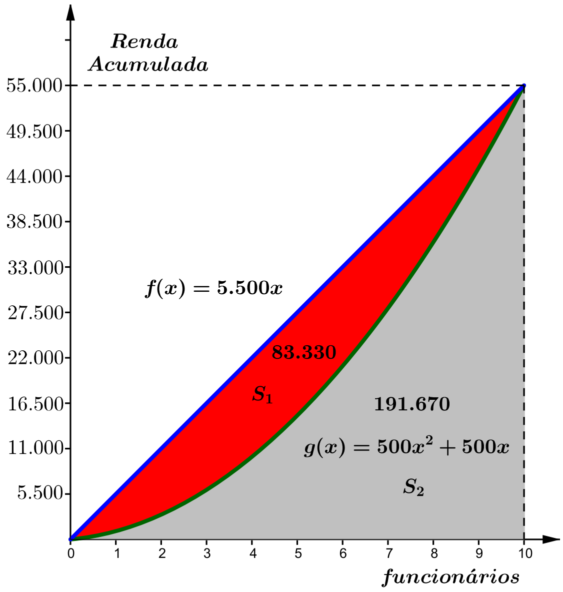
Fonte: Autoral

A segunda coluna recebe a renda acumulada dessas dez pessoas. Então o primeiro valor é igual aos R$ 1.000 de renda da primeira pessoa; o segundo é igual a esses R$ 1.000 mais os R$ 2.000 de renda da segunda pessoa; e assim por diante até a décima pessoa com uma renda acumulada (que será igual à renda total da economia) de R$ 55.000.

As duas últimas colunas mostram como seriam esses números se a renda dessa economia fosse distribuída uniformemente por toda a população. Podemos ver que nesse caso cada um receberia seus 10% de R$ 55.000, ou seja $\dfrac{55000}{10} = 5500$, e na última coluna temos essa renda acumulada como feito anteriormente.

Agora, precisamos colocar as duas colunas de renda acumulada em um gráfico (Figura 4.4). A primeira renda acumulada, $g(x)$, é representada pela parábola, e a última, $f(x)$, pela reta.

Figura 4.4: Gráfico de distribuição das rendas



Fonte: Autoral-Geogebra

Essas duas linhas formam duas áreas no gráfico, S_1 e S_2. O coeficiente de Gini (**G**) é igual à área S_1 (R\$ 83.330) dividida por toda a área, $S_1 + S_2$, do gráfico (83.330 + 191.670 = R\$ 275.000). Portanto, nesse nosso exemplo, teremos:

$$\frac{10 \times 55.000}{2} = 275.000$$

Contudo, a área S_1 não representa uma figura geométrica conhecida, daí a necessidade de utilizar a noção de **integral** para fazer o cálculo que é realizado da seguinte forma:

$$G = \int_0^{10} [f(x) - g(x)]dx = \int_0^{10} [5500x - (500x^2 + 500x)]dx = \int_0^{10} (5000x - 500x^2)dx \Rightarrow$$

$$\left[\frac{5000x^2}{2} - \frac{500x^3}{3}\right]_0^{10} = 2500 \cdot (10)^2 - \frac{500}{3} \cdot (10)^3 = 250.000 - 166.666,66 \cong 83.330$$

Daí, teremos:

$$G = \frac{83.330}{275.000} \cong 0.30$$

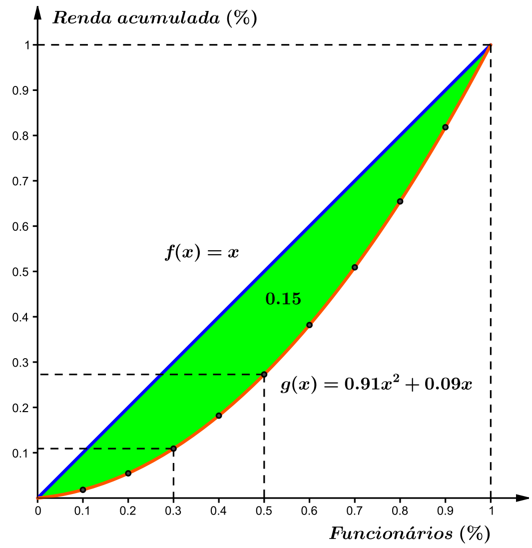
Agora vamos mostrar as informações no quadro 4.2 e no gráfico da figura 4.5, dados a seguir, organizados em percentuais, para a construção da curva de Lorenz (curva vermelha, $g(x)$, da figura 4.5).

Quadro 4.2: Distribuição das rendas em % (Curva de Lorenz x Igualdade)

% dos funcionários	% da renda acumulada	% dos funcionários	% da renda
0.1	0.02	0.1	0.1
0.2	0.05	0.2	0.2
0.3	0.11	0.3	0.3
0.4	0.18	0.4	0.4
0.5	0.27	0.5	0.5
0.6	0.38	0.6	0.6
0.7	0.51	0.7	0.7
0.8	0.65	0.8	0.8
0.9	0.82	0.9	0.9
1.0	1.0	1.0	1.0

Fonte: Autoral

Figura 4.5: Gráfico de distribuição das rendas em %
Curva de Lorenz x Igualdade



Fonte: Autoral-Geogebra

O coeficiente de Gini (G) é dado por: $\boxed{G = 2\int_0^1 [f(x) - g(x)]dx}$, então temos:

$$G = 2 \cdot \int_0^1 [f(x) - g(x)]dx = 2 \cdot \int_0^1 [x - (0.91x^2 + 0.09x)]dx = 2 \cdot \int_0^1 (0.91x - 0.91x^2)dx \Rightarrow$$
$$1.82 \cdot \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 1.82 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = 1.82 \cdot \frac{1}{6} \cong 0.30$$

No modelo matemático de Gini devemos multiplicar por 2 o valor da integral definida, pois os dados estão organizados em percentuais. No cálculo da área total obtemos: $\frac{1 \cdot 1}{2} = 0.5 = 50\%$, daí a necessidade da multiplicação.

▲ **Exemplo Resolvido:** Um orgão governamental, através dos resultados da Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios (PNAD), certificou-se que a Curva de Lorenz para a distribuição de renda de uma cidade pode ser caracterizada pela função $L(x) = 0.25x + 0.75x^2$ e pela reta de igualdade $I(x) = x$, $0 \leq x \leq 1$. Pedimos:

a) O índice de Gini e sua interpretação quanto ao nível de concentração;

b) A representação gráfica da Curva de Lorenz em decis (10%).

▼ **Resoluções:**

a) Calculando o índice de Gini:

$G = 2 \cdot \int_0^1 [I(x) - L(x)]dx \Rightarrow G = 2 \cdot \int_0^1 [x - (0.25x + 0.75x^2]dx = 2 \cdot \int_0^1 [0.75x - 0.75x^2]dx = 1.5 \cdot \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 1.5 \cdot \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right] = 1.5 \cdot \frac{1}{6} = 0.25 = 25\%$

Logo, $G = 0.25$, o que indica um baixo grau de concentração ou pequena desigualdade na renda dessa cidade.

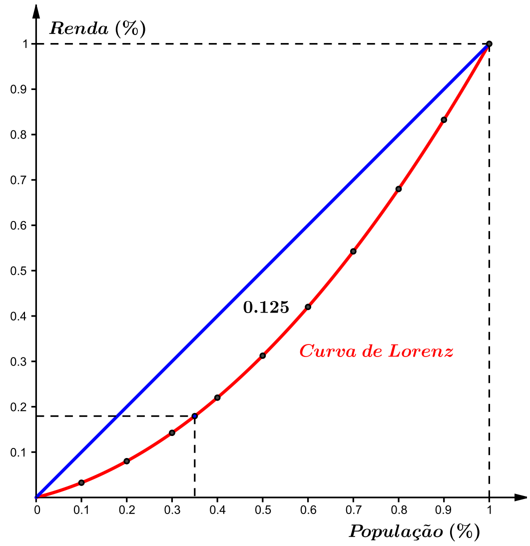
b) Gerando o quadro 4.3 para a construção gráfica (figura 4.6), temos:

Quadro 4.3: População(%) x Renda(%)

x (decis) em %	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
y (renda) em %	0.033	0.080	0.143	0.220	0.313	0.420	0.543	0.680	0.833	1.000

Fonte: Autoral

Figura 4.6: Curva de Lorenz



Fonte: Autoral-Geogebra

4.2 O Cálculo na Matemática Financeira

4.2.1 Valor Futuro e Valor Presente de um Fluxo de Renda

• **Capitalização Contínua:** Sabemos que o Montante M de uma aplicação inicial P no sistema de capitalização a juros compostos a uma taxa i (escrita na forma decimal) durante um período n é dado por:

$$\boxed{M = P \cdot (1+i)^n}$$

Reescrevendo o período como $n = x$, temos: $M = P \cdot (1+i)^x$

Se durante o período x quisermos realizar k capitalizações, obtemos uma nova expressão para o montante: $M = P \cdot \left(1 + \frac{i}{k}\right)^{k \cdot x} \Rightarrow M = P \cdot \left[\left(1 + \frac{i}{k}\right)^k\right]^x$

Se fizermos o número de capitalizações crescer indefinidamente, ou seja, $k \to \infty$, obtemos a chamada ***capitalização contínua***, e o fator de correção do montante tenderá a um número limite. Estimando numericamente $\left(1 + \frac{i}{k}\right)^k$, quando $k \to \infty$, observamos que:

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{i}{k}\right)^k = e^i$$

De um modo geral, na capitalização contínua para uma aplicação em que o capital inicial P, a taxa nominal anual i e o período em anos é x, o montante M será:

$$\boxed{M = P \cdot e^{i \cdot x}}$$

• **Valor Futuro de um Fluxo de Renda:** A renda gerada em uma empresa não é calculada apenas ao final de um ano, mês ou semana. A renda gerada pode ser calculada diariamente e em vários instantes; nesse sentido, podemos falar de um ***fluxo de renda.*** É comum uma empresa, ao gerar uma renda, investi-la para obter juros, acumulando assim as rendas geradas e os juros obtidos no investimento de tais rendas; nesse sentido, podemos falar do ***Valor Futuro Acumulado de um Fluxo de Renda.***

Podemos utilizar a **integral definida** para calcular o *Valor Futuro Acumulado de um Fluxo de Renda.* Em vários instantes, a renda gerada compõe o Fluxo de Renda mas, por simplicidade, consideramos anual a taxa de geração da renda. Tal taxa será dada pela função $R(x)$, onde x representa o tempo dado em anos.

Segundo Murolo [12], o Valor Futuro de um Fluxo de Renda (VF), após N anos, onde $R(x)$ é a taxa na qual a renda é gerada anualmente e i é a taxa de juros compostos anualmente, é dado por:

$$\boxed{VF = e^{iN} \cdot \int_0^N R(x)e^{-ix}dx}$$

▲ **Exemplo Resolvido:** Para uma empresa, um determinado produto gera uma renda de R\$ 500.000 por ano. Ao ser obtida, tal renda é aplicada várias vezes ao dia a uma taxa anual de 8% composta continuamente. Vamos calcular o valor futuro acumulado para esse fluxo de renda após 5 anos.

▼ **Resolução:** Segundo os dados temos: $i = 0.08$, $N = 5$ e $R(x) = 500.000$, então:

$$VF = e^{0.08 \cdot 5} \cdot \int_0^5 500.000 e^{-0.08x} dx = 500.000 e^{0.4} \int_0^5 e^{-0.08x} dx$$

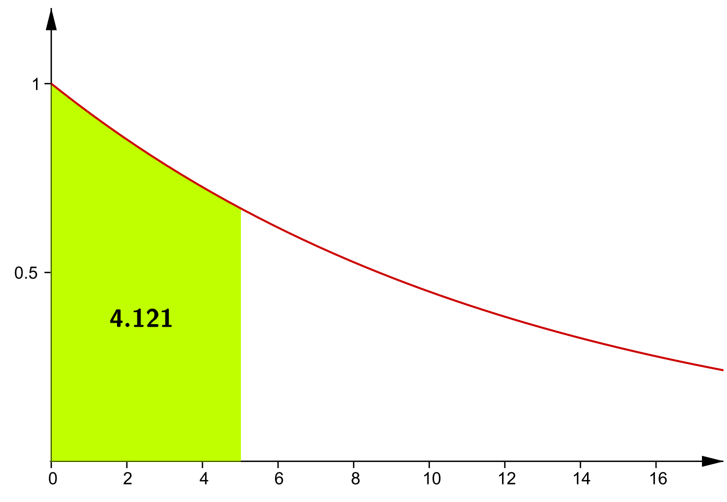
Calculando a integral indefinida correspondente $\int e^{-0.08x} dx$, pelo método da substituição:

$u(x) = -0.08x \Rightarrow du = -0.08dx \Rightarrow dx = \frac{1}{-0.08} du \Rightarrow dx = -12.5du \Rightarrow \int e^{-0.08x} dx = \int e^u(-12.5du) = -12.5 \int e^u du = -12.5e^u = -12.5e^{-0.08x}$, então a integral definida será:

$$\int_0^5 e^{-0.08x} dx = \left[-12.5e^{-0.08x}\right]_0^5 = -12.5e^{-0.08 \cdot 5} - (-12.5e^{-0.08 \cdot 0}) \cong -8.379 + 12.5 = 4.121$$

Vejamos esse valor, obtido a partir do esboço no Geogebra, ilustrado no gráfico da figura 4.7 a seguir:

Figura 4.7: Integral de $f(x) = e^{-0.08x}$ com $0 \leq x \leq 5$



Fonte: Autoral-Geogebra

Logo, obtemos o Valor Futuro do Fluxo de Renda:

$$VF = 500.000e^{0.4} \cdot \int_0^5 e^{-0.08x} dx = 500.000e^{0.4} \cdot 4.121 = 3.073.904,36$$

Assim, o Valor Futuro Acumulado é de R$ 3.073.904,36.

• **Valor Presente de um Fluxo de Renda:** Existem situações em que é interessante conhecer o *Valor Presente de um Fluxo de Renda*, ou seja, para um certo período, qual o capital que deve ser aplicado inicialmente para que, ao final desse período, o montante obtido seja equivalente ao Valor do Futuro de um Fluxo de Renda correspondente.

Para Murolo [12], com a mesma taxa i de juros compostos continuamente, se aplicarmos um capital P após N anos, obtemos um montante $M = P \cdot e^{iN}$, e tal montante deve ser igual ao *Valor Futuro do Fluxo de Renda:*

$$P \cdot e^{iN} = e^{iN} \cdot \int_0^N R(x)e^{-ix}dx$$

Dividindo ambos membros da igualdade por e^{iN}, obtemos o capital inicial (Valor Presente do Fluxo de Renda) que, aplicado inicialmente, iguala-se ao montante do Valor Futuro do Fluxo de Renda:

$$P = \int R(x)e^{-ix}dx$$

Assim, temos a expressão que calcula o ***Valor Presente de um Fluxo de Renda*** (VP), onde N é o número de anos, $R(x)$ é a taxa na qual a renda é gerada anualmente e i é a taxa de juros compostos anualmente:

$$\boxed{VP = \int_0^N R(x)e^{-ix}dx}$$

▲ **Exemplo Resolvido:** Em uma empesa, a produção de uma máquina é vendida e proporciona uma renda de R$ 25.000 por ano. Ao ser obtida, tal renda é aplicada várias vezes ao dia a uma taxa anual de 10% composta continuamente. Vamos obter o Valor Presente dessa máquina, considerando sua vida útil de 15 anos e mantidas as mesmas taxas de renda e de juros nesse período.

▼ **Resolução:** O Valor Presente da máquina será o Valor Presente do Fluxo de Renda gerado por ela. Considerando os dados $N = 15$, $R(x) = 25.000,00$ e $i = 0.1$, teremos:

$$VP = \int_0^N R(x)e^{-ix}dx \Rightarrow VP = \int_0^{15} 25.000e^{-0.1x}dx = 25000\int_0^{15} e^{-0.1x}dx$$

Calculando a integral indefinida $\int e^{-0.1x}dx$ pelo método da substituição:

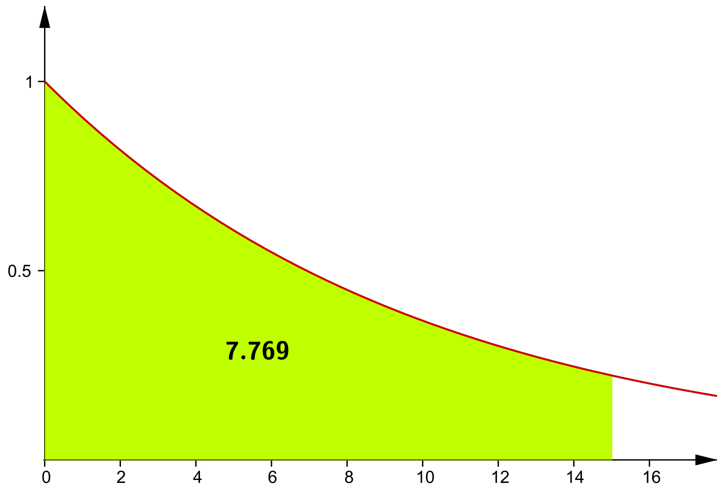
$u(x) = -0.1x \Rightarrow du = -0.1dx \Rightarrow dx = \dfrac{1}{-0.1}du \Rightarrow dx = -10du \Rightarrow \int e^{-0.1x}dx = \int e^u(-10du) \Rightarrow -10\int e^u du = -10e^u = -10e^{-0.1x}$

Então, a integral definida será:

$$\int_0^{15} e^{-0.1x}dx = \left[-10e^{-0.1x}\right]_0^{15} = -10e^{-0.1\cdot 15} - (-10e^{-0.1\cdot 0}) \cong -2.231 + 10 = 7.769$$

Vejamos esse valor, obtido a partir do esboço no Geogebra, ilustrado no gráfico da figura 4.8 a seguir:

Figura 4.8: Integral de $f(x) = e^{-0.1x}$ com $0 \leq x \leq 15$



Fonte: Autoral-Geogebra

Logo, obtemos o Valor Presente do Fluxo de Renda:
$VP = 25000 \int_0^{15} e^{-0.1x} dx = 25000 \cdot 7.769 = 194.225,00 \Rightarrow VP = R\$\ 194.225,00$

4.3 O Cálculo na Biologia

4.3.1 Modelagem do Problema de Biologia Populacional

Uma população é um grupo de indivíduos da mesma espécie que tem uma grande probabilidade de interação entre si, sendo que **Biologia Populacional** é o estudo de populações biológicas. Biologia Populacional é, por natureza, uma ciência *preocupada* com números, no sentido de compreender, explicar, predizer alterações no tamanho da população.

Compreender, explicar e predizer a dinâmica de populações biológicas requer **Modelos Matemáticos**. Os Modelos Matemáticos são importantes para se ter argumentos teóricos precisos sobre fatores que afetam a variação do tamanho populacional.

Um crescimento populacional é independente da sua densidade se as taxas de nascimento e mortalidade não dependem do tamanho da população. Examinaremos modelos para uma única espécie, sendo que as seguintes hipóteses são consideradas:

- A taxa de crescimento é proporcional ao número de indivíduos;
- A taxa de mortalidade é proporcional ao número de indivíduos.

Sejam $T = T(t)$ o tamanho da população num instante t, n a taxa de natalidade *per capita* e m a taxa de mortalidade *per capita*. A taxa de variação do tamanho da população é dada pela taxa de nascimento menos a de morte. A taxa de nascimento numa população é dada pela taxa de nascimento *per capita* multiplicada pelo número de indivíduos, ou seja, nT. De maneira análoga, a taxa de mortalidade é mT. A taxa de variação é denotada por $\frac{dT}{dt}$, que é derivada de T em relação a t, então:

$$\frac{dT}{dt} = nT - mT \Rightarrow \frac{dT}{dt} = rT$$

Onde $r = n - m$ é a taxa de crescimento.

Existem problemas, em particular os biológicos, que é dada uma informação inicial sobre a problemática. Por exemplo, a população inicial é 500 indivíduos, ou seja, $T(0) = 500$. Uma Equação Diferencial com uma condição inicial é chamada Problema de Valor Inicial (PVI). Considerando o problema de crescimento populacional com a condição $T(0) = T_0$ temos o seguite PVI:

$$\frac{dT}{dt} = rT \text{ e } T(0) = T_0$$

Neste caso, para resolver a equação a técnica de separação das variáveis é utilizada, então:

$$\frac{dT}{dt} = rT \Rightarrow \frac{dT}{T} = rdt \Rightarrow \int \frac{dT}{T} = \int rdt = r\int dt \Rightarrow \ln|T| = rt + C$$

Onde C é uma constante qualquer. Aplicando a função exponencial de ambos lados da equação, segue que:

$e^{\ln|T|} = e^{rt+C} = e^{rt} \cdot e^{C} = Ae^{rt}$, onde $A = e^C$ é uma constante qualquer positiva, desde que $e^C > 0$, então:

$$|T| = Ae^{rt} \Rightarrow T = Ae^{rt}$$

Como $T(0) = T_0$, obtemos que $A = T_0$ e portanto a solução do (PVI) é dada por:

$$\boxed{T = T_0e^{rt}}$$

Este modelo, que é conhecido como modelo de **Malthus**, prediz que:

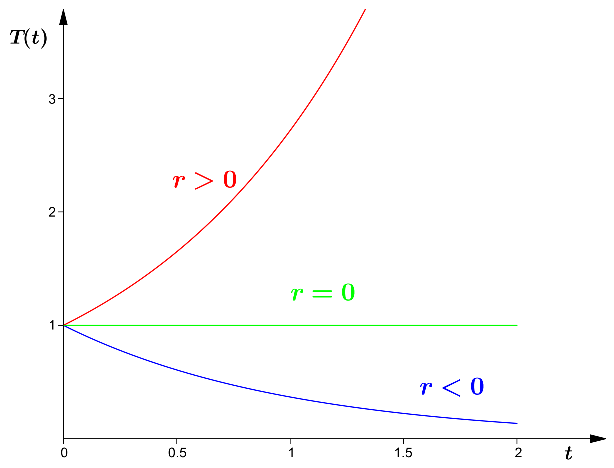
- Se $r = 0$ não há alteração no tamanho populacional;

- Se $r > 0$ a população cresce exponencialmente;

- Se $r < 0$ a população decresce exponencialmente.

Os gráficos representativos da solução deste PVI estão representados na Figura 4.9, onde três diferentes valores de r são usados, a citar, -1,0 e 1, sendo a condição inicial dada por $T(0) = 1$.

Figura 4.9: Gráfico para o modelo de Malthus



Fonte: Autoral-Geogebra

▲ **Exemplo Resolvido 1:** Uma cultura de bactérias, com uma quantidade inicial de Q_0 bactérias, cresce a uma taxa proporcional à quantidade presente. Ao fim de 20 minutos cresceu 5%. Vamos determinar:

a) A quantidade de bactérias em qualquer tempo t;

b) O tempo que levará para a cultura duplicar.

▼ **Resoluções:**

a) Seja Q(t) a quantidade presente de bactérias no instante t. Como a taxa de crescimento das bactérias é proporcional à quantidade presente, tem-se:

$$\frac{dQ}{dt} = kQ \Rightarrow Q(t) = Q_0 e^{kt}$$

Como $Q(20) = 1.05Q_0 \Rightarrow Q_0 e^{20k} = 1.05Q_0 \Rightarrow k = \frac{1}{20} \cdot \ln 1.05 = 0.00243$, portanto:

$$Q(t) = Q_0 e^{0.00243t}$$

b) Vamos agora determinar para qual valor de t tem-se $Q(t) = 2Q_0$.

$Q_0 e^{0.00243t} = 2Q_0 \Rightarrow e^{0.00243t} = 2 \Rightarrow 0.00243t = \ln 2 \Rightarrow t = \frac{1}{0.00243} . \ln 2 = 284,13 \Rightarrow$ $t = 284,13$ min.

▲ **Exemplo Resolvido 2:** Os biólogos afirmam que, sob condições ideais, o número de bactérias numa cultura cresce exponencialmente. Suponha que existam inicialmente 2000 bactérias em certa cultura e que existirão 6000 bactérias 20 minutos depois. Vamos determinar quantas bactérias existirão após 1 hora.

▼ **Resolução:** Das informações iniciais do problema, temos que: $Q_0 = 2000$ e $Q(20) = 6000$

$Q(t) = Q_0 e^{kt} \Rightarrow Q(20) = 2000e^{20k} \Rightarrow 6000 = 2000e^{20k} \Rightarrow e^{20k} = 3 \Rightarrow \ln e^{20k} = \ln 3 \Rightarrow$ $k = \frac{\ln 3}{20} \cong 0.055$

Então, $Q(t) = 2000e^{0.055t}$ e como 1 hora = 60 minutos, temos: $Q(60) = 2000e^{0.055 \cdot 60} \Rightarrow$ $Q(60) = 2000e^{3.3} \cong 54000$

Portanto, após 1 hora existirão, aproximadamente, 54000 bactérias.

4.4 O Cálculo na Química

4.4.1 Decaimento Radioativo

Resultados experimentais mostram que elementos radioativos desintegram a uma taxa proporcional à quantidade presente do elemento. Se $Q = Q(t)$ é a quantidade presente de certo elemento radioativo no instante t, então a taxa de variação de $Q(t)$ com respeito ao tempo t, denotada por $\frac{dQ}{dt}$, é dada por:

$$\boxed{\frac{dQ}{dt} = -kQ(t)}$$

onde k é uma constante que depende do elemento. Por exemplo, para o carbono-14 o valor aproximado é $k = 1,244 \times 10^{-4}$, para o rádio o valor aproximado é $k = 1,4 \times 10^{-11}$.

O valor da constante k de um elemento radioativo pode ser determinado através do tempo de "meia-vida" do elemento. A "meia-vida" é o tempo necessário para desintegrar metade da quantidade do elemento. Portanto, se a "meia-vida" do elemento for conhecida, a constante k pode ser obtida e vice-versa. As "meias-vidas" de vários elementos radioativos podem ser encontradas nos livros de Química. Por exemplo, a meia-vida do carbono-14 está entre 5538 e 5598 anos, sendo em média 5568 anos com um erro, para mais ou para menos, de 30 anos. O carbono-14 é uma importante ferramenta em pesquisa arqueológica conhecida como teste do radiocarbono. Denotamos a quantidade inicial do elemento radioativo por $Q(0) = Q_0$.

▲ **Exemplo Resolvido 1:** Suponhamos que um isótopo radioativo tenha uma meia-vida de 16 dias. Você deseja ter 30g do isótopo no final de 30 dias. Vamos calcular a quantidade inicial do isótopo.

▼ **Resolução:** Seja $Q(t)$ a quantidade presente no instante t e $Q(0) = Q_0$ a quantidade inicial. Resolvendo a equação $\frac{dQ}{dt} = -kQ(t)$, já modelada na seção anterior, temos que: $Q(t) = Q_0e^{-kt}$ e, para $t = 16 \Rightarrow Q(16) = \frac{Q_0}{2} \Rightarrow \frac{Q_0}{2} = Q_0e^{-16k} \Rightarrow e^{-16k} = \frac{1}{2}$

Aplicando o logaritmo natural em ambos os lados da igualdade, obtemos: $\ln e^{-16k} = \ln\frac{1}{2} \Rightarrow -16k = -0.693 \Rightarrow k = 0.0433$

Portanto, temos a função que determina a quantidade de isótopo radioativo em qualquer instante: $Q(t) = Q_0e^{-0.0433t}$

Para $t = 30$ dias e $Q(30) = 30g \Rightarrow Q_0 = \dfrac{30}{e^{-0.0433 \cdot 30}} \cong 110g$

Então, a quantidade inicial do isótopo é, aproximadamente, $110g$.

▲ **Exemplo Resolvido 2:** O isótopo radiotativo de Tório desintegra-se numa taxa proporcional à quantidade presente. Se 100 gramas desse material são reduzidos a 80 gramas em uma semana. Vamos determinar:
a) Uma expressão para a quantidade de Tório em qualquer tempo t;
b) O intervalo de tempo necessário para a massa decair à metade do seu valor inicial. (meia vida)

▼ **Resoluções:**
a) Seja Q(t) a quantidade de Tório em um instante t (dias). Como o Tório desintegra-se numa taxa proporcional à quantidade presente, temos:

$$\frac{dQ}{dt} = kQ$$

onde $k < 0$, pois Q(t) é descrescente. Como já vimos, a solução dessa equação diferencial é dada por $Q(t) = Q_0 e^{kt}$. Como a condição inicial é $Q(0) = Q_0 = 100$, então:

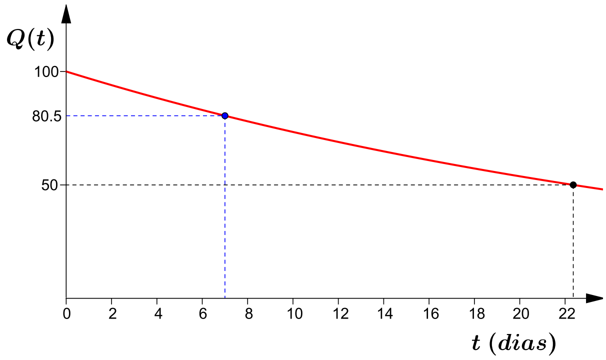
$Q(t) = 100e^{kt} \Rightarrow Q(7) = 100e^{7k} = 80 \Rightarrow e^{7k} = 0.8 \Rightarrow 7k = \ln 0.8 \Rightarrow k = \dfrac{1}{7} \cdot \ln 0.8 = -0.031 \Rightarrow k = -0.031$, logo tem-se: $\quad Q(t) = 100e^{-0.031t}$

b) Para calcular a meia vida do Tório deve-se considerar $Q(t) = \dfrac{Q_0}{2} = 50$, então:

$50 = 100e^{-0.031t} \Rightarrow e^{-0.031t} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow -0.031t = \ln \dfrac{1}{2} \Rightarrow t = \dfrac{-1}{0.031} \cdot \ln 0.5 \Rightarrow t = 22.36$ dias.

Vejamos o gráfico (figura 4.10) de Q(t), a seguir, que busca denotar tal situação:

Figura 4.10: Gráfico da função Q(t)



Fonte: Autoral-Geogebra

4.5 O Cálculo na Física

4.5.1 Derivadas Temporais

É a taxa de variação em função do tempo de grandezas como deslocamento e velocidade. Esse conceito é usado, por exemplo, na definição da grandeza velocidade instantânea.

• **Posição:** A *posição* x de uma partícula em um eixo x localiza a partícula em relação à origem desse eixo. A posição é uma grandeza vetorial, pois é caracterizada por sua direção, sentido e sua magnitude que corresponde ao seu valor numérico.

• **Deslocamento:** O *deslocamento* Δx de uma partícula é a variação de sua posição. O deslocamento é uma grandeza vetorial, pois é uma operação entre dois vetores.

$$\boxed{\Delta x = x_2 - x_1}$$

• **Velocidade média:** Quando uma partícula se desloca de uma posição x_1 para uma posição x_2 durante um intervalo de tempo $\Delta t = t_2 - t_1$, sua *velocidade média* durante esse intervalo é dada por:

$$\boxed{V_{md} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}}$$

• **Velocidade instantânea:** A *velocidade instantânea* $\boldsymbol{v}$, ou simplesmente velocidade, de uma partícula é dada por:

$$\boxed{v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}}$$

• **Aceleração média:** A *aceleração média* é a razão entre a variação em velocidade Δv e o intervalo de tempo Δt no qual essa variação ocorre:

$$\boxed{a_{md} = \frac{\Delta v}{\Delta t}}$$

• **Aceleração instantânea:** A *aceleração instantânea* $\boldsymbol{a}$, ou simplesmente aceleração, é igual à derivada primeira em relação ao tempo da velocidade $v(t)$ ou à derivada segunda da posição $x(t)$ em relação ao tempo:

$$\boxed{a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}}$$

• **Posição em função do tempo:** Considerando a aceleração $\boldsymbol{a}$ constante, a posição inicial x_0, a velocidade inicial v_0 e o tempo $\boldsymbol{t}$, temos a seguinte equação para a posição $\boldsymbol{x}$: $x = x_0 + v_0t + \dfrac{1}{2}at^2$, modelada conforme abaixo:

$$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow dv = adt$$

Integrando ambos lados da igualdade temos: $\displaystyle\int dv = \int adt \Rightarrow v = at + C$

Fazendo $t = 0 \Rightarrow v = a \cdot 0 + C \Rightarrow C = v_0 \Rightarrow v = v_0 + at$

Dado que $v = \dfrac{dx}{dt} \Rightarrow dx = vdt$, então:

$dx = (v_0 + at)dt \Rightarrow \displaystyle\int dx = \int (v_0 + at)dt \Rightarrow x = v_0t + \frac{1}{2}at^2 + C'$

Fazendo, novamente, $t = 0 \Rightarrow x = v_0 \cdot 0 + \frac{1}{2}a \cdot 0^2 + C' \Rightarrow C' = x_0$, então:

$$\boxed{x = x_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2}$$

▲ **Exemplo Resolvido:** Um corpo desloca-se segundo a equação horária $x(t) = \dfrac{t^3}{3} - 2t^2 + 3t + 2$. Vamos determinar:

a) A equação horária da velocidade;

b) A equação horária da aceleração;

c) A velocidade instantânea no tempo $t = 4s$ e $t = 6s$;

d) A aceleração instantânea no tempo $t = 3s$ e $t = 6s$.

▼ **Resoluções:**

a) A equação horária da velocidade v é dada por $v(t) = \dfrac{dx}{dt}$, então: $v(t) = \dfrac{3t^2}{3} - 2 \cdot 2t + 3 \Rightarrow v(t) = t^2 - 4t + 3$

b) A equação horária da aceleração *a(t)* é dada por $a(t) = \dfrac{dv}{dt}$, então: $a(t) = 2t - 4$

c) Basta substituir $t = 4$ e $t = 6$ na equação horária da velocidade, então:

$v(4) = 4^2 - 4 \cdot 4 + 3 \Rightarrow v(4) = 16 - 16 + 3 \Rightarrow v(4) = 3\ m/s$

$v(6) = 6^2 - 4 \cdot 6 + 3 \Rightarrow v(6) = 36 - 24 + 3 \Rightarrow v(6) = 15\ m/s$

d) Basta substituir $t = 3$ e $t = 6$ na equação horária da aceleração, então:

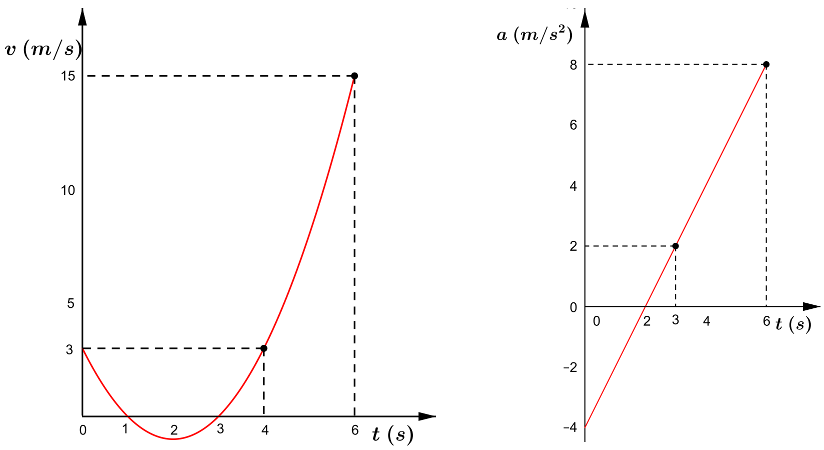
$a(3) = 2 \cdot 3 - 4 \Rightarrow a(3) = 6 - 4 \Rightarrow a(3) = 2\ m/s^2$

$a(6) = 2 \cdot 6 - 4 \Rightarrow a(6) = 12 - 4 \Rightarrow a(6) = 8\ m/s^2$

Vejamos os resultados expostos nos gráficos 4.11a e 4.11b a seguir:

Figura 4.11: Velocidade x Aceleração

(a) Velocidade $0 \leq t \leq 6$ (b) Aceleração $0 \leq t \leq 6$



Fonte: Autoral-Geogebra

4.5.2 Trabalho e Energia Cinética

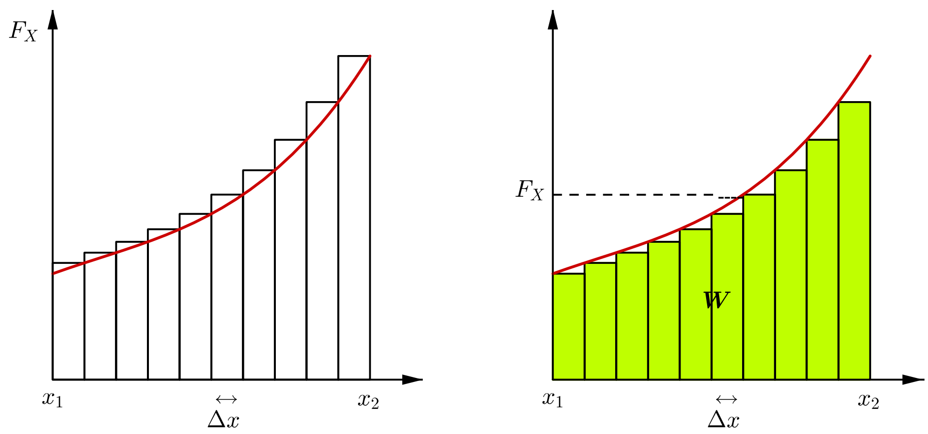
Muitos problemas de Mecânica não têm solução simples usando as Leis de Newton. Exemplo: velocidade de um carrinho de montanha-russa durante seu percurso (mesmo desprezando atrito e resistência do ar). Em algumas situações, esses problemas podem ser resolvidos usando os conceitos de trabalho e energia e o princípio de conservação da energia. O princípio de conservação da energia tem validade muito além da Mecânica Clássica, tratando-se de um princípio geral da Física.

• **Trabalho com Forças Variáveis:** Se a força não for constante (mas em movimento retilíneo), suponha que a componente x da força varie com a posição da seguinte forma: dividindo o deslocamento entre x_1 e x_2 em pequenos deslocamentos de tamanho Δ_x e em cada pequeno deslocamento a força é aproximadamente constante de modo que $\Delta W = F\Delta X$, conforme a figura 4.12b:

Figura 4.12: Trabalho com Forças Varíáveis

(a) Pequenos deslocamentos entre x_1 e x_2

(b) Soma das áreas dos retângulos sob à curva



Fonte: Autoral-Geogebra

Desta forma, somando-se todos pequenos trabalhos realizados, em cada deslocamento infinitesimal, obtemos o trabalho total entre x_1 e x_2 como a soma das áreas de todos os retângulos, no limite quando $\Delta X \to 0$

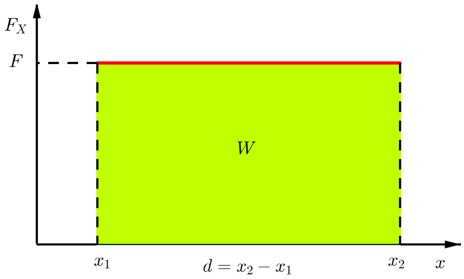
Conforme já visto, esta área é a ***integral definida*** da função $F(x)$ entre as posições x_1 e x_2.

$$\boxed{W = \int_{x_1}^{x_2} F dx}$$

▲ **Exemplo 1:** Seja uma força constante F que o gráfico da figura 4.13 esboça, então:

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F dx = F \int_{x_1}^{x_2} dx = F \cdot (x_2 - x_1) = Fd \Rightarrow \boxed{W = Fd}$$

Figura 4.13: Força Constante



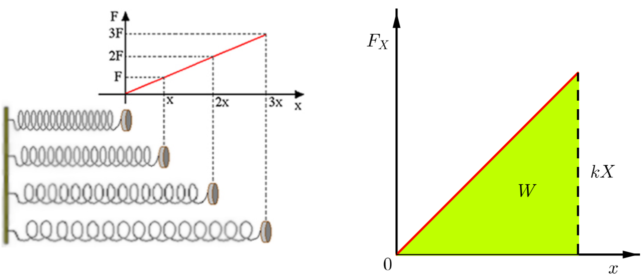
Fonte: Autoral-Geogebra

▲ **Exemplo 2:** Modelando o trabalho realizado para esticar uma mola (Lei de Hooke): **k** é a constante elástica da mola (unidade S.I.: N/m). De acordo com essa lei para pequenas deformações da mola, temos: $F(x) = -kx$. Veja a figura 4.14b a seguir, então:

$$W = \int_0^x F dx = \int_0^x -kx dx = \frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow \boxed{W = \frac{1}{2}kx^2}$$

Figura 4.14: Lei de Hooke

(a) Força Elástica (b) Trabalho Realizado



Fonte: (a) Google Imagens (b) Autoral-Geogebra

• **Energia Cinética e Teorema Trabalho-Energia:** O trabalho está relacionado a variações na velocidade de um corpo. Considere o trabalho de uma força resultante sobre um corpo, então: $W_{tot} = \int_{x_1}^{x_2} F dx = \int_{x_1}^{x_2} ma_x dx$

Notemos que: $a = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{dv}{dx} \cdot \dfrac{dx}{dt} = v\dfrac{dv}{dx}$, assim: $W_{tot} = \displaystyle\int_{x_1}^{x_2} mv\frac{dv}{dx}dx = m\int_{v_1}^{v_2} vdv$

$$\boxed{W_{tot} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1 2}$$

Da definição de Energia Cinética, sendo $K = \dfrac{1}{2}mv^2$, temos: $\boxed{W_{tot} = K_2 - K_1}$

Mostramos, neste capítulo, alguns problemas que podem ser modelados e resolvidos com os conhecimentos das noções do Cálculo, onde se apresenta como uma ferramenta que poderia facilitar o processo de ensino-aprendizagem da Matemática, e de outras disciplinas, no Ensino Médio, justificando a inclusão dos seus conceitos básicos nesta etapa. Também poderia proporcionar nos alunos motivação para o ingresso no ensino superior uma vez que evidencia a interdisciplinaridade, o que é amplamente cobrada nos planos pedagógicos dos PCNs.

ALGUMAS CONSIDERAÇÕES

Longe de ser uma lista completa, nesse trabalho mostramos a aplicabilidade das noções do Cálculo I em diversas áreas do conhecimento. Fundamentamos a possibilidade da inclusão do ensino de suas noções a partir do Ensino Médio, favorecendo a aprendizagem nesse nível de ensino. Apresentamos um estudo teórico das técnicas para o cálculo de Limites, Derivadas e Integrais com uma posterior aplicação dessas técnicas em situações-problemas inerentes ao currículo tradicional do Ensino Médio, especificamente, na Física, Biologia e na Química, evidenciando a possibilidade do Cálculo favorecer a interdisciplinaridade.

Estudos mostram que, no ensino superior, há um número elevado de reprovações na disciplina Cálculo I, conforme citamos nesse trabalho. Daí, ratificamos a necessidade de se promover uma reforma no currículo da educação básica, a qual contemple a abordagem das noções do Cálculo, na expectativa de minimizar tal situação.

Nesse sentido, mencionamos as discussões que estão sendo realizadas sobre esse tema e acreditamos que uma reforma curricular significativa, além de capacitar efetivamente o aluno em determinados conteúdos, pode corrigir certas distorções do ensino brasileiro.

Portanto, diante do exposto, a iniciação as noções do Cálculo I, a partir do Ensino Básico, deve ser considerada necessária nessas discussões curriculares, dando um novo enfoque no estudo das funções favorendo o processo de ensino-aprendizagem e, por conseguinte, capacitando o aluno para a continuidade dos estudos no ensino superior visto que tais noções são aplicadas em diversas áreas do conhecimento, conforme apresentamos nesse trabalho.

Referências

[1] ARAGÃO, Maria José. **História da Matemática**. Rio de Janeiro: Interciência - 2009.

[2] ÁVILA, Geraldo. **Cálculo das funções de uma variável**. v. 1, 7ª ed. Rio de Janeiro: LTC - 2011.

[3] ÁVILA, Geraldo. **O ensino do Cálculo no segundo grau**. Revista do Professor de Matemática, n.18, Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 1991, p.1-9.

[4] BARBOSA, Marcos Antonio. **O Insucesso no Ensino e Aprendizagem na Disciplina de Cálculo Diferencial e Integral**. Dissertação de Mestrado em Educação. PUCRS, Curitiba: 2004.

[5] DASSIE, Bruno Alves. **Euclides Roxo e a Educação Matemática no Brasil**. Rio de Janeiro, 2008. Tese de Doutorado. Programa de Pós-Graduação em Educacação. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro: 2008.

[6] Disponível em **http://www.profmat-sbm.org.br/funcionamento/regimento**.

[7] Disponível em **http://docslide.com.br/documents/conteudo-ciaba.html**.

[8] GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um curso de cálculo**. vol.1 5ª. ed. Rio de Janeiro: LTC - 2001.

[9] HALLIDAY, David; RESNICK, Robert; WALKER, Jearl. **Fundamentos de Física**. 8ª ed. Rio de Janeiro: LTC - 2008.

[10] IEZZI, Gelson. **Fundamentos de Matemática Elementar 8: limites, derivadas, noções de integral**. 5ª. ed. São Paulo: Atual - 1993.

[11] LOPES, Artur. **Algumas reflexões sobre a questão do alto índice de reprovação nos cursos de Cálculo da UFRGS**. Revista Matemática Universitária. Rio de Janeiro, n.26/27, p.123-146, jun./dez. 1999.

[12] MUROLO, Afrânio Carlos; BONETTO, Giácomo. **Matemática Aplicada a administração, economia e contabilidade**. 2ª ed. revista e ampliada. São Paulo: Cengage Learning - 2014.

[13] OTONE e SILVA, Maryneusa Cordeiro. **A Matemática do curso complementar da Reforma Francisco Campos**. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática - Departamento de Matématica, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo: 2006

[14] MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio** (PCN-EM). Brasil.MEC/SEMTEC. Secretaria de Educação Média e Tecnológica, Brasília, 2002.

[15] REZENDE, Wanderley Moura. **O Ensino de Cálculo: um problema do ensino superior de Matemática?** Anais do VIII ENEM, Mesa Redonda, Pernambuco: 2004.

[16] TAHAN, M. **O homem que calculava**. São Paulo: Círculo do livro - 1984.