UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Campus de Presidente Prudente-SP
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
(PROFMAT)

APLICAÇÃO DA MODELAGEM MATEMÁTICA NO ESTUDO DE FUNÇÕES: UMA PROPOSTA DE ATIVIDADE PARA AS ESCOLAS DE TEMPO INTEGRAL (ETI)

MARINALDO ZAGO

Orientador

Prof. Dr. Suetônio de Almeida Meira

2016

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Campus de Presidente Prudente-SP
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
(PROFMAT)

APLICAÇÃO DA MODELAGEM MATEMÁTICA NO ESTUDO DE FUNÇÕES: UMA PROPOSTA DE ATIVIDADE PARA AS ESCOLAS DE TEMPO INTEGRAL (ETI)

MARINALDO ZAGO

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre, junto ao programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Campus de Presidente Prudente-SP.

Orientador

Prof. Dr. Suetônio de Almeida Meira

2016

TERMO DE APROVAÇÃO

MARINALDO ZAGO

APLICAÇÃO DA MODELAGEM MATEMÁTICA NO ESTUDO DE FUNÇÕES: UMA PROPOSTA DE ATIVIDADE PARA AS ESCOLAS DE TEMPO INTEGRAL (ETI)

Dissertação APRESENTADA como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, pela seguinte banca examinadora:

Orientador: Prof. Dr. Suetônio de Almeida Meira
UNESP – Presidente Prudente

Prof. Dr. Enio Garbelini
UNIFADRA – Dracena

Prof. Dr. José Roberto Nogueira
UNESP – Presidente Prudente

Presidente Prudente, 29 de janeiro de 2016

Zago, Marinaldo.
Aplicação da modelagem matemática no estudo de funções : uma proposta de atividade para as escolas de tempo integral (ETI) / Marinaldo Zago. -- São José do Rio Preto, 2016
94 f. : il., gráfs., tabs.

Orientador: Suetônio de Almeida Meira
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Funções (Matemática) – Estudo e ensino. 3. Modelos matemáticos. 4. Escolas de tempo integral. 5. Motivação na educação. 6. Matemática – Metodologia. I. Meira, Suetônio de Almeida. II. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. III. Título.

CDU – 517.5(07)

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por todas as bênçãos que recebi em minha vida.

À minha esposa Joelina que sempre me deu apoio cada dia da minha vida, alimentando minha alma e coração com todo seu amor e dedicação.

Aos meus filhos Tiago e Taísa que sempre me deram incentivo para continuar batalhando em prol dos meus objetivos.

Deixo meu muito obrigado ao orientador, Prof. Dr. Suetônio de Almeida Meira, que auxiliou durante toda a pesquisa e elaboração deste trabalho.

Aos meus pais, Antônio e Ilde e às minhas irmãs Marlene, Meire e Marinês (in memoriam) por sempre estarem comigo, e a todos professores e amigos que me incentivaram todos esses anos, proporcionando novos conhecimentos a cada dia.

"A matemática é o alfabeto que Deus usou para escrever o Universo" (Galileu Galilei).

RESUMO

O ensino de Matemática vem passando por um grande conjunto de dificuldades. Isto pode ser comprovado com os resultados de alunos nas avaliações aplicadas em diferentes níveis e escalas, como o Saresp e o Enem.Um dos motivos que levaram a este quadro é o ensino de Matemática pautado por práticas tradicionais, pois, acaba sendo fator desmotivador para o ensino da disciplina. Uma metodologia alternativa, a Modelagem Matemática, pode ajudar a reverter este quadro, uma vez que trabalha com problemas reais, elencados do contexto dos próprios alunos, potencializando, deste modo, a motivação e o interesse, aguçando nos discentes a busca por soluções, mostrando as aplicações da Matemática no cotidiano. Neste trabalho foi realizada uma breve síntese das etapas envolvidas no processo de Modelagem Matemática, aplicada ao ensino de funções, seguido de seis propostas de atividades resolvidas para subsidiar o trabalho de professores pouco familiarizados com esta metodologia. Ainda, como forma de contribuir para uma importante atividade econômica do Município de Osvaldo Cruz-SP, foi realizada uma modelagem matemática com base em dados do setor de transportes, mais precisamente caminhões bitrens. Neste caso, trata-se da simulação de um exemplo mais complexo envolvendo o conceito de modelagem. Espera-se, por meio da divulgação desta pesquisa, contribuir para melhorar a qualidade do ensino de Matemática nas escolas públicas, tanto por meio de subsídio aos docentes, como pela proposição de metodologia com potencial de geração de envolvimento de alunos.

Palavras-chave: Ensino de Matemática; Modelagem Matemática; Motivação.

ABSTRACT

The teaching of mathematics has been experiencing a large set of difficulties. This can be proven by student results in assessments applied at different levels and scales, such as *Saresp* and *Enem*. One of the reasons that led to this situation is the teaching Mathematics guided by traditional practices, because it ends up being a demotivating factor to teach the subject. An alternative methodology, the Mathematical Modeling, may help change this situation, as it works with real problems, presented within students' context, therefore increasing their motivation and interest, sharpening them in the search for solutions, showing the mathematics' applications in everyday life. This work carried out a brief summary of the steps involved in the process of Mathematical Modeling, applied to teaching functions, followed by six proposals of solved activities to subsidize the work of teachers unfamiliar with this methodology. Also, in order to contribute to animportant economic activity in Osvaldo Cruz-SP, mathematical modeling was carried out based on the transport industry data, more precisely b-train trucks. In this case, it was the simulation of a more complex example involving the concept of modeling. By this research we expect to help improve the quality of mathematics teaching in public schools, not only through subsidies to teachers, but also with the methodology proposition generating potential engagement of students.

Keywords*:* Teaching of Mathematics; Mathematical Modeling; Motivation.

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O ensino-aprendizagem de Matemática nas escolas públicas no Estado de São Paulo está passando por grandes dificuldades. Verifica-se que os alunos que terminam o Ensino Médio estão aquém do esperado no desenvolvimento de competências para esta disciplina. De acordo com o Relatório Pedagógico do Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar do Estado de São Paulo (2014, p.26) 53,8% dos alunos das escolas estaduais que terminam o Ensino Médio estão no Nível de Proficiência “Abaixo do Básico” (não demonstram domínio suficiente dos conteúdos, competências e habilidades desejáveis para o ano/série escolar em que se encontram), 42,5% estão no “Básico” (demonstram domínio mínimo dos conteúdos, competências e habilidades, mas possuem as estruturas necessárias para interagir com a proposta curricular no ano/série subsequente), apenas 3,5% no “Adequado” (demonstram domínio pleno dos conteúdos, competências e habilidades desejáveis para o ano/série escolar em que se encontram) e 0,2% no nível “Avançado” (demonstram conhecimentos e domínio dos conteúdos, competências e habilidades acima do requerido no ano/série em que se encontram).

Este dado crítico, mostra que é preciso um esforço significativo de professores, governantes, profissionais da educação em geral, família, sociedade, para que esse quadro seja revertido.

São muitos os motivos que levaram o ensino de matemática a essa situação insatisfatória. Dentre eles, está a desmotivação dos alunos em estudar matemática, pois, muitas vezes, este é seletivo a aprender o que é de seu interesse. Os professores, de modo geral, não estão conseguindo motivar os alunos a estudarem matemática, dada a sua complexidade, exigindo muito esforço e concentração. Ainda, destaca-se o fato de muitas teorias não serem aplicadas no cotidiano, dificultando ao aluno o relacionamento entre a prática do dia-a-dia e o que é ensinado na escola.

Em grande parte das escolas públicas o ensino de matemática se dá de forma tradicional, onde o professor é o detentor de todo o saber matemático, e a aula transcorre sempre com os mesmos procedimentos, iniciando com exposições teóricas, deduções de fórmulas e teoremas, seguida da resolução de exemplos e posteriormente, de lista de exercícios de fixação. O aluno acaba sendo passivo, memorizando repetições e estabelecendo pouco significado ao que foi ensinado e supostamente compreendido. Ainda, tem grande dificuldade em encontrar aplicações práticas para o que memorizou.

Uma metodologia que pode ajudar a mudar esse panorama é a modelagem matemática aplicada no ensino, em razão de seu viés alternativo, que estuda um problema real do cotidiano do aluno. O assunto pode ser escolhido pelos próprios discentes ou sugerido pelo professor, e, a partir deste, serão feitas pesquisas para a familiarização com os temas que farão parte da resolução do problema. Na sequência, é feita a matematização do problema, buscando a formulação e a resolução por meio de um modelo matemático. Finalmente será feita uma interpretação dos resultados encontrados e validação desses resultados.

Essa metodologia objetiva potencializar a motivação dos discentes, uma vez que trabalha com a matemática tangível no dia-a-dia, ressalta sua importância na resolução dos problemas e motiva os alunos a se envolverem com os temas.

Segundo Bassanezi (2013, p.15), “esse gosto se desenvolve com mais facilidade quando é movido por interesses e estímulos externos à Matemática, vindos do ”mundo real”. A matemática aplicada é o caminho”.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática do Ensino Médio na seção Rumos e Desafios estabelece que:

> [...] em Matemática..., a resolução de problemas é uma importante estratégia de ensino. Os alunos, confrontados com situações-problema, novas mas compatíveis com os instrumentos que já possuem ou que possam adquirir no processo, aprendem a desenvolver estratégia de enfrentamento, planejando etapas, estabelecendo relações, verificando regularidades, fazendo uso dos próprios erros cometidos para buscar novas alternativas; adquirem espírito de pesquisa, aprendendo a consultar, a experimentar, a organizar dados, a sistematizar resultados, a validar soluções; desenvolvem sua capacidade de raciocínio, adquirem autoconfiança e sentido de responsabilidade; e, finalmente, ampliam sua autonomia e capacidade de comunicação e de argumentação (PCN,1997).

Nessa busca pela motivação, o caminho a ser seguido é aquele que considera o conhecimento matemático prévio do aluno, mesmo sem as devidas formalidades. A partir deste, o aluno é motivado a ampliar esse conhecimento movido pelo prazer em aprender. Essa aprendizagem deve ir ao encontro de uma matemática cada vez mais formal, uma matemática que seja útil na resolução dos problemas com todo o rigor necessário e beleza das suas propriedades.

O que nos motivou a realizar este trabalho foi a busca por uma metodologia que possa motivar o aluno a estudar matemática, tirando-o da passividade que lhe é característica em sala de aula e levando-o a ação, a procura da solução dos problemas que ocorrem em seu dia-dia, seja em casa, no trabalho, mostrando que as soluções destes problemas reais passam por ferramentas da matemática, e que este conhecimento matemático vai ajudá-lo em toda sua vida.

Iniciando as abordagens teóricas que respaldarão este trabalho, no capítulo 2, serão elencados aspectos que versam sobre a história da matemática, dos primeiros conceitos e registros, das principais civilizações da antiguidade que contribuíram para sua construção, como os egípcios, babilônios, gregos e árabes com enfoque para avanços da álgebra e seus principais criadores.

Sequencialmente, no capítulo 3, serão apresentadas de maneira breve uma síntese das etapas envolvidas no processo da modelagem matemática, destacando as características dessa metodologia de ensino-aprendizagem, e sugerindo sua utilização nas Escolas de Tempo Integral, pois, as propostas pedagógicas dessas escolas veem de encontro com as metodologias de ensino-aprendizagem da modelagem matemática.

Já no capítulo 4, serão elencados aspectos que fundamentam teoricamente os conteúdos envolvidos nos problemas propostos neste trabalho, fazendo a apresentação das definições e das características das funções envolvidas nos problemas. Ainda, serão construídas tabelas e gráficos para cada tipo de função mostrando geometricamente as propriedades específicas de cada uma.

Na sequência, no capítulo 5, serão apresentadas algumas propostas de atividades resolvidas, mostrando como esse trabalho pode ser feito com a utilização da modelagem matemática aplicada ao estudo de funções, deixando claro que essa sequência de atividades depende do envolvimento de cada turma e, naturalmente, seguirá por caminhos distintos e contemplarão igualmente problemas distintos, dependendo de variáveis como interesse, visão e participação de cada turma e do direcionamento que o professor desejar para conseguir atingir o objetivo proposto para a atividade.

Por fim, no capítulo 6, será apresentado um trabalho de modelagem em uma empresa de transporte rodoviário do Município de Osvaldo Cruz-SP, considerada a capital estadual do caminhão bitrem graneleiro, uma atividade econômica de grande importância para a cidade. Serão calculados os custos fixos, como, por exemplo, os impostos, os seguros do “cavalo” e da carreta, a reposição do veículo e o licenciamento. Ainda, serão calculados, os custos variáveis envolvidos, como combustíveis, pneus, lubrificantes e manutenção geral do veículo, que dependem da quilometragem do caminhão. Outrossim, também serão calculados valores dispostos com remunerações do motorista, diretamente relacionadas ao valor da receita obtida pelos fretes. Com todas essas informações, é possível o cálculo do lucro obtido no mês considerado.

2 UM POUCO DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

Acredita-se que a matemática tenha surgido das necessidades práticas do homem no dia-a-dia em busca da sobrevivência. No desenvolvimento da raça humana, foram agregados ao longo dos anos alguns conceitos matemáticos que no princípio tinham a ver com a capacidade de distinguir quantidades pequenas, ordem, tamanho e forma de objetos.

> [...] as noções primitivas de número, grandeza e forma podiam estar relacionadas com contrastes mais do que com semelhanças – a diferença entre um lobo e muitos, a desigualdade entre uma sardinha e uma baleia, a dessemelhança entre a forma redonda da Lua e a retilínea de um pinheiro. Gradualmente deve ter surgido, da massa de experiências caóticas, a percepção de que há analogias: e dessa percepção de semelhanças em número e forma nasceram a ciência e a matemática (BOYER, 2010, p. 1).

De acordo com Boyer (2010) a ideia de número surgiu de um processo cultural longo e gradual, antes mesmo da escrita e do surgimento das civilizações o homem já utilizava os dedos das mãos e dos pés, pedras, riscos em madeiras e em ossos para contar, os sinais para números precederam as palavras e somente nos últimos seis milênios é que o homem conseguiu registrar seus pensamentos.

Dentre as civilizações antigas, algumas se destacaram pelo avanço na matemática, uma delas é a civilização egípcia, que tinha um bom conhecimento em astronomia e com isso estabeleceram um calendário solar com 12 meses de trinta dias e mais cinco dias de festa, também tinham um bom conhecimento em geometria que foi usada pelos egípcios nas construções de pirâmides, diques, canais de irrigação.

Segundo Boyer (2010) no Papiro Rhind (ou Papiro Ahmes) datado de 1650 a.C., há inscrições que mostram que os egípcios também tinham conhecimento sobre frações unitárias, operações aritméticas com frações, problemas algébricos, problemas geométricos com cálculo da área do círculo comparado a área de quadrados com aproximações bem interessantes, tinham também conhecimento sobre semelhança de triângulos e rudimentos de trigonometria.

Dentre tantas coisas, o Papiro Rhind continha a inscrição de problemas de característica algébrica, pois buscavam a solução de problemas que poderiam ser escritos na forma de equações.

> A incógnita é chamada ”aha”. O prob. 24, por exemplo, pede o valor de aha sabendo que aha mais um sétimo de aha dá 19. A solução de Ahmes não é a dos livros modernos, mas é característica de um processo conhecido como “método de falsa posição” (BOYER, 2010, p. 11).

Outra civilização da antiguidade que também tinha uma Matemática avançada para a época é a civilização babilônica, foram encontradas em Uruk, hoje cidade de Warka no Iraque, tabletas de barro, datadas de 3000 a. C., com a escrita cuneiforme mostrando o avanço desta civilização, com registros de um sistema de numeração sexagesimal, com operações fundamentais, frações sexagesimais, problemas algébricos, equações quadráticas e tinham também conhecimento sobre geometria.

Uma tableta muito importante desta época, a tableta Plimpton 322, traz ternas numéricas que representam os lados de triângulos retângulos, isto quer dizer que os babilônios já conheciam o “teorema de Pitágoras”, eles também tinham um bom conhecimento sobre equações, sua álgebra era mais avançada do que a dos egípcios, eles resolviam equações lineares, equações quadráticas e até cúbicas e biquadradas, mas assim como os egípcios não usavam nenhuma representação simbólica nas resoluções destes problemas.

A civilização grega também teve um papel muito importante no desenvolvimento da Matemática.

> [...] como invasores iletrados vindos do Norte, abriram caminho até o mar. Não trouxeram tradição matemática ou literária consigo; no entanto, tiveram desejo ansioso de aprender, e não demoraram a melhorar o que lhes ensinaram (BOYER, 2010, p. 30).

Os gregos antigos se apropriaram de muitos conceitos dos povos conquistados e aprimoraram e desenvolveram esses conceitos matemáticos, principalmente na Geometria e Astronomia, alguns matemáticos gregos se destacaram e deixaram importantes trabalhos: (Tales de Mileto 625 a.C. – 545 a.C., Pitágoras de Samos 570 a.C. – 495 a.C., Euclides 295 a.C., Arquimedes 287 a.C. – 212 a.C.) dentre outros.

Na álgebra, um dos primeiros matemáticos a utilizar alguns símbolos e abreviações foi Diofante de Alexandria (325 -409), considerado para muitos como "o pai da álgebra", escreveu o tratado Arithmetica, com 13 livros dos quais apenas os 6 primeiros restaram.

> [...] era um tratado caracterizado por um alto grau de habilidade matemática e de engenho: quanto a isto, o livro pode ser comparado aos grandes clássicos da Idade Alexandrina anterior; no entanto, quase nada tem em comum com esses ou, na verdade, com qualquer matemática grega tradicional (BOYER, 2010, p. 122).

Os árabes também deram sua contribuição para o desenvolvimento da Matemática, porém, no início do império muçulmano, por volta de 650 a 750, as ciências ficaram de lado devido as guerras, só mais tarde com a prosperidade do comércio e das viagens marítimas e depois da tradução de algumas obras científicas indianas e gregas para o árabe é que o interesse árabe pelo conhecimento científico veio a despertar, o então califa al-Mamum mandou traduzir todas as obras gregas que eles tinham em mãos, inclusive, Os Elementos de Euclides, e também estabeleceu em Bagdá uma "Casa da Sabedoria", onde se destacou o matemático e astrônomo Mohammed ibu-Musa al-Khowarizmi, que escreveu várias obras de astronomia e matemática, dentre as quais, uma tratava dos numerais hindus e foi muito difundida na época a ponto de alguns leitores atribuírem a ele este sistema de numeração de forma errônea, já que ele mesmo deixava claro a origem sendo hindu.

A obra mais importante de al-Khowarizmi foi Al-jabr, este título provavelmente deu origem a palavra álgebra, na introdução desta obra al-Khowarizmi cita o apoio recebido do califa e faz algumas referências da obra:

> [...] que o califa al-Mamum o encorajou a escrever um pequeno trabalho sobre o cálculo pelas regras de completação e redução, confinando-o ao que é mais simples e mais útil na aritmética, tais como as que os homens constantemente necessitam no caso das heranças, partilhas, processos judiciais, e comércio, [...] (SOMATEMATICA, 2015)

Na sua obra, Al-jabr, al-Khowarizmi não utiliza nenhum símbolo, mas relata de forma simples e sistemática os passos que envolvem a resolução de equações lineares e quadráticas, tendo assim grande relevância para a evolução da álgebra.

Muitas descobertas ocorreram, mas foi com o matemático francês François Viète (1540 – 1603) que a álgebra teve um grande avanço, foi ele que conseguiu escrever as equações de forma geral e não apenas de forma específica como era escrita até então, possibilitando um grande progresso na teoria algébrica.

> Viète introduziu uma convenção tão simples quanto fecunda. Usou uma vogal para representar, em álgebra, uma quantidade suposta desconhecida, ou indeterminada, e uma consoante para representar uma grandeza ou números supostos conhecidos ou dados. Aqui encontramos, pela primeira vez na álgebra, uma distinção clara entre o importante conceito de parâmetro e a ideia de uma quantidade desconhecida (BOYER, 2010, p. 208).

Mas apesar deste grande avanço, Viète era antigo em outros aspectos, pois sua álgebra não era totalmente simbólica, quem finalizou a passagem das notações sincopadas para álgebra totalmente simbólica foi o grande matemático e filósofo francês René Descartes (1596 – 1650), que o possibilitou organizar suas ideias envolvendo geometria e álgebra e transformar problemas algébricos em linguagem geométrica, dando origem ao que chamamos hoje de geometria analítica.

A Matemática continua a se desenvolver e, atualmente, esta ciência está presente em várias áreas da sociedade como, por exemplo, arquitetura, informática, medicina, física, química, etc. Pode-se dizer que em tudo que se encontra ao redor das pessoas existe a matemática.

Como visto, a Matemática está presente no dia-a-dia e é ensinada nas escolas como uma importante e indispensável ferramenta para o desenvolvimento de todas as ciências. Contudo, o ensino-aprendizagem da Matemática no Brasil está cercado por grandes dificuldades, destacando a desmotivação dos alunos e professores, a pouca aplicabilidade das teorias no mundo real dos conteúdos ensinados na escola entre outros.

3 MODELAGEM MATEMÁTICA

3.1 A MODELAGEM MATEMÁTICA

É preciso dar significado àquilo que é ensinado na escola, tornar a matemática agradável para alunos e professores, uma metodologia alternativa que pode ajudar nesse sentido é a modelagem matemática. Segundo Bassanezi (2013, p.31): “A modelagem eficiente permite fazer previsões, tomar decisões, explicar e entender, enfim, participar do mundo real com capacidade de influenciar em suas mudanças”.

A modelagem matemática como processo de ensino-aprendizagem é uma opção na tentativa de melhorar os índices de aprendizagem em Matemática no Ensino Fundamental e Ensino Médio, pois tem como princípio o trabalho com problemas reais do cotidiano dos alunos, buscando assim um maior interesse em estudar e aprender matemática, além de proporcionar o desenvolvimento de várias habilidades que muitas vezes são deixadas de lado pelo método tradicional, como a tomada de decisão: na escolha do tema a ser trabalhado e na escolha dos problemas que deverão ser resolvidos, o trabalho com pesquisa: para o conhecimento sobre o assunto em questão, levantamento de hipóteses: no momento do questionamento e obtenção dos problemas que deverão ser levantados, desenvolvimento da criatividade: na resolução desses problemas propostos, que poderão ser resolvidos de maneiras diversas, sem um método específico, crítica dos resultados: que deverá ser feita após a resolução dos problemas de modo a verificar se a solução encontrada é adequada, o trabalho em grupo: pois o trabalho de modelagem é feito em pequenos grupos, o respeito à opinião dos outros e a colaboração entre os colegas: pois só dessa forma o trabalho em grupo dá resultados, a habilidade de comunicação oral e escrita: no grupo e perante toda a turma, pois, é necessário se fazer entender durante as discussões e explicações do que foi realizado e como foi realizado e como objetivo principal a formação do cidadão crítico e atuante na sociedade em que vive.

No trabalho com modelagem vão aparecer alguns problemas, dentre eles, o tempo para a realização das atividades e a adequação ao currículo oficial.

> [...] devem ser feitas algumas adaptações que tornem possível a utilização da modelagem matemática como metodologia de ensino-aprendizagem sem, contudo, perder a linha mestra que é o favorecimento à pesquisa e posterior criação de modelos pelos alunos, e sem desrespeitar as regras educacionais vigentes (BIEMBENGUT E HEIN, 2011, p.29).

A modelagem matemática pode ser aplicada de maneira simplificada, o professor escolhe o tema e leva todas as informações necessárias para o início do trabalho encaixando um tema com o programa já estabelecido pela Secretaria da Educação, neste caso, o professor trabalha ocasionalmente alguns problemas durante o bimestre, de forma a adaptar esta metodologia ao sistema de ensino vigente.

3.2 A ESCOLA DE TEMPO INTEGRAL NO ESTADO DE SÃO PAULO

Para esse trabalho é necessário que tenhamos um período grande de tempo para a realização de todas as etapas adequadamente, mas, geralmente o tempo não é suficiente sequer para o cumprimento do currículo determinado pela Secretaria da Educação do Estado de São Paulo. Diante disso, sugere-se que esta metodologia seja aplicada de forma especial nas Escolas de Tempo Integral (ETI), onde o professor trabalha em regime de dedicação plena e integral à unidade escolar, com carga horária de 8 horas diárias e 40 horas semanais, ou seja, esse tempo maior na escola contribuirá para o aprimoramento da sua formação, para a organização e desenvolvimento de metodologias e estratégias de ensino.

Segundo a Secretaria da Educação do Estado de São Paulo (2012, p.15), o principal objetivo da ETI é a formação de jovens autônomos, competentes e solidários:

> Para formar o jovem idealizado (autônomo, solidário e competente) a prática pedagógica dos educadores deve ser modificada de modo que o jovem seja tratado como fonte de iniciativa, porque desenvolve capacidade de agir, não sendo passivo no processo pedagógico; como fonte de liberdade, porque a ele devem ser oferecidos cursos e alternativas para aprender a avaliar e tomar decisões e, fonte de

> compromisso, porque deverá aprender a responder pelos seus atos, sendo consequente nas suas ações.

Na concepção do Programa de Ensino Integral a Secretaria da Educação do Estado de São Paulo, levou em consideração a necessidade de repensar o atual modelo de escola, o que implica em ajustes e mudanças na abordagem pedagógica e na organização dos conteúdos, dando ênfase a novas metodologias de ensino. O estimulo para que o jovem seja um protagonista é uma das especificidades que deverão ser atendidas nas Escolas de Tempo Integral: “V – Protagonismo juvenil – processo pedagógico no qual o aluno é estimulado a atuar criativa, construtiva e solidariamente na solução de problemas reais na escola, na comunidade e na vida social” (SEE, 2014, p.2).

A matriz curricular da ETI é composta pela Base Nacional Comum, pela Parte Diversificada, e pelas Atividades Complementares. Na Parte Diversificada estão inclusas duas aulas semanais nos quatro anos do Ensino Fundamental-II, e nos três anos do Ensino Médio, de Disciplinas Eletivas, que deverão ser trabalhadas através de projetos desenvolvidos por pelo menos dois professores de disciplinas distintas da Base Nacional Comum, e também foi introduzida nas Atividades Complementares a Orientação de Estudo, presentes em todos os anos do Ensino Fundamental e Ensino Médio, com o objetivo de desenvolver o hábito de estudo, levando o aluno a aprender a estudar de diferentes formas.

Mediante essas informações sobre a ETI, fica evidente que a modelagem matemática pode colaborar de forma decisiva para a conquista dos objetivos propostos pela ETI, e a falta de tempo para o desenvolvimento das atividades de modelagem não seria mais um problema, pois, é possível elaborar projetos para as disciplinas eletivas e/ou utilizar as aulas de Orientação de Estudo.

Por esses motivos acredita-se que essa parceria entre Modelagem Matemática e ETI seria um passo importante para a melhoria do ensino-aprendizagem em Matemática.

4 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

4.1 O CONCEITO DE FUNÇÃO REAL

Um dos conceitos mais importantes em Matemática é o conceito de funções, além de ser destaque em Matemática é destaque também em outras áreas do conhecimento como a Física, a Química, a Biologia, a Economia dentre outras, pois, é conveniente expressar fenômenos destas áreas por meio de funções.

Quando relacionamos duas grandezas variáveis, sendo uma dependente da outra, estamos formando intuitivamente a ideia de função, que consiste nessa relação de dependência, que formalmente definiremos a seguir:

Sejam os conjuntos A e B, de números reais, não vazios, uma relação f de A em B é uma função quando associa a cada elemento x, pertencente ao conjunto A, um único elemento y, pertencente ao conjunto B, $x \in A$ é chamado "variável independente" e $y \in B$ é chamado "variável dependente". Essa função pode ser representada por:

$f: A \to B$ ou $A \xrightarrow{f} B$ (lê-se: função f de A em B)

O conjunto A é chamado de domínio D(f) e o conjunto B, é chamado de contradomínio CD(f) da função f. Cada elemento y, pertencente ao conjunto B, que possui um correspondente x, pertencente ao conjunto A, é chamado de imagem de x pela função f, e o conjunto desses valores de y é chamado de conjunto imagem da função f e é indicado por Im(f). Simbolicamente temos:

$$Im(f) = \{y \in B /\ y = f(x)\ para\ algum\ x \in A\}$$

O gráfico de uma função $f: A \to B$, com $A \subset \mathbb{R}\ \ e\ B \subset \mathbb{R}$ é o conjunto de todos os pontos do plano cujas coordenadas são $(x, f(x))$, com $x \in A$.

Simbolicamente: $Gr(f) = \{(x, y) \in A \times B / y = f(x)\}$

O gráfico de um a função permite visualizar melhor o seu comportamento, seu crescimento, decrescimento, seus máximos e mínimos, facilitando assim, fazermos algumas estimativas e previsões.

Eis alguns exemplos de situações que envolvem a ideia de função.

Exemplo 1 – Carlos comprou um pacote de arroz de 5kg. A família de Carlos é composta por 4 pessoas que consomem em média 220 gramas de arroz por dia, qual a quantidade de arroz que restará no pacote após 15 dias?

Tabela 4.1: Tempo (em dias) x Quantidade de arroz (em kg)

Tempo (em dias)	**Quantidade de arroz (em kg)**
1	0,4780
2	0,4560
3	0,4340
4	0,4120
5	0,3900
...	...
X	5 – 0,22x

A quantidade de arroz depende do tempo de consumo, isto é, a quantidade de arroz é dada em função do tempo.

Chamando a quantidade de arroz de q e o tempo de x, temos:

$q = 5 - 0{,}22.x \rightarrow$ fórmula matemática da função q, que determina a quantidade (q) de arroz função do tempo (x).

Logo:

$$q = 5 - 0{,}22.15$$

$$q = 1{,}7$$

Então a quantidade de arroz após 15 dias será de 1,7kg.

Exemplo 2- Uma caixa d’água com capacidade de 1000 litros está completamente vazia, abre-se uma torneira que despeja na caixa 25 litros de água por minuto. Qual a quantidade de água na caixa após t minutos da abertura da torneira?

A tabela 4.2 relaciona o volume de água contido na caixa e o tempo a partir do momento em que a torneira foi aberta:

Tabela 4.2: Tempo (em min) x Volume (em l)

Tempo (em minutos)	Volume (em litros)
1	25
2	50
3	75
4	100
10	250
t	25.t

O volume da caixa depende do tempo em que a torneira ficar aberta, isto é, o volume da caixa é dado em função do tempo em que a torneira ficar aberta.

Chamando o volume de V e o tempo de t, temos:

$V = 25. t \rightarrow$ fórmula matemática da função que determina o volume (V) da caixa em função do tempo (t) em minutos após a abertura da torneira.

Exemplo 3- Um carro percorre uma estrada com velocidade constante de 80 quilômetros por hora. Qual a distância percorrida pelo carro após t horas de viagem?

Observe a tabela 4.3 que relaciona a distância percorrida e o tempo gasto:

Tabela 4.3: Tempo gasto (em h) x Distância percorrida (em km)

Tempo gasto (em horas)	Distância percorrida (em km)
0,5	40
1	80
1,5	120
2	160
3	240
t	80.t

Chamando a distância percorrida de D e o tempo de viagem de t, temos:

$D = 80. t \rightarrow$ fórmula matemática da função que determina a distância (D) percorrida em função do tempo (t) de viagem.

Exemplo 4 – José quer construir em seu sítio um galinheiro de formato retangular, para cercá-lo comprou 40 m de tela que deverão ser totalmente usados. Qual será a área desse galinheiro? Qual a área máxima? Observe a tabela 4.4:

Tabela 4.4: Comprimento (em m) x Área (em m²)

Comprimento (m)	**Largura (m)**	**Área (m²)**
4	20 - 4=16	64
5	20 - 5= 15	75
6	20 - 6 =14	84
7	20 - 7 = 13	91
8	20 - 8 =12	96
x	20 –x	x . (20 – x)

Chamando a medida da área do galinheiro de A e a medida do comprimento de x, temos:

$$A(x) = x.(20 - x)$$

$A(x) = -x^2 + 20x \rightarrow$ fórmula matemática da função que determina a área (A) do galinheiro em função da medida (x) do comprimento do galinheiro.

4.2 FUNÇÃOINVERSA

Uma função $f: A \rightarrow B$ é **injetiva** se, e somente se, para todo x_1 e x_2 pertencentes a A com $x_1 \neq x_2$ tivermos $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Uma função $f: A \rightarrow B$ é **sobrejetiva** se, e somente se, para todo y pertencente a B existe x pertencente a A tal que $f(x) = y$.

Uma função $f: A \rightarrow B$ é **bijetiva** se ela for injetiva e sobrejetiva simultaneamente, ou seja, para todo x_1 e $x_2 \in D(f)$, com $x_1 \neq x_2$, tivermos $f(x_1) \neq f(x_2)$ e $Im(f) = CD(f)$.

Dada uma função bijetiva $f: A \rightarrow B$, dizemos que uma função $g: B \rightarrow A$ é a **função inversa de f** se, para todo $a \in A$ e $b \in B$ tem-se $f(a) = b$ e $g(b) = a$. Indicamos a função inversa por f^{-1}.

4.3 FUNÇÃO AFIM

Definição:

Uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, que a todo número $x \in \mathbb{R}$ associa o número $ax + b$, com a e b reais é chamada **função afim**.

$$\boldsymbol{x \rightarrow ax + b}$$

$$\boldsymbol{f(x) = ax + b}$$

Exemplo de aplicação: Márcio trabalha como vendedor em uma loja de eletrodomésticos e seu salário mensal é composto de uma parte fixa no valor de R$ 1.260,00 e outra variável que corresponde a 3% do valor das vendas que ele realiza no mês, portanto seu salário pode ser calculado através de uma sentença matemática dada por:

$S(x) = 0{,}03x + 1260$, em que S representa o salário e x o valor das vendas no mês. Neste caso o salário de Márcio é calculado em função do valor das vendas. Assim como esse exemplo existem muitas situações do dia-a-dia que podem ser escritas na forma de uma função denominada função afim.

- **Casos particulares de função afim**

Dependendo dos valores dos coeficientes de uma função afim ela recebe nomenclaturas especiais:

- Uma função afim $f(x) = a.x + b$, com $a \in \mathbb{R}$ e $b = 0$, é chamada de **função linear**.

$$\boldsymbol{f(x) = a.x}$$

Utilizam-se funções lineares para representar grandezas diretamente proporcionais, veja o exemplo a seguir:

Exemplo de aplicação: Na sorveteria Pingo de Mel o preço de uma bola de sorvete é de R$1,50, Val, o proprietário da sorveteria, resolveu fazer uma tabela de preços para facilitar na hora das vendas, observe a tabela abaixo:

Tabela 4.5: Bolas de sorvete x Valor (em R$)

Nº de bolas	**Valor (R$)**
1	1,50
2	3,00
3	4,50
4	6,00

As grandezas envolvidas nessa tabela são diretamente proporcionais, então podemos escrevê-las na forma de uma função linear dada por:

$f(x) = 1{,}5.x$, onde f(x) representa o valor a ser pago pelo cliente e x a quantidade de bolas de sorvetes compradas.

- Uma função afim $f(x) = a.x + b$, com $a = 1$ e $b = 0$, é chamada de **função identidade**.

$$\boldsymbol{f(x) = x}$$

- Uma função afim $f(x) = a.x + b$, com $a = 0$ e $b \in \mathbb{R}$, é chamada de **função constante.**

$$\boldsymbol{f(x) = b}$$

4.3.1 Gráfico de uma função afim

No dia-a-dia, observam-se constantemente gráficos de vários tipos em jornais, revistas, nos noticiários de televisão, etc., que são utilizados para facilitar a exposição de informações e a compreensão dessas informações pelos leitores, muitos desses gráficos representam funções.

Para construir o gráfico de uma função afim f, dada por $y = f(x)$, com $x \in D(f)$, utiliza-se a representação de par ordenado (x, y) de números reais em um plano cartesiano.

Atribuem-se valores a $x \in D(f)$ e calculamos os valores correspondentes de $y = f(x)$, obtendo os pares ordenados (x, y), depois associamos a cada par ordenado (x, y) um ponto no plano cartesiano.

Veja os exemplos a seguir:

Exemplo 1: Construa, no plano cartesiano, o gráfico da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = -2x + 1$.

Tabela 4.6: Cálculo dos pares ordenados da função f(x) = - 2x + 1

x	$f(x) = -2x + 1$	(x, y),
-1	$f(x) = -2.(-1) + 1 = 3$	(-1,3)
0	$f(x) = -2.0 + 1 = 1$	(0,1)
1	$f(x) = -2.1 + 1 = -1$	(1,-1)
2	$f(x) = -2.2 + 1 = -3$	(2,-3)

Sendo o domínio da função f, o conjunto dos números reais, existem infinitos valores que podemos atribuir a x, e consequentemente, teremos infinitos pares ordenados (x,y), cuja representação no plano cartesiano formarão o gráfico da função f.

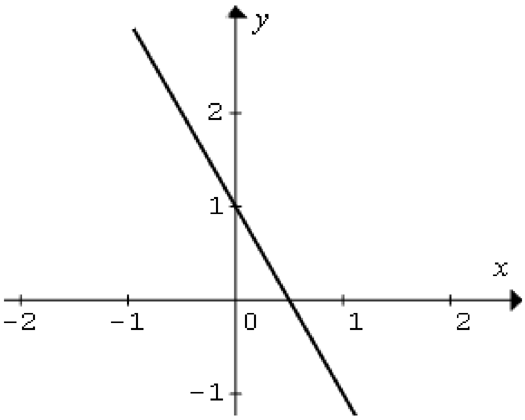

Gráfico 4.1: Função f(x) = - 2x + 1

Exemplo 2: Construa no plano cartesiano o gráfico da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = 3x - 1$.

Tabela 4.7: Cálculo dos pares ordenados da função f(x) = 3x - 1

x	$f(x) = 3x - 1$	(x, y),
-1	$f(x) = 3.(-1) - 1 = -4$	(-1,-4)
0	$f(x) = 3.0 - 1 = -1$	(0,-1)
1	$f(x) = 3.1 - 1 = 2$	(1,2)
2	$f(x) = 3.2 - 1 = 5$	(2,5)

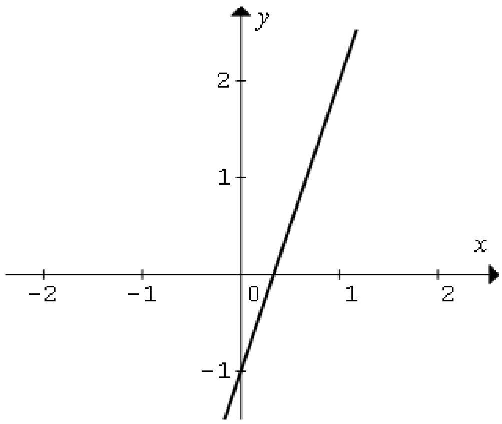

Gráfico 4.2: Função f(x) = 3x - 1

De modo geral, em uma função afim, dada por $f(x) = ax + b$, temos que:

Se $a > 0$ a função é crescente, pois, para $x_1 > x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Se $a < 0$ a função é decrescente, pois, para $x_1 > x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$

O gráfico da função afim $f(x) = ax + b$, com a ≠ 0, intersecta o eixo y no ponto de coordenadas (0,b) e o eixo x, no ponto $\left({}^{-b}/_{a} , 0 \right)$.

4.4 FUNÇÃO EXPONENCIAL

Definição:

> Uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$, definida por $f(x) = a^x$ ou $y = a^x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$, é denominada **função exponencial**.

Um caso especial de função exponencial é a função exponencial natural, $f(x) = e^x$,cuja base é o numero irracional **e**, cujo valor aproximado é 2,718281828, conhecido como número neperiano, a função exponencial natural é indicada para a modelagem de fenômenos que expressam crescimento ou decrescimento de populações, juros compostos, desintegração radioativa, dentre outros, e também no cálculo diferencial e integral devido a uma característica importante de ser idêntica à sua própria derivada.

Veja um exemplo de situação que envolve a ideia de função exponencial.

A população de uma colônia de certa bactéria duplica a cada hora. Em um experimento, colocou-se, inicialmente, em um recipiente, 200 bactérias. Qual a quantidade de bactérias nesse recipiente após 3 h? E após 4 h? E após t horas? Observe a tabela 4.8:

Tabela 4.8: Crescimento da população de bactérias

Tempo (em horas)	**Quantidade de bactérias**
0	200
1	2 . 200 = 400
2	2 . 2. 200 = 800
3	2 . 2 . 2 . 200 = 1600
4	2 . 2 . 2 . 2 . 200 = 3200

Observando a tabela, percebe-se que a quantidade de bactérias pode ser expressa por uma potência de base 2, então, pode-se escrever, $q(t) = 200.2^t$, onde, q(t) representa a quantidade de bactérias após t horas do início do experimento.

As restrições, $a > 0$ e $a \neq 1$, dadas na definição são necessárias, pois, caso contrário, não seria possível caracterizar uma função exponencial.

Se $a = 1$, $f(x) = a^x$ seria uma função constante.

$f(x) = 1^x = 1,$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Se $a = 0$, $f(x) = a^x$ não é definida em $\mathbb{R}$.

$f(-5) = 0^{-5}$, 0^{-5}não é definido em $\mathbb{R}$.

Se $a < 0$, $f(x) = a^x$ não é definida para todo $x \in \mathbb{R}$.

Para $a = -4$ e $x = \frac{1}{2}$, temos: $f\left(\frac{1}{2}\right) = (-4)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-4} \notin \mathbb{R}$

4.4.1 Gráfico de uma função exponencial

Para o estudo gráfico da função exponencial $f(x) = a^x$, com $a \in \mathbb{R}$, constroem-se os gráficos de duas funções, uma com a base maior que 1 ($a > 1$) e a outra com a base maior que zero e menor que 1 ($0 < a < 1$).

Exemplo 1: Construa o gráfico da função exponencial dada por: $f(x) = 2^x$.

Tabela 4.9: Cálculo dos pares ordenados da função f(x) = 2^x

X	$y = f(x) = 2^x$
-3	$1/8$
-2	$1/4$
-1	$1/2$
0	1
1	2
2	4

.

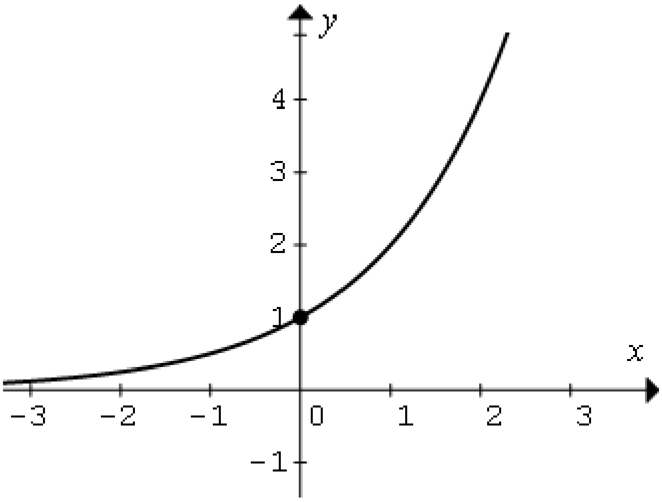

Gráfico 4.3: Função f(x) = 2^x

O gráfico de f é crescente e intersecta o eixo y no ponto (0,1).

Exemplo 2: Construa o gráfico da função exponencial dada por: $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Tabela 4.10: Cálculo dos pares ordenados da função f(x) = $(1/2)^x$

X	$y = f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
-3	8
-2	4
-1	2
0	1
1	$1/2$
2	$1/4$
3	$1/8$

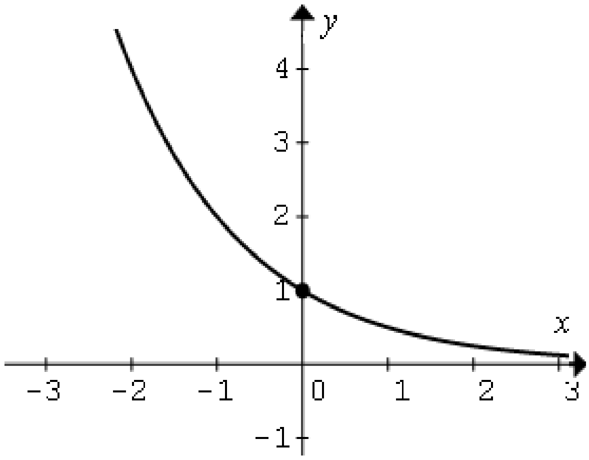

Gráfico 4.4: Função f(x) = (1/2)^x

O gráfico de f é decrescente e intersecta o eixo y no ponto (0,1)

De modo geral, em uma função exponencial, temos que:

Se $a > 1$ a função é crescente, pois, se $x_1 > x_2 \iff a^{x_1} > a^{x_2}$.

Se $0 < a < 1$ a função é decrescente, pois, se $x_1 > x_2 \iff a^{x_1} < a^{x_2}$.

O gráfico é denominado curva exponencial, intersecta o eixo y no ponto de coordenadas (0, 1) e assintota o eixo x, ficando sempre acima do eixo x, pois, $f(x) = a^x > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$..

A função exponencial é sobrejetiva, pois, para todo número real $b > 0$ existe algum $x \in \mathbb{R}$, tal que $f(x) = a^x = b$, $Im(f) = CD(f) = \mathbb{R}_+^*$.

A função exponencial é injetiva, pois, para todo x_1 e $x_2 \in \mathbb{R}$, com $x_1 \neq x_2 \Rightarrow$
$a^{x_1} \neq a^{x_2}$.

A função exponencial é bijetiva, pois, ela é sobrejetiva e injetiva, logo admite função inversa.

4.5 LOGARITMO

Definição:

Dados os números reais positivos a e b, com $a \neq 1$. Denomina-se logaritmo de b na base a o expoente c, tal que $a^c = b$, ou seja: $$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$$

Nessa equivalência temos:

Forma exponencial	Forma logarítmica
$a^c = b \begin{cases} a: base\ da\ potência \\ b: potência \\ c: expoente \end{cases}$	$\log_a b = c \begin{cases} a: base\ do\ logaritmo \\ b: logaritmando \\ c: logaritmo \end{cases}$

- **Propriedades operatórias dos logaritmos**

1ª) Logaritmo de um produto

Em uma mesma base, o logaritmo do produto de dois ou mais números reais e positivos é igual à soma dos logaritmos de cada um desses números.

$$\log_a(b.c) = \log_a b + \log_a c$$

2ª) Logaritmo de um quociente

Em uma mesma base, o logaritmo do quociente de dois números reais e positivos é igual a diferença entre o logaritmo do dividendo e o logaritmo do divisor.

$$\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$$

3ª) Logaritmo de uma potência

O logaritmo de uma potência de base real e positiva é igual ao produto do expoente pelo logaritmo da base da potência.

$$\log_a b^n = n.\log_a b$$

- **Mudança de base do logaritmo**

Como vimos, as propriedades operatórias dos logaritmos são válidas para logaritmos de mesma base, quando as bases forem diferentes temos que fazer a mudança de base do logaritmo.

Para mudarmos a base do $\log_a b$ para a base c utilizamos a seguinte igualdade:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}, \text{ com } b > 0,\ 0 < a \neq 1 \text{ e } 0 < c \neq 1 .$$

4.6 FUNÇÃO LOGARÍTMICA

Sabemos que a função exponencial $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, definida por $f(x) = a^x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$ é bijetiva , logo admite função inversa.

A função inversa da função exponencial é a função logarítmica que associa a cada número real positivo x o número real $\log_a x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$.

> Uma função $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \log_a x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$, é denominada função logarítmica.

A função inversa da função exponencial $f(x) = e^x$ é a função logarítmica $g(x) = \log_e x$ que costuma ser representada por $g(x) = \ln x$ e é chamada de logaritmo natural de x.

4.6.1Gráfico de uma função logarítmica

Vamos construir os gráficos das funções logarítmicas $f(x) = \log_2 x$ e $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ e observar algumas características desses gráficos.

Tabela 4.11: Cálculo dos pares ordenados da função f(x) = $\log_2$ x

X	$y = f(x) = \log_2 x$
$^1/_4$	-2
$^1/_2$	-1
1	0
2	1
4	2
8	3

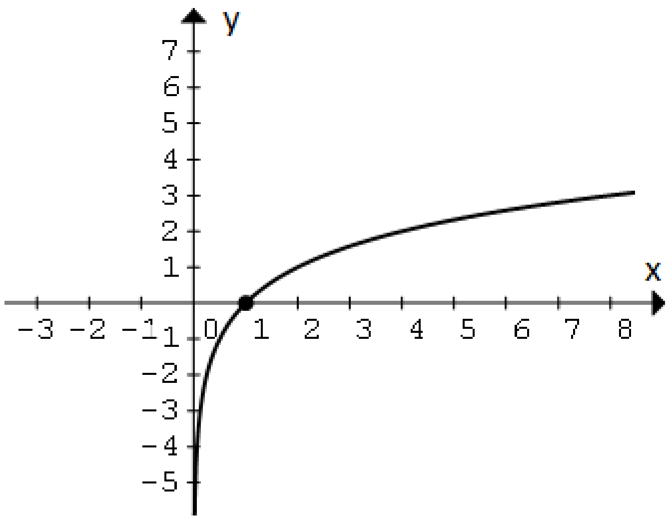

Gráfico 4.5: Função f(x) = $\log_2$ x

O gráfico de f é crescente e intersecta o eixo x no ponto (1,0).

Tabela 4.12: Cálculo dos pares ordenados da função f(x) =$\log_{1/2}$ x

x	$y = f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$
$^1/_8$	3
$^1/_4$	2
$^1/_2$	1
1	0
2	-1
4	-2

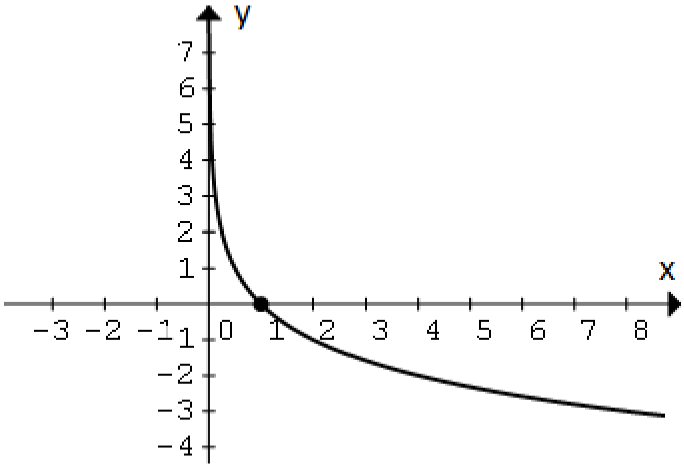

Gráfico 4.6: Função f(x) = $\log_{1/2} x$

O gráfico de f é decrescente e intersecta o eixo x no ponto (1,0).

De modo geral, em uma função logarítmica, temos que:

- Se $a > 1$ a função é crescente:

$$x_1 > x_2 \iff \log_a x_1 > \log_a x_2$$

- Se $0 < a < 1$ a função é decrescente:

$$x_1 > x_2 \iff \log_a x_1 < \log_a x_2$$

- O gráfico intersecta o eixo x no ponto de coordenadas (1, 0) e assintota o eixo y, ficando todo a direita do eixo y, pois, $\log_a x$ é definido para todo $x \in \mathbb{R}_+^*$.

4.7 MATEMÁTICA FINANCEIRA

A Matemática Financeira faz parte do cotidiano e auxilia no controle dos orçamentos doméstico, de empresas e respalda decisões, como: comprarmos à vista ou prazo, o quanto se paga de juros, o tempo de amortização de uma dívida e em outras situações que envolvem pagamentos, financiamentos etc.

Quando se busca um capital emprestado e promete devolvê-lo depois de algum tempo, remuneram-se os investidores com um valor a mais por este tempo em que ficou com o capital, como se fosse o pagamento de um aluguel, que deve ser combinado antecipadamente e sobre o qual será cobrada uma taxa, com diferentes regimes, basicamente se simples ou composto.

4.7.1 Capitalização simples

No regime de juro simples, o juro é calculado sobre o capital inicial e o juro é diretamente proporcional ao período de aplicação e à taxa de juro, podendo ser calculado pela fórmula:

$j = C.i.n$, em que j é o valor dos juros do capital C, no período n a uma taxa unitária i.

O montante M (valor futuro VF) é a soma dos juros j obtidos no período considerado com o capital inicial C (valor presente VP), logo:

$$M = C + j \Longrightarrow M_n = C.(1 + i.n).$$

4.7.2 Capitalização composta

No regime de juro composto o juro é calculado, a partir do segundo período, sobre o montante do período anterior, ou seja, os juros do primeiro período passam a fazer parte do capital e a render juros no próximo período, ou seja, os juros são capitalizados, é o que popularmente chamamos de juros sobre juros.

$$j_1 = C.i.1 \Longrightarrow M_1 = C + C.i \Longrightarrow$$

$$M_1 = C(1 + i)$$

$$j_2 = M_1.i.1 \Longrightarrow j_2 = C(1 + i).i \Longrightarrow$$

$$M_2 = M_1 + j_2 \Longrightarrow M_2 = C(1 + i) + C(1 + i).i \Longrightarrow M_2 = C(1 + i)(1 + i) \Longrightarrow$$

$$M_2 = C(1 + i)^2$$

$$j_3 = M_2.i.1 \Longrightarrow j_3 = C(1 + i)^2.i \Longrightarrow$$

$$M_3 = M_2 + j_3 \Longrightarrow M_3 = C(1 + i)^2 + C(1 + i)^2.i \Longrightarrow$$

$$M_3 = C(1+i)^2(1+i) \Longrightarrow$$
$$M_3 = C(1+i)^3$$

Então, tem-se que:

$M_n = C(1+i)^n$ é a fórmula para o cálculo do montante M, em regime de juro composto, onde, C representa o capital inicial, i é a taxa unitária de juros por período e n é o número de períodos em que o capital ficou aplicado.

Na tabela a seguir temos os valores dos montantes em regime de juro simples e juro composto a partir de um capital inicial (C) de R$ 2.000,00 e considerando uma taxa de juros (i) de 3% ao mês, durante um período (n) de 4 meses.

Tabela 4.13: Cálculo dos montantes em juros simples e juros compostos

Juro simples ($M_n = C.(1+i.n)$)		**Juro composto ($M_n = C.(1+i)^n$)**	
N	Montante	n	Montante
1	$M_1 = 2000.(1+0{,}03.1) = 2060{,}00$	1	$M_1 = 2000.(1+0{,}03)^1 = 2060{,}00$
2	$M_2 = 2000.(1+0{,}03.2) = 2120{,}00$	2	$M_2 = 2000.(1+0{,}03)^2 = 2121{,}80$
3	$M_3 = 2000.(1+0{,}03.3) = 2180{,}00$	3	$M_3 = 2000.(1+0{,}03)^3 = 2185{,}45$
4	$M_4 = 2000.(1+0{,}03.4) = 2240{,}00$	4	$M_4 = 2000.(1+0{,}03)^4 = 2251{,}02$

No gráfico 4.7, temos a representação da evolução dos montantes num período maior, fica evidente que o crescimento do montante em juro composto é mais rápido, ele cresce de forma exponencial enquanto o montante em juro simples cresce de forma linear.

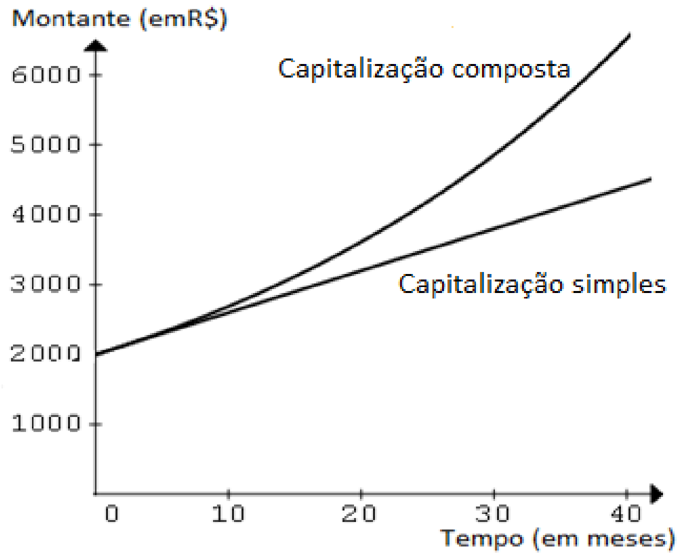

Gráfico 4.7: Montantes em juros simples e juros compostos

4.7.3 Desconto em regime de capitalização composta

O desconto é uma operação financeira muito utilizada, que calcula o valor atual, ou valor presente (VP), de uma dívida saldada antes do seu vencimento, ou seja, no valor desta dívida com vencimento futuro estão inclusos os juros, se essa dívida for paga antecipadamente, é justo que sejam retirados os juros desse período de antecipação.

O valor presente (VP) é o valor do capital que aplicado em regime de capitalização composta a uma taxa de juros i, durante um período n, produz um montante VF. Observe o exemplo:

Milton pagou uma dívida de R$ 2.400,00 três meses antes do vencimento, sabendo que a taxa de juros cobrada foi de 5% ao mês em regime de capitalização composta, qual o valor pago por Milton?

Da definição tem-se que:

$$2400 = VP.(1{,}05)^3 \Longrightarrow VP = \frac{2400}{(1{,}05)^3} \Longrightarrow VP = \frac{2400}{1{,}1576}$$

$$VP = 2073{,}26,$$

Isto é, o valor pago foi de R$ 2.073,26.

Com base no exemplo, podemos escrever:

$$VF = VP.(1+i)^n \Longrightarrow VP = \frac{VF}{(1+i)^n}$$

$$VP = VF.(1+i)^{-n}$$

Daí, podemos calcular o valor do desconto dessa dívida por:

$$d = VF - VP$$

4.7.4 Séries ou anuidades

Uma sequência de depósitos ou pagamentos com o objetivo de amortizar uma dívida ou formar um montante é denominada série ou anuidade. Uma série em que os pagamentos se iniciam após o final do primeiro período é denominada série postecipada, e são as mais comuns no mercado financeiro.

Vamos observar um exemplo para constituir um determinado montante através de depósitos periódicos e iguais em regime de capitalização composta.

José faz 5 depósitos mensais de R$ 200,00 numa financeira que paga 5% de juros ao mês. Qual o montante final?

$$M = 200(1{,}05)^4 + 200(1{,}05)^3 + 200(1{,}05)^2 + 200(1{,}05)^1 + 200$$

$$M = 200[\ (1{,}05)^4 + (1{,}05)^3 + (1{,}05)^2 + 1{,}05 + 1)]$$

A expressão que está dentro dos colchetes é a soma dos temos de uma P.G., logo o montante será:

$$M = 200.\left[\frac{1.((1{,}05)^5 - 1)}{1{,}05 - 1}\right]$$

$$M = 200\left[\frac{1{,}27628 - 1}{0{,}05}\right]$$

$$M\ = 200\ .\ 5{,}5256$$

$$M = 1105{,}13$$

Logo, o montante final foi de R$ 1.105,13.

Com base neste exemplo podemos escrever uma fórmula para o cálculo do montante de uma série ou anuidade:

$$M = p.\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right],$$

onde, M representa o montante no final da aplicação, p é o valor do depósito periódico, i é a taxa unitária de juros contratada e n é o número de períodos desta aplicação.

Segue um exemplo de amortização de uma dívida.

Carlos pagou uma dívida em 5 prestações de R$ 200,00, sendo a primeira prestação paga no final do primeiro período, sabendo que a taxa de juros cobrada foi de 5% ao período, qual o valor da dívida amortizada?

Neste problema, o valor da dívida será a soma dos valores presentes das prestações, chamando o valor presente da dívida de VP, temos:

$$VP = 200(1{,}05)^{-5} + 200(1{,}05)^{-4} + 200(1{,}05)^{-3} + 200(1{,}05)^{-2} + 200(1{,}05)^{-1}$$

$$VP = 200[\ ((1{,}05)^{-5} + (1{,}05)^{-4} + (1{,}05)^{-3} + (1{,}05)^{-2} + (1{,}05)^{-1})]$$

A expressão que está dentro dos colchetes é a soma dos temos de uma P.G., então, temos:

$$VP = 200.\left[\frac{1{,}05^{-5}.\,(1{,}05^{5} - 1)}{1{,}05 - 1}\right]$$

$$VP = 200.\left[\frac{1 - (1{,}05)^{-5})}{0{,}05}\right]$$

$$VP = 200.\left[\frac{1 - 0{,}7835}{0{,}05}\right]$$

$$VP = 200.\left[\frac{0{,}2165}{0{,}05}\right]$$

$$VP = 200.\,[4{,}33]$$

$$VP = 866$$

Logo, a dívida amortizada foi de R$ 866,00.

Com base neste exemplo podemos escrever uma fórmula para o cálculo do valor presente na amortização de uma dívida com pagamentos periódicos e iguais, e uma taxa de juros constante.

$$VP = p.\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right],$$

onde VP representa o valor presente da dívida, p é o valor da prestação, i é a taxa unitária de juros contratada e n é o número de prestações pagas periodicamente.

5 PROPOSTA DE ATIVIDADES

Neste capítulo serão apresentadas algumas propostas de atividades resolvidas com a intenção de subsidiar o trabalho dos professores que ainda não conhecem esta metodologia de ensino-aprendizagem e que manifestem interesse pelo aprofundamento no tema. Estes problemas são exemplos e não necessariamente devem ser seguidos na íntegra, uma vez que cada professor deve encontrar a melhor maneira para trabalhar com cada turma, seguindo as etapas da Modelagem Matemática.

5.1 PROPOSTA DE ATIVIDADE Nº 1

Qual é o melhor plano?

Constantemente temos que tomar uma decisão entre adquirir o produto A ou o produto B, como decidir de maneira correta, escolhendo o “melhor” ou o “ mais vantajoso financeiramente”? Ou será que dá para ser o melhor e o mais vantajoso financeiramente?

Público alvo:

- 9º ano do Ensino Fundamental.

Conteúdos matemáticos necessários como pré-requisito:

Função afim

Objetivos:

- Identificar as variáveis envolvidas na situação problema.
- Levantar hipóteses e elaborar propostas para solucionar o problema.
- Compartilhar conhecimentos e responsabilidades.
- Realizar pesquisas sobre do tema.
- Identificar as vantagens e desvantagens de cada plano.
- Aplicar a ideia de função afim, para encontrar o modelo desejado.
- Desenvolver a criatividade do aluno por meio de uma situação real.

Procedimentos didáticos:

- Roda de conversa.
- Trabalho em grupo.
- Pesquisas.

Desenvolvimento da atividade proposta:

Esta atividade deve ser iniciada com uma conversa com os alunos sobre as escolhas que temos que fazer constantemente, desde a escolha de uma roupa para vir à escola, do meio de transporte a ser utilizado, dentre tantas outras que fazemos diariamente. Neste momento devem ser levantadas situações do cotidiano em que são necessários alguns cuidados na hora de decidir, como por exemplo, no custo financeiro de uma escolha.

Para esta atividade será apresentada aos alunos a situação-problema a seguir:

Taísa resolveu ir morar sozinha e quer contratar um plano de telefonia fixa, para isto, fez uma pesquisa de preços para escolher o plano que melhor se encaixa para ela neste momento. Ela está indecisa entre os planos A e B, veja as condições dos planos abaixo:

Plano A:

- Taxa fixa mensal de R$ 29,90
- Ligações de fixo para fixo na cidade R$ 0,00
- Ligações de fixo para móvel da mesma operadora R$ 0,60

Plano B:

- Taxa fixa mensal de R$ 49,90
- Ligações de fixo para fixo na cidade R$ 0,00
- Ligações de fixo para móvel da mesma operadora R$ 0,20

Como ela pode decidir qual deverá ser contratado?

Depois de apresentar o problema é feita uma discussão sobre o que deve ser levado em consideração para a contratação do plano, neste momento surgem as hipóteses: o que tem a taxa fixa mais barata, aquele que posso falar mais tempo e pagar menos, aquele que cobra o menor valor da ligação por minuto, o tempo de uso de telefone fixo para fixo, o tempo de uso de telefone fixo para móvel.

Espera-se que os alunos tenham a iniciativa de calcular o custo para alguns valores e comparar os resultados e verificar que o custo total depende do valor fixo e do tempo de ligação de fixo para móvel.

Tabela 5.1: Cálculos de custo dos planos A e B

Tempo de ligação de fixo para móvel (em min)	**Plano A (R$)**	**Plano B (R$)**
10	29,90 + 10 . 0,60 = 35,90	49,90 + 10 . 0,20 = 51,90
20	29,90 + 20 . 0,60 = 41,90	49,90 + 20 . 0,20 = 53,90
30	29,90 + 30 . 0,60 = 47,90	49,90 + 30 . 0,20 = 55,90
40	29,90 + 40 . 0,60 = 53,90	49,90 + 40 . 0,20 = 57,90

Com tais dados somos instigados a dispô-los de modo a construir uma representação gráfica que possa estabelecer a relação entre tempo de ligação e o custo total do plano.

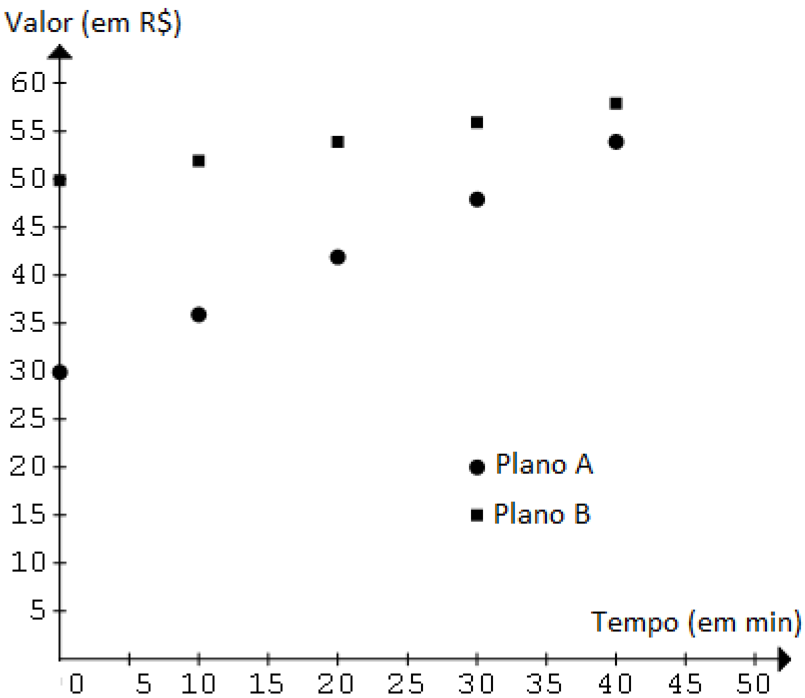

Gráfico 5.1: Custo (em R$) x Tempo (em min) dos planos A e B

Observando o gráfico 5.1, temos a impressão que os pontos de cada plano (A ou B) estão alinhados, então esses dados podem ser escritos na forma de uma função afim.

Neste momento, provavelmente os alunos já tiveram o contato com funções e poderão determinar as funções que regem cada plano por meio de sistemas de equações lineares, caso seja necessário o professor deverá fazer uma revisão desse conteúdo.

A expressão geral de uma função afim é $C(t) = at + b$. Sendo assim, tomaremos dois pontos quaisquer de cada uma das retas que representam os planos A e B, para construirmos um sistema de equações lineares de modo a encontrar os valores de a e b para cada caso.

Plano A

Considere os pontos (10; 35,9) e (20; 41,9), substituindo seus valores em $C(t)$ teremos:

$$\begin{cases} 35{,}9 = 10a + b \\ 41{,}9 = 20a + b \end{cases}$$

Resolvendo o sistema encontraremos: $\begin{cases} a = 0{,}6 \\ b = 29{,}9 \end{cases}$ e portanto, a função procurada é dada por $C_A(t) = 0{,}6t + 29{,}9$, onde t representa o tempo (em minutos) e C o custo total (em reais).

Plano B

Considere os pontos (10; 51,9) e (20; 53,9), substituindo seus valores em $C(t)$ teremos:

$$\begin{cases} 51{,}9 = 10a + b \\ 53{,}9 = 20a + b \end{cases}$$

Resolvendo o sistema encontraremos: $\begin{cases} a = 0{,}2 \\ b = 49{,}9 \end{cases}$ eportanto, a função procurada é dada por $C_B(t) = 0{,}2t + 49{,}9$, onde t representa o tempo (em minutos) e C o custo total (em reais).

Para responder a pergunta inicial do problema (Qual é o melhor plano?), devemos levar em conta o tempo de utilização de fixo para móvel, isto depende de cada consumidor, então podemos inicialmente determinar o tempo (em minutos) no qual os dois planos sejam indiferentes, ou seja, tenham o mesmo custo total, para isto devemos resolver esta equação:

$$C_A = C_B$$

$$0{,}6t + 29{,}9 = 0{,}2t + 49{,}9$$

$$0{,}4t = 20$$

$$t = 50$$

Logo, o tempo em que os dois planos têm o mesmo custo total é de 50 minutos, portanto para uma pessoa que for realizar ligações de fixo para móvel por um tempo inferior a 50 minutos o plano A é mais vantajoso e para a pessoa que for realizar ligações de fixo para móvel por um tempo superior a 50 minutos o plano B é mais vantajoso.

5.2 PROPOSTA DE ATIVIDADE Nº2

É melhor poupar ou financiar?

Este tema é de extrema importância e interesse para os alunos do Ensino Médio, pois muitos já estão pensando em comprar um carro ou uma moto assim que completarem 18 anos e tirarem suas habilitações, em guardar dinheiro para cursar uma faculdade, e tantos outros projetos futuros.

Público alvo:

- 1º ano do Ensino Médio

Conteúdos matemáticos necessários como pré-requisito:

- Matemática financeira.
- Função exponencial.

Objetivos:

- Identificar as variáveis envolvidas na situação problema.
- Levantar hipóteses e elaborar propostas para solucionar o problema.
- Compartilhar conhecimentos e responsabilidades.
- Realizar pesquisas sobre do tema.

- Identificar as vantagens e desvantagens de cada tipo de investimento comparando os prazos e as taxas.
- Aplicar a ideia de função para encontrar o modelo desejado.
- Desenvolver a criatividade e o senso crítico do educando por meio de uma situação real.

Procedimentos didáticos:

- Roda de conversa.
- Trabalho em grupo.
- Pesquisas.

Desenvolvimento da atividade proposta:

A partir do tema, os alunos são convidados a pensar em coisas que gostariam de comprar, de uma viagem que gostariam de fazer, de um sonho de consumo, que no momento não podem realizar por vários motivos, como não ter o dinheiro suficiente, não ter um emprego fixo para poder pagar uma prestação mensal, ter outros objetivos prioritários (pagar uma faculdade), não ter idade suficiente para comprar o objeto de desejo (carro ou moto não tendo ainda 18 anos) entre outros, e depois dessa primeira discussão fazer um levantamento desses objetos de desejo e pensar qual seria a melhor maneira para atingirem seus objetivos.

Várias situações serão levantadas e a maioria delas esbarra quase sempre, na falta de dinheiro, para a maioria deles, então podem surgir questões como por exemplo:

Como conseguir um determinado montante?

É melhor poupar ou financiar?

Quanto devo poupar mensalmente para obter certo montante?

Quando devo começar a poupar?

É melhor pagar à vista ou a prazo?

Qual o melhor tipo de investimento? E o mais seguro?

Estas e outras perguntas podem surgir desse debate e agora é hora de fazer uma pesquisa em bancos, em financiadoras e na internet sobre o assunto, onde deverão ser levantados prazos, taxas de juros, tipos de financiamentos, taxas de administração cobradas pelos bancos, impostos, etc.

Provavelmente aparecerão diversas taxas de financiamento, de investimento, e apareça também a ideia de fazer um consórcio, dentre outras maneiras de levantar esse montante. Cabe ao professor nesse momento estabelecer como vai continuar a atividade, seria interessante concentrar as atenções em alguma pergunta em especial para facilitar o trabalho que pode ser iniciado comparando a caderneta de poupança, cuja taxa de rendimento é em média de 0,58% ao mês com outra modalidade de investimento, por exemplo, o CDB (Certificado de Depósito Bancário) que rende em média 1% ao mês, no entanto, na poupança não é cobrada nenhuma taxa e você pode sacar o dinheiro quando quiser, enquanto no CDB tem a cobrança do Imposto de Renda sobre os rendimentos, a taxa cobrada depende do tempo de aplicação, quanto maior o tempo menor o imposto.

Problema 1) Tiago quer investir R$ 250,00 por mês durante um ano, qual o montante no final desse período se ele optar em depositar na caderneta de poupança? E se ele optar pelo CDB?

Cada depósito mensal renderá um montante até o final da aplicação onde esses montantes deverão ser somados para obter o montante total dessa aplicação.

Vamos considerar que a Caderneta de Poupança esteja rendendo 0,58% de juros ao mês, observe a tabela 5.2:

Tabela 5.2: Cálculos do rendimento da caderneta de poupança

Data do depósito	**Valor depositado**	**Rendimentos**	**Montante (em 10/12)**
10/01	250	$250.(1{,}0058)^{11}$	266,42
10/02	250	$250.(1{,}0058)^{10}$	264,88
10/03	250	$250.(1{,}0058)^{9}$	263,36
10/04	250	$250.(1{,}0058)^{8}$	261,84
10/05	250	$250.(1{,}0058)^{7}$	260,33
10/06	250	$250.(1{,}0058)^{6}$	258,83
10/07	250	$250.(1{,}0058)^{5}$	257,33
10/08	250	$250.(1{,}0058)^{4}$	255,85
10/09	250	$250.(1{,}0058)^{3}$	254,38
10/10	250	$250.(1{,}0058)^{2}$	252,91
10/11	250	$250.(1{,}0058)^{1}$	251,45
10/12	250	250	250
Total	3000	-	3.097,58

Vamos considerar que o rendimento do CDB é de 1% ao mês, observe a tabela 5.3:

Tabela 5.3: Cálculos do rendimento do CDB

Data do depósito	**Valor depositado**	**Rendimentos**	**Montante (em 10/12)**
10/01	250	$250.(1{,}01)^{11}$	278,92
10/02	250	$250.(1{,}01)^{10}$	276,16
10/03	250	$250.(1{,}01)^{9}$	273,42
10/04	250	$250.(1{,}01)^{8}$	270,71
10/05	250	$250.(1{,}01)^{7}$	268,03
10/06	250	$250.(1{,}01)^{6}$	265,38
10/07	250	$250.(1{,}01)^{5}$	262,75
10/08	250	$250.(1{,}01)^{4}$	260,15
10/09	250	$250.(1{,}01)^{3}$	257,58
10/10	250	$250.(1{,}01)^{2}$	255,03
10/11	250	$250.(1{,}01)^{1}$	252,5
10/12	250	250	250
Total	3000	-	3.170,63

Sobre o rendimento do CDB incide o Imposto de Renda da seguinte forma:

Tabela 5.4: Alíquotas do I. R. incidente sobre os rendimentos do CDB

Tempo de permanência	**Alíquotas regressivas**
Até 180 dias	22,5%
De 181 a 360 dias	20%
De 361 a 720 dias	17,5%
Superior a 720 dias	15%

Fonte: Banco do Brasil.

Como no nosso exemplo algumas aplicações mensais ficaram abaixo de 180 dias, logo o rendimento deve ser tributado em 22,5%.

Soma dos rendimentos (abaixo de 180 dias) = 38,01

Tributos devidos = 8,55

As demais ficaram entre 181 e 360 dias, então o rendimento será tributado em 20%

Soma dos rendimentos (entre 181 e 360 dias) = 132,62

Tributos devidos = 26,52

O total de tributos devidos então será de R$ 35,07 e o montante final será de R$ 3.135,56.

Depois dessa primeira fase de pesquisa e entendimento da situação problema, da montagem das tabelas, dos cálculos iniciais, é interessante que o professor retome os conteúdos de matemática financeira, como capitalização composta e amortização para a sequência desse trabalho.

A partir das fórmulas é conveniente resolver várias situações mudando a taxa de juros, o tempo de aplicação, o valor do montante, de acordo com a necessidade (ou objeto de desejo) de cada um. É interessante observar que aumentando o prazo de aplicação a diferença entre os montantes das duas aplicações vai aumentando consideravelmente apesar da diferença entre as taxas de juros ser pequena, isto pode ser visto com mais facilidade no gráfico 5.2:

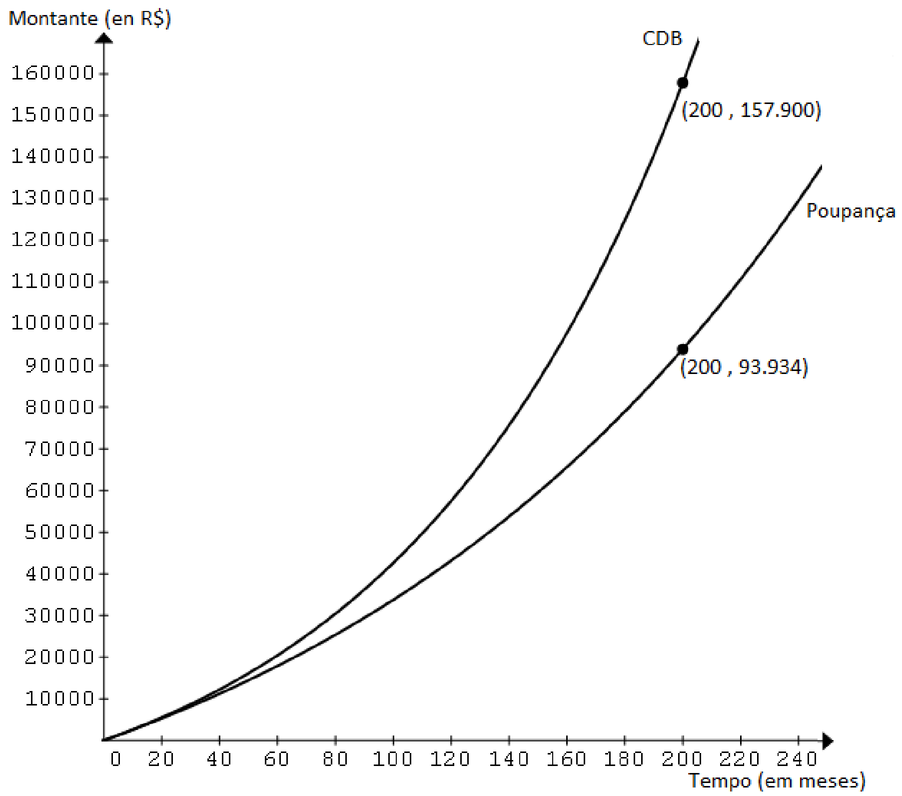

Gráfico 5.2: Comparativo dos montantes das aplicações em Poupança e CDB

Outras questões que também podem ser trabalhadas:

Problema 2) Mateus quer financiar R$ 8.000,00 para comprar uma moto, qual o valor da prestação mensal?
Neste problema podemos pesquisar as taxas de juros cobradas pelos bancos da cidade para fazer os cálculos em sala de aula e depois pedir aos alunos que façam a pesquisa nos bancos e comparem os resultados encontrados, provavelmente as prestações encontradas nas pesquisas serão maiores que as encontradas em sala de aula, por que aconteceu essa diferença agora? Onde foi que erramos?
Neste caso não houve erro, mas a diferença é causada pelas taxas cobradas pelo banco em transações desse tipo, numa transação financeira a taxa que corresponde a todos os encargos e despesas incidentes nas operações de crédito e de arrendamento mercantil financeiro, contratadas ou ofertadas a pessoas físicas, microempresas ou empresas de pequeno porte é chamada de Custo Efetivo Total (CET), que inclui o Imposto sobre Operações Financeiras (IOF) além das taxas cobradas pelo banco.

Problema 3) Jô planeja comprar um bem no valor de R$ 3.800,00. Para isto irá depositar mensalmente R$ 300,00 em uma aplicação financeira que está rendendo 1% ao mês. Em quanto tempo terá dinheiro suficiente para comprar o bem?

Para iniciar a discussão pode-se pensar em construir uma tabela com os cálculos mês a mês até atingir a quantia desejada. Neste momento é interessante deixar que os alunos montem o cabeçalho da tabela e façam suas anotações e depois poderá ser feita uma discussão de como cada um organizou a tabela e quais foram as dificuldades encontradas. Veja tabela 5.5:

Tabela 5.5: Cálculos do montante em uma aplicação financeira

Data do depósito	Valor depositado	Rendimentos	Montante
10/01	300,00	-	300,00
10/02	300,00	$300.(1{,}01) = 303$	603,00
10/03	300,00	$603.(1{,}01) = 609{,}03$	909,03
10/04	300,00	$909{,}03.(1{,}01) = 918{,}12$	1218,12
10/05	300,00	$1218{,}12.(1{,}01) = 1230{,}30$	1530,30
10/06	300,00	$1530{,}30.(1{,}01) = 1545{,}60$	1845,60
10/07	300,00	$1845{,}60.(1{,}01) = 1864{,}06$	2164,06
10/08	300,00	$2164{,}06.(1{,}01) = 2185{,}70$	2485,70
10/09	300,00	$2485{,}70.(1{,}01) = 2510{,}56$	2810,56
10/10	300,00	$2810{,}56.(1{,}01) = 2838{,}66$	3138,66
10/11	300,00	$3138{,}66.(1{,}01) = 3170{,}05$	3470,05
10/12	300,00	$3470{,}05.(1{,}01) = 3504{,}75$	3804,75

Pela tabela chegamos ao resultado de 11 meses, aproximadamente, com 12 depósitos iguais a R$ 300,00, mas será que tem uma maneira mais prática para resolver este problema? Que tipo de função se caracteriza pelos resultados obtidos?

Pelos exemplos anteriores, é possível verificar que este problema está relacionado com capitalização composta, ou seja, para obter o resultado de uma forma mais rápida podemos aplicar a fórmula:

$$VF = p.\left(\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right)$$

Onde VF será o valor desejado no final das aplicações, p será o valor depositado mensalmente, i a taxa de juros contratada e n o número de depósitos necessário para conseguir o montante, substituindo os valores na fórmula temos:

$$3800 = 300.\left(\frac{(1+0{,}01)^n - 1}{0{,}01}\right)$$

$$\frac{3800}{30000} + 1 = 1{,}01^n$$

$$1{,}1266667 = 1{,}01^n$$

Aplicando logaritmo em ambos os lados da equação, temos:

$$\log 1{,}01^n = \log 1{,}1266667 \implies n.\log 1{,}01 = \log 1{,}1266667$$

$$n\,.0{,}004321373 = 0{,}051795458$$

$$n = 11{,}98 \text{ meses.}$$

Como o último depósito coincide com a data da retirada, isto é, serão necessários 11 meses aproximadamente e 12 depósitos iguais a R$ 300,00.

Podemos, a partir do exemplo, chegar a uma função exponencial que nos dá a quantidade de meses necessários de uma aplicação para obtermos um determinado montante, mantendo a taxa de juros e o depósito mensal fixos.

Chamando o montante de y e o tempo de n temos:

$$y = 300.\left(\frac{1{,}01^n - 1}{0{,}01}\right)$$

$$y = 30000.\,(1{,}01^n - 1)$$

Podemos também encontrar outras funções que atendam aos questionamentos em cada caso, por exemplo, mantendo o valor da taxa de juros e do tempo fixos, podemos escrever uma função que relaciona o montante com o depósito mensal, neste caso, variando o valor depositado mensalmente qual será o montante?

Chamando o montante de y, o depósito mensal de x, considerando uma taxa mensal de 1% ao mês e o tempo de 10 meses temos:

$$y = x.\frac{1{,}01^{10} - 1}{0{,}01} \Longrightarrow y = x.\,10{,}4622$$

$$y = 10{,}4622\,.\,x$$

Com esta função afim podemos determinar o valor do montante (y) em função do valor depositado mensalmente (x) durante um período de 10 meses.

Problema 4) Uma loja de eletrônicos e eletrodomésticos oferece a seus clientes duas formas de pagamento:

I) Pagamento de uma só vez, um mês após a compra.

II) Pagamento em três prestações mensais iguais, vencendo a primeira no ato da compra.

Se você fosse cliente dessa loja, qual seria sua opção?

Estas e outras questões são bem propícias para discussões envolvendo o tema que é muito relevante em qualquer idade, para todas as classes sociais, dentre outras coisas trabalha também a cidadania, a importância de poupar para o futuro, a educação financeira, o orçamento doméstico, etc.

No site do Banco Central do Brasil tem uma ferramenta chamada “calculadora do cidadão”[1], onde é possível fazer os cálculos de capitalização ou financiamento e comparar com os resultados encontrados pelos alunos em sala, mostrando que eles conseguiram resolver os problemas propostos e chegaram aos mesmos resultados, muitas vezes por caminhos bem diferentes, sem uso de fórmulas específicas.

5.3 PROPOSTA DE ATIVIDADE Nº3

A nova conta da energia elétrica.

A conta de energia elétrica é um assunto bastante recorrente no ensino médio, muitos livros didáticos trazem este assunto, alguns não mencionam as tarifas que são cobradas, como o ICMS, e agora temos também a cobrança de uma nova tarifa, a bandeira tarifária, que depende das condições de geração de energia.

Público alvo:

- 9º ano do Ensino Fundamental

Conteúdos matemáticos necessários como pré-requisito:

- Função afim.
- Porcentagem.

Objetivos:

- Identificar as variáveis envolvidas na situação problema.
- Levantar hipóteses e elaborar propostas para solucionar o problema.
- Compartilhar conhecimentos e responsabilidades.
- Aplicar a ideia de função para encontrar o modelo desejado.
- Desenvolver a criatividade e o senso crítico do aluno por meio de uma situação real.
- Identificar as faixas de consumo de energia e suas respectivas taxas de ICMS
- Representar por meio de gráficos as funções encontradas.

Procedimentos didáticos:

[1]<http://www.bcb.gov.br/?calculadora>

- Roda de conversa.
- Trabalho em grupo.
- Pesquisas.

Desenvolvimento da atividade proposta:

Essa atividade pode ser iniciada com uma roda de conversa e, posteriormente, uma pesquisa, sobre as causas da escassez de água que muitas cidades brasileiras estão passando e as possíveis consequências que essa escassez de água pode causar, dentre elas a falta de energia elétrica. Os alunos poderão fazer uma pesquisa sobre a matriz da energia elétrica no Brasil, discutindo sobre as vantagens e desvantagens dessa matriz, relacionando com a crise de energia elétrica atual e possíveis consequências caso ocorra um racionamento de energia.

Esse assunto está em destaque nos últimos meses, na mídia em geral, em muitas cidades brasileiras falta água até mesmo para o consumo humano, algumas destas cidades estão com o racionamento de água em pleno funcionamento decretado pelas concessionárias, como se isso não bastasse ainda corremos o risco da falta de energia elétrica, que também é resultado da escassez de água, já que cerca de 75% da energia elétrica brasileira é produzida em usinas hidrelétricas.

Com o risco de racionamento iminente, o governo federal estabeleceu uma nova tarifa a ser cobrada a partir de janeiro de 2015, de acordo com as condições de geração de eletricidade, são as Bandeiras Tarifárias. Veja o quadro 5.1:

Quadro 5.1: Bandeiras Tarifárias (outubro de 2015)

Bandeira verde	Condições favoráveis de geração de energia. A tarifa não sofre nenhum acréscimo
Bandeira amarela	Condições de geração menos favoráveis. A tarifa sofre acréscimo de R$ 2,50 para cada 100 quilowatt-hora (kWh) consumidos
Bandeira vermelha	Condições mais custosas de geração. A tarifa sobre acréscimo de R$ 4,50 para cada 100 kWh consumidos

Fonte: ANEEL.

A Agencia Nacional de Energia Elétrica (ANEEL) divulga no final de cada mês qual será a bandeira do próximo mês, assim o consumidor poderá adaptar seu consumo, se assim desejar. Depois das pesquisas realizadas e das discussões em sala, podemos resolver o seguinte problema

Problema 1) Como fica o cálculo da nova conta da energia elétrica?

Após esta primeira fase do trabalho, da pesquisa e obtenção dos dados, os alunos deverão trazer uma conta de energia elétrica para a sala de aula para verificar o que é cobrado nesta fatura, por exemplo: os tributos e suas alíquotas, os serviços prestados, etc., e como são feitos os cálculos para esta cobrança, veja algumas informações a este respeito a seguir.

Os consumidores de energia elétrica pagam por meio da conta recebida da sua empresa distribuidora de energia elétrica, um valor correspondente a quantidade de energia elétrica consumida, no mês anterior, estabelecida em kWh (quilowatt-hora) multiplicada por um valor unitário, denominado tarifa, medida em R$/kWh (reais por quilowatt-hora), que corresponde ao preço de um quilowatt consumido em uma hora, sobre este valor incide a alíquota do ICMS, Imposto sobre Circulação de Mercadorias e Serviços, que varia de acordo com a faixa de consumo e é calculado "por dentro", ou seja, no preço de compra ou de venda do bem ou do serviço já está embutido o valor do ICMS destacado, assim, a sua alíquota efetiva é superior à alíquota nominal.

Observe a tabela 5.6 com as alíquotas do ICMS e suas respectivas faixas de consumo:

Tabela 5.6: Alíquotas do ICMS por faixa de consumo

Classe	Faixa de consumo -kWh	Alíquota nominal	Alíquota efetiva
Residencial	De 0 a 90 kWh	Isento	Isento
Residencial	De 91 a 200 kWh	12%	13,636%
Residencial	Acima de 200 kWh	25%	33,333%
Rural	Todas	18%	21,951%
Demais Classes	Todas	18%	21,951%

Fonte: Energisa

A partir de janeiro de 2015 foram cobradas, também, nas contas de energia elétrica as Bandeiras Tarifárias, e o mês de novembro a ANEEL divulgou a bandeira vermelha, ou seja, haverá um aumento de R$ 4,50 para cada 100 kWh consumidos.

Com estas informações é possível calcular a conta de energia elétrica de um consumidor residencial, com ligação bifásica e tarifa convencional, através de uma função com quatro sentenças, de acordo com o consumo em kWh e suas respectivas alíquotas de ICMS, e tomando como base a tarifa da empresa distribuidora de energia elétrica da cidade de Osvaldo Cruz, cujo valor é de R$ 0,447360 por kWh consumido.

Neste momento os alunos poderão fazer algumas estimativas e alguns cálculos com valores arbitrários para entenderem a dinâmica da conta de energia e perceberem as mudanças das alíquotas de acordo com o consumo e chegarem a um modelo adequado para esta conta. Veja a tabela 5.7 com os cálculos descritos.

Tabela 5.7: Cálculos da fatura de energia elétrica por faixa de consumo

Consumo (Kwh)	**Cálculos**	**Valor da fatura (R$)**
30	22,37 + 0,045 .30	23,72
50	22,37 + 0,045 . 50	24,62
55	0,44736 . 55 + 0,045 . 55 = 0,49236 . 55	27,08
78	0,44736 . 78 + 0,045 . 78 = 0,49236 . 78	38,40
90	0,44736 . 90 + 0,045 . 90 = 0,49236 . 90	44,31
100	0,49236 . 100 + 0,49236 . 100 . 12/88 = 0,49236 . 100 . (1 +12/88)	55,95
150	0,49236 . 150 + 0,49236 . 150 . 12/88 = 0,49236 . 150 . (1 + 12/88)	83,93
200	0,49236 . 200 + 0,49236 . 200 . 12/88 = 0,49236 . 200 . (1 + 12/88)	111,90
210	0,49236 . 210 + 0,49236 . 210 . 25/75 = 0,49236 . 210 . (1 + 25/75)	137,86
350	0,49236 . 350 + 0,49236 . 350 . 25/75 = 0,49236 . 350 . (1 + 25/75)	229,77

Observando a tabela é possível perceber que esta conta de energia deve ser dividida em quatro partes, de acordo com a faixa de consumo e suas respectivas alíquotas de ICMS, e que cada uma delas pode ser escrita na forma de uma função afim. Chamando de C(x) o custo total da conta (em R$) e de x a quantidade de kWh consumidos no mês, temos:

(I) Para um consumo de até 50 kWh o consumidor paga a tarifa denominada mínima, que consiste em um valor fixo de R$ 22,37 acrescida da bandeira tarifária vigente no mês. Obs.: Na tabela foi usada a tarifa da bandeira vermelha do mês de novembro que foi de R$ 4,50 para cada 100 kWh consumidos

$$C(x) = 22{,}37 + 0{,}045.x$$

(II) Para um consumo de 51 kWh até 90 kWh

$$C(x) = 0{,}44736\,.x + 0{,}045.x$$

$$C(x) = 0{,}49236.x$$

(III) Para um consumo de 91 kWh até 200 kWh:

$$C(x) = 0{,}49236.x + 0{,}49236\,.\,x\,.\frac{12}{88}$$

$$C(x) = x.(0{,}49236 + \frac{0{,}49236.12}{88})$$

$$C(x) = 0{,}5595.x$$

(IV) Para um consumo acima de 200 kWh:

$$C(x) = 0{,}49236.x + 0{,}49236.x.\frac{25}{75}$$

$$C(x) = x.(0{,}49236 + \frac{0{,}49236.25}{75})$$

$$C(x) = 0{,}6565.x$$

De (I), (II), (III) e (IV) temos:

$$C(x) = \begin{cases} 22{,}37 + 0{,}045.x & para\ x \leq 50 \\ 0{,}49236.x, & para\ \ 50 < x \leq 90 \\ 0{,}5595.x, & para\ \ 90 < x \leq 200 \\ 0{,}6565.x, & para\ \ x > 200 \end{cases}$$

Observe a representação gráfica desta função no gráfico 5.3:

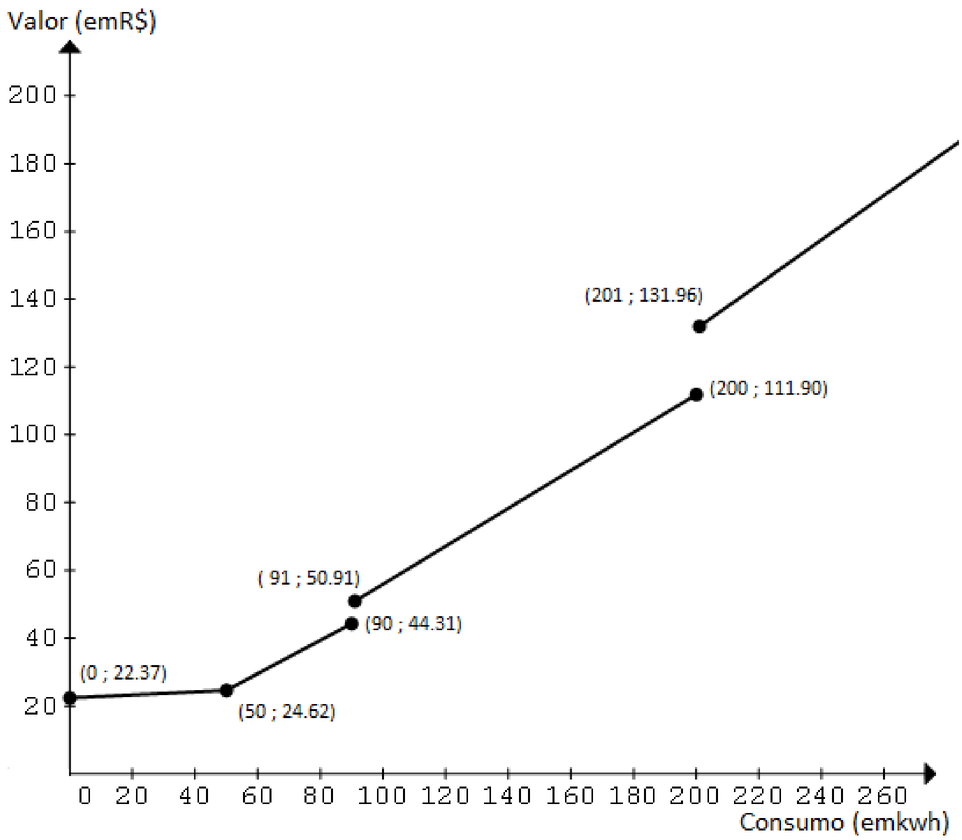

Gráfico 5.3: Fatura de energia elétrica por faixa de consumo

É possível também realizar um trabalho de conscientização para a necessidade de economia de energia elétrica, os alunos podem fazer uma pesquisa do consumo de cada aparelho elétrico que cada um tem em sua casa e depois escrever uma função afim que relaciona o consumo mensal e o tempo de uso diário do aparelho.

Por exemplo, uma TV de led de 32” consome 106 w por hora, se ela ficar ligada x horas por dia durante 30 dias temos:

$$C = 0{,}106\,.\,x.\,30$$

$$C = 3{,}18\,.\,x\ \ kw/mês,$$

onde, C é o consumo mensal e x o tempo médio de uso diário do aparelho, ou seja, o consumo mensal desta TV pode ser calculado substituindo a variável x pela quantidade de horas que essa TV fica ligada em média por dia.

Podemos fazer uma estimativa de consumo de cada aparelho elétrico da casa e o cálculo do valor da conta de energia segundo essas informações, para depois podermos analisar quais aparelhos consomem mais e se é possível diminuir o consumo em alguns desses aparelhos com a mudança de alguns hábitos e possível troca por aparelhos mais econômicos.

5.4 PROPOSTA DE ATIVIDADE Nº4

Como contribuir com a economia de água

A escassez de água potável é um problema enfrentado por uma grande parte da população mundial e também por nós brasileiros, principalmente da região nordeste e nos últimos anos do sudeste do Brasil.

No último ano a crise hídrica teve um aumento considerável devido aos baixos índices pluviométricos que ficaram sempre abaixo das médias históricas mensais, juntando-se a isso, temos os desperdícios que ocorrem desde a distribuição da água com vazamentos na rede até o desperdício causado pelo mau uso da água por parte da população, e não é só isso, tem também, para piorar a situação, a poluição dos rios e nascentes e a falta de investimento no setor.

Público alvo:

- 9º ano do Ensino Fundamental.

Conteúdos matemáticos necessários como pré-requisito:

- Razão e proporção.
- Porcentagem.
- Função afim.

Objetivos:

- Conscientizar o aluno da importância do uso racional da água.
- Encontrar alternativas para economizar água.
- Identificar as variáveis envolvidas na situação problema.
- Levantar hipóteses e elaborar propostas para solucionar o problema.
- Compartilhar conhecimentos e responsabilidades.
- Aplicar a ideia de função para encontrar o modelo desejado.

- Desenvolver a criatividade e o senso crítico do aluno por meio de uma situação real.

Procedimentos didáticos:

- Roda de conversa.
- Trabalho em grupo.
- Pesquisas.

Desenvolvimento da atividade proposta.

Para iniciar esta atividade poderemos fazer uma pesquisa para responder a algumas perguntas pré-estabelecidas, para que os alunos tenham uma visão geral do assunto, como por exemplo:

Qual a porcentagem de água doce do planeta?

Qual a distribuição da água doce no planeta?

Quais países têm as maiores reservas de água doce? E quais países têm as menores reservas?

Qual a quantidade ideal de água potável para o bem-estar e a higiene de uma pessoa diariamente?

Quais países têm o maior e o menor consumo de água doce por pessoa/dia?

Após a pesquisa poderemos promover um debate com as informações trazidas pelos alunos e levantar alguns problemas que serão resolvidos nas próximas aulas, dentre os problemas propostos podem aparecer alguns relacionados a necessidade de economia de água, como por exemplo:

Qual a quantidade de água pode ser economizada por mês se trocarmos o vedante da torneira para eliminar o gotejamento? Isso representa que porcentagem do consumo mensal?

Se diminuirmos o tempo em que o registro do chuveiro fica aberto durante o banho, qual será a economia mensal? Suponhamos uma família de 4 pessoas e a duração do banho passando de 15 minutos por pessoa para 8 minutos por pessoa.

Qual a quantidade de água usada nas descargas do vaso sanitário durante um mês? Suponhamos quatro descargas por pessoa numa família de quatro pessoas. Isto representa que porcentagem do consumo mensal?

Quanto custa a construção de uma cisterna? Quais as vantagens de construirmos uma?

Muitas outras perguntas podem ser formuladas e respondidas, ficaremos apenas com estas a título de exemplos.

Para dar continuidade as aulas, poderemos apresentar um quadro com algumas informações relacionadas ao desperdício de água e resolver os problemas propostos.

Quadro 5.2: Consumo de água

Torneira gotejando	46 litros/dia
Registro do chuveiro meio aberto	9 litros/min
Torneira meio aberta	9 litros/min
Torneira aberta totalmente	21 litros/min
Válvula de descarga	12 litros/descarga
Consumo médio de água potável por pessoa no Brasil	200 litros/pessoa

Fonte:Sabesp.

Resolução dos problemas propostos.

Problema 1) Qual a quantidade de água pode ser economizada por mês se trocarmos o vedante da torneira para eliminar o gotejamento? Isso representa que porcentagem do consumo mensal?

Considerando um mês de 30 dias temos:

$$46 \times 30 = 1.380 \text{ litros.}$$

Sendo o consumo diário de 200 litros por pessoa e uma família de quatro pessoas, o consumo mensal será de:

$$4 \times 200 \times 30 = 24.000\text{litros.}$$

Utilizando a regra de três simples temos:

$$\frac{24000}{1380} = \frac{100\%}{x} \Longrightarrow 24000x = 138000 \Longrightarrow x = \frac{138000}{24000}$$

$$x = 5{,}75\%$$

Esta simples manutenção pode representar uma economia de 5,75% no consumo mensal.

Problema 2) Se diminuirmos o tempo em que o registro do chuveiro fica aberto durante o banho, qual será a economia mensal? Suponhamos uma família de 4 pessoas e a duração do banho passando de 15 minutos por pessoa para 8 minutos por pessoa.

Primeiramente podemos montar uma tabela com alguns valores.

Tabela 5.8: Consumo de água do chuveiro durante o banho

Tempo em minutos	**Quantidade em litros**
1	1 . 9 = 9
2	2 . 9 = 18
3	3 . 9 = 27
4	4 . 9 = 39
X	x . 9 = 9.x

Observando a tabela percebemos que as duas grandezas são diretamente proporcionais, então podemos escrever a função:

$$Q(x) = 9.x \text{ ,}$$

onde, Q é a quantidade de água gasta num banho de x minutos de duração.

Para calcular o gasto de água de um banho, basta substituir o x pelo tempo de duração do banho.

Considerando uma família de 4 pessoas, durante 30 dias e sendo o tempo de duração do banho de 15 minutos, temos:

$$4 \times 30 \ \times 15 = 1.800 \, minutos$$

Portanto, o gasto de água será de:

$$Q(1880) = 9 \, . \, 1800$$

$$Q(1800) = \ 16.200 \, litros$$

Agora vamos considerar o tempo de duração do banho de 8 minutos:

$$4 \times 30 \ \times 8 = 960 \, minutos$$

Portanto, o gasto de água será de:

$$Q(960) = 9 \, . \, 960$$

$$Q(960) = \ 8.640 \, litros$$

Nesta situação a economia mensal de água será de:

$$16.200 - 8.640 = 7.560 \, litros$$

Problema 3) Qual a quantidade de água usada nas descargas do vaso sanitário durante um mês? Supondo quatro descargas por pessoa por dia numa família de quatro pessoas. Isto representa que porcentagem do consumo mensal?

Primeiramente podemos montar uma tabela com alguns valores.

Tabela 5.9: Consumo de água das descargas do vaso sanitário

Número de descargas	**Quantidade em litros**
1	1 . 12 = 12
2	2 . 12 = 24
3	3 . 12 = 36
4	4 . 12 = 48
X	x . 12 = 12.x

Observando a tabela podemos escrever a função:

$Q(x) = 12.x$ que relaciona a quantidade Q de água gasta e função do número x de descargas.

Para uma família de 4 pessoas, supondo 4 descargas por pessoa, por dia durante 30 dias temos:

$4 \times 4 \times 30 = 480$ descargas num mês.

Substituindo o valor de x na função por 480, temos:

$$Q(480) = 12 \ .480$$

$$Q(480) = 5.760 \ litros$$

Considerando um consumo de 24.000 litros por mês, temos:

$$\frac{24000}{5760} = \frac{100\%}{x} \Longrightarrow 24000x = 576000 \Longrightarrow x = \frac{576000}{24000}$$

$$x = 24\%$$

Portanto, o gasto de água com as descargas corresponde a 24% do consumo mensal.

Problema 4) Quanto custa a construção de uma cisterna? Quais as vantagens de construir uma?

Este problema é um pouco mais complexo, pois, deveremos fazer uma pesquisa dos tipos de cisternas para verificar qual deles seria a melhor opção para cada caso, fazermos o levantamento do material necessário e cotarmos os preços. Para a realização desse trabalho consideraremos uma cisterna construída de concreto, totalmente enterrada no solo, no quintal da casa, será no formato de um cubo de 2 metros de aresta e a lista de todo o material e os preços estão na tabela 5.10:

Tabela 5.10: Preços dos materiais para a construção de uma cisterna

Material	**Preço (em R$)**
2 m³ de concreto	600,00
17 barras de ferro ¼	64,00
4 m² de laje k12	84,00
1 bomba hidráulica com motor de 1/2CV	188,00
1 caixa d'água de 500 litros completa	200,00
50 m tubo polietileno ¾	115,00
50 m fio de cobre 6 mm²	80,00
20 m de calha	260,00
12 m tubo de esgoto 4"	96,00
Mão de obra	3.000,00
Total	4.687,00

A água da chuva pode ser aproveitada para as descargas, para lavar o quintal e regar as plantas. Levando em conta estas atividades, a economia mensal de água desta família pode ser considerável.

Para saber se é viável este projeto precisamos saber como se distribuem as chuvas durante o ano e qual a quantidade de chuva de cada mês do ano, para isto precisamos pesquisar estes dados. No Centro integrado de informações agrometeorológicas (CIIAGRO), podemos encontrar o histórico dos índices pluviométricos das principais cidades do Estado de São Paulo, no quadro 5.3 temos as informações sobre a cidade de Adamantina que usaremos como referência.

Quadro 5.3: Índices pluviométricos da cidade de Adamantina

Monitoramento Climatológico: Início da Estação de 24/08/1992 a 12/03/2015													
Município: Adamantina-SP - Última atualização: 12/03/2015													
Ano	**Jan**	**Fe**	**Ma**	**Abr**	**Mai**	**Ju**	**Jul**	**Ag**	**Set**	**Ou**	**No**	**Dez**	**Total**
1992	-	-	-	-	-	-	-	13,0	207,7	107,6	53,2	54,0	435,5
1993	197,2	280,1	193,4	34,2	38,2	58,0	3,2	49,4	52,4	34,9	141,0	156,7	1.238,7
1994	259,3	84,1	76,0	49,7	53,3	40,4	21,4	-	41,1	32,2	93,7	268,5	1.019,7
1995	263,8	237,6	182,9	35,4	49,2	22,2	19,6	-	44,6	138,0	150,2	334,8	1.478,3
1996	240,4	237,5	110,6	63,6	73,9	13,8	2,4	17,2	107,9	80,2	187,5	99,4	1.234,4
1997	304,7	141,6	97,8	40,4	88,2	240,8	28,0	1,5	127,6	104,8	235,2	79,3	1.489,9
1998	88,3	106,3	306,3	141,1	73,4	13,0	2,6	134,0	103,6	89,6	74,7	180,7	1.313,6
1999	316,1	137,8	139,3	63,4	42,8	55,2	12,3	-	36,3	12,0	50,4	244,1	1.109,7
2000	89,8	196,0	277,4	34,1	24,3	13,7	40,8	70,5	170,5	41,0	85,9	143,2	1.187,2
2001	205,8	318,4	55,6	125,1	99,5	35,0	35,9	25,3	66,2	60,4	191,2	220,3	1.438,7
2002	145,6	144,9	52,2	-	151,1	**-**	80,7	59,4	72,2	26,9	137,1	112,0	982,1
2003	399,0	175,0	109,0	52,0	49,0	26,0	15,0	19,0	32,0	133,0	150,0	81,2	1.240,2
2004	257,4	58,0	91,0	24,5	199,7	59,6	102,5	-	15,0	142,0	178,9	249,0	1.377,6
2005	311,0	70,5	67,5	135,0	49,0	49,3	5,0	21,0	102,7	127,2	36,0	181,8	1.156,0
2006	124,4	303,4	198,1	41,3	47,5	7,9	29,8	18,5	118,4	75,1	33,8	232,1	1.230,3
2007	369,0	126,9	138,6	29,9	59,3	-	204,7	-	1,4	21,8	141,8	40,6	1.134,0
2008	94,8	77,9	80,8	94,0	11,2	70,0	0,2	56,0	29,9	46,6	71,4	62,4	695,2
2009	364,0	115,2	162,0	7,4	57,7	27,3	75,5	125,8	117,4	141,1	117,9	391,7	1.703,0
2010	374,1	160,9	77,4	50,4	25,7	14,8	48,3	0,8	202,5	78,0	69,9	136,6	1.239,4
2011	215,3	232,5	152,3	59,5	4,4	39,3	4,1	31,6	16,9	125,4	96,5	49,7	1.027,5
2012	241,2	94,3	68,4	70,6	127,2	225,3	8,8	1,0	124,9	23,3	80,8	218,4	1.284,2
2013	343,6	197,1	208,7	76,5	100,8	107,3	44,2	-	50,2	168,4	96,9	106,4	1.500,1
2014	126,5	190,0	82,9	72,2	50,0	7,8	51,4	3,1	131,3	89,6	146,3	146,4	1.097,5
2015	157,8	145,6	38,1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	341,5
Média	263,3	141,8	108,8	51,3	71,1	47,2	52,2	30,3	75,8	85,5	101,3	159,6	13.069,5
Fonte: CIIAGRO online - Site: www.ciiagro.sp.gov.br					Elaboração: Udop - Relações Institucionais					Resultado Parcial*			

Observando o quadro vemos que os meses de junho e agosto têm os menores índices médios no período de 1992 a 2015, abaixo de 50 mm, e que na maioria dos anos, no máximo 3 meses têm precipitação menor que 50 mm, os demais meses ficam sempre acima de 70 mm.

A precipitação de 10 mm equivale a 10 litros de água por 1m², para uma casa de 100 m² de área coberta e uma precipitação de 70 mm de chuva no mês, podemos coletar 7000 litros de água, o que seria suficiente, pelo menos, para o uso nas descargas do vaso sanitário. As vantagens desse sistema são muitas, dentre eles o financeiro, com a economia de água haverá uma diminuição no valor da fatura, e a principal vantagem será a conservação do meio ambiente, pois, será necessário captarmos menos água na natureza.

Podemos escrever uma função que relaciona a quantidade de água coletada e a área das casas, para isto vamos inicialmente fazer uma tabela considerando uma precipitação pluviométrica de 70 mm no mês:

Tabela 5.11: Quantidade de água coletada da chuva

Área coberta (em m²)	**Quantidade de água coletada (em litros)**
50	50 . 70 = 3500
60	60 . 70 = 4200
70	70 . 70 = 4900
X	x . 70 = 70.x

Chamando a quantidade de água coletada de Q e a área coberta da casa de x, temos:

$$Q(x) = 70.x$$

Podemos também escrever uma função para a casa de cada aluno, relacionando a precipitação pluviométrica com a quantidade de água coletada, neste caso teremos:

$$Q(x) = A.x,$$

onde, A é a área da casa e x a precipitação pluviométrica.

Este tema é muito rico em situações problemas, além de poder ser trabalhado em diversas disciplinas de maneira interdisciplinar.

5.5 PROPOSTA DE ATIVIDADE Nº5

Orçamento doméstico

Muitas famílias sofrem com o descontrole do orçamento doméstico, no final do mês sobram contas a pagar e falta dinheiro, como equilibrar as contas com a renda familiar cada vez mais apertada? Além de economizar e controlar os gastos o que posso fazer para sair desta situação?

Público alvo:

- 1º ano do Ensino Médio

Conteúdos matemáticos necessários como pré-requisito:

- Função afim.
- Matemática financeira.

Objetivos:

- Identificar a relação existente entre salário e escolaridade.
- Organizar o orçamento doméstico.
- Comparar as taxas de juros cobradas nos vários tipos de empréstimos, com a taxa de juros do cartão de crédito e do cheque especial.
- Identificar as variáveis envolvidas na situação problema.
- Levantar hipóteses e elaborar propostas para solucionar o problema.
- Compartilhar conhecimentos e responsabilidades.
- Aplicar a ideia de função para encontrar o modelo desejado.
- Desenvolver a criatividade e o senso crítico do aluno por meio de uma situação real.

Procedimentos didáticos:

- Roda de conversa.
- Trabalho em grupo.
- Pesquisas.

Desenvolvimento da atividade proposta.

Esta atividade pode ser iniciada com uma pesquisa que compara os salários com a escolaridade, mostrando a importância dos estudos e da formação acadêmica para a melhoria das condições de vida, incentivando os alunos a continuarem os estudos após o Ensino Médio, e a levarem os estudos a sério.

Um trabalhador com nível superior, em média, tem salário três vezes maior que o salário de um trabalhador sem nível superior, como mostra o quadro 5.4:

Quadro 5.4: Pessoal ocupado assalariado, salários e outras remunerações e salário médio mensal, segundo o sexo e o nível de escolaridade – Brasil – 2009

Sexo e nível de escolaridade		Pessoal ocupado assalariado		Salários e outras remunerações (1000 R$)		Salário médio mensal (em salários mínimos)
		Absoluto	Relativo	Absoluto	Relativo	
Total		**40 212 057**	**100,0**	**781 881 723**	**100,0**	**3,3**
Sexo	Homens	23 376 125	58,1	494 141 127	63,2	3,6
	Mulheres	16 835 932	41,9	287 740 596	36,8	2,9
Nível de escolaridade	Sem nível superior	33 580 487	83,5	471 298 465	60,3	2,4
	Com nível superior	6 631 570	16,5	310 583 258	39,7	7,8

Fonte: IBGE, Diretoria de Pesquisas, Cadastro Central de Empresas 2009.

Após a pesquisa realizada pode ser feita uma discussão sobre a importância dos estudos na melhoria da qualidade de vida, mostrando as várias possibilidades de cursar uma faculdade sendo bolsista nas faculdades particulares ou estudar em uma universidade estadual ou federal, são muitos os programas que estão à disposição de todos, desde que satisfaçam as condições exigidas, mas também é necessário levar o estudo a sério para conseguir uma das vagas disponíveis.

Dentre os programas podemos citar o SISU (Sistema de Seleção Unificada) e o PROUNI (Programa Universidade Para Todos) que são programas do Ministério da Educação vinculados ao Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), a Bolsa Universidade (Programa Escola da Família) que é um convênio estabelecido entre o Governo do Estado de São Paulo e as Instituições de Ensino Superior, por meio da Secretaria de Educação, e muitos outros que são oferecidos pelas Universidades.

Após essa primeira etapa pode ser feita uma pesquisa dentre os alunos sobre o orçamento doméstico, a elaboração da planilha para o levantamento das informações pode ser elaborada pelos próprios alunos com auxílio do professor, vejamos um exemplo desse tipo de planilha no quadro 5.5:

Quadro 5.5: Orçamento doméstico

ORÇAMENTO DOMÉSTICO	
Recebimentos	**Valor (R$)**
Salários:	
Recebimentos de aluguel:	
Aplicações:	
Outros:	
Total:	
Pagamentos	**Valor (R$)**
Aluguel:	
Prestação de casa ou terreno:	
Prestação de carro ou moto:	
Financiamentos:	
Aplicações (Poupança, Previdência Privada, outros):	
Prestações do cartão de crédito:	
Supermercado:	
Açougue:	
Feira:	
Farmácia:	
Escola:	
Energia elétrica:	
Água e esgoto:	
Telefone fixo:	
Telefone celular:	
Combustível:	
Entretenimento (cinema, jantar, etc.):	
Outros:	
Total:	

Depois de elaborada a planilha os alunos deverão fazer o levantamento de dados, não necessariamente da sua casa, para evitar algum tipo de constrangimento, e levá-los para a escola onde o professor identificará alguns desses que poderão servir de exemplos para que possam ser feitos alguns comentários e possíveis sugestões de ajustes com a ajuda dos alunos.

Dentre os problemas identificados, um que aparece com certa frequência é o pagamento mínimo da fatura do cartão de crédito, gerando uma dívida com juros de até 16% ao mês. Neste caso, qual é a melhor solução para equilibrar as contas?

Uma possibilidade é renegociar a dívida com a operadora do cartão, muitas vezes o cliente consegue um bom desconto dos juros da dívida e uma parcela fixa para quitar o débito, mas se por acaso essa negociação não der certo, outra possibilidade é fazer um financiamento do valor da dívida do cartão e quitar essa dívida, pois, o juro rotativo do cartão de crédito pode chegar a 16% ao mês e o juro do crédito pessoal gira em torno de 3,5% ao mês, existe também a possibilidade do crédito consignado onde a taxa de juros é em média 2% ao mês.

Para visualizarmos melhor essa diferença entre o pagamento de uma dívida no cartão e o pagamento de um empréstimo pessoal, vamos fazer uma simulação, comparando a amortização de uma dívida de um cartão de crédito no valor de R$3.000,00, onde o devedor se compromete a pagar R$ 420,00 por mês e não utiliza mais o cartão para outras compras, com a amortização dessa dívida do cartão de crédito sendo trocada por um empréstimo pessoal consignado com taxa de juros de 2,5% ao mês.

Inicialmente vamos montar uma tabela para facilitar o entendimento do processo da amortização da dívida mês a mês.

Amortização da dívida do cartão de crédito.

Dívida de R$ 3.000,00 com juros de 8% ao mês, com pagamento mensal de R$ 420,00.

Tabela 5.12: Amortização de uma dívida do cartão de crédito

Data do pagamento	**Valor da prestação**	**Cálculos**	**Saldo devedor**	**Amortização da dívida**
-	-	-	R$ 3.000,00	-
10/jan	R$ 420,00	3000,00 . 1,08 - 420	R$ 2.820,00	R$ 180,00
10/fev	R$ 420,00	2820,00 . 1,08–420	R$ 2.625,60	R$ 194,40
10/mar	R$ 420,00	2625,60 . 1,08–420	R$ 2.415,65	R$ 209,95
10/abr	R$ 420,00	2415,65 . 1,08–420	R$ 2.188,90	R$ 226,75
10/mai	R$ 420,00	2188,90 . 1,08–420	R$ 1.944,01	R$ 244,89
10/jun	R$ 420,00	1944,01 . 1,08–420	R$ 1.679,53	R$ 264,48
10/jul	R$ 420,00	1679,53 . 1,08–420	R$ 1.393,90	R$ 285,63
10/ago	R$ 420,00	1393,90 . 1,08–420	R$ 1.085,41	R$ 308,49
10/set	R$ 420,00	1085,41 . 1,08–420	R$ 752,24	R$ 333,17
10/out	R$ 420,00	752,24 . 1,08–420	R$ 392,42	R$ 359,82
10/nov	R$ 423,81	392,42 . 1,08–423,81	R$ 0,00	R$ 392,42
Total	R$ 4,623,81	-	-	R$ 3.000,00

Agora faremos a amortização da dívida do crédito pessoal consignado.

Dívida de R$ 3000,00 com juros de 2,5% ao mês, com pagamento de 11 prestações, neste caso vamos calcular o valor da prestação utilizando a fórmula:

$$VP = p\ .\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right],$$

onde, VP representa o valor da dívida, p representa o valor da prestação, i a taxa de juros e n o número de prestações.

$$3000 = p.\left[\frac{1-(1{,}025)^{-11}}{0{,}025}\right]$$

$$p = \frac{3000}{9{,}5142}$$

$$p = 315{,}32$$

Com uma prestação de R$ 315,32, vamos montar a tabela de amortização da dívida.

Tabela 5.13: Amortização de uma dívida do crédito pessoal consignado

Data do pagamento	**Valor da prestação**	**Cálculos**	**Saldo devedor**	**Amortização da dívida**
-	-	-	R$ 3.000,00	-
10/jan	R$ 315,32	3000,00 . 1,025 -315,32	R$ 2.759,68	R$ 240,32
10/fev	R$ 315,32	2759,68 . 1,025 -315,32	R$ 2.513,35	R$ 246,33
10/mar	R$ 315,32	2513,35 . 1,025 - 315,32	R$ 2.260,87	R$ 252,48
10/abr	R$ 315,32	2260,87 . 1,025 - 315,32	R$ 2.002,07	R$ 258,80
10/mai	R$ 315,32	2002,07 . 1,025 - 315,32	R$ 1.736,80	R$ 265,27
10/jun	R$ 315,32	1736,80 . 1,025 - 315,32	R$ 1.464,90	R$ 271,90
10/jul	R$ 315,32	1464,90 . 1,025 - 315,32	R$ 1.186,20	R$ 278,70
10/ago	R$ 315,32	1186,2 . 1,025 - 315,32	R$ 900,54	R$ 285,66
10/set	R$ 315,32	900,54 . 1,025 - 315,32	R$ 607,73	R$ 292,81
10/out	R$ 315,32	607,73 . 1,025 - 315,32	R$ 307,60	R$ 300,13
10/nov	R$ 315,32	307,6 . 1,025 - 315,32	R$ 0,00	R$ 307,60
Total	R$ 3.468,52	-	-	R$ 3.000,00

Observando as tabelas, as diferenças entre as duas transações ficam evidentes, o valor total pago com a amortização do cartão de crédito 33% maior do total pago pelo empréstimo consignado, ou seja, é muito vantajoso trocar a dívida do cartão de crédito por um empréstimo.

Para finalizar esta atividade vamos tentar encontrar uma função que melhor exprima essas operações de amortização e construir gráficos com vários valores para as dívidas, para as taxas de juros e para os tempos de amortização, comparando e tentando encontrar a melhor solução para cada situação, pois, cada pessoa tem que encontrar o valor de uma prestação que caiba no seu orçamento, analisando a taxa de juros e o número de prestações.

Caso os alunos não tenham estudado matemática financeira é interessante que eles façam pesquisas sobre sistemas de amortização de dívidas, como o SAC (Sistema de Amortização Constante) em que o valor da amortização é constante e a prestação é variável e decrescente e o Sistema Francês de Amortização (Sistema Price) em que a prestação é constante.

Nos casos acima foi utilizado o sistema francês de amortização, no qual são utilizadas as fórmulas:

Para determinar o valor da prestação:

$$P_k = D_0 * \frac{i}{1-(1+i)^{-n}},$$

onde $\begin{cases} P_k = valor\ da\ prestação \\ D_0 = valor\ da\ dívida\ inicial \\ i = taxa\ de\ juros\ cobrada\ pela\ financeira \\ n = tempo\ para\ quitação\ da\ dívida \end{cases}$

Para determinar o valor do saldo devedor:

$$D_k = P_k * \frac{1-(1+i)^{-(n-k)}}{i},$$

onde $\begin{cases} P_k = valor\ da\ prestação \\ D_k = valor\ da\ dívida\ após\ k\ amortizações \\ i = taxa\ de\ juros\ cobrada\ pela\ financeira \\ n = tempo\ total\ para\ quitação\ da\ dívida \\ k = número\ de\ amortizações\ realizadas \end{cases}$

Para a construção dos gráficos foi utilizada a fórmula que determina o saldo devedor em função do número de prestações pagas, veja os gráficos a seguir e suas respectivas fórmulas.

A função abaixo representa a amortização da dívida do cartão de crédito dada por:

$$D(k) = 600 * \frac{1-(1,16)^{-(10,84-k)}}{0,16}$$

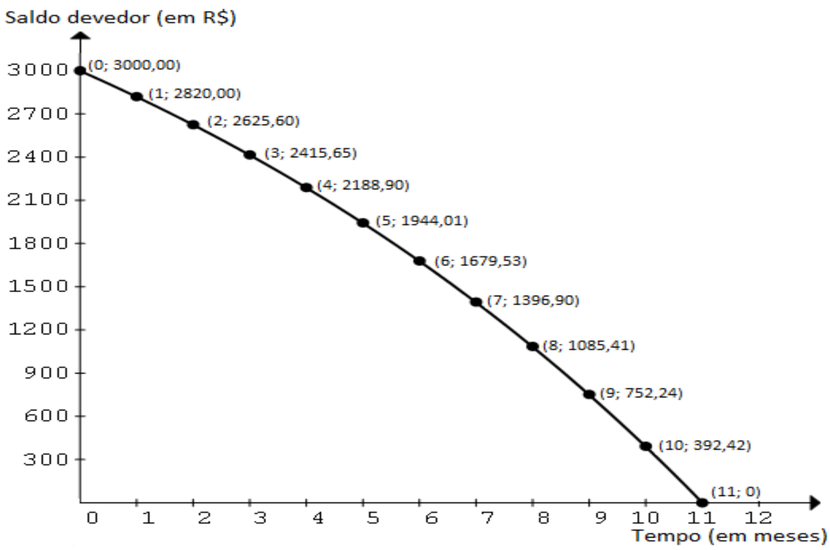

Gráfico 5.4: Amortização de uma dívida do cartão de crédito

A função abaixo representa a amortização da dívida do crédito pessoal consignado dada por:

$$D(k) = 315{,}32 * \frac{1 - (1{,}025)^{-(11-k)}}{0{,}025}$$

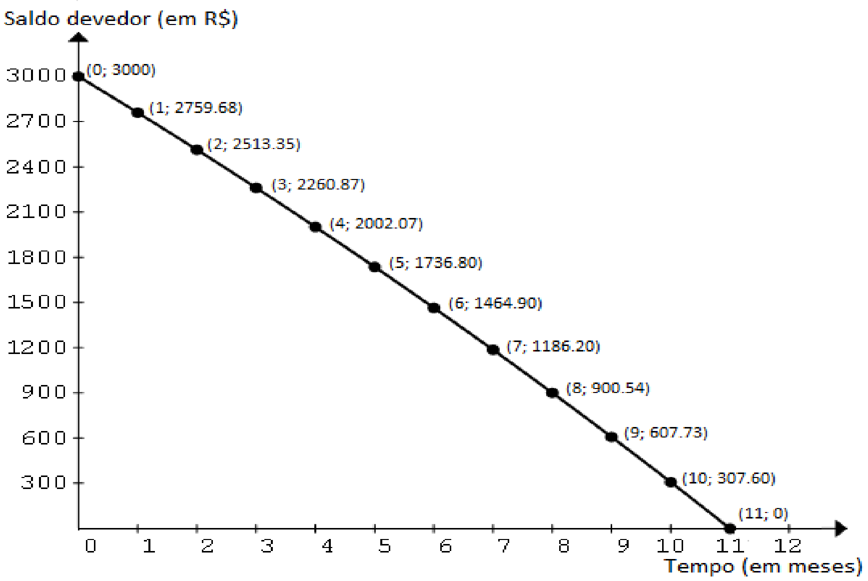

Gráfico 5.5: Amortização de uma dívida do crédito pessoal consignado

Podemos fazer algumas simulações usando um programa para construção de gráficos, neste trabalho foi usado o software graphmática, disponível para download em <www.graphmatica.com>, mudando algumas variáveis, podemos observar as mudanças ocorridas no gráfico e encontrar a solução mais conveniente para cada caso, abaixo temos algumas funções que foram modificadas a partir da função h(x) e seus respectivos gráficos.

$$h(k) = 315{,}32 * \frac{1 - (1{,}025)^{-(11-k)}}{0{,}025}$$

Mudando o tempo de 11 meses para 18 meses observamos pelo gráfico que podemos quitar uma dívida de R$ 4.526,00.

$$f(k) = 315{,}32 * \frac{1 - (1{,}025)^{-(18-k)}}{0{,}025}$$

Mudando a taxa de juros de 2,5% para 5% ao mês observamos que no mesmo período de 11 meses podemos quitar uma dívida de R$ 2.618,52.

$$n(k) = 315{,}32 * \frac{1 - (1{,}035)^{-(11-k)}}{0{,}035}$$

Mudando o valor das prestações de R$ 315,32 para R$ 200,00 e o tempo de 11 meses para 20 meses podemos quitar uma dívida de R$ 3.118,00.

$$g(k) = 200 * \frac{1 - (1{,}025)^{-(20-k)}}{0{,}025}$$

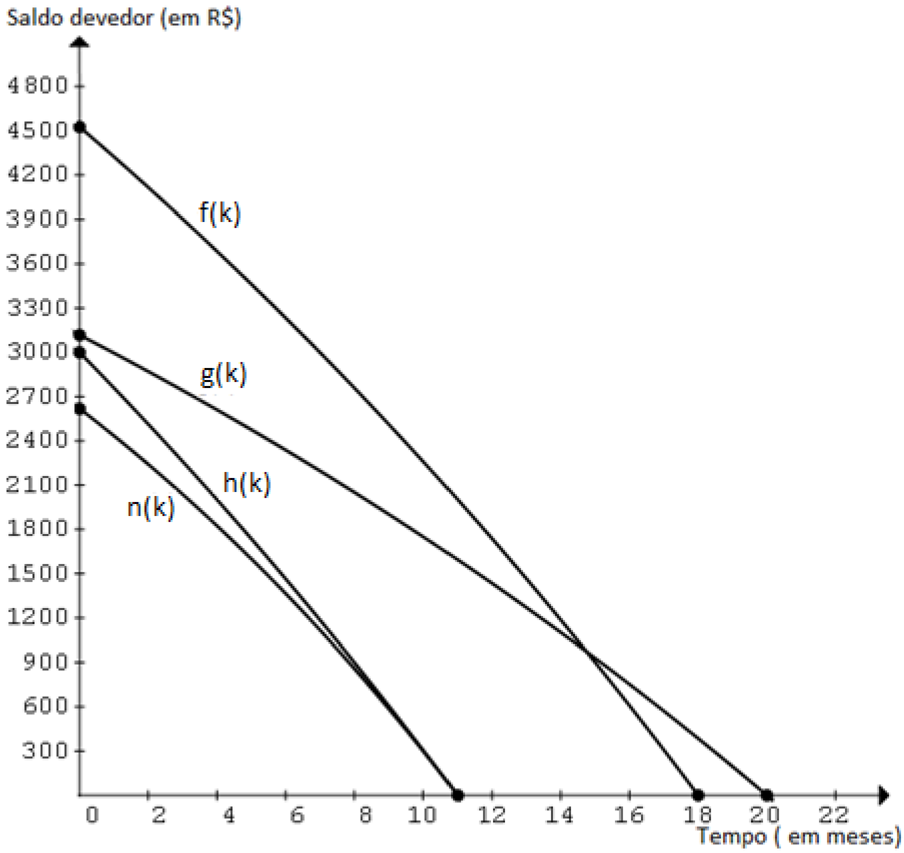

Gráfico 5.6: Comparativos de amortizações

6 APLICAÇÃO DA MODELAGEM MATEMÁTICA NO SETOR DE TRANSPORTE RODOVIÁRIO

Neste capítulo será feita uma aplicação da Modelagem Matemática em uma atividade econômica muito presente na cidade de Osvaldo Cruz, o transporte rodoviário, analisando os custos fixos e variáveis, faturamentos e lucros obtidos.

A cidade de Osvaldo Cruz tem no transporte rodoviário uma de suas principais atividades econômicas. Hoje a cidade de Osvaldo Cruz é conhecida como a capital estadual do caminhão bitrem graneleiro.

Osvaldo Cruz tem cerca de 1400 caminhões, isto representa 1 caminhão para cada 24 habitantes, sendo que a média nacional é de 1 caminhão para cada 68 habitantes (DEEPASK, 2015). Esta atividade é fonte de renda para o município e gera muitos empregos diretos e indiretos; a procura por motoristas em condições de viajar é grande devido à quantidade de caminhões, levando muitos dos jovens a ingressar nesta profissão pela facilidade de encontrar um emprego e pelo salário, que é considerado alto para a região.

O transporte rodoviário de carga a granel é uma atividade muito volátil, pois, depende da oferta e da procura que está diretamente ligada à produção agrícola, nos meses de safra a oferta por frete aumenta bastante, já nos outros meses há uma diminuição considerável, isto força o caminhoneiro a trabalhar em várias regiões durante o ano, de acordo com o calendário agrícola.

Para a realização deste trabalho, foi imprescindível a colaboração de uma transportadora de Osvaldo Cruz, a Califórnia Transportes, que forneceu dados acerca da movimentação de um caminhão, com custos envolvidos nestas operações. Com base nestas informações e em pesquisas realizadas em sites especializados em transporte rodoviário, serão propostas atividades com a aplicação da Modelagem Matemática, evidenciando a importância desta metodologia para o controle dos custos e o equilíbrio financeiro dessa atividade empresarial, desde grandes transportadoras até empresas familiares, muito comuns em Osvaldo Cruz, muitas delas com apenas um caminhão.

Público alvo:

- 1º ano do Ensino Médio

Conteúdos matemáticos necessários como pré-requisito:

- Função afim.
- Porcentagem.
- Média aritmética.

Objetivos:

- Identificar as variáveis envolvidas na situação problema.
- Identificar os custos fixos e os custos variáveis.
- Organizar uma planilha de custos.
- Compartilhar conhecimentos e responsabilidades.
- Aplicar a ideia de função para encontrar o modelo desejado.
- Desenvolver a criatividade e o senso crítico do aluno por meio de uma situação real.

Procedimentos didáticos:

- Roda de conversa.
- Trabalho em grupo.
- Pesquisas.

Desenvolvimento da atividade proposta:

Para iniciarmos esta atividade propomos que seja feita uma pesquisa pelos alunos sobre os custos fixos e variáveis envolvidos nesta atividade econômica e depois se faça uma mesa redonda sobre os resultados da pesquisa, discutindo a importância de cada um deles e como eles podem ser calculados ou estimados, com base em informações pesquisadas em empresas de transporte rodoviário e em sites especializados em transporte de carga.

Após esta primeira fase de conhecimento sobre o assunto abordado deverá ser feita, mediante toda a classe, as perguntas que deverão ser respondidas com a ajuda da modelagem matemática, algumas possíveis perguntas que podem surgir são, por exemplo:

Como é calculado o salário do motorista?

Qual o valor dos encargos sociais pago pela empresa?

Qual a depreciação anual do caminhão?

Qual é a previsão de gastos com oficina em reparos e manutenção?

Qual o custo com pneus?
Qual é a média do consumo de combustível?
Quanto se paga de pedágio por mês?
Qual o custo total do quilômetro rodado?

Para responder a estas perguntas e a outras que poderão surgir no decorrer da atividade, a classe poderá ser dividida em grupos para facilitar o trabalho e no final poderá ser feita uma apresentação dos resultados obtidos pelos grupos e para encerrar a atividade uma mesa redonda para discutir estes resultados, se estão dentro do esperado ou se deverá ser feita alguma revisão de alguma parte da atividade.

Para ilustrarmos esta atividade vamos propor um problema que será resolvido a seguir:

A tabela 6.1 mostra alguns dados do mês de junho de 2015, referente ao movimento um caminhão da empresa Califórnia Transportes da cidade de Osvaldo Cruz.

Quadro 6.1: Resultados do caminhão I, para o mês de junho de 2015

Faturamento	R$ 28 884,00
Pedágio	R$ 6 809,00
Combustível	R$ 8 100,86
Seguro	R$ 2 040,00
IPVA/Seguro obrigatório	R$ 371,49
Quilômetros rodados	7195 km
Combustível	3016 litros
Manutenção	1361,25

Fonte: Califórnia Transporte de Osvaldo Cruz.

Com base neste quadro e nos dados das pesquisas realizadas responda:
Problema 1) Qual a função que determina o salário do motorista?
De acordo com as pesquisas realizadas, o salário do motorista de bitrem graneleiro na região de Osvaldo Cruz corresponde a 10% do faturamento bruto do caminhão, caso este valor não atinja o salário base da categoria que é de R$1.580,80, segundo informação obtida no Sindicato dos Condutores de Veículos Rodoviários (SINCOVER, 2015), o motorista receberá esse valor.

Então, o salário do motorista pode ser calculado segundo uma função de duas sentenças:

$$S(f) = \begin{cases} 1.580,80 & se \quad f < 15808,00 \\ 0,1 \,.\, f & se \quad f \geq 15808,00 \end{cases},$$

onde, $S(f)$ é o salário bruto do motorista e f é o faturamento bruto mensal, no mês em questão o salário bruto foi de:

$$S(f) = 0,1 \,.28884$$

$$S(f) = 2888,40$$

Para o cálculo do salário líquido do motorista, devemos descontar o valor pago a Receita Federal (Imposto de Renda) e ao Ministério da Previdência Social (INSS), as alíquotas desses impostos dependem da faixa salarial conforme as tabelas vigentes, observe as alíquotas nas tabelas 6.1 e 6.2:

Tabela 6.1: Incidência do IRPF: a partir de abril do ano-calendário de 2015

Base de cálculo (R$)	**Alíquota (%)**	**Parcela a deduzir do IRPF (R$)**
Até 1.903,98	-	-
De 1.903,99 até 2.826,65	7,5	142,80
De 2,826,66 até 3.751,05	15	354,80
De 3.751,06 até 4.664,68	22,5	636,13
Acima de 4.664,68	27,5	869,36

Fonte: Receita Federal.

Tabela 6.2: Contribuição mensal do INSS

Tabela para Empregado, Empregado Doméstico e Trabalhador Avulso	
Salário de Contribuição (R$)	Alíquota (%)
Até 1.399,12	8
De 1.399,13 até 2.331,88	9
De 2.331,89 até 4.663,75	11

Fonte: Ministério da Previdência Social.

Neste caso, a alíquota do Imposto de Renda é de 15% com a dedução de R$ 354,80, e a alíquota do INSS é de 11%, veja os cálculos na tabela 6.3:

Tabela 6.3: Cálculo do salário líquido do motorista

Denominação	**Quantidade**	**Vencimentos**	**Descontos**
Salário	-	2.888,40	-
Imposto de Renda retido na fonte	15% - 354,80	-	78,46
INSS	11%	-	317,72
Total de Vencimentos 2.888,40	Total de descontos 396,18	Líquido a receber 2.492,22	

Problema 2) Qual o valor dos encargos sociais e trabalhistas pago pela empresa?

A empresa paga encargos no total de 36,8% conforme quadro 6.2 e deve ainda fazer provisões mensais para pagamentos futuros como o 13º salário, férias mais 1/3 de férias, multa rescisória de 40% do FGTS nas dispensas sem justa causa e encargos sociais e trabalhistas sobre estas provisões, totalizando o percentual de 63,33% do salário do motorista.

Quadro 6.2 Encargos sociais e trabalhistas pago pela empresa

Contribuição à Previdência Social (INSS)	20%
Fundo de Garantia por Tempo de Serviço (FGTS)	8%
Salário-Educação	2,5%
SENAC/SESC	1,5%
SENAI/SESI	1%
SEBRAE	0,6%
INCRA	0,2%
Risco de Acidente do Trabalho (RAT)	3%
Total	36,8%

Fonte: Ribeiro (2013).

Quadro 6.3: Apropriação mensal (Provisões)

Férias + 1/3	11,11%
13º Salário	8,33%
Encargos sociais e trabalhistas	3,89%
Multa de 40% do FGTS	3,2%
TOTAL	26,53%

Fonte: Ribeiro (2013).

Como o salário do motorista está expresso em função do faturamento do caminhão, os custos com os encargos podem ser calculados também em função do faturamento do caminhão como mostra a fórmula abaixo:

$$E(f) = 0{,}6333 \,.\, 0{,}1 \,.\, f$$

$$E(f) = 0{,}06333 \,.\, f$$

Em que $E(f)$ é o valor dos encargos sociais e trabalhistas em função do faturamento f do caminhão durante o mês em questão.

No mês considerado estes custos são de:

$$E(f) = 0{,}06333 \,.28884 = 1829{,}22$$

O custo total deste motorista para a empresa pode ser escrito em função do faturamento do caminhão, para o mês de junho este custo total foi de:

$$C(f) = S(f) + E(f)$$

$$C(f) = 0{,}1 \,.\, f + 0{,}06333 \,.\, f$$

$$C(f) = 0{,}16333 \,.\, f$$

Problema 3) Quais os custos fixos e variáveis envolvidos nesta atividade?

São chamados de custos fixos aqueles que não dependem da quilometragem do caminhão, assim os custos que ocorrem independente do deslocamento do caminhão são: Depreciação; Remuneração do capital; Seguro do veículo e IPVA/seguro obrigatório.

A depreciação é o desgaste natural do caminhão que ocorre devido ao uso na atividade produtiva durante sua vida útil. Segundo Alvarenga e Novaes (2010, p.96): “A depreciação é um custo contábil, reconhecido pela Recita Federal, que leva em conta o fato de que equipamentos e instalações se deterioram com o uso”.

A depreciação envolvida nos custos fixos não deve ser a mesma que a contábil já que na contábil o veículo é depreciado em 5 anos a uma taxa de 20% ao ano, diferente da realidade operacional onde a vida útil do caminhão depende de vários fatores, entre eles da manutenção preventiva, da manutenção corretiva, do tempo real de uso, entre outros, e cada empresa deve estabelecer vida útil de acordo com sua realidade e observando a legislação vigente.

Remuneração do capital é o chamado custo de oportunidade, ao invés de investir no mercado financeiro ou em outra atividade que por certo traria alguns rendimentos, este dinheiro é direcionado à compra do caminhão.

> O custo de oportunidade é o valor do benefício que se deixa de ganhar quando, no processo decisório, se toma um caminho em detrimento de outro.
> Na grande maioria dos casos, as diversas alternativas sempre têm o seu custo de oportunidade o qual será, normalmente, levado em consideração. O esquema simplesmente funcionará do seguinte modo: os benefícios da alternativa rejeitada serão o custo de oportunidade da alternativa selecionada (LEONE, 2008, p 76).

De acordo com os conceitos de depreciação e remuneração do capital encontrados nas pesquisas, o professor pode pedir aos alunos que façam os cálculos destes custos utilizando os conteúdos já estudados para depois comparar estes resultados com resultados obtidos com métodos utilizados na contabilidade comercial e discutir possíveis diferenças entre as duas formas utilizadas.

Para realizar os cálculos vamos considerar o valor do veículo novo de R$ 450.000,00, o valor residual do veículo de R$ 220.000,00, a taxa média de juros de investimentos no mercado de 0,7% ao mês e o período de depreciação de 96 meses.

Para o cálculo da depreciação vamos utilizar o método da depreciação linear que consiste em dividir a diferença do valor de um veículo novo e seu valor residual pelo número de períodos:

$D(m) = \frac{VN-VR}{n}$, em que: $D(m)$ é a depreciação mensal, VN é o valor do veículo novo, VR é o valor residual do veículo e n é o número de períodos considerado na depreciação.

$$D(m) = \frac{450\ 000 - 220\ 000}{96}$$

$$D(m) = 2.396{,}00$$

Para o cálculo da remuneração do capital vamos utilizar a fórmula para o cálculo de juros simples, considerando o capital de R$ 450.000,00 e a taxa de 0,7% ao mês e o tempo de um período.

$$j = c.i.n$$

$$j = 450\ 000\ .0{,}007\ .1$$

$$j = 3.150{,}00$$

Portanto o valor total obtido com a depreciação e a remuneração do capital é e R$ 5.546,00.

Segundo Valente, Passaglia e Novaes (2001, p.98) a depreciação e a remuneração do capital podem ser calculados de maneira única.

> A formulação matemática para o cálculo conjunto do custo de depreciação e remuneração do capital investido (CC) fica então sendo a seguinte:
> $CC = (P - L).FRC + P \ .j$.

onde:

CC = Custo de capital em um período (mês ou ano).

P = Investimento inicial no veículo.

L = Valor residual do veículo.

j = Taxa de juros no período (mês ou ano) adotado.

FRC = Fator de Recuperação de Capital, dado por:

$$FRC = \frac{j\,.(1+j)^n}{(1+j)^n - 1}\ ,$$

onde, $j =$ taxa unitária de juros ou de oportunidade e $n =$ vida útil do veículo.

> Calculado conjuntamente, o resultado obtido para o custo de capital será suficiente não só para recuperar o investimento (depreciação), mas também para remunerá-lo adequadamente (custo de oportunidade) (VALENTE; PASSAGLIA; NOVAES, 2001, p.99).

Neste caso vamos considerar uma vida útil de 96 meses, valor do investimento de R$ 450.000,00, valor residual de R$ 220.000,00 (valor de mercado) e taxa de juros de 0,7% ao mês.

Vamos inicialmente calcular o fator de recuperação do capital:

$$FRC = \frac{0{,}007\ .(1+0{,}007)^{96}}{(1+0{,}007)^{96} - 1}$$

$$FRC = 0{,}01434$$

Agora podemos calcular o custo de capital para o período:

$$C = (450\ 000 - 220\ 000)\ .0{,}01434 + 220\ 000\ \ .0{,}007$$

$$C = 3\ 298{,}39 + 1540$$

$$C = 4\ 838{,}39$$

Comparando os dois resultados encontrados vemos uma diferença de R$ 707,61, aqui podemos fazer uma discussão e um estudo mais aprofundado sobre os métodos de depreciação e remuneração do capital, e procurar encontrar qual foi o motivo desta diferença, e qual é a maneira mais pertinente para o nosso estudo, para a continuação desta atividade vamos considerar o resultado encontrado da segunda maneira.

Os outros custos fixos para este caminhão estão no quadro 6.1 e são os custos com IPVA/Seguro obrigatório que somam R$ 371,49 por mês e os custos com Seguro que é de R$ 2.040,00 por mês.

Os custos variáveis são aqueles que dependem diretamente da quilometragem do caminhão, ou seja, quanto maior a quilometragem maior será o gasto de combustível, de pneus, manutenção e outros.

Um índice muito importante nesta atividade é o valor do consumo de combustível, já que estes caminhões rodam milhares de quilômetros todo mês, a economia de alguns centavos por quilômetro pode melhorar muito o índice de rendimento, neste caso, é feito uma média mensal, que será muito útil no acompanhamento do desempenho deste caminhão, pois, caso haja alguma variação um pouco mais elevada é sinal que o caminhão está com problemas e é hora de passar na oficina para realizar uma manutenção corretiva.

A média do consumo de combustível é calculada por uma razão entre os quilômetros rodados e a quantidade de combustível gasto, logo, para este caminhão no mês de junho a média foi de:

$$Média\ de\ \ consumo = \frac{7165\ km}{3016\ \ l} = 2{,}38 km/l.$$

O custo em reais do quilômetro rodado é uma média que leva em consideração o valor do litro de óleo diesel e pode ser expresso por uma razão entre o valor pago pelo combustível e a quantidade de quilômetros rodados, então para o mês de junho o custo foi de:

$$Custo\ do\ quilômetro\ rodado = \frac{8100{,}86}{7165} = 1{,}13\ reais/km.$$

O custo com pneus depende de vários fatores, dentre eles o preço do pneu novo e da recapagem, da duração média do pneu novo e da recapagem. Um pneu novo custa aproximadamente de R$ 1.400,00 e roda aproximadamente 200.000 quilômetros, a recapagem custa cerca de R$ 400,00 e acrescenta mais 120.000

quilômetros, totalizando 320.000 quilômetros, o conjunto (cavalo e bitrem) tem 26 pneus, então o custo por quilômetro será de:

$$Custo\ pneus = 26\ .\frac{1400 + 400}{320000}$$

$$Custo\ pneus = 0{,}1462\ reais/km$$

O custo com lubrificações e lavagens deve ser calculado levando-se em conta o valor em reais da mão de obra, do óleo lubrificante, dos filtros e demais materiais usados e dividindo pela quilometragem entre duas lubrificações sucessivas, para o nosso veículo em questão, as trocas de óleo lubrificante do motor, do diferencial, do câmbio e dos filtros que ocorrem a cada 120.000 quilômetros, de acordo com pesquisas realizadas, ficam na média em R$ 4.800,00.

O custo por quilômetro rodado é calculado pela razão entre o valor das lubrificações pela quilometragem entre duas trocas sucessivas.

$$Custo\ lubrificantes = \frac{4800}{120000}$$

$$Custo\ lubrificações = 0{,}04 reais/km$$

Para veículos de carga, movidos a diesel, fabricados a partir de 2012 existe a obrigatoriedade do uso do ARLA 32 que é uma solução aquosa de ureia que é inserida nos catalisadores do sistema de escapamento dos motores, que transforma os óxidos de nitrogênio, que são altamente tóxicos, em nitrogênio e vapor de água por meio de redução química.

O custo com este sistema depende da quilometragem do caminhão, sendo que o consumo é de 0,05 litros por quilômetro.

O preço do ARLA 32 varia muito de região para região, pois o preço não é tabelado, o preço médio é de R$ 2,32, se for comprado em galões de 1.000 litros, o preço cai para R$ 1,48.

Com base nestas informações podemos calcular o custo com o ARLA 32 por quilômetro rodado:

$$Custo\ ARLA = \ 0{,}05.1{,}48$$

$$Custo\ ARLA = 0{,}074 R\$/km$$

Os custos operacionais para este conjunto (cavalo e bitrem) no mês de junho serão calculados abaixo através da fórmula:

$$C.op. = C.f. + C.v_1 + \ C.v_2$$

Em que:

$C.op$ =Custo operacional total.

$C.f$ = Custo fixo (Depreciação/remuneração do capital, IPVA/Seguro obrigatório e Seguro de risco),

$C.v_1$ = Custos variáveis em função da quilometragem (Combustível, manutenção, pneus, lubrificação e ARLA),

$C.v_2$ = Custos variáveis em função do faturamento do veículo e pedágio.

O pedágio depende da rota feita no mês em questão, como os roteiros não são fixos, não tem como calcular com boa precisão, então optamos por calcular mês a mês.

O custo de manutenção varia de acordo com o tipo de veículo, ano de fabricação, condições das estradas, cuidados do motorista, dentre outros fatores, este custo varia muito de um mês para outro, por isso, vamos considerar para esse trabalho os custos informados no quadro 6.1.

$$Custo\ \ de\ manutenção = R\$\ 1.361{,}25$$

No quadro 6.7 temos os custos operacionais com um conjunto (cavalo e bitrem), de acordo com as informações fornecidas pela empresa Califórnia Transporte de Osvaldo Cruz e encontradas em pesquisas realizadas em sites especializados.

Quadro 6.4: Custos operacionais mensais

Custos fixos operacionais	**R$ 7.249,88**
Depreciação/Remuneração do capital	4.838,39
IPVA/Seguro obrigatório	371,49
Seguro	2.040,00
Custos variáveis por km ($C.v_1$)	**R$ 1,3902**
Combustível	1,13
Pneus	0,1462
Lubrificação	0,04
ARLA 32	0,074
Custos variáveis($C.v_2$)	**12.887,90**
Pedágio	6.809,03
Manutenção	1.361,25
Salário do motorista + encargos	4.717,62

$$C.op. = 7.249,88 + \ 1,3902 \ * x + \ 12.887,90$$

$$C.op. = 20.137,78 + \ 1,3902 \ * x$$

$$C.op. = 20.137,78 + \ 1,3902 \ * 7.165$$

$$C.op. = 20.137,78 + \ 9.960,78$$

$$C.op. = 30.098,56$$

Para o mês de junho o lucro com este veículo ficou em:

$$Lucro = 28.884,00 - 30.098,56$$

$$Lucro = -1.214,56$$

ou seja, neste mês este caminhão teve um prejuízo de R$ 1.214,56.

Este prejuízo foi causado provavelmente pela entressafra agrícola, pois, a diminuição da oferta de frete neste período contribui para a diminuição do valor do frete e do número de viagens mensais.

Neste capítulo teve-se a intenção de mostrar informações desta atividade econômica tão presente na cidade de Osvaldo Cruz e que faz parte do cotidiano de um grande número de alunos das escolas, pois, muitos desses têm familiares trabalhando em alguma atividade relacionada ao transporte, como por exemplo, em transportadoras, oficinas mecânicas, borracharias, auto elétricas ou mesmo como motorista. Isso ajuda a despertar o interesse pelos estudos, a motivar a busca pelo conhecimento, melhorando o processo de ensino-aprendizagem, além de mostrar o quanto a Matemática está presente em todo o processo operacional de uma transportadora e sua importância para que a empresa prospere a contento.

Lembrando que este exemplo não esgota o assunto em questão, pois, existem muitas marcas e modelos de caminhões, variedades de tipos de cargas e trajetos, e cada empresa deve montar sua própria planilha de custos.

Ainda, ressalta-se que, caso esta modelagem seja relevante para o funcionamento de uma transportadora, que toda a lógica matemática empregada pode ser transposta para um software de planilhas, como, por exemplo, o Microsoft Excel. Seguramente, com dados tabelados, o acompanhamento das informações seria facilitado, inclusive com as alterações temporais.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com este trabalho pretendeu-se divulgar uma metodologia alternativa com o objetivo de motivar o aluno a aprender matemática, enfocando-a de maneira a mostrar sua presença no dia-a-dia. Dessa forma a atribuição de significado se torna mais evidente, mostrando a capacidade que o conhecimento matemático tem de melhorara qualidade de vida, fomentar a resolução de problemas de uma forma mais eficiente e rápida.

A Modelagem Matemática pode ser usada nos Ensinos Fundamental e Médio, não sendo algo completamente desconhecido pelos professores. Contudo, os problemas muitas vezes são expostos de maneira superficial, sem dar relevância a situações reais do cotidiano do aluno. Daí a presente pesquisa reforçar o compromisso em utilizar situações tangíveis aos discentes, alimentando o interesse pelo aprendizado da disciplina e pela geração de significado.

Diante disso, a modelagem, embora fazendo uso de situações simples, pode ser uma importante ferramenta para que o aluno desenvolva e compreenda conceitos e ferramentas da matemática, como funções, gráficos, tabelas, fórmulas etc. desta forma, os alunos são estimulados a realizar pesquisas, questionamentos sobre o tema em destaque, estabelecimento de comparações com outros problemas semelhantes, levantamento de hipóteses, construção de estimativas, validação de resultados obtidos etc.

Neste trabalho foram apresentadas algumas propostas de atividades com exemplos que podem ser desenvolvidos com o uso da modelagem matemática. Ressalta-se que se tratam apenas de exemplos, com a intenção de subsidiar o trabalho do professor em sala de aula, que deve escolher a melhor maneira de trabalhar com cada turma, cada realidade, de acordo com os problemas que serão levantados no decorrer das atividades.

E ainda, cada professor deve procurar alguma atividade econômica característica e de grande importância da sua cidade ou região para este trabalho com modelagem matemática, pois, desta maneira estamos trazendo para a sala de aula um tema relevante que envolve muitos alunos e/ou seus familiares, motivando-os a estudar matemática para buscar soluções de possíveis problemas ou a buscar novas alternativas para melhorar a atividade em questão.

Esta metodologia não esgota as discussões sobre como os problemas do ensino da matemática serão equacionados. Contudo, reforça-se a importância de despertar nos alunos o gosto pela Matemática e, inegavelmente, um caminho é mostrar, durante as aulas, o entusiasmo pelo ensino da disciplina, fazendo do processo ensino-aprendizagem uma atividade dinâmica, na qual os discentes percebam a aplicabilidade do que estão aprendendo, motivando-os constantemente.

Toda a mudança, principalmente nas fases iniciais, gera impactos, por vezes negativos para aqueles impactados pela mudança. Nesta incluem-se os alunos e mesmo os professores, que, por vezes, se mostram resistentes. Naturalmente, muitas dificuldades surgirão em contextos de mudanças.

Dentre as diferentes dificuldades, ressalta-se planejamentos “fechados”, como o cumprimento do currículo oficial da Secretaria da Educação do Estado de São Paulo, que deve ser mantido e abordado na íntegra. Daí as Escolas de Tempo Integral cumprirem um papel fundamental, já que a modelagem matemática pode ser inserida sob a forma de projetos, dada a maior disponibilidade de tempo.

Ressalta-se, ainda, que a atividade com modelagem pode inspirar alunos a desenvolver metodologias e ferramentas com finalidades profissionais. Para tanto, a modelagem desenvolvida para o controle de caixa de uma pequena transportadora, apresentado no capítulo 6, pode subsidiar essas ações empreendedoras, inclusive fomentando o desenvolvimento de planilhas digitais, maximizando a visualização de dados de uma empresa.

Dentro das possibilidades de cada profissional na docência, faz-se necessário a busca por novas metodologias de ensino para a educação Matemática, estudando-a e adaptando-a para as múltiplas realidades. A efetiva melhoria da escola pública, indubitavelmente, passa pela criatividade dos professores no processo ensino-aprendizagem.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AGÊNCIA NACIONAL DE ENERGIA ELÉTRICA. **Bandeiras tarifárias.**Disponível em: http://www.aneel.gov.br/area.cfm?idArea=758. Acesso em: 11 de out. 2015.

ALVARENGA, A. C.;NOVAES, A. G. N. **Logística Aplicada suprimento e distribuição física.** 3. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 2000.

BANCO DO BRASIL. **Como é cobrado o IR nos fundos de investimentos?** Disponível em: http://bb.com.br/portalbb/page83,116,9218,1,1,1,1.bb?codigoMenu=1092&codigoRet=11259&bread=11. Acesso em: 20 de jan. 2015.

BASSANEZI, Rodney Carlos.**Ensino-aprendizagem com modelagem matemática:** uma nova estratégia.3. ed. São Paulo: Contexto, 2013.

BIEMBENGUT, M. S.;HEIN, N.**Modelagem matemática no ensino.** 5. ed. São Paulo: Contexto, 2011.

BORTOLUCCI, Rodrigo de S. et al. **Relatório pedagógico SARESP 2014:**Matemática. Material de Apoio Pedagógico. São Paulo, 2015.

BOYER, C. B.**História da matemática.** Tradução Elza F. Gomide. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2010.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais:**Matemática. Brasília:MEC/SEF, 1997.Disponível em:http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf. Acesso em: 10 de dez. 2014.

CRESPO, Antônio Arnot. **Matemática comercial e financeira.** 12. ed. São Paulo: Saraiva,1997.

DANTE,Luiz Roberto. **Matemática:** contexto & aplicações. 2. ed. São Paulo: Ática,2013.

DEEPASK. **Relação entre população e frota de caminhão/caminhão trator.**Disponível em: http://www.deepask.com/goes?page=Pesquisa-cruza-a-evolucao-da-frota-brasileira-de-veiculos-frente-ao-crescimento-populacional. Acesso em: 04 de ago. 2015.

DELPHIN ORGANIZAÇÃO CONTÁBIL. **Encargos sociais sobre a folha de pagamento.** Disponível em: http://www.delphin.com.br/orientacao/66-encargos-sociais-sobre-a-folha-de-pagamento. Acesso em: 28 de ago. 2015.

ENERGISA. **Tributos, impostos e outros encargos.** Disponível em: http://www.energisa.com.br/empresa/Paginas/poder-publico/taxas-prazos-e-normas/tributos-impostos-encargos.aspx. Acesso em: 11 de out. 2015.

INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA. **Estatística do cadastro central de empresas 2009.** Disponível em: http://www.ibge.gov.br/home/presidencia/noticias/imprensa/ppts/0000000427.pdf. Acesso em: 20 de fev. 2015.

LIMA, Elon Lages et al. **A matemática do ensino médio.** 6.ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, v.1, 2006.

MINISTÉRIO DA PREVIDÊNCIA SOCIAL. **Tabela de contribuição mensal.** Disponível em: http://www.previdencia.gov.br/servicos-ao-cidadao/todos-os-servicos/gps/tabela-contribuicao-mensal. Acesso em: 27 de out. 2015.

RECEITA FEDERAL DO BRASIL. **Tabela de incidência mensal.**Disponível em: http://idg.receita.fazenda.gov.br/acesso-rapido/tributos/irpf-imposto-de-renda-pessoa-fisica#tabelas-de-incid-ncia-mensal. Acesso em: 29 de ago. 2015.

RIBEIRO, Osni Moura.**Contabilidade comercial fácil.** 18. ed. São Paulo: Saraiva, 2013.

SABESP(Companhia de Saneamento Básico do Estado de São Paulo).**Cuidados com vazamentos.**Disponível em: http://site.sabesp.com.br/uploads/file/Folhetos/pdf/uso_racional.pdf. Acesso em: 25 de mar. 2015.

SABESP(Companhia de Saneamento Básico do Estado de São Paulo).**Uso racional da água.**Disponível em: http://site.sabesp.com.br/site/interna/Default.aspx?secaoId=595. Acesso em: 25 de mar. 2015.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação. **Diretrizes do programa de ensino integral.** São Paulo, 2012. Disponível em: http://www.educacao.sp.gov.br/a2sitebox/arquivos/documentos/342.pdf. Acesso em: 23 de out. 2015.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação.**Informações básicas programa de ensino integral.**São Paulo, 2014. Disponível em: http://www.educacao.sp.gov.br/a2sitebox/arquivos/documentos/727.pdf. Acesso em: 23 de out. 2015.

SÃO PAULO (Estado) Secretaria da Educação. **Material de Apoio ao Currículo do Estado de São Paulo.** Caderno do Professor: matemática, ensino médio, 3ª Série. São Paulo: SE, 2014. v. 2, 102 p.

SINCONVER. **Tabelas de salários.** Disponível em: http://www.sinconver.com.br/Salarios/salarios.asp. Acesso em:26 de ago. 2015.

SÓ MATEMATICA. **Al-Khwarizmi.** Disponível em: http://www.somatematica.com.br/biograf/khwarizmi.php. Acesso em:09 de jul. 2015.

SOUZA, Joamir Roberto de.**Matemática:** Novo olhar. 1. ed. São Paulo: FTD,2010.

UNIÃO DOS PRODUTORES DE BIOENERGIA. **Monitoramento climatológico:** Início da estação de 24/08/1992 a 13/12/2015. Disponível em: http://www.portaludop.com.br/download/estatistica/economia_chuvas/1992a2015_historico_adamantina.pdf.Acesso em: 28 de mar. 2015.

VALENTE, A. M.; PASSAGLIA, E.; NOVAES, A. G. **Gerenciamento de transporte e frotas.**1. ed. São Paulo: Pioneira,2001.