

Universidade Federal de Mato Grosso do Sul  
Instituto de Matemática  
Programa de Pós-Graduação em Matemática  
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

## Números Complexos: Conceito e Aplicações

Aluno: Bruno Eduardo Pereira  
Orientador: Prof<sup>o</sup> Dr. Alex Ferreira Rossini

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>11</b>
<b>2</b>	<b>Representação dos números complexos</b>	<b>17</b>
2.1	Representação cartesiana . . . . .	17
2.1.1.	Propriedades da adição em $\mathbb{C}$ . . . . .	18
2.1.2.	Subtração em $\mathbb{C}$ . . . . .	19
2.1.3.	Propriedades da multiplicação $\mathbb{C}$ . . . . .	19
2.1.4.	Divisão em $\mathbb{C}$ . . . . .	20
2.1.5.	Propriedade distributiva em $\mathbb{C}$ . . . . .	21
2.2	Forma algébrica de um número complexo . . . . .	21
2.2.1.	Imersão de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{C}$ . . . . .	21
2.2.2.	Unidade imaginária . . . . .	23
2.2.3.	Representação algébrica . . . . .	23
2.2.4.	Conjugado de um número complexo . . . . .	26
2.2.5.	Uso do conjugado na divisão . . . . .	26
2.3	Forma trigonométrica dos números complexos . . . . .	28
2.3.1.	Módulo e argumento de um número complexo . . . . .	28
2.3.2.	Primeira fórmula de Moivre . . . . .	33
2.3.3.	Raiz enésima $\sqrt[n]{z}$ de um número complexo . . . . .	35
2.3.4.	Segunda fórmula de Moivre . . . . .	36
<b>3</b>	<b>Interpretação geométrica dos números complexos</b>	<b>37</b>
3.1	Soma de dois complexos . . . . .	37
3.2	Produto de $z$ pelo complexo $\cos \theta + i \sin \theta$ . . . . .	38
3.3	Rotação de coordenadas no plano . . . . .	39
3.4	Interpretação geométrica de $\sqrt[n]{z}$ . . . . .	43
3.5	Sugestões de atividades com o Geogebra . . . . .	45

3.5.1.	Soma e diferença de dois complexos no geogebra . . . . .	45
3.5.2.	Multiplicação e divisão de dois complexos no Geogebra . . . . .	46
3.5.3.	O produto de um complexo $z$ pela unidade imaginária no Geogebra	47
3.5.4.	Produto de um complexo pelo seu conjugado no Geogebra . . . . .	48
3.5.5.	Argumentos do produto e do quociente entre dois complexos no Geogebra . . . . .	49
<b>4</b>	<b>Aplicações a Geometria plana</b>	<b>51</b>
4.1	Equação da reta . . . . .	51
4.2	Condição de alinhamento de três complexos . . . . .	53
4.3	Classificação dos triângulos . . . . .	55
4.4	Área do triângulo . . . . .	56
4.5	Área de um polígono convexo . . . . .	60
4.6	Área de um polígono regular . . . . .	61
4.7	Pontos notáveis de um triângulo . . . . .	64
4.8	Semelhança de triângulos . . . . .	67
4.8.1.	Caracterização de um triângulo equilátero . . . . .	69
4.9	Teorema de Napoleão . . . . .	72
4.10	Problema da ilha do tesouro . . . . .	73
<b>5</b>	<b>Conclusão</b>	<b>77</b>

---

## Lista de Figuras

---

2.1	Imersão de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{C}$ . . . . .	22
2.2	Representação algébrica de um número complexo. . . . .	24
2.3	Conjugado de um complexo. . . . .	27
2.4	Representação trigonométrica de um complexo. . . . .	29
2.5	Exemplo 12. . . . .	30
2.6	Exemplo 13. . . . .	30
2.7	Exemplo 14. . . . .	31
2.8	Produto entre complexos. . . . .	32
2.9	Quociente entre complexos. . . . .	32
3.1	Soma de dois complexos. . . . .	37
3.2	Produto de $z$ pelo complexo $\cos \theta + i \sin \theta$ . . . . .	38
3.3	Produto de $z$ por $i$ . . . . .	39
3.4	Quociente de $z$ por $i$ . . . . .	39
3.5	Exemplo 19. . . . .	40
3.6	Exemplo 20. . . . .	41
3.7	Exemplo 21. . . . .	42
3.8	Exemplo 22. . . . .	43
3.9	Polígono regular de $n$ lados. . . . .	44
3.10	Raízes cúbicas de 8. . . . .	45
3.11	Soma e diferença de complexos no geogebra. . . . .	46
3.12	produto de complexos no geogebra. . . . .	47
3.13	Quociente entre complexos no geogebra. . . . .	47
3.14	Produto de um complexo por $i$ no geogebra. . . . .	48
3.15	Simétrico de um complexo no geogebra. . . . .	48
3.16	Produto de um complexo pelo seu conjugado no geogebra. . . . .	49
3.17	Produto de dois complexos que geram um número real. . . . .	50

3.18	Produto de complexos que geram um imaginário puro. . . . .	50
4.1	Reta que passa pelos pontos $P$ e $Q$ . . . . .	52
4.2	Triângulo 1. . . . .	55
4.3	Área de um triângulo. . . . .	56
4.4	Triângulo 2. . . . .	58
4.5	triângulo 3. . . . .	58
4.6	Triângulo 4. . . . .	59
4.7	Triângulo 5. . . . .	59
4.8	Polígono convexo no plano Argand-Gauss. . . . .	60
4.9	Polígono regular formado pelas raízes enésimas de um complexo. . . . .	62
4.10	Triângulo isósceles de base $l$ e lados medindo $\rho$ . . . . .	63
4.11	Circuncentro. . . . .	64
4.12	Ortocentro. . . . .	65
4.13	Medianas. . . . .	66
4.14	Triângulos semelhantes. . . . .	68
4.15	Triângulos com orientação opostas. . . . .	69
4.16	Raízes da unidade. . . . .	70
4.17	Teorema de Napoleão. . . . .	72
4.18	Ilha do tesouro. . . . .	74
4.19	Ilha do tesouro 1. . . . .	74
4.20	Ilha do tesouro 2. . . . .	75
4.21	Ilha do tesouro 3. . . . .	76
4.22	Ilha do tesouro 4. . . . .	76

---

## Dedicatória

---

Dedico este trabalho primeiramente a Deus, pois nestes anos dedicados ao mestrado profissional pude ter saúde e paz para completar meus estudos, a minha mãe que sempre me incentivou nos meus estudos, desde o tempo da minha graduação e a minha esposa e filhos pela compreensão neste tempo de muito esforço e luta.

---

## Agradecimentos

---

Agradeço a Deus pelas pessoas que colocou na minha vida neste momento de estudos, a minha família por toda ajuda dada, aos professores das disciplinas dadas durante o mestrado os quais sempre estiverem próximos, sendo compreensivos e auxiliando nos momentos difíceis e agradeço de maneira especial ao professor Dr<sup>o</sup> Alex Ferreira Rossini(UFMS) que me orientou e sempre buscou dar sugestões, sugerindo materiais de subsídio, ao Professor Dr<sup>o</sup> Claudemir Aniz(UFMS), ao Professor Dr<sup>o</sup> Rafael Moreira de Souza (UEMS) que foram membros da banca, que também deram sugestões para que o trabalho ficasse mais organizado e com uma estética melhor para o leitor e também ao professor Valdemiro Piedade Vigas que instalou o  $\text{\LaTeX}$  no meu computador para que eu pudesse realizar este trabalho com mais agilidade.

---

## Objetivos

---

A intenção dos autores com o presente trabalho é apresentar algumas sugestões de abordagem a respeito de números complexos, assunto este apurado no ensino médio. Também visa transparecer que esta matéria poder ser incluída na grade curricular de maneira obrigatória não apenas de maneira opcional como argumenta os Parâmetros Curriculares Nacionais (PNC's). Os PCN's dizem que *tradicionalmente, a Matemática do ensino médio trata da ampliação do conjunto numérico, introduzindo os números complexos. Como esse tema isolado da resolução de equações perde seu sentido para que os não continuarão seus estudos na área, ele pode ser trabalhado na parte flexível do currículo nas escolas.*

O problema é que esta argumentação abre margem para que ou o assunto não seja trabalhado, visto que o tempo é limitado, ou quando é possível, o mesmo se limite apenas as operações algébricas. Em virtude desse cenário apresentado, nosso trabalho visa contribuir para algum tipo de mudança no tratamento deste tema. Nesse sentido, daremos maior enfoque ao aspecto geométrico dos números complexos, visto que trazem propriedades interessantes e também promovem a revisão de alguns aspectos estudados na geometria plana Euclidiana e também em coordenadas no plano.



---

## Resumo

---

Inicialmente, este trabalho oferece um levantamento da história dos números complexos, sua importância atual e aplicações. Os números complexos serão definidos bem como sua estrutura algébrica, além de apresentarmos suas propriedades e também alguns teoremas. Serão sugeridas atividades utilizando a sala de tecnologia das escolas, que podem trazer um benefício maior para a aprendizagem. Esta dissertação tem como cerne o aspecto geométrico dos números complexos, dando uma justificativa de sua importância no ensino médio, tornando o ensino dos números complexos atrativo para os alunos.

Palavras-chave: Números complexos, Conceito, Geometria.

---

## Abstract

---

Initially, this work provides a survey of the history of complex numbers, their current applications and importance. The complex numbers are going to be defined and their algebraic structures presented, as well as some properties and theorems. Some activities will be suggested using the laboratory at schools, what can bring a better benefit for learning. The core of this dissertation is the geometric aspect of the complex numbers, giving a justification of its importance at high school, making the teaching of complex numbers more attractive for the students.

Keywords: Complex Numbers, Concept, Geometry.

# CAPÍTULO 1

---

## Introdução

---

O surgimento dos números complexos remonta ao século *XVI* com a solução de equações algébricas de grau 3. Por volta do ano 1515, Scipione Del Ferro (1465 – 1526), professor de matemática da Universidade de Bolonha, conseguiu encontrar a solução da equação cúbica utilizando provavelmente fontes árabes. Ele não publicou nada a respeito, confiando a descoberta a Antônio Fiori, um de seus discípulos. Por volta de 1535, Nicolo Fontana de Brescia, mais conhecido como Tartaglia, (o Tartamudo) devido às lesões em sua face obtidas na sua infância, declarou ter descoberto uma solução algébrica para a equação cúbica  $x^3 + px^2 = n$ .

Acreditando que se tratava de uma mentira por parte de Tartaglia, Fiori lançou um desafio a Tartaglia envolvendo equações cúbicas. Poucos dias antes da disputa Tartaglia também obteve a solução da cúbica  $x^3 + mx = n$  o que levou a ser vencedor nesta disputa, pois sabia resolver dois casos de cúbicas, enquanto Fior apenas um. Anos mais tarde, Girolamo Cardano um gênio, inescrupuloso que ensinava matemática e praticava medicina em Milão conseguiu depois de muito esforço persuadir Tartaglia a lhe mostrar a solução da cúbica  $x^3 + mx = n$ .

No ano de 1545 Girolamo Cardano lançou a *Ars Magna*, um grande tratado em latim de álgebra e lá estava a solução de Tartaglia. Após o lançamento Tartaglia protestou de maneira veemente contra Cardano alegando que fora autor da descoberta, porém suas justificativas foram rebatidas por Ludovico Ferrari um dos mais brilhantes discípulos de Cardano, que afirmou que seu mestre recebeu informações de Del Ferro, através de um terceiro personagem, ao mesmo tempo em que acusava Tartaglia de ter plagiado a solução de Del Ferro. E essa polêmica prosseguiu, no qual Tartaglia com certeza se deu por satisfeito de sair vivo. Como os personagens desta novela nem sempre colocaram a verdade em primeiro plano, existem muitas variações desta mesma história não sabendo ao certo quem é o mocinho deste episódio.

A resolução da cúbica  $x^3 + mx = n$  está descrita na *Ars Magna* (A Grande Arte) é essencialmente a seguinte. Inicialmente, consideremos a identidade

$$(a - b)^3 + 3ab(a - b) = a^3 - b^3.$$

Se pudermos escolher  $a$  e  $b$  de modo que  $3ab = m$  e  $a^3 - b^3 = n$ , teremos  $x = a - b$ . Resolvendo o sistema,

$$\begin{cases} 3ab = m \\ a^3 - b^3 = n \end{cases}, \quad (1.1)$$

encontramos

$$x = \sqrt[3]{\frac{n}{2} + \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{3}\right)^3}} - \sqrt[3]{-\frac{n}{2} + \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{3}\right)^3}}.$$

Observe que da equação  $3ab = m$ , temos  $a = \frac{m}{3b}$ . Substituindo  $a = \frac{m}{3b}$  em  $a^3 - b^3 = n$  segue que:

$$a^3 - b^3 = n \Leftrightarrow \left(\frac{m}{3b}\right)^3 - b^3 = n \Leftrightarrow 27b^6 + 27nb^3 - m^3 = 0.$$

Fazendo  $b^3 = y$ , temos  $27y^2 + 27ny - m^3 = 0$ . Assim, temos uma equação do segundo grau em  $y$ . Sendo que o discriminante é  $\Delta = (27n)^2 + 4 \cdot 27m^3$ , teremos:

$$y = -\frac{n}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{3}\right)^3}.$$

Tomando  $y = -\frac{n}{2} + \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{3}\right)^3}$  e tendo  $b^3 = y$ , obteremos:

$$b = \sqrt[3]{-\frac{n}{2} + \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{3}\right)^3}}.$$

Desde que  $a^3 - b^3 = n$ , segue da igualdade anterior que

$$a = \sqrt[3]{\frac{n}{2} + \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{3}\right)^3}}.$$

Portanto,

$$x = \sqrt[3]{\frac{n}{2} + \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{3}\right)^3}} - \sqrt[3]{-\frac{n}{2} + \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{3}\right)^3}}.$$

Esta fórmula dava uma solução para muitas cúbicas, no entanto em alguns casos gerava algumas aberrações. Em sua obra *L'Algebra* Rafael Bombelli (1526 – 1572), discípulo de Girolamo Cardano, chegou em uma dessas aberrações quando aplicou a fórmula apre-

sentada na Ars Magna à equação  $x^3 - 15x - 4 = 0$  obtendo

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} - \sqrt[3]{-2 + \sqrt{-121}}.$$

Claramente, Bombelli ficava incomodado com raízes quadradas de números negativos (dizia que eram inúteis e sofisticadas), porém, Bombelli operava livremente com elas, aplicando as regras usuais da álgebra. No seguinte caso, Bombelli utilizando a identidade  $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$  e tomando na identidade  $a = 2$  e  $b = \sqrt{-1}$  mostrou que

$$(2 + \sqrt{-1})^3 = 2 + \sqrt{-121}$$

e analogamente tomando  $a = -2$  e  $b = \sqrt{-1}$  obteve

$$(-2 + \sqrt{-1})^3 = -2 + \sqrt{-121}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} - \sqrt[3]{-2 + \sqrt{-121}} \\ &= \sqrt[3]{(2 + \sqrt{-1})^3} - \sqrt[3]{(-2 + \sqrt{-1})^3} \\ &= (2 + \sqrt{-1}) - (-2 + \sqrt{-1}) \\ &= 4. \end{aligned}$$

De fato 4 satisfaz a equação  $x^3 - 15x - 4 = 0$ , aliás, a equação possui mais duas raízes reais. Assim embora os matemáticos deste tempo se sentissem desconfortáveis com raízes quadradas de números negativos continuavam a operar com elas. Bombelli trabalhava sistematicamente com a quantidade  $\sqrt{-1}$  que hoje chamamos unidade imaginária e representamos por  $i$ . Posteriormente Caspar Wessel (1745 – 1818), Jean Robert Argand (1768 – 1822) e Johann Carl Friedrich Gauss (1787 – 1855) foram os primeiros autores a notar a associação, familiar, entre números complexos e pontos do plano. Wessel e Argand não eram professores de matemática, Wessel era um agrimensor, nascido em Jorsrud, Noruega, e Argand um guarda-livros, nascido em Genebra, Suíça. Parece não haver dúvida que a prioridade da ideia cabe a Wessel, com um artigo apresentado à Real Academia Dinamarquesa de Ciências em 1797 e publicado nas atas dessa Academia em 1799. A contribuição de Argand figura num artigo publicado em 1806 e mais tarde em 1814, apresentado nos Annales de Mathématiques de Gergonne. Mas o artigo de Wessel permaneceu excluído do mundo matemático em geral até que foi descoberto por um antiquário cerca de noventa e oito anos depois de ter sido escrito. Foi então publicado na oportunidade do centenário de seu primeiro aparecimento. Esse atraso no reconhecimento geral da realização de Wessel explica por que o plano complexo recebe o nome de Argand e não de Wessel.

A contribuição de Gauss se encontra numa memória apresentada à Sociedade Real de Göttingen em 1831, posteriormente reproduzida em suas Obras Reunidas. Gauss assinalou que a ideia básica da representação pode ser encontrada em sua tese de doutorado de 1799. A afirmação parece procedente e explica por que o plano complexo frequentemente é chamado de plano de Gauss. Porém, esta ideia já estava latente na sugestão dada por Jonh Wallis (1616 – 1703) já em 1673, de que os números imaginários puros eram suscetíveis de ser representados numa reta perpendicular ao eixo real. A simples ideia de considerar as partes real e imaginária de um número complexo como as coordenadas retangulares de um ponto do plano fez com que os matemáticos se sentissem muito mais à vontade com os números imaginários, pois esses números podiam ser efetivamente visualizados, no sentido de que cada número complexo corresponde a um único ponto do plano e vice versa. Ver é crer, e ideias anteriores sobre a não existência e o caráter fictício dos números complexos foram abandonados.

Com relação as raízes enésimas de um número complexo o jovem professor Roger Cotes(1682 – 1716) do famoso trinity College de Cambridge conseguiu um resultado muito importante que na nossa notação moderna ficaria assim:

$$\ln(\cos \theta + i \sin \theta)$$

Isso poderia ter levado á famosa "relação de Euler":

$$\cos \theta + i \sin \theta$$

que no caso conduziria a "fórmula de De Moivre":

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$$

o que resolveria o problema de encontrar raízes.

Abraham De Moivre (1667 – 1754) no ano de 1722, utilizando fatos que já havia escrito em 1707, obteve um resultado que implica na dedução da fórmula que leva seu nome hoje, embora tenha se limitado apenas a casos particulares e nunca tenha chegado a enunciar ou demonstrar a fórmula no caso geral. Essa tarefa coube a Leonhard Euler(1707 – 1754) ,que utilizando o trabalho de Cotes conseguiu provar a "fórmula de De Moivre" no caso de  $n$  real. Com isso as raízes no campo dos complexos ficou definitivamente estabelecida e acabou aquelas dúvidas que rodeavam os matemáticos da época, que acreditavam que raízes de diferente ordem de números complexos levariam a introdução de diferentes tipos de complexos.

Coube ainda a Euler a interpretação geométrica dos números negativos que surgiu com a representação geométrica dos complexos. Euler, em 1748, formulou a identidade  $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$  que deu significado aos logarítmos de números negativos, pois no campo dos reais  $\log_a x$  só tem significado quando  $x > 0, a \neq 1$  e  $a > 0$ . Foi observado

que os logaritmos de números negativos são números imaginários puros. Substituindo na identidade de Euler  $\theta = \pi$  temos que:

$$e^{i\pi} = \cos(\pi) + i \cdot \sin(\pi) \Leftrightarrow \ln(e^{i\pi}) = \ln(-1) \Leftrightarrow i\pi = \ln(-1).$$

Realmente Euler conseguiu algo inédito, conseguiu unir a unidade imaginária e o número irracional numa mesma expressão. Anos mais tarde, Willian Rowan Hamilton (1805 – 1865) deu um tratamento muito elegante aos números complexos. Ele associou o complexo  $x + yi$  com o par ordenado de números reais  $(x, y)$ . Hamilton mostrou que se pode começar com o plano, definir soma e o produto de pares ordenados de uma maneira conveniente e acabar com algo idêntico aos números complexos. Os estudantes da época somavam e multiplicavam números complexos considerando que os números complexos fossem polinômios lineares, ou seja, a *soma* era feita da seguinte forma:

$$(x_1 + y_1i) + (x_2 + y_2i) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$$

e a *multiplicação*

$$(x_1 + y_1i) \cdot (x_2 + y_2i) = (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)i.$$

Ora como um número complexo  $x + yi$  fica inteiramente determinado pelos números reais  $x$  e  $y$ , ocorreu a Hamilton dar sua representação de maneira desmistificada e simples pelo par ordenado de números reais  $(x, y)$ . Definiu então a igualdade de dois pares  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$  pelas condições  $x_1 = x_2$  e  $y_1 = y_2$ . A adição e a multiplicação de tais pares foram definidas por ele baseando-se na forma como era somado e multiplicado dois complexos, pelos matemáticos da época. Assim temos a soma e o produto da seguinte forma:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2),$$

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2).$$

Com essas definições, é fácil mostrar que adição e a multiplicação de pares ordenados de números reais são comutativas e associativas e que a multiplicação é distributiva em relação à adição, assumindo-se obviamente que essas leis valham para a adição e a multiplicação usuais dos números reais. Deve-se notar que assim que o sistema dos números reais está imerso no sistema dos complexos. Isso significa que, identificando-se cada número real  $a$  com o par correspondente  $(a, 0)$  essa correspondência preserva a adição e a multiplicação, pois temos:

$$(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0) \quad \text{e} \quad (a, 0) \cdot (b, 0) = (ab, 0).$$

Na prática, um número complexo da forma  $(r, 0)$  pode ser substituído pelo número

real  $r$  associado a ele. Para obter a forma antiga de um número complexo, a partir de Hamilton, notemos que todo número complexo pode ser escrito da seguinte forma:

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (y, 0) \cdot (0, 1) = x + yi,$$

em que  $(0, 1)$  é representado pelo símbolo  $i$  e identificamos  $(x, 0)$  e  $(y, 0)$  com os números reais  $x$  e  $y$ . Finalmente, observamos que

$$i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1.$$

Dessa forma se eliminou a aura mística que rodeava os números complexos, pois não tem nada de complicado trabalhar com pares ordenados do plano. Este foi um grande feito realizado por Hamilton.



---

## Representação dos números complexos

---

### 2.1 Representação cartesiana

Seja  $\mathbb{R}$  o conjunto dos números reais. Consideremos o produto cartesiano  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ ,

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y); x \in \mathbb{R} \text{ e } y \in \mathbb{R}\},$$

isto é,  $\mathbb{R}^2$  é o conjunto dos pares ordenados  $(x, y)$  em que  $x$  e  $y$  são números reais. Vamos tomar dois elementos,  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$  pertencentes a  $\mathbb{R}^2$  e dar três definições:

- a) *Igualdade*: dois pares ordenados são iguais se, e somente se, suas coordenadas são iguais.

$$(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2 \text{ e } y_1 = y_2.$$

- b) *Adição*: chama-se soma de dois pares ordenados a um novo par ordenado cujos primeiro e segundo termo são, respectivamente, a soma dos primeiros e a soma dos segundos termos dos pares dados.

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2).$$

- c) *Produto*: chama-se produto de dois pares ordenados a um novo par ordenado cujo o primeiro termo é a diferença entre o produto dos primeiros termos e o produto dos segundos termos dos pares ordenados dados e cujo o segundo termo é soma dos produtos do primeiro termo de cada par dado pelo segundo termo do outro.

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2).$$

Chama-se conjunto dos *números complexos*, e representa-se por  $\mathbb{C}$ , a coleção dos pares ordenados de números reais para os quais estão definidas a igualdade, a adição e multiplicação de pares ordenados. Vamos representar cada elemento  $(x, y) \in \mathbb{C}$ , com  $x$  e  $y$  números reais, pelo símbolo  $z$ . Deste modo,

$$z \in \mathbb{C} \Leftrightarrow z = (x, y), \text{ sendo } x, y \in \mathbb{R}.$$

### 2.1.1. Propriedades da adição em $\mathbb{C}$

**Teorema 1** *A operação de adição em  $\mathbb{C}$  verifica as seguintes propriedades:*

$$A_1) (z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3), \quad \forall z_1, z_2 \text{ e } z_3 \in \mathbb{C} \text{ (propriedade associativa);}$$

$$A_2) z_1 + z_2 = z_2 + z_1, \quad \forall z_1 \text{ e } z_2 \in \mathbb{C} \text{ (propriedade comutativa);}$$

$$A_3) \exists e \in \mathbb{C} \text{ tal que } z + e = z, \quad \forall z \in \mathbb{C} \text{ (existência do elemento neutro);}$$

$$A_4) \exists z' \in \mathbb{C} \text{ tal que } z + z' = e, \quad \forall z \in \mathbb{C} \text{ (existência do elemento simétrico);}$$

**Demonstração:**

$A_1)$  Sejam  $z_1, z_2$  e  $z_3$  números complexos onde  $z_1 = (a, b)$ ,  $z_2 = (c, d)$  e  $z_3 = (e, f)$ , devemos provar que

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3), \quad \forall z_1, z_2, z_3.$$

De fato, como em  $\mathbb{R}$  vale a propriedade associativa, temos:

$$\begin{aligned} (z_1 + z_2) + z_3 &= [(a, b) + (c, d)] + (e, f) = (a + b, c + d) + (e, f) = [(a + b) + e, (c + d) + f] \\ &= [a + (c + e), b + (d + f)] = (a, b) + (c + e, d + f) = (a, b) + [(c, d) + (e, f)] \\ &= z_1 + (z_2 + z_3) \end{aligned}$$

$A_2)$  Sejam  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  com  $z_1 = (a, b)$  e  $z_2 = (c, d)$ , devemos mostrar que  $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ .

De fato,

$$z_1 + z_2 = (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) = (c + a, d + b) = (c, d) + (a, b) = z_2 + z_1.$$

$A_3)$  Seja  $z = (a, b) \in \mathbb{C}$ , devemos mostrar que existe  $e = (x, y)$  tal que  $z + e = z$ ,  $\forall z \in \mathbb{C}$ .

Note que

$$(a, b) + (x, y) = (a, b) \Leftrightarrow \begin{cases} a + x = a \\ b + y = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}.$$

Portanto, existe  $e = (0, 0)$ , denominado elemento neutro da adição, que somado a qualquer complexo  $z$  dá como próprio resultado o  $z$ .

A<sub>4</sub>) Seja  $z = (a, b) \in \mathbb{C}$ , devemos mostrar que existe  $z' = (x, y) \in \mathbb{C}$  tal que

$$z + z' = e, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Impondo esta condição, teremos

$$(a, b) + (x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} a + x = 0 \\ b + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -a \\ y = -b \end{cases}.$$

Logo, existe  $z' = (-a, -b)$ , denominado elemento simétrico ou inverso aditivo, que somado ao complexo  $z$  dá como resultado o elemento neutro da adição.

### 2.1.2. Subtração em $\mathbb{C}$

Sejam  $z_1$  e  $z_2$  em  $\mathbb{C}$  com  $z_1 = (a, b)$  e  $z_2 = (c, d)$ , temos do Teorema 1 que existe (único) complexo  $z \in \mathbb{C}$  tal que  $z_1 + z = z_2$ . De fato,

$$z_1 + z = z_2 \Leftrightarrow (z + z_1) - z_1 = z_2 - z_1.$$

Desde que  $z + (z_1 - z_1) = z + e = z_2 - z_1$  então  $z = z_2 - z_1$ . Ou seja,

$$z = z_2 - z_1 = (a, b) - (c, d) = (a - c, b - d).$$

Esse número  $z \in \mathbb{C}$  é chamado de diferença entre  $z_1$  e  $z_2$ .

**Exemplo 1** Calcule a subtração dos complexos abaixo:  $(6, 4) - (8, 2) = (6 - 8, 4 - 2) = (-2, 2)$

### 2.1.3. Propriedades da multiplicação $\mathbb{C}$

**Teorema 2** As operações de multiplicação em  $\mathbb{C}$  verificam as seguintes propriedades:

$M_1$ )  $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$ ,  $\forall z_1, z_2$  e  $z_3 \in \mathbb{C}$  (propriedade associativa);

$M_2$ )  $z_1 z_2 = z_2 z_1$ ,  $\forall z_1$  e  $z_2 \in \mathbb{C}$  (propriedade comutativa);

$M_3$ )  $\exists e_m \in \mathbb{C}$  tal que  $z e_m = z$ ,  $\forall z \in \mathbb{C}$  (existência do elemento neutro);

$M_4$ )  $\exists z' \in \mathbb{C}$  tal que  $z z' = e$ ,  $\forall z \in \mathbb{C}$ ,  $z \neq 0$ . (existência do elemento inverso)

**Demonstração:**

$M_1$ ) Sejam  $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$  com  $z_1 = (a, b)$ ,  $z_2 = (c, d)$  e  $z_3 = (e, f)$ , devemos provar que

$$(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3).$$

De fato,

$$\begin{aligned}
 (z_1 z_2) z_3 &= [(a, b)(c, d)](e, f) = (ac - bd, ad + bc)(e, f) \\
 &= [(ac - bd)e - (ad + bc)f, (ac - bd)f - (ad + bc)e] \\
 &= [a(ce - bf) - b(de + cf), a(de + cf) + b(ce - df)] \\
 &= (a, b)(ce - bf, de + cf) \\
 &= (a, b)[(c, d)(e, f)] = z_1(z_2 z_3).
 \end{aligned}$$

$M_2$ ) Sejam  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  com  $z_1 = (a, b)$  e  $z_2 = (c, d)$ , devemos mostrar que  $z_1 z_2 = z_2 z_1$ . De fato,

$$z_1 z_2 = (a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc) = (ca - db, da + cb) = (c, d)(a, b) = z_2 z_1.$$

$M_3$ ) Devemos provar que existe  $e_m = (x, y) \in \mathbb{C}$  tal que

$$z e_m = z, \quad \forall z = (a, b) \in \mathbb{C}.$$

Impondo esta condição, teremos

$$(a, b)(x, y) = (a, b) \Leftrightarrow (ax - by, bx + ay) = (a, b) \Leftrightarrow \begin{cases} ax - by = a \\ bx + ay = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}.$$

Portanto, obtemos  $e_m = (1, 0)$ .

$M_4$ ) Seja  $z = (a, b) \in \mathbb{C}$ , devemos mostrar que existe  $z' = (x, y) \in \mathbb{C}$  tal que

$$z z' = e, \quad \forall z \in \mathbb{C} - \{(0, 0)\}.$$

Impondo esta condição, teremos

$$(a, b)(x, y) = (1, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} ax - by = 1 \\ bx + ay = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{a}{a^2 + b^2} \\ y = \frac{-b}{a^2 + b^2} \end{cases}.$$

Logo, existe  $z'$  chamado inverso multiplicativo de  $z$ .

#### 2.1.4. Divisão em $\mathbb{C}$

Dados os complexos  $z_1$  e  $z_2$ , com  $z_1 = (a, b) \neq (0, 0)$  e  $z_2 = (c, d)$ , pelo Teorema 1 existe um único complexo  $z \in \mathbb{C}$  tal que  $z_1 z = z_2$ . De fato,  $z = \frac{z_2}{z_1} \in \mathbb{C}$  é chamado de quociente entre  $z_2$  e  $z_1$ ,

$$z_1 z = z_2 \Leftrightarrow z'_1(z_1 z) = z'_1 z_2 \Leftrightarrow e_m z = z'_1 z_2 \Leftrightarrow z = z'_1 z_2.$$

Daí, segue que

$$\frac{z_2}{z_1} = \left( \frac{ac + cb}{a^2 + b^2}, \frac{ad - cd}{a^2 + b^2} \right).$$

**Exemplo 2** Calcule  $\frac{(1, 2)}{(3, 4)}$ .

Resolução:

$$\frac{(1, 2)}{(3, 4)} = (1, 2) \cdot \left( \frac{3}{3^2 + 4^2}, \frac{-4}{3^2 + 4^2} \right) = \left( \frac{11}{25}, \frac{2}{25} \right).$$

### 2.1.5. Propriedade distributiva em $\mathbb{C}$

Em  $\mathbb{C}$  a operação de multiplicação é distributiva em relação à adição, isto é, dados os complexos  $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$  em que  $z_1 = (a, b)$ ,  $z_2 = (c, d)$  e  $z_3 = (e, f)$ , tem-se

$$z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3, \quad \forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}.$$

De fato,

$$\begin{aligned} z_1(z_2 + z_3) &= (a, b)[(c, d) + (e, f)] = (a, b)(c + e, d + f) \\ &= [a(c + e) - b(d + f), b(dc + e) + a(d + f)] \\ &= [(ac - bd) + (ae - bf), (ad + bc) + (af + be)] \\ &= (a, b)(c, d) + (a, b)(e, f) \\ &= z_1z_2 + z_1z_3. \end{aligned}$$

## 2.2 Forma algébrica de um número complexo

### 2.2.1. Imersão de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{C}$

Vamos considerar o subconjunto  $R \subset \mathbb{C}$  que é formado por todos os pares ordenados cujo a segunda coordenada é zero, isto é:

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = 0\}.$$

Consideremos agora a aplicação  $f : \mathbb{R} \rightarrow R$  que associa cada  $x \in \mathbb{R}$  ao par  $(x, 0) \in R$ . Vejamos que a função  $f$  é bijetora e preserva as operadores de adição e multiplicação.

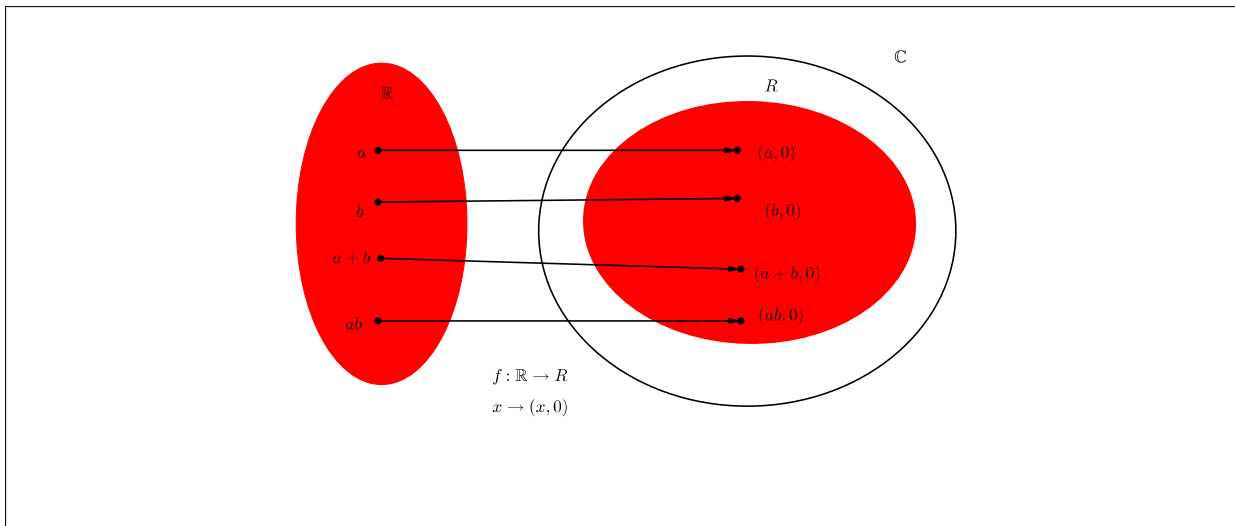


Figura 2.1: Imersão de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{C}$ .

1. Nesta função temos que o par  $(x, 0) \in R$  é o correspondente, segundo  $f$ , de  $x \in \mathbb{R}$ , ou seja,  $f$  é sobrejetora;
2. Dados  $x \in \mathbb{R}$  e  $x' \in \mathbb{R}$ , com  $x \neq x'$ , então os seus correspondentes  $(x, 0) \in R$  e  $(x', 0) \in R$ , são distintos, de acordo com a definição de igualdade de pares ordenados, ou seja,  $f$  é injetora.
3. A soma  $a + b$ , com  $a, b \in \mathbb{R}$ , está associada ao par  $(a + b, 0) \in R$ , que é a soma dos pares  $(a, 0)$  e  $(b, 0)$ , correspondentes de  $a$  e  $b$ , respectivamente. Logo,

$$f(a + b) = (a + b, 0) = (a, 0) + (b, 0) = f(a) + f(b), \quad (\text{soma em } \mathbb{C}).$$

4. O produto  $ab$ , com  $a, b \in \mathbb{R}$ , está associado ao par  $(ab, 0)$ , que é produto dos pares  $(a, 0)$  e  $(b, 0)$ , respectivamente:

$$f(ab) = (ab, 0) = (a, 0)(b, 0) = f(a)f(b), \quad (\text{produto em } \mathbb{C}).$$

Devido a aplicação  $f : \mathbb{R} \rightarrow R$  ser bijetora e conservar as operações de adição e multiplicação, dizemos que  $\mathbb{R}$  e  $R$  são isomorfos, ou seja, estamos considerando que  $R$  e  $\mathbb{R}$  tem a estrutura de um espaço vetorial. Neste caso, operar com  $(x, 0)$  leva a resultados análogos aos obtidos operando com  $x$ . Daí, podemos empregar a seguinte identificação:

$$x = (x, 0), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Aceita esta igualdade, temos em particular que  $0 = (0, 0)$ ,  $1 = (1, 0)$  e  $\mathbb{R} = R$ . Portanto, o corpo  $\mathbb{R}$  dos reais passa a ser identificado com um subconjunto do corpo  $\mathbb{C}$  dos números complexos:

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

### 2.2.2. Unidade imaginária

Chamamos de unidade *imaginária* e indicamos por  $i$  o número complexo  $(0, -1)$ . Note que

$$i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1,$$

isto é, a propriedade básica da unidade imaginária é

$$i^2 = -1.$$

As potências de  $i$  apresentam um comportamento interessante. Vamos observar o que acontece quando calculamos as sete primeiras potências de  $i$ .

$$\begin{aligned} i^0 &= 1 \\ i^1 &= i \\ i^2 &= -1 \\ i^3 &= i^2 \cdot i = (-1) \cdot i = -i \\ i^4 &= i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1 \\ i^5 &= i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i \\ i^6 &= i^5 \cdot i = i \cdot i = i^2 = -1 \end{aligned}$$

Estas potências se repetem em ciclos de 4. De fato, temos que  $i^{n+4} = i^n \cdot i^4 = i^n \cdot 1 = i^n$ . Isso nos permite estabelecer uma regra para o cálculo de potências de  $i$ . Agora para calcular  $i^n$  basta dividir  $n$  por 4, e sendo  $r$  o resto da divisão, temos  $i^n = i^r$ . De fato,

$$i^n = i^{4q+r} = i^{4q} \cdot i^r = (i^4)^q \cdot i^r = 1 \cdot i^r = i^r.$$

**Exemplo 3** Calcular  $i^{50}$ .

Resolução: Como o resto da divisão de 50 por 4 é 2, temos que  $i^{50} = i^2 = -1$ . ■

### 2.2.3. Representação algébrica

Dado um número complexo qualquer  $z = (x, y)$  temos que

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (y, 0)(0, 1),$$

isto é, após identificações,

$$z = x + yi.$$

Logo, todo número complexo  $z = (x, y)$  pode ser escrito da forma  $z = x + yi$ , chamada *forma algébrica* do número complexo.

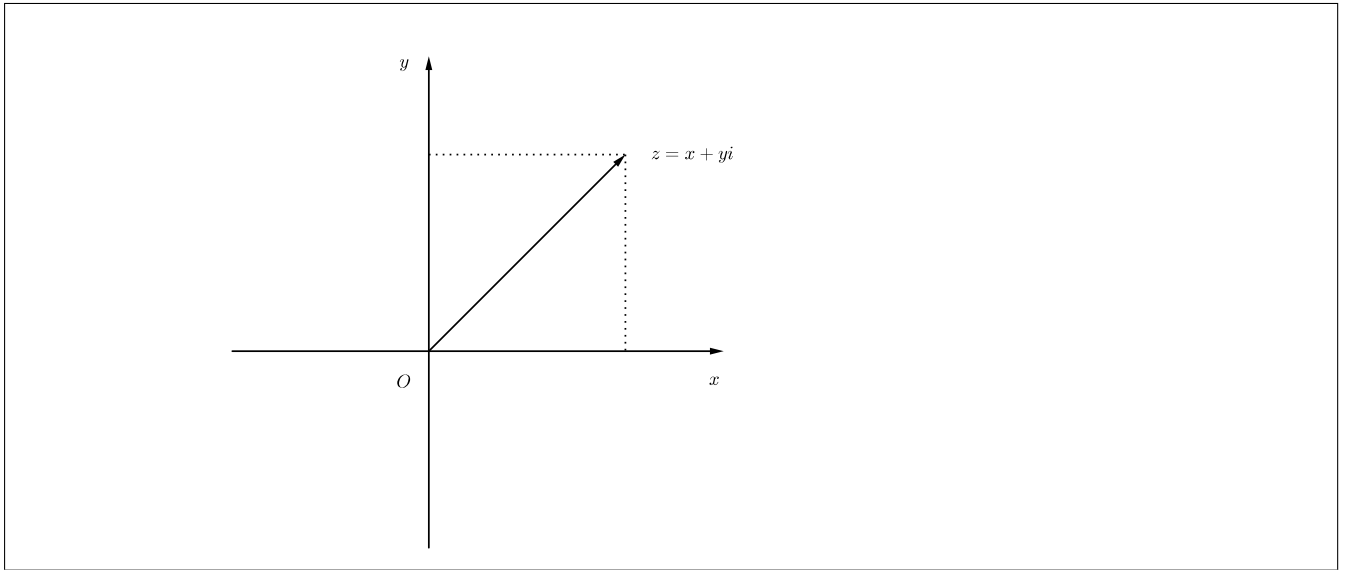


Figura 2.2: Representação algébrica de um número complexo.

No plano cartesiano números representados no eixo- $x$  são da forma  $(x, 0) = x + 0i$ , isto é, são números reais. Por este motivo o eixo- $x$  das abscissas é chamado de eixo real.

Os complexos representados no eixo- $y$  são da forma  $(0, y) = 0 + yi$ . Esses complexos são chamados de números imaginários puros.

As coordenadas de  $x$  e  $y$  do complexo  $z = x + yi$  são denotados, respectivamente, por  $\text{Re}(z)$  e  $\text{Im}(z)$ . Chama-se *real* todo número complexo cuja parte imaginária é nula. Chama-se *imaginário puro* todo número complexo cuja parte real é nula. Assim:  $z = x + 0i$  é real e  $w = 0 + yi$  ( $y \neq 0$ ) é *imaginário puro*.

A forma algébrica  $z = x + yi$  é muito mais prática que o par ordenado  $(x, y)$  na representação dos números complexos, uma vez que ela facilita as operações. Vamos ver como fica as definições para igualdade, soma e multiplicação de complexos, usando a forma algébrica.

- Igualdade: Os complexos  $a + bi$  e  $c + di$  são iguais se, somente se,  $a = c$  e  $b = d$ , em particular, tem-se  $a + bi = 0$  se, e somente se,  $a = 0$  e  $b = 0$ .
- Soma:  $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$ , isto é, a soma de dois complexos forma um complexo que tem parte real formada pela soma das parte real de cada complexo e a parte imaginária formada pela soma das partes imaginárias dos complexos dados.
- Multiplicação:  $(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$ , isto é, o produto de dois números complexos é o resultado do desenvolvimento de  $(a + bi)(c + di)$ , aplicando a propriedade distributiva e considerando que  $i^2 = -1$ :

$$(a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = ac + adi + bci - bd = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$



**Exemplo 4** Calcule as somas e os produtos dos números complexos abaixo.

$$a) (2 + 3i) + (4 - i) = 6 + 2i$$

$$b) (2 + 3i) - (4 - i) = -2 + 4i$$

$$c) (2 + 3i)(4 - i) = 8 - 2i + 12i - 3i^2 = 11 + 10i$$

$$d) (2 + 3i)^2 = 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 3i + (3i)^2 = -5 + 12i$$

**Definição 1** Seja  $z \in \mathbb{C}$ , chama-se raiz quadrada de  $z$ , e denota-se  $\sqrt{z}$ , a um número complexo  $z_p$  tal que

$$\sqrt{z} = z_p \Leftrightarrow (z_p)^2 = z$$

**Exemplo 5** Considere a equação  $az^2 - bz + c = 0$  com  $a \neq 0$  e  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . Se,

i)  $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$  então temos duas raízes reais,

ii)  $\Delta = b^2 - 4ac < 0$  então temos raízes complexas conjugadas.

Resolução: Observe que

$$az^2 + bz + c = 0 \Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}.$$

Seja  $z = x + yi$  e desde que  $\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2$  é um número real temos:

$$\begin{cases} \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - y^2 = \frac{\Delta}{4a^2} \\ \left(x + \frac{b}{2a}\right)y = 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

Tendo em vista a segunda equação em (2.1), se  $y = 0$  e vale i) ( $\Delta \geq 0$ ) então  $z = x$  e da primeira equação em (2.1) concluímos que

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a},$$

são raízes.

Agora, se  $x = -\frac{b}{2a}$  e vale ii) ( $\Delta < 0$ ) então podemos obter que  $y = \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a}$ . Daí, obteremos como raízes

$$z = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a}i \quad \text{e} \quad \bar{z} = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a}i.$$

■

**Exemplo 6** Resolva a equação  $z^2 - 2z + 2 = 0$  em  $\mathbb{C}$ .

Resolução: Temos que,

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2.a} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4.1.2}}{2.1} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 8}}{2} = 1 \pm i.$$

Para resolvermos o próximo exemplo vamos definir a raiz quadrada de um número complexo.

**Exemplo 7** Encontrar as raízes quadradas de  $3 - 4i$ .

Resolução: Queremos encontrar os complexos  $z = x + yi$ ,  $x$  e  $y$  reais tais que  $z^2 = 3 - 4i$ . Ou seja,

$$z^2 = (x + yi)^2 = x^2 + 2xyi - y^2 = 3 - 4i.$$

Para que esses complexos sejam iguais eles devem possuir as mesmas coordenadas. Daí, segue que

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ 2xy = -4 \end{cases}.$$

Da identidade  $2xy = -4$  tem-se  $y = -\frac{2}{x}$ , substituindo em  $x^2 - y^2 = 3$  obtemos  $x^4 - 3x - 4 = 0$ . Daí, temos  $x^2 = 4$  ou  $x^2 = -1$ . Como  $x$  é real, ocorre apenas duas possibilidades:  $x = 2$  ou  $x = -2$ . De  $y = -\frac{2}{x}$ , obtemos  $y = -1$  ou  $y = 1$ , respectivamente. Portanto, as raízes são  $-2 + i$  e  $-2 - i$ .

### 2.2.4. Conjugado de um número complexo

Chama-se conjugado do complexo  $z = x + yi$  ao complexo  $\bar{z} = x - yi$ . É fácil ver que complexos conjugados têm imagens simétricas em relação ao eixo real.

Note que  $z.\bar{z}$  é um número real, pois,

$$z.\bar{z} = (x + yi).(x - yi) = x^2 - y^2i^2 = x^2 + y^2.$$

**Exemplo 8** Determine o conjugado dos complexos abaixo.

1)  $z = 2 + i \Rightarrow \bar{z} = 2 - i$ .

2)  $z = -3 - 4i \Rightarrow \bar{z} = -3 + 4i$ .

### 2.2.5. Uso do conjugado na divisão

Para dividirmos números complexos multiplicamos dividendo e divisor pelo conjugado do divisor, o que transforma o problema em uma divisão por um número real. Observe

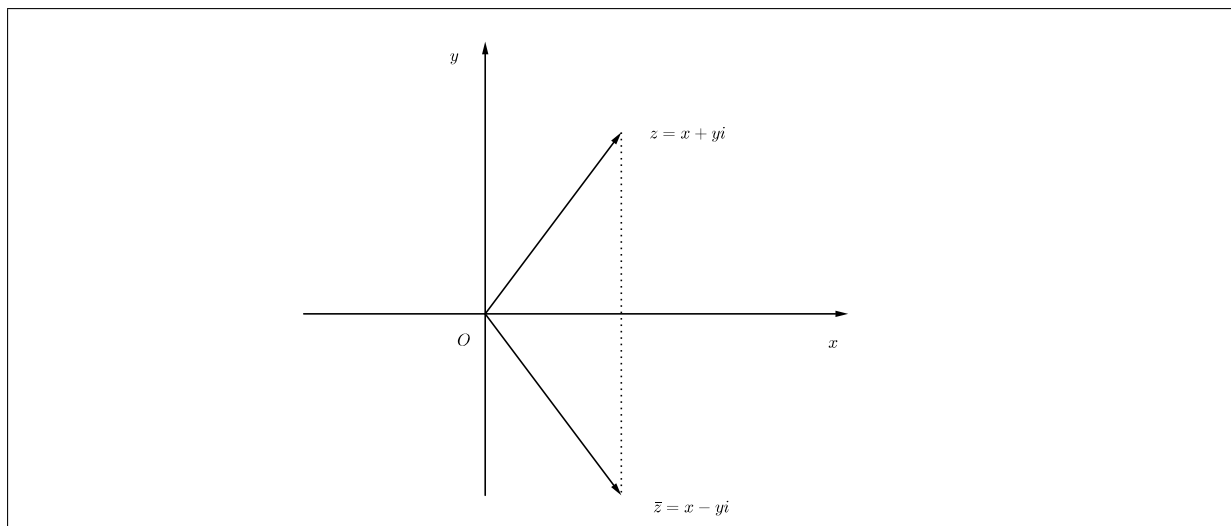


Figura 2.3: Conjugado de um complexo.

que, dados  $z_1 = a + bi$  e  $z_2 = c + di$  com  $z_1 \neq 0$  temos:

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{c + di}{a + bi} = \frac{(c + di) \cdot (a - bi)}{(a + bi) \cdot (a - bi)} = \frac{ca + db - cbi + adi}{a - b^2i^2} = \frac{ac + db}{a^2 + b^2} + \frac{ad - cb}{a^2 + b^2}.$$

**Exemplo 9** Resolva  $\frac{2 + 3i}{4 - i}$ .

Resolução:

$$\frac{2 + 3i}{4 - i} = \frac{2 + 3i}{4 - i} \cdot \frac{4 + i}{4 + i} = \frac{8 + 2i + 12i + 3i^2}{16 - i^2} = \frac{5}{17} + \frac{14i}{17}.$$

**Exemplo 10** Resolva a equação  $2z - \bar{z} = 1 + 6i$ .

Resolução: Tomando  $z = x + yi$ , com  $x$  e  $y$  reais, obtemos

$$2 \cdot (x + yi) - (x - yi) = 1 + 6i.$$

Daí, tem-se  $x = 1$  e  $3y = 6$ . Portanto,  $z = 1 + 2i$ .

**Teorema 3** Se  $z$  e  $w$  são números complexos então:

i)  $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$ .

ii)  $\overline{z - w} = \bar{z} - \bar{w}$ .

iii)  $\overline{z\bar{w}} = \bar{z}w$ .

iv) Se  $w \neq 0$ ,  $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$ .

v)  $z$  é real se, e somente se,  $z = \bar{z}$ .

vi)  $\overline{\bar{z}} = z$

vii) Se  $n$  é um inteiro positivo  $(\bar{z})^n = \overline{z^n}$ .

**Demonstração:**

i) Sejam  $z = a + bi$  e  $w = c + di$ , com  $a, b, c$  e  $d$  reais, temos:

$$z + w = (a + c) + (b + d)i$$

logo,

$$\overline{z + w} = (a + c) - (b + d)i = (a - bi) + (c - di) = \bar{z} + \bar{w}.$$

ii) De maneira análoga a i) temos  $\overline{z - w} = \bar{z} - \bar{w}$ .

iii) Sejam  $z = a + bi$  e  $w = c + di$ , com  $a, b, c$  e  $d$  reais, temos:

$$zw = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

então

$$\overline{zw} = (ac - bd) - (ad + bc)i = (a - bi)(c - di) = \bar{z}\bar{w}.$$

iv) Se  $w = c + di$ , com  $c$  e  $d$  reais não nulos simultaneamente, temos:

$$\frac{1}{w} = \frac{1}{c + di} = \frac{c - di}{(c + di)(c - di)} = \frac{c - di}{c^2 + d^2},$$

$$\frac{1}{\bar{w}} = \frac{1}{c - di} = \frac{c + di}{(c - di)(c + di)} = \frac{c + di}{c^2 + d^2} = \overline{\left(\frac{1}{w}\right)}.$$

Daí,

$$\overline{\left[\frac{z}{w}\right]} = \overline{\left[z\left(\frac{1}{w}\right)\right]} = \bar{z}\overline{\left(\frac{1}{w}\right)} = \bar{z}\frac{1}{\bar{w}} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}.$$

v) Se  $z = x + 0i$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\bar{z} = x - 0i = z$ . Reciprocamente se  $z = \bar{z}$  e  $z = a + bi$  temos:

$$z = \bar{z} \Leftrightarrow a + bi = a - bi \Leftrightarrow 2bi = 0 \Leftrightarrow b = 0$$

vi) Se  $z = x + yi$  então  $\bar{\bar{z}} = \overline{(\bar{z})} = \overline{x - yi} = x + yi$ .

vii) Finalmente, vii) decorre da aplicação reiterada de iii). ■

## 2.3 Forma trigonométrica dos números complexos

### 2.3.1. Módulo e argumento de um número complexo

Fixe um sistema de coordenadas no plano. Vamos, agora, representar cada complexo  $z = x + yi$  não mais pelo ponto  $P(x, y)$ , mas sim pelo vetor  $\overrightarrow{OP} = (x, y)$ . O módulo de um complexo  $z = x + yi$  é o módulo do vetor  $\overrightarrow{OP}$ , ou seja, é o valor  $r$  da distância de sua

imagem  $P$  a origem, onde temos

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\tilde{z} \cdot z}.$$

Um *argumento* de um complexo  $z \neq 0$ , por definição, é qualquer dos ângulos  $\theta$  que o vetor  $\vec{OP}$  forma com o semieixo positivo dos  $x$ . Mas é interessante observar que um número complexo tem uma infinidade de argumentos, dois deles sempre diferindo entre si de um múltiplo de  $2\pi$ . O argumento que pertence ao intervalo  $] -\pi, \pi]$  é chamado *argumento principal* e é representado por  $\arg z$ .

Se  $\theta$  é um argumento de  $z = x + yi$  então  $x = r \cos(\theta)$  e  $y = r \sin(\theta)$ , o que permite escrever

$$z = r \cos(\theta) + i.r \sin(\theta),$$

que é chamada *forma trigonométrica* ou *polar* de um número complexo. Os números  $r$  e  $\theta$  são chamados coordenadas polares do ponto  $P(x, y)$  do plano.

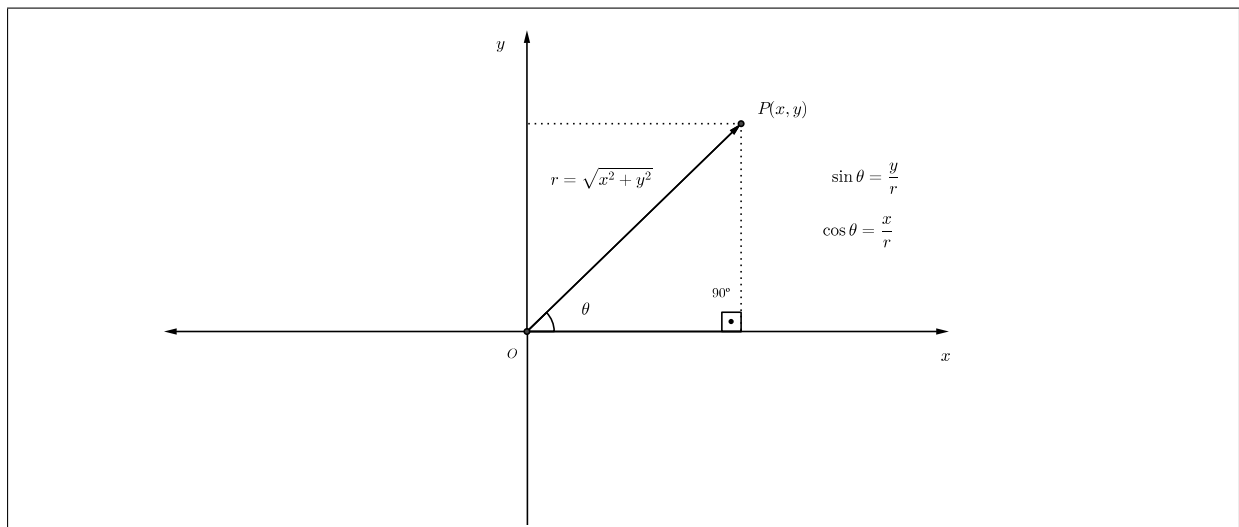


Figura 2.4: Representação trigonométrica de um complexo.

**Exemplo 11** Determine  $\left| \frac{1+ai}{1-ai} \right|$ ,  $a$  real.

Resolução: Seja  $z = \frac{1+ai}{1-ai} = \frac{1+ai}{1-ai} \cdot \frac{1+ai}{1+ai} = \frac{(1+ai)^2}{1+a^2} = \frac{1+2ai-a^2}{1+a^2} = \frac{1-a^2}{1+a^2} + i \cdot \frac{2a}{1+a^2}$ .

Assim  $|z|^2 = \left[ \frac{1-a^2}{1+a^2} \right]^2 + \left[ \frac{2a}{1+a^2} \right]^2 = \frac{1-2a^2+a^4+4a^2}{(1+a^2)^2} = \frac{1+2a^2+a^4}{(1+a^2)^2} = \frac{(1+a^2)^2}{(1+a^2)^2} = 1$ .

Portanto,  $\left| \frac{1+ai}{1-ai} \right| = 1$ .

**Exemplo 12** Escrever o complexo  $z = 1 - i$  na forma polar.

Resolução: Temos que  $r = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$  e também que

$$\cos(\theta) = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{e} \quad \sin(\theta) = \frac{y}{r} = -\frac{1}{\sqrt{2}},$$

assim um dos valores possíveis para  $\theta$  é  $\frac{7\pi}{4}$  e a forma polar ou trigonométrica de  $z$  é

$$z = \sqrt{2} \left( \cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right).$$

Geometricamente:

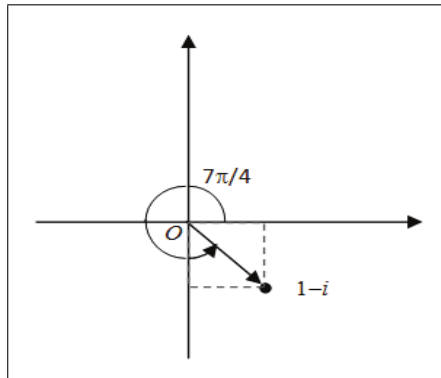


Figura 2.5: Exemplo 12.

**Exemplo 13** Qual a relação entre os argumentos de um número complexo e seu simétrico?

Resolução: Seja  $\theta$  o argumento de um complexo  $z$ , de modo que  $z = x + yi = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ . Seja  $w = -x - yi$  o simétrico de  $z$ , onde  $\alpha$  é seu argumento. Como  $r = \sqrt{(-x)^2 + (-y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$ , então  $w = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ . Sendo  $\sin \theta = \frac{y}{r}$ ,  $\cos \theta = \frac{x}{r}$  e  $\sin \alpha = -\frac{y}{r}$ ,  $\cos \alpha = -\frac{x}{r}$ . Então,  $\alpha - \theta$  é igual uma quantidade ímpar de meias voltas, ou seja,  $\alpha - \theta = (2k + 1) \cdot \pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

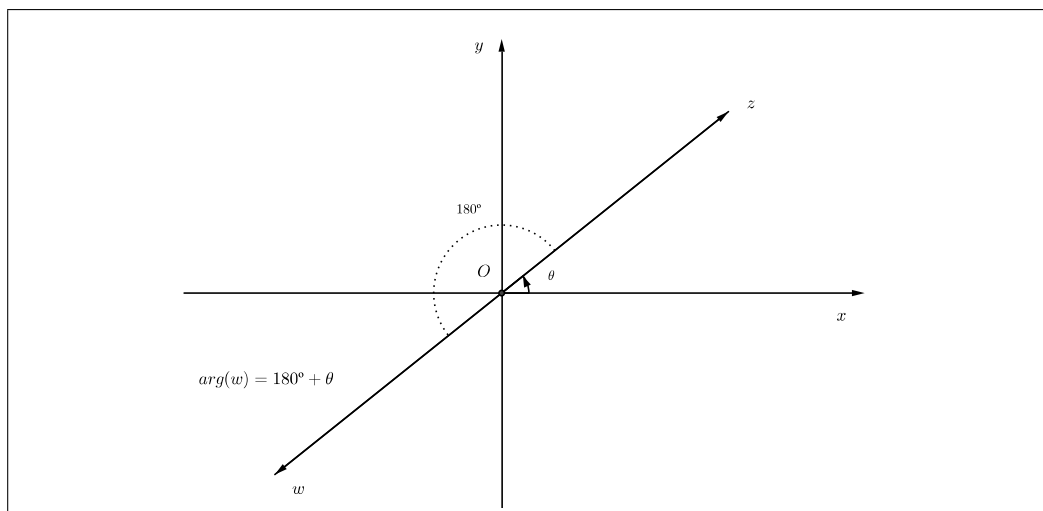


Figura 2.6: Exemplo 13.

**Exemplo 14** Mostre que se as imagens dos complexos  $z, w$  e  $s$  são vértices de um triângulo equilátero então  $z^2 + w^2 + s^2 = zw + ws + sz$ .

Resolução: Temos que  $\arg \frac{s-w}{z-s} = \arg \frac{w-z}{s-w} = 120^\circ$ . Daí temos que  $(s-w) = (z-s)(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ)$  e  $(w-z) = (s-w)(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ)$  que implica que  $\frac{s-w}{z-s} = \frac{w-z}{s-w}$ . Assim, da igualdade vamos ter:

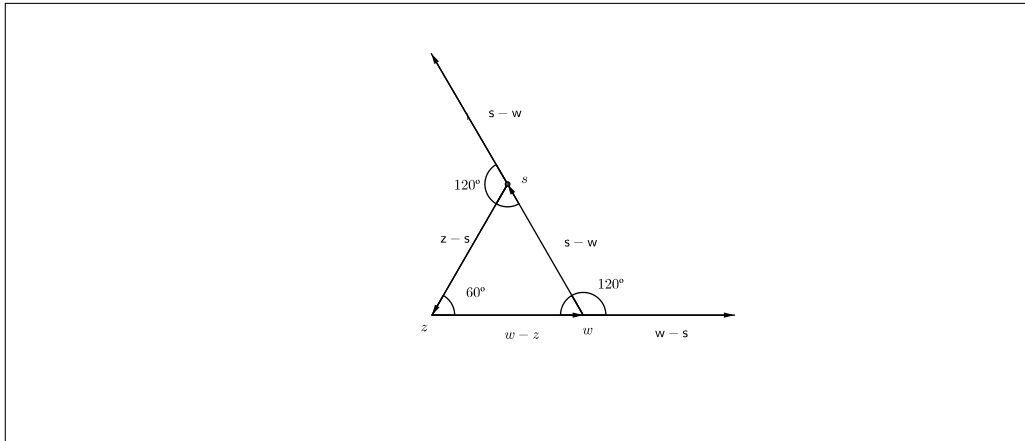
$$\frac{s-w}{z-s} = \frac{w-z}{s-w} \iff (s-w)^2 = (z-s)(w-z) \iff s^2 - 2ws + w^2 = zw - z^2 - ws + sz \iff s^2 + w^2 + z^2 = zw + ws + sz.$$


Figura 2.7: Exemplo 14.

As operações com os números complexos, exceto a adição e subtração, se fazem mais facilmente na forma polar do que na algébrica, ou seja, se o número complexo já está na forma polar o processo da multiplicação e divisão será mais rápido, porém quando está na forma algébrica a forma polar não é tão vantajosa assim. Vamos mostrar isso enunciando e provando alguns teoremas.

**Teorema 4** Se  $z_1 = r_1[\cos(\theta_1) + i \sin(\theta_1)]$  e  $z_2 = r_2[\cos(\theta_2) + i \sin(\theta_2)]$  então

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)],$$

e se  $r_2 \neq 0$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)].$$

**Demonstração:**

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1(\cos(\theta_1) + i \sin(\theta_1)) \cdot r_2(\cos(\theta_2) + i \sin(\theta_2)) \\ &= r_1 r_2 [\cos(\theta_1) \cos(\theta_2) + i \cos(\theta_1) \sin(\theta_2) + i \sin(\theta_1) \cos(\theta_2) + i^2 \sin(\theta_1) \sin(\theta_2)] \\ &= r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]. \end{aligned}$$

Para mostrarmos a segunda parte, basta mostrar que  $\frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)]$  multiplicado por  $z_2$  é igual a  $z_1$ . Ora pelo que já foi provado na primeira parte, para

multiplicar dois complexos devemos somar os argumentos e multiplicar os módulos. Como  $\frac{r_1}{r_2} \cdot r_2 = r_1$  e  $(\theta_1 - \theta_2) + \theta_2 = \theta_1$ , temos:

$$\frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \cdot \sin(\theta_1 - \theta_2)].$$

■

**Observação 1** Observe que  $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$  e  $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$ .

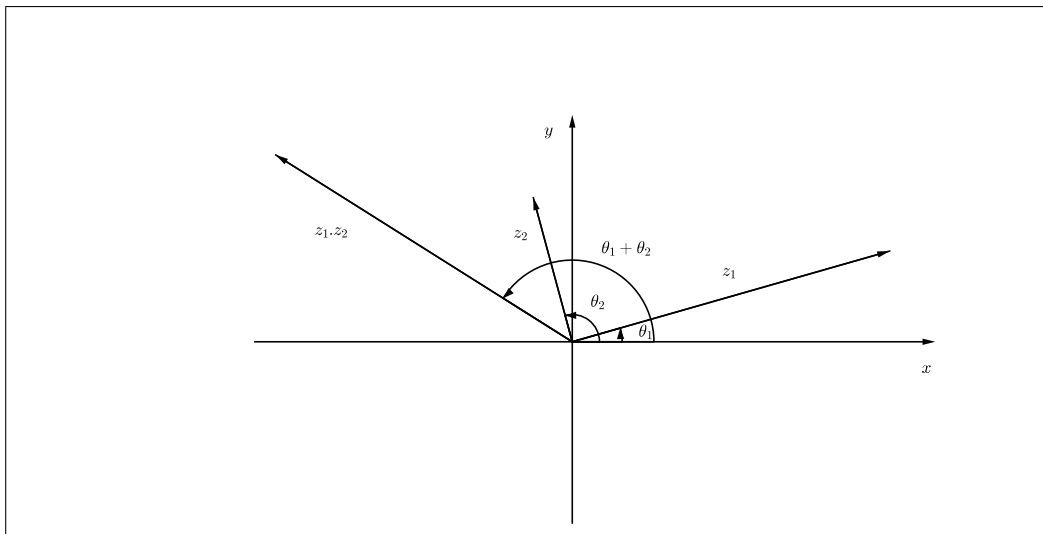


Figura 2.8: Produto entre complexos.

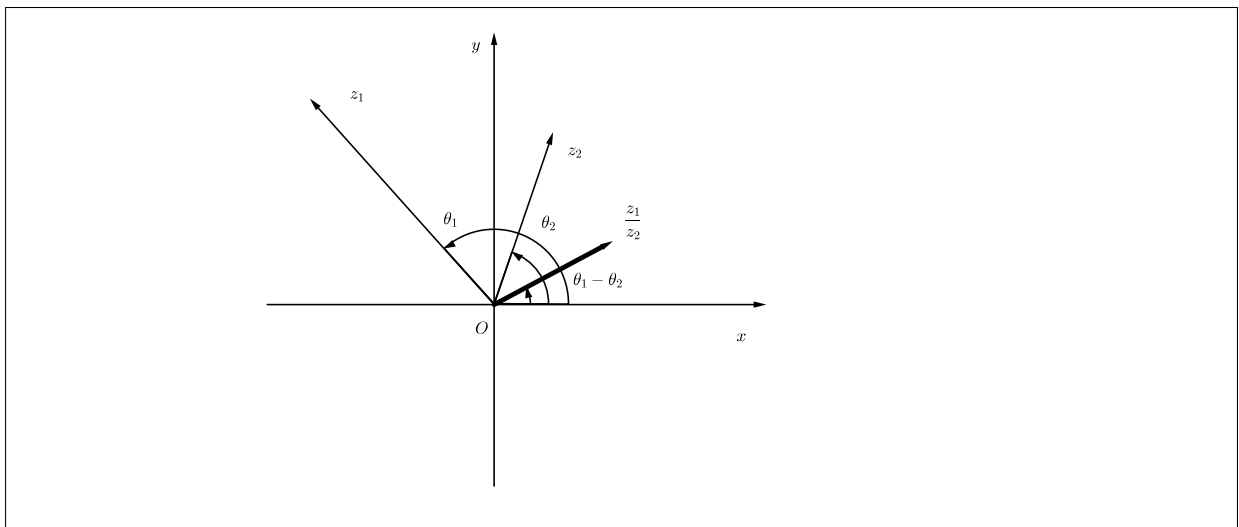


Figura 2.9: Quociente entre complexos.

Agora será mostrado algumas propriedades interessantes do módulo de um número complexo.



**Teorema 5** *Sejam  $z_1$  e  $z_2$  números complexos quaisquer, então:*

$$i) |z_1 z_2| = |z_1| |z_2| ;$$

$$ii) \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \text{ se } z_2 \neq 0 ;$$

$$iii) |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| .$$

**Demonstração:** *i)* Já sabemos que  $|z|^2 = z\bar{z}$  e  $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$ . Utilizando as propriedades comutativa e associativa da multiplicação temos:

$$|z_1 z_2|^2 = (z_1 z_2)(\overline{z_1 z_2}) = |z_1|^2 |z_2|^2 \Rightarrow |z_1 z_2|^2 = (|z_1| |z_2|)^2 \Rightarrow |z_1 z_2| = |z_1| |z_2|.$$

*ii)* Notemos inicialmente de *i)* que  $\left| \frac{1}{z_2} \right| = \frac{1}{|z_2|}$ . Assim segue que

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \left| z_1 \frac{1}{z_2} \right| = |z_1| \left| \frac{1}{z_2} \right| = |z_1| \frac{1}{|z_2|} = \frac{|z_1|}{|z_2|}.$$

*iii)* Vamos considerar os complexos e na forma polar, ou seja,

$$\begin{cases} z_1 = r_1[\cos(\theta_1) + i. \sin(\theta_1)] \\ z_2 = r_2[\cos(\theta_2) + i. \sin(\theta_2)] \end{cases} .$$

Temos que:

$$z_1 + z_2 = (r_1 \cos \theta_1 + r_2 \cos \theta_2) + i(r_1 \sin \theta_1 + r_2 \sin \theta_2),$$

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2| &= \sqrt{(r_1 \cos \theta_1 + r_2 \cos \theta_2)^2 + (r_1 \sin \theta_1 + r_2 \sin \theta_2)^2} \\ &= \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2)} \\ &= \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)}. \end{aligned}$$

Como  $\cos(\theta_1 - \theta_2)$  é no máximo 1, temos:

$$|z_1 + z_2| \leq \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2} = \sqrt{(r_1 + r_2)^2} = r_1 + r_2 = |z_1| + |z_2|.$$

■

### 2.3.2. Primeira fórmula de Moivre

**Teorema 6** *Se  $n$  é inteiro e  $r \neq 0$ , então*

$$[r(\cos(\theta) + i. \sin(\theta))]^n = r^n[(\cos(n\theta) + i. \sin(n\theta))].$$

**Demonstração:** Para  $n = 0$  e  $n = 1$ , a fórmula é óbvia. Para  $n$  inteiro maior do que 1 a fórmula decorre da aplicação reiterada da fórmula da multiplicação. Provemos a fórmula no caso de inteiro e negativo. Seja  $n = -m$  com  $0 < m \in \mathbb{Z}$ . Temos

$$\begin{aligned} [r(\cos(\theta) + i \sin(\theta))]^n &= [r(\cos(\theta) + i \sin(\theta))]^{-m} = \frac{1}{[r(\cos(\theta) + i \sin(\theta))]^m} \\ &= \frac{1(\cos(0) + i \sin(0))}{r^m[(\cos(\theta) + i \sin(\theta))]^m} \\ &= \frac{1}{r^m}[(\cos(0 - m\theta) + i \sin(0 - m\theta))] \\ &= r^{-m}[(\cos(-m\theta) + i \sin(-m\theta))] = r^n[(\cos(n\theta) + i \sin(n\theta))] \end{aligned}$$

■

**Exemplo 15** Calcule  $(1 + i\sqrt{3})^{20}$ .

Resolução: O complexo  $1 + i\sqrt{3}$  tem módulo  $r = 2$  e argumento  $\theta$  tal que

$$\cos(\theta) = \frac{x}{r} = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \sin(\theta) = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Daí, desde que  $\theta = \frac{\pi}{3}$  tem-se

$$(1 + i\sqrt{3})^{20} = \left(2 \left[\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right]\right)^{20} = 2^{20} \left[\cos \frac{20\pi}{3} + i \sin \frac{20\pi}{3}\right],$$

desde que  $\frac{20\pi}{3} = 6\pi + \frac{2\pi}{3}$  e  $6\pi$  é o número inteiro de voltas, segue que

$$(1 + i\sqrt{3})^{20} = 2^{20} \left[\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}\right] = 2^{20} \left(\frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right).$$

**Exemplo 16** Determine o menor número natural  $n$  para o qual  $(1 - i\sqrt{3})^n$  é imaginário puro.

Resolução: Temos que:  $z = 1 - i\sqrt{3}$  apresenta módulo  $r = 2$  e argumento principal  $\theta = \frac{5\pi}{6}$ , então:

$$z^n = 2^n \cdot \left(\cos \frac{5n\pi}{6} + i \sin \frac{5n\pi}{6}\right).$$

Para que  $z^n$  seja imaginário puro é necessário que seu argumento seja da forma  $\frac{\pi}{2} + k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , pois  $\cos \frac{5n\pi}{6} = 0$ . Assim, temos:

$$\frac{5n\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi \implies \frac{5n}{6} = \frac{1}{2} + k \implies n = \frac{6k + 3}{5}.$$

Como  $k$  é inteiro,  $6k + 3$  deve ser múltiplo de 5 e  $k \geq 0$ , pois  $n$  é natural. O valor mínimo para  $n$  ocorre quando  $k = 2$  pois  $6 \cdot 2 + 3 = 15$ . Portanto para  $k = 2$  temos  $n = 3$ .

**Exemplo 17** Calcule o valor da soma  $S = 1 + \cos \theta + i \sin \theta + \cos 2\theta + i \sin 2\theta + \dots + \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$ .

Resolução: Note que a soma é uma PG com 1º termo igual a 1 e razão  $\cos \theta + i \sin \theta$ . Se  $z = \cos \theta + i \sin \theta$  temos que a soma é:

$$S = \frac{z^{n+1} - 1}{z - 1} = \frac{(\cos \theta + i \sin \theta)^{n+1} - 1}{\cos \theta + i \sin \theta - 1}.$$

Assim:

$$\frac{(\cos(\theta) + i \sin(\theta))^{n+1} - 1}{\cos(\theta) + i \sin(\theta) - 1} = \frac{\cos(\theta(n+1)) + i \sin(\theta(n+1))}{\cos(\theta) + i \sin(\theta) - 1}.$$

Observe que fazendo  $p = n + 1$  vamos ter:

$$\begin{aligned} \frac{\cos(p\theta) + i \sin(p\theta) - 1}{\cos(\theta) + i \sin(\theta) - 1} &= \frac{1 - 2 \sin^2(\frac{p\theta}{2}) + 2i \sin(\frac{p\theta}{2}) \cos(\frac{p\theta}{2}) - 1}{1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} + 2i \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} - 1} = \frac{2 \sin \frac{p\theta}{2} [-\sin \frac{p\theta}{2} + i \cos \frac{p\theta}{2}]}{2 \sin \frac{\theta}{2} [-\sin \frac{\theta}{2} + i \cos \frac{\theta}{2}]} \\ &= \frac{\sin \frac{p\theta}{2} [\cos(\frac{\pi}{2} + \frac{p\theta}{2}) + i \sin(\frac{\pi}{2} + \frac{p\theta}{2})]}{\sin \frac{\theta}{2} [\cos(\frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2}) + i \sin(\frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2})]} \\ &= \frac{\sin \frac{p\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} \cdot \left[ \cos\left(\frac{p\theta}{2} - \frac{\theta}{2}\right) + i \sin\left(\frac{p\theta}{2} - \frac{\theta}{2}\right) \right]. \end{aligned}$$

### 2.3.3. Raiz enésima $\sqrt[n]{z}$ de um número complexo

Seja  $z \in \mathbb{C}$ , chama-se raiz enésima de  $z$ , e denota-se  $\sqrt[n]{z}$ , a um número complexo  $z_k$  tal que

$$\sqrt[n]{z} = z_k \Leftrightarrow (z_k)^n = z.$$

**Exemplo 18** Calcular  $\sqrt[3]{1}$ .

Resolução: Observe que  $1, -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$  e  $-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$  são as raízes de  $\sqrt[3]{1}$ , pois

$$\begin{cases} 1^3 = 1 \\ \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = 1 \\ \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = 1 \end{cases}.$$

Agora, surge a seguinte pergunta. Como saber o número de raízes de  $\sqrt[n]{z}$ ? Com o próximo resultado veremos como saber ao certo o número de raízes de  $\sqrt[n]{z}$ .

### 2.3.4. Segunda fórmula de Moivre

**Teorema 7** Dado um complexo  $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$  e  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ , então existem  $n$  raízes enésimas complexas de  $z$  que são da forma:

$$z_k = \sqrt[n]{r} \left[ \cos \left( \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right) + i \sin \left( \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right) \right], \quad \text{em que } \sqrt[n]{r} \in \mathbb{R}_+, k \in \mathbb{Z},$$

e  $k = 0, 1, \dots, n-1$ .

**Demonstração:** Vamos determinar os complexos  $z_k$  tais que  $\sqrt[n]{z} = z_k$ . Se  $z_k = \rho(\cos \alpha + i \sin \alpha)$  e sabendo que  $(z_k)^n = z$  temos:

$$\rho^n(\cos n\alpha + i \sin n\alpha) = r(\cos \theta + i \sin \theta).$$

Assim,  $\rho^n = r \Rightarrow \rho = \sqrt[n]{r}$  e  $n\alpha = \theta + 2k\pi \Rightarrow \alpha = \frac{\theta + 2k\pi}{n} = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}$ , com  $k \in \mathbb{Z}$ . Supondo que  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ , vamos determinar os valores de  $k$  para os quais resultam valores de  $\alpha$  compreendidos entre 0 e  $2\pi$ :

$$\begin{aligned} k = 0 &\Rightarrow \alpha = \frac{\theta}{n} \\ k = 1 &\Rightarrow \alpha = \frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n} \\ k = 2 &\Rightarrow \alpha = \frac{\theta}{n} + 2\frac{2\pi}{n} \\ &\vdots \\ k = n-1 &\Rightarrow \alpha = \frac{\theta}{n} + (n-1)\frac{2\pi}{n} \end{aligned}$$

Estes  $n$  valores de  $\alpha$  não são congruentes por estarem no intervalo  $[0, 2\pi[$ , portanto, dão origem a  $n$  valores distintos para  $z_k$ . Quando tomamos  $k = n$  temos:

$$k = n \Rightarrow \alpha = \frac{\theta}{n} + \frac{2n\pi}{n} = \frac{\theta}{n} + 2\pi.$$

Este valor de  $\alpha$  é indispensável por ser congruente ao valor obtido com  $k = 0$ . Fato análogo acontece com  $k \in \{n+1, n+2, n+3, \dots\}$  e  $k \in \{-1, -2, -3, -4, \dots\}$ . Então para obtermos os valores de  $z_k$  é suficiente fazer  $k \in \{1, 2, 3, \dots, (n-1)\}$ . ■

**Observação 2** Podemos concluir então que todo número complexo  $z$  não nulo admite  $n$  raízes enésimas distintas, as quais têm todas o mesmo módulo  $\sqrt[n]{r}$  e argumento principais formando uma progressão aritmética de razão  $\frac{2\pi}{n}$  e primeiro termo igual a  $\frac{\theta}{n}$ .

---

Interpretação geométrica dos números complexos

---

### 3.1 Soma de dois complexos

A soma de dois números complexos no plano Argand-Gauss tem uma interpretação bem interessante. Podemos considerar os números complexos como sendo vetores no plano, assim a soma de dois complexos será a soma de dois vetores, ou seja, a soma será a diagonal do paralelogramo formado pelos vetores dados.

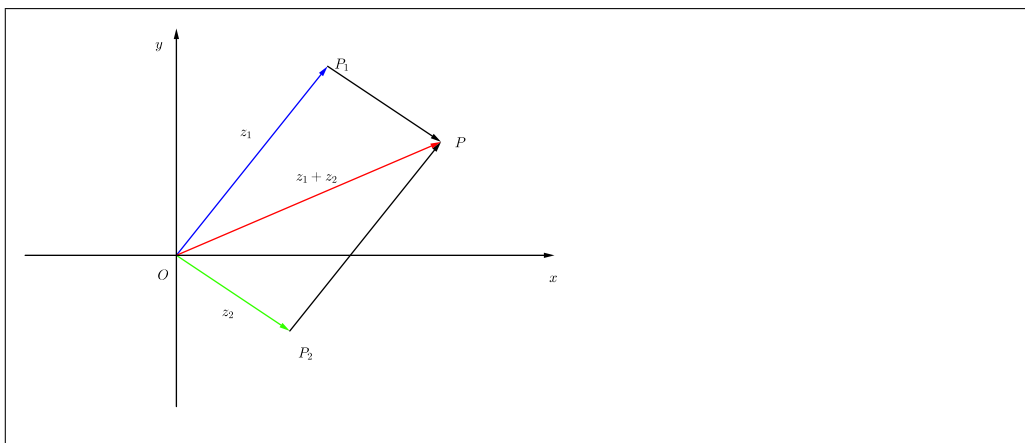


Figura 3.1: Soma de dois complexos.

Sejam  $z_1 = a + bi$  e  $z_2 = c + di$  dois complexos cujos afixos são  $P_1$  e  $P_2$  respectivamente. O complexo  $z = z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$  tem afixo  $P$  tal que  $\vec{OP} = \vec{OP}_1 + \vec{OP}_2$  em que  $\vec{OP}$ ,  $\vec{OP}_1$  e  $\vec{OP}_2$  são vetores. Notemos que o vetor  $\vec{OP}$  pode ser obtido pela regra do paralelogramo e seu módulo é

$$r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)}.$$

### 3.2 Produto de $z$ pelo complexo $\cos \theta + i \sin \theta$

Quando multiplicamos um complexo  $z$  por  $\cos(\theta) + i \sin(\theta)$ , o vetor que representa  $z$  sofre uma rotação de um ângulo  $\theta$  em torno da origem. Sabemos que para multiplicar dois complexos multiplicamos os módulos e somamos os argumentos. Como

$$\cos(\theta) + i \sin(\theta),$$

tem módulo 1 então

$$z \cdot (\cos(\theta) + i \sin(\theta)),$$

tem o mesmo módulo de  $z$ . O argumento de  $z \cdot (\cos(\theta) + i \sin(\theta))$ , é o argumento de  $z$  aumentado de  $\theta$ . Logo, o vetor que representa  $z \cdot (\cos(\theta) + i \sin(\theta))$ , é o resultado da rotação do vetor  $z$  de um ângulo  $\theta$  em torno da origem.

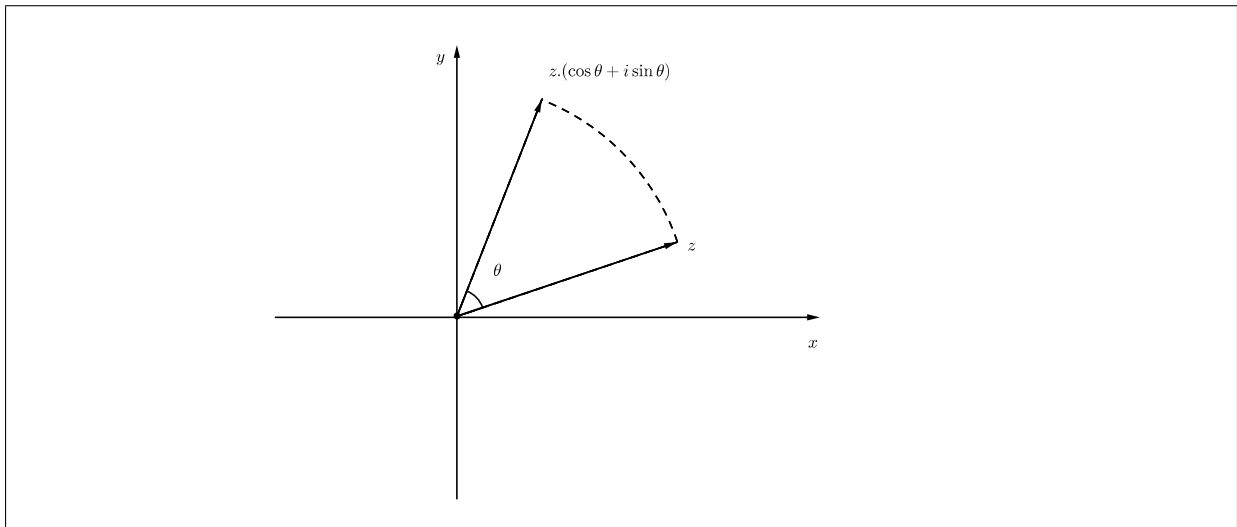
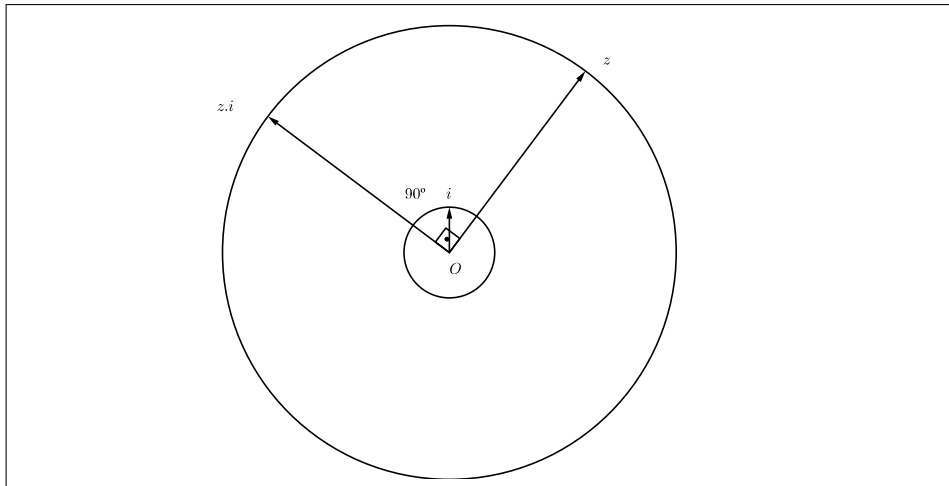
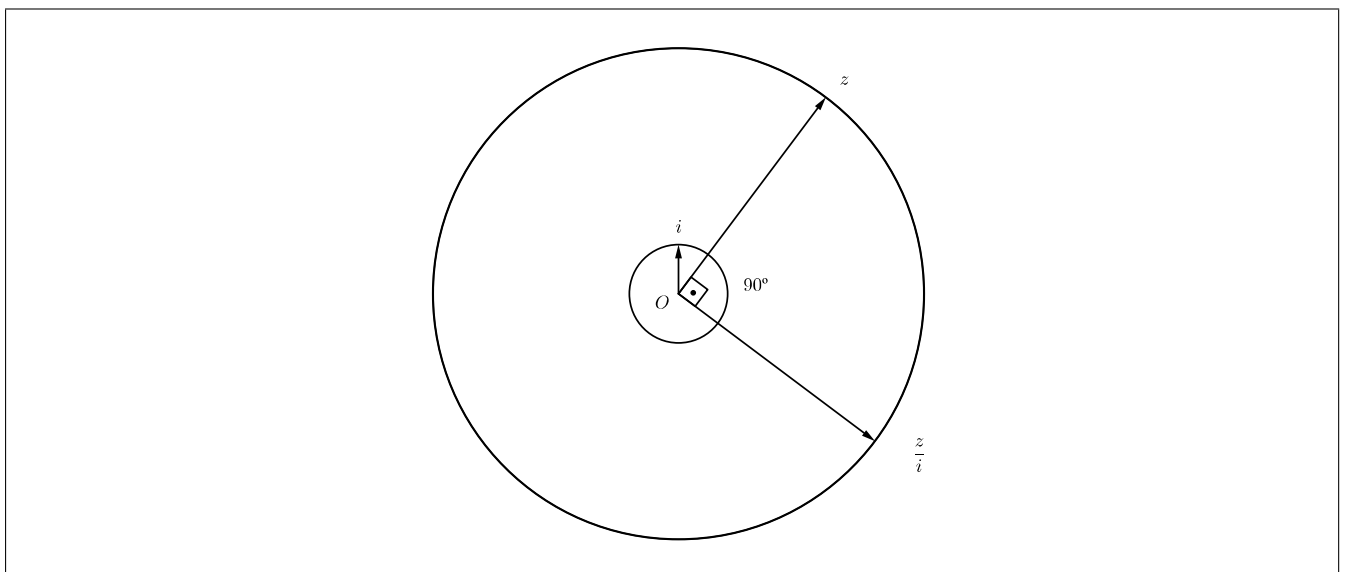


Figura 3.2: Produto de  $z$  pelo complexo  $\cos \theta + i \sin \theta$ .

No caso de multiplicar  $z$  por  $i$  temos que o vetor  $z$  sofre uma rotação de  $\frac{\pi}{2}$  rad, pois  $i = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$ . Observe que para encontrar o simétrico de  $z$  em relação a origem bastava multiplicar  $z$  por  $-1$ , pois  $-z = i^2 z$ .

Figura 3.3: Produto de  $z$  por  $i$ .

Já no caso da divisão de  $z$  por  $i$  temos que o vetor sofre uma rotação de  $\frac{\pi}{2}$  rad no sentido horário, pois  $\frac{z}{i} = \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$ .

Figura 3.4: Quociente de  $z$  por  $i$ .

### 3.3 Rotação de coordenadas no plano

Uma aplicação importante da multiplicação de números complexos na forma trigonométrica é possibilitar a rotação de coordenadas. Já sabemos que para multiplicar dois complexos na forma trigonométrica, basta multiplicarmos os módulos e somarmos os argumentos. Assim se um ponto  $(x, y)$  deve ser rotacionado, em relação à origem  $\theta$  radianos no sentido anti-horário é preciso multiplicar o número complexo  $x + yi$  pelo complexo

$1(\cos \theta + i \sin \theta)$ .

**Exemplo 19** Determinar as novas coordenadas do ponto  $A(3,4)$  após uma rotação de  $\frac{\pi}{2}$  rad no sentido anti-horário em relação a origem.

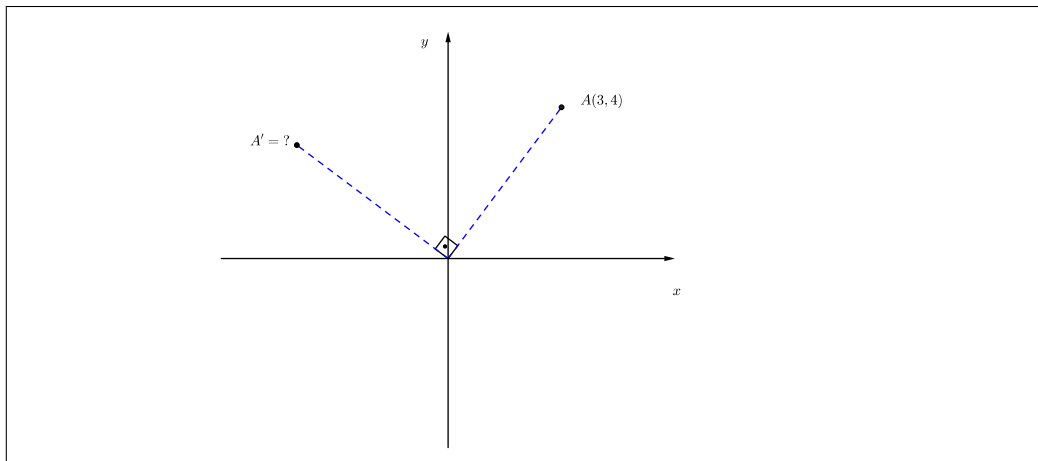


Figura 3.5: Exemplo 19.

Resolução: O ponto  $A(3,4)$  representa geometricamente o número complexo  $z = 3+4i$ . Para haver uma rotação de  $\frac{\pi}{2}$  rad no sentido anti-horário precisamos multiplicar o número complexo  $z$  por  $1\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right)$ . Como temos  $1\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right) = i$  então basta multiplicar  $z$  por  $i$ ,

$$(3 + 4i) \cdot i = -4 + 3i = (-4, 3)$$

Então as novas coordenadas do ponto  $A$  são  $-4$  e  $3$ , ou seja,  $A' = (-4, 3)$ .

**Exemplo 20** Determinar as novas coordenadas do segmento  $\overline{AB}$ , com  $A(1,1)$  e  $B(3,4)$  após uma rotação de  $\frac{\pi}{2}$  rad o sentido anti-horário em relação ao ponto  $A$ .



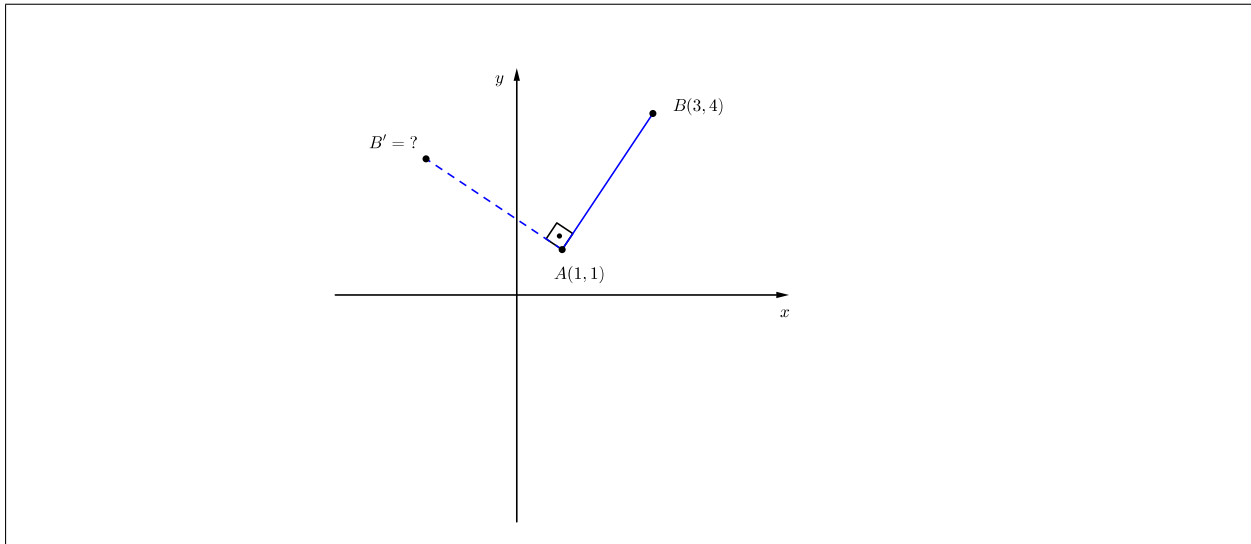


Figura 3.6: Exemplo 20.

Resolução: O ponto  $A(1, 1)$  e o ponto  $B(3, 4)$  representam geometricamente os números complexos  $w = 1 + i$  e  $z = 3 + 4i$ . Como a rotação é em torno do ponto  $A$ , devemos rotacionar apenas o número complexo  $t$ , que é equivalente a diferença  $z - w$  (no caso,  $t = z - w = 2 + 3i$ ) e depois somá-lo novamente com  $w$ . Assim para haver uma rotação de  $\frac{\pi}{2}$  rad no sentido anti-horário precisamos multiplicar por  $i$  e depois somar  $t + w$ , pois a rotação é em torno de  $w$ :

$$t' = (2 + 3i) \cdot i = -3 + 2i$$

$$t' + w = -3 + 2i + 1 + i = -2 + 3i$$

Assim as novas coordenadas do ponto  $B$  são  $-2$  e  $3$ , ou seja,  $A$  se mantém após rotação e  $B' = (-2, 3)$ .

**Exemplo 21** Determinar as novas coordenadas do segmento  $\overline{AB}$ , com  $A = (-1, 0)$  e  $B(5, -4)$ , após uma rotação de  $\frac{\pi}{3}$  rad no sentido anti-horário em relação ao ponto  $A$ .

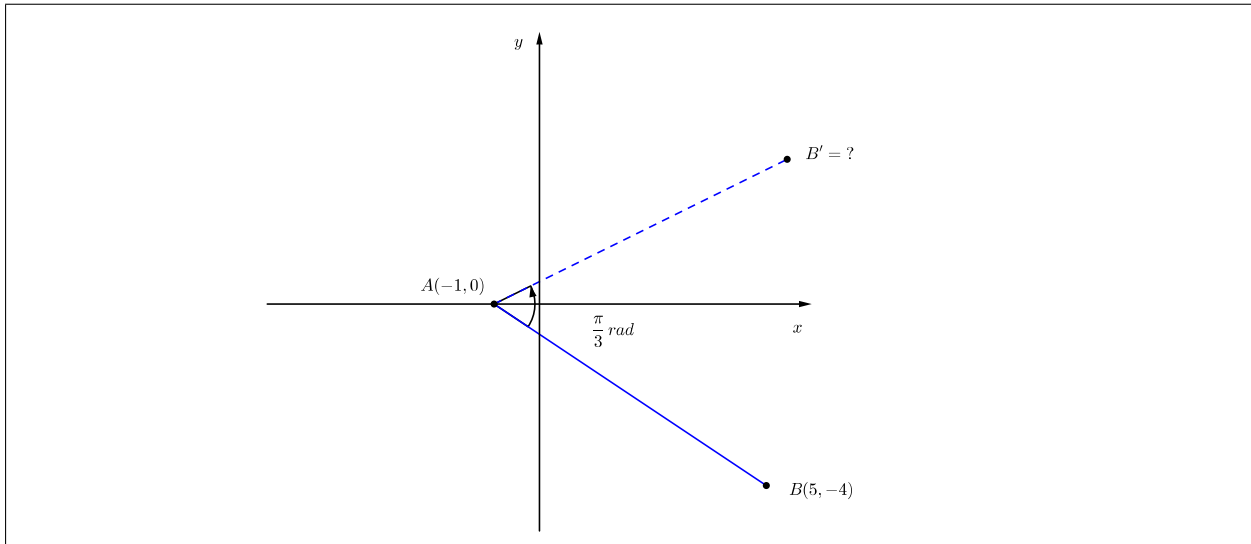


Figura 3.7: Exemplo 21.

Resolução: O complexo responsável pela rotação pedida é  $z = 1 \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ .

$$A(-1, 0) = w = -1$$

$$B = (5, -4) = z = 5 - 4i$$

O complexo  $t$  que representa  $\overline{AB}$  é  $t = z - w = (5 - 4i) - (-1) = 6 - 4i$ . Efetuando a rotação de  $t$  temos:  $t' = (6 - 4i) \left( \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = 3 + 3\sqrt{3}i - 2i + 2\sqrt{3} = (2\sqrt{3} + 3) + (\sqrt{3} - 2)i$ .

Então:

$$w + t' = -1 + (2\sqrt{3} + 3) + (\sqrt{3} - 2)i = (2\sqrt{3} + 2) + (\sqrt{3} - 2)i, \text{ ou seja, } B' = (2\sqrt{3} + 2, \sqrt{3} - 2).$$

O ponto  $A(-1, 0)$  se mantém após a rotação de  $\frac{\pi}{3}$  rad.

**Exemplo 22**  $ABCD$  é um quadrado. Se  $A(1, 2)$  e  $B(2, 5)$ , determine as coordenadas de  $C$  e  $D$ .

Resolução: Há duas soluções para construção do quadrado, conforme a figura abaixo.

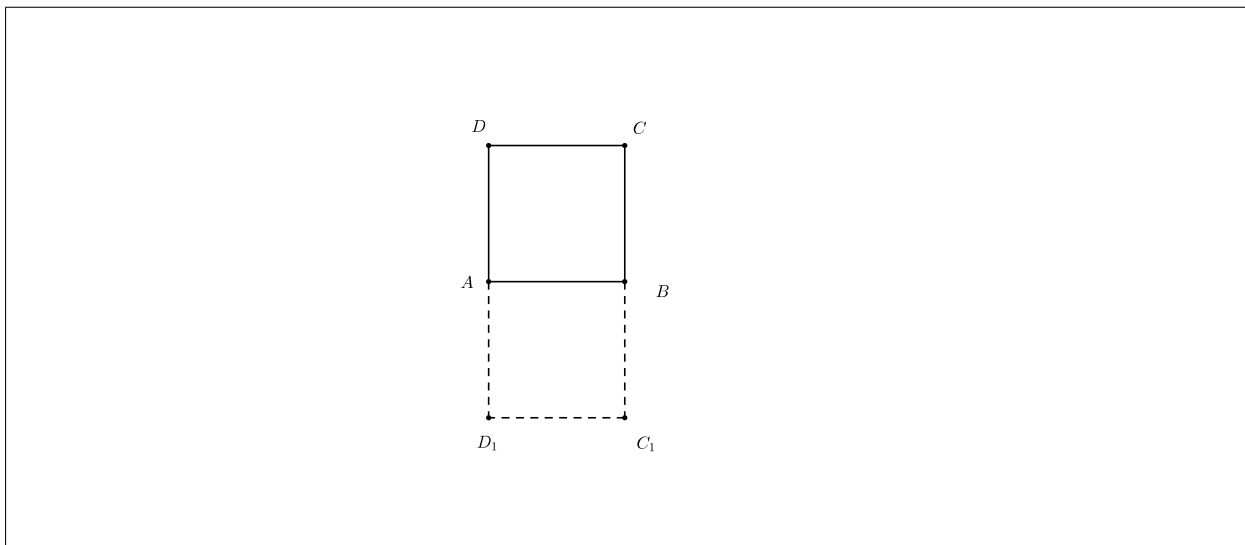


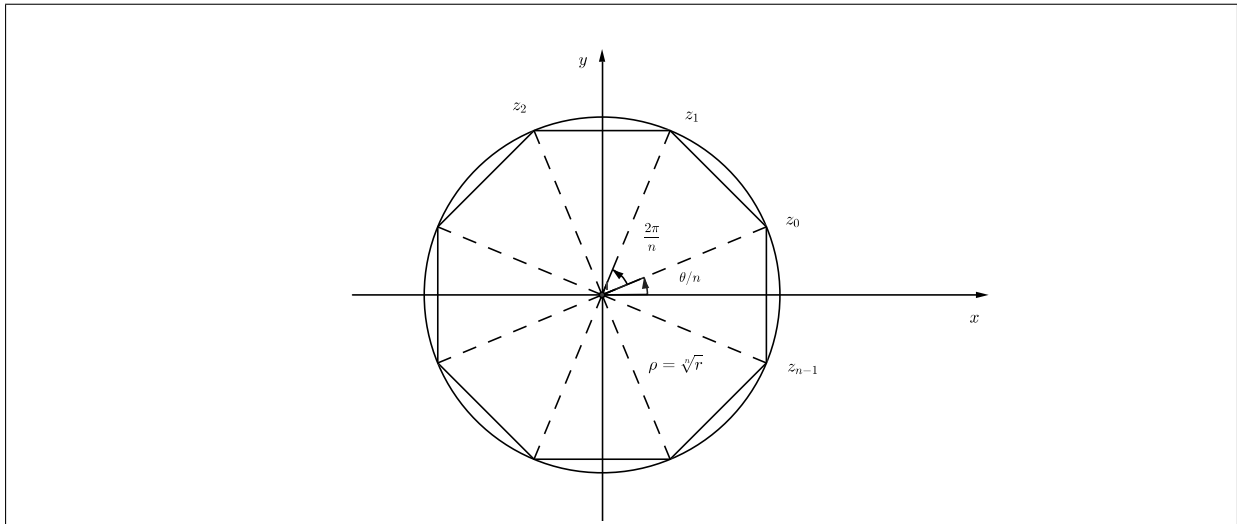
Figura 3.8: Exemplo 22.

Na solução de cima temos que  $\overrightarrow{AD}$  é obtido de  $\overrightarrow{AB}$  por uma rotação de  $\frac{\pi}{2}$  no sentido anti-horário. Portanto,  $(D - A) = (B - A) \left( \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$ .  $D - (1 + 2i) = (1 + 3i) \cdot i$  e  $D = 1 = 2i + i - 3i^2 = -2 + 3i = (-2, 3)$ . Observe que  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ . Daí,  $D - A = C - B$ , onde temos  $C = B + D - A$ . Como  $D(-2, 3)$  segue que  $C(-1, 6)$ . Na solução de baixo,  $A$  é ponto médio de  $\overline{DD_1}$ . Logo  $A = \frac{D + D_1}{2}$  e daí segue que  $D_1 = 2A - D = (4, 1)$ . Analogamente,  $C_1 = 2B - C = (5, 4)$ .

### 3.4 Interpretação geométrica de $\sqrt[n]{z}$

Note que, veja Seção 2.3.4., os argumentos principais de  $\sqrt[n]{z}$  formam uma progressão aritmética que começa com  $\frac{\theta}{n}$  e tem razão  $\frac{2\pi}{n}$ . Assim as raízes enésimas de  $\sqrt[n]{z}$  dividem a circunferência de centro  $(0, 0)$  e raio  $\sqrt[n]{r}$  em  $n$  partes congruentes, isto é:

- a) Se  $n = 2$  as raízes são pontos diametralmente opostos.
- b) Se  $n \geq 3$  as raízes correspondem aos vértices de um polígono regular inscrito em uma circunferência de raio  $\sqrt[n]{r}$  e ângulo central  $\frac{2\pi}{n}$ .

Figura 3.9: Polígono regular de  $n$  lados.

**Exemplo 23** Calcular as raízes cúbicas de 8.

Resolução: Desde que  $z = 8$ ,  $r = 8$  e  $\theta = 0$ , temos:

$$z_k = \sqrt[3]{8} \left( \cos \frac{2k\pi}{3} + i \sin \frac{2k\pi}{3} \right), \quad k = 0, 1, 2.$$

Daí se,

a)  $k = 0 \implies 2 \cdot (\cos 0 + i \sin 0) = 2;$

b)  $k = 1 \implies 2 \cdot \left( \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) = -1 + i\sqrt{3};$

c)  $k = 2 \implies 2 \cdot \left( \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right) = -1 - i\sqrt{3}.$

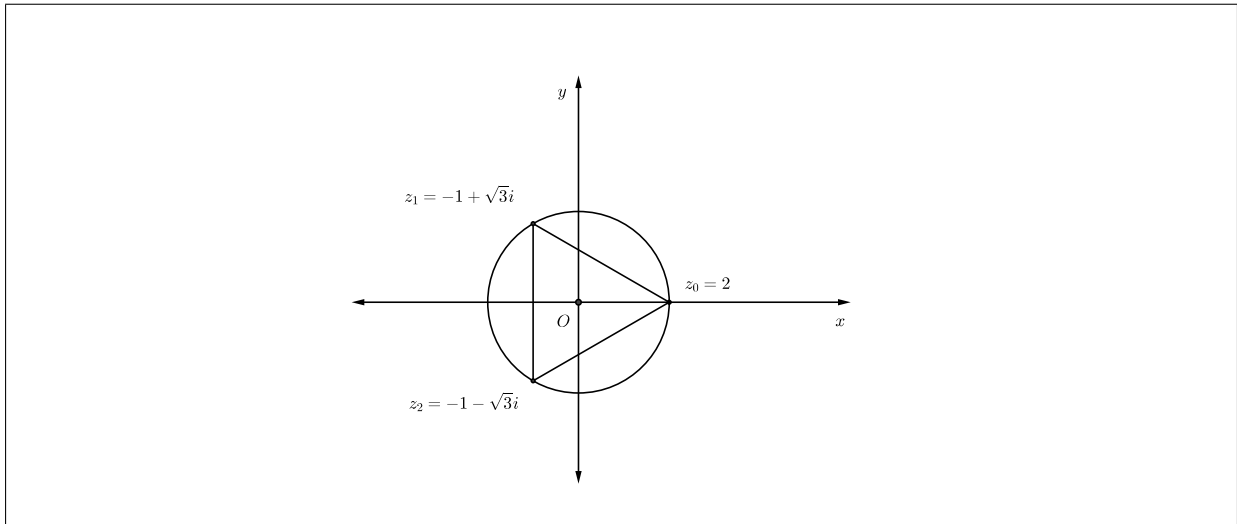


Figura 3.10: Raízes cúbicas de 8.

## 3.5 Sugestões de atividades com o Geogebra

### 3.5.1. Soma e diferença de dois complexos no geogebra

Vamos agora utilizar o geogebra para fazer somas e subtrações entre dois complexos. Sejam  $u$  e  $v$  dois complexos, onde  $u = 1 + 2i$  e  $v = 3 + i$ . A soma e a subtração de dois complexos no programa geogebra é:

$$t = u + v \quad \text{e} \quad d = u - v.$$

Primeiramente no campo de entrada do programa digitaremos os números complexos  $u$  e  $v$  em seguida digitaremos as operações  $t = u + v$  e  $d = u - v$ .

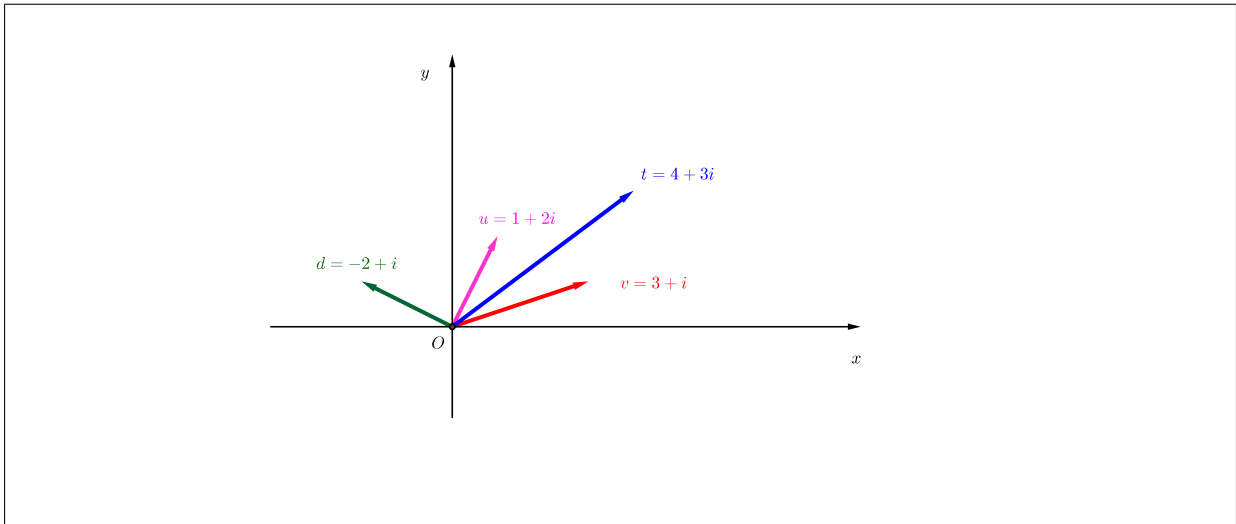


Figura 3.11: Soma e diferença de complexos no geogebra.

Pela figura é possível observar que a soma de  $u$  e  $v$  é a diagonal do paralelogramo formado pelos números complexos  $u$  e  $v$ .

### 3.5.2. Multiplicação e divisão de dois complexos no Geogebra

A utilização do geogebra para o cálculo do produto e do quociente entre dois complexos serve inicialmente para ver algumas regularidades e daí chegar na 1ª fórmula De Moivre e mostrar ainda que é mais fácil operar o produto e o quociente entre dois complexos utilizando a forma trigonométrica de um número complexo. Vamos agora utilizar o geogebra para fazer multiplicações e divisões entre dois complexos. Sejam  $u$  e  $v$  dois complexos, onde  $u = 1 + 2i$  e  $v = 3 + i$ . A multiplicação e a divisão de dois complexos no programa geogebra é:  $p = u * v$ ,  $q = \frac{u}{v}$ .

No caso do produto  $u * v$  é possível notar que o argumento do produto é a soma dos argumentos de  $u$  e  $v$  e seu módulo é o produto dos módulos de  $u$  e  $v$ , já no caso  $\frac{u}{v}$  teremos que o seu argumento é a diferença dos argumentos de  $u$  e de  $v$  e seu módulo é a razão entre os módulos de  $u$  e  $v$ . Para calcular o argumento de  $u$  devemos digitar no campo de entrada do programa geogebra o comando  $\text{ângulo}[u]$  e para encontrar o valor do módulo de  $u$  devemos digitar o comando  $\text{distância}[(0, 0), u]$ . Vamos obter os argumentos de  $u$  e  $v$ , seus módulos e depois obter o argumento do produto  $u * v$  e seu módulo. Temos daí que:

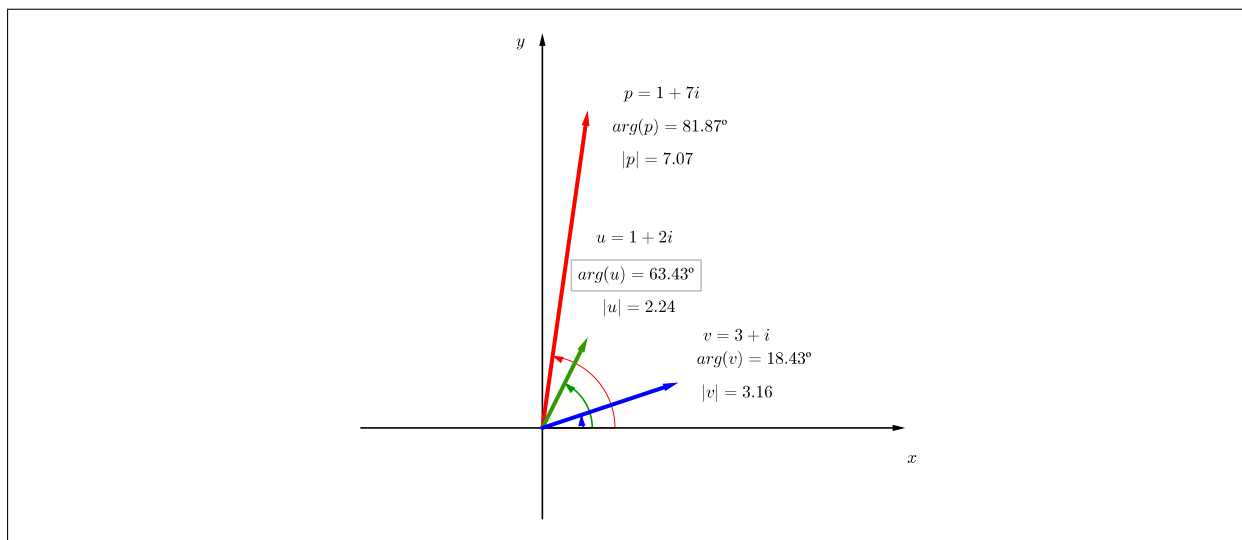


Figura 3.12: produto de complexos no geogebra.

Agora vamos obter o resultado da divisão de  $u$  e  $v$  seu argumento e seu módulo.

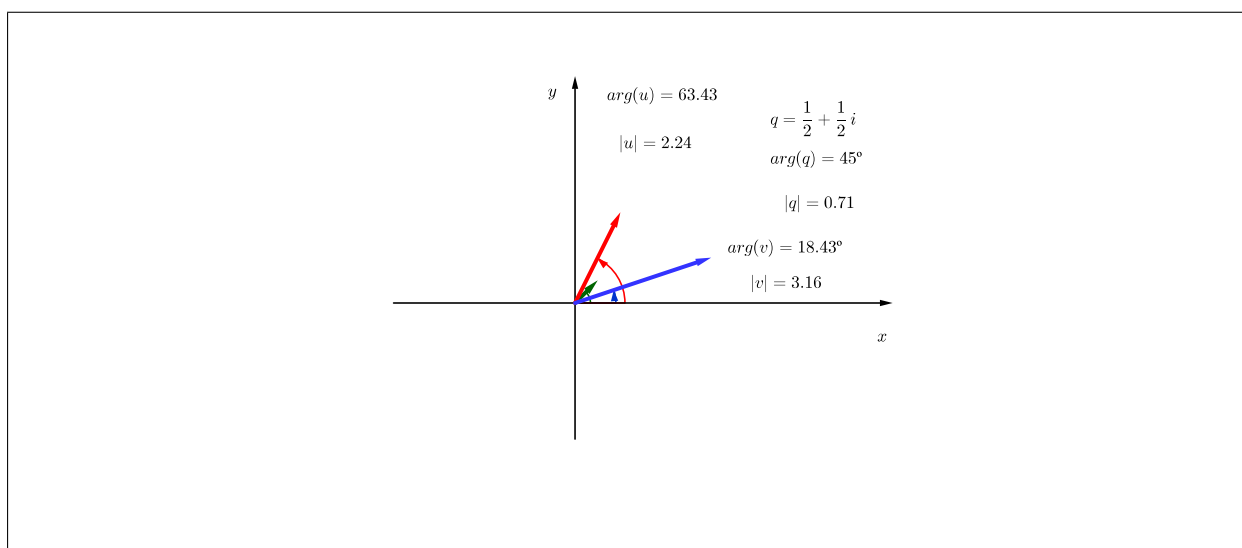


Figura 3.13: Quociente entre complexos no geogebra.

Observe que o módulo do quociente entre os complexos  $u$  e  $v$  é a razão entre os módulos de  $u$  e  $v$  e o argumento do quociente é a diferença do argumento de  $u$  pelo argumento de  $v$ .

### 3.5.3. O produto de um complexo $z$ pela unidade imaginária no Geogebra

Outro fato interessante é multiplicar um número complexo  $u$  pela unidade imaginária  $v = i$ . Se  $u = 1 + 2i$  vamos verificar no geogebra que o número complexo  $l$  obtido pelo

produto de  $u$  por  $v = i$  é um complexo que possui o mesmo módulo de  $u$ , onde  $u$  sofre uma rotação no sentido anti-horário segundo um ângulo de  $\frac{\pi}{2}$  rad.

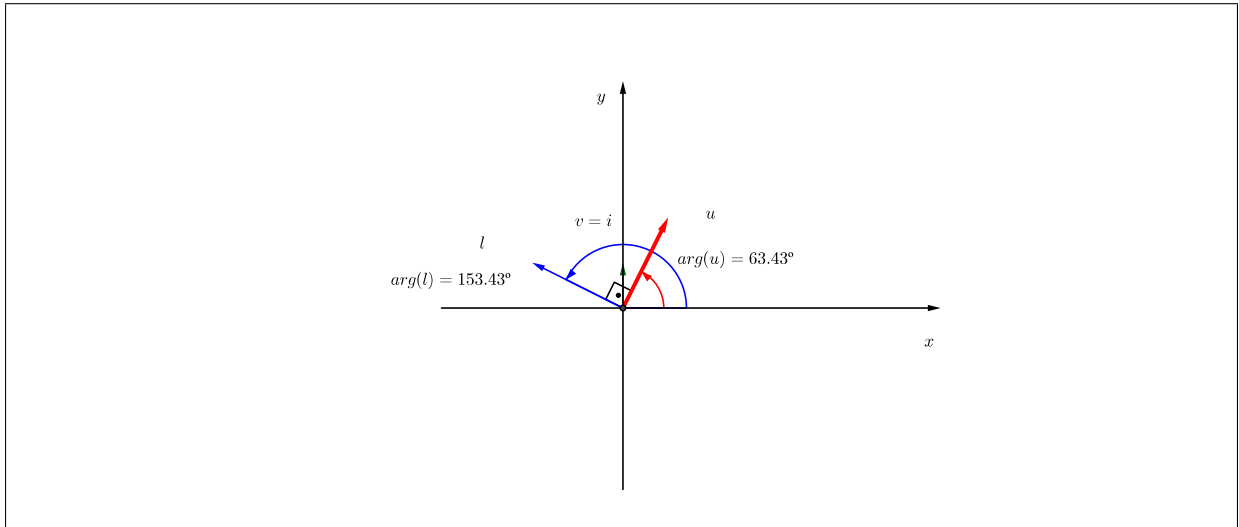


Figura 3.14: Produto de um complexo por  $i$  no geogebra.

Para obter o simétrica de  $u$ , ou seja  $-u$ , basta multiplicar o complexo  $u$  por  $-1 = i^2$ . Observe que o simétrico de um complexo é a reflexão pela origem  $(0, 0)$ .

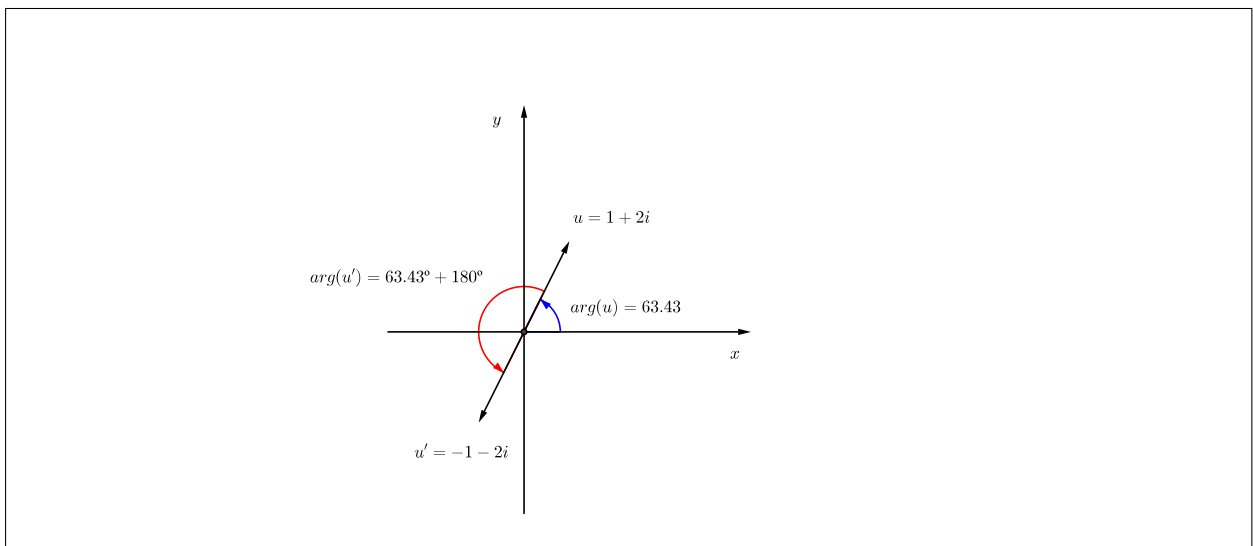


Figura 3.15: Simétrico de um complexo no geogebra.

### 3.5.4. Produto de um complexo pelo seu conjugado no Geogebra

Podemos mostrar no geogebra que o produto de um complexo  $z$  por seu conjugado  $\bar{z}$  é sempre um número real. Dado  $z = 1 + 2i$  temos que  $\bar{z} = 1 - 2i$  e  $z\bar{z} = 5$ .



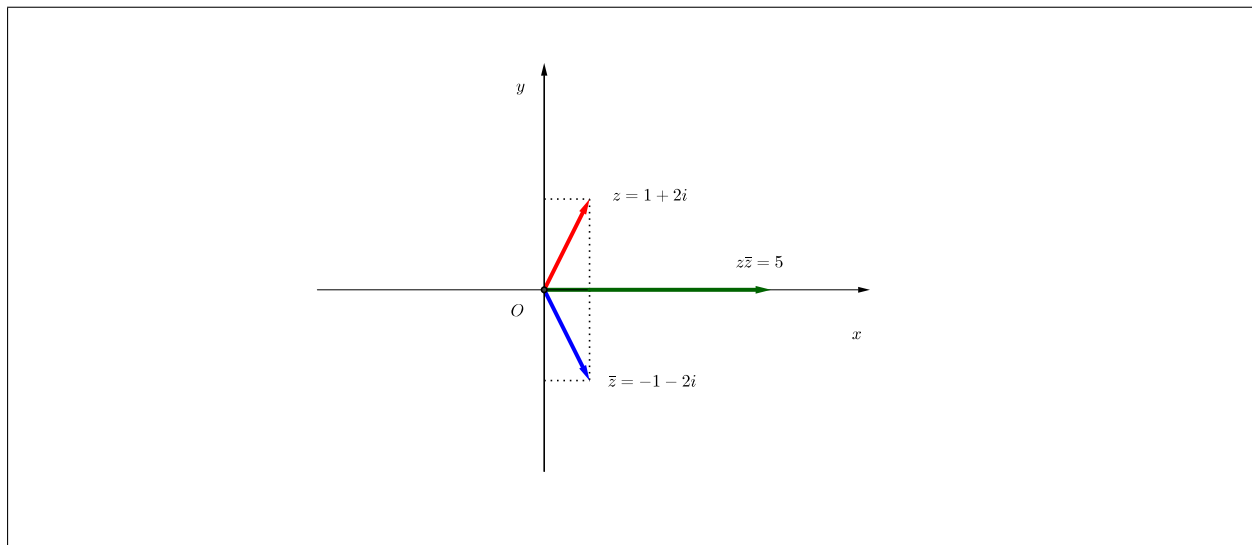


Figura 3.16: Produto de um complexo pelo seu conjugado no geogebra.

### 3.5.5. Argumentos do produto e do quociente entre dois complexos no Geogebra

Outro fato interessante que pode ser questionado na sala de aula com a utilização do geogebra é o seguinte: Dados  $z$  e  $w$  complexos, o que pode se afirmar sobre os argumentos de  $zw$  e  $\frac{z}{w}$ , quando:

- i)  $zw$  é real?
  - ii)  $zw$  é imaginário puro?
  - iii)  $\frac{z}{w}$  é real?
  - iv)  $\frac{z}{w}$  é imaginário puro?
- i) Se tomarmos  $z = 1 + 2i$  e  $w = -4 + 8i$ , vamos ter que  $zw = -8$  e neste caso  $zw$  é real. No geogebra vamos observar que o argumento de  $zw$  é  $\pi$ rad.

Note que  $zw$  será real quando o argumento de  $zw$  for um múltiplo de  $\pi$ rad. Se  $z = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$  e  $w = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$  temos que  $zw = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]$ . Assim  $zw$  é real quando  $\sin(\theta_1 + \theta_2) = 0$ , portanto  $\theta_1 + \theta_2 = k\pi$ , com  $k \in \mathbb{Z}$ .

**Observação 3**  $\theta_1$  e  $\theta_2$  são ângulos suplementares no caso  $0 \leq \theta_1 \leq \theta_2 \leq \pi$ .

- ii) Se tomarmos  $z = 1 + 2i$  e  $w = 4 + 2i$ , vamos ter que  $zw = 10i$  e neste caso  $zw$  é imaginário puro. No geogebra vamos observar que o argumento de  $zw$  é  $\frac{\pi}{2}$ rad.

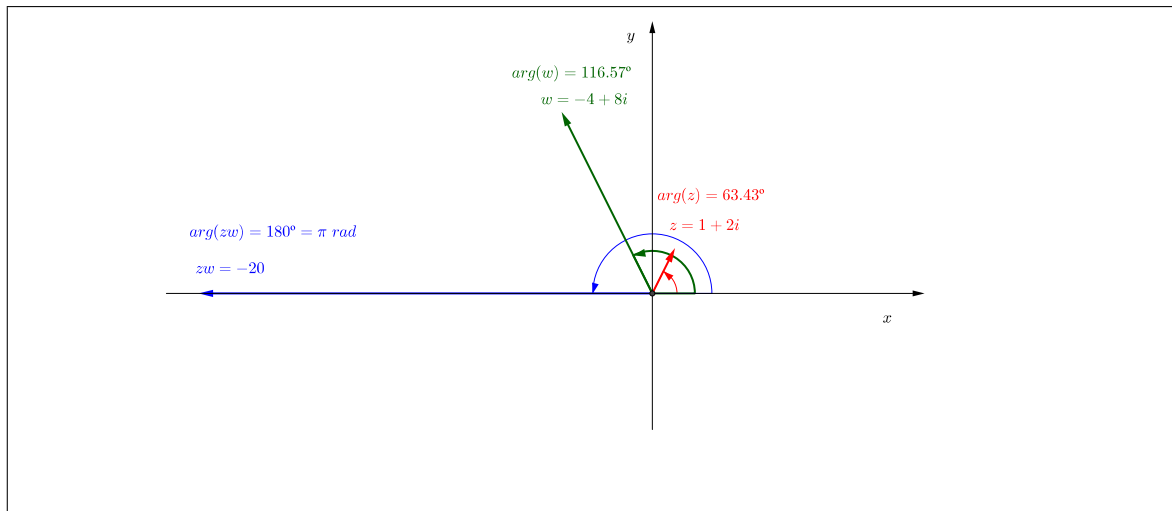


Figura 3.17: Produto de dois complexos que geram um número real.

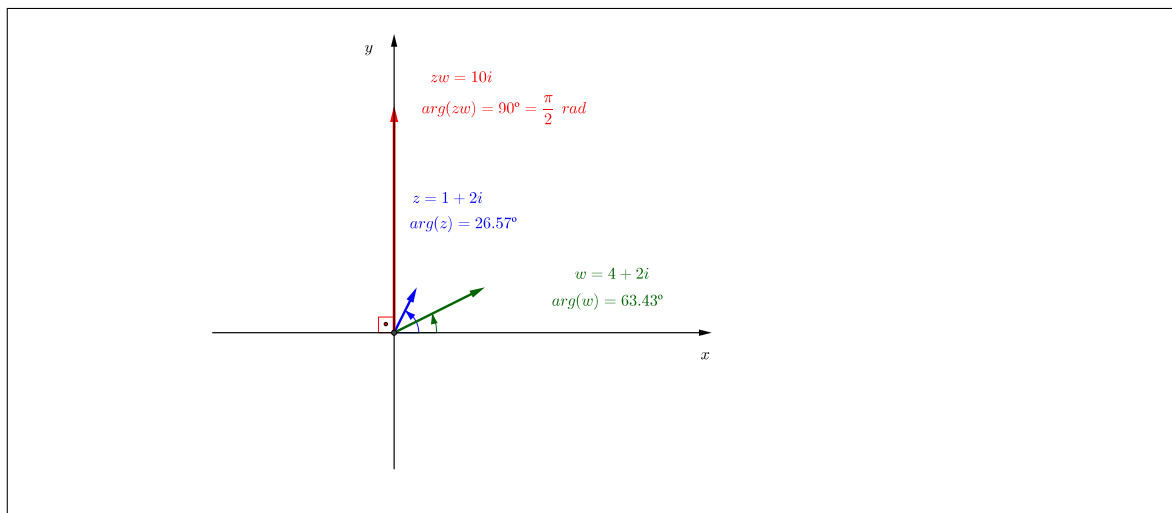


Figura 3.18: Produto de complexos que geram um imaginário puro.

Note que  $zw$  será imaginário puro quando o argumento de  $zw$  for  $\frac{\pi}{2} + k\pi$  com  $k \in \mathbb{Z}$ , pois devemos ter  $\cos(\theta_1 + \theta_2) = 0$

**Observação 4**  $\theta_1$  e  $\theta_2$  são ângulos complementares no caso  $0 \leq \theta_1 \leq \theta_2 \leq \frac{\pi}{2}$ .

iii) Como  $\frac{z}{w} = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)]$ , segue que  $\frac{z}{w}$  é real quando  $\theta_1 - \theta_2 = k\pi$  com  $k \in \mathbb{Z}$ .

vi) Neste caso  $\frac{z}{w}$  é imaginário puro quando  $\theta_1 - \theta_2 = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$

---

### Aplicações a Geometria plana

---

Da geometria Euclidiana sabemos que dois pontos distintos determina uma única reta e que dados três pontos distintos temos um triângulo, onde podemos classificá-lo quanto a seus lados. Podemos assim fazer alguns questionamentos:

1. Dados dois complexos  $z_1$  e  $z_2$  com  $z_1 \neq z_2$  no plano Argand-Gauss, será possível encontrar a equação da reta que passa pelos afixos  $z_1$  e  $z_2$ ?
2. Dados três complexos  $z_1, z_2$  e  $z_3$  distintos, será possível classificar quanto aos lados o triângulo determinado pelos três afixos sem ter que calcular a distância entre os afixos dados?

Estes questionamentos serão objetos de nosso estudo nas próximas seções.

#### 4.1 Equação da reta

Consideremos sobre um plano  $\pi$ , um sistema de coordenadas de tal forma que a cada complexo  $z = x + yi$  esteja associado um único par  $(x, y)$ . Ou seja, estabelecemos a seguinte função  $f$ :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C} &\longrightarrow \pi \\ z &\longmapsto (a, b) \end{aligned}$$

Sejam  $z_1$  e  $z_2$  números complexos tais que os pontos  $P$  e  $Q$  do plano  $\pi$  são definidos por  $f(z_1)$  e  $f(z_2)$  respectivamente, e consideremos o ponto  $X = f(z)$ , um ponto genérico da reta determinada por  $P$  e  $Q$ .

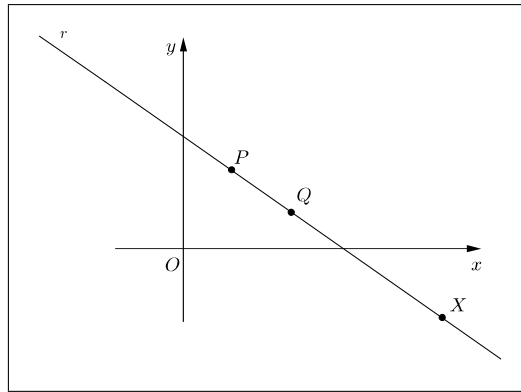


Figura 4.1: Retas que passa pelos pontos  $P$  e  $Q$ .

Pela figura acima, temos que o vetor  $\overrightarrow{XP}$  é um múltiplo do vetor  $\overrightarrow{QP}$ , daí temos:

$$(X - P) = t(Q - P), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Sendo  $X - P = z - z_1$  e  $Q - P = z_2 - z_1$ , obteremos a equação da reta que passa pelos afixos  $z_1$  e  $z_2$ . Assim temos:

$$\overrightarrow{XP} = t \cdot \overrightarrow{QP} \Leftrightarrow z - z_1 = t \cdot (z_2 - z_1).$$

Portanto, a equação da reta que passa pelos afixos  $z_1$  e  $z_2$  é:

$$z - t \cdot (z_2 - z_1) - z_1 = 0, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (4.1)$$

Observe que se  $t = 0$ , temos  $z = z_1$  e se  $t = 1$ , temos  $z = z_2$ , ou seja, podemos ver que para cada  $t \in \mathbb{R}$  obtemos um  $z$  pertencente a reta  $r$  da figura acima.

**Exemplo 24** Determine a equação da reta  $r$  que passa pelos números complexos  $z_1 = 2 - 4i$  e  $z_2 = 1 + 3i$ . Verifique se o complexo  $z_3 = 1 + i$  pertence a esta reta.

Resolução: Inicialmente, a equação da reta  $r$  que passa pelos afixos  $z_1$  e  $z_2$  é dada por  $z - t \cdot (z_2 - z_1) - z_1 = 0$ , ou seja, após alguns cálculos, a equação da reta  $r$  é

$$z - t \cdot (-1 + 7i) - 2 + 4i = 0.$$

Agora, vamos verificar se  $z_3 \in r$ . De fato,

$$z_3 - t \cdot (-1 + 7i) - 2 + 4i = 0 \Leftrightarrow 1 + i - t \cdot (-1 + 7i) = 2 - 4i \Leftrightarrow t = \frac{1 - 5i}{-1 + 7i}.$$

Assim,  $t = \frac{1 - 5i}{-1 + 7i} = -\left(\frac{36}{50} + \frac{2i}{50}\right) \notin \mathbb{R}$ . Portanto,  $z_3 \notin r$ . Observe que para o quociente

$\frac{a+bi}{c+di} \in \mathbb{R}$  é necessário e suficiente que  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ . Com efeito, temos:

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{a+bi}{c+di} \cdot \frac{c-di}{c-di} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i.$$

Para ser real, devemos ter  $\frac{bc-ad}{c^2+d^2} = 0$ , ou seja,  $bc-ad = 0$ .

## 4.2 Condição de alinhamento de três complexos

Sejam  $z_1, z_2$  e  $z_3$  números complexos tais que  $f(z_1) = A$ ,  $f(z_2) = B$  e  $f(z_3) = C$ , onde  $A, B$  e  $C$  pertencem ao plano  $\pi$ . Serão colineares os pontos  $A, B$  e  $C$  se existir um  $t \in \mathbb{R}$ , tal que  $z_3 - z_1 = t \cdot (z_2 - z_1)$ , ou ainda:

$$t = \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \iff \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = \overline{\left( \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \right)} = \frac{\bar{z}_3 - \bar{z}_1}{\bar{z}_2 - \bar{z}_1}. \quad (4.2)$$

Da identidade acima temos:

$$(z_3 - z_1)(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) - (z_2 - z_1)(\bar{z}_3 - \bar{z}_1) = 0.$$

Desenvolvendo os produtos segue uma condição necessária e suficiente para que três pontos estejam alinhados,

$$(z_3 - z_1)(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) - (z_2 - z_1)(\bar{z}_3 - \bar{z}_1) = 0 \iff \begin{vmatrix} z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \\ z_3 & \bar{z}_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (4.3)$$

**Exemplo 25** Verifique se os pontos  $z_1 = 1+i$ ,  $z_2 = 3+4i$  e  $z_3 = -2+5i$  estão alinhados.

Resolução: Os afixos  $z_1, z_2$  e  $z_3$  não são colineares, pois

$$\begin{vmatrix} 1+i & 1-i & 1 \\ 3+4i & 3-4i & 1 \\ -2+5i & -2-5i & 1 \end{vmatrix} = -34i \neq 0.$$

**Observação 5** Em (4.2) deve ser  $t$  necessariamente real, caso contrário os afixos  $z_1, z_2$  e  $z_3$  não estarão alinhados. Observe que se  $z_1 = 2+i$ ,  $z_2 = 3-i$  e  $z_3 = 6-7i$  teremos

$$t = \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{6-7i-(2+i)}{3-i-(2+i)} = \frac{4-8i}{1-2i} = \frac{24}{5} \in \mathbb{R}.$$

Portanto, neste caso os três afixos são colineares.

Da equação (4.1), segue uma outra forma de representar a equação da reta que passa pelos afixos  $z_1$  e  $z_2$ , a saber:

$$\frac{z - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{\bar{z} - \bar{z}_1}{\bar{z}_2 - \bar{z}_1},$$

ou ainda,

$$z(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) - \bar{z}(z_2 - z_1) = z_1(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) - \bar{z}_1(z_2 - z_1). \quad (4.4)$$

Esta caracterização da reta será muito importante para os resultados que serão apresentados logo a frente. Como aplicação temos alguns resultados:

1. Sabendo que a equação da reta que passa por  $z_1$  e  $z_2$  é

$$z(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) - \bar{z}(z_2 - z_1) = z_1(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) - \bar{z}_1(z_2 - z_1),$$

segue que no caso particular de  $|z_1| = |z_2| = 1$ , o que na verdade significa que  $\bar{z}_1 = \frac{1}{z_1}$  e  $\bar{z}_2 = \frac{1}{z_2}$  temos que a equação da reta fica da seguinte forma:

$$z + z_1 z_2 \bar{z} = z_2 + z_1.$$

2. Vamos determinar a equação da reta que passa por  $z_1$  e está na direção de  $z_2$ . Temos daí, que  $z - z_1 = \alpha z_2$  com  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Portanto,  $\frac{z - z_1}{z_2} = \frac{\bar{z} - \bar{z}_1}{\bar{z}_2}$ , isto é:

$$\frac{z}{z_2} - \frac{\bar{z}}{\bar{z}_2} = \frac{z_1}{z_2} - \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}.$$

3. Aplicando o item 2 podemos encontrar a equação da reta  $s$  que passa por  $z_1$  e  $z_2$  e está na direção de  $z_3$ . Assim a equação é:

$$\frac{z}{z_2 - z_1} - \frac{\bar{z}}{\bar{z}_2 - \bar{z}_1} = \frac{z_3}{z_2 - z_1} - \frac{\bar{z}_3}{\bar{z}_2 - \bar{z}_1},$$

ou ainda,

$$z(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) - \bar{z}(z_2 - z_1) = z_3(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) - \bar{z}_3(z_2 - z_1).$$

4. Dados  $z_1$  e  $z_2$  números complexos. Para determinar a equação da reta  $t$  que passa por  $z_1$  e é ortogonal a  $z_2$  se faz necessário observar que se tomarmos um complexo genérico  $z \in t$ , então devemos ter que a razão  $\frac{z - z_1}{z_2}$  é imaginário puro, o que equivale a dizer que:

$$\frac{z - z_1}{z_2} + \frac{\bar{z} - \bar{z}_1}{\bar{z}_2} = 0,$$

ou ainda;

$$\frac{z}{z_2} + \frac{\bar{z}}{\bar{z}_2} = \frac{z_1}{z_2} + \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}.$$

O caso de o complexo  $\frac{z - z_1}{z_2}$  ser imaginário puro será melhor compreendido na seção

destinada a classificação dos triângulos.

5. Como aplicação do item anterior, vamos determinar a equação da reta perpendicular a uma reta determinada por  $z_1$  e  $z_2$  e que passa por  $z_3$ . Assim temos que a equação da reta é:

$$\frac{z}{z_2 - z_1} + \frac{\bar{z}}{\bar{z}_2 - \bar{z}_1} = \frac{z_3}{z_2 - z_1} + \frac{\bar{z}_3}{\bar{z}_2 - \bar{z}_1}$$

o que é equivalente a

$$z(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) + \bar{z}(z_2 - z_1) = z_3(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) + \bar{z}_3(z_2 - z_1).$$

Para resolvermos o próximo exemplo daremos a definição de reta mediatriz a um segmento dado.

**Definição 2** A mediatriz de um segmento é a reta perpendicular ao segmento passando pelo seu ponto médio.

**Exemplo 26** Determinar a equação da reta mediatriz ao segmento formado pelos afixos  $z_1$  e  $z_2$ .

Resolução: A reta mediatriz é a reta perpendicular a uma reta determinada por  $z_1$  e  $z_2$  passando em  $\frac{z_1 + z_2}{2}$ . Assim temos que a equação é:

$$z(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) + \bar{z}(z_2 - z_1) = \frac{z_1 + z_2}{2}(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) + \left(\frac{\bar{z}_2 + \bar{z}_1}{2}\right)(z_2 - z_1)$$

ou ainda,

$$z(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) + \bar{z}(z_2 - z_1) = |z_2|^2 - |z_1|^2.$$

### 4.3 Classificação dos triângulos

Temos que, se  $t = \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \in \mathbb{R}$ , então  $z_1$ ,  $z_2$  e  $z_3$  estão alinhados, caso contrário  $z_1$ ,  $z_2$  e  $z_3$  irão determinar um triângulo. Vamos considerar o complexo  $\lambda = \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$ , chamado *relação simples de três complexos*. Sejam  $\arg \lambda = \theta$ , pois  $\theta = \arg(z_3 - z_1) - \arg(z_2 - z_1) = \arg\left(\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}\right)$  e  $|\lambda| = \frac{|z_3 - z_1|}{|z_2 - z_1|}$ , o ângulo  $\theta$  é formado pelos lados  $\overline{z_3 z_1}$  e  $\overline{z_2 z_1}$ .

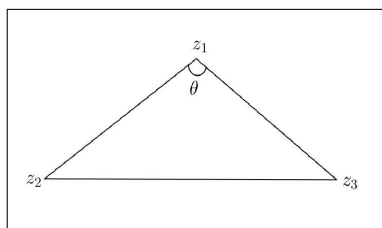


Figura 4.2: Triângulo 1.

Observando o triângulo da figura acima, vamos analisá-lo quanto a seu lados, de acordo com a identidade  $\lambda = \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$ .

1. Se  $|\lambda| = 1 \implies |z_3 - z_1| = |z_2 - z_1| \implies \triangle z_1 z_2 z_3$  é isósceles.
2. Se  $\lambda$  for imaginário puro, então  $\cos(\theta) = 0$ , pois  $x = |\lambda| \cos(\theta)$ . Daí, segue que  $\theta = \frac{\pi}{2}$  rad e por consequência,  $\triangle z_1 z_2 z_3$  é retângulo em  $z_1$ .
3. Se  $\lambda$  for real como já vimos anteriormente segue que  $z_1, z_2$  e  $z_3$  estão alinhados e não temos a formação de um triângulo.
4. Se tivermos  $\lambda = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ , então  $|\lambda| = 1$ , logo

$$|z_3 - z_1| = |z_2 - z_1| \text{ e } \theta = \frac{\pi}{3} \text{ rad.}$$

Portanto, o triângulo  $\triangle z_1 z_2 z_3$  é equilátero. Deste modo, podemos caracterizar um triângulo de acordo com  $\lambda$ .

**Observação 6** Daremos uma caracterização mais geral para os triângulo equiláteros logo a frente.

## 4.4 Área do triângulo

Já sabemos calcular a área de um triângulo utilizando a geometria, o cálculo diferencial integral e utilizando os conhecimentos de vetores. Nosso objetivo nesta seção é encontrar a área de um triângulo fazendo uso da álgebra dos números complexos.

Considere o triângulo  $\triangle z_1 z_2 z_3$  de vértices  $z_1, z_2$  e  $z_3$  e  $N_1, N_2$  e  $N_3$ , projeções ortogonais de  $z_1, z_2$  e  $z_3$  respectivamente sobre o eixo  $Ox$ .

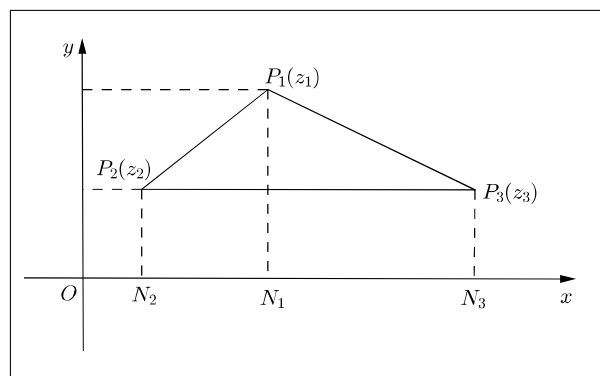


Figura 4.3: Área de um triângulo.



Pela figura acima temos:

$$\begin{aligned}
A(\Delta P_1 P_2 P_3) &= A(\text{trapézio } P_1 P_2 N_1 N_2) + A(\text{trapézio } P_1 P_3 N_3 N_1) - A(\text{trapézio } P_2 N_2 N_3 P_3) \\
&= \frac{1}{2}(P_2 N_2 + P_1 N_1)N_2 N_1 + \frac{1}{2}(P_1 N_1 + P_3 N_3)N_1 N_3 - \frac{1}{2}(P_2 N_2 + P_3 N_3)N_2 N_3 \\
&= \frac{1}{2}(y_2 + y_1)(x_1 - x_2) + \frac{1}{2}(y_1 + y_3)(x_3 - x_1) - \frac{1}{2}(y_2 + y_3)(x_3 - x_2) \\
&= \frac{1}{2}[(y_2 + y_1)(x_1 - x_2) + (y_1 + y_3)(x_3 - x_1) - (y_2 + y_3)(x_3 - x_2)] \\
&= \frac{1}{2}[(x_1 y_2 - y_1 x_2) + (x_2 y_3 - y_2 x_3) + (x_3 y_1 - y_3 x_1)]
\end{aligned}$$

Temos daí:

$$\text{a) } (x_1 y_2 - y_1 x_2) = \text{Im}[(x_1 - y_1 i)(x_2 + y_2 i)] = \text{Im}(\bar{z}_1 z_2) = \frac{1}{2}i(z_1 \bar{z}_2 - \bar{z}_1 z_2);$$

$$\text{b) } (x_2 y_3 - y_2 x_3) = \text{Im}[(x_2 - y_2 i)(x_3 + y_3 i)] = \text{Im}(\bar{z}_2 z_3) = \frac{1}{2}i(z_2 \bar{z}_3 - \bar{z}_2 z_3);$$

$$\text{c) } (x_3 y_1 - y_3 x_1) = \text{Im}[(x_3 - y_3 i)(x_1 + y_1 i)] = \text{Im}(\bar{z}_3 z_1) = \frac{1}{2}i(z_3 \bar{z}_1 - \bar{z}_3 z_1);$$

$$A(\Delta P_1 P_2 P_3) = \frac{i}{4}(z_1 \bar{z}_2 - \bar{z}_1 z_2 + z_2 \bar{z}_3 - \bar{z}_2 z_3 + z_3 \bar{z}_1 - \bar{z}_3 z_1), \text{ ou ainda,}$$

$$A(\Delta P_1 P_2 P_3) = \frac{i}{4} \begin{vmatrix} z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \\ z_3 & \bar{z}_3 & 1 \end{vmatrix}. \quad (4.5)$$

É claro que este determinante é imaginário puro, já que

$$\frac{i}{4} \begin{vmatrix} z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \\ z_3 & \bar{z}_3 & 1 \end{vmatrix}$$

é real positivo ou negativo. No caso de ser negativo devemos tomar o valor absoluto. Podemos escrever o determinante acima da seguinte forma:

$$\begin{vmatrix} z_2 & \bar{z}_2 \\ z_3 & \bar{z}_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} z_1 & \bar{z}_1 \\ z_3 & \bar{z}_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z_1 & \bar{z}_1 \\ z_2 & \bar{z}_2 \end{vmatrix},$$

para isto basta observar que pelo teorema de Laplace temos que:

$$\begin{vmatrix} z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \\ z_3 & \bar{z}_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z_2 & \bar{z}_2 \\ z_3 & \bar{z}_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} z_1 & \bar{z}_1 \\ z_3 & \bar{z}_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z_1 & \bar{z}_1 \\ z_2 & \bar{z}_2 \end{vmatrix}$$

No entanto observe que:

$$\begin{vmatrix} z_1 & \bar{z}_1 \\ z_3 & \bar{z}_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \bar{z}_1 & z_1 \\ \bar{z}_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Portanto a área do triângulo também pode ser dado por:

$$A(\triangle P_1 P_2 P_3) = \left| \frac{i}{4} \left( \begin{vmatrix} z_2 & \bar{z}_2 \\ z_3 & \bar{z}_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bar{z}_1 & z_1 \\ \bar{z}_3 & z_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z_1 & \bar{z}_1 \\ z_2 & \bar{z}_2 \end{vmatrix} \right) \right|$$

**Exemplo 27** Classifique o triângulo formado pelos números complexos  $z_1 = 1 + 4i$ ,  $z_2 = 1 + 2i$  e  $z_3 = 5 + 2i$ . Determine sua área e o valor de  $\sin \hat{A}$  e  $\cos \hat{A}$ .

Resolução:

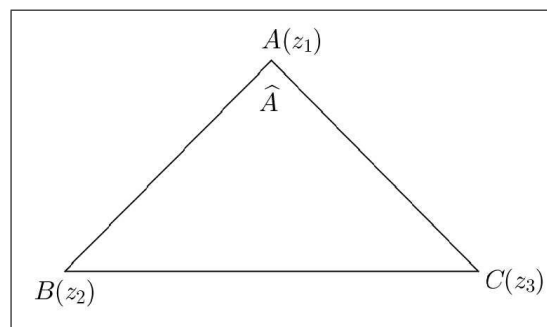


Figura 4.4: Triângulo 2.

- i) Vamos primeiramente calcular o complexo  $\lambda_1 = \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$ . Assim temos que  $\lambda_1 = 1 + 2i$ . Como  $|\lambda_1| \neq \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ , o  $\triangle z_1 z_2 z_3$  não é equilátero e como  $\lambda_1$  não é imaginário puro segue que o triângulo  $\triangle z_1 z_2 z_3$  não é retângulo em  $A(z_1)$ .

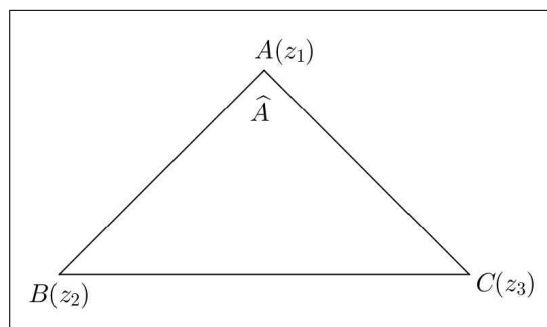


Figura 4.5: triângulo 3.

- ii) Vamos agora determinar o complexo  $\lambda_2 = \frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2}$ . Temos que  $\lambda_2 = -2i$ . Neste caso, como  $\lambda_2$  é imaginário puro, então temos que o triângulo  $\triangle z_1 z_2 z_3$  tem um ângulo reto em  $B(z_2)$ .

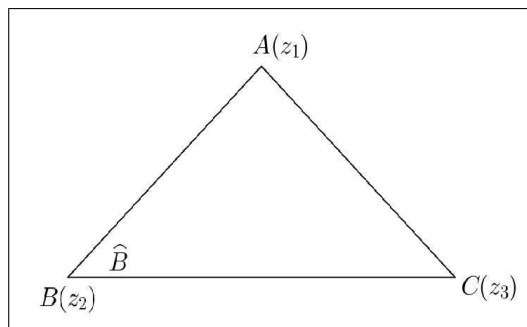


Figura 4.6: Triângulo 4.

- iii Mesmo já tendo classificado o triângulo  $\triangle z_1 z_2 z_3$  vamos encontrar  $\lambda_3$ , onde  $\lambda_3 = \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}$ . Assim temos que  $\lambda_3 = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}i$ . Como  $|\lambda_1| \neq 1$ ,  $|\lambda_2| \neq 1$ , e  $|\lambda_3| \neq 1$  segue o triângulo  $\triangle z_1 z_2 z_3$  não isósceles.

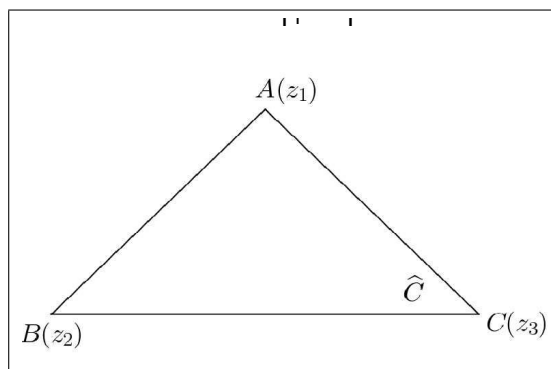


Figura 4.7: Triângulo 5.

- iv) Vamos agora calcular a área do triângulo. Temos que:

$$A = \frac{i}{4} \begin{vmatrix} z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \\ z_3 & \bar{z}_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{i}{4} \begin{vmatrix} 1 + 4i & 1 - 4i & 1 \\ 1 + 2i & 1 - 2i & 1 \\ 5 + 2i & 5 - 2i & 1 \end{vmatrix} = \frac{i}{4}(-16i) = 4$$

- v) Vamos calcular agora  $\sin \hat{A}$ . Sabemos que a área de um triângulo é dado por  $A = \frac{1}{2}ab \sin \hat{A}$ , onde  $a = |z_3 - z_1|$  e  $b = |z_2 - z_1|$ . Daí temos que  $\sin \hat{A} = \frac{2A}{ab}$ . Assim segue que:

$$\sin \hat{A} = \frac{i}{2ab} \begin{vmatrix} z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \\ z_3 & \bar{z}_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{i}{2 \cdot 2\sqrt{5} \cdot 2} \begin{vmatrix} 1 + 4i & 1 - 4i & 1 \\ 1 + 2i & 1 - 2i & 1 \\ 5 + 2i & 5 - 2i & 1 \end{vmatrix} = \frac{i}{8\sqrt{5}}(-16i) = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

vi) Vamos agora calcular o  $\cos \hat{A}$ , Já sabemos que  $\sin^2 \hat{A} + \cos^2 \hat{A} = 1$ , daí segue que:

$$\cos^2 \hat{A} = 1 - \sin^2 \hat{A} \iff \cos^2 \hat{A} = 1 - \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2 \iff \cos^2 \hat{A} = \pm \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Porém, como  $\hat{A}$  pertence ao intervalo  $(0, \pi)$ , pois é ângulo interno de um triângulo, segue que  $\cos \hat{A} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ .

## 4.5 Área de um polígono convexo

A partir da área de um triângulo, veja equação (4.5), vamos determinar a fórmula geral que determina a área de um polígono convexo, que é formado por  $n$  afixos.

É conhecido da geometria plana que um polígono convexo de  $n$  lados pode ser decomposto em  $n$  triângulos. Assim, a área de tal polígono é a soma das áreas dos  $n$  triângulos.

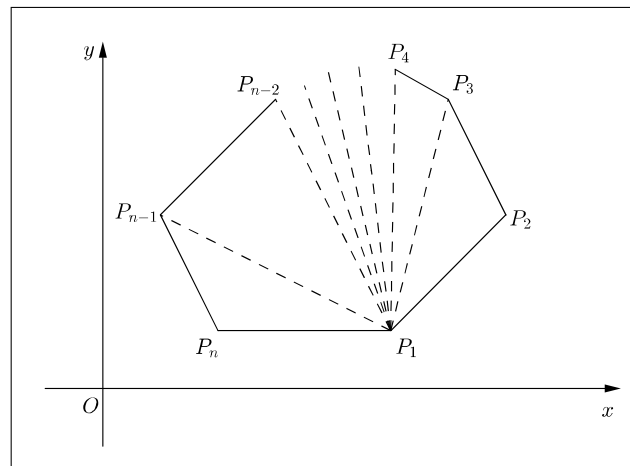


Figura 4.8: Polígono convexo no plano Argand-Gauss.

Seja  $P$  um polígono convexo de  $n$  lados e sejam  $P_1, P_2, \dots, P_n$  (afixos) percorridos no sentido anti-horário, então

$$A_{\text{polígono}} = A(P_1P_2P_3) + A(P_1P_3P_4) + \dots + A(P_1P_{n-1}P_n),$$

onde  $A(P_1P_kP_{k+1})$  corresponde a área do  $k$ -ésimo triângulo. Assim temos que

$$A(P_1P_kP_{k+1}) = \left| \frac{i}{4} \left( \begin{vmatrix} z_1 & \bar{z}_1 \\ z_k & \bar{z}_k \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z_k & \bar{z}_k \\ z_{k+1} & \bar{z}_{k+1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bar{z}_1 & z_1 \\ \bar{z}_{k+1} & z_{k+1} \end{vmatrix} \right) \right|.$$

Então a área do polígono é :

$$\begin{aligned}
 A_{\text{polígono}} &= \frac{i}{4} \left( \begin{vmatrix} z_1 & \bar{z}_1 \\ z_2 & \bar{z}_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z_2 & \bar{z}_2 \\ z_3 & \bar{z}_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bar{z}_1 & z_1 \\ \bar{z}_3 & z_3 \end{vmatrix} \right) \\
 &+ \frac{i}{4} \left( \begin{vmatrix} z_1 & \bar{z}_1 \\ z_3 & \bar{z}_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z_3 & \bar{z}_3 \\ z_4 & \bar{z}_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bar{z}_1 & z_1 \\ \bar{z}_4 & z_4 \end{vmatrix} \right) + \dots + \\
 &+ \frac{i}{4} \left( \begin{vmatrix} z_1 & \bar{z}_1 \\ z_{n-1} & \bar{z}_{n-1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z_{n-1} & \bar{z}_{n-1} \\ z_n & \bar{z}_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bar{z}_1 & z_1 \\ \bar{z}_n & z_n \end{vmatrix} \right).
 \end{aligned}$$

Na expressão observe que sempre o determinante de  $A(P_1P_{k+1}P_{k+2})$  se anula com determinante de  $A(P_1P_kP_{k+1})$ . Logo temos que:

$$A_{\text{polígono}} = \left| \frac{i}{4} \left( \begin{vmatrix} z_1 & \bar{z}_1 \\ z_2 & \bar{z}_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z_2 & \bar{z}_2 \\ z_3 & \bar{z}_3 \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} z_1 & \bar{z}_1 \\ z_n & \bar{z}_n \end{vmatrix} \right) \right|. \quad (4.6)$$

**Observação 7** (*Área de um polígono regular*) Já sabemos que as raízes enésimas de um complexo determinam um polígono regular no plano Argand-Gauss. Assim, sendo  $z_0, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}$  as raízes de um complexo  $z$  temos que área do polígono regular é:

$$A_{\text{polígono}} = \left| \frac{i}{4} \left( \begin{vmatrix} z_0 & \bar{z}_0 \\ z_1 & \bar{z}_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z_1 & \bar{z}_1 \\ z_2 & \bar{z}_2 \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} z_0 & \bar{z}_0 \\ z_{n-1} & \bar{z}_{n-1} \end{vmatrix} \right) \right|. \quad (4.7)$$

## 4.6 Área de um polígono regular

Na seção anterior chegamos a uma equação que calcula a área de um polígono convexo, vide (4.6), e também de um polígono regular, (4.7), baseado em equações formadas por determinantes.

Nosso objetivo nesta seção é obter uma fórmula que calcule a área de um polígono regular formado pelas raízes enésimas de um complexo  $z = x + yi$ , ou seja, encontrar uma fórmula que calcule a área de um polígono regular sem ter que encontrar as raízes de  $z = x + yi$ . Será que é possível encontrar uma fórmula que dependa simplesmente de  $x$ ,  $y$  e  $n$ ?

Sejam  $z_0, z_1, z_2, z_3, \dots, z_{n-2}, z_{n-1}$  as raízes enésimas do complexo  $z = x + yi$  e seja  $l$  a medida do lado do polígono regular formado por tais raízes, isto é:

$$|z_1 - z_0| = |z_2 - z_1| = |z_3 - z_2| = |z_4 - z_3| = \dots = |z_{n-1} - z_{n-2}| = |z_0 - z_{n-1}| = l.$$

Assim temos que:

$$l = |z_k - z_{k-1}|, \quad k \in \{1, 2, 3, \dots, n\}.$$

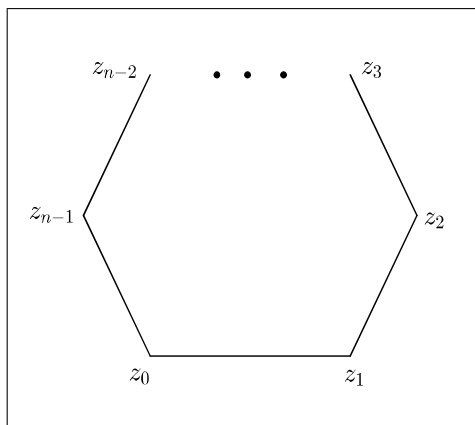


Figura 4.9: Polígono regular formado pelas raízes enésimas de um complexo.

Sabemos que

$$z_k = \rho \left[ \cos \left( \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) + i \sin \left( \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \right],$$

com  $\rho = \sqrt[n]{r} = \sqrt[n]{x^2 + y^2}$  e  $\theta = \arctan \left( \frac{y}{x} \right)$  e  $k \in \mathbb{Z}$  e

$$z_{k-1} = \rho \left[ \cos \left( \frac{\theta + 2\pi(k-1)}{n} \right) + i \sin \left( \frac{\theta + 2\pi(k-1)}{n} \right) \right].$$

Assim segue que:

$$\begin{aligned} z_k - z_{k-1} &= \rho \left[ \cos \left( \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) - \cos \left( \frac{\theta + 2\pi(k-1)}{n} \right) \right] \\ &\quad + i\rho \left[ \sin \left( \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) - \sin \left( \frac{\theta + 2\pi(k-1)}{n} \right) \right] \\ &= \rho \left[ 2 \sin \left( \frac{\theta + \theta + 2k\pi + 2k\pi - 2\pi}{2n} \right) \sin \left( \frac{\theta - \theta + 2k\pi - 2k\pi + 2\pi}{2n} \right) \right] \\ &\quad + \rho \left[ 2i \sin \left( \frac{\theta - \theta + 2k\pi - 2k\pi + 2\pi}{2n} \right) \cos \left( \frac{\theta + \theta + 2k\pi + 2k\pi - 2\pi}{2n} \right) \right] \\ &= \rho \left[ -2 \sin \left( \frac{2\theta - 4k\pi - 2\pi}{2n} \right) \sin \left( \frac{\pi}{n} \right) + 2i \sin \left( \frac{\pi}{n} \right) \cos \left( \frac{2\theta + 4k\pi - 2\pi}{2n} \right) \right]. \end{aligned}$$

Temos daí que:

$$\begin{aligned} |z_k - z_{k-1}| &= \sqrt{4\rho^2 \left[ \sin^2 \left( \frac{2\theta + 4k\pi - 2\pi}{2n} \right) \sin^2 \left( \frac{\pi}{n} \right) + \sin^2 \left( \frac{\pi}{n} \right) \cos^2 \left( \frac{2\theta + 4k\pi - 2\pi}{2n} \right) \right]} = \\ &= \sqrt{4\rho^2 \sin^2 \left( \frac{\pi}{n} \right) \cdot 1} = 2\rho \sin \left( \frac{\pi}{n} \right). \end{aligned}$$

Portanto, o lado do polígono é:

$$l = 2\rho \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) = 2\sqrt[2n]{x^2 + y^2} \sin\left(\frac{\pi}{n}\right). \quad (4.8)$$

Sabemos que o polígono regular pode ser dividido em  $n$  triângulos tomando o centro da circunferência circunscrita como um vértice comum a todos esses  $n$  triângulos.

Sendo  $\rho$  é o raio da circunferência circunscrita ao polígono, podemos calcular a área de um desses triângulos. Denotemos por  $h$  a altura de um destes triângulos relativa a sua base  $l$ . Pelo teorema de Pitágoras temos:

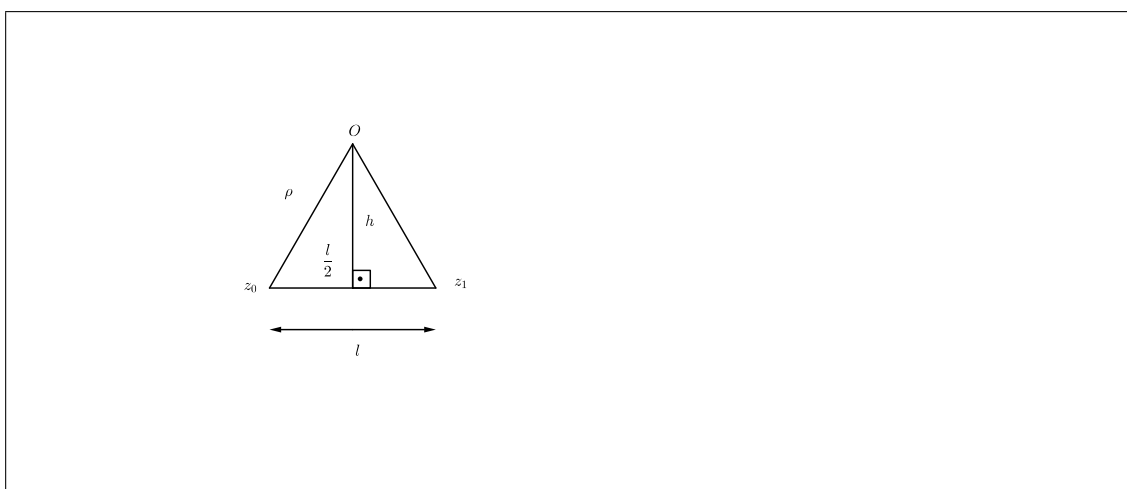


Figura 4.10: Triângulo isósceles de base  $l$  e lados medindo  $\rho$ .

$$\rho^2 = h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 \iff h = \sqrt{\rho^2 - \frac{l^2}{4}} = \sqrt{\rho^2 - \frac{4\rho^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right)}{4}} = \rho \cos\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Logo, a área do triângulo é:

$$A_{\Delta} = \frac{h \cdot l}{2} = \rho^2 \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{n}\right). \quad (4.9)$$

Como a área de um polígono corresponde a soma das áreas dos  $n$  triângulos segue que:

$$A_{\text{polígono}} = n \cdot A_{\Delta} = \frac{n}{2} \cdot \rho^2 \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right).$$

Portanto, a área do polígono regular é:

$$A_{\text{polígono}} = \frac{n}{2} \cdot \sqrt[2n]{x^2 + y^2} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right). \quad (4.10)$$

## 4.7 Pontos notáveis de um triângulo

**Teorema 8** *As três mediatrizes de um triângulo se intersectam em um ponto chamado circuncentro do triângulo cuja distância aos vértices do triângulo é a mesma (raio da circunferência circunscrita ao triângulo).*

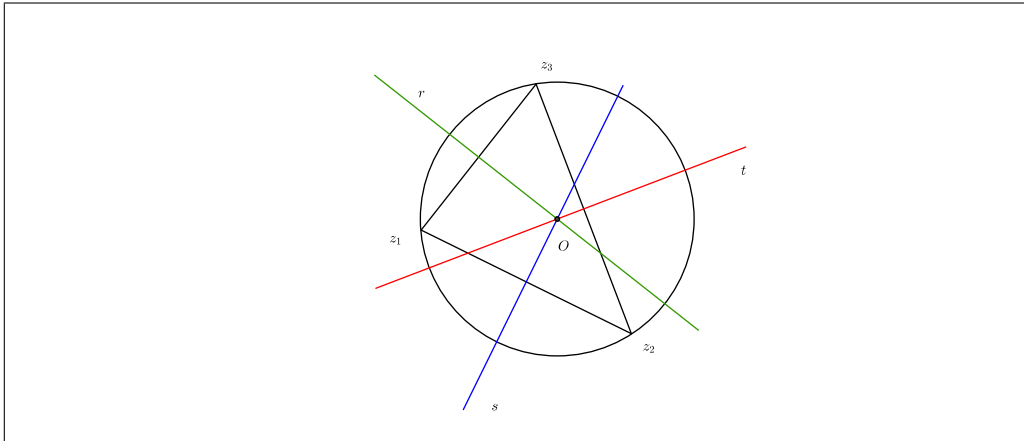


Figura 4.11: Circuncentro.

**Demonstração:** Sejam  $z_1, z_2$  e  $z_3$  vértices de um triângulo no plano Argand-Guss. As equações das mediatrizes, vide exemplo (26), correspondentes aos lados  $\overline{z_2 z_1}, \overline{z_3 z_2}$  e  $\overline{z_3 z_1}$  são respectivamente:

$$\begin{cases} z(\overline{z_2} - \overline{z_1}) + \overline{z}(z_2 - z_1) = |z_2|^2 - |z_1|^2 & (1) \\ z(\overline{z_3} - \overline{z_2}) + \overline{z}(z_3 - z_2) = |z_3|^2 - |z_2|^2 & (2) \\ z(\overline{z_1} - \overline{z_3}) + \overline{z}(z_1 - z_3) = |z_1|^2 - |z_3|^2 & (3) \end{cases}$$

Observe que somando duas equações quaisquer obtemos a restante. Por exemplo, somando as equações (1) e (2) obteremos a (3). Portanto, segue que as mediatrizes se intersectam em um único ponto denominado circuncentro do triângulo formado pelos afixos  $z_1, z_2$  e  $z_3$ .

Vamos agora determinar o ponto de interseção das mediatrizes de  $\overline{z_2 z_1}, \overline{z_3 z_2}$  e  $\overline{z_3 z_1}$ . Para isso basta resolvermos o sistema anterior. Pela equação (2) temos

$$\overline{z} = \frac{|z_3|^2 - |z_2|^2 - z(\overline{z_3} - \overline{z_2})}{z_3 - z_2}.$$

Substituindo (2) em (1) segue que:

$$z(\overline{z_2} - \overline{z_1}) + \frac{|z_3|^2 - |z_2|^2 - z(\overline{z_3} - \overline{z_2})}{z_3 - z_2}(z_2 - z_1) = |z_2|^2 - |z_1|^2,$$



então

$$z(\bar{z}_2 - \bar{z}_1)(z_3 - z_2) + (z_2 - z_1)(|z_3|^2 - |z_2|^2) - (z_2 - z_1)(\bar{z}_3 - \bar{z}_2)z = (z_3 - z_2)(|z_2|^2 - |z_1|^2).$$

Portanto, o ponto de interseção das mediatrizes de  $\overline{z_2 z_1}$ ,  $\overline{z_3 z_2}$  e  $\overline{z_3 z_1}$  é :

$$z = \frac{|z_1|^2(z_2 - z_3) + |z_2|^2(z_3 - z_1) + |z_3|^2(z_1 - z_2)}{\bar{z}_1(z_2 - z_3) + \bar{z}_2(z_3 - z_1) + \bar{z}_3(z_1 - z_2)}.$$

■

**Definição 3** A altura de um triângulo é o segmento perpendicular a um lado de um triângulo a partir do vértice oposto.

**Observação 8** Para a demonstração do próximo teorema a palavra altura terá o significado de reta que passa por um vértice e é perpendicular ao lado oposto a este vértice.

**Teorema 9** As três alturas de um triângulo se intersectam em um ponto chamado ortocentro do triângulo.

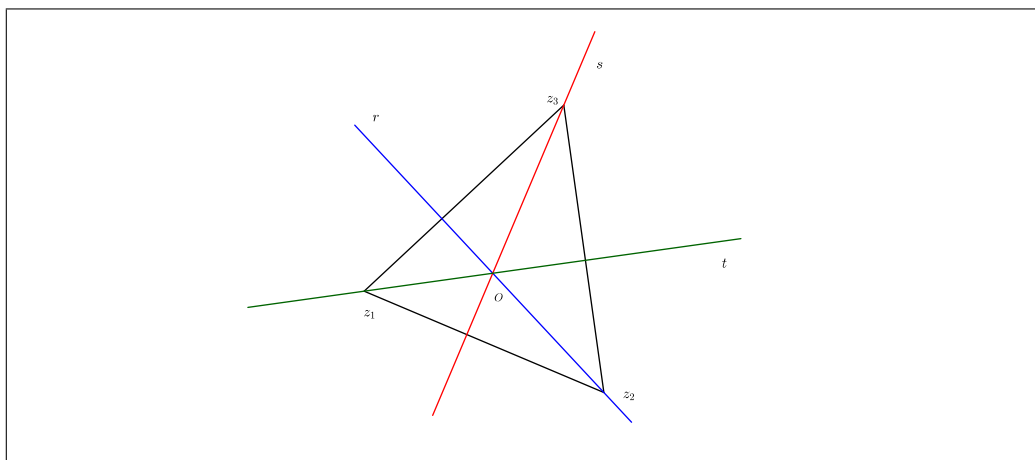


Figura 4.12: Ortocentro.

**Demonstração:** Sejam  $z_1$ ,  $z_2$  e  $z_3$  vértices de um triângulo no plano Argand-Guss. As equações das alturas correspondentes aos lados  $\overline{z_2 z_1}$ ,  $\overline{z_3 z_2}$  e  $\overline{z_3 z_1}$  são respectivamente as seguintes:

$$\begin{cases} z(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) + \bar{z}(z_2 - z_1) = z_3(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) + \bar{z}_3(z_2 - z_1) & (1) \\ z(\bar{z}_3 - \bar{z}_2) + \bar{z}(z_3 - z_2) = z_1(\bar{z}_3 - \bar{z}_2) + \bar{z}_1(z_3 - z_2) & (2) \\ z(\bar{z}_1 - \bar{z}_3) + \bar{z}(z_1 - z_3) = z_2(\bar{z}_1 - \bar{z}_3) + \bar{z}_2(z_1 - z_3) & (3) \end{cases}$$

Observe que somando duas equações quaisquer obtemos a restante. Portanto, segue que as alturas se intersectam em único ponto denominado ortocentro do triângulo formado pelos afixos  $z_1$ ,  $z_2$  e  $z_3$ .

Vamos agora determinar o ponto de interseção das alturas de  $\overline{z_2 z_1}$ ,  $\overline{z_3 z_2}$  e  $\overline{z_3 z_1}$ . Para isso basta resolvermos o seguinte dado acima. Pela equação (1) temos

$$\bar{z} = \frac{z_3(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) + \bar{z}_3(z_2 - z_1) - z(\bar{z}_2 - \bar{z}_1)}{z_2 - z_1}.$$

Substituindo (1) em (3) segue que:

$$z = \frac{|z_1|^2(z_3 - z_2) + |z_2|^2(z_1 - z_3) + |z_3|^2(z_2 - z_1) - \bar{z}_1(z_3^2 - z_2^2) - \bar{z}_2(z_3^2 - z_1^2) - \bar{z}_3(z_2^2 - z_1^2)}{\bar{z}_1(z_2 - z_3) + \bar{z}_2(z_3 - z_1) + \bar{z}_3(z_1 - z_2)}.$$

Substituindo  $z$  na equação (2) verificamos que  $z$  é sua solução também. ■

**Definição 4** *A mediana de um triângulo é um segmento que liga um vértice ao ponto médio do lado oposto.*

**Observação 9** *Para a demonstração do próximo teorema estamos considerando que a palavra mediana significa reta que contém um vértice e intersecta o ponto médio do lado oposto a este vértice.*

**Teorema 10** *As três medianas de um triângulo se intersectam em um ponto chamado baricentro do triângulo.*

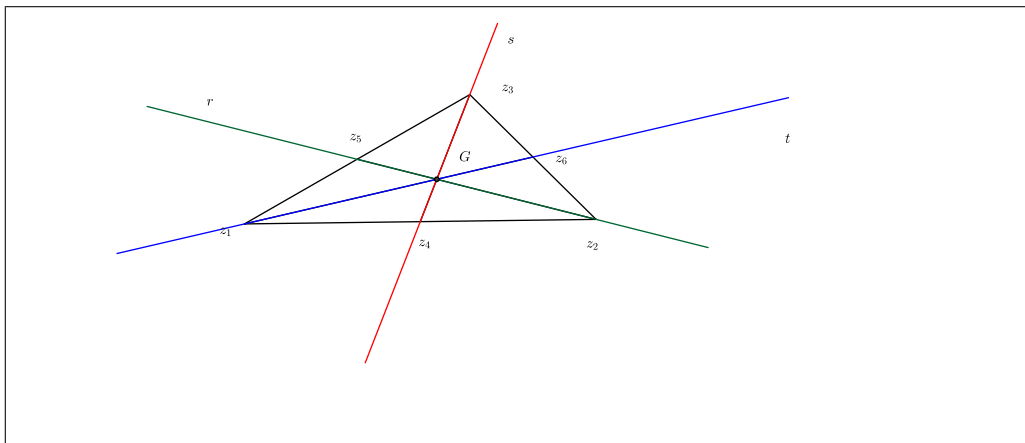


Figura 4.13: Medianas.

**Demonstração:** Sejam  $z_1, z_2$  e  $z_3$  vértices de um triângulo no plano complexo e sejam  $z_4$ ,  $z_5$  e  $z_6$  os pontos médios de  $\overline{z_2 z_1}$ ,  $\overline{z_3 z_1}$  e  $\overline{z_3 z_2}$  respectivamente. Assim temos que

$$z_4 = \frac{z_1 + z_2}{2}, \quad z_5 = \frac{z_3 + z_1}{2} \text{ e } z_6 = \frac{z_3 + z_2}{2}.$$

Temos daí que a reta suporte da mediana relativa ao lado  $\overline{z_2 z_1}$  é a reta que passa por  $z_3$  e por  $z_4$ . Segue, veja equação (4.4), que a reta procurada é:

$$z(\overline{z_4} - \overline{z_3}) - \overline{z}(z_4 - z_3) = z_3(\overline{z_4} - \overline{z_3}) - \overline{z_3}(z_4 - z_3).$$

Substituindo  $z_4$ , na equação anterior, obteremos:

$$z(\overline{z_1} + \overline{z_2} - 2\overline{z_3}) - \overline{z}(z_1 + z_2 - 2z_3) = z_3(\overline{z_1} + \overline{z_2} - 2\overline{z_3}) - \overline{z_3}(z_1 + z_2 - 2z_3) \quad (1).$$

De maneira análoga obtemos as outras retas suportes das medianas. Temos daí que as retas são:

$$\left\{ \begin{array}{l} z(\overline{z_1} + \overline{z_2} - 2\overline{z_3}) - \overline{z}(z_1 + z_2 - 2z_3) = z_3(\overline{z_1} + \overline{z_2} - 2\overline{z_3}) - \overline{z_3}(z_1 + z_2 - 2z_3) \quad (1) \\ z(\overline{z_3} + \overline{z_1} - 2\overline{z_2}) - \overline{z}(z_3 + z_1 - 2z_2) = z_2(\overline{z_3} + \overline{z_1} - 2\overline{z_2}) - \overline{z_2}(z_3 + z_1 - 2z_2) \quad (2) \\ z(\overline{z_3} + \overline{z_2} - 2\overline{z_1}) - \overline{z}(z_3 + z_2 - 2z_1) = z_1(\overline{z_3} + \overline{z_2} - 2\overline{z_1}) - \overline{z_1}(z_3 + z_2 - 2z_1) \quad (3) \end{array} \right.$$

Temos que uma das três equações acima é combinação linear das outras duas, daí concluímos que as retas suportes das medianas se intersectam em um único ponto chamado baricentro do triângulo de vértices  $z_1$ ,  $z_2$  e  $z_3$ . ■

**Observação 10** *Também temos uma outra forma de demonstrar este resultado. Podemos utilizar a equação paramétrica da reta mediana relativa ao lado  $\overline{z_1 z_2}$ . A equação da mediana relativa a  $\overline{z_1 z_2}$  é:*

$$z - t(z_2 - z_1) - z_1 = 0, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Observe que se tomarmos  $t = \frac{2}{3}$ , vamos obter  $z = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}$ , que pertence a mediana. De maneira análoga com as outras medianas vamos obter o mesmo resultado. Concluímos então que as medianas se intersectam em um único ponto e o seu baricentro é dado por:

$$z = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}.$$

**Observação 11** *Foi tomado  $t = \frac{2}{3}$ , pois já sabemos da geometria Euclidiana que o baricentro de um triângulo divide as medianas na razão 2 : 1.*

## 4.8 Semelhança de triângulos

Na geometria Euclidiana plana, os triângulos são as peças básicas e a congruência e a semelhança de triângulos, os conceitos fundamentais. Nós começaremos caracterizando a semelhança de triângulos em termos de números complexos.

**Definição 5** Sejam  $z_1, z_2, z_3, w_1, w_2, w_3$  números complexos. Nós dizemos que os triângulos  $\triangle z_1 z_2 z_3$  e  $\triangle w_1 w_2 w_3$  são semelhantes, e escrevemos  $\triangle z_1 z_2 z_3 \approx \triangle w_1 w_2 w_3$  se, e somente se, o ângulo em  $z_k$  é igual ao ângulo em  $w_k$ ,  $k = 1, 2, 3$ , e têm mesma orientação, isto é, ambos anti-horários ou ambos horários. No caso de terem orientação oposta, isto é, um no sentido anti-horário e outro no sentido horário, então escreveremos  $\triangle z_1 z_2 z_3$  é reverso ao  $\triangle w_1 w_2 w_3$  (Veja figura a seguir).

**Observação 12** Estamos considerando nesta seção os casos de semelhança de triângulos já conhecidos da geometria plana Euclidiana, AA(ângulo-ângulo), LLL(lado-lado-lado) e LAL(lado-ângulo-lado).

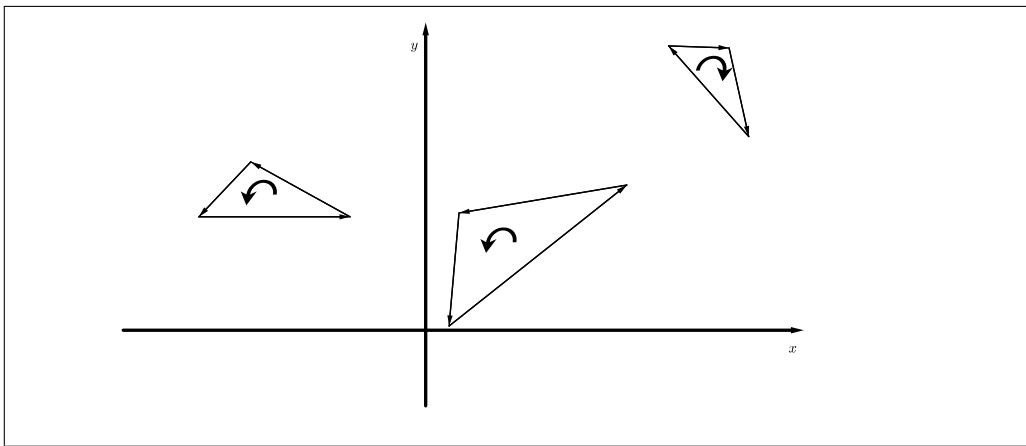


Figura 4.14: Triângulos semelhantes.

**Teorema 11** Os  $\triangle z_1 z_2 z_3$  e  $\triangle w_1 w_2 w_3$  são semelhantes se, e somente se,

$$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{w_3 - w_1}{w_2 - w_1} = \begin{vmatrix} z_1 & w_1 & 1 \\ z_2 & w_2 & 1 \\ z_3 & w_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

**Demonstração:** Temos que dois triângulos são semelhantes se, e somente se, (caso LAL) as razões entre as medidas de dois pares de lados correspondentes são iguais e os ângulos entre estes lados são iguais (incluindo a orientação), isto é:  $\left| \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \right| = \left| \frac{w_3 - w_1}{w_2 - w_1} \right|$  e

$$\arg \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = \arg \frac{w_3 - w_1}{w_2 - w_1} \iff \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{w_3 - w_1}{w_2 - w_1} = \begin{vmatrix} z_1 & w_1 & 1 \\ z_2 & w_2 & 1 \\ z_3 & w_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

■

**Observação 13** Observe que  $\triangle w_1 w_2 w_3 \approx \triangle \overline{w_1} \overline{w_2} \overline{w_3}$ .

**Corolário 1**  $\Delta z_1 z_2 z_3 \approx \Delta w_1 w_2 w_3$  (reverso) se, e somente se,

$$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{\bar{w}_3 - \bar{w}_1}{\bar{w}_2 - \bar{w}_1} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} z_1 & \bar{w}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{w}_2 & 1 \\ z_3 & \bar{w}_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

**Demonstração:** De fato, temos que  $\Delta \bar{w}_1 \bar{w}_2 \bar{w}_3 \approx \Delta w_1 w_2 w_3$  e como  $\Delta z_1 z_2 z_3 \approx \Delta w_1 w_2 w_3$  temos por transitividade que  $\Delta z_1 z_2 z_3 \approx \Delta \bar{w}_1 \bar{w}_2 \bar{w}_3$ . ■

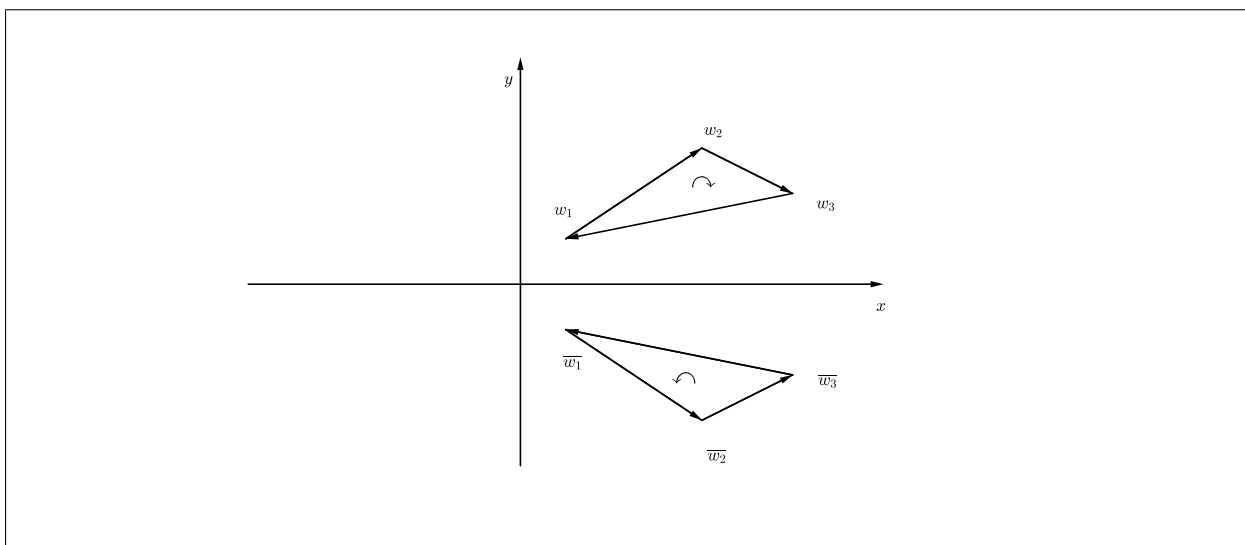


Figura 4.15: Triângulos com orientação opostas.

### 4.8.1. Caracterização de um triângulo equilátero

Inicialmente vamos fazer um comentário sobre as raízes cúbicas da unidade, as quais serão importantes no desenvolvimento desta seção. Sabemos que  $z^3 = 1$ , possui três raízes complexas, onde as raízes são:

$$z_1 = 1, \quad z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad z_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Já sabemos é que estas raízes determinam no plano complexo um triângulo equilátero. Vamos agora denotar  $z_2$  por  $\omega$ , ou seja,  $z_2 = \omega$ . Usando está notação vamos ter que  $z_3 = \omega^2$ , de fato observe que:

$$\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

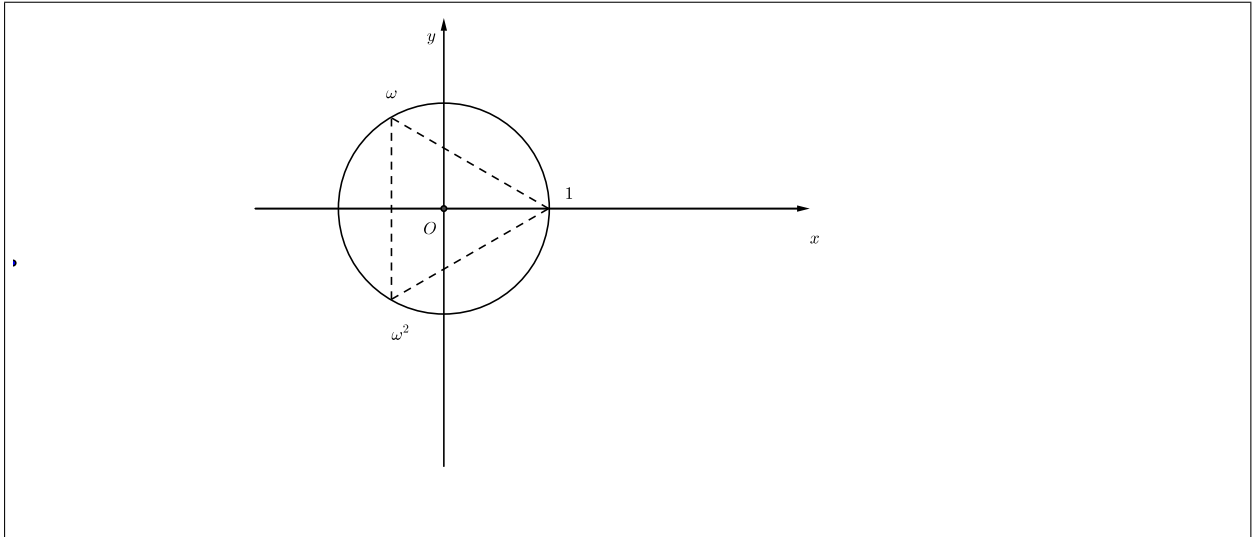


Figura 4.16: Raízes da unidade.

Além do mais é possível observar que:

- i)  $\omega^2 = \bar{\omega}$ , pois  $\omega^2$  é obtido geometricamente pela reflexão de  $w$  em torno do eixo real.
- ii)  $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ , pois temos que de  $\omega^3 - 1 = 0 \iff (\omega^2 + \omega + 1)(\omega - 1) = 0$ , onde  $\omega \neq 1$ . Assim temos que  $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ .

**Teorema 12** *Sejam  $z_1, z_2$  e  $z_3 \in \mathbb{C}$ , então  $\triangle z_1 z_2 z_3$  é equilátero se, e somente se  $\triangle z_1 z_2 z_3 \approx \triangle z_3 z_1 z_2$ .*

**Demonstração:** Como  $\triangle z_1 z_2 z_3 \approx \triangle z_3 z_1 z_2$  segue que:

$$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3}.$$

Da seguinte proporção temos:

$$z_3^2 + z_2^2 + z_1^2 - z_3 z_1 - z_2 z_3 - z_1 z_2 = 0.$$

Vamos agora usar o fato de conhecermos as raízes da unidade. Como exposto acima sabemos que as raízes de  $z^3 = 1$  são:

$$1, w \text{ e } w^2 \text{ e que } \omega^2 + \omega + 1 = 0, \text{ pois } \omega \neq 1.$$

Observe que as seguintes igualdades são equivalentes:

$$(z_1 \omega + \omega z_2 + \omega^2 z_3)(z_1 + \omega^2 z_2 + \omega z_3) = 0 \iff z_3^2 + z_2^2 + z_1^2 - z_3 z_1 - z_2 z_3 - z_1 z_2 = 0.$$

De fato,

$$\begin{aligned}
 (z_1\omega + \omega z_2 + \omega^2 z_3)(z_1 + \omega^2 z_2 + \omega z_3) &= z_1^2 + \omega^3 z_2^2 + \omega^3 z_3^2 + z_1 z_2 \omega^2 + z_1 z_2 \omega + \\
 &\quad + z_2 z_3 \omega^4 + z_2 z_3 \omega^2 + z_1 z_3 \omega^2 + z_1 z_3 \omega \\
 &= z_1^2 + \omega^3 z_2^2 + \omega^3 z_3^2 + z_1 z_2 (\omega^2 + \omega) + \\
 &\quad + z_2 z_3 (\omega^4 + \omega^2) + (\omega^2 + \omega) z_1 z_2 \\
 &= z_3^2 + z_2^2 + z_1^2 - z_3 z_1 - z_2 z_3 - z_1 z_2
 \end{aligned}$$

já que  $\omega^2 + \omega + 1 = 0$  temos que  $\omega^3 = 1$ ,  $\omega^2 + \omega = -1$  e  $\omega^4 + \omega^2 = -1$ . Sendo que  $(z_1\omega + \omega z_2 + \omega^2 z_3)(z_1 + \omega^2 z_2 + \omega z_3) = 0$  segue daí que:

$$(z_1\omega + \omega z_2 + \omega^2 z_3) = 0 \quad \text{ou} \quad (z_1 + \omega^2 z_2 + \omega z_3) = 0.$$

Observe que destas duas igualdades temos:

$$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{\omega^2 - 1}{\omega - 1} \iff (z_1\omega + \omega z_2 + \omega^2 z_3) = 0$$

e

$$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{\omega - 1}{\omega^2 - 1} \iff (z_1 + \omega^2 z_2 + \omega z_3) = 0.$$

Observe que:

$$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{\omega^2 - 1}{\omega - 1} \iff z_1(\omega^2 - \omega) - z_2(\omega^2 - 1) + z_3(\omega - 1) = 0.$$

$$\begin{aligned}
 z_1(\omega^3 - \omega^2) - z_2(\omega^3 - \omega) + z_3(\omega^2 - \omega) &= z_1\omega^3 - z_1\omega^2 - z_2\omega^3 + z_2\omega + z_3\omega^2 - z_3\omega \\
 &= z_1 + z_2\omega + z_3\omega^2 + (-z_1\omega^2 - z_2 - z_3\omega) \\
 &= z_1 + z_2\omega + z_3\omega^2 - \frac{1}{\omega}(z_1 + z_2\omega + z_3\omega^2) \\
 &= (z_1 + z_2\omega + z_3\omega^2) \left(1 - \frac{1}{\omega}\right).
 \end{aligned}$$

Como  $\left(1 - \frac{1}{\omega}\right) \neq 0$  segue que  $z_1 + z_2\omega + z_3\omega^2 = 0$ . De maneira análoga, vale que

$$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{\omega - 1}{\omega^2 - 1} \iff (z_1 + \omega^2 z_2 + \omega z_3) = 0.$$

Assim podemos concluir que o triângulo formado pelos vértices  $z_1$ ,  $z_2$  e  $z_3$  é equilátero se, e somente se,  $\Delta z_1 z_2 z_3 \approx \Delta 1 \omega \omega^2$  ou  $\Delta z_1 z_2 z_3 \approx \Delta 1 \omega^2 \omega$ . ■

## 4.9 Teorema de Napoleão

**Teorema 13** *Se sobre cada lado de um triângulo qualquer traçarmos um triângulo equilátero externo ao triângulo dado, então os centros desses três triângulos equiláteros determinam os vértices de um triângulo equilátero.*

**Demonstração:** Sejam  $z_1, z_2$  e  $z_3$  os vértices de um triângulo dado e  $\Delta z_2 w_1 z_3, \Delta z_1 z_3 w_3$  e  $\Delta w_2 z_2 z_1$  triângulos equiláteros com a mesma orientação que  $\Delta 1 \omega \omega^2$ , onde temos que  $\omega^3 = 1$ . Sejam  $\zeta_1, \zeta_2$  e  $\zeta_3$ , respectivamente os centros desses triângulos. Sabendo que os três triângulos construídos sobre os lados do  $\Delta z_1 z_2 z_3$  são equiláteros, então cada um deles deve satisfazer as equações abaixo:

$$\begin{cases} z_2 + \omega w_1 + \omega^2 z_3 = 0 \\ z_1 + \omega z_3 + \omega^2 w_3 = 0 \\ w_2 + \omega z_2 + \omega^2 z_1 = 0 \end{cases} .$$

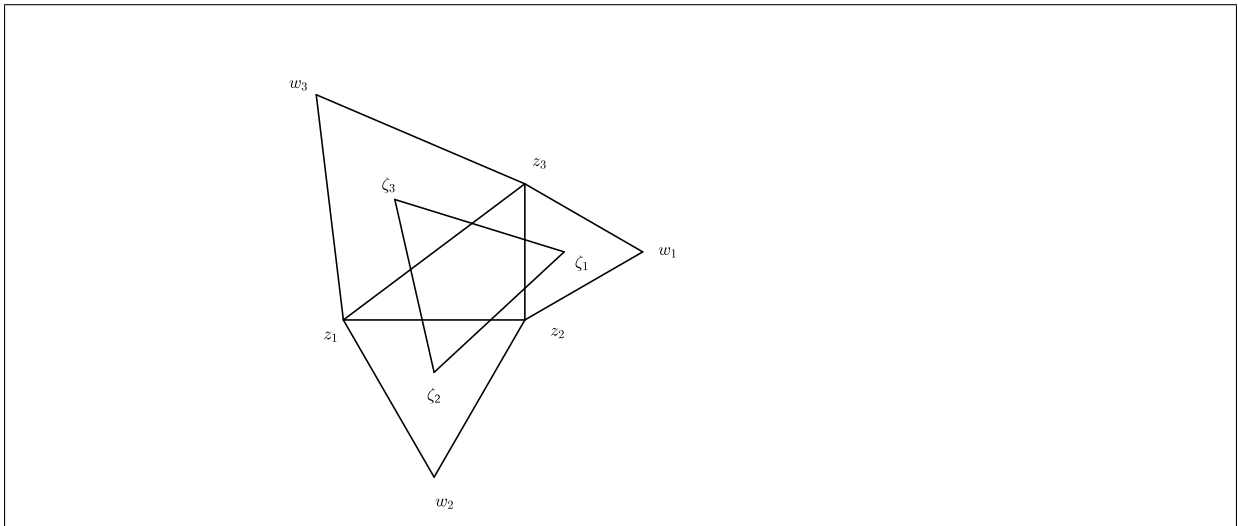


Figura 4.17: Teorema de Napoleão.

Para que  $\Delta \zeta_1 \zeta_2 \zeta_3$  seja equilátero os vértices  $\zeta_1, \zeta_2$  e  $\zeta_3$  devem satisfazer a seguinte equação:

$$\zeta_1 + \omega \zeta_2 + \omega^2 \zeta_3 = 0.$$

Observe que:

$$\begin{aligned} \zeta_1 + \omega \zeta_2 + \omega^2 \zeta_3 &= \frac{1}{3}(z_1 + z_2 + w_2) + \frac{\omega}{3}(z_3 + w_1 + z_2) + \frac{\omega^2}{3}(w_3 + z_3 + z_1) \\ &= \frac{1}{3}[(z_2 + \omega w_1 + \omega^2 z_3) + (z_1 + \omega z_3 + \omega^2 w_3) + (w_2 + \omega z_2 + \omega^2 z_1)]. \end{aligned}$$

Portanto,  $\zeta_1 + \omega \zeta_2 + \omega^2 \zeta_3 = 0$  e segue que o triângulo  $\Delta \zeta_1 \zeta_2 \zeta_3$  é equilátero. E assim o



teorema fica provado. ■

## 4.10 Problema da ilha do tesouro

O problema a ilha do tesouro é um clássico problema onde se pode utilizar a álgebra dos números complexos para sua resolução. Este problema mostra que é possível utilizar o conhecimento dos números complexos para resolver problemas geométricos.

O enunciado do problema é o seguinte: *Dois piratas decidem enterrar um tesouro em uma ilha. Escolhem, como pontos de referência uma árvore e duas pedras. Começando na árvore, medem o número de passos até a primeira pedra. Em seguida, dobram segundo um ângulo de  $90^\circ$ , à direita e caminham o mesmo número de passos até alcançar um ponto, onde fazem uma marca. Voltam à árvore, medem o número de passos desde a árvore até a segunda pedra, dobram à esquerda, segundo um ângulo de  $90^\circ$ , e caminham o mesmo número de passos até alcançar um ponto, onde fazem uma marca. Finalmente enterram o tesouro exatamente no ponto médio entre as duas marcas.*

Anos mais tarde os piratas voltam à ilha e decidem desenterrar a o tesouro, mas para sua decepção, constatam que a árvore não existe mais (o vento, a chuva e os depredadores a haviam arrancado).

Então um dos piratas decide arriscar. Escolhe ao acaso um ponto da ilha e diz: “Vamos imaginar que a árvore estivesse aqui.” Repete os mesmos procedimentos descritos acima e consegue encontrar o tesouro. Daí fica o questionamento: Coincidência ou o pirata usou algum artifício matemático para encontrar o tesouro? A relação deste problema com os complexos se dá porque podemos considerar um número complexo como um vetor no plano complexo, isto é:

1. No plano complexo, a diferença entre dois complexos traduz o vetor origem no primeiro ponto e extremidade no segundo; é o que se costuma formular por:  $\overline{AB} = B - A$
2. Multiplicar um complexo pelo número  $i$  (a unidade imaginária) equivale a girá-lo de um ângulo reto positivo.

A figura ilustra a situação do problema. Sendo a  $A$  a árvore,  $P$  e  $Q$  as pedras, o tesouro está no ponto  $T$  médio dos pontos  $P'$  e  $Q'$ . Considerando os pontos pertencentes ao plano complexo, não importando onde esteja a origem, tem-se:

$$T = \frac{P' + Q'}{2} = \frac{P - i(P - A) + Q + i(Q - A)}{2} = \frac{P + Q}{2} + i \frac{Q - P}{2}.$$

De fato, observe que:

$$P' - P = i(A - P) \iff P' = P + i(A - P) \iff P' = P - i(P - A)$$

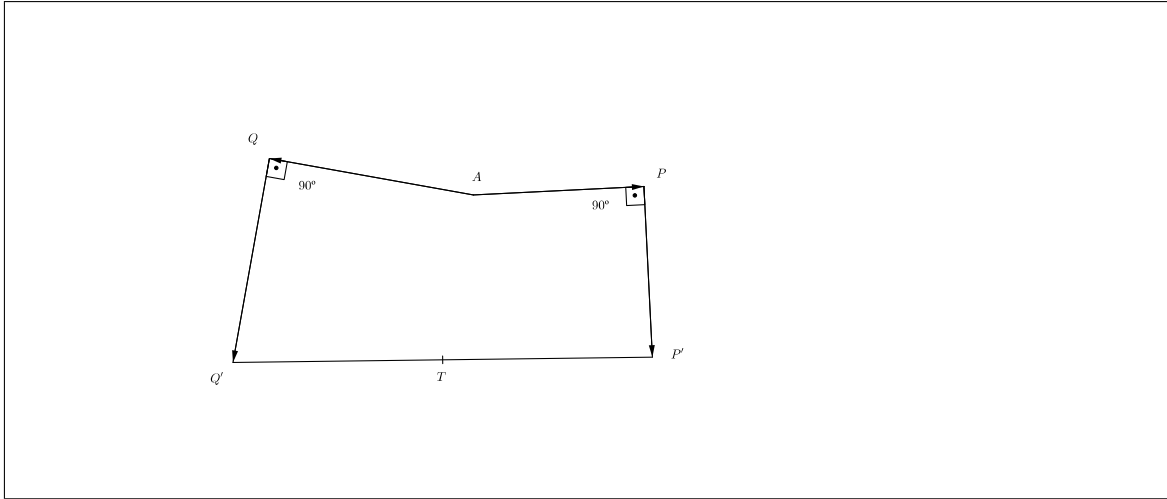


Figura 4.18: Ilha do tesouro.

e analogamente temos que

$$Q - Q' = i(A - Q) \iff -Q' = -Q - i(Q - A) \iff Q' = Q + i(Q - A).$$

Esse resultado demonstra que a localização do tesouro independe da localização da árvore, ou seja, o pirata era conhecedor de recursos matemáticos. O mesmo problema poderia ser resolvido utilizando geometria analítica tomando um sistema de coordenadas cartesianas adequadas. Observe a figura abaixo.

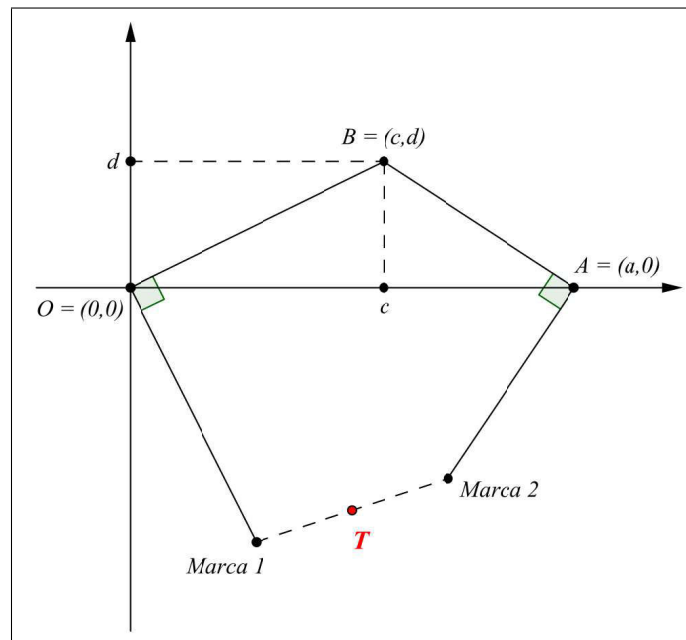


Figura 4.19: Ilha do tesouro 1.

Seja  $B = (c, d)$  a localização da árvore e  $O=(0,0)$  e  $A=(a,0)$  a localização das pedras. Observe que o tesouro está no ponto médio das marcas 1 e 2. Sabendo as coordenadas das marcas 1 e 2 é possível encontrar o ponto médio  $T$  que é a localização do tesouro.

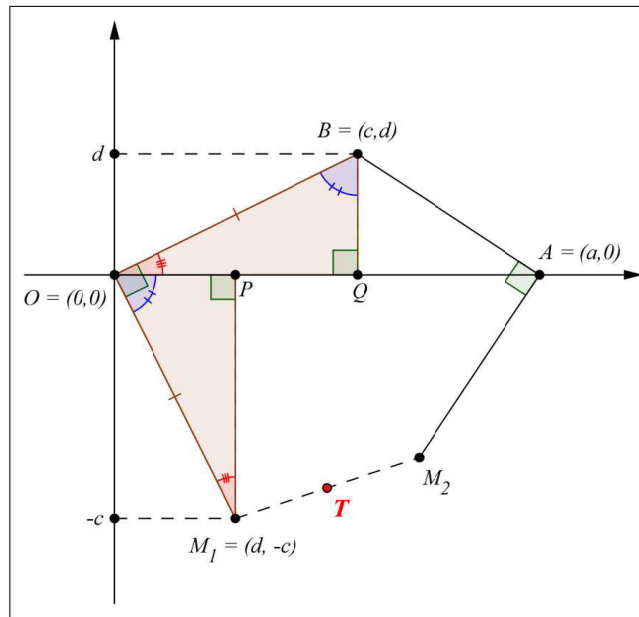


Figura 4.20: Ilha do tesouro 2.

Vamos determinar as coordenadas da marca 1 e vamos denotá-la pelo ponto  $M_1$ . Observe que os triângulos  $\triangle OQB$  e  $\triangle M_1PO$  são congruentes, pois temos que as hipotenusas  $\overline{OB}$  e  $\overline{M_1O}$  são congruentes, além do mais os ângulos  $\angle BOQ$  e  $\angle M_1OP$  são complementares o que implica que os ângulos  $\angle OBQ$  e  $\angle M_1OP$  são congruentes assim como os ângulos  $\angle BOQ$  e  $\angle OM_1P$ . Desta forma os lados correspondentes são congruentes e como  $Q = (c, 0)$  as coordenadas da marca 1 são  $M_1 = (d, -c)$ .

Vamos determinar as coordenadas da marca 2. Denotando por  $M_2$  a marca 2 observe que os triângulos  $\triangle BAQ$  e  $\triangle M_2AR$  são congruentes pois temos que as hipotenusas  $\overline{BA}$  e  $\overline{AM_2}$  são congruentes e os ângulos  $\angle BAQ$  e  $\angle M_2AR$  são complementares o que implica que os ângulos  $\angle QBA$  e  $\angle RAM_2$  são congruentes, assim como os ângulos  $\angle QAB$  e  $\angle RM_2A$ . Portanto os lados correspondentes são iguais e com  $Q = (c, 0)$  temos que  $M_2 = (a - d, c - a)$ . Como  $T$  é ponto médio de  $M_1$  e  $M_2$ , segue que:

$$T = \left( \frac{d + a - d}{2}, \frac{-c + c - a}{2} \right) = \left( \frac{a}{2}, \frac{-a}{2} \right).$$

Assim temos que para encontrar o tesouro não dependemos da localização da árvore, pois observe que o ponto médio  $T$  dependerá unicamente do valor de  $a$ . ■

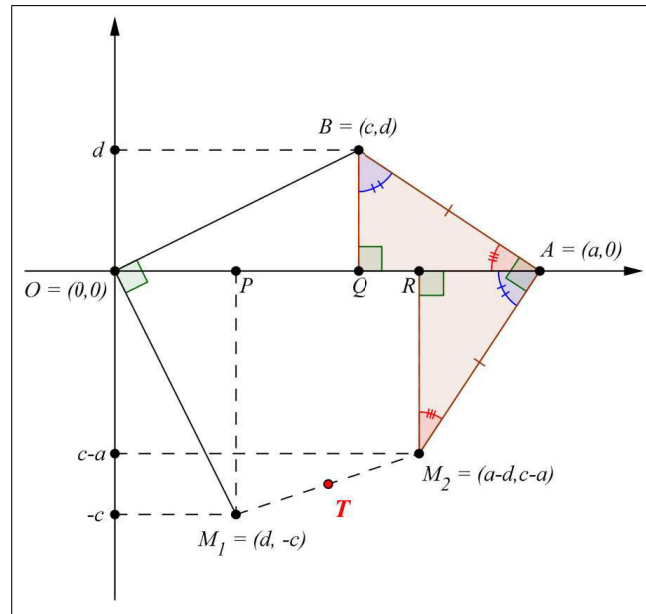


Figura 4.21: Ilha do tesouro 3.

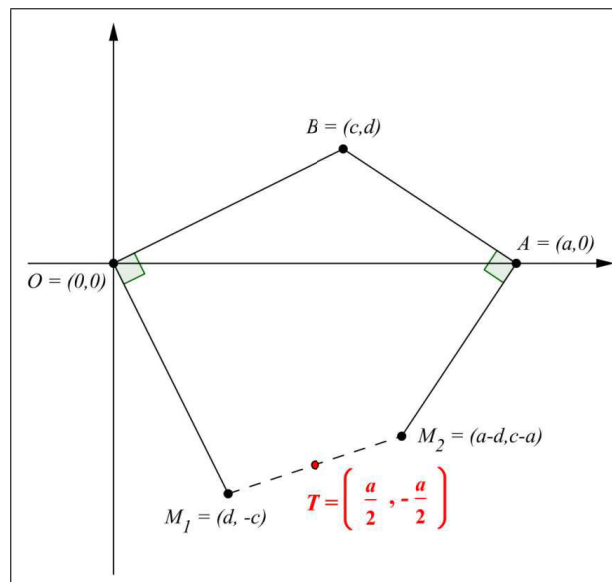


Figura 4.22: Ilha do tesouro 4.

## CAPÍTULO 5

---

### Conclusão

---

Através de tudo que pude ver nesta dissertação, lembro-me de uma frase que costumava ouvir nos tempos de graduação do professor José Luiz: "A Matemática é generosa." Esta frase mostra que podemos resolver um mesmo problema com vários conhecimentos. Nos meus estudos percebi realmente agora a importância dos números complexos e como podemos resolver problemas utilizando sua álgebra. A conclusão que qualquer pessoa tira ao ler estas páginas é que os números complexos devem ser ensinados no nível médio, pois possibilitam a revisão de assuntos já estudados e ampliam a visão de alguns conceitos. A parte histórica apresentada traz seu desenvolvimento e mostra que sua construção ao longo da história levou a novas descobertas nos campos da matemática e física e a parte geométrica nos faz retornar a geometria Euclidiana e a resolução de problemas. Muitos problemas da geometria plana podem ser resolvidos com os números complexos de maneira mais simples. Esta dissertação mostra apenas alguns pontos importantes e ela busca deixar no leitor um gosto de quero mais, até por que realmente existe muita coisa aprender sobre os números complexos e suas aplicações na geometria.

---

## Referências bibliográficas

---

Eves, H., A Introdução à história da matemática, trad Hygino domingues, Campinas, Editora da Unicamp, 1995.

Gouvêa, Fernando Q., A Matemática através dos Tempos. São Paulo, Edgard Blucher, 2<sup>o</sup> ed, 2010. 183 – 186p

Iezzi, Gelson., Fundamentos de Matemática elementar vol.6, São Paulo: Editora Atual. 7<sup>o</sup> ed, 2005.

Courant, R. e Robbins, H., O que é matemática?, Editora Ciência Moderna, 2000.

Lages, E., Wagner, E., Morgado, A. e Carvalho, P., A matemática para o ensino médio, Vol.3, 6<sup>o</sup> ed, SBM.

Hahn, L. Complex Numbers and Geometry. Washington: the Mathematical Association of America, 1994.

Dante, L.R., Matemática Contexto e aplicações, volume único, Editora Ática, 2008.