



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA  
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"  
Campus de presidente Prudente



Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)

**ALINE CLARO DE FREITAS**

***ORIGAMI: O uso como instrumento alternativo no ensino  
da geometria.***

**PRESIDENTE PRUDENTE**

**2016**

**ALINE CLARO DE FREITAS**

***ORIGAMI: O uso como instrumento alternativo no ensino da geometria.***

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, polo de Presidente Prudente.

Orientador:

**Prof Dr. José Roberto Nogueira**

**2016**

Freitas, Aline Claro de.

ORIGAMI : o uso como instrumento alternativo no ensino da geometria / Aline Claro de Freitas. -- São José do Rio Preto, 2016  
59 f. : il., gráfs.

Orientador: José Roberto Nogueira  
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Geometria – Problemas famosos - Estudo e ensino. 3. Origami. 4. Axiomas. 5. Aprendizagem. 6. Trissecção do ângulo. 7. Matemática – Metodologia. I. Nogueira, José Roberto. II. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. III. Título.

CDU – 513(07)

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE  
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto

## **TERMO DE APROVAÇÃO**

**ALINE CLARO DE FREITAS**

***ORIGAMI: O uso como instrumento alternativo no ensino da geometria.***

Dissertação aprovada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, polo de Presidente Prudente, pela seguinte banca examinadora:

Prof. Dr. José Roberto Nogueira - UNESP - Presidente Prudente  
Orientador

Prof. Dr. Enio Garbelini – UNIFADRA -Dracena

Prof. Dr. Suetônio de Almeida Meira- UNESP- Presidente Prudente

**PRESIDENTE PRUDENTE, 29 de Janeiro de 2016.**

**Dedico este trabalho ao meu esposo Rodrigo, que sempre me incentivou, foi paciente e me deu suporte em todos os momentos deste mestrado.**

## **Agradecimentos**

A realização do presente mestrado foi possível devido à colaboração de muitas pessoas que me auxiliaram durante esta jornada. Manifesto assim minha gratidão:

Primeiramente a Deus, que sempre me abençoa e está a frente do meu caminho cuidando para que tudo seja perfeito.

À fundação Capes pelo apoio financeiro.

Ao meu esposo Rodrigo, pelo apoio incondicional.

Ao meu orientador Professor Doutor José Roberto Nogueira, pelo suporte, pelas opiniões, incentivos e amizade.

À toda minha família pelo amor e compreensão.

A todo corpo docente do mestrado, pela dedicação, incentivo e excelência.

Aos colegas de curso pelo amparo e companheirismo.

À professora Meire pelo apoio na pesquisa de campo.

À professora Letícia, a minha querida irmã Juliana e minha querida prima Joyce pelo auxílio na revisão do trabalho.

## RESUMO

Frente à realidade do ensino contemporâneo que demanda a necessidade de diversificar o uso de estratégias de ensino, pretendemos propor uma abordagem, por meio de material concreto e que pode tornar-se bastante significativa no ensino da matemática. Este trabalho discute sobre a história, aplicações clássicas e utilização do *origami* em sala de aula. Após uma breve apresentação histórica sobre o *origami*, apresentamos uma abordagem axiomática deste instrumento. Dois dos três famosos problemas matemáticos gregos da antiguidade que não podem ser solucionados através da régua e compasso: trissecção do ângulo e duplicação do cubo encontram uma solução por meio das técnicas de *origami*. Além disso, apresentamos sugestões de roteiros de aulas e a atividade aplicada em sala de aula que obteve resultado satisfatório.

**Palavras-chave:** matemática, aprendizagem, geometria, *origami*, trissecção, axioma

## ABSTRACT

Faced with the reality of contemporary teaching that demands the need to diversify the use of teaching strategies, we intend to propose an approach through concrete material and can become quite significant in mathematics education. This monograph discusses about the history, classic applications and use *origami* in the classroom. After a brief historical introduction about *origami*, we present an axiomatic approach of this instrument. Two of the three famous Greek mathematical problems of antiquity that can't be solved by ruler and compass: trisection angle and doubling the cube find a solution through of *origami* techniques. In addition, we present suggestions classes scripts and the activitie applied in the classroom that obtained satisfactory result.

**Keywords:** mathematics, learning, geometry, *origami*, trisection, axiom

## LISTA DE FIGURAS

Figura 3 - 1: Axioma 1 .....	16
Figura 3 - 2: Axioma 2 .....	17
Figura 3 - 3: Axioma 3 .....	17
Figura 3 - 4: Axioma 4 .....	18
Figura 3 - 5: Axioma 5 .....	18
Figura 3 - 6: Axioma 6 .....	19
Figura 3 - 7: Axioma 7 .....	19
Figura 4 - 1:: Axioma 1 .....	20
Figura 4 - 2: Axioma 2 .....	20
Figura 4 - 3: Axioma 3 .....	21
Figura 4 - 4: Axioma 4 .....	23
Figura 4 - 5 : Desenho com régua e compasso do axioma 4 .....	24
Figura 4 - 6: Axioma 5 .....	24
Figura 4 - 7 : Parábola determinada a partir da repetição do axioma 5 .....	25
Figura 4 - 8: Axioma 6 .....	26
Figura 4 - 9: Desenvolvimento do axioma 6.....	27
Figura 4 - 10 : Axioma 7.....	27
Figura 5 - 1: Trissecção. ....	30
Figura 5 - 2: Demonstração trissecção.....	31
Figura 5 - 3: Duplicação do cubo. ....	31
Figura 5 - 4: Procedimento duplicação do cubo.....	32
Figura 5 - 5: Passos (7) e (8) duplicação do cubo. ....	33
Figura 5 - 6: Demonstração duplicação do cubo – parte 1.....	33
Figura 5 - 7: Demonstração do cubo – parte 2.....	34
Figura 6 - 1: Ângulos na circunferência.....	37
Figura 6 - 2: Triângulo.....	38
Figura 6 - 3: Soma dos ângulos internos - passo 2 e 3.....	38
Figura 6 - 4: Soma dos ângulos internos passos finais.....	38
Figura 6 - 5: Soma dos ângulos internos de um polígono.....	39
Figura 6 - 6: Passo (1) Triângulo equilátero.....	40
Figura 6 - 7: Passo (2) Triângulo equilátero.....	41
Figura 6 - 8 Passo (3) Triângulo equilátero .....	41
Figura 6 - 9 Passo (4) Triângulo equilátero .....	41
Figura 6 - 10: Pentágono – passos 1 e 2. ....	42
Figura 6 - 11: Pentágono – passos 3,4 e 5. ....	42
Figura 6 - 12 : Pentágono – passos 6 e7. ....	43
Figura 6 - 13: Construção hexágono – passo 1 , 2 e 3.....	44
Figura 6 - 14: Construção hexágono – passo 4 e 5.....	45
Figura 6 - 15: Razão áurea. ....	46
Figura 6 - 16: Procedimentos para a construção do retângulo áureo 1-3.....	47
Figura 6 - 17: Demonstração razão áurea. ....	47

<b>Figura 6 - 18: Retângulo de prata.....</b>	<b>48</b>
<b>Figura 6 - 19: Procedimentos para a construção do retângulo de prata.....</b>	<b>49</b>
<b>Figura 6 - 20: Demonstração retângulo de prata.....</b>	<b>49</b>
<b>Figura 6 - 21: Retângulo de bronze.....</b>	<b>50</b>
<b>Figura 6 - 22: Procedimentos para a construção do retângulo de bronze.....</b>	<b>50</b>
<b>Figura 6 - 23: Demonstração retângulo de bronze.....</b>	<b>51</b>

## LISTA DE GRÁFICOS

<b>Gráfico 1: Avaliação diagnóstica 7<sup>o</sup>B .....</b>	<b>53</b>
<b>Gráfico 2: Avaliação diagnóstica 7<sup>o</sup>C .....</b>	<b>53</b>
<b>Gráfico 3: Resultado avaliação final 7<sup>o</sup>B.....</b>	<b>54</b>
<b>Gráfico 4: Resultado avaliação final 7<sup>o</sup>C.....</b>	<b>55</b>
<b>Gráfico 5: Comparação de resultados 7<sup>o</sup>B.....</b>	<b>55</b>
<b>Gráfico 6: Comparação de resultados 7<sup>o</sup>C.....</b>	<b>56</b>

## SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO .....	12
2. CONTEXTO HISTÓRICO DO <i>ORIGAMI</i> .....	14
3. AXIOMAS DE HUZITA-HATORI .....	16
4. EXPLANAÇÃO ALGÉBRICA DOS AXIOMAS .....	20
5. PROBLEMAS CLÁSSICOS DA ANTIGUIDADE GREGA .....	29
5.1 TRISSECÇÃO DO ÂNGULO .....	29
5.2 DUPLICAÇÃO DO CUBO .....	31
6. ROTEIROS DE AULA. ....	36
6.1 GEOMETRIA DOS ÂNGULOS .....	36
6.2 CONSTRUÇÃO DE POLÍGONOS REGULARES .....	40
6.3 RAZÃO ÁUREA.....	45
7. PESQUISA DE CAMPO.....	52
8. CONSIDERAÇÕES FINAIS .....	58
REFERÊNCIAS.....	59

## 1 INTRODUÇÃO

O ensino de matemática tem se tornado um verdadeiro desafio. No cotidiano escolar verifica-se o baixo rendimento na disciplina e as avaliações externas comprovam o despreparo dos alunos.

Requer-se a diversificação de metodologias na prática docente, projetando um cenário mais atraente e motivador ao aluno e tornando possível o desenvolvimento de habilidades e competências.

Neste contexto é que uma nova abordagem da geometria pode ser de grande valia. Aqui será proposto um recurso alternativo com o intuito de trazer significado não só à geometria, mas à matemática como um todo: o *origami*.

Em verdade, por muito tempo o ensino da geometria desempenhou, tão somente, um papel secundário no ensino da matemática. Seu resgate poderá minimizar as deficiências encontradas e o uso do *origami*, neste sentido, se mostrar bastante profícuo.

Aliás, é sabido que a utilização de recursos concretos e lúdicos no ensino da matemática pode trazer ganhos na significação dos conteúdos, permitindo que o aluno faça a apropriação do conhecimento e tenha uma aprendizagem mais eficaz.

Além disso, uma situação na qual seja possível manipular o objeto da aprendizagem a partir de uma simples folha de papel dobrada é bem interessante, sobretudo quando se tem em mente sua viabilidade, muito vantajosa.

Apesar de ser uma técnica conhecida há mais de dois milênios, é pouco difundida como recurso metodológico de ensino. No Brasil é também chamada de dobradura e usualmente tratada apenas como forma de arte ou diversão.

Todavia tal propensão não tem razão de ser. Como bem pontuou Robert J. Lang (2010), as figuras de *origami* possuem uma beleza estética que agrada tanto ao matemático como o leigo. Parte do seu apelo é a simplicidade do conceito, onde é possível fazer desde construções pouco elaboradas até as mais complexas por meio da definição de uma sequência de dobragem.

Este campo é rico e variado, com conexões nos diversos campos da matemática como: divisão binária, construção de frações ou proporções racionais, determinação de frações irracionais, construções geométricas diversas, entre outras.

Estimular a inserção dessa metodologia, ainda pouco utilizada nos processos de ensino e aprendizagem, mas que apresenta um apelo motivacional importante

para o dia-a-dia escolar certamente concorrerá para o aprimoramento do ensino da matemática. Este é o fim desejado neste projeto e para que sirva de conveniente ferramenta, propícia ao desenvolvimento em sala de aula, o trabalho está estruturado como segue:

O capítulo 2 esboça o histórico do *origami*, explicando a etimologia da palavra, bem como os registros e curiosidades de sua utilização.

O capítulo 3 apresenta os axiomas de Huzita-Hatori que fundamentam a geometria do *Origami*. Em seguida, o capítulo 4 estabelece comparação entre estes axiomas e a geometria euclidiana e aborda uma explanação algébrica destas propriedades.

O capítulo 5 traz dois dos três problemas clássicos da antiguidade grega, famosos por não apresentarem construção com a régua e o compasso, entretanto, passíveis de resolução com auxílio do *origami*.

No capítulo 6 são propostos roteiros de aula nos quais a utilização da dobradura seja oportuna.

No capítulo 7 é avaliado um estudo de caso, realizado com alunos do 7º ano, em que são analisados os resultados prévios e posteriores à aplicação de algumas atividades com o recurso do *origami* em sala de aula.

Finalmente, o capítulo 8 traz uma reflexão dos resultados obtidos e tece as considerações finais.

## 2 CONTEXTO HISTÓRICO DO ORIGAMI

Acredita-se que o *origami* seja criação japonesa. Apesar de o papel ter sido desenvolvido na China, os *origamis* mais antigos encontrados datam do século VI d.C., mesmo período em que o papel chegou ao Japão, trazido pelos monges budistas.

Ademais, a própria palavra “*origami*” deriva de duas palavras japonesas. A expressão *Ori* significa dobrar e *Kami* possui dois significados: papel e deus (entretanto, cada qual representado por ideogramas distintos da simbologia japonesa). *Ori* e *Kami* formam assim a palavra *origami* que designa precisamente a arte de criar figuras diversas utilizando-se apenas papéis e dobraduras, sem cortá-los ou colá-los. (FREITAS, 2013)

Inicialmente, a arte foi dominada pelos nobres em razão do custo elevado da matéria prima. De fato, o papel era tido como artigo de luxo e o *origami* utilizado para adornar cerimoniais religiosos.

Após o papel tornar-se mais popular, a técnica se difundiu e já em 1876 integrava o currículo escolar japonês. Isso porque o *origami* passou a compor parte relevante na cultura japonesa. Era possível reconhecer as diferentes classes sociais e profissões, por exemplo, a partir da constatação de quais dobraduras os indivíduos possuíam.

A disseminação da técnica culminou por aperfeiçoá-la e sua prática alcançou o mundo. No Brasil ocorreu mais tardiamente e era privilégio das famílias portuguesas mais abastadas.

O origami ganhou ainda mais notoriedade com a lenda do pássaro grou, ave sagrada no Japão. A lenda dizia que o pássaro viveria mil anos e qualquer pessoa que dobrasse mil pássaros de papel teria seu desejo atendido. Uma menina, chamada Sadako, sofria com sequelas deixadas pela bomba atômica de Hiroshima, e ao conhecer essa lenda, iniciou sua jornada na esperança de sobreviver, mas acabou falecendo antes de completar os mil pássaros. Sua obstinação mesmo num estágio avançado da doença inspirou milhares de crianças a arrecadarem dinheiro para erigir um monumento em sua homenagem. Num gesto de protesto e de apelo pela paz mundial, foram gravadas as seguintes palavras: “Este é o nosso grito. Esta é a nossa prece. Construir a paz no mundo que é nosso”. (OLIVEIRA, 2004)

O Tsuru (nome dado ao pássaro grou) é, sem dúvida, a figura mais conhecida

e nos remete imediatamente ao *origami*. Todos os anos, no dia 6 de agosto, dia em que Hiroshima fora bombardeada, é lembrado como o “Dia da Paz”. Crianças de toda parte do mundo enviam Tsurus para propagar a mensagem insculpida no monumento.

Tal como a ave sagrada se consubstanciou em um símbolo da paz, a prática do *origami* adquiriu no Japão, ao menos *a priori*, uma conotação muito mais artística e filosófica do que científica. Não obstante o Japão ser considerado o berço do *origami*, foi alemão Friedrich Froebel o pioneiro em desenvolver um método pedagógico. Posteriormente, o inglês Arthur H. Stone registrou os flexágonos como exemplo de aplicação do *origami*, permitindo de forma recreativa verificar conceitos matemáticos.

Humiaki Huzita e Koshiro Hatori destacaram-se nos estudos que enumeravam as possíveis dobragens em *origami* e as combinações entre elas sendo esta a primeira descrição formal.

### 3 AXIOMAS DE HUZITA-HATORI

Humiaki Huzita se destacou quando apresentou seis operações para definir uma dobragem com um único vinco que, por si só, alinha várias combinações de pontos e retas já existentes. Estas operações ficaram conhecidas como axiomas de Huzita e fornecem a primeira descrição formal para as construções geométricas por *origami*. Anos mais tarde, em 2002, Koshiro Hatori apresentou uma sétima dobragem que completa a lista dos sete axiomas de Huzita-Hatori. Após a descoberta do sétimo axioma surge a dúvida sobre a completude da lista, que é encerrada, em 2003, por Robert Lang após a publicação de um estudo que demonstra a sua convicção. (MONTEIRO, 2008).

Os axiomas de Huzita-Hatori, retirados de Cavacami e Furuya (2010), são os descritos a seguir:

#### Axioma 1:

Dados dois pontos,  $P_1$  e  $P_2$ , existe apenas uma dobra que passa por eles.

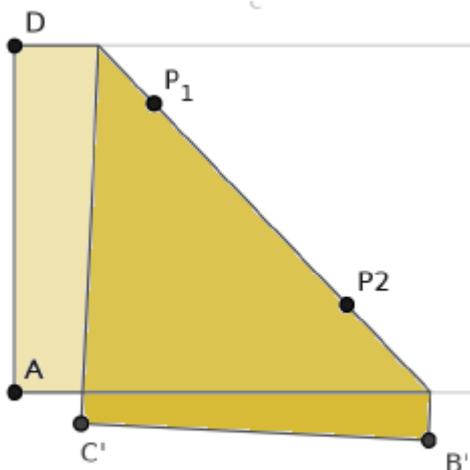


Figura 3 - 1: Axioma 1

Fonte: CAVACAMI e FURUYA, 2010, p. 3

#### Axioma 2:

Dados dois pontos,  $P_1$  e  $P_2$ , há uma dobragem que os torna coincidentes.

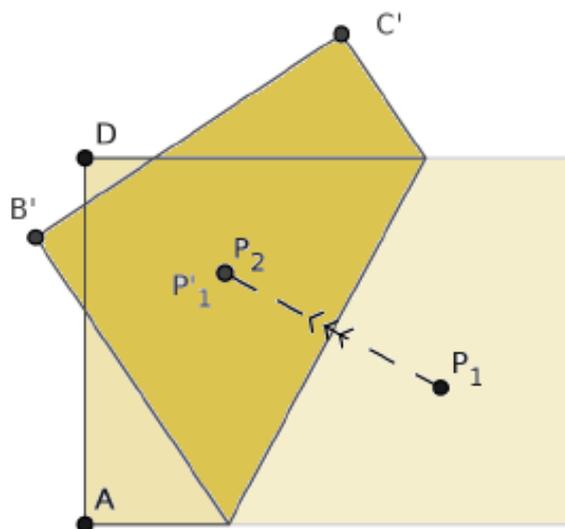


Figura 3 - 2: Axioma 2

Fonte: CAVACAMI e FURUYA, 2010, p. 3

**Axioma 3:**

Dadas duas retas,  $r_1$  e  $r_2$ , há uma dobra que as torna coincidentes.

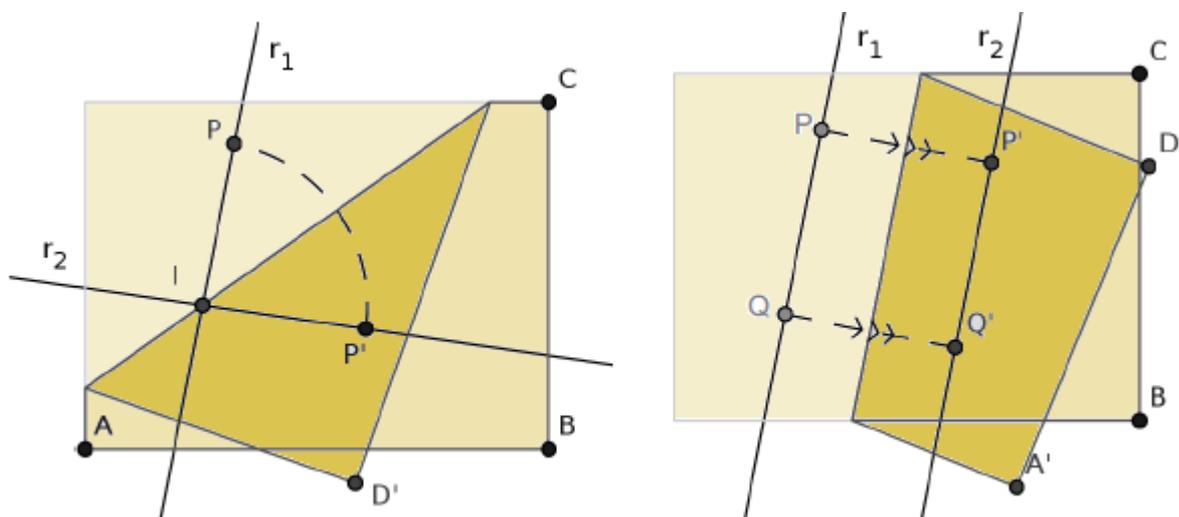


Figura 3 - 3: Axioma 3

Fonte: CAVACAMI e FURUYA, 2010, p. 4

**Axioma 4:**

Dados um ponto  $P$  e uma reta  $r$ , há uma dobra perpendicular a  $r$  que passa por  $P$ .

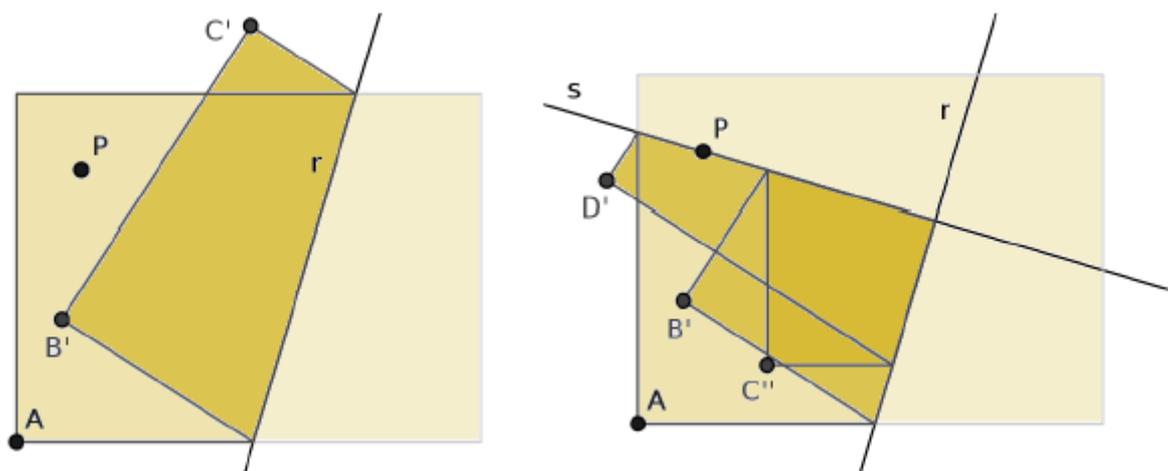


Figura 3 - 4: Axioma 4

Fonte: CAVACAMI e FURUYA, 2010, p. 4

#### Axioma 5:

Dados dois pontos,  $P_1$  e  $P_2$ , e uma reta  $r_1$ , se a distância de  $P_1$  a  $P_2$  for igual ou superior à distância de  $P_2$  a  $r_1$ , há uma dobra que faz incidir  $P_1$  em  $r_1$  e que passa por  $P_2$ .

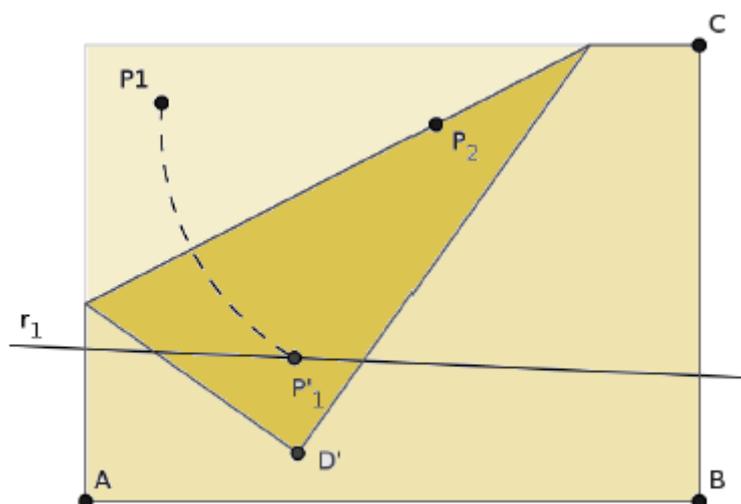


Figura 3 - 5: Axioma 5

Fonte: CAVACAMI e FURUYA, 2010, p. 4

#### Axioma 6:

Dados dois pontos,  $P_1$  e  $P_2$ , e duas retas,  $r_1$  e  $r_2$ , se as retas não forem paralelas e se a distância entre as retas não for superior à distância entre os pontos,

há uma dobragem que faz incidir  $P_1$  em  $r_1$  e  $P_2$  em  $r_2$ .

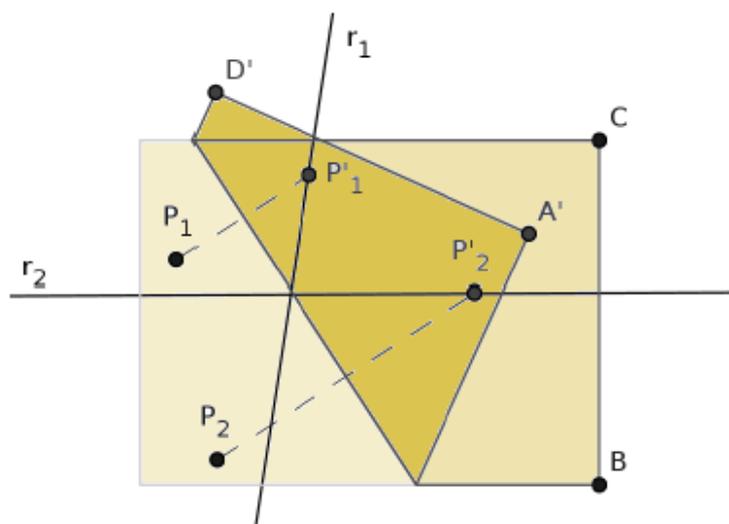


Figura 3 - 6: Axioma 6

Fonte: CAVACAMI e FURUYA, 2010, p. 5

### Axioma 7:

Dado um ponto,  $P$ , e duas retas,  $r_1$  e  $r_2$ , se as retas não forem paralelas, há uma dobragem que faz incidir  $P$  em  $r_1$  e é perpendicular a  $r_2$ .

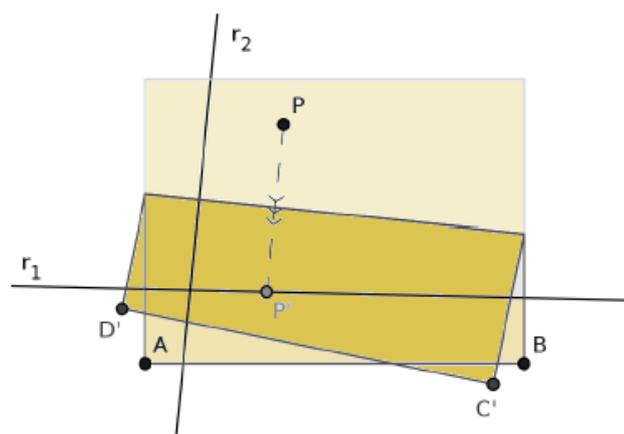


Figura 3 - 7: Axioma 7

Fonte: CAVACAMI e FURUYA, 2010, p. 5

#### 4 EXPLANAÇÃO ALGÉBRICA DOS AXIOMAS

A explicação analítica dos axiomas foi baseada em Monteiro (2008). Nesta análise será considerado um referencial ortonormado na folha da dobradura.

##### Axioma 1: Dobragem única por dois pontos

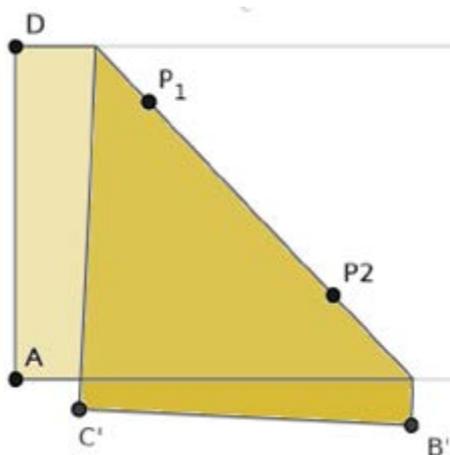


Figura 4 - 1:: Axioma 1

Fonte: CAVACAMI e FURUYA, 2010, p. 3

Este axioma é equivalente ao 1º axioma de Euclides. Na geometria Euclidiana, podemos tomar como enunciado: por dois pontos  $P_1$  e  $P_2$  podemos traçar uma única reta. Tomando  $P_1 = (x_1, y_1)$  e  $P_2 = (x_2, y_2)$ , tal reta pode ser descrita por

$$y = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}x + b. \text{ Onde: } m = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)} \text{ e } b = y_1 - \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}x_1$$

##### Axioma 2 : Dobragem única por dois pontos coincidentes

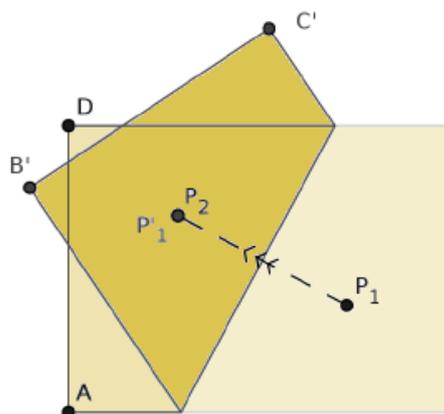


Figura 4 - 2: Axioma 2

Fonte: CAVACAMI e FURUYA, 2010, p. 3

Na geometria Euclidiana poderíamos enunciar: Dados dois pontos distintos  $P_1$  e  $P_2$  existe uma única reta (dobra) que é equidistante de  $P_1$  e  $P_2$ , ou seja, a mediatriz do segmento  $P_1P_2$ . Ou ainda, é a reta perpendicular que passa pelo ponto médio do segmento  $P_1P_2$ .

Primeiramente determinamos uma reta perpendicular àquela que é definida pelos dois pontos dados  $P_1 = (x_1, y_1)$  e  $P_2 = (x_2, y_2)$ . Encontramos o ponto médio do segmento  $P_1P_2$  que é dado por:  $M = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$ . Logo queremos uma reta perpendicular à reta que passa por  $P_1$  e  $P_2$  e que contém o ponto  $M$ . Assim, tal reta pode ser descrita por  $y = mx + b$ . Onde  $m = -\frac{(x_2-x_1)}{(y_2-y_1)}$  e  $b = \frac{y_1+y_2}{2} - m \frac{x_1+x_2}{2}$ .

### Axioma 3 Dobragem única que torna duas retas coincidentes

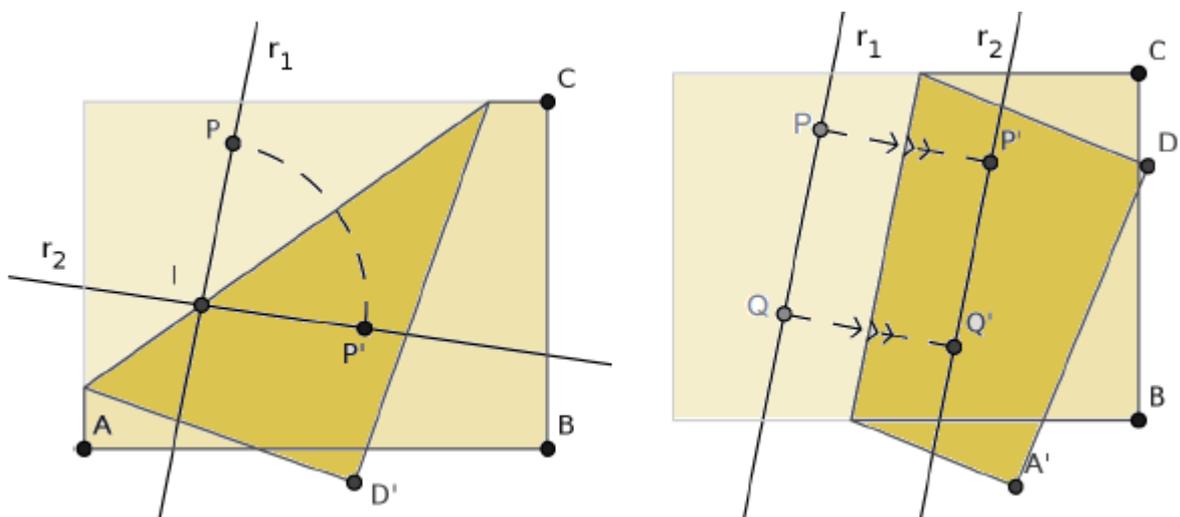


Figura 4 - 3: Axioma 3

Fonte: CAVACAMI e FURUYA, 2010, p. 4

Neste axioma devemos analisar dois casos.

i) O primeiro onde as duas retas são concorrentes. Desta forma, comparando com a geometria Euclidiana, estamos afirmando que é possível construir a reta bissetriz do ângulo determinado pela intersecção entre duas retas.

Para encontrar a bissecção do ângulo, é necessário encontrar o ponto de intersecção das duas retas, que chamaremos de  $P_0$ , e que é solução do sistema:

$$\begin{cases} y = m_1x + b_1 \\ y = m_2x + b_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m_2x + b_2 = m_1x + b_1 \\ y = m_2x + b_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m_2 - m_1)x = b_1 - b_2 \\ y = m_2x + b_2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{b_1 - b_2}{m_2 - m_1} \\ y = m_2 \frac{b_1 - b_2}{m_2 - m_1} + b_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{b_1 - b_2}{m_2 - m_1} \\ y = \frac{m_2 b_1 - m_2 b_2 + m_2 b_2 + m_1 b_2}{m_2 - m_1} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{b_1 - b_2}{m_2 - m_1} \\ y = \frac{m_2 b_1 - m_1 b_2}{m_2 - m_1} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\text{E assim, } P_0 = (x_0, y_0) = \left( \frac{b_1 - b_2}{m_2 - m_1}, \frac{m_2 b_1 - m_1 b_2}{m_2 - m_1} \right)$$

Considere, agora, uma circunferência não degenerada de raio  $r$  e centro em  $P_0$ , dada pela equação:  $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ . Esta equação irá interceptar cada uma das retas  $r$  e  $s$  em dois pontos distintos.

Sejam  $P_1$  e  $P_2$  os pontos de intersecção com  $r$ , e  $P_3$  e  $P_4$  os pontos de intersecção com  $s$ . Podemos encontrar o ponto médio dos segmentos  $P_1 P_2$  e  $P_3 P_4$ . Encontrando tais pontos, podemos proceder como no axioma 1, e encontraremos a reta (bissetriz) procurada.

**ii)** O segundo caso onde as duas retas são paralelas. Queremos encontrar a reta (coplanar) equidistante às retas dadas.

Sejam  $r$  e  $s$  as referidas retas. Onde  $r: y = m_1 x + b_1$  e  $s: y = m_2 x + b_2$

Como  $r$  e  $s$  são paralelas, então  $m_1 = m_2$ , Seja  $P_1 = (x_1, y_1)$  pertencente a  $r$ . Se o coeficiente angular das retas for nulo, então, neste caso, as retas serão da forma:  $r: y = b_1$  e  $s: b_2$ . E também,  $P_1 = (x_1, b_1)$ . E, desta forma, a reta perpendicular a  $r$  que passa por  $P_1$  é dada por  $x = x_1$ ,  $P_2 = (x_1, b_2)$ . O ponto de intersecção com a reta  $s$ . E assim, basta proceder como o axioma anterior.

Se  $r$  e  $s$  forem coincidentes, com coeficiente angular não nulo, teremos que a perpendicular à reta  $r$  é dada pela equação:

$$y = -\frac{1}{m_1} x + \left( \frac{1}{m_1} x_1 + y_1 \right)$$

O ponto que pertence à reta anterior e a reta  $s$  pode ser encontrado resolvendo o seguinte sistema:

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{m_1} x + \left( \frac{1}{m_1} x_1 + y_1 \right) \\ y = m_2 x + b_2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m_2x + b_2 = -\frac{1}{m_1}x + \left(\frac{1}{m_1}x_1 + y_1\right) \\ y = m_2x + b_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(m_2 + \frac{1}{m_1}\right)x = \frac{1}{m_1}x_1 + y_1 - b_2 \\ y = m_2x + b_2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\frac{1}{m_1}x_1 + y_1 - b_2}{m_2 + \frac{1}{m_1}} \\ y = m_2x + b_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{x_1 + y_1m_1 - b_2m_1}{m_1m_2 + 1} \\ y = m_2 \frac{x_1 + y_1m_1 - b_2m_1}{m_1m_2 + 1} + b_2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{x_1 + y_1m_1 - b_2m_1}{m_1m_2 + 1} \\ y = \frac{x_1m_2 + y_1m_1m_2 - b_2m_1m_2 + b_2m_1m_2 + b_2}{m_1m_2 + 1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{x_1 + y_1m_1 - b_2m_1}{m_1m_2 + 1} \\ y = \frac{x_1m_2 + y_1m_1m_2 + b_2}{m_1m_2 + 1} \end{cases}$$

Portanto, o ponto  $P_2$  procurado é dado por

$$P_2 = \left( \frac{x_1 + y_1m_1 - b_2m_1}{m_1m_2 + 1}, \frac{x_1m_2 + y_1m_1m_2 + b_2}{m_1m_2 + 1} \right)$$

E, desta forma, basta realizar o procedimento como feito no axioma anterior.

**Axioma 4: Dobragem única, perpendicular a uma reta, que passa por um ponto**

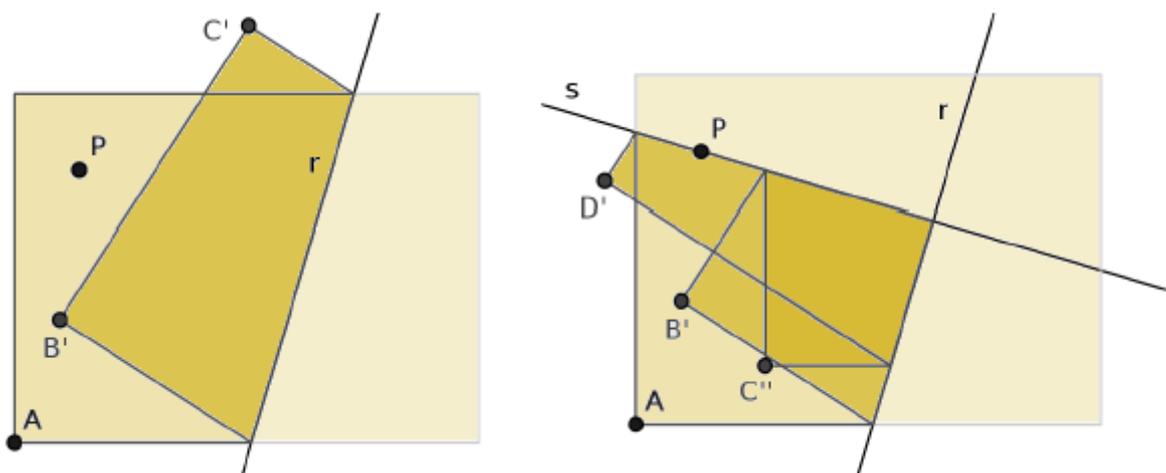


Figura 4 - 4: Axioma 4

Fonte: CAVACAMI e FURUYA, 2010, p. 4

Na geometria Euclidiana poderíamos enunciar da seguinte forma: dado uma reta e um ponto fora dela é possível determinar uma única reta que passe pelo ponto e seja perpendicular a reta dada.

Seja a reta  $r: y = mx + b$  e um ponto  $P$  fora da reta. Tomemos uma circunferência de centro em  $P$  e raio maior que a distância de  $P$  à reta. Desta forma,

determinaremos dois pontos de intersecção entre a circunferência e a reta  $r$ . Encontra-se o ponto médio ( $M$ ) do segmento formado por estes dois pontos. Assim, basta realizar o mesmo procedimento do axioma 1, para determinar a reta que passa por  $M$  e  $P$ .

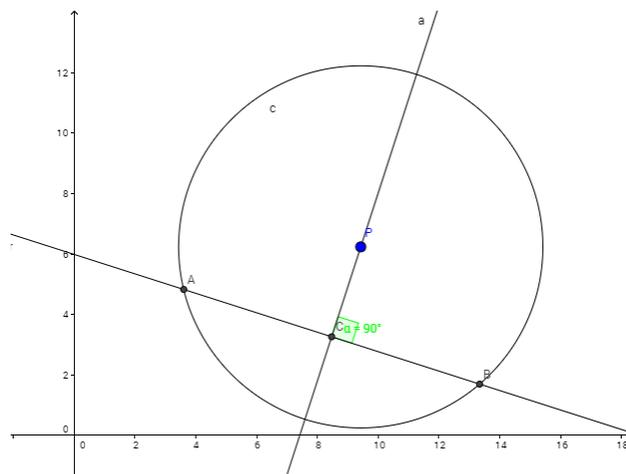


Figura 4 - 5 : Desenho com régua e compasso do axioma 4.

Fonte: Autoria própria

**Axioma 5: Dobragem única que faz um ponto incidir em uma reta, passando por outro ponto**

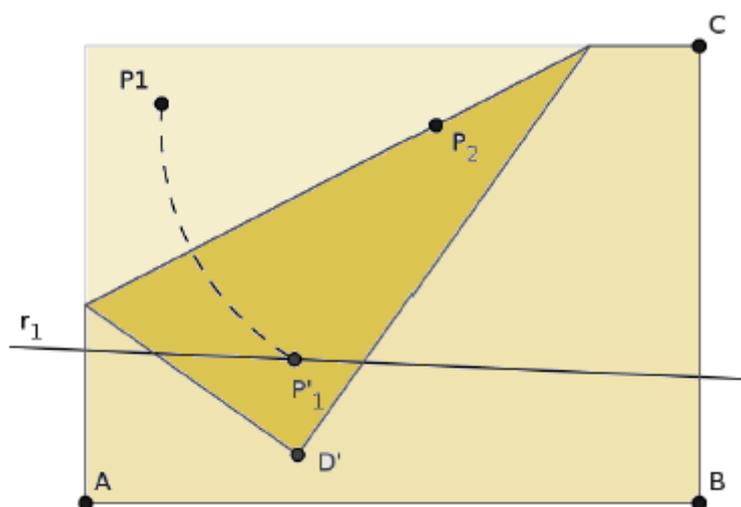


Figura 4 - 6: Axioma 5

Fonte: CAVACAMI e FURUYA, 2010, p. 4

Na geometria Euclidiana: dado um ponto  $P_1 = (x_1, y_1)$  localizado na reta  $l: y = mx + b$  e um ponto  $P_2 = (x_2, y_2)$  fora da reta é possível encontrar a mediatriz

do segmento  $P_1P_2$ .

Queremos encontrar a intersecção da reta  $l$  com a circunferência de centro  $P_2$  e raio  $P_1P_2$ .

Calculando a intersecção teremos:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} y = mx + b \\ (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 = r^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = mx + b \\ (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 = r^2 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} y = mx + b \\ ((1 + m^2)x^2 + (2mb - 2x_2 - 2my_2)x + (x_2^2 + b^2 - 2by_2 + y_2^2 - r^2) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Assim, temos que, dependendo do valor do discriminante, a equação pode ter nenhuma, uma ou duas soluções.

Quando o discriminante é menor do que zero, significa que a distância entre  $P_1$  e  $P_2$  é menor do que a distância entre  $P_2$  e a reta. Logo não é possível realizar tal dobradura. Quando o discriminante é igual a zero, as distâncias citadas anteriormente são iguais. Quando o discriminante é positivo, então a distância entre  $P_1$  e  $P_2$  é maior do que a distância entre  $P_2$  e a reta.

Neste caso, existem dois pontos de intersecção entre a circunferência e a reta  $l$ , digamos  $Q_1$  e  $Q_2$ . As soluções do problema serão:

- dobragem perpendicular a  $P_1Q_1$  e que passa no seu ponto médio (que vai fazer coincidir os pontos  $P_1$  e  $Q_1$ , passando por  $P_2$ );
- dobragem perpendicular a  $P_1Q_2$  e que passa no seu ponto médio (que vai fazer coincidir os pontos  $P_1$  e  $Q_2$ , passando por  $P_2$ ).

Em ambos os casos, a dobragem é efetuada pelo método descrito no axioma 1, utilizando para tal o ponto médio de cada um dos segmentos referidos e o ponto  $P_2$ .

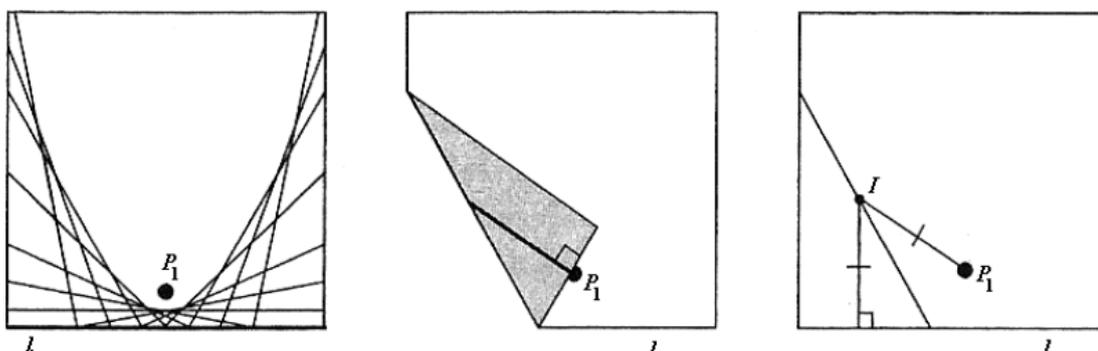


Figura 4 - 7 : Parábola determinada a partir da repetição do axioma 5.

Na prática, neste axioma determinamos a reta tangente à parábola de foco  $P_1$  e diretriz  $l$ , que passa pelo ponto  $P_2$ .

**Axioma 6: Dobra única que faz dois pontos incidir em duas retas distintas.**

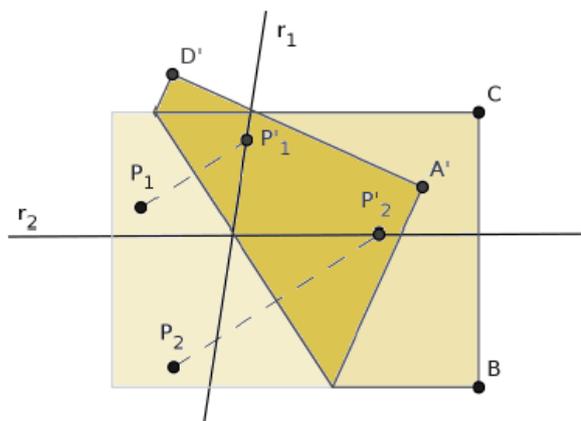


Figura 4 - 8: Axioma 6

Fonte: CAVACAMI e FURUYA, 2010, p. 5

Este axioma é equivalente a encontrar uma reta tangente a duas parábolas distintas.

Seja os pontos  $P_1$  e  $P_2$  e as retas  $r_1$  e  $r_2$ . deseja-se determinar uma dobragem que faça incidir  $P_1$  em  $r_1$  e  $P_2$  em  $r_2$ . Como foi visto no axioma 5, queremos uma reta tangente à parábola de centro  $P_1$  e diretriz  $r_1$ . E esta reta também é tangente à parábola de centro  $P_2$  e diretriz  $r_2$ . Este procedimento é equivalente a resolver uma equação do terceiro grau.

Vamos considerar, sem perda de generalidade,  $r: y = -1$  e  $P_1 = (0,1)$ . Seja  $P_1' = (t, -1)$  o ponto em que  $P_1$  incide na reta  $r_1$  por meio da dobradura.

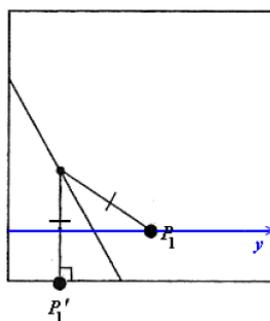


Figura 4 - 9: Desenvolvimento do axioma 6

Fonte: Monteiro, 2008, p19

Desta forma, a reta encontrada é a mediatriz do segmento  $P_1P_1'$ . Pela construção a reta  $r$  formada do vinco proveniente da dobragem e o segmento  $P_1P_1'$  são perpendiculares.

As coordenadas de do ponto médio de  $P_1P_1'$  são dadas por:  $\left(\frac{0+t}{2}, \frac{1-1}{2}\right) = \left(\frac{t}{2}, 0\right)$ . Deste modo, a equação da reta  $r$  é dada por:  $y = \frac{1}{\frac{-1-1}{t-0}}\left(x - \frac{t}{2}\right) \Leftrightarrow y = \frac{t}{2}x - \frac{t^2}{4}$ . Por definição da reta  $r$ , temos que o ponto médio ( $M$ ) de  $P_2P_2'$  pertence à reta  $r$ . Tomemos  $P_2(a, b)$  e  $P_2' = (x, y)$ , onde  $P_2'$  é o ponto que incide  $P_2$  através da dobra  $l_2$ . As coordenadas de  $M$  são dadas por:  $M = \left(\frac{x+a}{2}, \frac{y+b}{2}\right)$ . Substituindo na equação de  $r$  (reta do vinco) termos:  $\frac{y+b}{2} = \frac{t}{2} \frac{x+a}{2} - \frac{t^2}{4}$

E como a reta é tangente às duas parábolas, os declives de  $P_1P_1'$  e  $P_2P_2'$  são iguais, e assim:  $-\frac{2}{t} = \frac{y-b}{x-a}$ . Substituindo na equação anterior:

$$\frac{y+b}{2} = -\frac{x-a}{y-b} \frac{x+a}{2} - \frac{(x-a)^2}{(y-b)^2} \Rightarrow (y+b)(y-b)^2 = -(x^2 - a^2)(y-b) - 2(x-a)^2$$

Trata-se de uma equação cúbica, donde poderá haver apenas uma solução ou o problema será impossível. A equação não terá solução caso as duas retas iniciais forem paralelas ou se a distância entre as duas retas for superior à distância entre os dois pontos.

**Axioma 7: Dobragem única que faz um ponto incidir em uma reta, através de uma dobragem perpendicular a outra reta.**

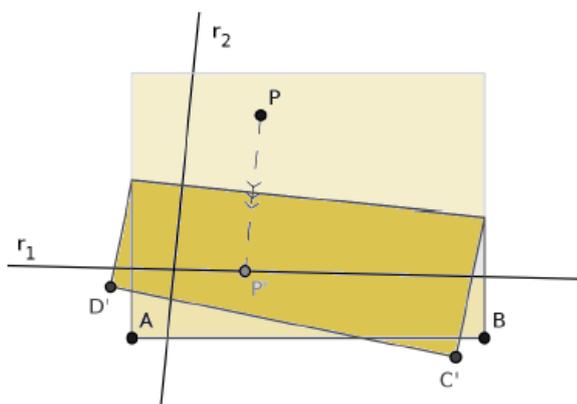


Figura 4 - 10 : Axioma 7

Fonte: CAVACAMI e FURUYA, 2010, p. 5

Considere  $P = (x_0, y_0)$  e as retas  $r_1: y = m_1x + b_1$  e  $r_2: y = m_2x + b_2$ . Queremos determinar uma dobra que faça  $P$  incidir em  $r_1$  e que também seja perpendicular a  $r_2$ .

Observe que esse problema tem solução apenas se as retas não forem paralelas.

Tomemos então a reta  $r$  paralela à  $r_2$  e que contém  $P$ . A expressão desta reta pode ser dada por:  $r: y = m_2x + (y_0 - m_2x_0)$

Quando as retas  $r$  e  $l_1$  se interceptam teremos:

$$\begin{aligned} \begin{cases} y = m_1x + b_1 \\ y = m_2x + (y_0 - m_2x_0) \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y = m_1x + b_1 \\ m_1x + b_1 = m_2x + (y_0 - m_2x_0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = m_1x + b_1 \\ x = \frac{y_0 - m_2x_0 - b_1}{m_1 - m_2} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = m_1 \frac{y_0 - m_2x_0 - b_1}{m_1 - m_2} + b_1 \\ x = \frac{y_0 - m_2x_0 - b_1}{m_1 - m_2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{m_1y_0 - m_1m_2x_0 - m_2b_1}{m_1 - m_2} \\ x = \frac{y_0 - m_2x_0 - b_1}{m_1 - m_2} \end{cases} \end{aligned}$$

Assim as retas se interceptam no ponto:

$$\left( \frac{y_0 - m_2x_0 - b_1}{m_1 - m_2}, \frac{m_1y_0 - m_1m_2x_0 - m_2b_1}{m_1 - m_2} \right)$$

## 5 PROBLEMAS CLÁSSICOS DA ANTIGUIDADE GREGA

Três importantes problemas são conhecidos como “Os três problemas clássicos da antiguidade grega”. Segundo Howard Eves (2011), a importância destes problemas é que não podem ser resolvidos, a não ser aproximadamente, com régua e compasso não marcados, embora sirvam para a resolução de muitos outros problemas de construção. Além disso, a busca pela solução destes problemas possibilitou inúmeras descobertas matemáticas em diversas áreas como: as secções cônicas, muitas curvas cúbicas e quárticas e várias curvas transcendentais, o desenvolvimento de partes da teoria das equações ligadas a domínios de racionalidade, números algébricos e teoria de grupos.

Os problemas consistem em fazer construções usando compasso e régua não marcados, sendo descritos a seguir:

- Duplicação do cubo ou problema de construir o lado de um cubo cujo volume é o dobro de um cubo dado.
- Trissecção do ângulo ou problema de dividir um ângulo arbitrário dado em três partes iguais.
- Quadratura do círculo ou problema de construir um quadrado com área igual à de um círculo dado.

Uma curiosidade é que apesar da impossibilidade de resolução destes problemas já ter sido demonstrada em 1837, há várias pessoas no mundo que ainda tentam provar que é possível dividir o ângulo em três partes.

Todo ano os jornais de matemática e os membros da classe dos professores de matemática do país recebem muitas comunicações dos “trissecionadores de ângulos” e não raro se lê em jornais que alguém finalmente resolveu o evasivo problema. Esse é, certamente, dos problemas clássicos, o mais fácil de compreender e, como a bissecção de um ângulo é tão fácil, é natural que cause espanto o fato de que a trissecção não seja igualmente fácil. (EVES, 2011, p.136-137)

### 5.1 TRISSECÇÃO DO ÂNGULO

O problema de dividir um ângulo arbitrário em  $n$  partes iguais era de grande interesse dos gregos, pois através deste recurso poderia ser construído um polígono regular de  $n$  lados.

Tal problema pode ser solucionado através do *origami*. Utilizando uma folha de papel quadrada de dimensão qualquer, apresentamos um método para

trisseccionar um ângulo agudo. Para casos de ângulos obtusos, basta aplicar a técnica apenas no ângulo excedente a  $90^\circ$  e somá-lo à trisseccção do restante.

### Resolução:

Para encontrar a trisseccção, basta seguir a rotina da Figura 5.1:

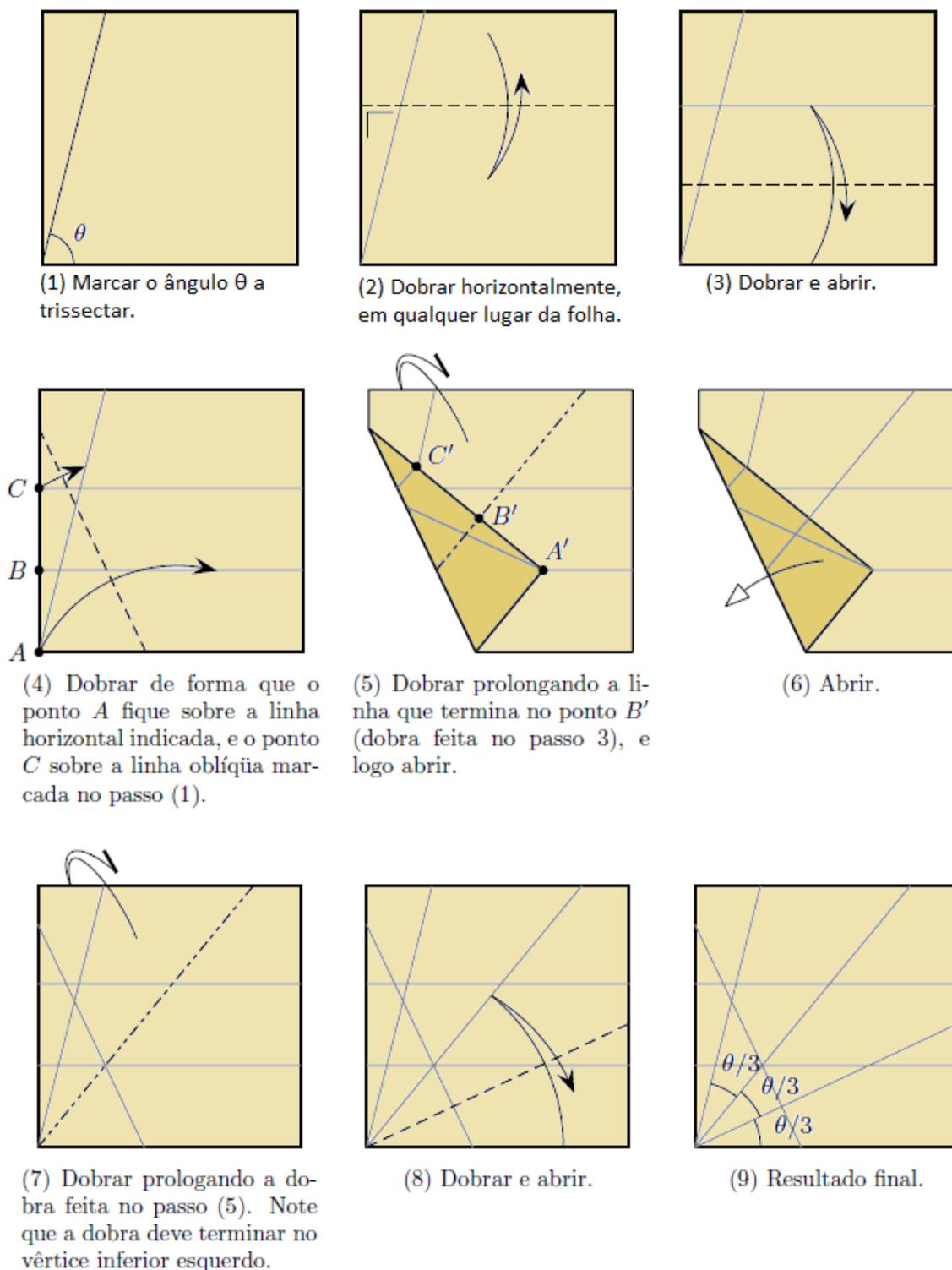


Figura 5 - 1: Trisseccção.

O passo que não pode ser realizado pela régua e compasso é o de item 4 que é dado pelo axioma 6 de Huzita.

**Demonstração:**

Na figura abaixo foi reproduzida o resultado final juntamente com a dobra do passo (4).

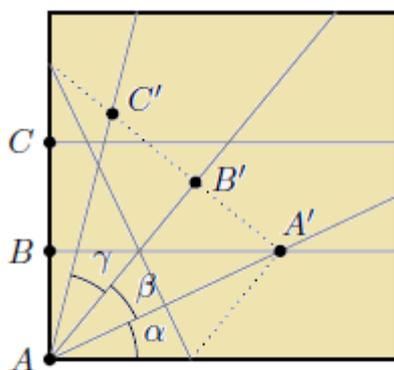


Figura 5 - 2: Demonstração trisseção.

Fonte: LUCERO, 2006a, p.2

Queremos mostrar que  $\alpha = \beta = \gamma$ .

Da dobradura (8) sabemos que  $\alpha = \beta$ .

Além disso, os triângulos  $AB'A'$  e  $AB'C'$  são congruentes. De fato: Como  $AB = BC$  da dobra (3) resulta que  $B'A' = B'C'$ ; da dobra (5) temos que  $AB'$  é perpendicular a  $AC'$ .

Assim, temos que  $\beta = \gamma$

## 5.2 DUPLICAÇÃO DO CUBO

Este é mais um dos problemas clássicos.

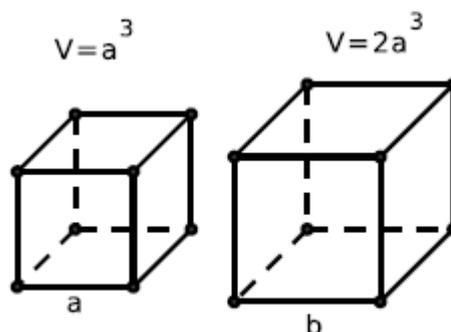
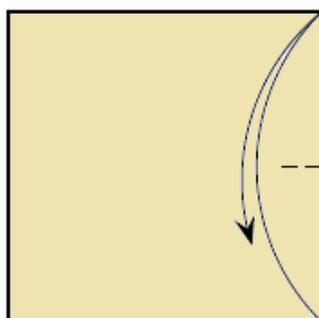


Figura 5 - 3: Duplicação do cubo.  
Fonte: CAVACAMI e FURUYA, 2009, P.26

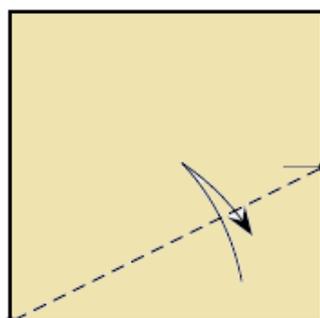
Conta Eratóstenes que, certa vez na antiga Grécia, os habitantes da ilha de Delos perguntaram ao oráculo de Apolo o que fazer para combater uma peste que assolava o povo. A resposta do oráculo foi que o altar de Apolo, de forma cúbica, devia ser duplicado. Assim, teria nascido o problema geométrico da duplicação do cubo, também conhecido como “problema deliano, que se tornou um dos problemas clássicos da Antiguidade.” (BOYCE, 1996; HEATH 1981 apud LUCERO, 2006, p.1).

Este problema é mais um exemplo que não é possível de ser solucionado por régua e compasso não marcados, mas é passível de solução através do origami. É claro que o problema se reduz a encontrar a medida de  $\sqrt[3]{2}$ .

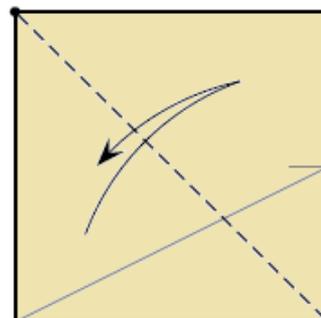
### Resolução:



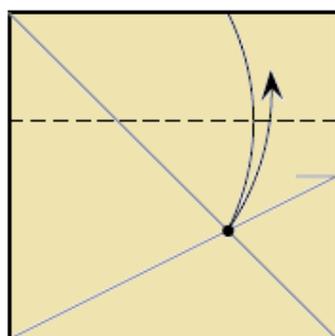
(1) Marcar o ponto médio na borda direita.



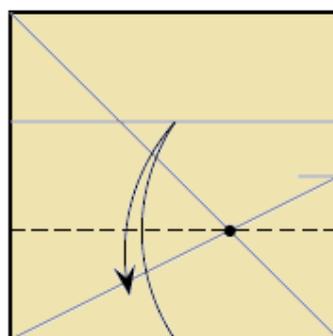
(2) Dobrar e abrir.



(3) Dobrar e abrir.



(4) Dobrar horizontalmente, de forma que a borda superior toque a intersecção das linhas de dobrado anteriores, e abrir.



(5) Dobrar horizontalmente, de forma que a borda inferior toque a linha de dobrado anterior, e abrir.



(6) As linhas de dobrado horizontais dividem a folha em três partes iguais.

Figura 5 - 4: Procedimento duplicação do cubo.

Fonte: LUCERO,2006b,p. 2

Algumas linhas da dobradura não relevantes foram eliminadas, e finalmente encontramos  $\sqrt[3]{2}$

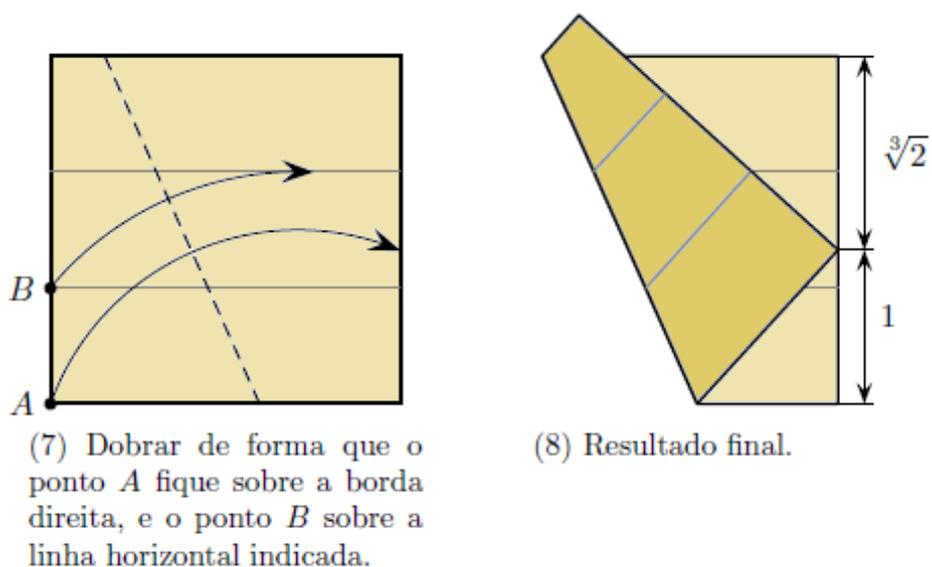


Figura 5 - 5: Passos (7) e (8) duplicação do cubo.

Fonte: LUCERO,2006b,p. 2

A dobra (7) é a mesma utilizada trisseção do ângulo e que é dada pelo Axioma 6 de Huzita.

**Demonstração:**

A demonstração está de acordo com Lucero (pag 3, 2006 )

Os passos de (1) a (6), dividem o quadrado em três partes iguais.

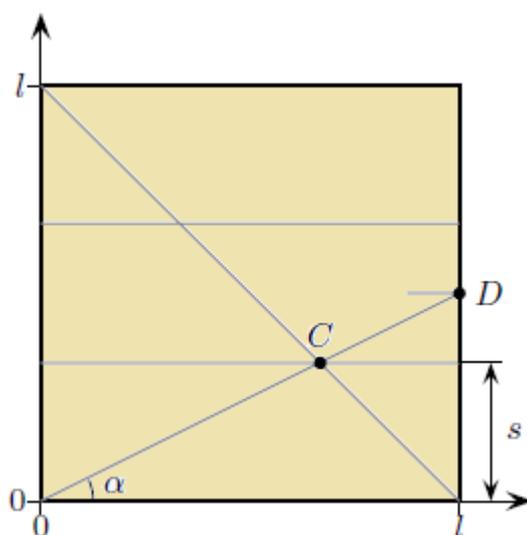


Figura 5 - 6: Demonstração duplicação do cubo – parte 1.

Fonte: LUCERO,2006b,p. 3

De fato: tome a folha com comprimento  $l$ , e insira um eixo coordenado  $(x, y)$ ,

no canto inferior esquerdo da figura. O ponto  $C$  está à mesma distância da borda inferior e da borda direita, tomemos como  $s$  esta distância. As coordenadas dos pontos são:  $C = (x_C, y_C) = (l - s, s)$  e  $D = (x_D, y_D) = (l, \frac{l}{2})$ .

Considerando C:  $\tan \alpha = \frac{s}{l-s}$

Considerando D:  $\tan \alpha = \frac{l/2}{l}$

Assim:  $\frac{s}{l-s} = \frac{l/2}{l} \Rightarrow l = \frac{1}{3}$ .

Pelos passos (4) e (5) as linhas horizontais tem a distância de  $\frac{l}{3}$  entre si.

Observe agora a figura:

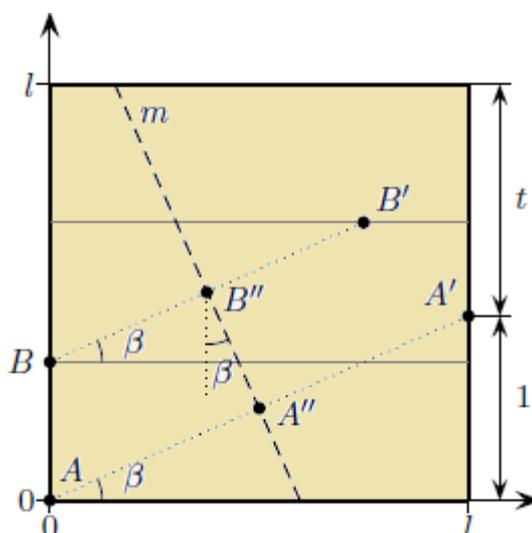


Figura 5 - 7: Demonstração do cubo – parte 2.

Fonte: LUCERO,2006b,p. 4

De acordo com os passos (7) e (8) podemos determinar as seguintes coordenadas:  $A = (0,0)$ ;  $B = (0, \frac{l}{3})$ ;  $A' = (l, 1)$ ;  $B' = (a, \frac{2l}{3})$ ; sendo a abscissa do ponto  $B'$ . A partir também da dobra (7), temos que  $A''$  e  $B''$  são os pontos médios dos segmentos  $AA'$  e  $BB'$  respectivamente. Logo  $A'' = (\frac{l}{2}, \frac{1}{2})$ ; e  $B'' = (\frac{a}{2}, \frac{l}{2})$ .

Pela geometria da figura os três ângulos que são representados por  $\beta$  são iguais.

Assim: A partir do vértice A: (I)  $\tan \beta = \frac{1}{l}$ .

Considerando o vértice em B: (II)  $\tan \beta = \frac{l/3}{a}$ .

Considerando o vértice em  $B''$ : (III)  $\tan \beta = \frac{l-a/2}{l-1/2} = \frac{l-a}{l-1}$ .

Igualando (I) = (II)

$$\frac{1}{l} = \frac{\frac{l}{3}}{a} \Rightarrow a = \frac{l^2}{3}$$

Igualando (II) = (III)

$$\frac{\frac{l}{3}}{a} = \frac{l-a}{l-1} \Rightarrow l^3 - 3l^2 + 3l - 3 = 0 \Rightarrow (l-1)^3 - 2 = 0$$

E substituindo  $t = l - 1$  temos:  $(t)^3 - 2 = 0 \Rightarrow t = \sqrt[3]{2}$  que prova a solução do problema deliano.

Com dobraduras de papel é possível resolver qualquer equação cúbica, o que é impossível de ser feito com régua e compasso.

## 6 ROTEIROS DE AULA.

O Objetivo deste capítulo é apresentar roteiros que auxiliem a diversificação de estratégias no ensino de matemática. O enfoque será dado à geometria, no entanto, atividades que abrangem outras áreas da matemática podem ser abordadas por meio das dobraduras e tais procedimentos podem ser encontrados em Lang (2010).

### 6.1 GEOMETRIA DOS ÂNGULOS

Nesta sequência de atividades utilizando materiais simples como: Régua, compasso, papel, recortes de figuras com ângulos, tesoura, cola, cartolina; pretende-se focar nas seguintes habilidades e competências: compreender a ideia de medida de um ângulo (em grau), sabendo operar com medidas de ângulos e usar instrumentos geométricos para construir e medir ângulos; saber calcular a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo e estender tal cálculo para polígonos de  $n$  lados.

#### **Atividade 1**

Para diagnosticar o que os alunos já sabem sobre o assunto o professor pode pedir que os alunos tragam recortes de jornais, revistas ou imagens quaisquer sobre o tema “ângulos”. A partir dos recortes, o professor pode começar a discussão sobre a nomenclatura dos ângulos de acordo com a medida, como agudo, obtuso, reto, raso. Depois disso os alunos montam cartazes dividindo as figuras nas classificações.

#### **Atividade 2**

O professor pede que os alunos construam um círculo e desafia os alunos a descobrirem ângulos. A ideia é trabalhar com os múltiplos de  $45^\circ$  e também de  $22,5^\circ$ , pois são frações decorrentes do ângulo de  $360^\circ$ . Primeiramente, o professor pede para que os alunos descubram ângulos diversos por meio das dobras, direcionando o trabalho para que encontrem as frações específicas do círculo. Caso eles não consigam o professor pode dar dicas para que façam dobras a fim de encontrar a metade dos ângulos e assim sucessivamente, obtendo uma figura

semelhante como a 6-1.

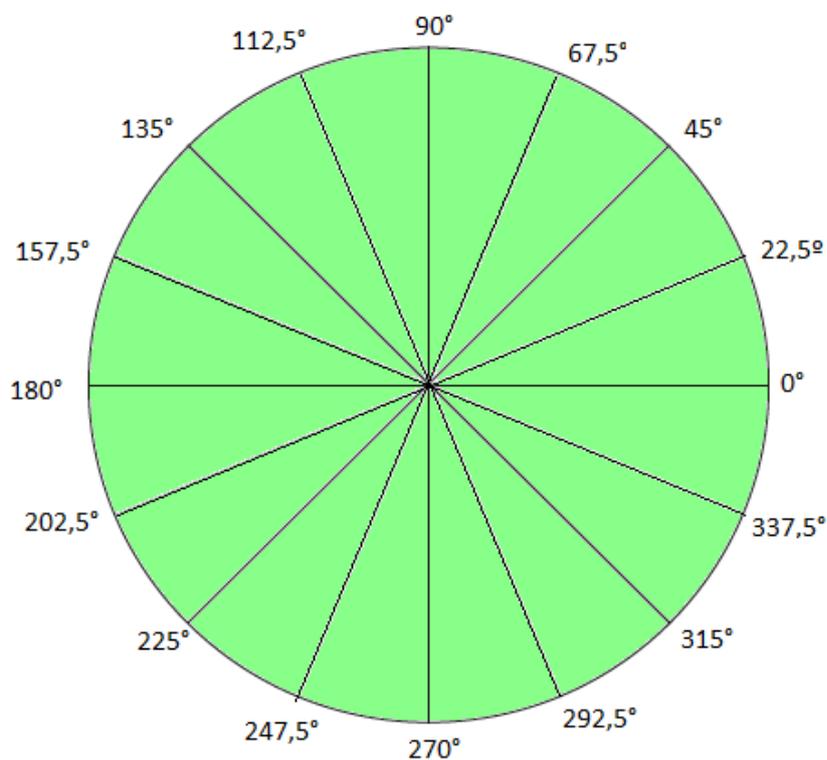


Figura 6 - 1: Ângulos na circunferência.

Fonte: Autoria própria.

O círculo fracionado pode ser usado então como transferidor para medir objetos e figuras da sala de aula, até mesmo para conferir o ângulo aproximado das imagens trabalhadas na atividade anterior.

### Atividade 3

O objetivo desta atividade é descobrir a soma dos ângulos internos de triângulos e polígonos. Primeiramente, os alunos irão concluir que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual à medida de um ângulo raso.

**Procedimento para verificação da soma dos ângulos internos de um triângulo:**

Tais procedimentos elucidados a seguir estão de acordo com CARNEIRO e SPIRA (2005).

- (1) Construir um triângulo qualquer:

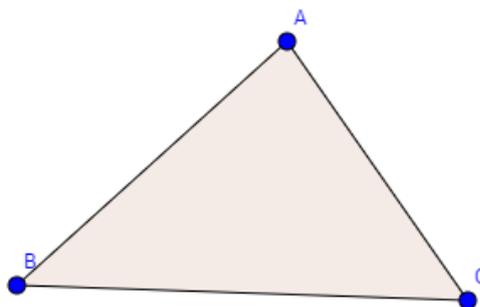
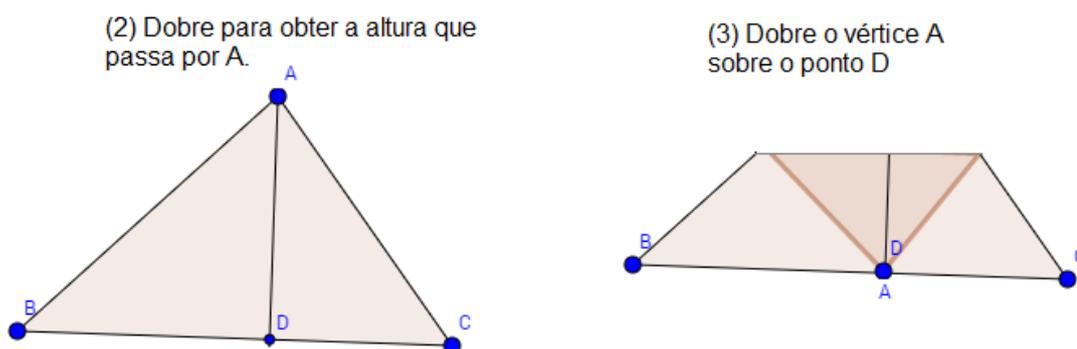


Figura 6 - 2: Triângulo

Fonte: Autoria própria

Observação: se o triângulo construído possuir um ângulo obtuso, deverá ser nomeado o vértice desse ângulo de ponto A, ou simplesmente marcar por A o ângulo de maior medida.

Figura 6 - 3: Soma dos ângulos internos - passo 2 e 3.



Fonte: Autoria própria.

Observamos que para encontrar a altura relativa ao vértice A, basta dobrar o lado BC sobre ele mesmo e de tal forma que a dobra passe por A.

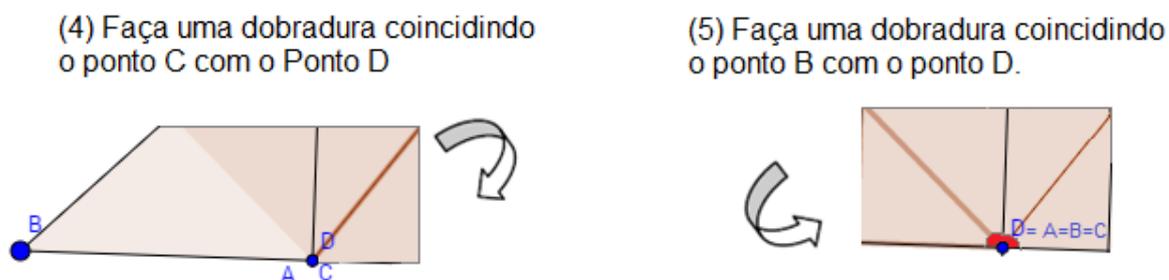


Figura 6 - 4: Soma dos ângulos internos passos finais.

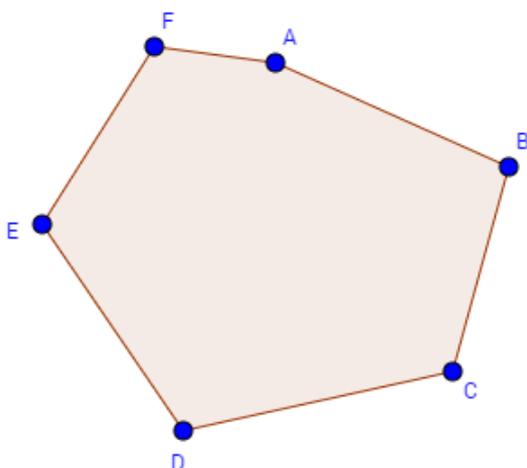
Fonte: Autoria própria.

Desta forma, consegue-se unir os ângulos internos de um triângulo em apenas um que é equivalente ao ângulo raso.

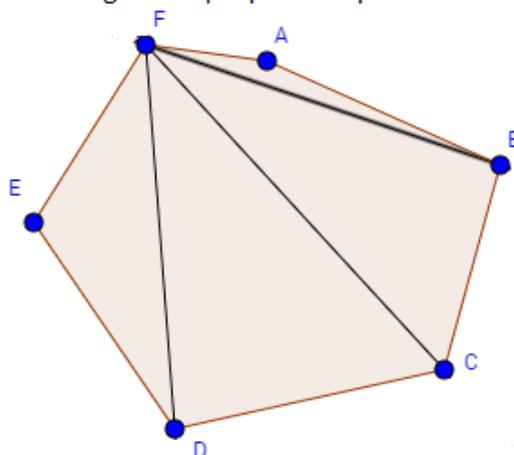
#### Atividade 4

#### Soma dos ângulos internos de um polígono qualquer.

(1) Construir um polígono qualquer



(2) Escolher um vértice e dobrar (vincando) as diagonais que passam por esse vértice.



(3) Agora basta contar o número de triângulos formados.

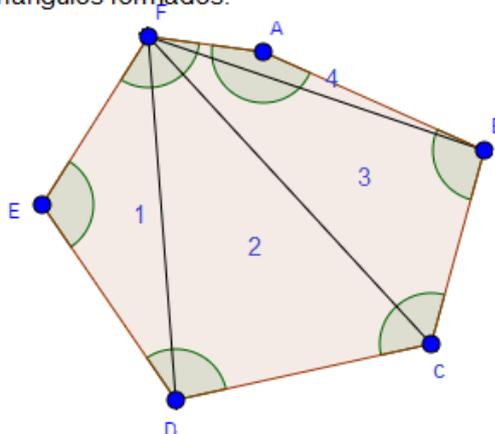


Figura 6 - 5: Soma dos ângulos internos de um polígono.

Fonte: Autoria própria

Observamos que a soma dos ângulos internos do polígono (hexágono) é a mesma se adicionarmos a soma dos ângulos internos dos triângulos formados a partir da dobra das diagonais (No caso  $4 \cdot 180^\circ = 720^\circ$ ).

## 6.2 CONSTRUÇÃO DE POLÍGONOS REGULARES

Na continuidade do estudo podemos trabalhar com polígonos regulares. Durante o desenvolvimento das atividades é possível pedir aos alunos para que façam inferências sobre os tipos de dobraduras que estão sendo realizadas. Nesse momento, é oportuno revisar nomenclaturas e propriedades dos elementos geométricos como: reta perpendicular, bissetriz, reta concorrente e paralela, reta mediatriz, vértice, aresta, entre outros. Percebe-se no cotidiano da sala de aula que tais conceitos básicos não fazem parte do vocabulário e conhecimento dos alunos. A interpretação de problemas matemáticos é dificultada muitas vezes pelo fato do aluno à nomenclatura de termos geométricos.

Após a construção dos polígonos, pode-se desafiar os alunos a perceberem suas regularidades, como: ângulo interno e externo e construir tabelas a partir disso. Além disso, pode-se retomar a relação apresentada no primeiro roteiro apresentado aqui, recordando a soma dos ângulos internos de um polígono qualquer.

### Atividade 1- Triângulo Equilátero

#### Procedimentos para a construção do triângulo equilátero

Os procedimentos indicados a seguir estão de acordo com CARNEIRO e SPIRA (2005).

1. O lado do triângulo é igual ao lado menor da folha de papel, denota-se por A e B os extremos do segmento. Dobrar a folha ao meio de modo a encontrar a mediatriz do segmento AB.

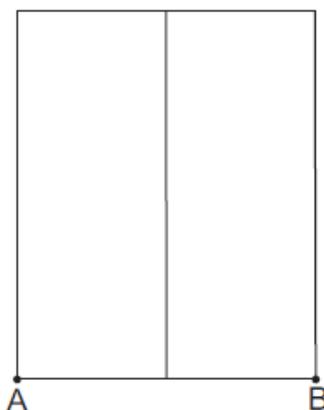


Figura 6 - 6: Passo (1) Triângulo equilátero.

Fonte: CARNEIRO e SPIRA, 2005,p. 6

2. Dobrar a folha de modo que o ponto refletido de B e encontrar a mediatriz (construída em 1). Marcar esse ponto como C.

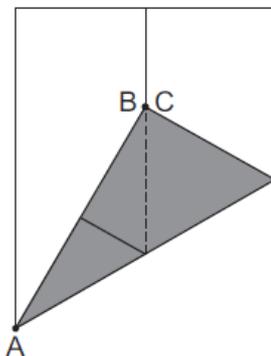


Figura 6 - 7: Passo (2 ) Triângulo equilátero

Fonte: CARNEIRO e SPIRA, 2005,p. 6

3. Dobrar os segmentos AC e AB para completar o triângulo.

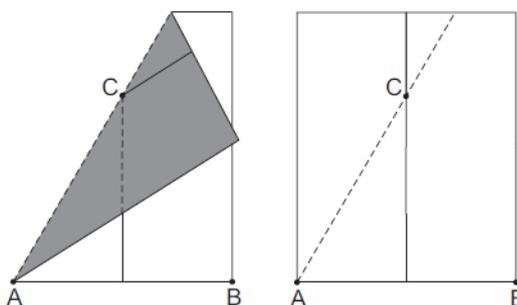


Figura 6 - 8 Passo (3) Triângulo equilátero

Fonte: CARNEIRO e SPIRA, 2005,p. 6

4. Desdobrar.

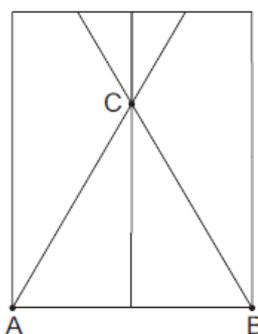


Figura 6 - 9 Passo (4) Triângulo equilátero

Fonte: CARNEIRO e SPIRA, 2005,p. 6

## Atividade 2 - Pentágono regular

### Procedimentos para a construção do pentágono regular

Tais procedimentos elucidados a seguir estão de acordo com CARNEIRO e SPIRA (2005).

1. Numa folha quadrada construir o ponto P, tal que  $PB/AP$  seja a razão áurea (verificar atividade 6.3).
2. Dividir o segmento PB ao meio e marcar o ponto médio R.

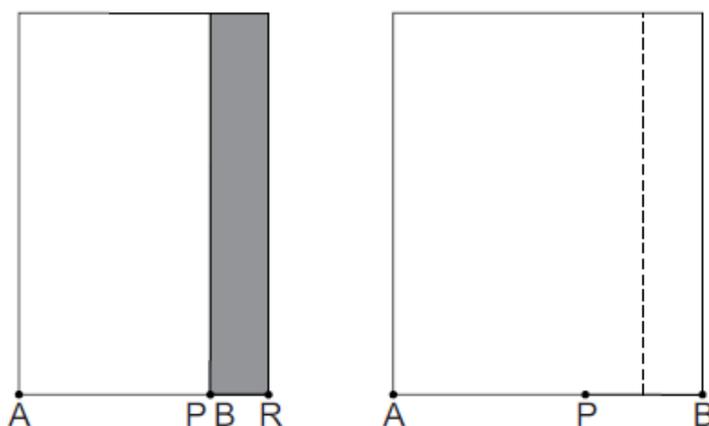


Figura 6 - 10: Pentágono – passos 1 e 2.

Fonte: CARNEIRO e SPIRA, 2005,p. 10

3. Dobrar a folha ao meio e marcar A refletido de R igual a S.
4. SR é o lado do pentágono e os próximos passos servem para obter os outros vértices.
5. Usando uma dobra que passa em S, refletir o ponto R sobre o lado esquerdo da folha determinando o ponto T.

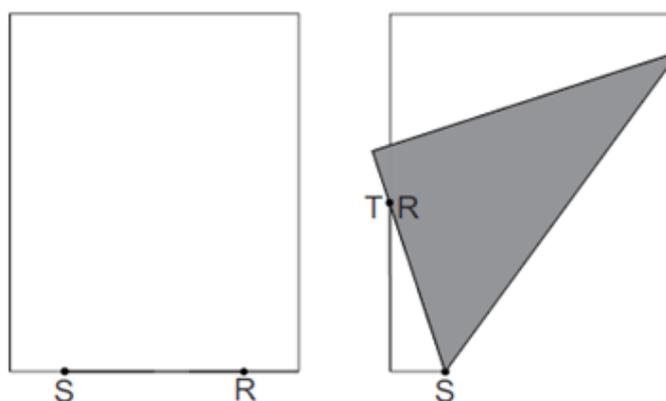


Figura 6 - 11: Pentágono – passos 3,4 e 5.

Fonte: CARNEIRO e SPIRA, 2005,p. 10

6. Proceder analogamente com o lado direito da folha refletindo o vértice T sobre um ponto U. Este ponto pode ser obtido também usando a mediatriz do segmento AB como dobra e refletindo T sobre o lado direito da folha.

7. Finalmente, usando uma dobra que contém o ponto T refletir o ponto U sobre um ponto V na mediatriz de AB. Os vértices do pentágono são SRUV T.

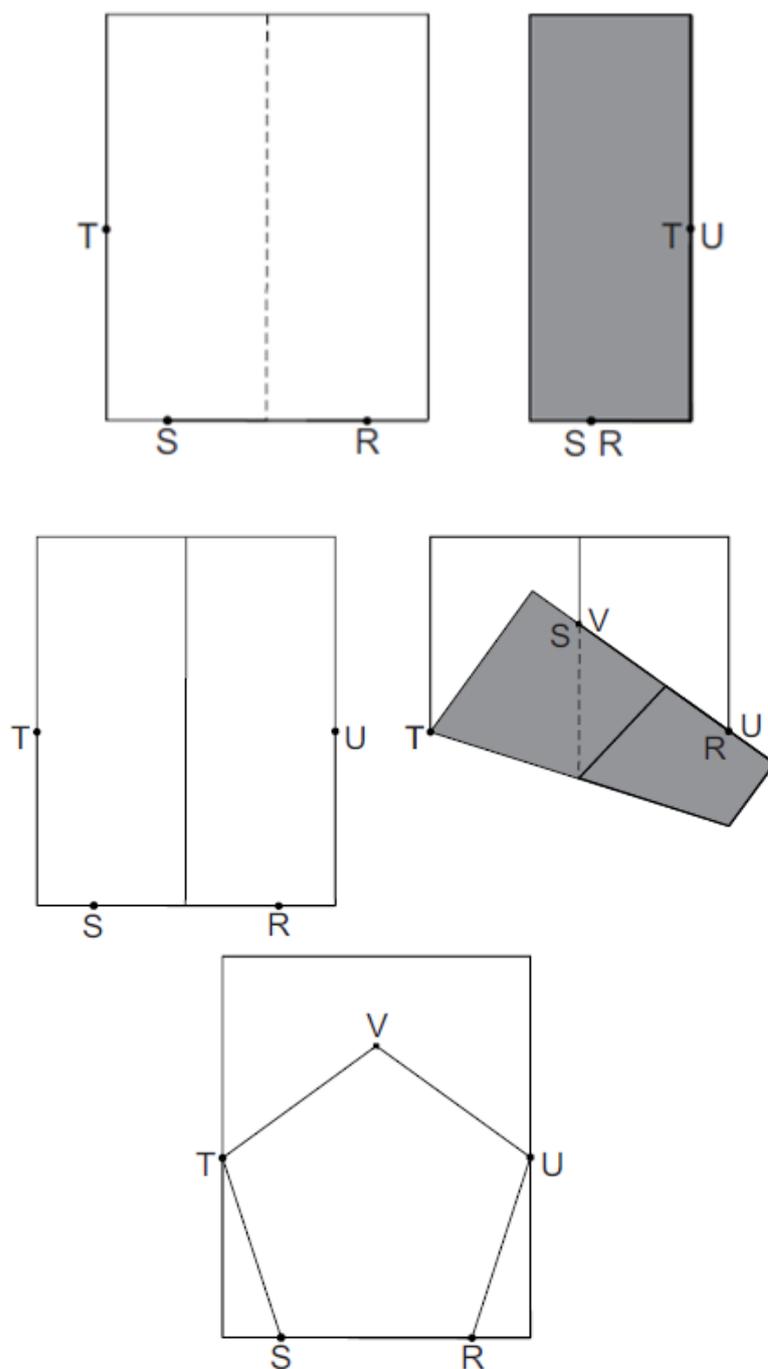


Figura 6 - 12 : Pentágono – passos 6 e7.

Fonte: CARNEIRO e SPIRA, 2005,p. 10

### Atividade 3 - Hexágono Regular

#### Procedimentos para a construção do hexágono regular

Tais procedimentos elucidados a seguir estão de acordo com LEROY (2010)

- (1) Considerar que a folha de papel seja um quadrado ABCD. um lado em quartos.
- (2) Construir um triângulo equilátero EDC.
- (3) Fazer uma dobradura levando AD sobre BC . Desdobrar.

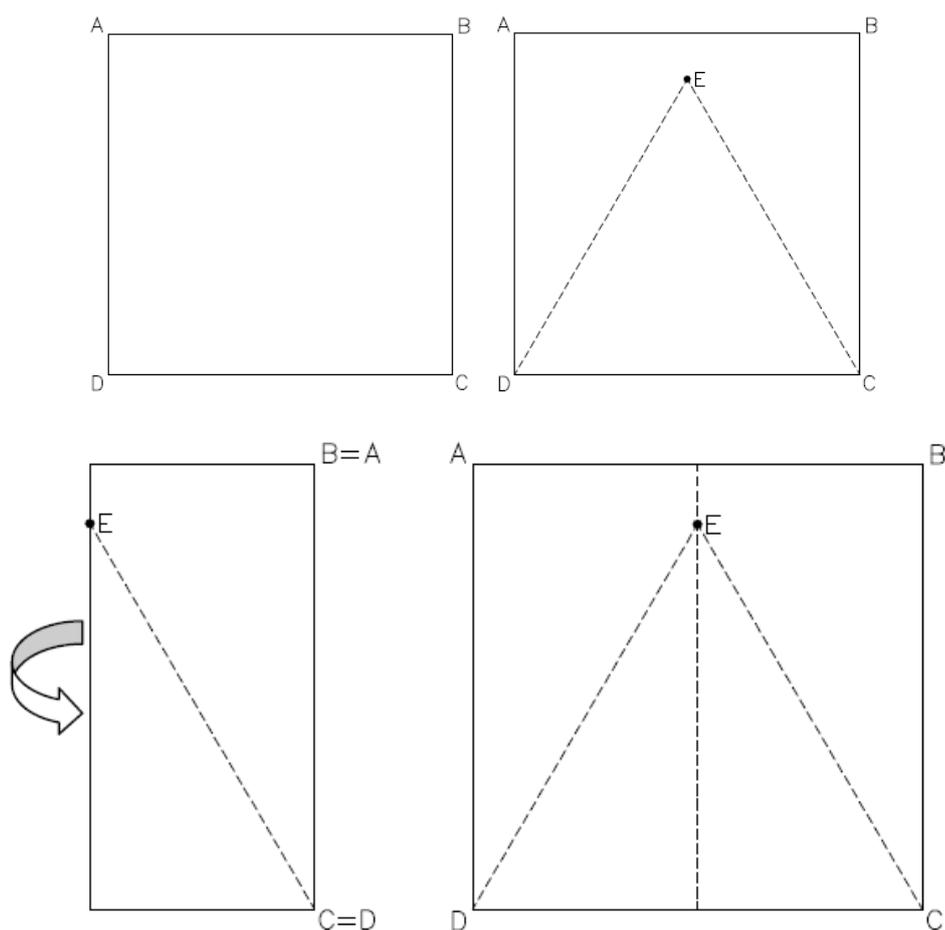


Figura 6 - 13: Construção hexágono – passo 1 , 2 e 3.

Fonte: LEROY, 2010, p.70

- (4) Fazer uma dobradura passando por C e levando o ponto D até o ponto E. Desdobrar. Marcar o ponto O na interseção dessas duas dobraduras.
- (5) Dobrar os vértices E, D e C do triângulo sobre o ponto O. Marcar os pontos FGHJK na interseção dessas dobraduras com os lados do triângulo EDC.

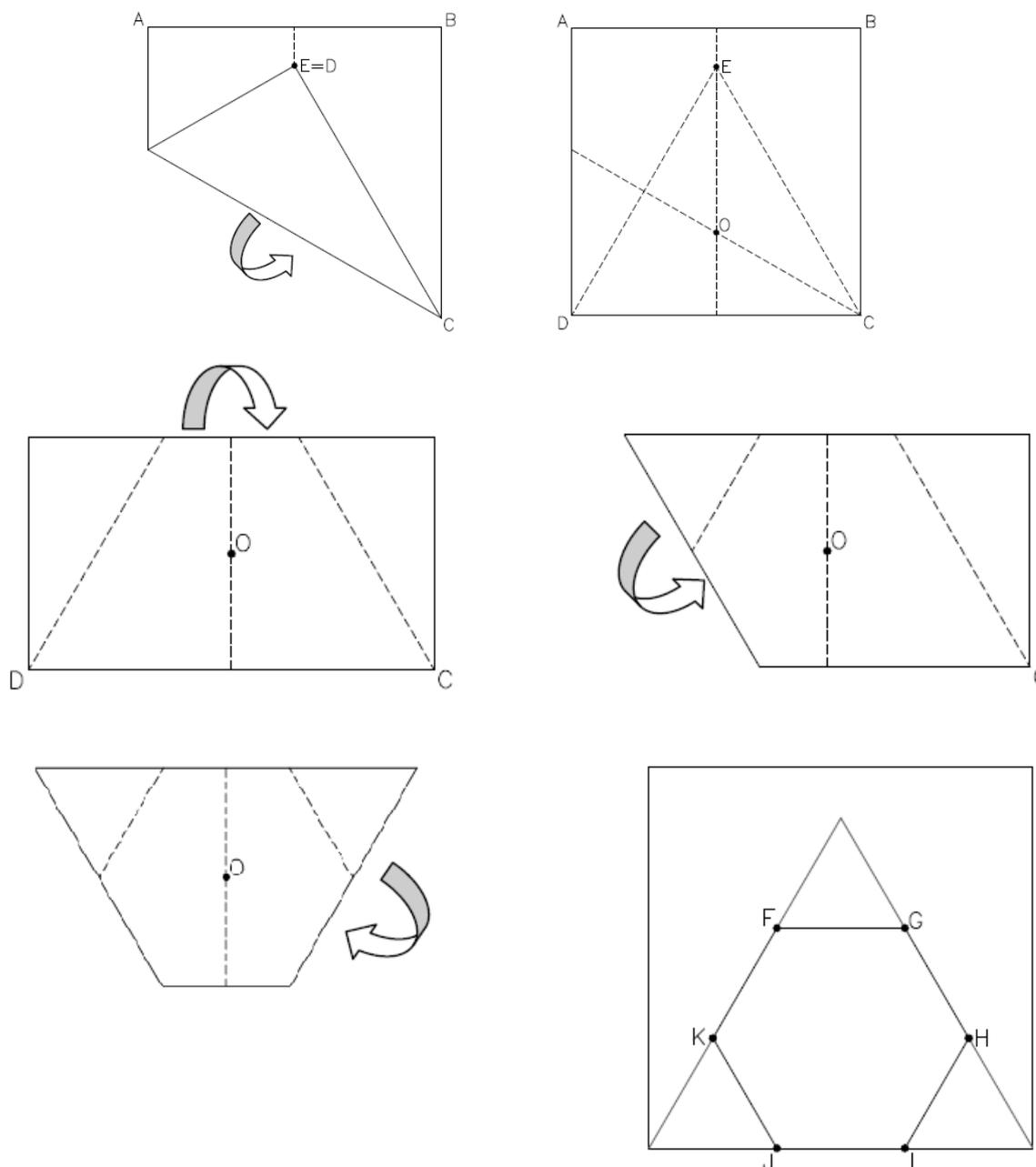


Figura 6 - 14: Construção hexágono – passo 4 e 5.

Fonte: LEROY, 2010, p.71

(6) Resultado: Observar que os segmentos FG , GH, HI , IJ , JK e KF perfazem um hexágono regular.

### 6.3 RAZÃO ÁUREA.

A razão áurea  $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ , também representada pela letra grega  $\phi$  (*leia – se fi*), vale aproximadamente 1,618..., Esta razão pode ser encontrada em diversas situações: na natureza (no formato de uma concha, na espiral de uma margarida, no

crescimento dos galhos de uma árvore), nas construções humanas e suas artes (o Parthenon grego, a sede da ONU em Nova Iorque, alguns quadros de Leonardo da Vinci etc.), entre outras. Por essa razão foi chamada de razão áurea ou proporção divina.

No estudo de razões do ensino fundamental (SÃO PAULO, 2014) fica fácil trabalhar com aplicações na história da matemática e no cotidiano. No caderno do professor da 6ª série/7º ano do currículo oficial do estado de São Paulo é abordada a razão áurea após um estudo sobre proporções. A atividade propõe uma leitura e uma análise de texto e a verificação da proporcionalidade das medidas do retângulo áureo.

Sugerimos que nesse momento seja feita a construção por *origami* do retângulo áureo e, desta forma, o professor poderá transformar a atividade tornando-a manipulável e mais dinâmica. Além disso, caso o professor queira aprofundar ainda mais o assunto poderá trabalhar o retângulo de prata e o retângulo de bronze.

Tais procedimentos são encontrados em Lucero (2005).

### Atividade 1 - Retângulo de ouro:

O retângulo áureo, ou retângulo de ouro, é um retângulo cujas dimensões são proporcionais ao número de ouro, semelhante ao mostrado abaixo. Se o dividirmos em um quadrado e um retângulo, este terá seus lados nas mesmas proporções que o retângulo inicial e também será áureo.

Obteremos a seguinte razão:  $\phi = \frac{a}{b-a} = \frac{b}{a} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cong 1,61803 \dots$

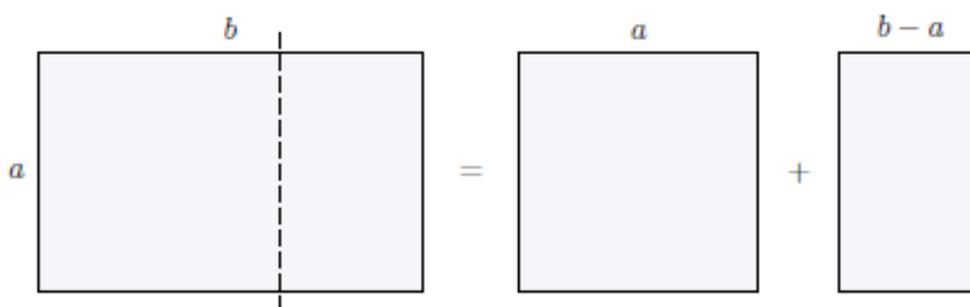


Figura 6 - 15: Razão áurea.

Fonte: LUCERO, 2005,p. 1

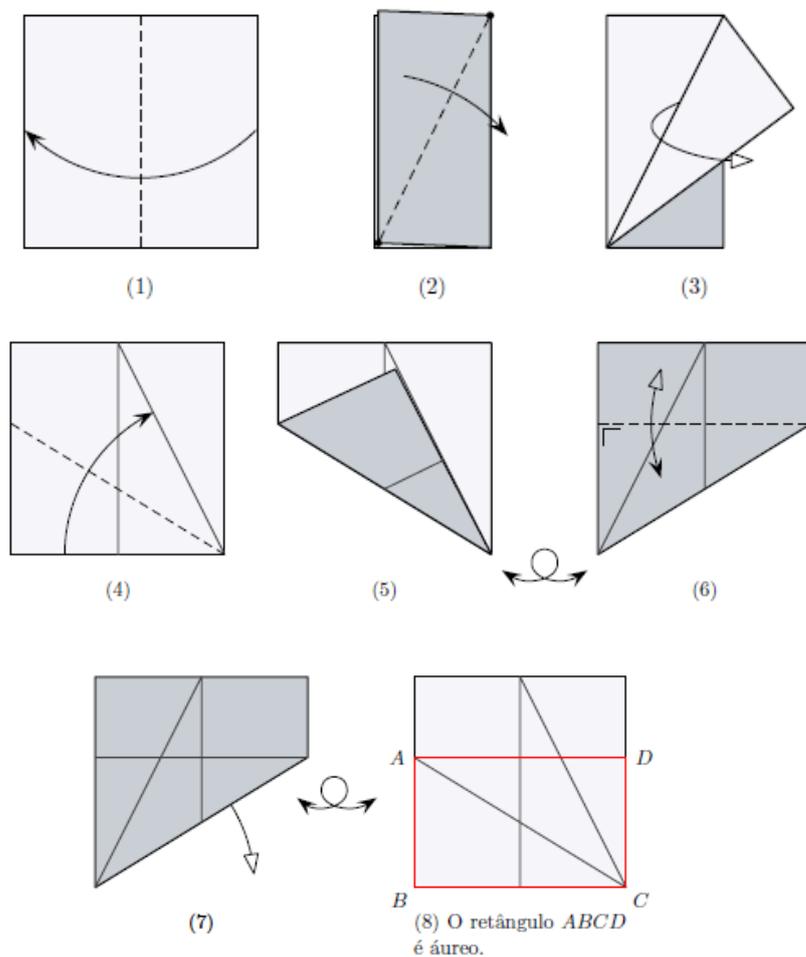


Figura 6 - 16: Procedimentos para a construção do retângulo áureo 1-3.

Fonte: LUCERO, 2005,p.2-3

**Demonstração:** Tal demonstração foi retirada na íntegra de Lucero (2005). Para provar que a dobragem apresentada no item 6 ( da figura 6 -16) é o retângulo áureo, analisemos o resultado final, conforme a seguinte figura:

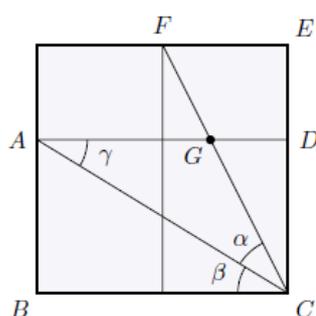


Figura 6 - 17: Demonstração razão áurea.

Fonte: LUCERO, 2005,p.3

Queremos determinar a relação entre os lados do retângulo resultante,  $x = AD/DC$ . Como  $AD = EC$ , então  $x = EC/DC$ . Pela semelhança de triângulos  $FEC$  e  $GDC$ , sabemos que:  $x = \frac{DC}{EC} = \frac{DC}{EC} = \frac{FC}{GC}$  e por uma conhecida propriedade das proporções:  $x = \frac{DC}{EC} = \frac{DC+FC}{EC+GC}$ .

Para simplificar o cálculo, suponhamos que o quadrado inicial tenha lados de comprimento 1. Então  $AD = EC = 1$ ,  $FE = 1/2$ , e pelo Teorema de Pitágoras,  $FC = \sqrt{FE^2 + EC^2} = \sqrt{5}/2$ .

Sabemos, também, que os ângulos  $\alpha$  e  $\beta$  são iguais (passo 4). Os ângulos  $\beta$  e  $\gamma$  são alternos internos entre as paralelas  $AD$  e  $BC$  e, portanto, iguais, o que implica que  $\alpha = \gamma$ . Consequentemente,  $ACG$  é um triângulo isósceles, e  $AG = GC$ . Então,  $GD + GC = GD + AG = 1$ . Substituindo os valores calculados na fórmula acima para  $x$ , obtemos finalmente:  $x = \frac{1/2 + \sqrt{5}/2}{1} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  que é a razão áurea.

## Atividade 2 - Retângulo de prata

Um retângulo é chamado de argênteo, ou retângulo prateado, se a razão entre dois de seus lados adjacentes for igual ao número prateado, ou seja, é aquele que ao ser dividido pela metade resulta em dois retângulos cujos lados estão na mesma proporção que os lados do retângulo inicial, como mostra a figura abaixo.

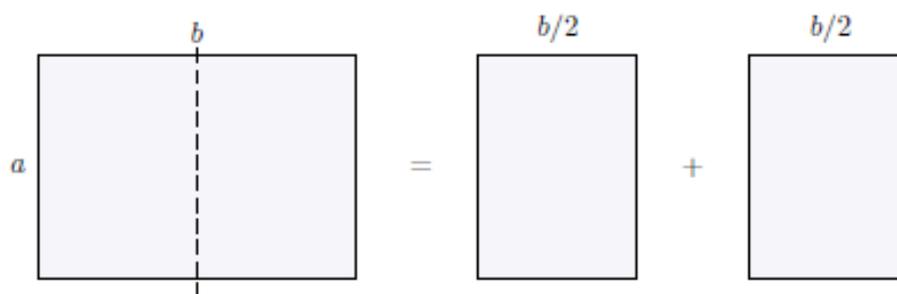


Figura 6 - 18: Retângulo de prata

Fonte: LUCERO, 2005,p.4

]

Um exemplo do retângulo de prata é a folha A4. Neste sentido, fica fácil apresentar aos discentes este retângulo e suas proporções.

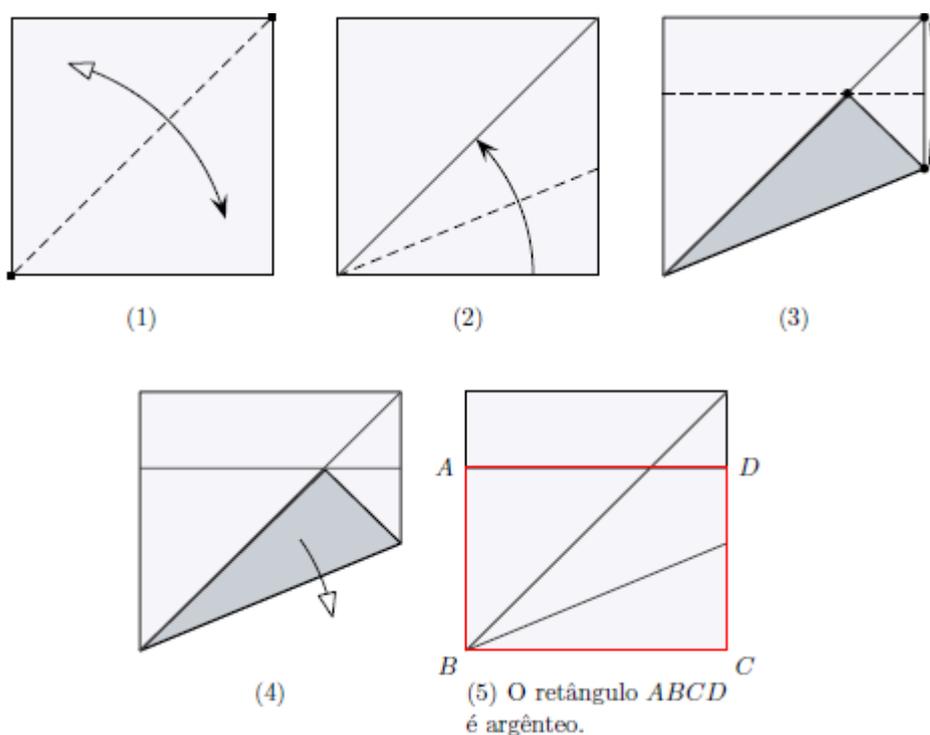


Figura 6 - 19: Procedimentos para a construção do retângulo de prata

Fonte: LUCERO, 2005,p.4-5

**Demonstração:** Tal demonstração foi retirada na íntegra de Lucero (2005). Mostraremos que é válida a sequência de dobragens (Figura 6 – 19), ou seja, que o retângulo  $ABCD$  abaixo é argênteo.

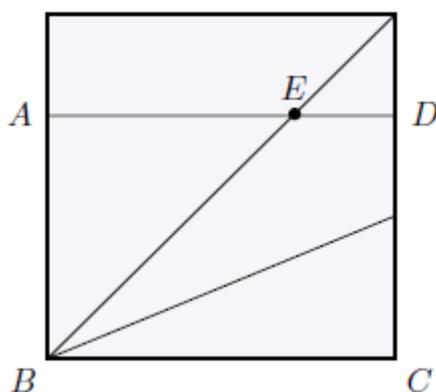


Figura 6 - 20: Demonstração retângulo de prata.

Fonte: LUCERO, 2005,p.5

Queremos calcular a relação  $x = BC/AB$ . O Teorema de Pitágoras diz que  $(BE)^2 = (AB)^2 + (AE)^2$ . DA figura A.2 sabemos que  $AB = AE$ , portanto a fórmula de

Pitágoras resulta em  $(BE)^2 = 2(AB)^2$ . Do passo (3) sabemos que  $BE = BC$ , e substituindo na fórmula anterior, chegamos a  $x = \frac{BC}{AB} = \sqrt{2}$

### Atividade 3 - Retângulo de bronze

Um retângulo brônzeo, ou retângulo de bronze, é um retângulo que pode ser dividido em três retângulos com lados na mesma proporção que o retângulo original.

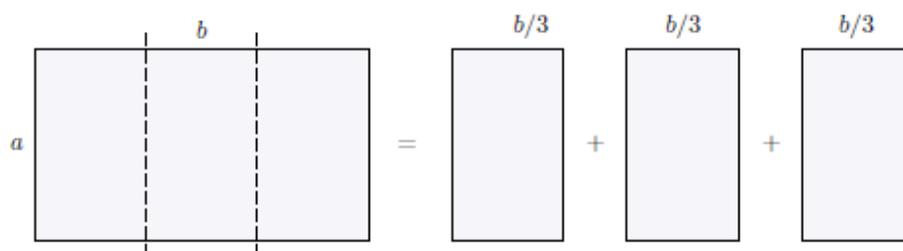


Figura 6 - 21: Retângulo de bronze.

Fonte: LUCERO, 2005,p.5

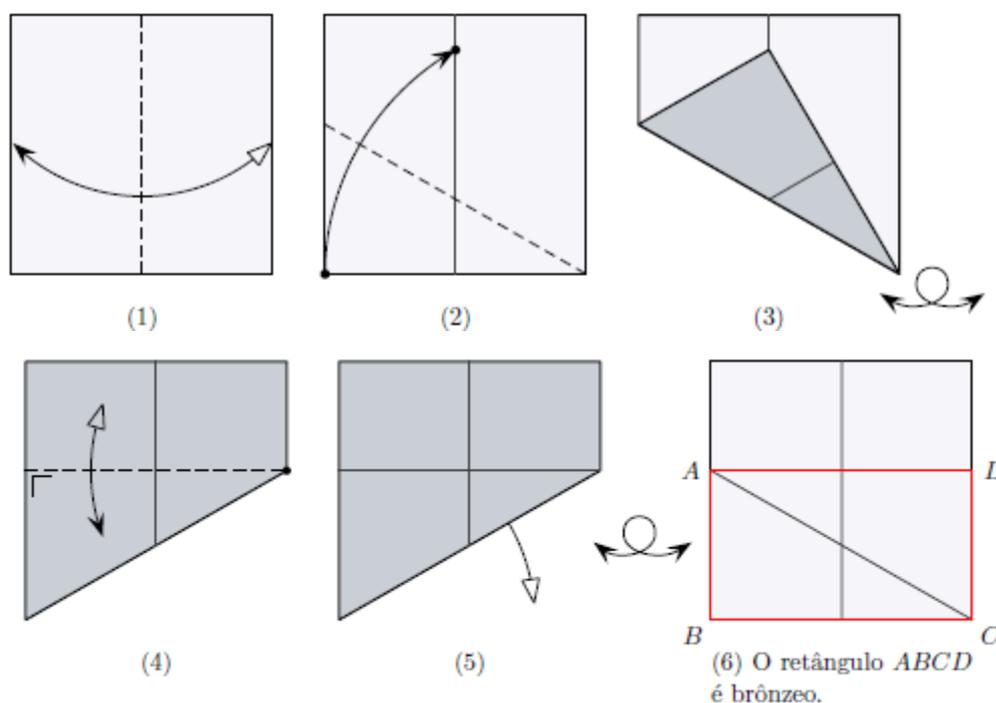


Figura 6 - 22: Procedimentos para a construção do retângulo de bronze

Fonte: LUCERO, 2005,p.6

**Demonstração:** Tal demonstração foi retirada na íntegra de Lucero (2005). Mostraremos que é válida a sequência de dobragens (Figura 6 - 23), ou seja, que o retângulo ABCD abaixo é brônzeo.

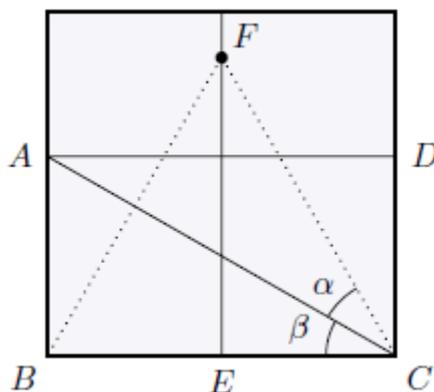


Figura 6 - 23: Demonstração retângulo de bronzeo.

Fonte: LUCERO, 2005,p.7

Queremos calcular a relação  $x = BC/AB$ . O ponto  $F$  é o obtido no passo (2); as linhas dos pontos foram adicionadas apenas para facilitar o cálculo. É possível calcular  $x$  usando um raciocínio similar ao caso do retângulo áureo. Porém, sigamos outro caminho mais instrutivo. Notemos que, conforme o passo (2),  $BC = FC$ , e pela simetria da figura,  $BF = FC$ . Portanto o triângulo  $BCF$  é equilátero (esta construção justamente evidencia a relação do retângulo brônzeo com o triângulo equilátero).

Pelo passo (2) sabemos, também, que os ângulos  $\alpha$  e  $\beta$  são iguais, e como sua soma deve ser de  $60^\circ$ , então  $\alpha = \beta = 30^\circ$ . De fato, os passos (1) e (2) constituem a técnica mais conhecida para obter um ângulo de  $30^\circ$ . Notemos agora que os triângulos  $ABC$  e  $FEC$  são semelhantes, portanto:

$$x = \frac{BC}{AB} = \frac{EF}{EC}$$

Suponhamos que a folha tem lados de comprimento 1, então  $BC = 1$  e  $EC = 1/2$ .

Sendo  $FC = BC$  e usando o Teorema de Pitágoras,  $EF = \sqrt{(FC)^2 - (EC)^2} = \sqrt{1 - (1/2)^2} = \sqrt{3}/2$ . Finalmente, substituindo na fórmula acima,  $x = \frac{EF}{EC} = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3}$ .

## 7 PESQUISA DE CAMPO

Para verificar a influência do *origami* em sala de aula, foi desenvolvido um projeto que consistia em confeccionar dobraduras simples para que os alunos conhecessem os principais elementos geométricos. Esta atividade foi realizada em duas turmas do 7º ano de uma escola pública de Presidente Prudente com duração de 8 aulas em cada uma.

O projeto foi apresentado à professora e alunos, que aceitaram participar voluntariamente da pesquisa e acordaram que desenvolveriam as atividades com compromisso e atenção. Inicialmente foi aplicado um questionário com o propósito de obter uma avaliação diagnóstica para a verificação dos conhecimentos prévios dos discentes acerca dos elementos geométricos.

Os discentes deveriam escrever uma definição e/ou representar o que entendiam por:

- Ângulo;
- Ângulo reto;
- Bissetriz.
- Retas paralelas;
- Retas perpendiculares;
- Retas concorrentes;
- Segmento de reta.
- Triângulo;
- Triângulo equilátero;
- Quadrado;

Cerca de 70% dos alunos deixou a maior parte dos itens em branco e segundo eles a atividade foi feita com compromisso. Porém, não conheciam estes termos e também não conseguiam elaborar desenhos ou representações para os itens questionados.

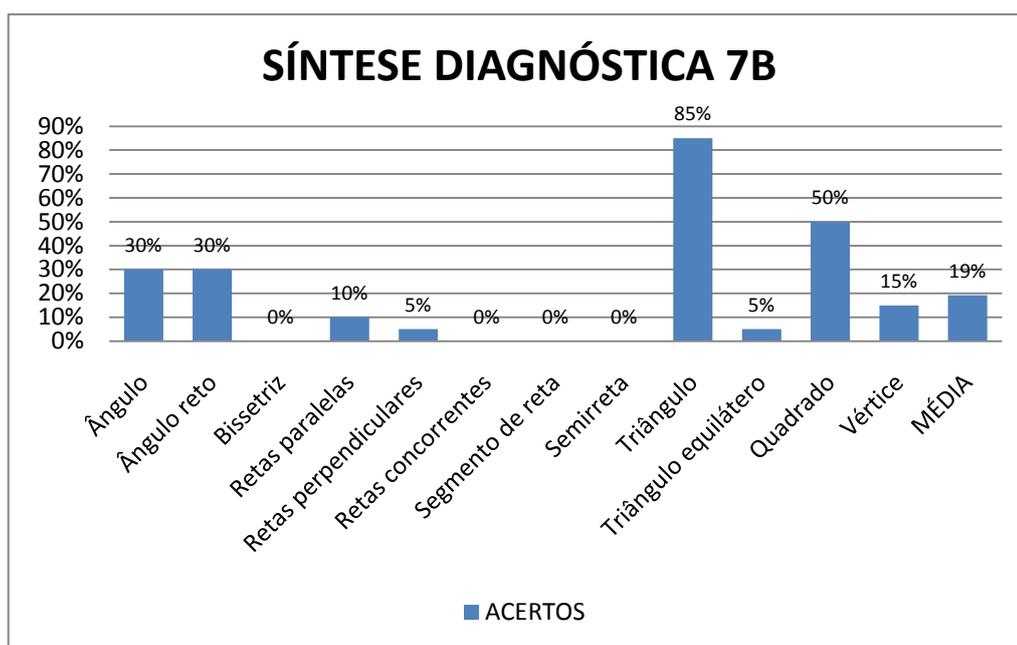
A professora relatou que a sala apresenta grandes dificuldades de aprendizado devido à defasagem em conteúdos de anos anteriores.

A análise diagnóstica foi tabulada, os itens em branco foram considerados como erros. A maior parte dos alunos enfrentou dificuldade tanto em representar como em descrever os elementos geométricos. No item que se refere ao quadrado,

grande parte representou por um quadrilátero com ângulos retos, mas sem congruência dos lados. A maior assertiva foi quanto à representação do triângulo. Os resultados das duas salas foram semelhantes, com pequena variação entre elas. A média de acertos em ambas as salas ficou abaixo de 20%.

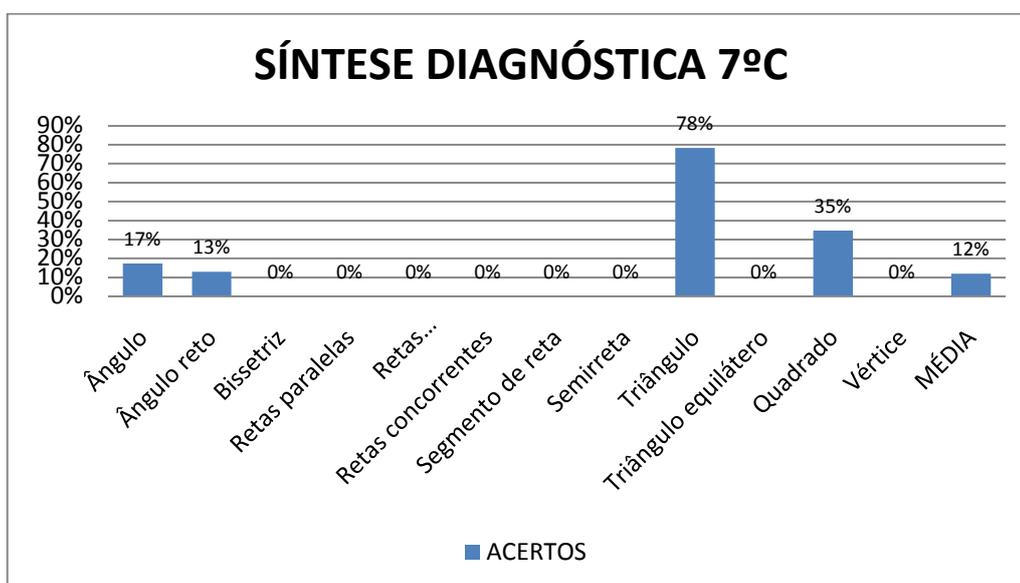
Seguem os gráficos representativos da avaliação diagnóstica:

**Gráfico 1 : Avaliação diagnóstica 7ºB**



Fonte: Autoria própria.

**Gráfico 2: Avaliação diagnóstica 7ºC**



Fonte: Autoria própria.

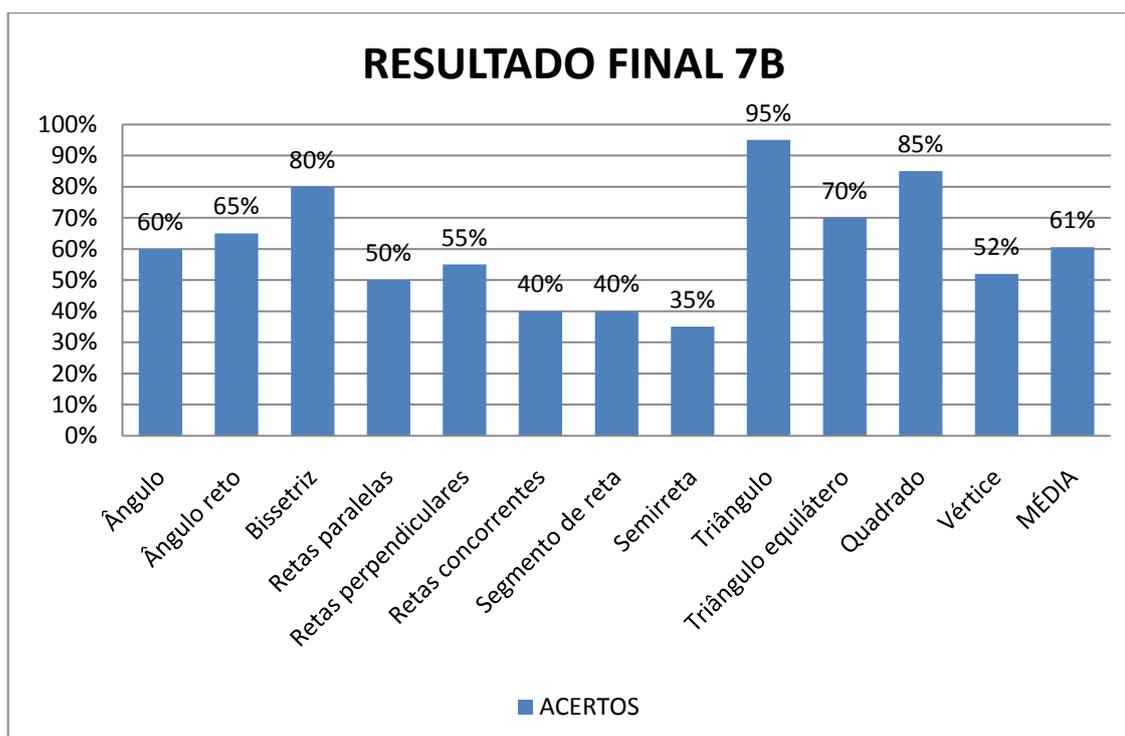
As aulas envolvidas no projeto foram ministradas durante quatro semanas seguidas, acontecendo em aulas duplas em cada uma das salas. O material utilizado foi baseado em Carneiro e Spira (2005). As atividades desenvolvidas através do recurso do *origami* foram:

- Determinação de retas perpendiculares a um ponto dado,
- Construção de duas retas paralelas,
- Construção da reta mediatriz a um segmento dado.
- Determinação da reta bissetriz de um ângulo qualquer.
- Determinação da altura e ortocentro de um triângulo.
- Construção de triângulo equilátero.
- Construção do quadrado.
- Verificação da razão áurea.
- Construção de pentágono regular.
- Trissecção de um ângulo agudo.

Na última aula, após a realização das atividades, os alunos responderam novamente ao questionário conceitual.

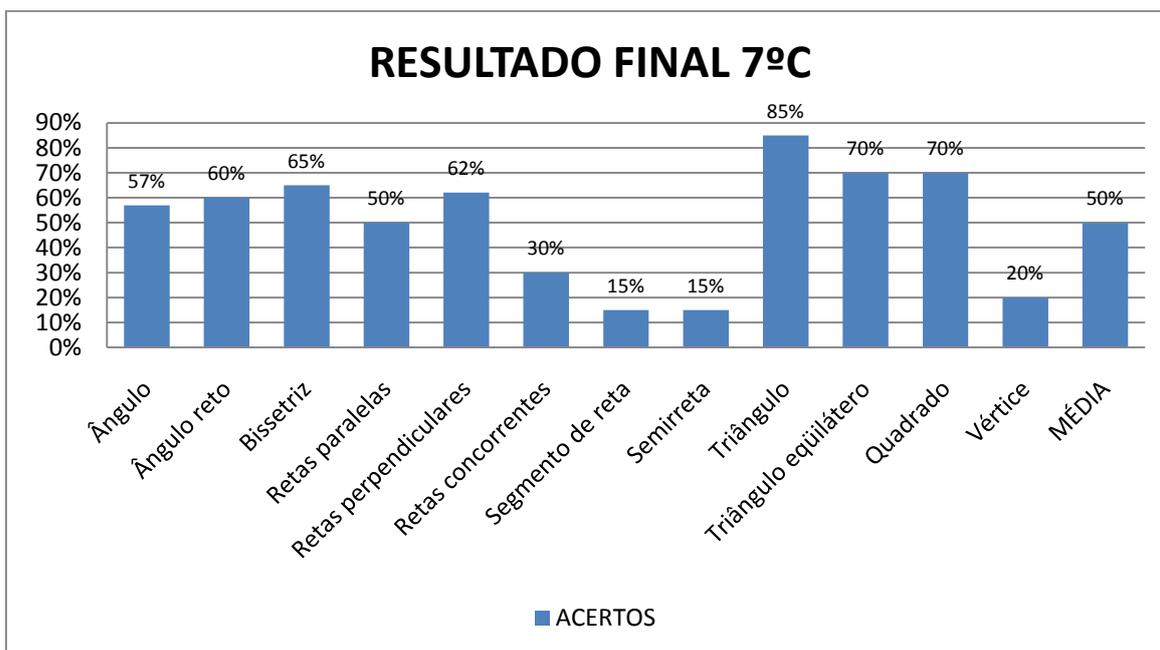
Os resultados obtidos na avaliação final seguem abaixo:

**Gráfico 3 : Resultado avaliação final 7ºB.**



Fonte: Autoria própria.

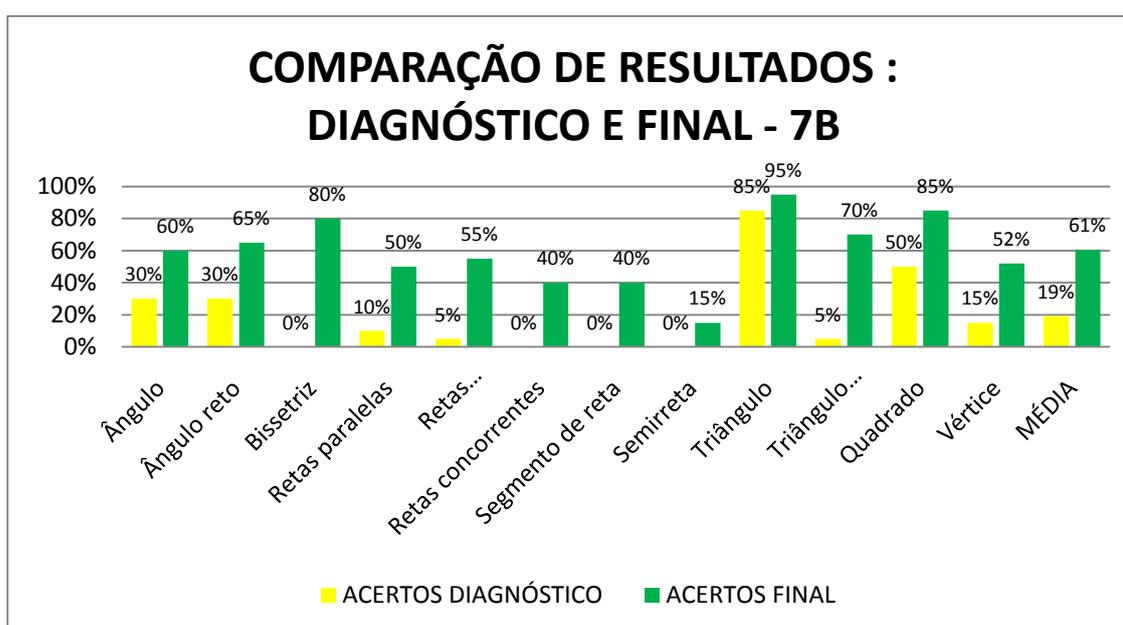
Gráfico 4: Resultado avaliação final 7ºC



Fonte: Autoria própria.

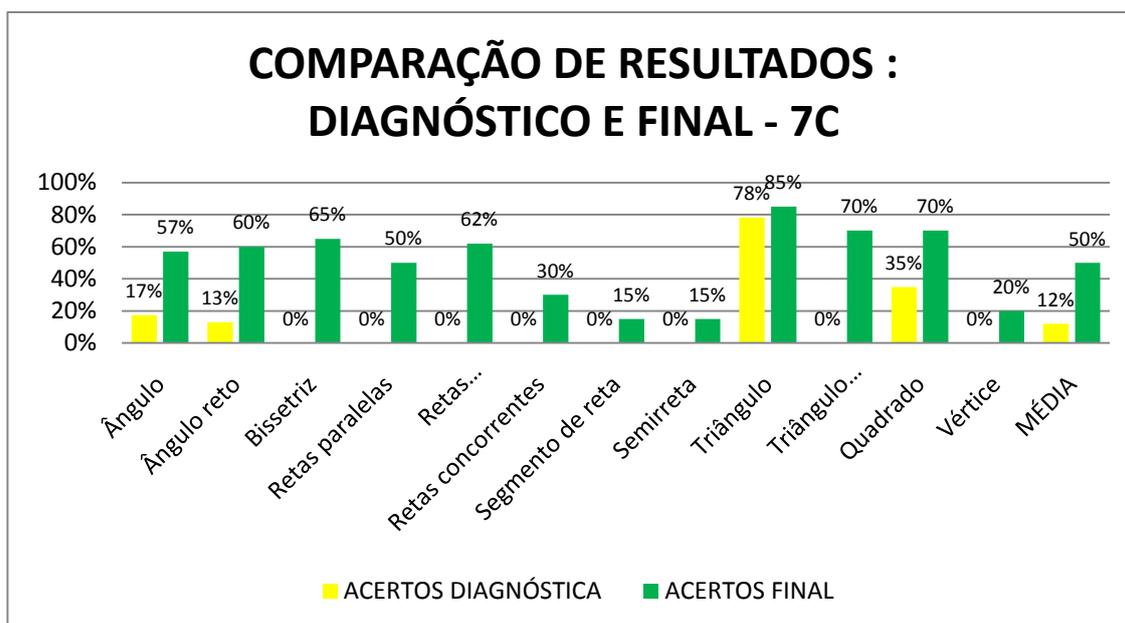
Observou-se que todos os elementos pesquisados obtiveram melhora após o trabalho com o *origami*. A média de acertos subiu consideravelmente nas duas salas. Além disso, a maior parte dos alunos não deixou questões em branco e conseguiu além de definir, representar grande parte dos conceitos.

Gráfico 5: Comparação de resultados 7ºB



Fonte: Autoria própria.

Gráfico 6: Comparação de resultados 7ºC



Fonte: Autoria própria.

Além da reaplicação do questionário após a realização das atividades foi solicitado aos alunos que respondessem sobre seu grau de satisfação em relação às aulas. A maior parte dos discentes afirmou que a atividade foi interessante, diferente e divertida. Muitos deles disseram que a realização das atividades não foi fácil, pois não têm contato com o uso de dobraduras usualmente, entretanto a maioria acrescentou que a confecção do *origami* parece uma brincadeira e que gostaram do desafio.

O desenvolvimento do projeto foi agradável sendo perceptível a empatia dos aprendizes em relação ao material utilizado. Os resultados espelham o que foi descrito por Manso (2008, p.3)

Os resultados deste estudo apontam para que ao trabalhar com as dobragens, a grande maioria dos alunos da turma: (1) conseguiram desenvolver uma aprendizagem consistente, através da organização das ideias; (2) demonstraram entusiasmo por novos desafios e por novas descobertas; (3) desenvolveram a sua capacidade de autocrítica; (4) reconheceram o valor do trabalho em grupo e a importância do papel do professor.

Uma pequena parcela descreveu que gostou bastante das atividades no início do projeto, mas acharam que elas se tornaram um tanto repetitivas no decorrer das aulas. O cansaço demonstrado pelos alunos devido a necessidade da repetição de procedimentos também foi relatado por Manso (2008).

Assim, com esta pesquisa, constatou-se melhoras tanto no aspecto intelectual quanto no atitudinal. Houve elevação de cerca de 40% na média de acertos das avaliações. Ainda foi notória a motivação para o desenvolvimento dos procedimentos bem como a cooperação entre os pares.

## 8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A geometria do *Origami* desenvolvida a partir da década de 70 fundamenta a técnica que pode ser muito eficaz na resolução de diversos problemas matemáticos. O axioma 6 é o diferencial que permite solucionar questões que outrora não eram possíveis com os instrumentos euclidianos. Este item torna possível a resolução de equações cúbicas como a trisseção do ângulo e o problema deliano.

A inserção deste instrumento no ensino tem sido alvo de estudo nos últimos anos, inclusive por alunos mestrandos do PROFMAT, entretanto ainda não repercutiu em sala de aula de maneira desejável. Até mesmo o currículo oficial do estado de São Paulo (2010) embora tenha sido reestruturado a partir do ano de 2008, não aborda o uso do *origami* como instrumento de ensino.

O uso de dobraduras pode ser muito útil no ensino da matemática. A utilização de materiais concretos em sala torna a aula dinâmica e a aprendizagem mais significativa. O trabalho desenvolvido em campo alcançou a receptividade dos alunos. Percebe-se, contudo, que a utilização sequenciada do mesmo instrumento também o torna cansativo. Alguns alunos relataram em suas avaliações que as atividades finais tornaram-se repetitivas.

Conclui-se que é imprescindível no cotidiano da sala de aula diversificar metodologias e estratégias, por isso propusemos o *origami* como mais um instrumento que auxilie o docente nesta importante e desafiadora missão que é o ensino da matemática.

## REFERÊNCIAS

- CAVACAMI, Eduardo. FURUYA, Yolanda Kioko Saito. **Explorando Geometria com Origami**. Departamento de Matemática da Universidade Federal de São Carlos. [www.dm.ufscar.br/yolanda/origami/origami.pdf](http://www.dm.ufscar.br/yolanda/origami/origami.pdf), 2009
- CARNEIRO, Mario Jorge Dias. SPIRA, Miche. **Oficina de Dobraduras**. Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada. Rio de Janeiro, 2005
- EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Campinas: Editora Unicamp, 2004, p.843.
- FREITAS, Bruno Amaro. **Os problemas clássicos da geometria: uma abordagem com o uso do Origami**. 2013. 47f. Dissertação (Mestrado). -Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro - 2013
- LANG, Robert J. **Origami and Geometric Constructions**, 2010. Disponível em: <[http://www.langorigami.com/science/hha/origami\\_constructions.pdf](http://www.langorigami.com/science/hha/origami_constructions.pdf)>. Acesso em 06 mar. 2015.
- LEROY, Luciana. **Aprendendo geometria com origami**. Belo Horizonte, 2010. Disponível em: <<http://www.ime.usp.br/~iole/>>. Acesso em: 02 jan. 2016.
- LUCERO, Jorge C. **Retângulos**, Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, 2005, . Disponível em: <[www.mat.unb.br/~lucero/origami/Notas\\_1.pdf](http://www.mat.unb.br/~lucero/origami/Notas_1.pdf)>. Acesso em: 10 out 2015.
- \_\_\_\_\_. **A triseção de um ângulo**, Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, 2006<sup>a</sup>. Disponível em: <[www.mat.unb.br/lucero/origami/Notas\\_3.pdf](http://www.mat.unb.br/lucero/origami/Notas_3.pdf)>. Acesso em 10 out. 2015
- \_\_\_\_\_. **O problema Deliano**, Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, 2006<sup>b</sup>. Disponível em: <[www.mat.unb.br/~lucero/origami/Notas\\_2.pdf](http://www.mat.unb.br/~lucero/origami/Notas_2.pdf)>. Acesso em 10 out. 2015.
- MANSO, Roberta L. D. **Origami: uma abordagem pedagógica para o ensino de geometria no 9º ano**. 2008 244f. Dissertação (Mestrado).- Universidade de Lisboa, Lisboa.
- MONTEIRO, Liliana Cristina Nogueira. **Origami: História de uma Geometria**

**Axiomática.** 2008.111f. Dissertação (Mestrado).- Universidade de Lisboa, Lisboa, 2008.

OLIVEIRA, Fátima Ferreira. **Origami: Matemática e Sentimento**, 2004. Disponível em: <http://www.nilsonjosemachado.net/20041008.pdf>. Acesso em 01 set. 2015.

SÃO PAULO (ESTADO) Secretaria da Educação. **Currículo do Estado de São Paulo: Matemática e suas Tecnologias**. São Paulo: SEE, 2010.

\_\_\_\_\_. Secretaria da Educação. **Material de Apoio ao Currículo do Estado de São Paulo. Caderno do Professor** : matemática, ensino fundamental – anos finais, 6ª série/7ºano/ São Paulo: SE, 2014. v. 1, 96 p.

\_\_\_\_\_. Secretaria da Educação. **Material de Apoio ao Currículo do Estado de São Paulo. Caderno do Professor** : matemática, ensino fundamental – anos finais, 6ª série/7ºano/ São Paulo: SE, 2014. v. 2, 112 p.