UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DE FUNÇÕES ATRAVÉS DA UTILIZAÇÃO DE OBJETOS DE APRENDIZAGEM

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Renata Magarinus

Santa Maria, RS, Brasil
2013

UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DE FUNÇÕES ATRAVÉS DA UTILIZAÇÃO DE OBJETOS DE APRENDIZAGEM

Renata Magarinus

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional
em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, da
Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS),
como requisito parcial para obtenção do grau de
Mestre em Matemática

Orientadora: Prof.ª Dra. Lidiane Buligon

Coorientador: Prof. Dr. Márcio Marques Martins

Santa Maria, RS, Brasil
2013

Ficha catalográfica elaborada através do Programa de Geração Automática
da Biblioteca Central da UFSM, com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Magarinus, Renata
Uma proposta para o ensino de funções através da utilização de objetos de aprendizagem / Renata Magarinus.-2013.
99 p.; 30cm

Orientadora: Lidiane Buligon
Coorientador: Márcio Marques Martins
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Maria, Centro de Ciências Naturais e Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática, RS, 2013

1. Ensino e aprendizagem da matemática 2. Ensino de funções 3. Resolução de problemas 4. Objetos de aprendizagem I. Buligon, Lidiane II. Martins, Márcio Marques III. Título.

Universidade Federal de Santa Maria
Centro de Ciências Naturais e Exatas
Programa de Pós-Graduação em Matemática em
Rede Nacional – PROFMAT

A Comissão Examinadora, abaixo assinada,
aprova a Dissertação de Mestrado

UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DE FUNÇÕES
ATRAVÉS DA UTILIZAÇÃO DE OBJETOS DE APRENDIZAGEM

elaborada por
Renata Magarinus

como requisito parcial para obtenção do grau de
Mestre em Matemática

Comissão Examinadora:

Lidiane Buligon, Dra.
(Presidente/Orientador)

Márcio Marques Martins, Dr.
(Coorientador - UFFS)

Carmen Vieira Mathias, Dra. (UFSM)

Rosane Rossato Binotto, Dra. (UFFS)

Santa Maria, 15 de abril de 2013.

DEDICATÓRIA

À minha mãe, que além dos primeiros passos
me ensinou os verdadeiros valores da vida.

AGRADECIMENTOS

Ao meu companheiro Márcio Barella, pelo amor, paciência, compreensão e incentivo durante todos os momentos do curso, meu sincero muito obrigada.

À minha família pelo apoio e compreensão, principalmente nos momentos em que me fiz ausente.

À professora Lidiane Buligon, pelo carinho e atenção a mim dedicados e por compartilhar de sua sabedoria na orientação deste trabalho.

Ao professor Márcio Marques Martins, pela colaboração e por suas ideias no desenvolvimento de nossa proposta.

Aos professores do curso Profmat, pela amizade, paciência e pelos conhecimentos compartilhados.

À professora Carmen Vieira Mathias, pela atenção, dedicação e competência demonstrada em relação à coordenação do curso.

À Capes pelo auxílio financeiro concedido nesses dois anos.

Aos meus colegas de mestrado, pela amizade e momentos de convivência, em especial pela colega e amiga Ana Luiza Kessler, que gentilmente me acolheu em sua casa.

À professora Rosane Rossato Binotto que aceitou o convite para fazer parte da banca examinadora deste trabalho.

RESUMO

Dissertação de Mestrado
Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT
Universidade Federal de Santa Maria

UMA PROPOSTA PARA O ESINO DE FUNÇÕES ATRAVÉS DA UTILIZAÇÃO DE OBJETOS DE APRENDIZAGEM

AUTORA: RENATA MAGARINUS
ORIENTADORA: LIDIANE BULIGON
Data e Local da Defesa: Santa Maria, 15 de abril de 2013.

O presente trabalho tem como objetivo apresentar uma proposta para a introdução e exploração dos principais conceitos presentes no estudo de funções afins e quadráticas. Esta proposta foi elaborada a partir da constatação, através de estudos preliminares, da existência de dificuldades em relação à compreensão e aprendizagem dos conceitos relacionados a este tema. Considerando a importância do estudo de funções no currículo escolar e na compreensão de fenômenos relacionados a diversas áreas do conhecimento, as atividades que compõem esta proposta estão fundamentadas nas ideias de que a aprendizagem se dá através de um processo de construção do conhecimento e pela interação social. Além disso, acreditando que a contextualização dos conteúdos e a interdisciplinaridade corroboram para a aprendizagem significativa da matemática, nosso trabalho propõe uma sequência de atividades que, a partir de problemas reais, pretende explorar os principais conceitos presentes no estudo de funções afins e quadráticas. Para auxiliar os alunos na resolução dos problemas e na exploração destes conceitos, utilizamos os objetos de aprendizagem, mais especificamente, os softwares Tracker e GeoGebra. Acreditamos que esta proposta poderá contribuir para a melhoria da qualidade do ensino da matemática e mais especificamente para o ensino de funções. Além disso, este trabalho poderá servir como inspiração aos professores de matemática para a criação de novas metodologias de ensino.

Palavras-chave: Ensino e aprendizagem da matemática. Ensino de funções. Resolução de problemas. Objetos de aprendizagem.

ABSTRACT

Master Course Dissertation
Professional Masters in Mathematics in National Network – PROFMAT
Universidade Federal de Santa Maria

A PROPOSAL FOR THE TEACHING OF FUNCTIONS THROUGH THE USE OF LEARNING OBJECTS
AUTHOR: RENATA MAGARINUS
ADVISER: LIDIANE BULIGON
Defense Place and Date: Santa Maria, April 15th, 2013.

The present work aims to present a proposal for the introduction and exploration of the main concepts in the study of affine and quadratic functions. This proposal was developed from the realization, through preliminary studies, the existence of difficulties in relation to learning and understanding of concepts related to this topic. Considering the importance of the study of functions in the school curriculum and understanding of phenomena related to different areas of knowledge, the activities that make up this proposal are based on the ideas that learning occurs through a process of knowledge construction and social interaction. Furthermore, believing that contextualization of content and interdisciplinarity to corroborate the significant learning of mathematics, our work proposes a sequence of activities from, real problems will explore the main concepts in the study of affine and quadratic functions. To assist students in solving problems and exploring these concepts and use the learning objects, more specifically, softwares Tracker and GeoGebra. We believe that this proposal will contribute to improving the quality of mathematics teaching and more specifically for teaching functions. Moreover, this work could serve as inspiration for math teachers to create new teaching methodologies.

Keywords: Teaching and learning of mathematics. Teaching functions. Problems solving. Learning Objects.

LISTA DE TABELAS

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A Matemática possui um papel importante no desenvolvimento da sociedade, e sua presença na educação escolar torna-se cada vez mais necessária para a evolução científica e produção de novos saberes.

Dentre os conteúdos matemáticos estudados na educação básica, o estudo de funções é, sem dúvida, um dos mais importantes. Sua relevância pode ser justificada pelo fato de que o conceito de função estabelece relações com vários outros conceitos matemáticos e pode ser aplicado no estudo de fenômenos em diversas áreas do conhecimento.

No âmbito matemático, o estudo de funções relaciona-se diretamente com a álgebra, no que se refere às expressões algébricas presentes nas leis de formação de funções e na relação entre variáveis, e com a geometria analítica, que utiliza de um sistema de eixos coordenados para a representação de seus gráficos.

A trigonometria tem boa parte de seu estudo e aplicações fundamentados nas funções trigonométricas e seus gráficos. Progressões aritméticas e geométricas também podem ser analisadas através de relações funcionais. E, na matemática financeira, podemos relacionar as grandezas envolvidas no cálculo de juros simples ou compostos através de funções.

Partindo para uma abordagem mais aprofundada da matemática, encontram-se os estudos do Cálculo Diferencial e Integral, cujo objeto de estudo são as relações funcionais.

Podemos citar ainda as conexões estabelecidas entre o estudo de funções e as outras áreas do conhecimento. No ensino da Física, vários fenômenos são descritos através de funções, como, por exemplo, no estudo dos movimentos, onde a distância percorrida por um móvel pode ser dada em função do tempo, e no estudo da eletricidade, onde a resistência de um condutor é dada em função de suas características, tais como diferença de potencial e intensidade da corrente.

Na Química e na Biologia também são inúmeras as situações onde as funções podem ajudar a descrever e compreender seus fenômenos. A decomposição de algumas substâncias radioativas e o crescimento de uma população de bactérias podem ser representadas através de funções exponenciais.

Na área das ciências sociais, econômicas e geográficas, as relações funcionais são úteis para descrever fenômenos, criar modelos que representem a realidade e que podem, por vezes. simular situações futuras.

Estas breves considerações nos mostram o quanto o estudo de funções é importante tanto para o desenvolvimento da própria Matemática como ciência como para a compreensão de vários fenômenos naturais, econômicos ou sociais.

Presente no currículo de Matemática da educação básica, o ensino de funções deve, segundo os Parâmetros Curriculares do Ensino Médio,

> […] garantir que o aluno adquira certa flexibilidade para lidar com o conceito de função em situações diversas e, nesse sentido, através de uma variedade de situações-problema de matemática e de outras áreas, o aluno pode ser incentivado a buscar a solução, ajustando seus conhecimentos sobre funções para construir um modelo para interpretação e investigação em Matemática. (BRASIL, 2000, p. 257)

Contudo, nossa prática como professora de matemática no ensino fundamental e médio demonstra que, apesar da possibilidade de contextualização e interdisciplinaridade, o ensino de funções não vem garantindo aos alunos sua efetiva aprendizagem ou a flexibilidade esperada para a resolução de problemas diversos. Muitos alunos demonstram dificuldades em trabalhar com funções e poucos parecem compreender seu conceito.

Através de uma breve revisão teórica sobre o ensino e aprendizagem de funções, encontramos indícios de que as dificuldades apresentadas pelos alunos do ensino médio também são verificadas por estudantes do ensino superior. Segundo Costa, A. (2004, p.12), “muitas das dificuldades apresentadas pelos estudantes no que se refere ao conceito de limite, derivada e integral recaíam na compreensão do conceito de função.”

Surpreendentemente, Costa, C. (2008, p. 93), investigando o conhecimento do professor de Matemática sobre o conceito de função, verificou que este, quando confrontado com questões envolvendo funções que geralmente são abordadas no ensino básico, “apresenta um fraco desempenho, demonstrando limitações incompatíveis com o seu grau de formação, ora produzindo os erros dos alunos desta etapa da educação, ora reproduzindo em sala de aula erros de abordagem e de conceito.”

A partir de tais constatações, verificamos, através de uma pesquisa, o que os alunos do ensino médio compreendem dos conceitos matemáticos presentes no estudo de funções. Tal pesquisa originou o trabalho final do curso de Especialização em Educação Matemática, de minha autoria (MAGARINUS, 2006).

Nossa pesquisa foi realizada com estudantes que já haviam estudado funções em anos anteriores. Através da coleta de dados em entrevistas individuais e a aplicação de algumas atividades referentes ao estudo de funções, constatamos que a maioria dos alunos demonstra dificuldade em expressar suas ideias sobre o que representa uma função e qual o seu significado, tendo dificuldade inclusive em estabelecer as condições necessárias para que uma relação seja definida como uma função, bem como na análise de gráficos funcionais, e não fazem qualquer referência a aplicações práticas.

Os resultados da pesquisa nos levaram a acreditar que o estudo de funções não proporcionou o desenvolvimento cognitivo dos alunos e a construção do conhecimento, além de ser realizado de maneira descontextualizada e pouco significativa.

Como implicações pedagógicas, nossa pesquisa apresentou como uma das possibilidades para a aprendizagem dos conceitos relacionados ao estudo de funções a contextualização dos conteúdos e a realização de atividades que propiciem a construção do conhecimento. Nessa perspectiva, acreditamos que, atividades interdisciplinares juntamente com abordagens metodológicas diferenciadas e a utilização de recursos didáticos variados, possam possibilitar uma maior significação dos conceitos estudados e, consequentemente, sua efetiva aprendizagem.

Após a leitura de vários trabalhos já desenvolvidos relacionados à aprendizagem de conceitos matemáticos e, em especial, aos conceitos presentes no estudo de funções, pudemos novamente constatar a importância dada à construção do conhecimento, contextualização dos conteúdos e à interdisciplinaridade.

Seguindo esta linha de pensamento, nosso trabalho consiste em apresentar uma proposta para a introdução e exploração dos principais conceitos presentes no estudo de funções afins e quadráticas, através de uma sequência de atividades que serão exploradas a partir de problemas reais.

Para auxiliar os alunos na resolução dos problemas e na exploração dos conceitos matemáticos neles envolvidos, vamos utilizar os objetos de aprendizagem Tracker e GeoGebra. O software Tracker será utilizado nas primeiras atividades cujo principal objetivo é explorar intuitivamente o conceito de função e a relação entre as variáveis. O software GeoGebra será utilizado para abordar, além do conceito de função, outros elementos presentes no estudo de funções afins e quadráticas a partir de uma análise gráfica.

O presente trabalho constitui-se de quatro capítulos. No capítulo 1, estão descritos os aportes teóricos desse trabalho, iniciando com um breve estudo sobre o desenvolvimento histórico de funções e suas definições, a forma como o ensino de funções é apresentado nos livros didáticos, algumas considerações a respeito do ensino e aprendizagem da matemática e sobre o ensino de funções. No capítulo 2, descrevemos o caminho para a realização da proposta, da escolha metodológica aos recursos didáticos utilizados, dos objetivos das atividades, os pré-requisitos para a aplicação das mesmas, o público-alvo e outras recomendações metodológicas, além das dificuldades previstas. No terceiro capítulo, apresentamos a sequência de atividades que compõem nossa proposta para o ensino de funções. Por fim, no capítulo 4 são apresentadas as considerações finais e algumas sugestões que possam complementar e contribuir para o ensino-aprendizagem de funções.

1 ALGUNS APORTES TEÓRICOS

1.1 Evolução do conceito de função através dos tempos

O desenvolvimento histórico do conceito de função ocorreu de maneira lenta, levando alguns séculos para atingir a forma como se apresenta atualmente nos livros didáticos.

Apesar de não haver consenso em relação à época em que se originou o conceito de função, é sabido que este teve início na tentativa de compreender e descrever os fenômenos naturais ou questões de ordem práticas.

Para Youschkevith (1976 apud ZUFFI, 2001), o desenvolvimento da noção de função compreende três fases: a Antiguidade, momento em que são verificados alguns casos de dependência entre duas quantidades, sem destacar ainda as noções gerais de quantidades variáveis e de funções. A Idade Média, onde visualizamos as noções funcionais expressas sob forma geométrica e mecânica, em que cada caso concreto de dependência entre duas quantidades eram representadas preferencialmente através de um gráfico ou por uma descrição verbal. E, por fim, o período Moderno, no qual começam a prevalecer expressões analíticas de funções, sendo, no final do século XVII, o momento mais intenso no desenvolvimento da noção de função, aproximando da que atualmente conhecemos.

Segundo Zuffi (2001), na Grécia Antiga, a noção de função aparece em estudos ligados a fenômenos naturais, como por exemplo, entre os pitagóricos que estudavam a interdependência quantitativa de diferentes quantidades físicas. Nesta época, cada problema era tratado de maneira particular o que exigia uma nova análise, não havendo preocupação com generalizações.

De acordo com Boyer (1974), no período Alexandrino, em estudos da astronomia, foi desenvolvida uma trigonometria completa de cordas e calculadas tabelas de quantidades que são similares às atuais tabelas de seno. Já entre registros babilônicos, cerca de 2000 anos a.C., evidências de relações funcionais estão presentes nas tabelas sexagesimais de quadrados, cubos, raízes, multiplicações, entre outras.

Apesar destas manifestações, não há registros de que os povos antigos tenham criado uma noção geral de quantidade variável ou de função.

Durante a Idade Média, a noção de função amadurecia gradativamente na chamada filosofia natural, principalmente em relação aos fenômenos físicos. Nesta época a noção de função aparece numa forma mais genérica.

Segundo Boyer (1974, p. 193), Nicole Oresme (1323-1382), matemático francês, desenvolveu a teoria das latitudes e longitudes para descrever os diferentes graus de intensidade das variáveis velocidade e tempo relacionados durante o movimento de um corpo que se desloca com aceleração constante. Oresme contribuiu de maneira significativa para o desenvolvimento do conceito de função e foi o precursor na representação gráfica de uma função.

Em Zuffi (2001), Galileu Galilei (1564-1642), em seus estudos sobre o movimento de corpos em queda a partir do repouso, introduziu o aspecto quantitativo nas representações gráficas, expressando relações funcionais através da relação entre causas e efeitos e em linguagem de proporção. Para a autora, a partir dos estudos realizados no campo algébrico, o desenvolvimento da noção de função foi então impulsionado. François Viète (1540-1603), ao propor a representação simbólica de uma quantidade desconhecida, possibilitou exprimir relações através de fórmulas algébricas. No entanto, seu maior interesse estava em obter a solução de problemas específicos, onde não havia a ideia de relacionar duas grandezas que variam.

De acordo com Eves (2004), coube a Descartes (1696-1750), em seus estudos sobre equações indeterminadas, introduzir a ideia de que uma equação em x e y é uma forma de expressar uma relação de dependência entre quantidades. Nesta época, as curvas eram o principal objeto de estudo na Matemática. Alguns fenômenos passaram a ser representados por curvas e estas passaram a ser expressas por equações.

Segundo Boyer (1974), Isaac Newton (1642-1727) utilizou o termo “fluentes” para apresentar alguma relação entre variáveis. E, em 1673, Leibniz utiliza a palavra “função” em seu manuscrito intitulado “Methodus tangentium inversa, seu de fonctionibus” para se referir à quantidade variando ponto a ponto de uma curva. Alguns anos mais tarde, em 1698, Jean Bernoulli utiliza a palavra “função” ao se referir a quantidades que dependem de uma variável e propõe a primeira definição explícita de uma função como expressão analítica, sem estabelecer, no entanto. o modo de construir uma função a partir da variável independente.

Leonhard Euler, no século XVIII, foi o primeiro a tratar o cálculo como uma teoria das funções. A definição de função proposta por ele, distingue quantidades variáveis das quantidades constantes, no entanto, não explicita o que seria uma “expressão analítica”, termo presente em sua definição. Passado algum tempo, Euler propõe uma nova definição onde estende seu conceito de função:

> Se certas quantidades dependem de outras quantidades de maneira que, se as outras mudam, estas quantidades também mudam, então temos o hábito de chamar estas quantidades de funções destas últimas. Esta denominação é bastante extensa e contém nela mesma todas as maneiras pelas quais uma quantidade pode ser determinada por outras. Consequentemente, se x designa uma quantidade variável, então todas as outras quantidades que dependem de x, de qualquer maneira, ou que são determinadas por x, são chamadas de funções de x. (EULER apud ROQUE, PITOMBEIRA, 2012, p. 232-233).

Euler também define função contínua e função descontínua, no entanto seu entendimento de continuidade é bem diferente do que temos hoje. Para ele, uma função seria contínua se, ao longo de todo seu domínio, fosse representada apenas por uma expressão analítica. Mais tarde, Cauchy propõe um exemplo que contrapõe esta definição.

Segundo Kleiner (1989), Louis Lagrange (1736-1813), em seus estudos sobre funções, desenvolveu a notação atual para derivadas de várias ordens de uma função. Em sua definição de funções, propõe que estas representam uma combinação de operações distintas sobre quantidades conhecidas a fim de se obter os valores de quantidades desconhecidas.

Durante todo o século XVIII, observamos uma despreocupação em formalizar o conceito de função. Mas, no século seguinte, a fundamentação rigorosa da Análise passou a fazer parte dos trabalhos de vários matemáticos da época.

De acordo com Zuffi (2001), o matemático francês Augustin Cauchy (1789-1857) estudou e aprofundou a concepção de função, desenvolvendo uma teoria sobre variáveis complexas. No entanto, sua definição para funções ainda era imprecisa.

Das definições para funções propostas naquela época, a que mais se aproxima da aceita atualmente foi apresentada, em 1837, por Peter Gustav Lejeune Dirichlet:

> […] se uma variável y está relacionada com uma variável x de tal modo, que sempre que é dado um valor numérico a x, existe uma regra segundo a qual um valor único de y fica determinado, então diz-se que y é função da variável independente x. (BOYER,1974, p. 405)

Ainda era necessário estabelecer o conceito de “conjunto” e de “números reais”, mas faltava pouco para que o conceito de função fosse definitivamente estabelecido.

Durante o ano de 1872, muitos avanços foram feitos em relação à noção de número real e de conjunto infinito. Entre os matemáticos colaboradores estavam Bernhard Bolzano (1781-1848), Karl Weierstrass (1815-1897) e Julius Dedekind (1831-1916). O matemático italiano Giuseppe Peano (1858-1932), além de sua contribuição à noção de número, propôs reduzir o conceito de função ao conceito de relação unívoca (SIERPINSKA apud ZUFFI, 2001, p. 14).

Em meados do século XX, um grupo de matemáticos franceses, entre eles André Weil e Jean Dieudonné, que adotou o pseudônimo de Nicolas Bourbaki, publicou vários trabalhos apresentando a matemática moderna, que teve como consequência a redefinição de conceitos básicos na linguagem de conjuntos. Em 1939, em uma de suas publicações, este grupo propõe a seguinte definição de função:

> Sejam E e F dois conjuntos, distintos ou não. A relação entre uma variável x de E e uma variável y de F, é chamada de uma relação funcional em y se, para todo $x \in E$, existe um único $y \in F$ que está associado, na relação dada, com x. Damos o nome de função para a operação que, de alguma forma, associa a cada elemento $x \in E$ o elemento $y \in F$ que é associado a x pela relação estabelecida; diz-se que y é o valor da função relativo ao elemento x, e que a função está determinada pela relação funcional dada. Duas relações funcionais equivalentes determinam a mesma função. (KLEINER, 1989, p. 18, tradução nossa).

Este breve panorama histórico nos mostra como foi complexo o caminho percorrido pelos matemáticos em relação ao desenvolvimento histórico do conceito de função. De acordo com Zuffi (2001), os problemas que ocuparam os matemáticos no decorrer dos tempos exerceram forte influência na elaboração do conceito de função. No início, quando as preocupações eram descrever e compreender os fenômenos naturais, identificamos a dependência entre variáveis de uma maneira qualitativa; posteriormente, evidenciamos o aparecimento das representações gráficas e descrições verbais; mais tarde, com o desenvolvimento da matemática moderna, surgem as funções sendo representadas como expressões analíticas e, finalmente, como uma relação entre conjuntos.

A autora também destaca que, entre os professores do ensino médio, a linguagem matemática utilizada para expressar suas próprias concepções sobre o conceito de função apresenta visões coincidentes com os momentos históricos detalhados anteriormente. Assim, na formalização do conceito de função estão muito presentes as ideias apresentadas nas definições de Dirichlet e Bourbaki e, no tratamento informal, ou exemplos e resoluções de problemas, as ideias se assemelham à definição de Euler.

1.2 A definição de função proposta em livros didáticos

Para exemplificar a maneira como se apresenta a definição de função em alguns livros didáticos, incluímos, na sequência, as definições propostas por três livros, sendo o primeiro Conceitos fundamentais da matemática, de Bento de Jesus Caraça (1989); o segundo A Matemática do Ensino Médio, de Elon L. Lima, Paulo C. P. de Carvalho, Eduardo Wagner e Augusto C. Morgado (2006); e, por último, Um Curso de Cálculo, de Hamilton Luiz Guidorizzi (2001). Estes livros, geralmente, são fontes de estudo de vários estudantes de cursos de graduação e também referência para professores de matemática.

Caraça (1989) propõe a definição de função através de uma série de reflexões lógicas a respeito da utilização de instrumentos matemáticos, a fim de investigar fenômenos naturais que de algum modo evidenciam uma relação de dependência. Além disso, procura um modo de quantificar as variações qualitativas destes fenômenos. Resumidamente, o autor explica como surgiu a necessidade de criar um instrumento matemático que estudasse a variação de quantidade, ou seja, a lei quantitativa, cuja essência fosse a correspondência entre dois conjuntos.

Segundo o autor, o conceito de função apareceu no campo matemático para servir de instrumento próprio para o estudo destas leis. Em seguida, propõe a definição de função como uma correspondência de conjuntos: “Sejam x e y duas variáveis representativas de conjuntos de números; diz-se que y é função de x e escreve-se $y = f(x)$, se entre as duas variáveis existe uma correspondência unívoca no sentido $x \rightarrow y$. A x chama-se variável independente, a y variável dependente.” (1989, p. 129).

O livro traz ainda uma representação analítica e geométrica para função. A primeira representação consiste “em dar um conjunto de operações de modo tal que, por meio delas, se possa fazer corresponder a cada valor de *a* de x um valor *b* de y.”(1989, p. 130). Para a representação geométrica, considera um sistema de referência cartesiano e uma curva qualquer de modo que esta não seja intersectada em mais de um ponto por uma reta traçada paralela ao eixo vertical. Desta forma, a correspondência é unívoca no sentido $x \rightarrow y$, o que significa que, para cada *a* de x, encontramos somente um *b* de y. (1989, p. 133-134).

O segundo livro analisado propõe a seguinte definição para função:

> Dados os conjuntos X, Y, uma *função* $f: X \rightarrow Y$ (lê-se: “uma função de X e Y”) é uma regra (ou conjunto de instruções) que diz como associar a cada elemento $x \in X$ um elemento $y = f(x) \in Y$. O conjunto X chama-se o *domínio* e Y é o *contra-domínio* da função f. Para cada $x \in X$, o elemento $f(x) \in Y$ chama-se *imagem* de x pela função f, ou *valor* assumido pela função f no ponto $x \in X$. Escreve-se $x \rightarrow f(x)$ para indicar que f transforma (ou leva) x em f(x). (LIMA, et al., 2006, p. 38)

Observamos que a definição acima apresenta a relação de correspondência entre conjuntos, a necessidade de uma lei que defina como associar os elementos destes conjuntos, os conceitos de domínio, contradomínio e imagem e, implicitamente, a noção de variável.

Na sequência, os autores fazem algumas recomendações em relação à linguagem matemática adequada no trato de funções e destacam que uma função é constituída de três partes: domínio, contradomínio e a lei de correspondência x → f(x), sendo que as duas primeiras podem ficar subentendidas ao definirmos "a função f"[1].

Guidorizzi (2001, p. 26), em seu livro de cálculo, define função como sendo uma terna (A, B, a → b), "onde *A* e *B* são dois conjuntos e *a* → *b* uma regra que nos permite associar a *cada* elemento *a* de *A* um *único b* de *B*.". Define o domínio da função como sendo o conjunto A, o contradomínio como sendo o conjunto B e explicita a relação entre os conjuntos como sendo unívoca de A para B.

Em relação a representação gráfica, o autor define como sendo um subconjunto do conjunto de todos os pares ordenados (x, y) de números reais e, tomando o plano de um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas, o gráfico da função pode ser considerado como o lugar geométrico descrito pelos pontos (x, f(x)), onde x pertence ao domínio da função. Em seguida, o autor apresenta exemplos que envolvem diferentes formas de representar relações funcionais, como tabelas, gráficos e expressões algébricas.

Ao apresentar o conteúdo matemático em sala de aula, é muito provável que os professores do ensino médio utilizem como referência os livros didáticos da educação básica adotados por seus alunos. Partindo deste pressuposto e acreditando que um fator a interferir na aprendizagem do conceito de função é a maneira como este é apresentado aos alunos, faremos uma breve descrição e alguns comentários sobre as definições de função apresentadas por dois dos livros didáticos mais solicitados pelos professores brasileiros ao Ministério da Educação no ano de 2012[2].

O livro para o ensino médio Matemática: contextos e aplicações, do autor Luiz Roberto Dante (2011), inicia o estudo de funções com uma breve descrição da importância do estudo de funções em outras áreas do conhecimento e de alguns aspectos do seu desenvolvimento histórico. Depois, explora intuitivamente a noção de função através de alguns problemas matemáticos e, então, apresenta a noção de função por meio de conjuntos:

1 Um exemplo dado pelos autores é a função 1/x, que está subentendido que seu domínio é dado pelos números reais com exceção do número zero.
2 Segundo o relatório do PNLD (Programa Nacional do livro didático) os livros mais solicitados pelos professores no ano de 2012 e que serão adquiridos pelo MEC no ano de 2013.

“Dados dois conjuntos não vazios A e B, uma função de A em B é uma regra que indica como associar cada elemento $x \in A$ a um único elemento $y \in B$.” (DANTE, 2011, p. 75).

Após definir uma função, o autor apresenta a notação $f: A \rightarrow B$, evidenciando que a função f transforma x de A em y de B, escrevendo então $y = f(x)$. Na sequência, apresenta os conceitos de domínio, contradomínio e imagem através de conjuntos.

Outro livro de ensino médio analisado é Matemática: ciência e aplicações, de Gelson Iezzi [et al], (2010). Neste, os autores também propõem a introdução do estudo de funções através da resolução de problemas, os quais envolvem questões de Física, Biologia e outros temas próximos ao cotidiano do aluno. Logo depois, introduzem a noção de função como relação entre conjuntos e a definem do seguinte modo: “Dados dois conjuntos não vazios A e B, uma relação (ou correspondência) que associa a cada elemento $x \in A$ um único elemento $y \in B$ recebe o nome de função de A em B.” (IEZZI et al, 2010, p. 47).

Num segundo momento, o livro apresenta a notação $f: A \rightarrow B$, onde f representa um conjunto de pares ordenados (x, y) que caracteriza uma função de A em B. Depois, traz a definição de funções por fórmulas e apresenta o conceito de domínio, contradomínio e imagem por meio de conjuntos.

A abordagem utilizada nos livros analisados, ao introduzir o estudo de funções é feita através de problemas contextualizados com aspectos interdisciplinares, evidenciando a variação e a dependência entre grandezas, o que poderá facilitar a compreensão do que é uma função. Entretanto, no momento de definir formalmente uma função, os autores a fazem por meio de conjuntos e esta abordagem nos parece totalmente desvinculada da anterior, como se não se tratasse do mesmo conceito. Esta observação pode indicar um possível obstáculo na aprendizagem deste conceito por parte dos estudantes.

1.3 O estudo de funções segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais do ensino médio: PCNEM

De acordo com os PCNEM, durante o ensino médio, etapa final da educação básica, a matemática deve contribuir para a construção de uma visão de mundo, onde os estudantes tenham condições de ler e interpretar a realidade e desenvolver as habilidades e competências que, ao longo de suas vidas, poderão lhes ser exigidas.

Sabe-se que o conhecimento matemático é necessário para a compreensão de uma grande diversidade de situações da vida cotidiana, servindo, também, como instrumento de investigação e apoio a outras áreas do conhecimento. Neste sentido, os parâmetros curriculares destacam que:

> Aprender Matemática de uma forma contextualizada, integrada e relacionada a outros conhecimentos traz em si o desenvolvimento de competências e habilidades que serão essencialmente formadoras, à medida que instrumentalizam e estruturam o pensamento do aluno, capacitando-o para compreender e interpretar situações, para se apropriar de linguagens específicas, argumentar, analisar e avaliar, tirar conclusões próprias, tomar decisões, generalizar e para muitas outras ações necessárias à sua formação. (BRASIL, 2000, p. 111).

Em relação ao estudo de funções, o documento o considera como articulador de diferentes conteúdos, dentro e fora da própria matemática. Além disso, afirma que o ensino de funções permite ao aluno o desenvolvimento da linguagem algébrica, indispensável para expressar a relação entre as grandezas e modelar situações problemas. Desta maneira, os problemas de aplicação devem introduzir o estudo de funções, servindo de contexto e motivação para a aprendizagem dos conceitos envolvidos neste tema.

Os PCNEM também chamam a atenção para o fato de que, após a definição de função, o estudo de conjuntos e relações é abandonado, uma vez que para a análise dos diferentes tipos de função este estudo é desnecessário. Portanto, destacam que "o ensino pode ser iniciado diretamente pela noção de função para descrever situações de dependência entre duas grandezas, o que permite o estudo a partir de situações contextualizadas, descritas algébrica e graficamente." (BRASIL, 2000, p. 121). Além disso, salientam que a linguagem excessivamente formal deve ser moderada e, em determinados momentos, deixada de lado.

1.4 Algumas considerações a respeito do ensino e aprendizagem em Matemática

No currículo escolar, a Matemática é vista como componente essencial para o desenvolvimento pleno da cidadania. Sua aplicabilidade em várias áreas do conhecimento, a presença no cotidiano e sua importância na formação das capacidades intelectuais dos estudantes, são algumas das justificativas para seu ensino em todos os níveis da educação básica. No entanto, a grande maioria dos alunos não compartilha deste mesmo sentimento em relação à Matemática, que é vista por eles como uma disciplina difícil e de conteúdos, muitas vezes, incompreensíveis, o que pode ser confirmado pelos baixos índices de rendimento apresentados em várias avaliações a nível nacional.

Esta realidade fez surgir inúmeras pesquisas e trabalhos relacionados ao ensino e aprendizagem da Matemática. Como resultado destes estudos, surgiram várias propostas pedagógicas que se opõem ao ensino tradicional, o qual enfatiza a transmissão do saber já construído e onde o aluno é um mero espectador.

O desenvolvimento do construtivismo, iniciado pelas teorias estruturalistas de aprendizagem de Piaget, e a tendência sociointeracionista, baseada nas teorias de Lev Vigotsky, reforçam a ideia de que a aprendizagem do aluno deva ser um processo de construção do conhecimento pela interação social.

Além das reformulações curriculares propostas nos últimos anos, passou-se a discutir e considerar o processo pelo qual o aluno aprende. Neste sentido, aspectos psicológicos e as formas de comunicação passaram a desempenhar papéis importantes na definição das metodologias de ensino, visando à aprendizagem dos conceitos matemáticos.

Observamos que vários fatores interferem no processo de ensino e aprendizagem dos conteúdos matemáticos. Portanto, alguns aspectos devem ser observados no momento do planejamento e execução de uma proposta pedagógica. Na sequência, vamos dissertar sobre alguns tópicos que julgamos importantes neste processo.

1.4.1 Transposição didática e a contextualização do saber

Quando um determinado saber científico, criado através da evolução da própria ciência, é selecionado para transformar-se em saber escolar, passa por uma série de transformações, a fim de adequar-se a uma linguagem mais acessível ao nível escolar. Esse processo recebe o nome de transposição didática, termo usado, pela primeira vez, em 1975, por Michel Verret e que na década de 1980 foi inserido em um contexto mais específico pelo matemático Yves Chevallard.

Segundo Pais (2002), entende-se por saber científico aquele associado à produção acadêmica, apresentado através de artigos, teses, livros e relatórios, e saber escolar aquele vinculado ao ensino básico, ou seja, o conjunto de conteúdos presentes no currículo escolar que se apresenta basicamente através dos livros didáticos.

Para o autor, o estudo da transposição didática permite visualizar suas fontes de “[...] influências que contribuem na redefinição de aspectos conceituais e também na reformulação de sua forma de apresentação”. (PAIS, 2002, p. 19).

A dinâmica da transposição didática acontece, segundo a definição de Chevallard, através de dois momentos. O primeiro transforma o saber científico em saber a ensinar e o segundo transforma o saber a ensinar em saber ensinado. No primeiro momento, o saber passa por influências de agentes do processo educativo como cientistas, pesquisadores, especialistas, professores, políticos e autores de livros. Já no segundo momento, observa-se uma maior influência do meio escolar, no qual o professor e os alunos estão inseridos.

Desta forma, podemos dizer que o saber ensinado está longe de ser tal qual se apresenta o saber científico e tampouco deve ser concebido como uma mera simplificação deste.

É o professor quem adapta o saber escolar em saber ensinado. Assim, de posse do saber, o professor, a partir de seu conhecimento sobre o assunto, define a melhor forma de apresentá-lo ao aluno, levado em consideração seus objetivos em ensinar tal conteúdo e sua importância no currículo escolar.

Acreditamos que o conhecimento do professor em relação aos conteúdos matemáticos, tanto no que diz respeito a seu contexto histórico como sua importância científica, são fundamentais para a elaboração de sua ação pedagógica. Além disso, a postura crítica e questionadora deve acompanhar o professor, não somente durante a elaboração de suas aulas, mas também nos momentos das avaliações.

A fim de contribuir na estruturação de uma educação mais significativa e que proporcione a aprendizagem efetiva dos conteúdos matemáticos, encontra-se, no contexto da análise da transposição didática, a noção de contextualização do saber.

Segundo Pais (2002, p. 32), é da prática do matemático apresentar o saber de modo generalizado, eliminando as condições contextuais de sua pesquisa. O professor, no entanto, "deve recontextualizar o conteúdo, tentando relacioná-lo a uma situação que seja mais compreensível para o aluno".

Micotti (1999) também alerta para o fato de que o elevado nível de abstração, a linguagem simbólica e o rigor do raciocínio com que o saber matemático é comunicado nos livros, podem oferecer dificuldades à compreensão dos conceitos matemáticos por parte dos estudantes.

A respeito disso, a autora destaca que

> O saber matemático compreende o domínio do sistema de representação e também das regras que regem ações abstratas. A leitura (compreensão) de escritas

> matemáticas requer o conhecimento do sistema de notação. Sem este conhecimento, torna-se difícil ligar as expressões simbólicas com os seus significados. (MICOTTI, 1999, p. 163).

Observamos, de acordo com a autora, que em muitos momentos a compreensão dos saberes matemáticos é baseada em raciocínios que exigem instrumentos cognitivos refinados. Entendemos, desta forma, que é imprescindível que o professor compreenda as formas como o aluno se apropria do saber para, a partir daí, traçar suas estratégias de ensino.

Acreditamos que o aluno terá maiores condições de apropriar-se dos saberes matemáticos quando for estimulado a pensar e fazer inferências sobre o objeto de estudo, ou seja, quando ele participar ativamente do processo de construção do conhecimento. Neste sentido, é importante, sempre que possível, possibilitar em sala de aula situações envolventes, desafiadoras e significativas para o aluno.

Na busca por estas situações que favoreçam, antes de mais nada, a aprendizagem dos conceitos matemáticos, visualizamos na contextualização do saber uma ótima alternativa.

Muitos professores e estudiosos defendem a contextualização do saber matemático, considerando esta como uma das mais importantes noções pedagógicas da atualidade. No entanto, deve-se ter o cuidado de não reduzir a contextualização do ensino a uma única referência, ou então acreditar que todos os conteúdos matemáticos relevantes devam estar presentes no cotidiano do aluno ou ter uma aplicação prática. O aluno também deve perceber a importância de certos conceitos para o desenvolvimento da Matemática como ciência. Muitos conceitos matemáticos tem razão de existir na própria matemática e mostrar estas possíveis conexões entre os conteúdos matemáticos também é uma forma de contextualizar.

Para Fonseca (1995), um aspecto importante em relação à contextualização do saber é a falsa ideia de que esta prática nega a importância da compreensão e exclui a necessidade de técnicas. A contextualização busca possibilitar uma melhor compreensão dos conteúdos estudados, permitindo ao aluno a utilização das técnicas e instrumentos matemáticos de modo significativo e não mecanicamente como é comum ocorrer no ensino tradicional.

Entendemos, também, que o ensino da Matemática deve contemplar situações contextualizadas e significativas ao introduzir um novo conteúdo e, na sequência de seu estudo, possibilitar uma gradativa formalização dos conceitos matemáticos.

Para Moysés (1997), o ensino contextualizado da matemática deve privilegiar situações em que a significação dos conceitos matemáticos seja construída mediante um processo de interação social, de trocas de experiências. A autora ainda destaca que, no processo de aprendizagem, a contextualização do conhecimento permite que o aluno tenha um raciocínio contínuo ao resolver um problema matemático, além de estar mais apto a transferir para novas situações o conhecimento que foi construído na prática.

A contextualização poderá contribuir no processo de ensino e aprendizagem da matemática, uma vez que

> [...] ajuda a desenvolver no aluno a capacidade de relacionar o apreendido com o observado e a teoria com suas consequências e aplicações práticas. Ajuda também a articular a Matemática com temas atuais da ciência e da tecnologia, bem como fazer conexões dentro da própria Matemática. (DANTE, 2005, p. 7)

Contudo, entendemos que contextualizar é favorecer, em sala de aula, um ambiente em que o aluno seja estimulado a resolver problemas que tenham sentido para ele, e que de algum modo seus conhecimentos prévios possam ser mobilizados na busca por soluções e na geração de novos saberes.

1.4.2 Formação dos conceitos e a linguagem matemática

Pesquisas realizadas por Lev Vygotsky (apud OLIVEIRA, 1999) sugerem que o desenvolvimento psicológico do ser humano está diretamente ligado às relações interpessoais e socioculturais do indivíduo. Principalmente a partir das relações pessoais é que o indivíduo começa a construir conceitos e dar significado a tudo aquilo que o rodeia.

Desde que nascemos desenvolvemos nossas capacidades psicológicas, que nos possibilitarão pensar, imaginar, analisar, comparar, memorizar e relacionar os fatos. É claro que este processo de desenvolvimento não é algo que se finda, que tenha um ponto de chegada, mas sim um processo contínuo, pois o ser humano é inacabado e está sempre em transformação no que se refere a sua habilidade psicológica e intelectual.

Para Oliveira (1999), a construção de significados é extremamente importante para o aprendizado e, consequentemente, para o desenvolvimento mental do aluno. Como afirma Vygotsky, o desenvolvimento do indivíduo é baseado no aprendizado. Quando nos relacionamos com as pessoas e com o mundo, estamos trocando experiências e informações, podendo aprender algo novo e, desta forma, construir conceitos e significados, desenvolvendo nossas capacidades psicológicas, tornando-as cada vez mais complexas.

Para Vygostky (2001), existe uma diferença entre o desenvolvimento dos conceitos espontâneos e científicos. Os primeiros são aprendidos de maneira informal, pela interação social do dia a dia. Já os conceitos científicos são aqueles aprendidos de forma sistemática e intencional.

Isto posto, temos que o processo de ensino e aprendizado que ocorre no âmbito escolar propicia o desenvolvimento dos conceitos científicos. A respeito disso, Vygotsky afirma que "Os conceitos científicos, com seu sistema hierárquico de inter-relações, parecem ser o meio em que primeiro se desenvolvem a consciência e o domínio do objeto, sendo mais tarde transferidos para outros conceitos e outras áreas do pensamento." (VYGOTSKY, 2001, p. 92).

Considerando, então, o fato de que o desenvolvimento do aluno é baseado no seu aprendizado e que este está intimamente ligado às relações interpessoais, podemos dizer que a linguagem e a metodologia utilizadas em sala de aula são dois aspectos importantes na formação dos conceitos científicos. Além disso, Moysés (1997) ainda destaca a necessidade de relacionar os conceitos científicos com seus conceitos espontâneos.

O ensino tradicional da matemática tende a priorizar, em excesso, a memorização de fórmulas, regras, definições, teoremas e demonstrações. Esta prática não proporciona compreensão conceitual, visto que são voltados, na maioria das vezes, à reprodução de modelos pré-estabelecidos (PAIS, 2002).

Segundo Miguel (2006), a formação de conceitos matemáticos deve considerar, como teses importantes da ação pedagógica, as perspectivas de: contextualização, onde são valorizados aspectos socioculturais; historialização, evidenciando a evolução das ideias matemáticas e mostrando a Matemática como um processo de construção; e enredamento, onde as ideias são organizadas em articulação com as diversas áreas do conhecimento.

Pais (2002) também destaca que um dos principais obstáculos didáticos enfrentados no ensino da matemática, refere-se à forma simplificada e formal como os conteúdos são apresentados nos livros didáticos. Seguindo as ideias do autor, o ensino da matemática deve priorizar a construção e a compreensão dos conceitos, proporcionando atividades significativas e possibilitando aos alunos fazer indagações, observações, comparações e constatações sobre o objeto em estudo para, finalmente, chegar às definições formais.

A matemática possui uma linguagem específica, baseada na utilização de símbolos que visam facilitar a comunicação de ideias e conhecimento matemático. No entanto, em sala de aula, o uso excessivo de simbologia e formalismo matemático rigoroso, que muitas vezes não é familiar aos alunos, pode comprometer a aprendizagem de conceitos ou até mesmo impedir qualquer compreensão dos mesmos (ZUCHI, 2004).

A Teoria Vygotskyana, considera que a linguagem humana surgiu como um sistema simbólico de mediação das relações pessoais. Essa linguagem passou a auxiliar a comunicação e a relação entre o homem e seu objeto de conhecimento, tendo duas funções: a de relação social e de pensamento generalizante. Desta maneira, a linguagem humana tem também a função de classificar um objeto ou situação em relação aos seus atributos, numa determinada categoria conceitual, favorecendo, assim, a abstração.

Mediante tais considerações, percebe-se a importância da linguagem e da metodologia utilizadas em sala de aula para a formação dos conceitos científicos do aluno. De acordo com Zuchi (2004), o professor, ao comunicar-se com os alunos, deve fazer uso de uma linguagem significativa, a fim de promover a compreensão dos conceitos e mostrar que o uso de símbolos tem por finalidade facilitar a comunicação do conhecimento matemático.

1.4.3 A resolução de problemas e as tecnologias no ensino da matemática

A resolução de problemas é uma tendência no ensino da matemática e sua importância é indiscutível, uma vez que se trata de uma especificidade desta área do conhecimento. A própria evolução da Matemática sempre teve como pano de fundo a busca de soluções para problemas.

Muitos atribuem o sucesso do indivíduo no campo matemático à sua capacidade de raciocinar e pensar adequadamente. Comumente se acredita que o aluno que desenvolve estas capacidades está mais apto a compreender e resolver problemas matemáticos.

Um dos objetivos ao abordar conceitos matemáticos a partir da resolução de problemas é contribuir para o desenvolvimento intelectual do aluno. De acordo com Pozo (1998) “[...] quando um aluno ou qualquer pessoa enfrenta uma tarefa do tipo que denominamos *problema*, precisa colocar em ação uma ampla série de habilidades e conhecimentos” (POZO, 1998, p. 19).

Na década de sessenta, George Polya começava a investigar sistematicamente o ensino através da resolução de problemas e a partir daí esta tendência se estabeleceu enquanto campo de pesquisa na Educação Matemática. Atualmente, esta prática é bastante difundida no Brasil em todas os níveis da Educação Básica e várias pesquisas legitimam sua importância no processo de ensino e aprendizagem.

Onuchic enfatiza que

> Quando os professores ensinam matemática através da resolução de problemas, eles estão dando a seus alunos um meio poderoso e muito importante de desenvolver sua própria compreensão. À medida que a compreensão dos alunos se torna mais profunda e mais rica, sua habilidade em usar matemática para resolver problemas aumenta consideravelmente. (1999, p. 208)

Observamos nas palavras da autora influências do construtivismo e a relação existente entre a compreensão da matemática e a capacidade de resolver problemas, na qual uma depende da outra.

A autora defende ainda que “[...] o ponto de partida das atividades matemáticas não é a definição mas o problema; […] que a Resolução de Problemas não é uma atividade para ser desenvolvida em paralelo ou como aplicação da aprendizagem, mas como orientação para a aprendizagem.” (ONUCHIC, 1999, p. 215).

Os PCNEM também sugerem que a resolução de problemas seja o ponto de partida do trabalho docente aliado à contextualização do saber.

A metodologia de resolver problemas prevê muito mais que apenas levar o aluno a encontrar soluções. O importante, neste processo, é o caminho percorrido até se chegar a solução de um problema, pois é neste momento que muitos conceitos matemáticos poderão ser explorados e novos saberes constituídos.

De acordo com Schroeder e Lester (1989 apud ONUCHIC, 1999), podemos abordar a resolução de problemas a partir de três diferentes concepções: ensinar sobre resolução de problemas, ensinar a resolver problemas e ensinar matemática através da resolução de problemas.

A primeira concepção baseia-se no modelo proposto por Polya (1995), que descreve um conjunto de quatro fases interligadas no processo de resolução de problemas matemáticos. Neste modelo, primeiramente é preciso compreender o problema, depois criar um plano, na sequência executar o plano e finalmente examinar a solução obtida.

Ao ensinar a resolver problemas, o principal objetivo é fazer com que os alunos sejam capazes de mobilizar seus saberes para encontrar soluções. Neste caso, o conteúdo matemático é ensinado para esse fim.

Na última concepção, os problemas são vistos como o primeiro passo para se aprender matemática. O problema é considerado “como um elemento formador de um processo de construção do conhecimento matemático, ou seja, essa metodologia vem a contribuir na formação dos conceitos antes mesmo de sua apresentação em linguagem abstrata.” (LEÃO, BISOGNIN, 2009, p. 30).

De acordo com Onuchic, ensinar matemática mediante a resolução de problemas é a abordagem mais adequada com os objetivos e recomendações dos PCNs, uma vez que:

> […] conceitos e habilidades matemáticas são aprendidos no contexto de resolução de problemas. O desenvolvimento de processos de pensamento de alto nível deve ser promovido através de experiências em resolução de problemas, e o trabalho de ensino de matemática deve acontecer numa atmosfera de investigação orientada em resolução de problemas. (1999, p. 207-208)

Além disso, nesta abordagem o aluno não só aprende resolvendo problemas como aprende a matemática para resolvê-los.

Visando auxiliar nesta tarefa, a utilização de tecnologias no ensino de matemática está se tornando uma tendência pedagógica muito difundida no âmbito educacional.

Nas últimas décadas, o desenvolvimento acelerado da tecnologia transformou a vida das pessoas e seus reflexos foram sentidos também na prática escolar. A escola passou a se preocupar com a preparação dos alunos para as novas exigências do mercado de trabalho e da vida em sociedade.

Assim, a questão que passou a inquietar os educadores é como fazer uso das tecnologias no contexto escolar, a fim de colaborar para a aprendizagem de novos saberes.

Muitas iniciativas já surgiram para garantir o acesso de professores e alunos à esses recursos e também oferecer subsídios para que se faça o melhor uso destes entes tecnológicos na promoção de uma educação de qualidade. Um desses recursos chama-se objetos de aprendizagem, que segundo Audino e Nascimento, “podem ser encarados como materiais importantes no processo de ensino e aprendizagem, pois nos fornecem a capacidade de simular e animar fenômenos, entre outras características [...]” (2010, p. 3).

No início, muitos professores manifestaram resistência a esta nova tendência pedagógica, em razão do sentimento de despreparo em relação ao uso de computadores. Com o passar do tempo e a familiarização com os recursos computacionais, este sentimento foi diminuindo. No entanto, são muitos os docentes que, tendo o acesso, ainda não fazem uso de laboratórios de informática e muitos que o fazem não utilizam para outro fim senão para pesquisas na internet.

Os computadores, por exemplo, não podem apenas servir como facilitadores de uma prática que antes era feita com lápis e papel. É necessário explorar suas potencialidades para que possam, efetivamente, servir na construção de novos saberes.

Várias são as possibilidades de se promover a aprendizagem da matemática através da informática, calculadoras ou outras tecnologias. Entretanto, para que isso aconteça, é necessário que o professor se sinta motivado e preparado.

A ferramenta computacional tem papel de destaque nas orientações expressas nos PCNEM (BRASIL, 2000). O documento afirma que seu uso pode motivar os alunos na realização de atividades exploratórias e de investigação. Além disso, as aulas podem tornar-se mais dinâmicas ao promover uma maior participação dos alunos durante a realização das tarefas.

No ensino da matemática são vários os aplicativos que possibilitam uma maior exploração do cálculo numérico, da álgebra, da geometria, matemática financeira, do estudo de funções, entre outros. Alguns programas procuram criar ambientes de investigação matemática a fim de contribuir na construção do conhecimento por parte dos alunos.

Geralmente, os alunos gostam de interagir com o computador pois se sentem mais confiantes e capazes de realizar certas atividades. Este fato pode despertar neles, além da curiosidade, o gosto por aprender.

Neste processo de inserção de novas tecnologias no ensino da matemática, o professor é considerado peça fundamental. Sua orientação, no decorrer de uma atividade, poderá determinar o sucesso ou o fracasso de sua prática. Segundo Cláudio e Cunha (2001, p. 174), "Didaticamente, o professor pode optar entre dois perfis diante do uso do computador no ensino: usá-lo como máquina transmissora dos conhecimentos para o aluno, ou como um auxiliar na construção desses conhecimentos pelo aluno."

No primeiro perfil, se estaria, simplesmente, informatizando a educação tradicional, onde a criatividade, o pensamento crítico e a autonomia serão muito pouco desenvolvidas. Já no segundo perfil, o professor levará o aluno, através de seus constantes questionamentos, refletir a respeito do que fazem, desenvolvendo, desta forma, o pensamento crítico e estimulando a curiosidade e a criatividade.

Para Cláudio e Cunha (2001), o professor, ao utilizar as ferramentas computacionais, deve, acima de tudo, possibilitar ao aluno a participação ativa na construção de seu conhecimento. Neste sentido, o professor deve ter clareza de seus objetivos, pleno conhecimento dos conteúdos que serão explorados, elaborar seu plano pedagógico, conhecer o programa que será utilizado, identificando suas potencialidades e limitações.

A utilização das tecnologias em sala de aula pode facilitar também a abordagem de conceitos matemáticos importantes, possibilitar a resolução de problemas elaborados, construir os mais diversos tipos de gráficos e efetuar cálculos numéricos de maneira rápida e que muitas vezes só se tornariam possíveis com o uso destas ferramentas. No entanto, este não deve ser o principal objetivo ao se propor atividades desta natureza.

Cláudio e Cunha (2001) destacam ainda que, para tornar o trabalho em sala de aula significativo, é necessário que as atividades sejam acompanhadas, ou finalizadas, com a formalização dos conceitos envolvidos nas atividades.

Contudo, concordamos com Penteado, Borba e Gracias (1998), ao afirmarem que a introdução das tecnologias na escola é irreversível e necessária e que "o potencial de mudanças que as novas tecnologias poderão trazer para a Educação dependerá da forma como estes "novos atores informáticos" se relacionarão com os atores humanos e não-humanos que compõem a ecologia de uma dada escola." (1998, p. 84).

1.5 Alguns aspectos e propostas para o ensino de funções

Considerando a importância do ensino de funções na educação básica, vários estudiosos e pesquisadores realizam trabalhos a fim de compreender quais são as variáveis que determinam o sucesso ou o fracasso no seu processo de ensino e aprendizagem, sendo um dos tópicos de maior interesse o próprio conceito de função.

A partir de uma breve revisão teórica, encontramos pesquisas que verificam que tanto alunos como professores apresentam dificuldades em lidar com o conceito de função. Zuffi e Pacca (2000) descrevem, em sua pesquisa, duas possibilidades de abordar a significação deste conceito. A primeira expressa de maneira formal, onde o conceito de função é apresentado através da relação entre conjuntos. A outra maneira é vinculada à ideia de correspondência entre variáveis, mais ligada ao contexto prático.

Segundo Brito e Almeida (2005), para que o aluno tenha uma compreensão significativa do conceito de função, é necessário abordar tanto sua definição intuitiva, de forma contextualizada e evidenciando seu aspecto variacional, como sua definição formal.

Sierpinska (1992 apud TRINDADE e MORETTI, 2000) identificou alguns obstáculos epistemológicos enfrentados pelos alunos em relação ao estudo de funções. Entre estes, os autores destacam o fato dos alunos considerarem que uma função deva ter, necessariamente, uma descrição analítica. Este fato pode evidenciar um ensino que possivelmente tenha priorizado a representação algébrica no estudo de funções.

Podemos representar funções através da relação entre dois conjuntos mediante diagrama de flechas, tabelas, gráficos, algebricamente ou através da representação verbal. Sierpinska, destaca que os professores devem possibilitar aos alunos o contato com estas várias formas de representar funções e articulá-las permanentemente.

Isso vem de acordo com a teoria de Duval (2003), na qual a apreensão dos conceitos matemáticos está relacionada à noção de representação. Para ele, é necessário que o indivíduo tenha contato com diferentes formas de representar um mesmo objeto de estudo e transitar por elas.

Para Trindade e Moretti (2000), além da transição entre as diversas formas de representar uma função, o professor deve explorar a representação verbal de funções.

> Os alunos devem ser estimulados a descreverem em linguagem corrente a lei que rege um fenômeno e a apresentarem argumentos que justifiquem a validade da lei para qualquer caso, para então representá-la em linguagem algébrica ou geométrica. [...] A utilização da linguagem oral e escrita auxilia o aluno a organizar o próprio raciocínio, a fazer a passagem de uma forma de representação para a outra e explicitação das noções de variável, dependência, regularidade e generalizações. (TRINDADE e MORETTI, 2000, p. 43-44).

Quanto à representação gráfica, os mesmos autores chamam atenção para seu grande potencial para o aprendizado do conceito de função, e além disso destacam que alguns aspectos são melhor explorados por este tipo de representação. Comumente, na prática em sala de aula, os alunos, a partir da representação algébrica de uma função, constroem uma tabela de valores e finalmente traçam, no plano cartesiano, o gráfico da função. No entanto, a passagem inversa deste processo não é explorada.

As tabelas constituem um ótimo instrumento para o estudo das relações funcionais, uma vez que seus valores podem iniciar a investigação de dependência entre as variáveis, possibilitando a elaboração de hipóteses sobre seu comportamento, sua representação gráfica e algébrica.

Brito e Almeida (2005) sugerem, ao introduzir o estudo de funções, que este seja feito através de situações que evidenciem seu caráter dinâmico, que permitam ao aluno compreender o conceito de variável, expressar a relação de dependência entre duas variáveis e identificar entre elas a variável dependente e independente.

A fim de garantir a aprendizagem do conceito de função, dos diferentes tipos de função e dos conceitos que se relacionam com o estudo de funções, surgiram nos últimos anos algumas propostas metodológicas. Das propostas atualmente defendidas por especialistas e pesquisadores, destacamos a modelagem matemática, a resolução de problemas e a utilização de recursos tecnológicos.

Na modelagem matemática, as atividades são constituídas por um conjunto de ações, desenvolvidas a partir de uma situação-problema, onde os alunos permanecem ativamente envolvidos durante todo o processo. Brito e Almeida (2005), a partir de uma pesquisa com alunos do ensino médio, desenvolveram situações de modelagem para o ensino de funções. Segundo os autores, os estudantes perceberam o valor instrumental da matemática e construíram uma visão dinâmica do conceito de função, percebendo-o no seu aspecto variacional, como relação entre variáveis e não somente como um conjunto de pares ordenados.

A resolução de problemas possibilita aos alunos dedicarem-se, de maneira independente, na busca de ideias e estratégias para alcançar a solução adequada. Cândido (2000), ao pesquisar sobre a resolução de problemas relacionado ao estudo de funções, afirma que esta metodologia levou os alunos a pensar sobre as situações a partir de seus próprios conhecimentos e possibilitou sua participação na construção do conceito de função de maneira significativa e contextualizada.

Souza e Silva (2006) pesquisaram a contribuição da informática no ensino de funções e destacam que os computadores, além de facilitar o esboço de gráficos funcionais, possibilitaram maior escolha das funções a serem trabalhadas. Além disso, os autores afirmam que a utilização de softwares incentivou os alunos a descrever os fatos observados, estimulando a representação verbal, a comparação direta dos gráficos com os resultados algébricos e interações mais intensas e afetivas entre aluno-aluno e aluno-professor.

2 A TRAJETÓRIA NA ELABORAÇÃO DA PROPOSTA

2.1 Nossa motivação

Tendo a convicção de que o professor deve constantemente avaliar seu trabalho em sala de aula e, a partir de suas constatações, repensar seus métodos, nos sentimos desafiados a realizar uma pesquisa investigativa, a fim de verificar a verdadeira compreensão que alunos do ensino médio têm dos conceitos matemáticos relacionados com o estudo de funções. Esta pesquisa gerou o trabalho de conclusão do curso de especialização em Educação Matemática, de minha autoria no ano de 2006 (MAGARINUS, 2006).

Os dados da referente pesquisa foram obtidos através de entrevistas e aplicação de algumas atividades sobre o estudo de funções, desenvolvidas com alunos do ensino médio de duas escolas estaduais que já haviam estudado este assunto em anos anteriores.

Através da análise dos dados, verificou-se que os alunos não tinham assimilado grande parte dos conhecimentos referentes ao estudo de funções e demonstraram dificuldade em expressar suas ideias sobre o que representa uma função e qual o seu significado.

Diante desta realidade, nos sentimos desconfortáveis em relação a nosso modo de ensinar. Após várias leituras, percebemos que nossas constatações também eram comuns a outras pesquisas realizadas a respeito dos conhecimentos de alunos e também de professores sobre o estudo de funções.(ZUFFI; PACCA, 2000; COSTA, A., 2004; MARIANI, 2004; COSTA, C., 2008)

Os resultados da pesquisa e os estudos realizados serviram para um repensar mais cuidadoso de nossa prática. Afinal um tema tão importante da Matemática não estava sendo devidamente aprendido pelos alunos, alunos estes avaliados e aprovados nesta disciplina.

Acreditando que o trabalho realizado não poderia servir apenas como mais um diagnóstico do ensino da matemática, nos sentimos motivados a elaborar uma proposta para a introdução do estudo de funções para alunos do ensino médio. Portanto, a partir das constatações da pesquisa anteriormente realizada, elaboramos o presente trabalho a fim de proporcionar aos colegas professores uma nova alternativa para o ensino de funções.

2.2 A quem se destina a proposta e dos conhecimentos prévios necessários

Nossa proposta foi elaborada para alunos do 1º ano do ensino médio. Esta escolha se justifica pelo fato do estudo de funções estar presente no conteúdo programático desta série e ser trabalho de maneira mais sistemática.

Geralmente, durante o ensino fundamental e mais especificamente no último ano desta etapa, os alunos têm contato com algum conhecimento de funções, mesmo que de forma superficial. No ensino médio, o aprendizado de funções visa ao aprofundamento e o estudo mais detalhado deste assunto. Além disso, boa parte de todo conteúdo desenvolvido nesta série é relativo às funções. Nesta etapa, os alunos começam a ter contato com uma linguagem mais simbólica e formal, presente nas definições e teoremas. O nível de abstração também é maior e os alunos devem mobilizar vários saberes na resolução de problemas cada vez mais complexos e na aprendizagem de novos conhecimentos.

Desta forma, esta proposta foi desenvolvida especialmente para atender a estes alunos, que a partir deste momento serão cada vez mais desafiados e necessitarão de uma boa base sobre o estudo de funções.

Todas as atividades poderão ser desenvolvidas com o mínimo de conhecimento sobre funções, que possivelmente o aluno tenha adquirido no ensino fundamental. Além disso, os conhecimentos mais importantes são relacionados aos conjuntos numéricos, representação de pontos no plano cartesiano e regras básicas de álgebra.

Quanto aos conhecimentos referentes aos recursos tecnológicos, saber manusear o *mouse*, abrir e fechar janelas, são suficientes para executar os comandos necessários para desenvolver as atividades. Já as principais ferramentas dos softwares poderão ser facilmente aprendidas antes de iniciadas as atividades ou mesmo durante estas, e deverão ser apresentadas pelo professor que irá aplicá-las.

O professor, por sua vez, deverá aprender os principais comandos destes softwares, o que poderá ser feito através da leitura de alguns tutoriais disponíveis na internet e que serão referenciados mais adiante.

2.3 Nossos objetivos, escolhas metodológicas e orientações

É do nosso conhecimento que a metodologia utilizada em sala de aula para ensinar os conteúdos matemáticos é um dos aspectos mais importantes para garantir que o aluno efetivamente os aprenda.

Apesar de bastante criticadas por estudiosos e especialistas, aulas expositivas, onde o aluno acompanha passivo a transmissão dos conteúdos matemáticos pelo professor, ainda são bastante utilizadas no ensino da matemática. Comumente, esta prática segue sempre a mesma sequência: o professor passa a teoria no quadro, dá alguns exemplos de aplicação e faz alguns exercícios modelo; o aluno, por sua vez, os copia e reproduz, através de exercícios, aquilo que lhe foi ensinado. Desta forma, o professor passa aos alunos uma grande quantidade de informações, em um curto espaço de tempo, de forma objetiva e rápida. Reforçando esta ideia, D'Ambrósio (2003) destaca a necessidade de substituir o ensino que prioriza a exposição, onde o aluno recebe passivamente o conteúdo, não é estimulado à participação e concebe a Matemática como um produto acabado.

Neste tipo de metodologia, o professor pode não perceber as dificuldades dos alunos em relação à compreensão dos conceitos trabalhados em sala de aula, uma vez que resolver corretamente os exercícios através da aplicação de fórmulas ou memorização de macetes não é garantia de aprendizagem.

Nesta perspectiva, buscamos encontrar nas atuais tendências metodológicas de ensino da matemática, que se opõem ao ensino tradicional e conteudista, referências para elaborar uma proposta visando tornar o ensino de funções mais significativo e compreensível aos alunos. Além disso, pretendemos fazer com que o aluno realmente participe do processo de construção do seu conhecimento, tendo a oportunidade de refletir, indagar, discutir, formular hipóteses e expor suas ideias em relação ao objeto de estudo. Encontramos nas metodologias de ensino, através da resolução de problemas, a utilização de tecnologias aliadas à contextualização e a interdisciplinaridade, uma possibilidade para o ensino de funções.

A partir dos resultados de algumas pesquisas, da realização de uma revisão teórica sobre o estudo de funções e dos estudos oportunizados por este curso de mestrado, delineamos alguns aspectos que julgamos importantes e que deveríamos nos ater na elaboração das atividades.

O primeiro aspecto diz respeito ao próprio conceito de função. Nossos estudos indicam que a compreensão deste conceito é determinante para o aprendizado dos demais conceitos matemáticos relacionados ao estudo de funções.

Segundo nossa pesquisa, os alunos "[...] têm uma visão estática do conceito de função, tendo a ideia de que uma função só tem razão de existir na própria matemática, [...] ficando evidente que os alunos associam a função a uma equação ou fórmula, cujo objetivo é descobrir os valores de x e y para construir gráfico." (MAGARINUS, 2006, p. 62-63).

Observamos que os alunos não desenvolvem a noção de variação e dependência, que é a base do conceito de função, e não percebem a importância deste conceito fora do âmbito matemático. Outras pesquisas também destacam que os alunos apresentam deficiências no campo conceitual de função (OLIVEIRA, 1997, p. 57; MARIANI, 2004, p. 49; COSTA, 2004, p. 52-53).

Apesar dos alunos investigados relacionarem o conceito de função à construção de gráficos, quando solicitados a representar uma função, descrevem primeiro sua representação algébrica, geralmente fazendo o uso de monômios ou polinômios. Para estes alunos, a representação gráfica de uma função é estabelecida como o produto final de um processo que segue a seguinte dinâmica: função na forma algébrica → construção de uma tabela de valores correspondentes → representação gráfica no plano cartesiano.

Verificamos que na representação algébrica os alunos também não estabelecem a relação entre as variáveis e demonstram dificuldades em diferenciar equação de uma função. Para eles, qualquer equação, desde que tenha duas letras, é um exemplo de função. (MAGARINUS, 2006, p. 42; MARIANI, 2004, p. 50; ZUFFI, 2001, p. 15)

Em relação à representação gráfica, verificamos, em nossa pesquisa (MAGARINUS, 2006), que os alunos demonstram não ter clareza do que define uma função e das condições necessárias para que um gráfico represente uma relação funcional (p. 46). Já em relação à construção de gráficos de funções afins e quadráticas, os alunos procedem sempre da mesma forma: "constroem uma tabela, atribuindo a x os valores -2, -1, 0 , 1 e 2; substituem a variável x por esses valores, encontrando, assim, o valor de y; marcam no plano cartesiano os pontos encontrados e, finalmente, traçam o gráfico da função." (p. 51-52).

Sobre estes aspectos, observamos que o estudo dos gráficos de relações funcionais não foi potencialmente explorado e parece não ter contribuído para a compreensão do conceito de função. Para Trindade e Moretti

> O estudo das representações gráficas de funções é, também, de fundamental importância para o aprendizado desse conceito.[...] e a maneira mais adequada para apresentar informações sobre linearidade, intervalos de crescimento e decrescimento, máximos e mínimos, taxa de variação, regularidade, continuidade. [...]Aprendendo gráficos, eles se preparam para relacionar diversos tipos de funções. (2000, p. 45)

A partir de tais constatações, verificamos que o estudo de funções deve resgatar os componentes de variação e relação de dependência e, além disso, deve-se trabalhar o conceito de função de modo dinâmico, proporcionando aos alunos uma noção intuitiva de função a partir de problemas práticos.

A grande questão para elaborarmos nossa proposta passou a ser: como trabalhar com os alunos a relação funcional a partir de uma situação prática de modo a envolvê-los neste processo?

Pensamos, então, na possibilidade de trabalhar algumas questões relacionadas à fenômenos físicos e mais especificamente ao movimento dos corpos, uma vez que este assunto também é estudado no 1º ano do ensino médio. Iniciar o estudo de funções através de questões da Física mostra aos alunos o aspecto dinâmico deste conceito e sua importância para outras áreas do conhecimento, além de cumprir com uma das expectativas do ensino atual que é a interdisciplinaridade.

Parte da questão anterior estava respondida. Faltava estabelecer como se daria o envolvimento dos alunos neste processo. Após debates entre orientador, coorientador e aluno, decidimos trabalhar com o software Tracker.

Acreditávamos que, através deste programa, poderíamos envolver os alunos durante todo o processo de realização das atividades e a partir daí construirmos o conceito de função. No entanto, tínhamos ainda que definir como o programa iria "entrar em cena". Pensamos em propor, inicialmente, uma situação-problema. A utilização do programa surge, então, como uma ferramenta útil para a resolução de problemas. E estes, por sua vez, servirão como "pano de fundo" para a exploração dos conceitos básicos relacionados ao estudo de função.

Na proposta didática, o Tracker possibilitará a análise dos movimentos filmados pelos alunos, fornecendo tabelas de valores e diversos tipos de gráficos relacionando a posição do móvel no decorrer do tempo e a velocidade em função do tempo, entre outros.

Desta maneira, sugerimos a análise do movimento de uma bola de tênis em duas situações: sendo largada de uma determinada altura e arremessada para o alto. Dependendo do grau de envolvimento da turma, poderão surgir outras ideias em relação à filmagem e ao objeto utilizado.

As duas primeiras atividades têm basicamente a intenção de construir, com os alunos, uma noção intuitiva de função. Não nos preocupamos, neste primeiro momento, em estabelecer uma definição formal.

O desenvolvimento da primeira atividade com o uso do Tracker tem como objetivos construir a noção intuitiva de função, que se dará através da relação de dependência entre as variáveis; introduzir seu aspecto variacional através da análise gráfica; estudar aspectos gráficos de uma função, como crescimento e decrescimento, a partir das características do movimento estudado.

Para a realização da segunda atividade, propomos outra situação-problema. Nesta situação, a análise do movimento do objeto terá como objetivos: abordar novamente a noção de função, evidenciando a relação entre as variáveis dependentes e independentes; introduzir a ideia de função afim e quadrática; identificar diferentes maneiras de representar uma relação funcional, através de gráficos e tabelas, mostrando a possibilidade de transitar entre elas; a partir dos aspectos gráficos fazer o aluno perceber as diferenças entre uma função afim e quadrática; levar o aluno a conjecturar a representação gráfica de determinados movimentos; através da análise gráfica, introduzir os conceitos de ponto máximo e ponto mínimo, intervalo de crescimento e decrescimento, simetria da parábola; explorar o conceito de função injetiva a partir da análise do comportamento das funções afim e quadrática.

Para dar continuidade ao estudo de funções afins e quadráticas, decidimos fazer uso de mais um recurso computacional, o software GeoGebra. Nossa intenção para as próximas atividades é trabalhar mais especificamente com estes dois tipos de funções, suas definições, características, formas de representação, entre outros elementos que julgamos importantes.

A terceira atividade será desenvolvida com o intuito de explorar e introduzir o estudo da função afim. Para tanto, propomos inicialmente duas situações-problema. Acreditamos que situações mais simples, onde os alunos podem facilmente imaginar a cena, é o primeiro passo para envolvê-los na atividade. Quando um problema muito complexo é apresentado aos alunos, é bem comum que grande parte deles desista de resolvê-lo, uma vez que não conseguem sequer imaginar a situação.

Nos dois primeiros problemas, os alunos terão a oportunidade de discutir sobre a representação gráfica das situações e desenvolver desta forma sua criatividade e criticidade. Um dos objetivos é fazer com que os alunos tenham a capacidade de interpretar graficamente uma situação e depois criar um modelo que possa representá-la. Pretendemos fazer com que o aluno consiga transitar entre as várias formas de representar uma função, não importando de qual delas se parta. Segundo Duval (2012, p. 270), “o recurso a muitos registros parece mesmo uma condição necessária para que os objetos matemáticos não sejam confundidos com suas representações e que possam também ser reconhecidos em cada uma de suas representações.”

A seguir, começaremos a explorar a representação gráfica de diferentes tipos de funções afins, com o objetivo de fazer com que o aluno perceba a relação entre a lei de formação de uma função e sua representação gráfica, evidenciando a propriedade que caracteriza este tipo de função e alguns aspectos importantes relativos a seus coeficientes.

A visualização das famílias de funções afins, através do GeoGebra, possibilitará aos alunos compreender mais facilmente a relação existente entre a taxa de variação e o coeficiente angular.

Para finalizar a terceira atividade, propomos um problema onde os alunos poderão perceber as relações existentes entre os conteúdos matemáticos, como é o caso da interpretação geométrica para a solução de um sistema de equações.

As atividades propostas também possibilitarão a exploração dos conceitos de domínio, contradomínio e imagem de uma função, através de uma abordagem diferenciada das comumente encontradas nos livros didáticos. Nossa proposta é levar o aluno a compreender que estes conjuntos dependem de sua lei de formação e que, se a função representar uma situação real, a determinação destes conjuntos deverá ser feita considerando as condições dadas. Este enfoque mais dinâmico poderá fazer com que os alunos compreendam significativamente o que estes conjuntos representam, percebendo também sua importância.

A última atividade da proposta pretende estudar a função quadrática, mantendo o caráter investigativo, através da resolução de problemas e de atividades que visem à observação, formulação de hipóteses e conclusões.

A partir de um problema de geometria, os alunos serão desafiados a elaborar uma lei matemática que rege a situação dada. Além disso, serão explorados os conceitos de domínio e imagem e a representação gráfica da função quadrática.

O segundo problema envolve objetos de estudo da economia, evidenciando, mais uma vez, o caráter instrumental que as funções desempenham para tratar de questões fora do contexto matemático. A partir deste problema, serão explorados os conhecimentos referentes a raízes da função quadrática, sua configuração gráfica, intervalos de crescimento e decrescimento, valor máximo e valor mínimo, domínio e imagem e concavidade da parábola.

Além dos objetivos já mencionados, esta última atividade abordará alguns conhecimentos dificilmente trabalhados em sala de aula, como é o caso do estudo da simetria na parábola e da família de parábolas representadas pela função do tipo $f(x) = ax^2+bx+c$, variando-se os coeficientes *a*, *b* e *c*. Através de uma ferramenta própria do software, os alunos podem criar e observar vários gráficos de uma função quadrática, variando seus coeficientes. Esta atividade é bem dinâmica, pois o aluno pode acompanhar o que acontece com a parábola quando sua representação algébrica é alterada.

Muitos dos aspectos das funções que pretendemos trabalhar com estas atividades seriam difíceis de abordar apenas com o uso de lápis e papel, e mesmo que os livros didáticos atuais tragam muitas informações e imagens, nada se compara à possibilidade do aluno interagir com o objeto de estudo. Ao plotar um gráfico no computador e poder modificá-lo quantas vezes quiser, testando várias possibilidades, a atividade torna-se mais atraente e enriquecedora para o aluno, uma vez que possibilita vários momentos de descoberta.

Adicionalmente, pretendemos incentivar os alunos a escrever sobre suas observações em relação aos problemas propostos nas atividades. Desta forma, é importante que cada aluno registre por escrito suas respostas, observações e conclusões. Estes registros poderão servir, num segundo momento, como instrumento de avaliação da proposta.

Uma possível dificuldade dos alunos em relação ao desenvolvimento das atividades, pode ser o momento de elaboração das justificativas solicitadas em algumas questões e na elaboração de suas conclusões. Para tanto, sugerimos que as atividades sejam realizadas em duplas ou pequenos grupos e que sejam disponibilizados momentos para discussões também com o grande grupo. Acreditamos que os alunos se sentirão mais encorajados a formular seus registros se suas ideias puderem ser socializadas com os colegas.

Em relação ao tempo previsto para a realização das atividades, supomos ser necessário no mínimo quatro horas para desenvolver cada atividade. Mas, sabendo da diversidade de fatores que influencia a execução de uma proposta, acreditamos que em determinados casos o tempo estimado pode ser muito maior.

2.4 Materiais utilizados

Para realizar as atividades, é necessário dispor de uma câmera digital, podendo ser, inclusive, as disponíveis em celulares, e de alguns computadores, nos quais deverão estar instalados os programas Tracker e GeoGebra.

2.4.1 Sobre o programa Tracker

O programa Tracker é uma aplicação gráfica em JAVA construída na *Open Source Physics* (OSP), comunidade científica que desenvolve e disponibiliza gratuitamente recursos para o ensino de Física e de modelagem computacional.

Este software é destinado à análise de vídeos do ponto de vista físico, podendo ser uma ferramenta para modelagem. Através dele, é possível estudar diversos tipos de movimento a partir de filmagens feitas com câmeras digitais.

O Tracker foi projetado por Douglas Brown, professor da Cabrillo Colege, na Califórnia, e pode ser obtido no endereço eletrônico: http://www.cabrillo.edu/~dbrown/tracker/. Além do programa JAVA, disponível em: http://www.java.com/pt_br/download/, é necessária a instalação do software Xuggle ou Quick Time, uma estrutura de suporte multimídia, que podem ser obtidos, respectivamente, através de: http://www.xuggle.com/downloads e http://www.apple.com/quicktime/download/. Recomendamos instalar os programas na seguinte ordem: JAVA, Xuggle, ou Quick Time, e Tracker.

No mesmo endereço em que se obtém o programa Tracker, também se encontram disponíveis alguns vídeos e experimentos modelo, incluindo um manual em português.

2.4.2 Sobre o programa GeoGebra

O GeoGebra é um software gratuito de geometria dinâmica, criado por Markus Hohenwarter, desenvolvido para o ensino e aprendizagem da matemática, tanto no nível básico como universitário.

A grande vantagem didática deste programa é que ele apresenta, ao mesmo tempo e no mesmo ambiente visual, representações geométricas e algébricas de um mesmo objeto que interagem entre si.

Este programa, escrito em JAVA e disponível também em português, encontra-se no endereço: http://www.geogebra.org/cms/pt_BR/download.

Para aprender os comandos básicos do GeoGebra, o próprio programa dispõe de um tutorial, na opção "Ajuda", simples e explicativo.

Muitos professores já vem adotando esta ferramenta em sala de aula para explorar geometria, funções, álgebra e planilhas de cálculo interativas. O instituto GeoGebra no Brasil, com sede em algumas universidades, desenvolve materiais gratuitamente no treinamento do

GeoGebra como ferramenta para o ensino e aprendizagem da matemática. E o Instituto GeoGebra Internacional São Paulo (IGISP) disponibiliza uma revista eletrônica (http://www.pucsp.br/geogebra), a fim de oferecer um espaço para a divulgação de pesquisas e trabalhos desenvolvidos com o uso deste software.

3 UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DE FUNÇÕES

Apresentamos neste capítulo uma sequência didática que busca utilizar atividades diferenciadas para a introdução e o desenvolvimento do estudo de funções afins e quadráticas para alunos do 1º ano do ensino médio. As questões presentes nesta proposta visam garantir que o aluno faça parte do processo de construção do seu saber e não apenas assuma um papel de mero espectador, o qual recebe de maneira pronta e acabada todo conhecimento. Neste sentido, o professor, ao conduzir as atividades, deverá fazê-las de modo a envolver os alunos através de questionamentos e discussões, o que, acreditamos, levará ao desenvolvimento gradativo dos conceitos que cercam o estudo de funções.

3.1 Primeira atividade

Segundo os PCNs (BRASIL, 2000), os problemas de aplicação de funções devem servir como motivadores e contextos para o ensino e aprendizagem de funções e não serem deixados para o final desse estudo. Além disso, tanto os PCNs como vários outros estudos apontam para a necessidade da contextualização e de um ensino interdisciplinar capaz de fazer com que o aluno estabeleça as relações entre os fenômenos estudados em diferentes áreas do conhecimento.

A primeira atividade de nossa sequência busca apresentar aos estudantes uma ideia intuitiva do conceito de função. Neste sentido, propomos introduzir este conceito através da análise de movimentos mecânicos simples, que basicamente são estudados na Física nesta primeira etapa do ensino médio. Para tanto, nas primeiras atividades utilizaremos o programa computacional Tracker.

3.1.1 Elaborando um problema

Inicialmente o professor deverá propor a seguinte questão aos alunos: “Se você largar uma xícara feita de vidro no chão, de uma altura de 10 centímetros, é muito provável que a xícara não quebre. E se você largar a mesma xícara de uma altura de 2 metros, o que é provável que aconteça?”

Após uma breve discussão, o professor deverá propor a seguinte questão: “Por que é mais provável que a xícara quebre ao cair de uma altura de 2 metros e não quebre ao cair de uma altura de 10 centímetros?”

Novamente os alunos devem iniciar uma discussão com a pretensão de responder esta questão. Outras questões subsequentes devem ser formuladas pelo professor, como:

“Considerando que a xícara foi apenas solta e não arremessada, o que podemos concluir a respeito da velocidade inicial nos dois casos? E em relação à velocidade final?”

“Como será que se comporta a velocidade da xícara no decorrer do tempo de queda?”

Neste momento o professor propõe aos alunos a realização de uma atividade para comprovar as respostas obtidas a respeito da velocidade de um corpo durante a queda livre.

3.1.2 Produzindo um vídeo

Nesta etapa, o professor deverá utilizar uma câmera digital para a produção dos vídeos que serão posteriormente analisados no programa Tracker.

O lugar para a filmagem deverá ter uma boa iluminação e a câmera deverá permanecer fixa, em um tripé por exemplo, evitando assim que a imagem fique tremida, o que dificultaria a posterior análise dos vídeos. É importante que o objeto a ser filmado seja bem visível. Por isso, na produção de nosso vídeo, escolhemos como plano de fundo uma parede de cor diferente a do objeto a ser filmado. Também é necessário que se tenha um referencial de medida conhecida para que o programa tenha um parâmetro para produzir os dados que serão posteriormente analisados.

Para responder às questões formuladas no problema anterior, realizamos a filmagem de uma bola de tênis em queda livre, solta de três alturas diferentes. Não nos preocupamos com a medida destas alturas, apenas colamos na parede uma fita amarela de 30 cm para servir de parâmetro à análise do vídeo.

Acreditamos que esta simples atividade envolverá os alunos, que possivelmente terão outras ideias para a produção de novos vídeos para análise de movimentos. Este envolvimento deverá continuar nas etapas que seguem quando os alunos utilizarão o programa Tracker.

A figura 1, apresenta uma das imagens dos vídeos produzidos.

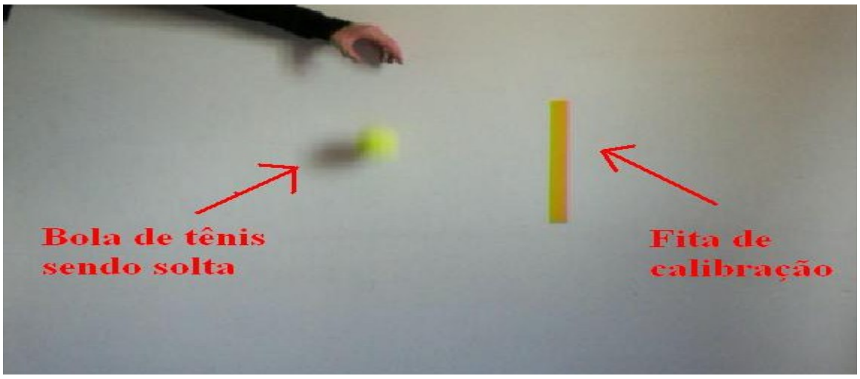

Figura 1 - Imagem inicial de um dos vídeos.

3.1.3 Utilizando o programa Tracker

O professor poderá apresentar o programa Tracker aos alunos através da exposição de um dos tutorias disponíveis na web ou então no decorrer da atividade, mostrando a eles suas principais funções e ferramentas.

Depois de instalar o programa Tracker e de realizar as filmagens dos vídeos, passamos para a etapa de análise.

Ao iniciar o programa Tracker, devemos importar os três vídeos produzidos. Para isso, no programa Tracker devemos clicar no menu arquivo, opção importar e selecionar vídeo. Os vídeos serão chamados simplesmente de vídeo 1, vídeo 2 e vídeo 3.

Após importarmos para o programa o vídeo desejado, devemos definir, na barra inferior, os pontos inicial e final do movimento a ser analisado conforme mostra a figura 2.

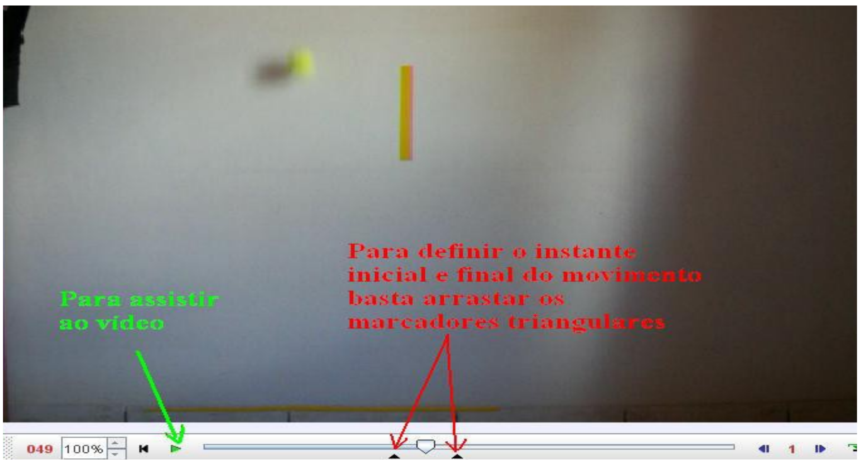

Figura 2 - Definindo o início e o término do movimento a ser analisado.

Depois desta etapa, devemos calibrar a escala do vídeo, ou seja, devemos informar no programa a medida da fita amarela colocada no plano de fundo durante as filmagens, conforme figura 3. Para isso, devemos clicar sobre o quarto ícone da barra de ferramentas, onde aparecerá um segmento azul que deverá ser ajustado de acordo com a fita amarela e depois informado o valor de sua medida, que neste caso é 30 cm.

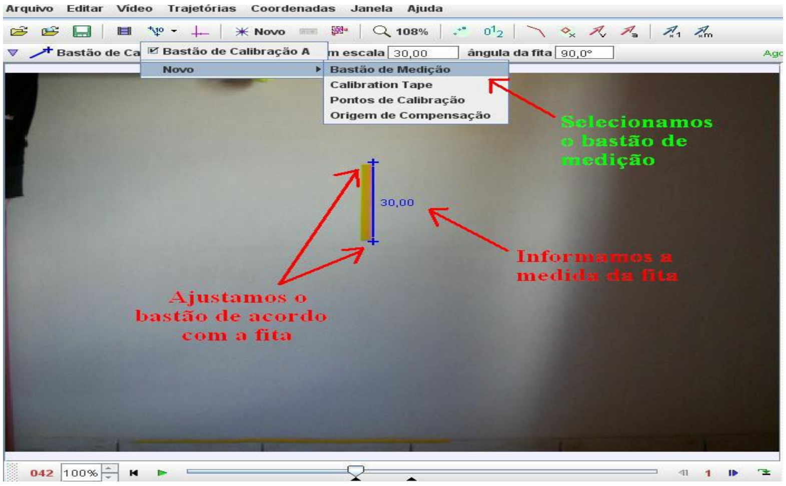

Figura 3 - Calibrando a fita.

Em seguida, vamos marcar os pontos sobre a bola em queda livre (Figura 4). Para isso, devemos clicar sobre o ícone "Novo" e em "Ponto de Massa". Mantendo a tecla *shift* acionada, clicamos sobre a bola com o botão esquerdo do mouse. O software passará automaticamente para o próximo quadro do vídeo, no qual devemos efetuar uma nova marcação até o final do movimento que vamos analisar. Inserimos também um eixo coordenado na imagem do vídeo a ser analisado.

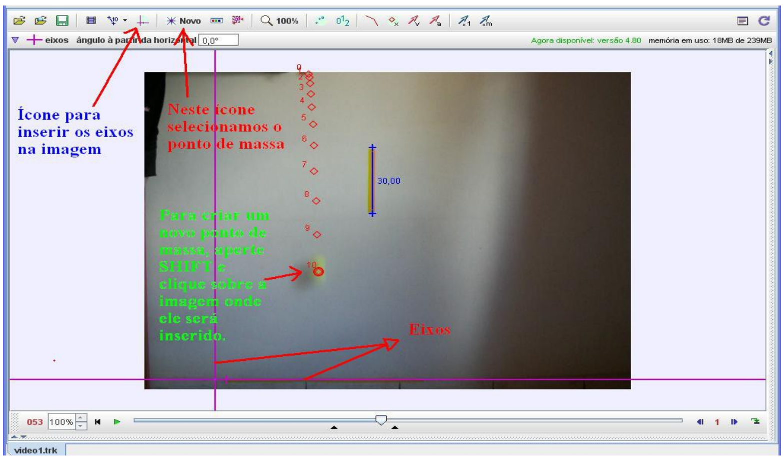

Figura 4 - Pontos sendo marcados sobre a bola em queda.

Passamos agora, à construção dos gráficos em relação à queda da bola. Este programa nos permite obter vários gráficos referentes ao fenômeno estudado, como por exemplo, o gráfico da intensidade da aceleração e da energia cinética em função do tempo. Considerando que o nosso interesse neste momento é fazer com que o aluno perceba a relação entre a altura de um objeto em queda livre e sua velocidade ao tocar o solo, vamos analisar somente dois gráficos. O primeiro é o gráfico que mostra a componente *y* da posição da bola no decorrer do tempo e o outro a velocidade da bola durante o tempo de queda.

Na figura 5, temos ao centro a imagem de um dos vídeos e à direita os dois gráficos mencionados. Os alunos devem assistir aos vídeos e acompanhar o movimento da bola em queda livre. O programa faz uma sincronia entre o movimento da bola em queda livre, através das marcações realizadas, e a construção dos dois gráficos em questão.

Na sequência, os alunos deverão iniciar uma nova etapa que consiste em responder a uma série de onze questões a partir da observação dos vídeos e dos dois gráficos gerados pelo programa Tracker. Estas questões têm como finalidade construir o conceito de função através da relação de dependência entre variáveis.

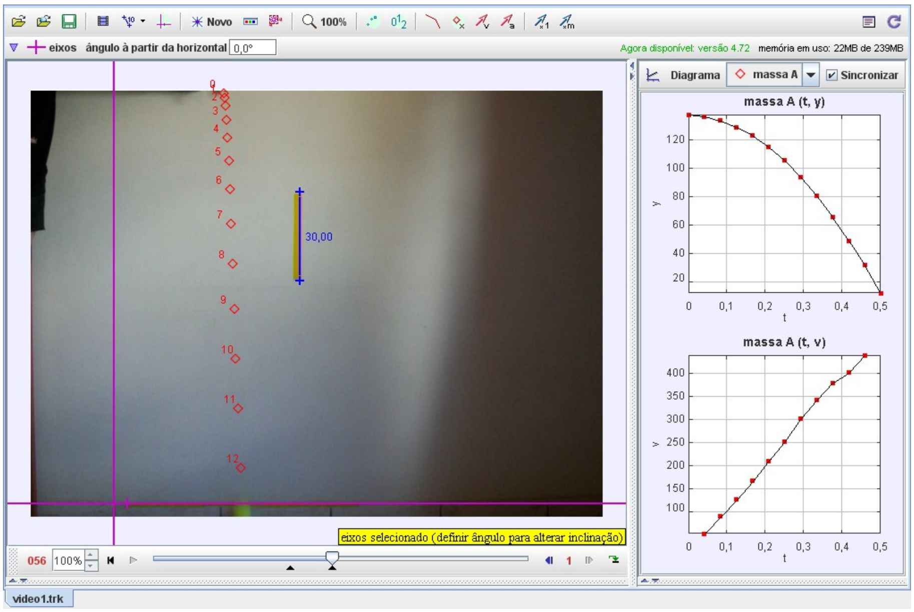

Figura 5 - Análise do movimento do vídeo 1.

É importante que os alunos tenham tempo para discutir, em duplas ou pequenos grupos, as questões propostas, pois acreditamos que através desta prática se sentirão mais estimulados e envolvidos. E dessa forma, poderemos partir para os questionamentos, tais como:

Questão 1 - A partir da análise dos vídeos e dos gráficos gerados pelo software nas três situações, responda:

a) Considerando que o eixo ilustrado no vídeo seja o plano cartesiano, o que podemos dizer a respeito do eixo vertical? O que ele nos informa?
b) Observando agora o primeiro gráfico: em relação ao eixo vertical, o que ele nos informa? E o eixo horizontal?
c) Analise o segundo gráfico. O que os eixos verticais e horizontais nos informam?

A questão 1 pretende iniciar com os alunos uma discussão a respeito dos eixos cartesianos e como estes se relacionam entre si. Devemos deixar claro aos alunos que os eixos verticais e horizontais podem referir-se a grandezas diferentes. Destacamos isso, pois é muito provável que estes alunos, no último ano do ensino fundamental, tenham estudado, nas aulas de matemática, a representação gráfica de funções matemáticas elementares, cujos eixos representavam números reais e não grandezas físicas.

Os alunos deverão perceber que o plano cartesiano tem a função de ajudar a interpretar também fenômenos físicos, como o estudo dos movimentos. Ou seja, devem perceber que a matemática está servindo de instrumento para o estudo do movimento de um corpo em queda livre.

As questões que seguem terão como finalidade ajudar os alunos a perceber a relação entre variáveis.

O primeiro gráfico a ser analisado, conforme exemplificado na figura 6, relaciona a posição da bola e o tempo.

Questão 2 - Observando o primeiro gráfico de cada uma das três situações, conforme exemplificado na figura 7, você seria capaz de dizer de que altura a bola foi lançada em cada uma delas? E qual o respectivo tempo de queda da bola?

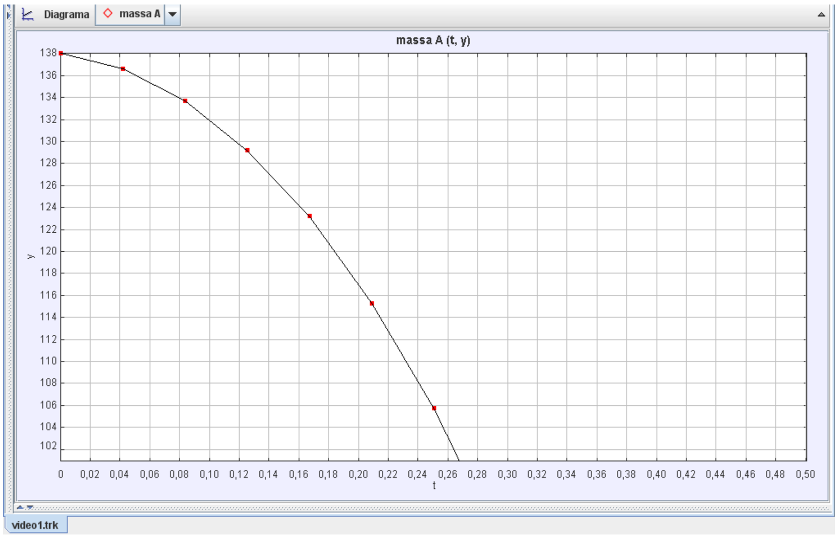

Figura 6 - Gráfico da posição da bola em função do tempo de queda, referente ao vídeo 1.

Neste momento, sugerimos que os alunos façam uso de algumas ferramentas do Tracker que poderão ajudá-los a definir, com maior precisão, a altura inicial da bola. Utilizando alguns comandos, os alunos poderão visualizar o primeiro gráfico utilizando toda a tela do computador, o que fornecerá a eles uma melhor aproximação da altura. É importante questionar os alunos a respeito das unidades de medida de cada grandeza envolvida. Por exemplo, deve-se salientar que os valores no eixo horizontal referem-se a frações do segundo. Por esse motivo, os valores são tão pequenos. Já no eixo vertical, os valores estão expressos em centímetro, uma vez que inicialmente foi informado ao programa que a fita amarela tinha 30 centímetros.

De posse dos valores aproximados de tempo e altura da bola, os alunos poderão responder às seguintes questões:

Questão 3 - Observando o gráfico da altura da bola no decorrer do tempo responda:

a) Observe os primeiros gráficos de cada uma das situações. A cada intervalo de tempo de 0,02s a posição da bola vai modificando. Você pode afirmar que a bola percorre sempre a mesma distância a cada intervalo de tempo? Justifique sua resposta.
b) Em que intervalo de tempo a bola percorre menor distância? E em que intervalo de tempo ela percorre maior distância? Analise cada uma das três situações.
c) O que você pode dizer a respeito da distância percorrida pela bola no decorrer do tempo?

d) Qual é a relação entre a distância percorrida pela bola e o tempo de queda da mesma? Qual é a variável dependente e qual é a variável independente nesta relação?

Caso os alunos demonstrem alguma dificuldade em responder a esta última questão, o professor deverá coordenar o grupo e elaborar em conjunto esta relação. É um momento propício para perguntar se a posição da bola depende do tempo e se essa dependência pode ser formulada de outra maneira: o tempo de queda depende da posição da bola? Possivelmente esta última formulação gerará algumas discussões, mas depois de alguns questionamentos e mediações feitas pelo professor, é necessário que os alunos se convençam desta impossibilidade.

Neste momento, os alunos serão questionados a respeito do segundo gráfico, que relaciona a velocidade da bola e o tempo de queda, conforme exemplo ilustrado na figura 7.

Questão 4 - Analise o segundo gráfico de cada uma das três situações e responda às seguintes questões:

a) Sabendo que o eixo vertical do gráfico em questão refere-se à velocidade da bola em relação ao tempo, qual é a velocidade da bola no tempo 0 segundos?

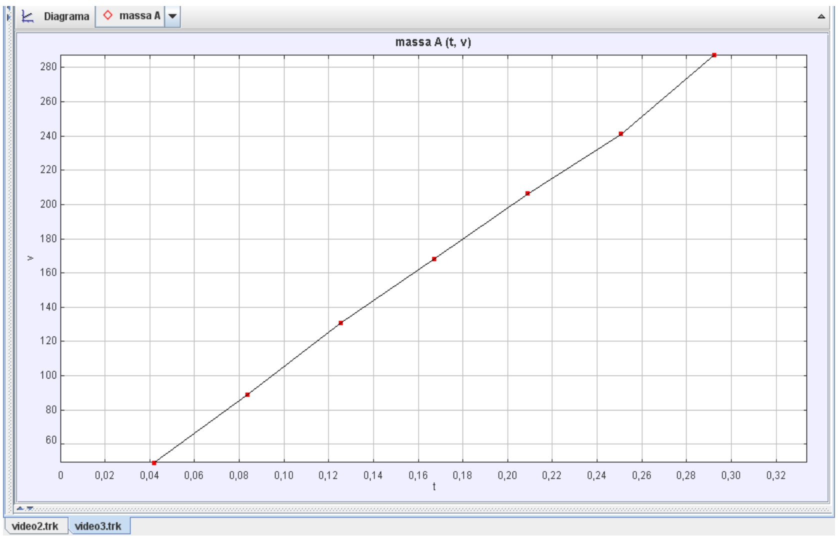

Figura 7 - Gráfico da velocidade em função do tempo, referente ao vídeo 3.

Utilizando-se de ferramentas do software*,* os alunos irão perceber que a velocidade no tempo zero não é determinada e somente no tempo 0,04 segundos temos a primeira marcação.

Isto ocorre pois utilizamos instrumentos simples para capturar as imagens e, ao realizamos a primeira marcação, não conseguimos definir precisamente o momento exato em que a bola começa a cair. Se para a produção dos vídeos fosse utilizada uma câmera que filmasse um maior número de quadros por segundo, teríamos maior precisão nos dados fornecidos pelo Tracker. No entanto, os alunos deverão chegar a seguinte conclusão: apesar da velocidade inicial da bola não ser informada pelo programa, sabemos que esta deve ser igual a zero, pois ela foi apenas solta e não arremessada.

As próximas questões têm por objetivo mostrar aos alunos qual é a relação existente entre as variáveis velocidade e tempo e qual é a relação entre a velocidade final de um corpo em queda livre e a altura em que foi abandonado. Além disso, os alunos poderão constatar que a velocidade aumenta proporcionalmente em relação ao tempo, sendo por este motivo que seu gráfico tende para uma reta.

Questão 5 - Determine a velocidade e a altura aproximada da bola em cada uma das situações no tempo 0,25 s. Utilize os recursos do software para determinar estes valores com maior precisão.

Questão 6 – Você pode dizer que para cada valor do tempo existe um único valor para a velocidade e para a altura?

Questão 7 - Sabemos que, pelo fato das imagens não serem muito nítidas, existe, no momento de marcar os pontos de massa, a possibilidade de erro. Com isso, alguns valores em relação à velocidade podem apresentar pequenas distorções. Considerando isso, podemos dizer que o gráfico que mostra a velocidade da bola no decorrer do tempo tende a uma reta? Você pode dizer que a variação da velocidade é constante em relação ao tempo? Justifique sua resposta.

Questão 8 – Observando os gráficos da velocidade no decorrer do tempo em cada uma das três situações, em qual deles a bola apresenta a maior velocidade ao se aproximar do solo? E em qual das situações a bola apresenta a menor velocidade?

Questão 9 – Observando os gráficos de cada uma das três situações, em qual deles o movimento de queda ocorre em menor tempo? Podemos afirmar que, quanto maior for a posição inicial (altura) de um corpo em queda livre, maior será o tempo até sua chegada ao solo?

Questão 10 - O que podemos dizer a respeito da velocidade final de um corpo em queda livre em relação ao tempo de queda? E em relação à altura em que foi abandonado?

Questão 11 - Qual a relação entre a velocidade de um corpo em queda livre e o tempo de queda? Qual é a variável dependente e qual é a variável independente nesta relação?

Finalizadas estas questões, os alunos deverão perceber a relação de dependência entre as grandezas físicas envolvidas nas situações investigadas e, além disso, observar que para cada valor da variável tempo temos um único valor para as variáveis altura e velocidade. Estes aspectos serão necessários para que o aluno tenha uma primeira noção de relação funcional.

Neste momento, o professor deverá questionar os alunos a respeito do fenômeno estudado e sua relação com o problema inicial que originou a experiência. Todas as questões até então formuladas e respondidas pelos alunos, darão ao professor condições de elaborar com eles uma primeira definição de função a partir da relação de dependência entre duas variáveis.

No entanto, o professor não deve simplesmente apresentar uma definição pronta, como uma cópia do que é apresentado pelos livros didáticos. É necessário elaborar uma definição baseada na experiência realizada e vivenciada por eles. Sugerimos, como uma primeira definição de função, a relação de dependência entre duas grandezas variáveis onde para cada valor de uma delas, chamada de variável independente, encontramos um único valor para a outra, chamada de variável dependente.

Geralmente, os livros didáticos até iniciam o estudo de funções através de problemas práticos. No entanto, no momento da definição, a linguagem matemática e a abstração acabam por dificultar a construção do conceito de função por parte dos alunos. Para eles, a transição entre as questões discutidas no problema prático e a formalização do conhecimento ainda podem configurar um obstáculo.

Não estamos questionando ou nos contrapondo à importância da formalização e da linguagem matemática presentes na definição de funções. O que queremos, neste primeiro momento, é apenas construir com o aluno uma noção intuitiva de função, que num outro momento poderá ser relacionada à definição mais formal, como as apresentadas pelos livros didáticos.

3.2 Segunda atividade

Nesta etapa, propomos a introdução de alguns conceitos presentes no estudo de funções afins e quadráticas através da utilização do software Tracker. Para iniciar esta atividade, faremos o seguinte questionamento aos alunos:

"Quando jogamos um objeto para cima, este retorna ao solo após atingir uma altura máxima. Você saberia responder se a velocidade com que o objeto toca o solo é maior, menor ou igual a velocidade com que a bola foi arremessada?"

Para responder a essa questão, os alunos deverão produzir um vídeo ilustrando esta situação. Como sugestão, vamos utilizar neste trabalho um vídeo que mostra uma bola de tênis sendo lançada para cima (Figura 8). Como este será o segundo vídeo produzido pelos alunos, os mesmos já terão estabelecido algumas medidas importantes para que a análise do movimento seja possível. Após a filmagem do movimento, os alunos deverão importar o vídeo para o Tracker e iniciar o processo de análise.

Lembramos alguns passos a serem seguidos pelos alunos após a importação do vídeo para o Tracker:

i. Marcar na barra inferior o momento inicial e final do movimento a ser analisado;
ii. Inserir na imagem os eixos coordenados, sendo a origem do sistema o ponto onde o objeto inicia sua trajetória;
iii. Marcar os pontos de massa, sendo que o primeiro deles deverá ser a origem do sistema cartesiano inserido anteriormente;
iv. Inserir o valor da medida da fita métrica, no nosso caso, o valor da fita amarela no fundo do vídeo é de 30 cm.

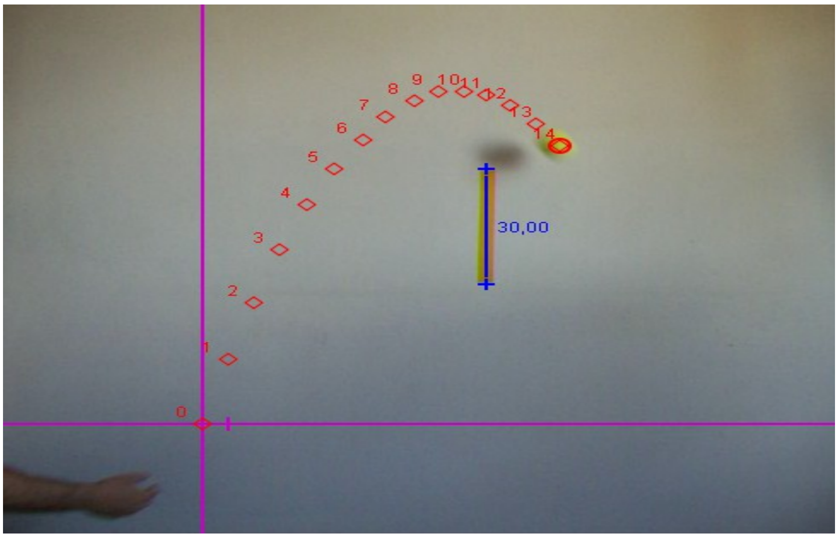

Figura 8 - Movimento oblíquo da bola de tênis.

Após esta primeira etapa, propomos algumas questões aos estudantes com o objetivo de construir uma definição para função afim e função quadrática, além de explorar alguns elementos importantes presentes no estudo destes dois tipos de função.

O professor deverá, inicialmente, fazer uma exploração dos gráficos e tabelas apresentados ao lado direto da janela principal do Tracker. O primeiro gráfico a ser explorado será o gráfico referente a componente *x* da posição.

No programa Tracker, as posições de um objeto em relação ao seu deslocamento horizontal e vertical são chamados, respectivamente, de componente *x* e componente *y*. Assim, é importante que o professor explique que, em relação aos eixos que aparecem no vídeo, temos o eixo horizontal, representado pela componente *x*, e o eixo vertical pela componente *y*. No entanto, nos gráficos apresentados, teremos as duas componentes *x* e *y* analisadas separadamente e relacionadas com o tempo. Desta maneira, no 1º gráfico analisado, temos a componente *x* apresentada no eixo vertical e o tempo no eixo horizontal. E, no 2º gráfico, a componente *y* aparece no eixo vertical e o tempo no eixo horizontal. O professor deverá mostrar aos alunos que a tabela, logo abaixo dos respectivos gráficos, também mostra a posição da bola em relação ao tempo. Na primeira coluna temos o tempo, medido em segundos, e nas demais colunas as posições da bola em relação às componentes *x* e *y*, respectivamente, medidas em centímetros.

Na sequência, apresentaremos uma segunda atividade onde os alunos irão explorar o gráfico da componente *x* (Figura 9) e a tabela de valores gerada a partir do movimento oblíquo da bola (Figura10).

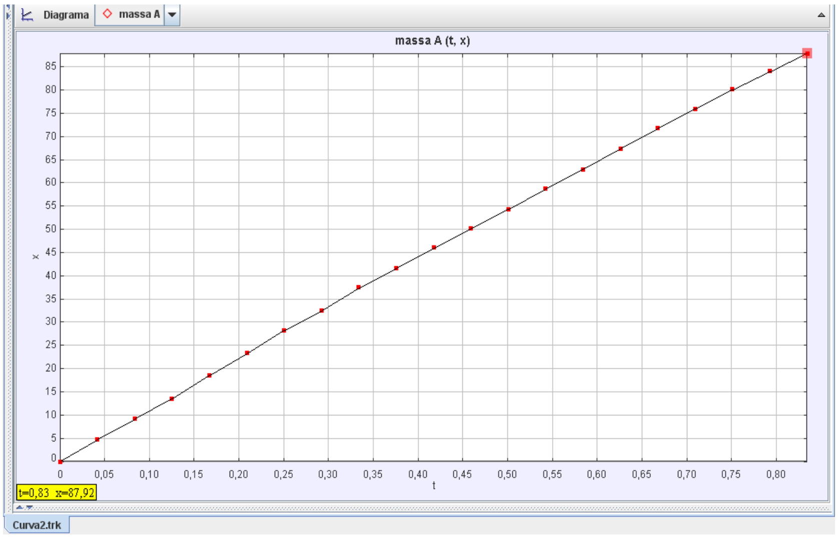

Figura 9 - Gráfico da componente x gerado pelo movimento oblíquo da bola.

Bastão de Calibração A Comprimento já em escala 30,00 ângula da fita 90,0° Agora disponível: versão 4.75 memória em uso: 23MB de 239MB

Dados massa A

t	x	y
0	0	0
0,042	4,715	16,641
0,083	9,153	31,618
0,125	13,59	45,208
0,167	18,582	57,134
0,209	23,297	66,287
0,25	28,29	74,053
0,292	32,45	79,877
0,334	37,442	84,037
0,375	41,603	86,533
0,417	46,04	86,533
0,459	50,2	85,701
0,501	54,361	82,928
0,542	58,798	78,213
0,584	62,959	72,388
0,626	67,396	64,345
0,667	71,834	54,638
0,709	75,994	43,267
0,751	80,154	30,231
0,793	84,037	16,086
0,834	87,92	0,277

Figura 10 - Tabela de valores referentes ao movimento oblíquo da bola.

Questão 1 - Analise o gráfico da componente *x*, a tabela de valores e depois responda às questões que seguem:

a) Observando o gráfico da componente *x*, responda qual é a posição aproximada da bola após 0,50 segundos? E após 0,75 segundos?

b) Agora, observando a tabela responda às mesmas questões do item anterior.

c) Qual a distância percorrida pela bola nos 0,25 primeiros segundos? E nos 0,25 segundos subsequentes? Como você pretende obter estes dados?

d) Em que momento a bola atinge a marca de 45 centímetros? Esse é o único momento em que a bola atinge esta marcação?

e) Os dados da tabela correspondem aos mesmos valores encontrados no gráfico? Poderíamos, então, construir um gráfico utilizando os dados da tabela?
f) Desenhe no papel o gráfico da componente *x* no decorrer do tempo, utilizando os dados da tabela. Esse gráfico é semelhante ao apresentado pelo software?
g) Observando o gráfico da componente *x*, você poderia responder qual é a variável dependente e qual é a variável independente nesta relação?
h) Como é a configuração gráfica da componente x no decorrer do tempo? E se você analisasse somente a tabela, também teria condições de responder à mesma pergunta?
i) Em relação à análise feita no item anterior, é melhor fazê-la observando o gráfico ou a tabela?

Estas primeiras questões nos remetem, novamente, ao conceito de função e à construção do gráfico de funções afins. É importante que o aluno perceba que a partir dos dados de uma tabela podemos construir um gráfico, e que a visualização dos dados no gráfico podem facilitar a análise de seu comportamento. Além disso, questões como estas proporcionam ao aluno uma melhor compreensão das diferentes maneiras de representação de uma função, que neste caso referem-se a um fenômeno físico.

Questão 2 - Agora, vamos explorar os dados referentes a componente *y*.

a) Observe os dados da tabela em relação à componente *y*. Como é o comportamento destes valores em relação ao tempo ?
b) Se marcássemos os pontos correspondentes da tabela em um plano cartesiano, onde o eixo vertical indicasse a altura da bola (componente *y*) e o eixo horizontal indicasse o tempo, como seria sua configuração gráfica?
c) Desenhe o gráfico desta situação em um papel e depois confira sua construção com o gráfico gerado pelo programa. Para obtê-lo, você deve clicar no gráfico em cima da componente *x*, onde abrirá uma janela possibilitando a mudança para a componente *y*.

No momento em que é apresentada a configuração gráfica da componente *y* (Figura 11), o professor deverá falar aos alunos que o nome dado a este tipo de curva é parábola, podendo fazer referência a outros exemplos onde esta configuração também aparece.

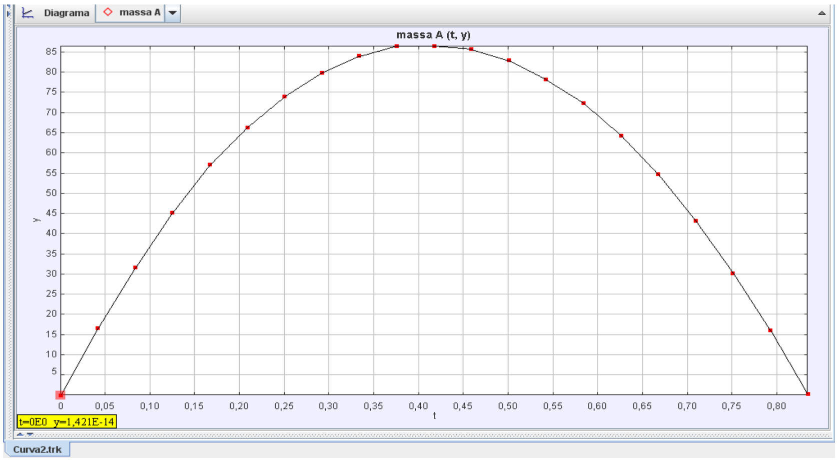

Figura 11 - Gráfico do movimento da bola em relação a componente y.

Conhecendo a configuração gráfica do movimento da bola em relação à componente *y*, sugerimos que os alunos respondam à seguinte questão:

Questão 3 – Observando o gráfico da componente y responda:

a) No decorrer do tempo, como é o comportamento da altura da bola aqui representada pela componente y?
b) Podemos dizer que a altura varia com o decorrer do tempo?
c) Se a altura varia com o tempo, então podemos dizer que, nesta situação, a altura é dada em função do tempo? Podemos dizer, também, que o tempo está em função da altura? Justifique suas respostas.

Com estas três questões, pretendemos, novamente, reforçar entre os alunos a noção do conceito de função. Entendemos que é importante para eles perceberem a relação entre as variáveis envolvidas em várias situações. Sendo assim, no decorrer de toda nossa proposta, estas questões serão retomadas a fim de questioná-los a respeito desta relação e quais delas, efetivamente, podem ser tomadas como uma relação funcional.

Além da relação funcional, pretendemos, com a primeira questão, introduzir ideias relacionadas ao crescimento e decrescimento de uma função.

Na questão 4, pretendemos explorar intuitivamente a noção de valor funcional, valor máximo de uma função, simetria da parábola e as diferenças existentes na representação gráfica de uma função afim e quadrática.

Questão 4 - Observando o gráfico do movimento da bola em relação à componente *y* ou os dados da tabela, responda:

a) Qual é, aproximadamente, a altura máxima atingida pela bola?
b) O tempo de subida é igual ao tempo de descida da bola?
c) Em que momento a bola atinge a altura de 45 centímetros?

Esta última questão deverá ser comparada com a mesma questão feita anteriormente na análise do movimento em relação à componente x. Espera-se que os alunos percebam que na função afim, onde o gráfico é uma reta, temos um único valor da componente x para cada valor do tempo, uma vez que a bola se desloca sempre para a direita. E quando a função tem como configuração gráfica uma parábola, temos para cada valor da componente y até dois valores para o tempo, uma vez que a bola sobe e depois desce.

O professor também poderá aproveitar a oportunidade para trabalhar com os alunos o conceito de função injetiva. Geralmente este conceito é abordado nos atuais livros didáticos e trabalhado em sala de aula através da relação entre dois conjuntos, sem que se faça qualquer referência a exemplos práticos como os abordados nesta proposta. No gráfico da componente x em função do tempo, temos um exemplo de função injetiva e, no caso do gráfico da componente y em função do tempo, um exemplo de função não injetiva.

Nas próximas questões, vamos novamente abordar a noção de relação funcional, só que agora relacionando velocidade e tempo.

Questão 6 - Observe novamente as imagens do movimento da bola sendo lançada para cima.

a) A bola foi lançada com uma velocidade inicial e depois de atingir sua altura máxima retorna ao solo. Como se comporta a velocidade da bola no decorrer do movimento? Podemos dizer que a velocidade varia com o tempo? Em caso afirmativo, determine os intervalos onde ela é crescente, decrescente ou constante.
b) Qual é a relação de dependência entre o tempo e a velocidade da bola no decorrer do movimento?

Questão 7 - No momento em que a bola atinge a altura máxima, como deve ser sua velocidade: igual ou diferente de zero?

Questão 8 - Após responder a estas questões, tente imaginar e desenhar no papel como deve ser o gráfico que relaciona a velocidade com o tempo no decorrer do movimento.

Neste momento, o professor propõe aos alunos a verificação do que foi respondido nas questões anteriores. Então, na parte onde mostra o gráfico da componente *y*, os alunos deverão clicar em cima da letra *y* e modificar pela componente *v* de velocidade. Na tabela também vamos adicionar a componente *v*, bastando clicar em "Dados" e marcar *v*.

Após apresentado o gráfico da velocidade em função do tempo (Figura12) e os novos dados na tabela (Figura 13), propomos aos alunos algumas questões.

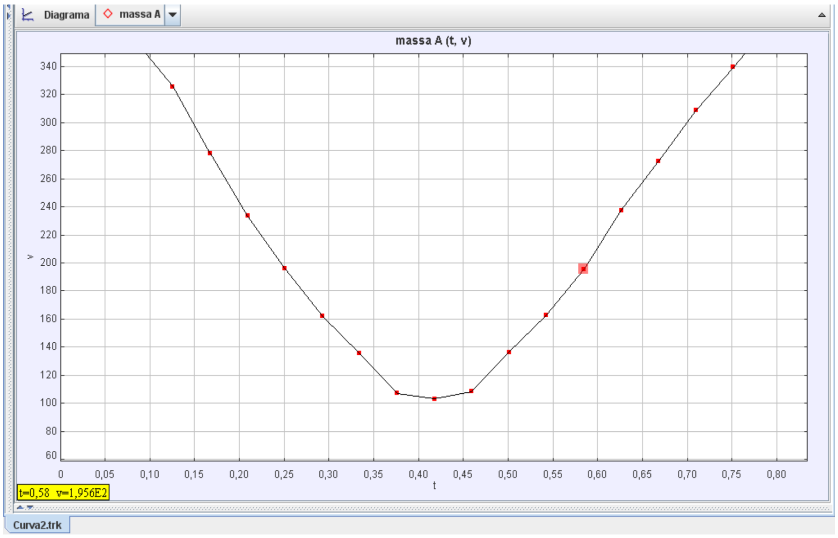

Figura 12 - Gráfico da velocidade em função do tempo.

t	x	y	v
0	0	0	
0,042	4,715	16,641	394,502
0,083	9,153	31,618	358,522
0,125	13,59	45,208	326,03
0,167	18,582	57,134	278,132
0,209	23,297	66,287	233,775
0,25	28,29	74,053	196,374
0,292	32,45	79,877	162,336
0,334	37,442	84,037	135,637
0,375	41,603	86,533	107,301
0,417	46,04	86,533	103,528
0,459	50,2	85,701	108,682
0,501	54,361	82,928	136,651
0,542	58,798	78,213	163,015
0,584	62,959	72,388	195,556
0,626	67,396	64,345	237,851
0,667	71,834	54,638	272,837
0,709	75,994	43,267	309,049
0,751	80,154	30,231	339,723
0,793	84,037	16,086	370,869
0,834	87,92	0,277	

Curva2.trk

Figura 13 - Tabela contendo também a componente velocidade.

Questão 9 - Observando o gráfico gerado pelo Tracker, analise as respostas formuladas por você anteriormente e, se necessário, reescreva corretamente as que estão erradas.

Questão 10 - Ainda em relação ao gráfico da componente velocidade, percebemos que a curva é côncava para cima, diferente do gráfico da componente y. Explique por que isso acontece.

Questão 11 - Percebendo que a velocidade não é constante no decorrer do tempo, escreva os intervalos onde a função é crescente e decrescente.

Questão 12 - Qual é a velocidade inicial, a velocidade final e a velocidade mínima atingida pela bola?

Questão 13 - Compare o instante em que a bola atinge a velocidade mínima com o instante em que a bola atinge sua altura máxima e escreva o que você pode observar.

Questão 14 - Em relação à questão inicial: "a velocidade com que o objeto toca o solo é maior, menor ou igual a velocidade com que a bola foi arremessada?", o que você responderia agora?

Questão 15 - Faça uma pequena pesquisa a respeito da questão anterior nos livros de Física ou na internet e verifique se as conclusões são as mesmas que você encontrou. Caso sejam diferentes, tente explicar por que isso aconteceu.

Questão 16 – Observe que nos tempos 0,375 s e 0,417 s apesar dos valores da componente y permanecerem iguais, os valores da velocidade são diferentes. Tente explicar por que isso acontece.

Acreditamos que estas últimas questões cumprem perfeitamente o papel que o ensino deve ter na formação dos educandos, que é a de incentivar o aluno a ser investigador, criativo, desenvolver sua criticidade e ser agente participativo na construção de seu próprio conhecimento.

Em relação a questão 16, entre os fatores que podem ter contribuído para a obtenção de valores iguais para a componente y e diferentes para a velocidade são: erro no momento de marcar os pontos de massa, baixa precisão da câmera (20 fotos por segundo) e arredondamentos feitos pelo programa. No entanto, está questão também pode apresentar uma explicação na Física, uma vez que a velocidade resultante do movimento oblíquo depende de outros fatores além do valor da componente y. Neste sentido, os alunos devem ser estimulados a iniciar um trabalho de investigação a fim de responder a esta pergunta.

A questão 17, tem como objetivo inquirir os alunos a respeito das diferenças entre as situações apresentadas na 1ª e 2ª atividades e novamente incentivá-los a investigar os movimentos estudados também do ponto de vista físico.

Questão 17 - Analise as situações das duas atividades realizadas e responda:

a) Por que, na primeira atividade desenvolvida, exploramos somente o gráfico da componente y, e na segunda atividade exploramos os gráficos das componentes x e y?
b) O gráfico da velocidade em função do tempo, na 1ª atividade, se assemelha a uma reta e, na 2ª atividade, a uma parábola côncava para cima. Tente explicar, com suas palavras, por que isso acontece.
c) Faça uma pesquisa sobre a questão anterior buscando encontrar as fórmulas do movimento em queda livre e do movimento oblíquo, destacando as variáveis físicas presentes nestes movimentos. Da posse destas fórmulas, procure relacioná-las e testá-las nas situações estudadas e verifique se os resultados, em relação à velocidade em determinados tempos, são semelhantes aos obtidos pelo Tracker.

Estas questões podem dar início a um trabalho interdisciplinar, o qual poderá ser desenvolvido em parceria com as disciplinas de Matemática e Física. É bem provável que, após estas experiências, os alunos modifiquem também seu pensar sobre a matemática, percebendo sua importância para descrever e compreender também os fenômenos físicos.

Ao aprofundar o estudo do movimento oblíquo da bola do seu ponto físico o professor poderá, inclusive, introduzir o estudo de vetores de um modo significativo e interessante. Ao decompor o movimento da bola nas direções horizontal e vertical, percebe-se dois tipos de movimentos. A componente horizontal da velocidade permanece constante durante todo o tempo, caracterizando um movimento retilíneo e uniforme. Já em relação à componente vertical da velocidade, temos um movimento retilíneo uniformemente variado: retardado, do inicio do movimento até atingir a altura máxima; e acelerado, do ponto de altura máxima até o final do movimento. Como os dois movimentos são simultâneos, a sua decomposição determina a trajetória parabólica realizada pela bola.

Terminada esta atividade, o professor deverá explorar com os alunos a definição de função mais formal e dar uma primeira noção de função afim e quadrática relacionadas com seus aspectos gráficos, sempre fazendo referência às duas primeiras situações de movimento analisadas pelo programa Tracker. Acreditamos que depois desta abordagem contextualizada e interdisciplinar, a apresentação mais formal de definições e outros conceitos matemáticos presentes no estudo de funções serão melhor compreendidos pelos alunos.

3.3 Terceira atividade

Nosso objetivo, nesta 3ª atividade, é explorar alguns aspectos das funções afins a partir da análise gráfica. Para tanto, vamos propor aos alunos alguns problemas que serão resolvidos com a ajuda do software GeoGebra.

3.3.1 Apresentando aos alunos o software GeoGebra

O professor poderá apresentar o software GeoGebra explicando alguns campos importantes e algumas ferramentas que poderão ser utilizadas no decorrer das atividades, como exemplificado na figura 14. Obviamente, essa apresentação deve ser mais detalhada e dependerá do nível de conhecimento e segurança do professor em relação ao programa.

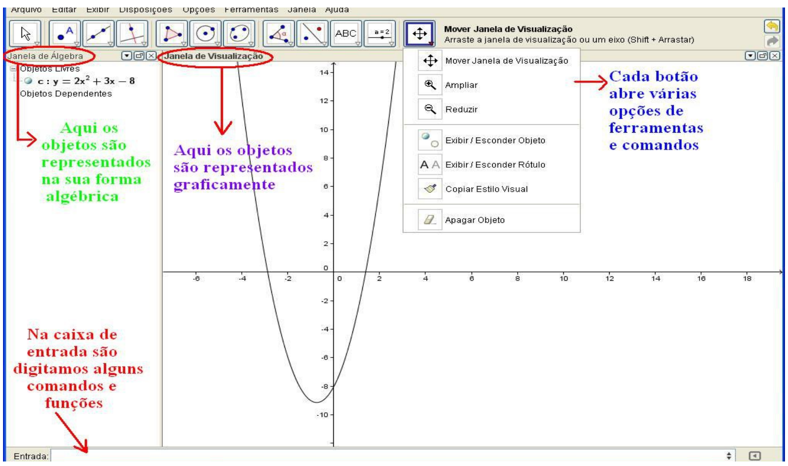

Figura 14 - Apresentação de alguns campos importantes do GeoGebra.

3.3.2 Explorando a função afim através da resolução de problemas

Para iniciar esta atividade, propomos aos alunos o seguinte problema:

Situação 1 - Uma torneira está defeituosa e fica pingando mesmo após ser fechada. Sabendo que a torneira pinga o equivalente a 2 litros de água por dia, responda às seguintes questões:

Questão 1 - Quantos litros de água terá desperdiçado após 2 dias? E após 1 semana?

Questão 2 - Considere uma representação da situação acima no sistema de eixos cartesianos visualizado no GeoGebra. Considere que os litros de água desperdiçados sejam representados no eixo vertical e os dias no eixo horizontal, e marque no gráfico os dois pontos encontrados no primeiro item; depois trace uma reta passando por estes dois pontos. Observe a reta, discuta com os colegas e responda se o gráfico que você vê pode ser a representação da situação dada. Justifique sua resposta.

Na figura 15, temos a representação gráfica esperada como resposta para a questão 2.

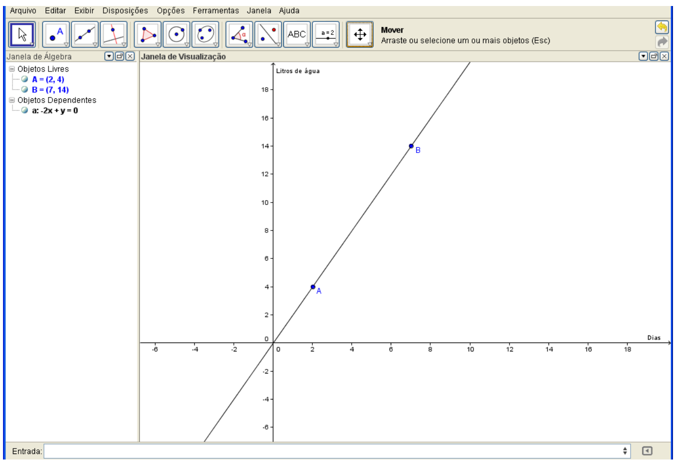

Figura 15 – Reta passando pelos pontos A e B.

O professor deverá questionar os alunos a respeito do que significariam os valores negativos dos eixos coordenados. É possível que, neste momento, os alunos respondam que a reta visualizada não representa a situação dada anteriormente. Frente a isso, os alunos deverão responder à seguinte questão:

Questão 3 - No tempo zero, no momento em que iniciamos a observação, se colocarmos um balde para coletar os pingos de água, qual a quantidade de água dentro do balde? Observe se o ponto quando temos zero dias está corretamente representado no gráfico.

Constatado que o ponto (0,0) faz parte do gráfico que representa a situação, o professor deverá explicar aos alunos que funções com esta característica são chamadas de funções lineares.

Frequentemente, no ensino médio, a construção de gráficos é feita a partir de uma tabela, onde os valores atribuídos à variável independente normalmente são números inteiros. Esta prática poderá dificultar a compreensão, por parte dos alunos, do porquê o conjunto domínio de uma função afim ser o conjunto dos números reais e não o conjunto dos números inteiros. Neste sentido, a próxima questão pretende trabalhar com valores não inteiros, ou seja, valores que representam frações do dia. Já a questão 5, pretende questionar os alunos a respeito dos valores negativos presentes na configuração da reta que representa a situação do problema.

Questão 4 - Qual será a quantidade aproximada de água após 2 horas? E após 5 minutos, é possível determinar a quantidade de água? Neste último caso, a quantidade de água é melhor representada por qual unidade de medida?

Questão 5 - Observe que, para valores negativos nos eixos horizontal e vertical, a reta acima é perfeitamente representada; mas para a situação do problema, esses valores são aceitáveis?

Na questão 6, os alunos serão questionados a respeito da relação de dependência entre as grandezas presentes na situação dada e qual seria a representação algébrica desta relação funcional.

Questão 6 – Em relação a situação do problema responda:

a) Qual é a relação entre a quantidade de água desperdiçada e o tempo em dias?
b) Podemos dizer que a quantidade de água desperdiçada pela torneira está em função do tempo? E o contrário: o tempo estar em função da quantidade de água desperdiçada,

faz algum sentido?

c) Tente escrever uma função *q(t)* que relacione a quantidade *q* de água desperdiçada e o tempo *t*. Para facilitar, preencha a tabela a seguir a partir dos dados do gráfico e generalize a situação para um tempo *t* qualquer.

A tabela 1, mostra como os alunos deverão relacionar a quantidade de água desperdiçada com o tempo.

tempo (t)	**quantidade (q) de água desperdiçada**
0	0
1	2
2	4
3	6
...	...
t	2.t

Tabela 1: Quantidade de água desperdiçada em função do tempo.

O professor deverá ajudar os alunos a definir uma função que represente a situação inicial através do preenchimento da tabela. É necessário que os alunos participem deste processo de construção para compreender como é possível representar algebricamente uma função afim a partir de sua análise gráfica. A transição do gráfico para o algébrico é muito importante, uma vez que, na maioria das vezes, o que é feito no ensino de funções é justamente o contrário, a partir de uma lei de formação é que se constrói o gráfico. Propomos então, a seguinte questão.

Questão 7 - De posse da lei de formação estabelecida no item anterior, escreva *q=2t* na caixa de entrada do GeoGebra.

Com isto, os alunos deverão verificar que o novo gráfico coincide com a reta definida pelos pontos A e B, conforme ilustra a figura 16.

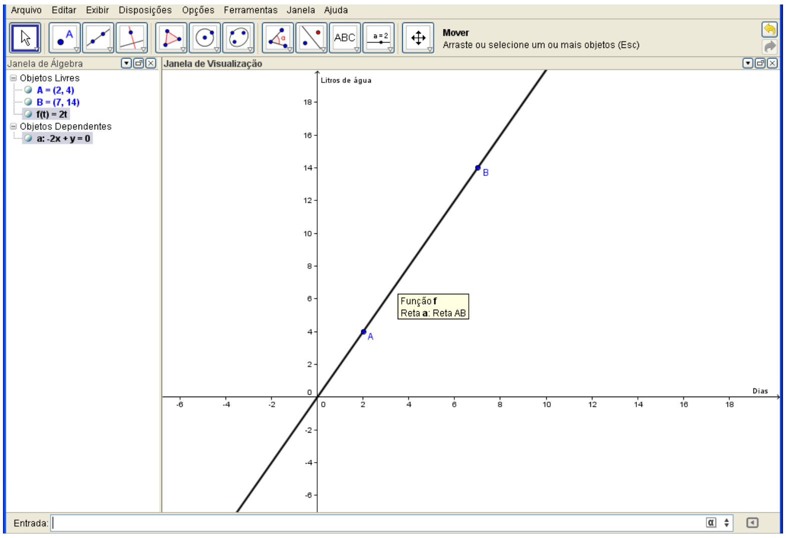

Figura 16 - Construção do gráfico de $q=2t$.

A próxima questão tem como objetivo explorar os conceitos de domínio e imagem de uma relação funcional.

Questão 8 - Chamando de domínio os valores que t pode assumir e de imagem os respectivos valores de q, determine primeiro o conjunto domínio e imagem da reta definida pelos pontos A e B e depois o conjunto domínio e imagem da situação-problema descrita inicialmente. Escreva-os através da notação de intervalos numéricos. Os conjuntos determinados nas duas situações são iguais?

A partir desta questão, o professor poderá apresentar aos alunos a definição de domínio e imagem de uma função. Estes, por sua vez, possivelmente terão condições de compreender mais facilmente tais definições, pois estarão visualizando estes conjuntos no gráfico.

Através da análise gráfica, a questão 9, pretende explorar os conceitos de função crescente e decrescente. O professor poderá socializar as ideias dos alunos para elaborar, em conjunto, uma definição para função crescente e função decrescente.

Questão 9 - Observando o gráfico da situação responda:

a) Você pode dizer que, com o passar do tempo, a quantidade de água desperdiçada vai aumentando? Neste caso, você classificaria a função como crescente ou decrescente.
b) Tente elaborar, com suas palavras, uma definição para função crescente.

Situação 2 - Paula, ao completar 7 anos de idade, ganhou de presente de sua tia um cofrinho contendo 50 reais. Ao final de cada mês subsequente, depositava em seu cofrinho 15 reais. Paula continuou economizando até completar 9 anos de idade, quando teve dinheiro suficiente para comprar uma bicicleta.

Questão 1 - Com base na situação descrita acima, responda:

a) Ao completar 8 anos de idade, quantos reais haviam no cofrinho de Paula? E ao completar 9 anos?
b) Qual é a relação entre a quantidade de dinheiro no cofrinho e o tempo em meses? Qual é variável dependente e qual é a variável independente nesta relação?
c) Como você imagina que seria a representação desta situação no gráfico?

As figuras 17, 18, 19 e 20 representam alguns gráficos que os alunos poderão sugerir como a configuração gráfica desta situação. É muito provável que nem todas as configurações sejam apresentadas pelos alunos.

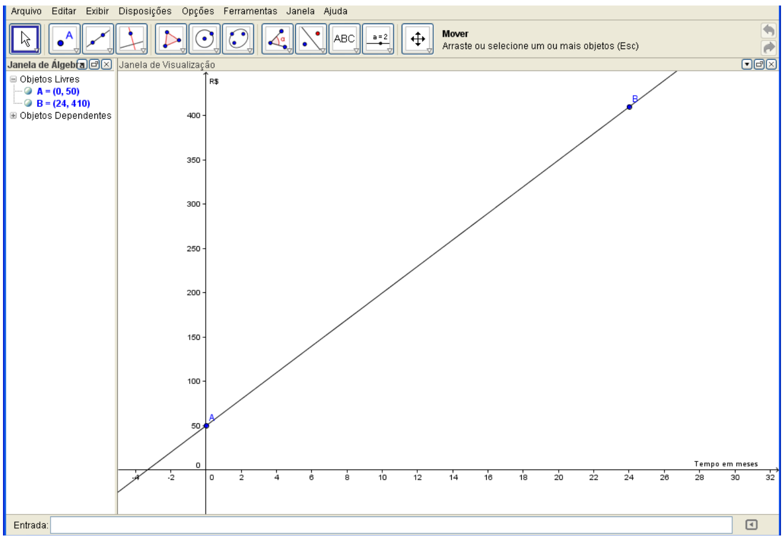

Figura 17 - Reta passando pelos pontos (0,50) e (24,410).

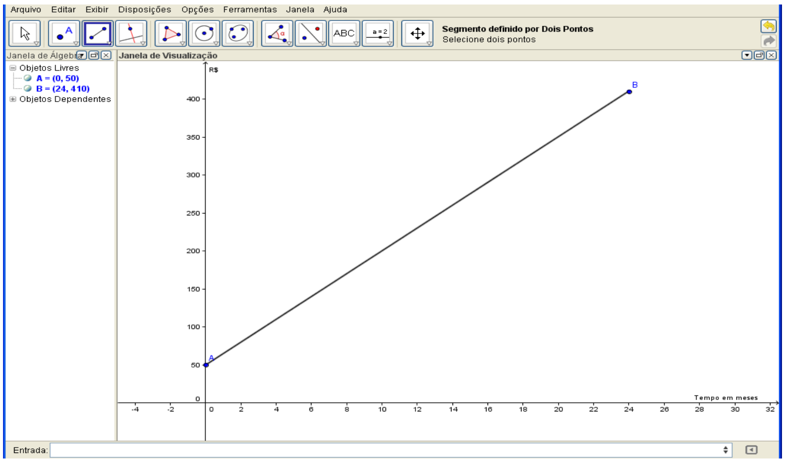

Figura 18 - Segmento de reta AB.

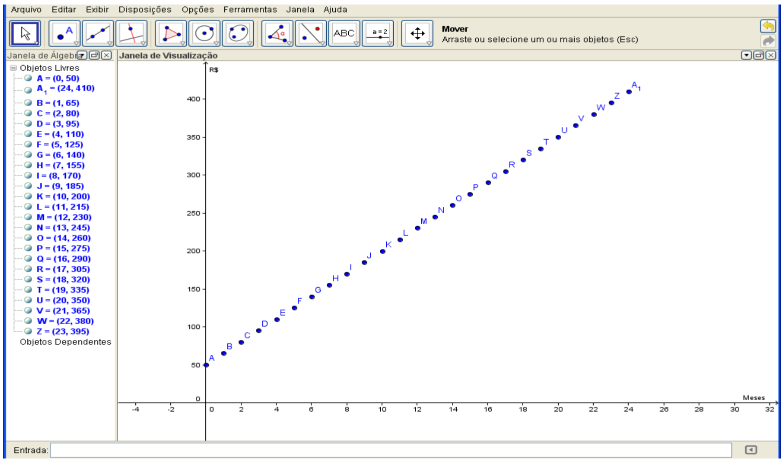

Figura 19 - Pontos no plano.

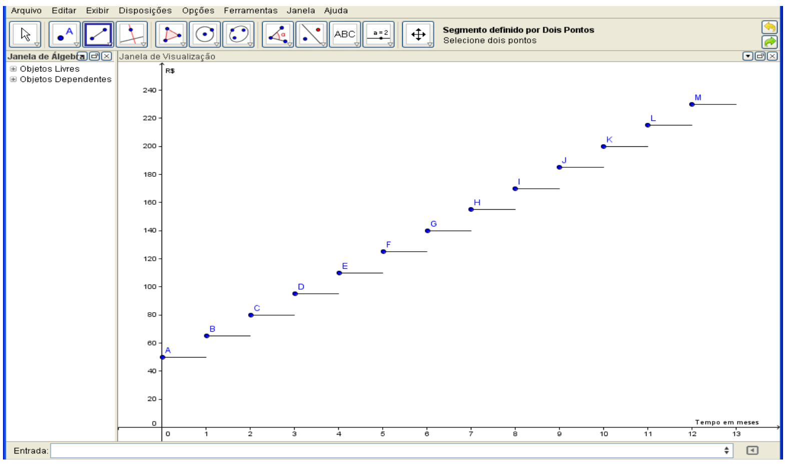

Figura 20 - Segmentos de retas.

Acreditamos que a maioria dos alunos apresentará um gráfico como o da figura 18, uma vez que a situação anterior foi representada por um gráfico semelhante a este. No entanto, mesmo que eles não apresentem todas estas possibilidades de configurações, o professor deverá apresentá-las, explicá-las e oportunizar um momento para a discussão a respeito da melhor maneira de representar a situação do problema.

Questão 2 - Em algum momento Paula terá no cofrinho R$ 92,00? Justifique.

Questão 3

a) Marque no plano cartesiano o ponto que representa a quantidade de dinheiro no cofrinho no momento em que Paula ganhou o presente e o ponto que representa a quantidade de dinheiro no cofrinho passados 2 anos, momento em que Paula retira o dinheiro do cofrinho para comprar a bicicleta. Utilize o eixo horizontal para representar o tempo t e o eixo vertical para representar a quantidade q de dinheiro.
b) Ligue os pontos marcados no item anterior. Supomos que esta configuração gráfica descreva a situação do problema. Vamos, então, encontrar uma lei matemática que nos permite determinar a quantidade de dinheiro presente no cofrinho em função do tempo. Para tanto, vamos calcular a quantidade q de dinheiro para os seguintes meses: 0, 1, 2, 3, 4, t.

Abaixo, segue a tabela 2, conforme os alunos deverão preencher para encontrar a lei matemática que descreve a situação dada no problema. Neste momento, o professor poderá explorar a definição da lei matemática recursivamente.

Tempo em meses	Quantidade em R$
0	$q_0 = 50$
1	$q_1 = q_0 + 15 = 50 + 15$
2	$q_2 = q_1 + 15 = 50 + 15 + 15 = 50 + 15.2$
3	$q_3 = q_2 + 15 = 50 + 15.2 + 15 = 50 + 15.3$
4	$q_4 = q_3 + 15 = 50 + 15.3 + 15 = 50 + 15.4$
...	...
t	$q_t = 50 + 15.t$

Tabela 2: Quantidade de dinheiro em função do tempo.

Questão 4 - Determine o conjunto domínio e imagem da função definida no item anterior. Estes conjuntos são os mesmos da situação do problema? Justifique sua resposta.

A partir desta última questão, o professor poderá abordar a diferença entre determinar o domínio e a imagem de uma função matemática e determinar o domínio e a imagem de uma situação real.

De posse da função na forma algébrica, o professor deverá questionar os alunos a respeito das configurações gráficas das duas funções trabalhadas nas situações 1 e 2 e, a partir daí construir com os alunos a definição de função afim, destacando seus aspectos gráfico e algébrico.

Passaremos, agora, a explorar a configuração gráfica de diferentes tipos de função afim.

A partir deste estudo, o objetivo é fazer com que os alunos relacionem a representação algébrica de cada função afim com sua representação gráfica, percebendo que suas características estão relacionadas aos coeficientes que as compõem.

Questão 5 - Sabendo que uma função afim é da forma $y = ax + b$, escolha um valor fixo para o coeficiente b e construa no GeoGebra, em janelas gráficas diferentes, algumas funções afins, alterando o valor do coeficiente a. Utilize para o a números positivos, negativos e zero.

Questão 6 - De acordo com os gráficos construídos, responda às seguintes questões:

a) Como é a configuração gráfica de uma função afim?
b) Quais das funções são crescentes e quais são decrescentes?
c) Observando agora o sinal do coeficiente a. Existe alguma relação entre o sinal de a e o fato da função ser crescente ou decrescente? Plote, se necessário, mais algumas funções do tipo $y=ax+b$ para verificar essa relação.

Questão 7 – Construa no GeoGebra algumas funções afins variando o valor do coeficiente b, e depois responda as questões a seguir:

a) Indique o valor de y quando x for igual a zero, ou seja, o valor de y quando a reta corta o eixo vertical. Para isso, marque um ponto exatamente na interseção do eixo y com o gráfico da função.

b) Existe alguma relação entre os valores encontrados no item anterior com o valor do coeficiente *b*?
c) Da mesma forma que o item anterior, determine o valor de *x* quando *y* for igual a zero. Esse valor é também chamado de zero da função afim. Responda o que acontece com o valor de *f(x)* quando *x* for menor que este valor e quando *x* for maior que este valor.

Este último item pode preceder o estudo do sinal da função afim pela análise gráfica.

Respondidas estas questões, o professor deverá apresentar a definição de alguns tipos especiais de funções afins, sempre fazendo referência aos exemplos apresentados anteriormente e sua configuração gráfica.

A função constante deve ser especialmente explorada, uma vez que é comum os alunos não conceberem este tipo de configuração como sendo de função. Isso acontece porque não percebem o aspecto variacional deste tipo de função. Considerando este fato, o professor deve explicar que, mesmo variando os valores de *x*, os valores de *y* não variam, e retomando a definição de função anteriormente elaborada, mostrar que este caso se encaixa perfeitamente nesta definição.

Na sequência, passamos a explorar os aspectos gráficos das funções afins, do tipo $f(x)=ax+b$, em relação à variação dos seus coeficientes *a* e *b*.

Questão 8 – Abra uma nova janela no GeoGebra e no penúltimo botão da barra de ferramentas escolha a primeira opção: controle deslizante. Clique no canto superior esquerdo da janela de visualização. Automaticamente aparecerá uma janela com o nome preenchido pela letra *a*. Marque, então, a opção número; nos intervalos coloque mínimo: -5 e máximo: 5; incremento 0,5; finalize clicando no botão aplicar. Para o coeficiente b repita os mesmos passos. No campo entrada escreva a função $f(x)=a*x+b$, o asterisco indica um produto. Clicando enter você terá a configuração gráfica de uma reta (Figura 21).

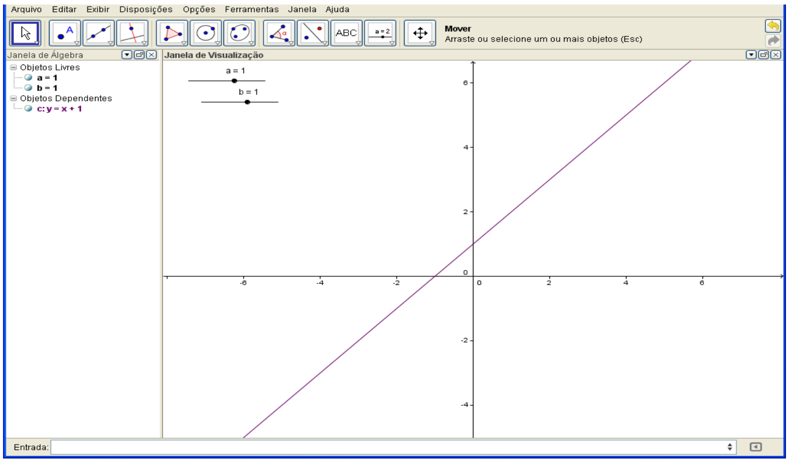

Figura 21 - Configuração gráfica da função f(x)=x+1.

Questão 9 – Clique em cima da reta e marque a opção habilitar rastro. Mova o controle deslizante do coeficiente *a*. O que acontece?

Na figura 22, temos a imagem da família de funções do tipo *f(x) = ax+1*, onde os alunos poderão visualizar que o coeficiente *a* determina a inclinação da reta definida pela função.

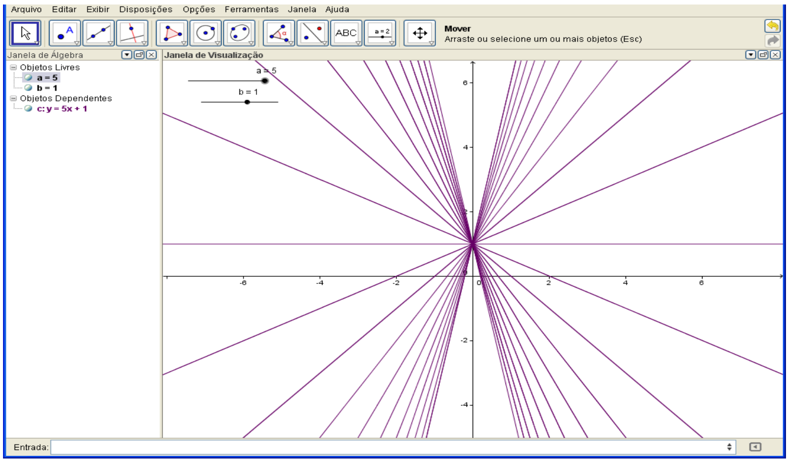

Figura 22 - Família de funções do tipo *f(x) = ax+1* para diferentes valores de *a*.

Questão 10 – Clique em editar e desfazer, deixando o valor de *a* fixo. Mova o controle deslizante do coeficiente *b*. O que acontece?

Na figura 23, temos a imagem da família de funções do tipo *f(x)=x+b*, onde os alunos poderão visualizar que o coeficiente *b* determina o ponto onde a reta definida pela função intersecta o eixo vertical.

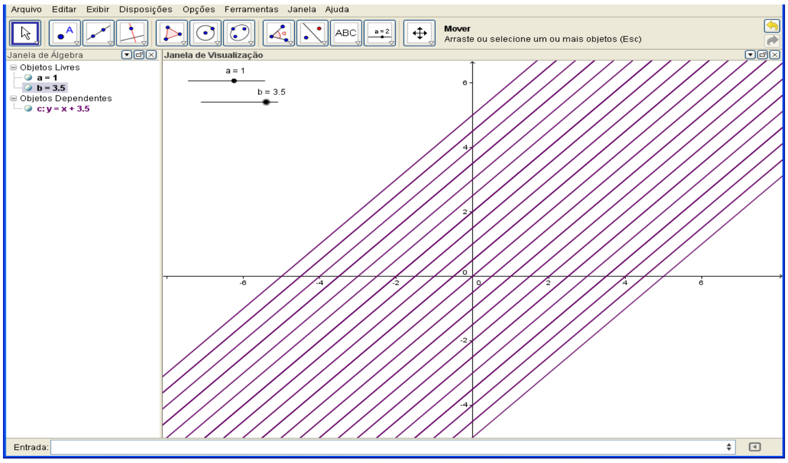

Figura 23 - Família de funções do tipo $f(x) = x + b$ para diferentes valores de *b*.

A partir destas duas últimas questões, é possível explorar com os alunos o conceito de taxa de variação, além da propriedade que caracteriza uma função afim. Verificar que esta taxa está diretamente relacionada ao valor do coeficiente *a*, também chamado de coeficiente angular, e que pode ser facilmente obtida conhecendo-se apenas dois pontos de uma reta. Assim, conhecendo-se dois pontos (x_1,y_1) e (x_2,y_2), temos que $a = (y_2-y_1) /(x_2-x_1)$.

Desta maneira, percebe-se que conexões entre o estudo de funções e a geometria analítica também podem ser exploradas através da análise gráfica de uma função afim. Outra conexão possível é relacionar a resolução de sistemas equações do 1º grau com o estudo de funções e mais particularmente a representação gráfica de duas funções afins, como veremos a seguir.

O próximo problema a ser explorado é outro exemplo de como estabelecer relação entre a Matemática e a Física. O problema físico estabelece relação com o estudo de sistemas de equações trabalhado geralmente no 8º ano do ensino fundamental.

Situação 3 - Um carro A passa pelo km 30 de uma rodovia com uma velocidade de 60 km/h. No mesmo instante, outro carro B passa pelo km 10 da mesma rodovia com uma velocidade de 80 km/h. Com base nestes dados, responda às seguintes questões:

Questão 1 - Considerando que os carros percorrem a rodovia com velocidades constantes e no sentido positivo da trajetória, determine cada uma das funções que relaciona a posição do móvel *s* em função do tempo *t*.

A questão 1, tem por objetivo fazer com que os alunos representem através de uma lei matemática a situação descrita anteriormente. Espera-se que eles encontrem as seguintes funções: $s_A(t) = 60\ t+30$ e $s_B(t) = 80\ t+10$. Para tanto, o professor poderá disponibilizar momentos de discussões entre os colegas e sugerir que construam uma tabela semelhante às elaboradas nas situações anteriores.

As próximas questões têm a finalidade mostrar aos alunos que a solução de um sistema de equações do 1º grau pode ser representado geometricamente, através do ponto de interseção das retas representadas por estas equações, conforme ilustra a figura 24.

Questão 2 - Você poderia determinar o instante exato em que o carro B encontra o carro A?

Questão 3 - Para resolver o item anterior, uma das maneiras é determinar a solução do seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} s - 60t = 30 \\ s - 80t = 10 \end{cases}$$

Resolva-o.

Questão 4 - Em uma mesma janela do GeoGebra, desenhe os gráficos das funções $s_A(t)$ e $s_B(t)$ obtidas anteriormente e identifique o ponto de interseção destas funções. Como podemos interpretar graficamente a resolução do sistema de equações do item anterior?

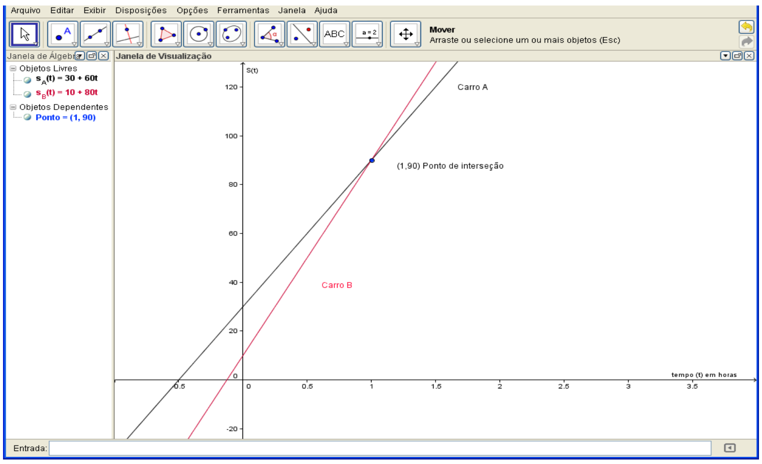

Figura 24 - Representação gráfica das funções horárias de posições dos carros A e B.

Com este problema encerramos a terceira atividade de nossa proposta, onde procuramos estudar os principais elementos e conceitos relacionados às funções afins.

3.4 Quarta atividade

Nesta atividade, vamos propor dois problemas envolvendo funções polinomiais do 2º grau com o objetivo de explorar o conceito de função, a definição de função quadrática, raízes da função quadrática, sua configuração gráfica, principais elementos da parábola, intervalos de crescimento e decrescimento, valor máximo e valor mínimo, estudo do sinal da função e os conjuntos domínio e imagem.

Para auxiliar na resolução dos problemas e na exploração dos elementos presentes nas funções quadráticas, vamos utilizar novamente o software GeoGebra.

3.4.1 Explorando a função quadrática

Situação 1 - Considere uma caixa fechada de base quadrada e altura igual 5 cm. Faça o esboço deste desenho em uma folha e responda às seguintes questões:

Questão 1

a) Se considerarmos o lado da base igual a 4 cm, qual será o valor da área total desta caixa? Calcule a área total para o caso em que o lado da base é 15 cm.
b) Após estes primeiros cálculos, responda: a área total depende de quê?
c) Supondo que a área total da caixa seja 48 cm², escreva a equação correspondente a este caso e determine o valor do lado da base. E se a área total fosse 150 cm², qual seria o valor do lado da base?
d) Quantos valores você encontrou para o lado da base em cada uma das situações anteriores? Quais destes valores você deve considerar? Por quê?
e) Considerando a definição de função, você pode afirmar que a medida do lado da base da caixa depende de sua área total?
f) Chamando a medida do lado da base de x e a área total de y, escreva uma função que relacione a área total da caixa em função da medida do lado de sua base.
g) É possível escrever uma função que relacione a medida do lado da base em função de

sua área total? Justifique sua resposta.

Estas primeiras questões têm a finalidade de explorar novamente a ideia intuitiva de função, além de fazer o aluno compreender que, em certos momentos, não é possível escrever uma grandeza em função da outra.

Os alunos devem ter clareza de que uma função matemática é uma relação especial, ou seja, algumas relações não podem ser consideradas funções, como é o caso do exemplo anterior, onde temos a impossibilidade de escrever a medida do lado da base da caixa em função de sua área total.

Nas próximas questões vamos explorar os aspectos gráficos da função $y=f(x)$, onde temos a área total da caixa em função da medida de seu lado.

Questão 2 - Qual deve ser o menor valor de x a partir do qual já teríamos um valor positivo para a área total? Existe um valor máximo para x?

Esta última questão visa justamente definir o valor mínimo para o qual a área será um valor maior do que zero. É bem provável que a pergunta gere alguma discussão a respeito deste valor, uma vez que se tratando de um problema prático, de construção geométrica, os alunos podem não aceitar um valor para x muito próximo de zero, pois não concebem a possibilidade de construção da caixa. Da mesma forma, valores muito grandes, tendendo ao infinito, geram desconforto aos alunos quando trabalhamos com problemas reais.

Questão 3 - Vamos considerar a função que relaciona a área total com a medida do lado da base da caixa, ou seja, $y=2x^2+20x$. Abra o Geogebra e escreva no campo de entrada: Função[$2x^2+20x$, 0, ∞]. Como é o gráfico desta função?

Neste momento, o professor deve explorar o significado de cada elemento digitado no campo de entrada, explicar como a expressão matemática que representa a função foi definida e a escolha do intervalo numérico.

Provavelmente os alunos responderão que o gráfico da função é uma reta (Figura 25). No entanto, sabemos que o gráfico é, na verdade, uma parte da parábola definida pela mesma função no domínio dos reais. Para que o aluno se convença disso, vamos prosseguir com os seguintes questionamentos:

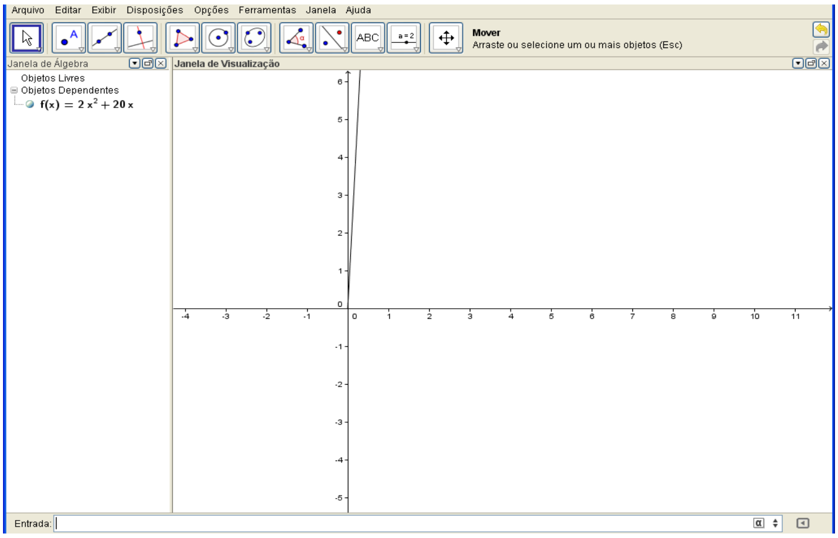

Figura 25 - Gráfico da função y=2x²+20x, para x≥0.

Questão 4 - Vamos verificar se o gráfico acima é mesmo uma reta. Inicialmente, marque dois pontos quaisquer sobre o gráfico. Para isso, clique no segundo botão da barra de ferramentas e escolha a opção novo ponto. Agora, clique no terceiro botão na opção reta definida por dois pontos e clique em cima dos dois pontos marcados. Aqui a reta está representada com a cor vermelha. Para finalizar, vamos reduzir a imagem até visualizarmos no eixo *y* o número 200 (Figura 26).

a) O que você pode perceber?

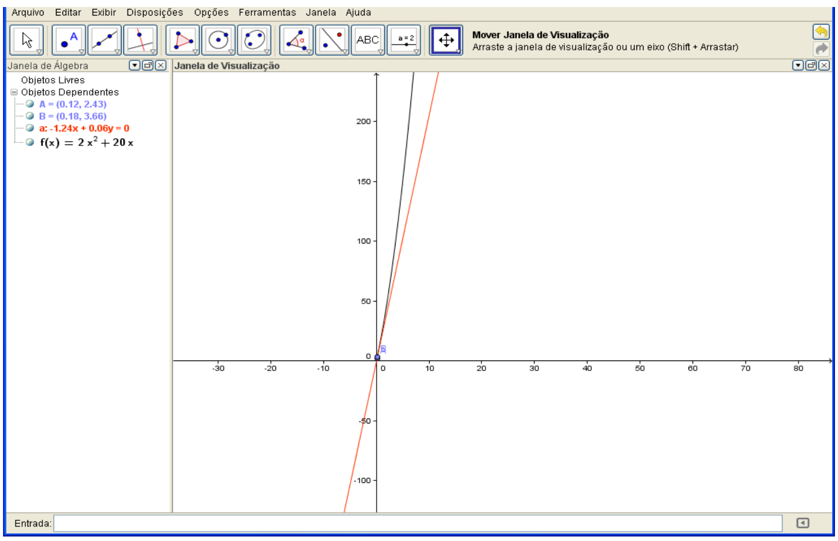

Figura 26 - Função y=2x²+20x e reta passando pelos pontos A e B.

b) Na janela de álgebra, temos que a reta passando pelos pontos A e B é representada pela equação $-1,24x + 0,06y = 0$. Isolando y teremos uma função $y = f(x)$. Faça isso e a compare com a função $y = 2x^2+20x$.

c) Nesta mesma janela do GeoGebra, apague a reta plotada anteriormente, escreva no campo de entrada somente a função $y=2x^2+20x$ e veja o que acontece.

Após estas questões, o aluno deve se convencer de que a configuração gráfica da função dada não é uma reta, mas sim uma parábola, conforme mostra a figura 27. Além disso, ele também deve perceber que devemos ter muito cuidado no momento de plotar o gráfico deste tipo de função, pois dependendo dos valores escolhidos a configuração da parábola pode não ser visualizada e confundida com uma reta, como o que aconteceu no exemplo anterior. Neste momento, o professor deve apresentar a definição de função quadrática, evidenciando suas características gráficas.

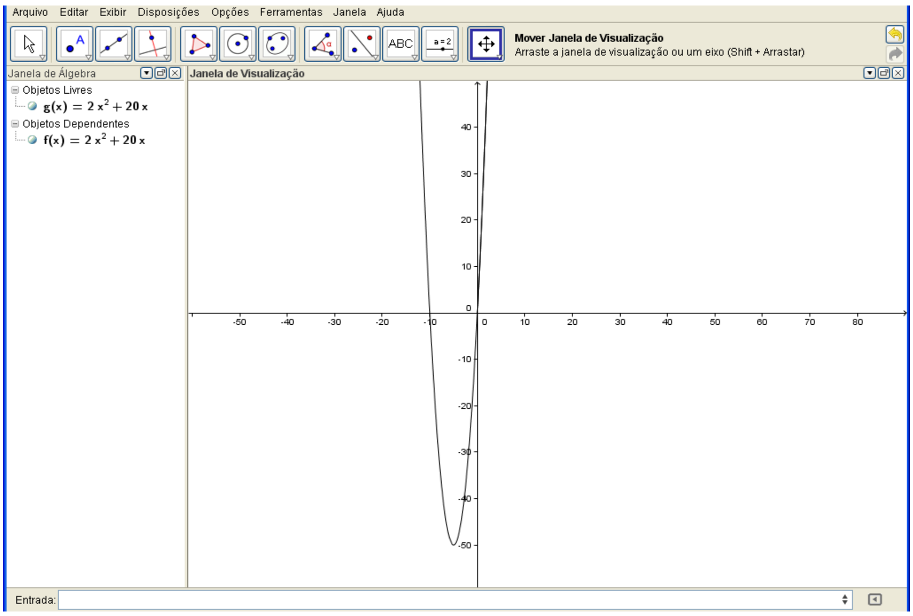

Figura 27 - Gráfico da função y=2x²+20x, cujo domínio é o conjunto dos números reais.

O próximo problema tem como objetivo explorar, além do conceito de função quadrática, os conceitos relacionados ao valor mínimo e máximo desta função, vértice da parábola, intervalos de crescimento e decrescimento, conjunto domínio e imagem, valor da função em determinado ponto, relação entre os coeficientes da função e sua configuração gráfica. Para tanto, vamos propor algumas questões relacionadas ao campo financeiro. Mais uma vez os alunos poderão constatar as conexões entre a matemática e as demais ciências.

Situação 2 - A empresa Pinga Pinga produz guarda-chuvas. Seu custo diário, em reais, para produzir x guarda-chuvas é dado por $c(x) = x^2 - 70x + 2000$ e sua receita diária dada por $r(x)= 50x$.

Questão 1 - Com base nesta situação, responda:

a) Se a empresa não produzir nenhum guarda-chuva, qual será seu custo?
b) Se a empresa não produzir nenhum guarda-chuva, também não terá receita, uma vez que $r(0)=0$. Neste caso, a empresa terá lucro ou prejuízo? De quantos reais?
c) Sabendo que o lucro diário é dado pela diferença entre a receita e o custo diários, qual será o lucro se a empresa produzir 10 unidades? E se produzir 80 unidades?
d) Calcule o lucro da empresa se a mesma produzir 20 ou 100 unidades.
e) O custo, a receita e o lucro são todos dados em função de que grandeza?

Estas primeiras questões abordam novamente o conceito de função e o valor da função definida em um ponto. Acreditamos que os alunos não terão dificuldade em responder a estas questões, pois já exploraram questões muito parecidas nas atividades anteriores.

Na questão 2, os alunos terão de escrever a função $l(x)$ a partir da definição de lucro que relaciona as funções $c(x)$ e $r(x)$ da seguinte maneira: $l(x) = r(x) – c(x)$.

Questão 2 - Escreva a função $l(x)$ que relaciona o lucro obtido em função da quantidade de guarda-chuvas produzidos.

Nas próximas questões, vamos explorar aspectos gráficos das funções custo e receita dadas inicialmente, além de conceitos relacionados com o crescimento e decrescimento da função e os conjuntos domínio e imagem.

Questão 3 - Classifique as funções $c(x)$ e $r(x)$ como função afim ou função quadrática e descreva como serão suas respectivas configurações gráficas.

a) Para comprovar sua resposta no item anterior, represente no GeoGebra o gráfico de *c(x)* e *r(x)* em uma mesma janela. Inicialmente, clique com o botão direito do mouse e na janela de configuração defina os seguintes intervalos para as variáveis *x* e *y*: *x* Mín:-50, *x* Máx:200, *y* Mín:-3000 e *y* Máx:6000, e escreva também o que representa cada um dos eixos cartesianos. Depois escreva no campo de entrada as funções $c(x)=x^2 - 70x + 2000$ e $r(x)=50x$.

A definição dos valores para os eixos coordenados foram adequados para uma melhor visualização dos gráficos das funções *c(x)* e *r(x)*, conforme ilustrado na figura 28. Desta maneira, as escalas dos eixos vertical e horizontal são diferentes.

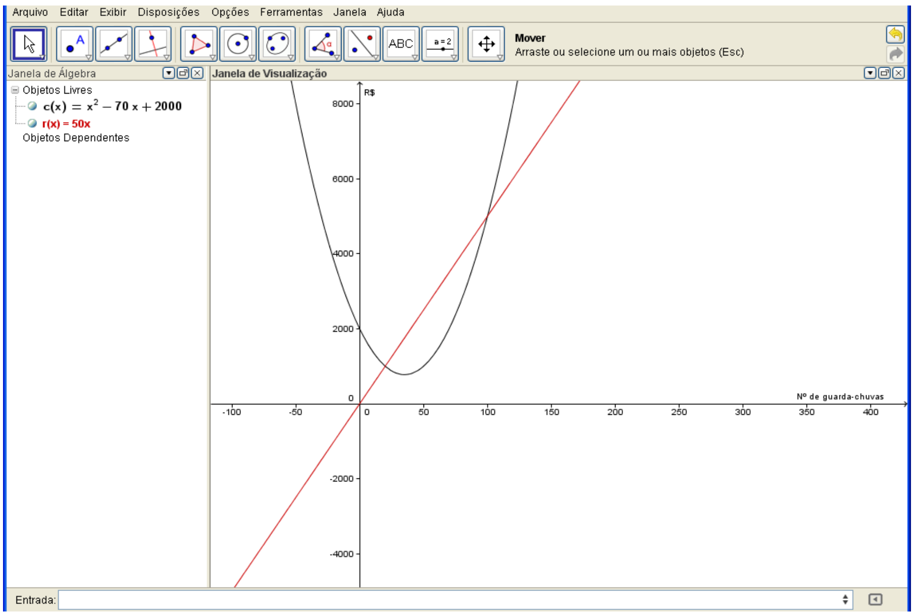

Figura 28 - Gráfico das funções custo e receita.

A questão 4, tem o objetivo de explorar com os alunos os conceitos de crescimento e decrescimento de uma função. É importante que os alunos, além de saberem estes conceitos, também saibam explicá-los. Por este motivo a justificativa se faz necessária. Neste momento, o professor deve aproveitar a oportunidade para explorar esses conceitos e definir formalmente quando uma função é considerada crescente, decrescente ou constante. Além disso, os alunos devem ter claro que as funções afins serão para todo seu domínio ou crescentes ou então decrescentes, não existindo a possibilidade de haver simultaneamente intervalos de crescimento e de decrescimento, como é o caso das funções quadráticas.

Questão 4 - Em relação aos gráficos plotados anteriormente, responda às seguintes questões:

a) A função *c(x)* é sempre decrescente? Justifique sua resposta.
b) A função *r(x)* é sempre crescente? Justifique sua resposta.

As próximas questões têm como objetivo mostrar aos alunos que, para determinadas situações reais, o conjunto domínio deve sofrer alguns ajustes para que o mesmo tenha sentido. Se a análise for meramente matemática as funções afins e quadráticas terão sempre como domínio o conjunto dos números reais. É importante que o aluno tenha clareza de que a análise matemática de questões relacionadas ao mundo real pode ser diferente da análise de questões puramente matemáticas, como é o caso da determinação do conjunto domínio.

Questão 5 - Observando os gráficos acima, você percebe que as funções estão perfeitamente definidas para valores de *x* negativo.

a) Em relação ao problema estudado, estes valores negativos fazem algum sentido? Justifique.
b) A partir de qual valor de *x* estas funções devem ser consideradas?
c) Escreva o conjunto domínio das funções plotadas anteriormente e o domínio das mesmas funções considerando as condições reais do problema.
d) Qual é a variável que representa os valores do domínio e qual é a variável que representa os valores da imagem das funções *c(x)* e *r(x)*?

Com as próximas questões, pretendemos mostrar aos alunos que os pontos de interseção dos dois gráficos são os pontos onde as funções que determinam o custo e a receita se igualam, ou seja, quando a produção for de 20 ou de 100 guarda-chuvas teremos a receita exatamente igual ao custo, o que resulta em um lucro igual a zero. Quando o número de guarda-chuvas produzido for menor do que 20 ou maior do que 100 guarda-chuvas, teremos prejuízo. E para a produção entre 20 e 100 guarda-chuvas, o lucro é positivo.

Questão 6 - Observe que os gráficos das funções *c(x)* e *r(x)* (Figura 29) se intersectam em dois pontos. Marque estes pontos, denominando-os respectivamente de pontos *A* e *B*, e na janela de álgebra visualize suas coordenadas.

a) O que essas coordenadas significam para esta situação?

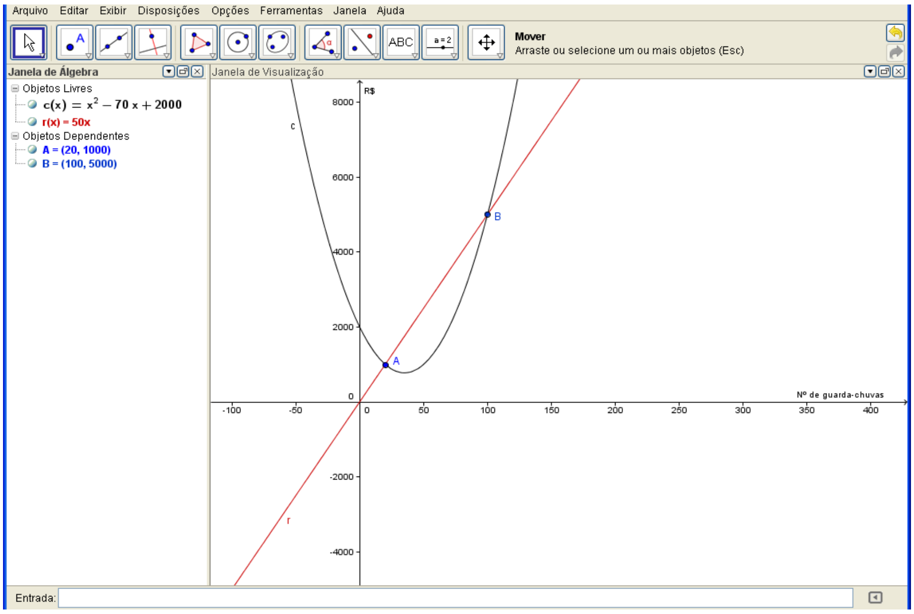

Figura 29 - Pontos de interseção dos gráficos de c(x) e r(x).

b) Compare os valores de *x* nas coordenadas de *A* e *B* (item anterior) com os valores onde lucro obtido é zero. O que podemos perceber?

c) Como é o lucro para valores de *x* menores do que 20, para valores entre 20 e 100 e para valores maiores que 100?

Nas próximas questões, vamos explorar basicamente a função *c(x)* que representa uma função quadrática e analisar alguns aspectos gráficos como ponto de interseção com o eixo vertical, valor mínimo da função e simetria da parábola.

Questão 7 - A partir de agora, vamos analisar somente o gráfico da função *c(x)*. Para tanto, abra uma nova janela no GeoGebra, desenhe a função *c(x)* e depois responda as seguintes questões:

a) Lembremos que a curva gerada pela função acima é chamada de parábola. Sabemos dos itens anteriores que os valores para *x* negativos não fazem sentido para esta situação. Neste caso, qual é o valor do custo inicial?

A figura 30, ilustra o gráfico da função *c(x)*.

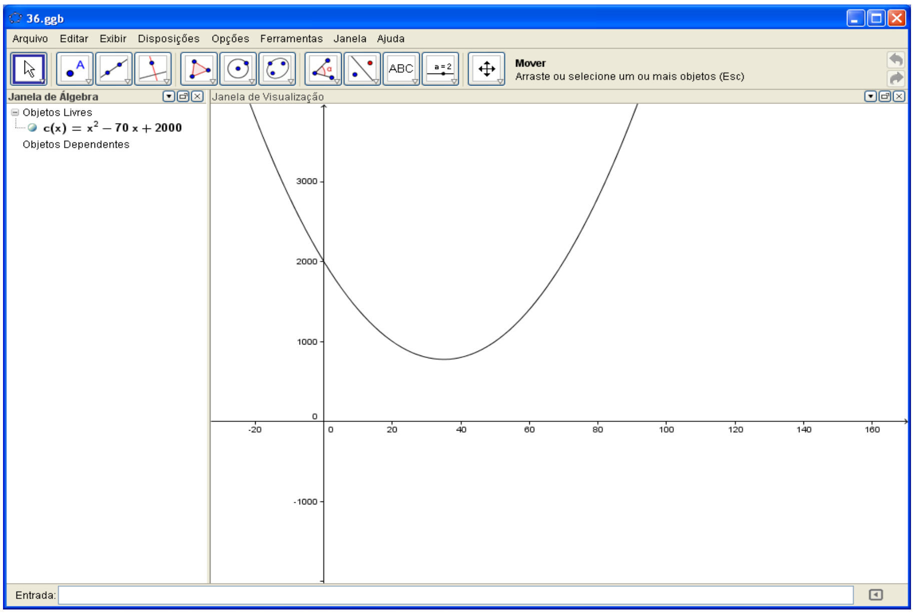

Figura 30 - Gráfico da função c(x).

Questão 8

a) Considerando que uma função *f(x)* do 2º grau é escrita da seguinte forma: $f(x)=ax^2+bx+c$, onde *a*, *b* e *c* são chamados de coeficientes, escreva quais são os respectivos coeficientes da função *c(x)*.

b) Observe que o gráfico *c(x)* "corta" o eixo vertical exatamente em 2000, que representa o mesmo valor do coeficiente *c* determinado anteriormente. Será que isso sempre acontece?

c) Para ajudar a responder a pergunta anterior, na mesma janela onde você plotou o gráfico *c(x)*, clique na opção "Controle deslizante". Clicando no canto superior direito da janela de visualização, troque a letra *a* pela letra *b*. Marque, então, a opção número; nos intervalos coloque mínimo: 500 e máximo: 2500; incremento 500; finalize clicando no botão aplicar. Na função *c(x)* troque o número 2000 pela letra *c*. Clique em cima da parábola e marque a opção habilitar rastro. Movendo o controle deslizante, o que você pode perceber?

Na figura 31, temos ilustrado os gráficos da função *c(x)* variando-se o valor do coeficiente *c*.

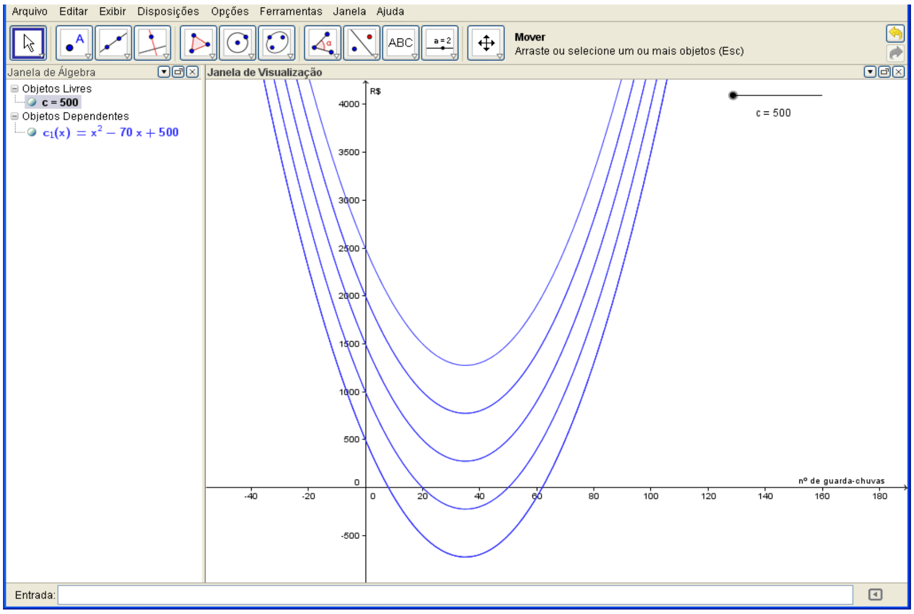

Figura 31 - Gráficos da função c(x) variando o valor do coeficiente c.

Questão 9 - Ainda em relação ao gráfico de C(x), observe que pelo fato da parábola ser côncava para cima existe um ponto onde o custo se torna mínimo. Pela observação do gráfico, escreva aproximadamente qual é o valor do custo mínimo. Utilize a ferramenta ampliar para ajudar a definir mais precisamente este valor.

a) Uma forma de obtermos o valor de *x* que minimiza o custo é através de uma análise gráfica. Primeiramente observe que a parábola é simétrica em relação à reta paralela ao eixo *y* que passa pelo vértice. Calculando o valor médio entre dois valores de *x* para os quais a função *c(x)* tem o mesmo valor, você obterá o *x* do vértice da parábola. Para isso, façamos o seguinte:

   Primeiramente marcamos o ponto onde a parábola intersecta o eixo vertical, ou seja, A=(0, 2000) que é o custo inicial. Depois, traçamos uma reta perpendicular ao eixo vertical passando pelo ponto *A*. Esta reta intersecta a parábola em dois pontos, um deles é o ponto *A* e o outro o ponto *B*. Marcando o ponto *B*, temos suas coordenadas dadas na janela de álgebra. Agora, utilizando a ferramenta "Ponto Médio", vamos determinar o ponto médio entre *A* e *B*, que chamaremos de *C*. Pelo ponto *C*, traçamos uma perpendicular ao eixo *x*. Esta reta intersectará a parábola exatamente no seu vértice. Marcamos esse ponto chamando-o de *V* e observando suas coordenadas na janela álgebra, temos respectivamente o número de guarda-chuvas e o custo mínimo assumido pela função *c(x)*.

Na figura 32, temos a representação gráfica esperada pelo item anterior.

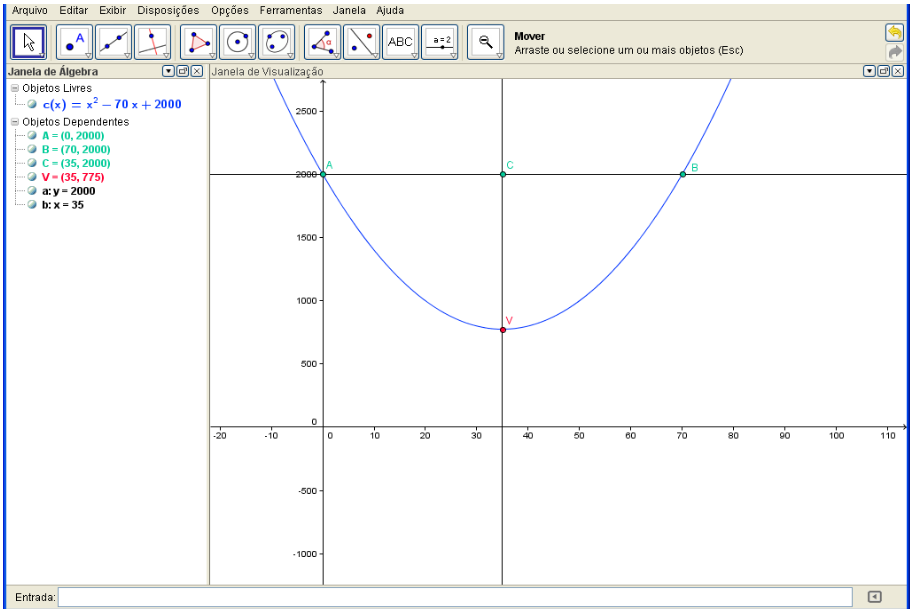

Figura 32 - Determinação do vértice da parábola através de análise gráfica.

Apesar de extensa, a última questão tem por objetivo explorar os conceitos de simetria da parábola, valor mínimo de uma função, valor médio e vértice da parábola. Além dos conceitos presentes no estudo da função quadrática, ela aborda tópicos de geometria como paralelismo e perpendicularismo, o que torna o estudo mais enriquecedor. Acreditamos que este tipo de abordagem é muito mais significativa para o aluno do que a abordagem tradicional, na qual simplesmente são apresentadas fórmulas para a obtenção do vértice da parábola.

É claro que o cálculo do vértice da parábola através de fórmulas deve ser ensinado e utilizado pelo aluno, uma vez que é um método mais prático do que o apresentado anteriormente. No entanto, acreditamos que o aluno precisa compreender que o vértice de uma função quadrática é o ponto onde a função atinge seu maior ou seu menor valor. Além disso, o aluno deve perceber que o vértice da parábola é o ponto onde a função inverte seu comportamento, ou seja, a função passará de crescente para decrescente se o vértice for um ponto de máximo e passará de decrescente para crescente se o vértice for um ponto de mínimo. Desta maneira, o aluno deverá perceber que a determinação do vértice se faz necessária tanto para a análise de seu comportamento como para sua construção gráfica.

Nas próximas questões, os alunos deverão determinar os intervalos de crescimento e decrescimento da função *c(x)*.

Questão 10 - Sabendo o valor do custo mínimo, determine o intervalo onde a função *c(x)* é crescente e o intervalo onde ela é decrescente.

Passaremos agora a explorar a função *l(x)* que determina o lucro em função do número de guarda-chuvas produzidos e vendidos pela empresa. Esta é uma função quadrática e procuraremos abordar novamente alguns dos conceitos já trabalhados anteriormente, a fim de fortalecer algumas ideias e contribuir com sua efetiva aprendizagem.

Questão 11

a) Determine a função lucro dada por *l(x) = r(x)-c(x)*.
b) Esta função é uma função quadrática? Se a resposta for positiva, determine os coeficientes *a, b* e *c.*
c) Descreva como será o gráfico desta função.
d) Abra uma nova janela no GeoGebra e plote a função *l(x)*, e confira sua resposta dada no item anterior.

A representação gráfica da função *l(x)* está ilustrada na figura 33.

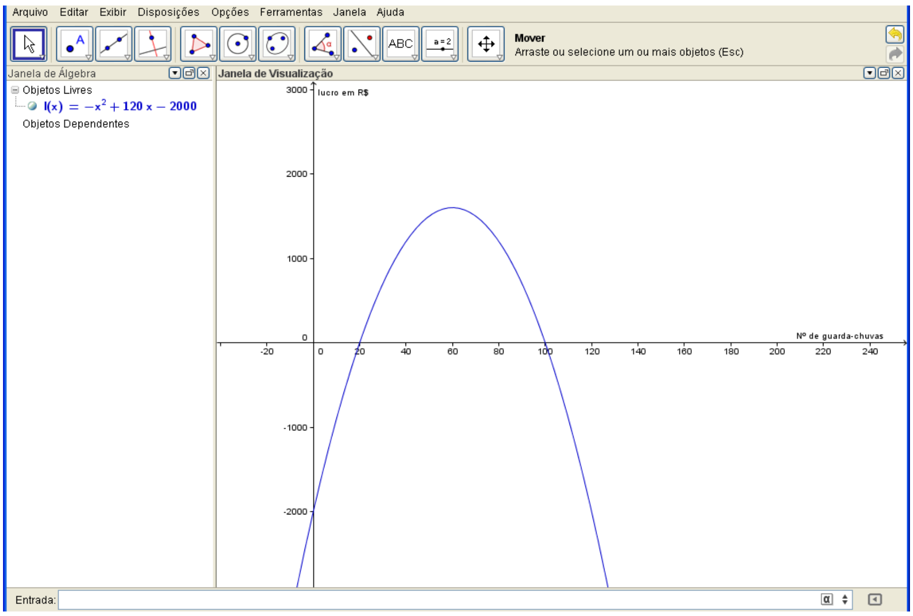

Figura 33 - Gráfico da função l(x).

e) O que acontece com a função quando temos $x = 0$?

f) Observe que a parábola gerada pela função $l(x)$ é côncava para baixo. Isto significa que teremos um valor x para o qual a função assume um valor máximo, ou seja, um lucro máximo. Determine o valor de x que maximiza o lucro e qual é o lucro máximo obtido pela empresa.

g) Uma empresa obtém lucro quando sua receita for maior do que sua despesa (custo) e tem prejuízo quando ocorre o contrário. Observando o gráfico acima, responda: para quais valores de x (guarda-chuvas) teremos lucro e para quais valores de x teremos prejuízo? Escreva em notação de intervalos numéricos.

h) Observe novamente que o valor onde a parábola "corta" o eixo vertical é exatamente o valor do coeficiente c da função quadrática $l(x)= -x^2+120x -2000$. Além disso, os valores onde a parábola "corta" o eixo horizontal são exatamente os valores onde a função é igual a zero. Calcule os valores de x para que tenhamos $l(x)=0$ e comprove.

Questão 12 - A função $c(x) = x^2 – 70x + 2000$ gera uma parábola côncava para cima e a função $l(x) = -x^2 +120x -2000$ gera uma parábola côncava para baixo. Por que isso acontece? O que determina se a concavidade será voltada para cima ou para baixo?

a) Para ajudar a responder esta questão, vamos analisar o gráfico de uma função quadrática $f(x)=ax^2+bx+c$ quando variamos os valores dos seus coeficientes a, b e c. Para isso, siga os passos a seguir.

   Abra uma nova janela no GeoGebra e no penúltimo botão da barra de ferramentas escolha a primeira opção: controle deslizante. Clique no canto superior esquerdo da janela de visualização. Automaticamente aparecerá uma janela com o nome preenchido pela letra a. Marque, então, a opção número; nos intervalos coloque mínimo: -5 e máximo: 5; incremento 1; finalize clicando no botão aplicar. Para o coeficiente b e c repita os mesmos passos. No campo entrada escreva a função $f(x)=a*x^2+b*x+c$. Clicando enter você terá a configuração gráfica de uma parábola (Figura 34) .

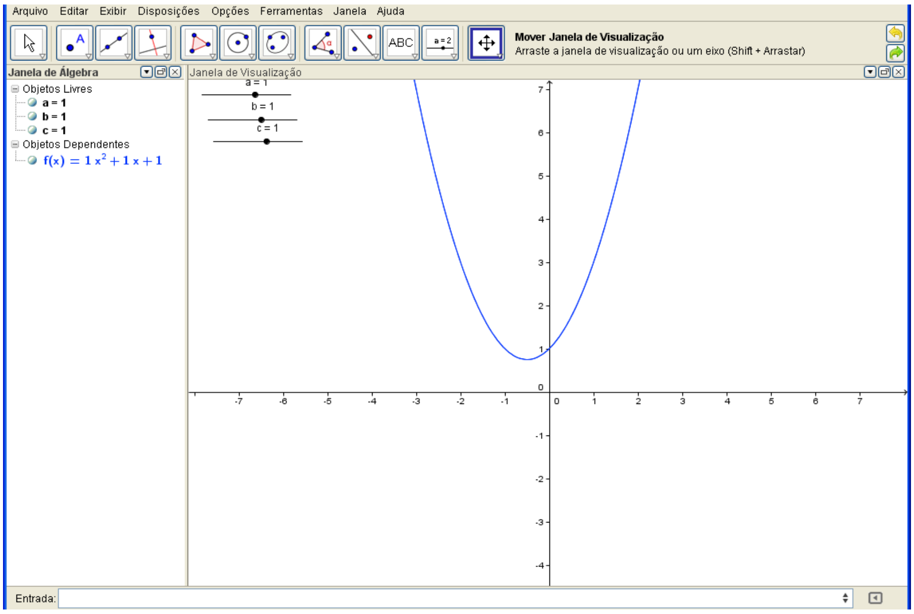

Figura 34 - Configuração gráfica da função f(x)=x²+x+1.

b) Clique em cima da parábola e marque a opção habilitar rastro. Mova o controle deslizante do coeficiente *a*. O que acontece?

Na figura 35, temos a família de funções do tipo *f(x)= ax²+x+1* para diferentes valores do coeficiente *a*.

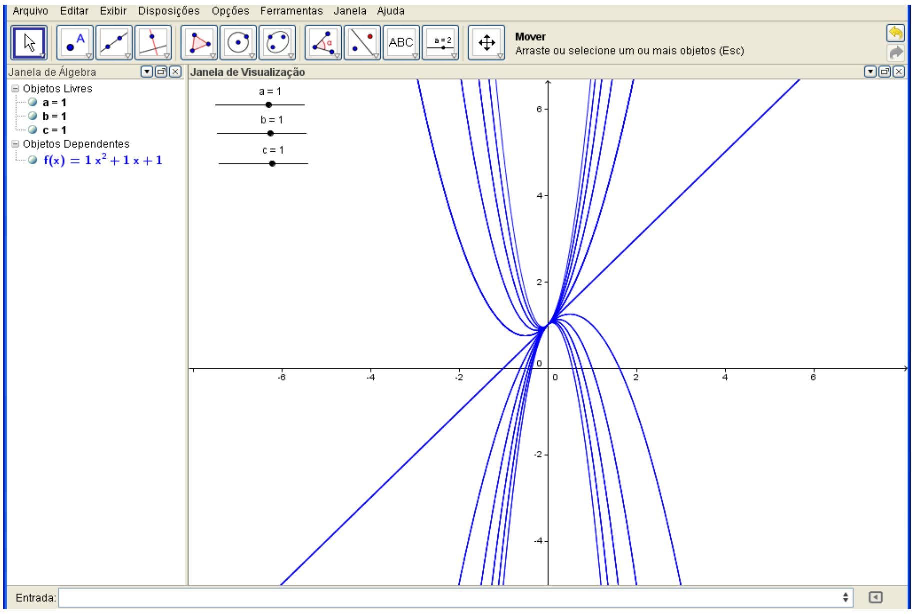

Figura 35 - Família de funções do tipo f(x)=ax²+x+1 para diferentes valores do coeficiente a.

Com esta questão os alunos deverão se convencer de que a concavidade da parábola é determinada pelo valor do coeficiente *a*. É importante ficar claro que o coeficiente *a* determina se a parábola será côncava para cima ou côncava para baixo, assim como sua abertura. Outro fato a ser discutido entre os alunos é o momento em que temos uma reta. Eles deverão perceber que isso acontece quando o coeficiente *a* é igual a zero, ou seja, deixamos de ter uma função quadrática e passamos a ter uma função afim, cuja configuração gráfica é uma reta.

Questão 13 - Observe que todas as parábolas plotadas no item anterior tem um ponto em comum.

a) Que ponto é esse? Por que isso acontece?
b) Agora, clique em editar, desfazer e mova o controle deslizante do coeficiente *b*. O que acontece?

Nas próximas questões, o objetivo é mostrar que o coeficiente *b* juntamente com o coeficiente *a* definem a posição do vértice da parábola, se este se encontra à direita ou à esquerda do eixo vertical, conforme ilustram as figuras 36 e 37. Além disso, o aluno deverá constatar que no caso de $b=0$ o vértice se encontrará sobre o eixo vertical.

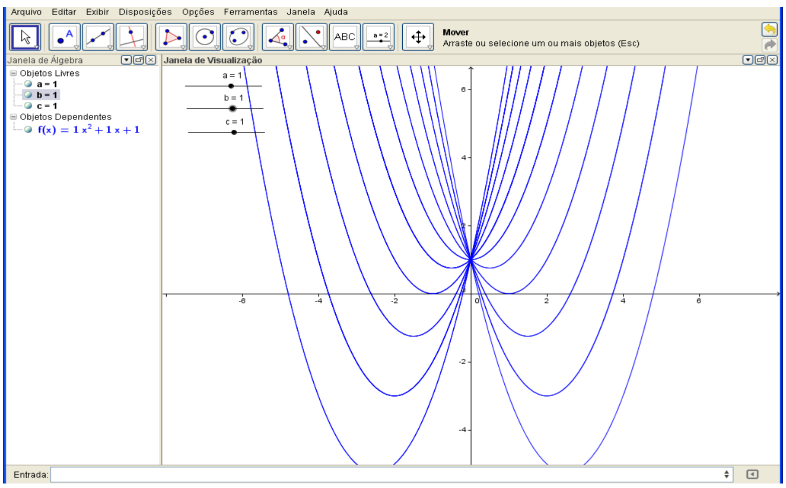

Figura 36 - Família de funções do tipo $f(x)=x^2+bx+1$ para diferentes valores do coeficiente b.

c) Clique em editar e desfazer, deixando o valor de *a* fixo em -1. Mova novamente o controle deslizante do coeficiente *b*. O que aconteceu?

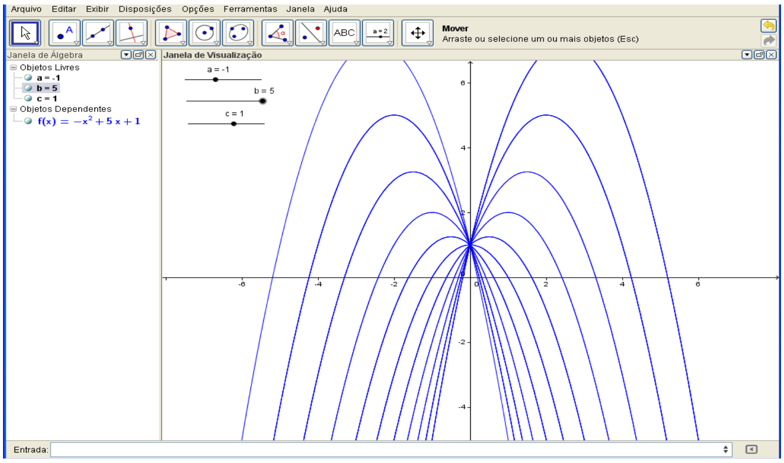

Figura 37 - Família de funções do tipo f(x)=-x²+bx+1 para diferentes valores do coeficiente b.

Na sequência, faremos novamente uma análise sobre o coeficiente *c*, destacando que este determina o ponto onde a parábola intersecta o eixo das ordenadas, conforme a figura 38.

d) Movendo agora somente o controle deslizante do coeficiente *c*, o que acontece?

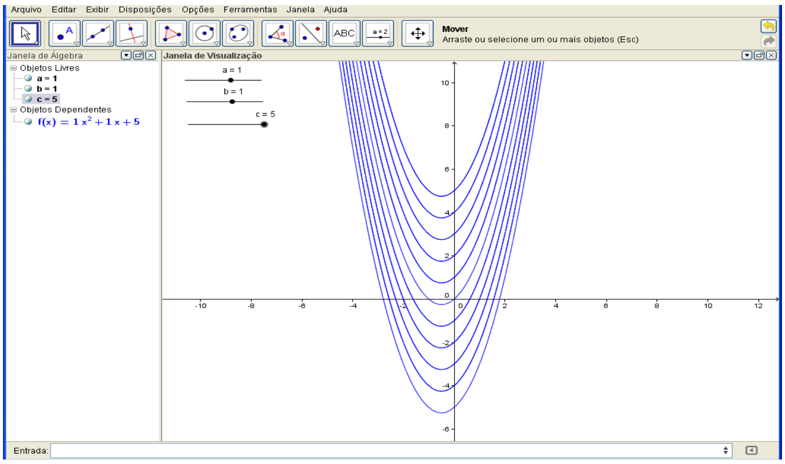

Figura 38- Família de funções do tipo f(x)=x²+x+c para diferentes valores do coeficiente c.

As próximas questões têm por objetivo trabalhar o conceito de raízes de uma função quadrática. Para tanto, vamos explorar a representação gráfica das funções *c(x)* e *l(x)*, conforme ilustra a figura 39.

Questão 14 – No GeoGebra, desenhe o gráfico das funções *c(x)* e *l(x)*.

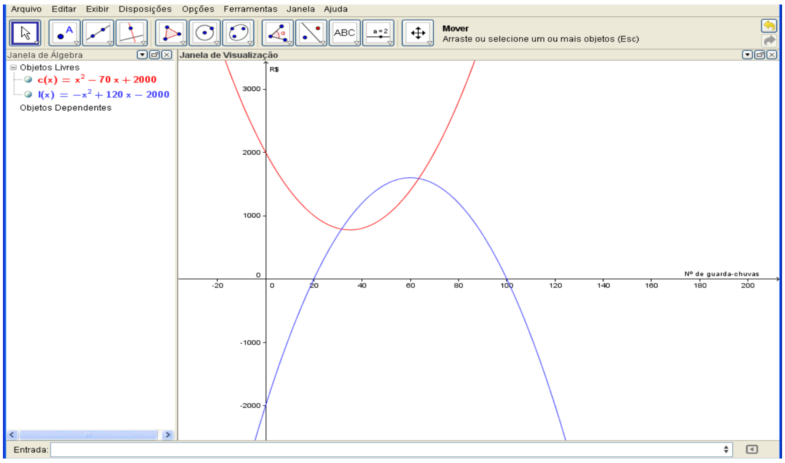

Figura 39 - Gráficos das funções c(x) e l(x).

a) Observe o gráfico de *c(x)*. Existe um número de guarda-chuvas para o qual o custo é zero?

b) A equação c*(x) = 0* tem solução real? Qual é o valor do discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ da equação c*(x) = 0* ?

c) Qual é a relação entre o discriminante Δ de c*(x)= 0* e o número de raízes da função *c(x)*?

Após estas três questões é importante que os alunos tenham clareza de que as raízes de uma função nada mais são que, em termos geométricos, os pontos onde o gráfico desta função intersecta o eixo das abcissas. Na próxima questão, os alunos serão desafiados a fazer uma generalização do que foi observado nos itens anteriores.

Questão 15 - Considere uma função $f(x) = ax^2 + bx + c$, tal que o discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ seja negativo. Nesta situação, qual é a relação entre o valor de Δ e o número de pontos onde a parábola da função *f(x)* intersecta o eixo *x*?

Em seguida, os alunos deverão relacionar o número de raízes de uma função quadrática no caso em que Δ for um número positivo e no caso em que Δ for zero.

Questão 16 - Analise o gráfico da função *l(x)*.

a) Para quais valores de guarda-chuvas o lucro é igual a zero? A equação *l(x)* tem quantas soluções reais? Qual é o valor do discriminante Δ na equação *l(x) = 0* ?

b) Qual é a relação entre o discriminante Δ de *l(x)= 0* e o número de raízes da função *l(x)*?

c) Considere uma função $f(x) = ax^2 + bx + c$, tal que o discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ seja positivo. Nesta situação, qual é a relação entre o valor de Δ e o número de pontos onde a parábola da função *f(x)* intersecta o eixo *x*?

d) Na janela onde você plotou as funções *c(x)* e *l(x)*, escreva no campo de entrada a função $g(x) = -x^2 + 120x - 3600$.

e) Analisando o gráfico da nova função $g(x)= -x^2 +120x -3600$, para qual valor de *x* teremos $g(x) = 0$? A equação $g(x)=0$ tem quantas soluções reais? Qual é o valor de Δ na equação $g(x) = 0$?

f) Qual é a relação entre o discriminante Δ de *G(x)= 0* e o número de raízes da função G(x)?

g) Considere uma função $f(x) = ax^2 + bx + c$, tal que o discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ seja igual a zero. Nesta situação, qual é a relação entre o valor de Δ e o número de pontos onde a parábola da função f(x) intersecta o eixo x?

Ao finalizar estas últimas questões, os alunos deverão compreender que o número de raízes de uma função está associada ao valor do discriminante Δ. Assim, as três situações ilustradas na figura 40, devem ser retomadas e cuidadosamente discutidas com os alunos a fim de cumprir com este objetivo.

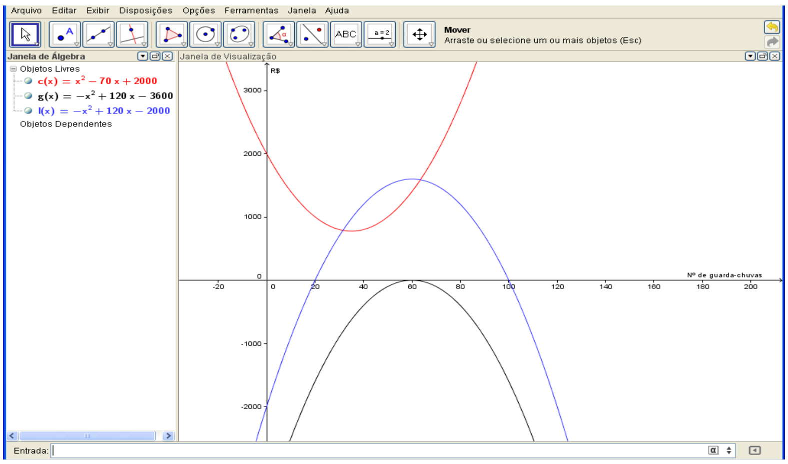

Figura 40 - Gráficos das funções c(x), l(x) e g(x).

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo do presente trabalho consistiu em elaborar uma proposta para a introdução e exploração dos principais conceitos presentes no estudo de funções afins e quadráticas, desenvolvida especialmente para alunos do ensino médio.

Para tanto, levamos em consideração os resultados de algumas pesquisas sobre o ensino e aprendizagem de funções, as quais demonstraram que as deficiências na compreensão dos conceitos referentes a este assunto estão relacionadas a maneira como o estudo de funções é abordado em sala de aula. Os resultados destas pesquisas e uma breve revisão teórica confirmaram a necessidade de um ensino da matemática mais significativo, voltado à participação do aluno na construção de seus conhecimentos.

Acreditamos que a proposta aqui apresentada atende a estas necessidades e poderá contribuir efetivamente para a apropriação do saber matemático por parte dos alunos. Esta crença pode ser fundamentada nas escolhas metodológicas e no modo como as atividades foram elaboradas. A escolha dos softwares, a metodologia de resolução de problemas e o contexto das situações apresentadas possibilitaram uma maior exploração dos aspectos relacionados ao estudo de funções de um modo dinâmico e significativo.

O caráter diferenciado da proposta pode ser comprovado em cada uma das atividades, principalmente em relação ao modo como os saberes são introduzidos. As questões vão delineando um caminho que leva, gradativamente, à formulação dos conceitos e definições. Uma inovação foi a introdução do software Tracker no ensino da matemática, desenvolvido e comumente utilizado para o ensino da Física, o que serviu perfeitamente para a exploração do conceito de função.

Apesar da proposta ter características diferenciadas e sua abordagem possibilitar uma maior compreensão dos conceitos relacionados ao estudo de funções, esta não pode ser concebida como uma receita que garante a aprendizagem. O processo de ensino e aprendizagem depende de muitas variáveis, a forma como o professor conduzirá as atividades, por exemplo, é crucial para que os objetivos da proposta sejam completamente atendidos.

Esta proposta é, portanto, uma abordagem para o ensino de funções sujeito a adaptações, correções e reformulações. Para sua avaliação e possível validação, pretendemos, em outra oportunidade, aplicá-la a um grupo de alunos do ensino médio, e após o término das atividades, analisar os resultados desta experiência a partir dos registros elaborados por eles.

Durante a elaboração das atividades, percebemos que uma simples situação-problema pode gerar uma ótima oportunidade para a introdução e desenvolvimento dos conteúdos escolares. Assim sendo, acreditamos que muitas das mudanças sugeridas e esperadas para o ensino da matemática podem surgir de ideias simples somadas à disposição do professor em aceitar novos desafios, ousar, experimentar diferentes metodologias e criar novas estratégias.

A cada dia que passa, mais escolas estão sendo equipadas com computadores e outras tecnologias. O professor, por sua vez, deve estar preparado para utilizar adequadamente estes recursos, promover não somente a inserção dos alunos no mundo tecnológico, mas acima de tudo garantir que estes entes promovam a aprendizagem de novos saberes.

Nossa proposta insere-se perfeitamente nesta perspectiva. E, cientes da necessidade de disponibilizar materiais de apoio aos professores para atuarem neste novo cenário, trabalharemos na criação de um livro digital onde serão apresentadas as atividades desenvolvidas com o Tracker. Além disso, pretendemos realizar, em parceria com instituições de ensino, oficinas e minicursos para expormos nossa proposta de ensino a professores ou futuros professores, a fim de contribuir com sua qualificação ou formação.

Para a complementação desta proposta, sugerimos a introdução ao estudo das funções exponencias e logarítmicas através da investigação de movimentos analisados pelo Tracker, e na sequência a exploração de seus elementos gráficos e características com uso do GeoGebra.

Outra sugestão para complementar a atual proposta é criar uma comunicação direta entre a Matemática e a Física, no sentido de desenvolver os conteúdos pertinentes às duas disciplinas mediante a exploração do mesmo problema ou situação. A exploração de alguns conceitos e o desenvolvimento dos conhecimentos físicos poderiam ser realizados a partir da análise dos mesmos movimentos abordados nas atividades com o Tracker e na elaboração de questões pertinentes a estes assuntos. A dedução das fórmulas, por exemplo, poderia ser realizada a partir da análise dos movimentos e fundamentada nas observações já realizadas e alguns conhecimentos matemáticos. Esta sugestão pretende desenvolver um ensino voltado à articulação dos saberes e se opõe ao saber compartimentado e fragmentado, onde o aluno não percebe as conexões existentes entre as diversas áreas do conhecimento.

Concluindo, esperamos que este trabalho possa contribuir, de alguma forma, para o ensino da matemática e mais especificamente, para o ensino de funções. Pretendemos, além de oferecer aos professores uma nova metodologia para o ensino de funções, oportunizar um momento de reflexão sobre sua prática pedagógica e a busca de alternativas para a melhoria da educação através da matemática.

REFERÊNCIAS

AUDINO, D. F.; NASCIMENTO R. da S. Objetos de aprendizagem: diálogos entre conceitos e uma nova proposição aplicada à educação. **Revista Contemporânea de Educação**, v. 5, n. 10, jul./dez. 2010. Disponível em: www.educacao.ufrj.br/artigos/n10/objetos_de_aprendizagem.pdf

BOYER, C. B. **História da Matemática**. Tradução: Elza Furtado Gomide. São Paulo: E. Blücher, 1974. 488 p.

BRASIL. **Parâmetros curriculares nacionais**: ensino médio. Brasília: MEC, 2000.

BRITO, D. dos S.; ALMEIDA, L. M. W. de. O conceito de função em situações de modelagem matemática. **Zetetiké**, Campinas: UNICAMP, v. 13, n. 23, p. 63-85, jan./jun. 2005.

CÂNDIDO, S. L. Uma experiência sobre o ensino e a aprendizagem de funções. **Educação Matemática em Revista**, São Paulo, n. 8, p. 47-56, jun. 2000.

CARAÇA, B. de J. **Conceitos fundamentais da Matemática**. 9. ed. Lisboa: Livraria Sá da Costa, 1989. p. 125-152.

CARVALHO, J. B. P. de; ROQUE, T. **Tópicos de história da Matemática**. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

CLÁUDIO, D. M.; CUNHA, M. L. da. As novas tecnologias na formação de professores de matemática. In: CURY, H. N. (Org.). **Formação de professores de matemática**: uma visão multifacetada. Porto Alegre: Edipucrs, 2001. p. 167-188.

COSTA, A. C. **Conhecimentos de estudantes universitários sobre o conceito de função**. 2004. 92 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2004.

COSTA, C. B. de J. da. **O conhecimento do professor de matemática sobre o conceito de função**. 2008. 96 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2008.

DANTE, L. R. **Matemática**: contexto e aplicações. 1. ed. São Paulo: Ática, 2011. v. 1. p. 70-109.

____. **Matemática**: manual do professor. São Paulo: Ática, 2005. v. 1. p. 3-12.

DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Tradução: Méricles Trindade Moretti. Revemat, Florianópolis, v. 7, n. 2, p. 266-297, 2012. Disponível: <http://www.periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2012v7n2p_266>. Acesso em: 05 jan. 2013.

EVES, H. **Introdução à história da Matemática**. Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas: UNICAMP, 2004. 844 p.

FONSECA, M. C. F. R. Por que ensinar Matemática. **Presença Pedagógica**, Belo Horizonte, v. 1, n. 6, mar./abr. 1995.

GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de cálculo**. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2001. v. 1. p. 26-37.

IEZZI, G. et al. **Matemática**: ciência e aplicações. 6. ed. São Paulo: Saraiva, 2010. v. 1. p. 44-69.

KLEINER, I. Evolution of the function concept: A brief survey. The College Mathematics Journal, v. 20, n. 4, sept.1989. Disponível em: <http://www.maa.org/pubs/calc_articles/ma001.pdf>. Acesso em: 12 jan. 2013.

LEÃO, A. S. G.; BISOGNIN, V. Construção do conceito de função no ensino fundamental por meio da metodologia da resolução de problemas. **Educação Matemática em Revista** – R.S., n. 10, v. 1, p. 27-35, 2009.

LIMA, E. L. et al. **A matemática do ensino médio**. Coleção do professor de Matemática. 9. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. v. 1. 237 p.

MAGARINUS, R. **Estudo de funções: compreensões e aprendizagem de alunos do ensino médio**. 2006. 71 f. Monografia (Especialização em Educação Matemática) – Universidade de Passo Fundo, Passo Fundo, 2006.

MARIANI, R. de C. P. O estudo de funções: uma análise através dos registros de representação semiótica. **Educação Matemática em Revista** – R.S., n. 6, p. 49-58, dez. 2004.

MICOTTI, M. C. de O. O ensino e as propostas pedagógicas. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). **Pesquisa em Educação Matemática**: concepções e perspectivas. São Paulo: UNESP, 1999. p. 153-167.

MIGUEL, J. C. O processo de formação de conceitos em matemática: implicações pedagógicas. São paulo: UNESP, 2006. Disponível em: <http://www.ufrrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_28/processo.pdf> Acesso em: 3 jan. 2013.

MOYSÉS, L. **Aplicações de Vygotsky à Educação Matemática**. Campinas: Papirus, 1997. 176 p.

OLIVEIRA, M. K. de. **Vygotsky: aprendizado e desenvolvimento um processo sócio-histórico**. 4. ed. São Paulo: Scipione, 1999. 112 p.

ONUCHIC, L. de la R. Ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). **Pesquisa em Educação Matemática**: concepções e perspectivas. São Paulo: UNESP, 1999. p. 199-217.

PAIS, L. C. **Didática da Matemática**: uma análise da influência francesa. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2002. 128 p.

PENTEADO, M. G.; BORBA, M. de C.; GRACIAS, T. de S. Informática como veículo para mudança. **Zetetiké,** Campinas: UNICAMP, v. 6, n. 10, p. 77-86, jul./dez. 1998.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**: um novo aspecto do método matemático. Tradução e adaptação: Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1995. 196 p.

POZO, J. I. (Org). **A solução de problemas**: aprender a resolver, resolver para aprender. Tradução: Beatriz Affonso Neves. Porto Alegre: ArtMed, 1998. p. 9-65.

SOUZA, A. R. de; SILVA, G. A. da. Desenvolvimento e análise de uma metodologia para o ensino de funções quadráticas utilizando os softwares 'parábola' e 'oficina de funções'. **Zetetiké**, Campinas: UNICAMP, v. 14, n. 25, p. 107-131, jan./jun. 2006.

TRINDADE, J. A. de O.; MORETTI, M. T. Uma relação entre teoria histórico-cultural e a epistemologia histórico-crítica no ensino de função: mediação. **Zetetiké**, Campinas: UNICAMP, v.8, n. 13/14, p. 29-49, jan./dez. 2000.

VYGOTSKY, L. S. **Pensamento e linguagem**. Edição eletrônica: Ed. Ridendo Castigat Mores, 2001. 159 p. Disponível em: <http://www.ebooksbrasil.org/adobeebook/vigo.pdf> Acesso em: 29 dez. 2012.

ZUCHI, I. A importância da linguagem no ensino da matemática. **Educação Matemática em Revista**, São Paulo, n. 16, p. 49-55, maio 2004.

ZUFFI, E. M. Alguns aspectos do desenvolvimento histórico do conceito de função. **Educação Matemática em Revista**, São Paulo, n. 9/10, p.10-16, abr. 2001.

ZUFFI, E. M.; PACCA, J. L. Sobre funções e linguagem matemática de professores do ensino médio. **Zetetiké,** Campinas: UNICAMP, v. 8, n. 13/14, p. 7-28, jan./dez. 2000.