

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
MESTRADO PROFISSIONAL**

DIEGO SAOCHINE ALVES

**OS TEOREMAS ESQUECIDOS PELOS PROFESSORES DE GEOMETRIA
PLANA DO ENSINO MÉDIO**

ORIENTADOR: Prof. Dr. CLAUDEMIR ANIZ

**CAMPO GRANDE - MS
OUTUBRO DE 2015**

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
MESTRADO PROFISSIONAL

DIEGO SAOCHINE ALVES

**OS TEOREMAS ESQUECIDOS PELOS PROFESSORES DE GEOMETRIA
PLANA DO ENSINO MÉDIO**

ORIENTADOR: Prof. Dr. CLAUDEMIR ANIZ

**Dissertação apresentada ao
programa de Pós-graduação em
Matemática em Rede Nacional do
Instituto de Matemática - INMA/UFMS,
como parte dos requisitos para
obtenção do título de Mestre.**

CAMPO GRANDE - MS

OUTUBRO DE 2015

**OS TEOREMAS ESQUECIDOS PELOS PROFESSORES DE GEOMETRIA
PLANA DO ENSINO MÉDIO**

DIEGO SAOCHINE ALVES

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Instituto de Matemática, da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre.

Aprovado pela Banca Examinadora:

Prof. Dr. Claudemir Aniz – UFMS

Prof. Dr. Rafael Moreira de Souza – UEMS

Prof. Dr. Alex Ferreira Rossini – EFMS

**CAMPO GRANDE - MS
OUTUBRO DE 2015**

Dedico este trabalho a Célia Fátima Saochine Alves, minha mãe. José da Costa Alves, meu pai, Josmar, meu irmão, Estherina Xonchim, minha nona, Tamíris Gardin, minha namorada, pelo carinho e incentivos com palavras de ânimo nos momentos difíceis...

AGRADECIMENTOS

Agradeço imensamente a Deus pelas oportunidades de minha vida e por sempre ser um grande amigo que atende as minhas orações.

Aos meus pais, meu irmão, minha nona e minha namorada, que fazem a minha vida ser a mais feliz que um homem pode sonhar.

Aos meus colegas do PROFMAT, pelas risadas e força durante as aulas em especial a Mônica Martins, amiga sincera e que sempre esteve comigo dentro e fora do mestrado.

Ao meu orientador Prof. Dr. Claudemir Aniz, um grande homem, mais que um professor e sim um educador, ensinando e mostrando a nossa real capacidade matemática.

Aos professores do polo UFMS-Campo Grande, agradeço imensamente pelas aulas. Em especial a Profa. Dra. Elisabete Sousa Freitas, por fazer eu me apaixonar por matemática e pela licenciatura todas as sextas feiras em que nos encontrávamos - a senhora é o profissional que eu me dedico a ser.

Agradeço a CAPES pelo apoio financeiro.

Ao amor da minha vida, a mulher que eu sei que irá me acompanhar em muitas outras empreitadas de estudo e de vida, Tamiris Gardin, que durante esse tempo de mestrado sofreu comigo compartilhando todas as minhas aflições.

Agradeço a dois amigos muito especiais Alexandre Batista e Raoni Dias que foram fieis companheiros durante várias madrugadas escrevendo este trabalho e não me deixando dormir para que o prazo fosse cumprido.

Agradeço a Universidade Católica Dom Bosco, onde me formei em Matemática Aplicada e Computacional, em especial ao Prof. Mestre Elvécio

Scampini Júnior e a Profa. Mestre Janina que sempre foram sensacionais educadores dos quais eu nunca irei me esquecer.

Aos meus companheiros de moto clube, Prof. Osório, Prof. Jorge, Prof. Hugo, Prof. Puff que foram compreensivos com minha ausência em nosso clube.

Aos meus amigos de trabalho, em especial ao Prof. Sammy, Profa. Olivia, Prof. Gustavo Espíndola, Prof. Bode, Profa. Rosa, Prof. Rodrigo Soneca, Profa. Iara, Prof. Marco Aurélio que entenderam e me deram sempre força para que a dissertação fosse concluída.

MEU MUITO OBRIGADO.

RESUMO

Este trabalho apresenta, através de demonstrações detalhadas com muitas imagens para facilitar o entendimento de alunos e professores do ensino médio, alguns resultados importantes como o teorema de Menelaus e o teorema de Ceva que com o auxílio do triângulo medial e o triângulo órtico provamos que às medianas, bissetrizes, alturas e mediatrizes são concorrentes. Também apresentamos alguns teoremas sobre quadriláteros convexos como os teoremas de Varignon e Brahmagupta. E para finalizar, a reta de Euler, importante teorema aplicado no ensino médio para triângulos isósceles e equiláteros, mas que na verdade se aplicam a qualquer triângulo.

Palavras-chave: Teorema de Menelaus, Teorema de Ceva, Teorema de Brahmagupta, reta de Euler.

ABSTRACT

This dissertation through detailed demonstrations with many images to facilitate understanding of students and high school teachers, initially presents important results like the Menelaus' and the Ceva's theorems, when these theorems are linked to the medial triangle and the orthic triangle, they help us prove that the medians, bisectrices, heights and bisectors are concurrents. We also present some theorems about convex quadrilaterals like Varignon and Brahmagupta theorems. In the end we presented Euler's line, which is an important theorem studied in High School for isosceles and equilateral triangles, but in fact it is applied to any triangle.

Key words: Menelaus' theorem, Ceva's theorem, Brahmagupta Theorem, Euler line.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	1
CAPÍTULO 1 - SEGMENTOS NOTÁVEIS DO TRIÂNGULO	2
1. Semelhança entre triângulos e proporção	2
2. Teorema de Menelaus	4
3. Teorema de Ceva	7
4. Teorema de Thales	11
5. Teorema da bissetriz interna	12
6. Medianas	14
7. Bissetrizes	15
8. Relação entre ângulo inscrito e ângulo central	17
9. Quadrilátero convexo inscrito	20
10. Triângulo órtico	23
11. Alturas	27
12. Triângulo medial	27
13. Área do triângulo medial	31
14. Relação entre alturas e mediatrizes	31
15. Mediatrizes	34
CAPÍTULO 2 - QUADRILÁTEROS ESPECIAIS	36
1. Teorema de Varignon	36
2. Teorema de Varignon perímetro	38
3. Teorema de Varignon área	39
4. Teorema de Pitágoras	40

5. Teorema dos senos.....	41
6. Teorema de pedal.....	45
7. Teorema dos cossenos	49
8. Área do triângulo usando seno	51
9. Área do triângulo por Heron.....	54
10. Área do quadrilátero inscrito por Brahmagupta.....	54
CAPÍTULO 3 - RETA DE EULER.....	58
CONCLUSÃO.....	65
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	66

LISTA DE FIGURAS

Figura: 1.1: Igualdade em proporções.....	3
Figura 1.2: Igualdade em proporções.....	4
Figura 1.3: Igualdade em proporções.....	4
Figura 2.1: Teorema de Menelaus.....	5
Figura 2.2: Teorema de Menelaus.....	6
Figura 3.1: Teorema de Ceva.....	8
Figura 3.2: Teorema de Ceva.....	8
Figura 3.3: Teorema de Ceva.....	9
Figura 3.4: Teorema de Ceva.....	10
Figura 4.1.1: Recíproca de Thales.....	11
Figura 5.1: Teorema da Bissetriz Interna.....	12
Figura 5.2: Teorema da Bissetriz Interna.....	12
Figura 5.3: Teorema da Bissetriz Interna.....	13
Figura 5.4: Teorema da Bissetriz Interna.....	13
Figura 6.1: Medianas.....	15
Figura 7.1: Bissetrizes.....	15
Figura 7.2: Bissetrizes.....	16
Figura 7.3: Bissetrizes.....	16
Figura 7.4: Bissetrizes.....	17
Figura 8.1: Relação entre ângulo inscrito e ângulo central.....	18
Figura 8.2: Relação entre ângulo inscrito e ângulo central.....	18
Figura 8.3: Relação entre ângulo inscrito e ângulo central.....	19
Figura 8.4: Relação entre ângulo inscrito e ângulo central.....	19
Figura 8.5: Relação entre ângulo inscrito e ângulo central.....	20

Figura 9.1: Quadrilátero inscrito.....	21
Figura 9.2: Quadrilátero inscrito.....	21
Figura 9.3: Quadrilátero inscrito.....	22
Figura 10.1: Triângulo Órtico.....	23
Figura 10.2: Triângulo Órtico.....	23
Figura 10.3: Triângulo Órtico.....	24
Figura 10.4: Triângulo Órtico.....	24
Figura 10.5: Triângulo Órtico.....	25
Figura 10.6: Triângulo Órtico.....	25
Figura 10.7: Triângulo Órtico.....	26
Figura 10.8: Triângulo Órtico.....	26
Figura 12.1: Triângulo Médio.....	28
Figura 12.2: Triângulo Médio.....	28
Figura 12.3: Triângulo Médio.....	29
Figura 12.4: Triângulo Médio.....	29
Figura 12.5: Triângulo Médio.....	30
Figura 12.6: Triângulo Médio.....	30
Figura 12.2.1: Relação entre alturas e mediatrizes.....	32
Figura 12.2.2: Relação entre alturas e mediatrizes.....	32
Figura 12.2.3: Relação entre alturas e mediatrizes.....	33
Figura 12.2.4: Relação entre alturas e mediatrizes.....	34
Figura 13.1: Mediatrizes.....	34
Figura 13.2: Mediatrizes.....	35
Figura 13.3: Mediatrizes.....	35
Figura 14.1: Teorema de Varignon.....	37
Figura 14.2: Teorema de Varignon.....	37
Figura 14.3: Teorema de Varignon.....	38
Figura 14.4: Teorema de Varignon.....	38
Figura 16.1: Teorema de Varignon para Área.....	40
Figura 17.1: Teorema de Pitágoras.....	41
Figura 19.1: Lei dos Senos.....	42
Figura 19.2: Lei dos Senos.....	42
Figura 19.3: Lei dos Senos.....	43
Figura 19.4: Lei dos Senos.....	43

Figura 19.5: Lei dos Senos.....	44
Figura 20.1: Teorema de Pedal.....	45
Figura 20.2: Teorema de Pedal.....	45
Figura 20.3: Teorema de Pedal.....	46
Figura 20.4: Teorema de Pedal.....	47
Figura 20.5: Teorema de Pedal.....	47
Figura 20.6: Teorema de Pedal.....	48
Figura 20.7: Teorema de Pedal.....	48
Figura 21.1: Teorema dos Cossenos.....	50
Figura 21.2: Teorema dos Cossenos.....	50
Figura 21.3: Teorema dos Cossenos.....	51
Figura 22.1: Área do triângulo usando seno.....	52
Figura 22.2: Área do triângulo usando seno.....	52
Figura 23.1: Área do triângulo por Heron.....	53
Figura 24.1: Área do quadrilátero por Brahmagupta.....	54
Figura 24.2: Área do quadrilátero por Brahmagupta.....	55
Figura 25.1: Reta de Euler.....	58
Figura 25.2: Reta de Euler.....	59
Figura 25.3: Reta de Euler.....	59
Figura 25.4: Reta de Euler.....	60
Figura 25.5: Reta de Euler.....	60
Figura 25.6: Reta de Euler.....	61
Figura 25.7: Reta de Euler.....	61
Figura 25.8: Reta de Euler.....	62
Figura 25.9: Reta de Euler.....	63
Figura 25.10: Reta de Euler.....	63
Figura 25.11: Reta de Euler.....	64

INTRODUÇÃO

A geometria plana é conteúdo obrigatório no currículo do ensino médio. Porém, a geometria é um campo da matemática muito amplo e cheio de detalhes. Por esse motivo alguns teoremas geométricos ao longo do tempo foram esquecidos pelos professores.

Alguns teoremas, ao longo do ensino médio, são citados para os alunos e não são demonstrados, por exemplo, as cevianas notáveis em triângulos que são apresentados e nem sequer é comentado sobre teorema de Ceva, que prova o porquê da verdade destas cevianas serem concorrentes em pontos tão importantes como ortocentro, baricentro, incentro e circuncentro. Outros teoremas simplesmente não são nem citados, como Brahmagupta e a reta de Euler. Teoremas brilhantes e infelizmente não tão conhecidos serão tratados nesta dissertação com o objetivo de atingir o maior número de alunos e professores do ensino médio.

No capítulo 1, o teorema de Menelaus, o teorema de Ceva, triângulo medial e o triângulo órtico nos darão a certeza que além de importantes formam a base da demonstração que bissetrizes, medianas, alturas e mediatrizes são concorrentes em pontos que denominaremos notáveis nos triângulos.

No capítulo 2 iremos apresentar alguns teoremas para quadriláteros. O teorema de Varignon e o teorema de Brahmagupta são os resultados principais deste capítulo, mas para demonstrar esses teoremas falaremos do teorema dos senos e cossenos. Por fim, ainda falamos sobre o teorema de Pedal e sobre o ponto Pedal.

O ortocentro, o baricentro e o circuncentro de um triângulo são alinhados. A reta à qual pertencem recebe o nome de reta de Euler, assunto que será tratado no terceiro e último capítulo.

Ao longo do trabalho alguns teoremas serão apenas apresentados sem demonstração já que serão usados somente como resultados auxiliares no desenvolvimento da nossa dissertação.

CAPÍTULO 1

SEGMENTOS NOTÁVEIS DO TRIÂNGULO

Neste capítulo apresentaremos os teoremas de Menelaus e de Ceva e iremos demonstrar que os segmentos notáveis de um triângulo são concorrentes.

1. SEMELHANÇA ENTRE TRIÂNGULOS E PROPORÇÃO

Dizemos que dois triângulos são semelhantes quando existir uma correspondência biunívoca entre os vértices de um e outro triângulo, de modo que os ângulos em vértices correspondentes sejam iguais e a razão entre os comprimentos de lados correspondentes seja sempre a mesma.

A seguir apresentaremos os casos de semelhança:

1º caso (LLL): Sejam ABC e $A'B'C'$ triângulos no plano, tais que

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$$

Então os triângulos ABC e $A'B'C'$ são semelhantes, com a correspondência de vértices $A \leftrightarrow A'$, $B \leftrightarrow B'$, $C \leftrightarrow C'$. Em particular $\hat{A} = \hat{A}'$, $\hat{B} = \hat{B}'$, $\hat{C} = \hat{C}'$

2º caso (LAL): Sejam ABC e $A'B'C'$ triângulos no plano, tais que

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = k \quad e \quad \hat{B} = \hat{B}'$$

Então os triângulos ABC e $A'B'C'$ são semelhantes, com a correspondência de vértices $A \leftrightarrow A'$, $B \leftrightarrow B'$, $C \leftrightarrow C'$. Em particular $\hat{A} = \hat{A}'$, $\hat{C} = \hat{C}'$, $\frac{AC}{A'C'} = k$

3º caso (AA): Sejam ABC e $A'B'C'$ triângulos no plano, tais que

$$\hat{A} = \hat{A}' \quad \text{e} \quad \hat{B} = \hat{B}'$$

Então os triângulos ABC e $A'B'C'$ são semelhantes, com a correspondência de vértices $A \leftrightarrow A'$, $B \leftrightarrow B'$, $C \leftrightarrow C'$. Em particular

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$$

Também vale lembrar que quando dois triângulos são semelhantes suas alturas também terão a mesma razão de semelhança dos lados, e se a razão entre a semelhança de dois triângulos for k a semelhança entre suas áreas será k^2 .

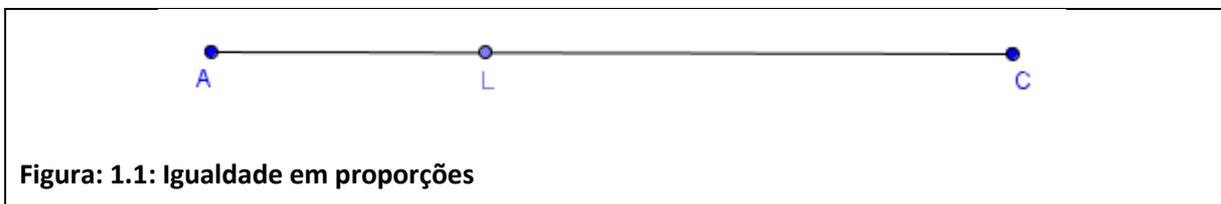
Igualdade em proporção

Lema 1 Se os pontos L e L' de um segmento AC satisfazem

$$\frac{LC}{LA} = \frac{L'C}{L'A}$$

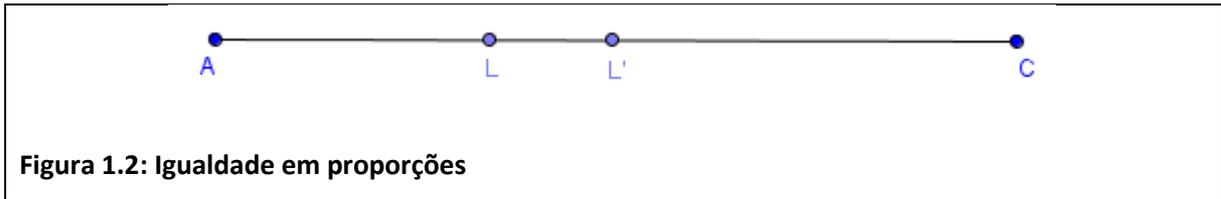
Então L e L' são iguais.

Demonstração: Considere um segmento AC e um ponto L entre as extremidades, ver Figura 1.1.



Temos três casos a considerar.

1º caso: L' está a direita de L , ver Figura 1.2.



Neste caso, o segmento LA é menor que o segmento $L'A$ e segmento LC é maior que $L'C$, logo

$$\frac{LC}{LA} > \frac{L'C}{L'A}$$

2º caso: L' está a esquerda de L , ver Figura 1.3.



Neste caso, o segmento LA é maior que o segmento $L'A$ e o segmento LC é menor que $L'C$, logo

$$\frac{LC}{LA} < \frac{L'C}{L'A}$$

Por fim o 3º caso, para termos

$$\frac{LC}{LA} = \frac{L'C}{L'A}$$

a única possibilidade é $L = L'$.



2. TEOREMA DE MENELAUS

Nesta seção, apresentaremos o teorema de Menelaus. Para isso, adotaremos, as seguintes convenções:

- i. Dados pontos distintos X e Y no plano, XY denota o segmento ordinário que une X e Y , **orientado** de X para Y . Em particular, escrevemos $XY = -YX$ como lembrete de que os segmentos orientados XY e YX têm orientações distintas.

ii. Dados pontos colineares X, Y e Z , denotamos:

$$\frac{XY}{YZ} = \frac{\overline{XY}}{\overline{YZ}}, \text{ se } XY \text{ e } YZ \text{ têm orientações iguais;}$$

$$\frac{XY}{YZ} = -\frac{\overline{XY}}{\overline{YZ}}, \text{ se } XY \text{ e } YZ \text{ têm orientações distintas.}$$

Teorema de Menelaus

Teorema 2 *Uma reta r determina três pontos L, M e N , respectivamente nas retas suportes dos lados AC, AB e BC , se e somente se,*

$$\frac{MA}{MB} \cdot \frac{NB}{NC} \cdot \frac{LC}{LA} = -1.$$

Demonstração: Considere um triângulo ABC e uma reta r que concorra com os lados AC e AB nos pontos L e M , respectivamente, e um ponto N na reta suporte de BC , ver Figura 2.1.

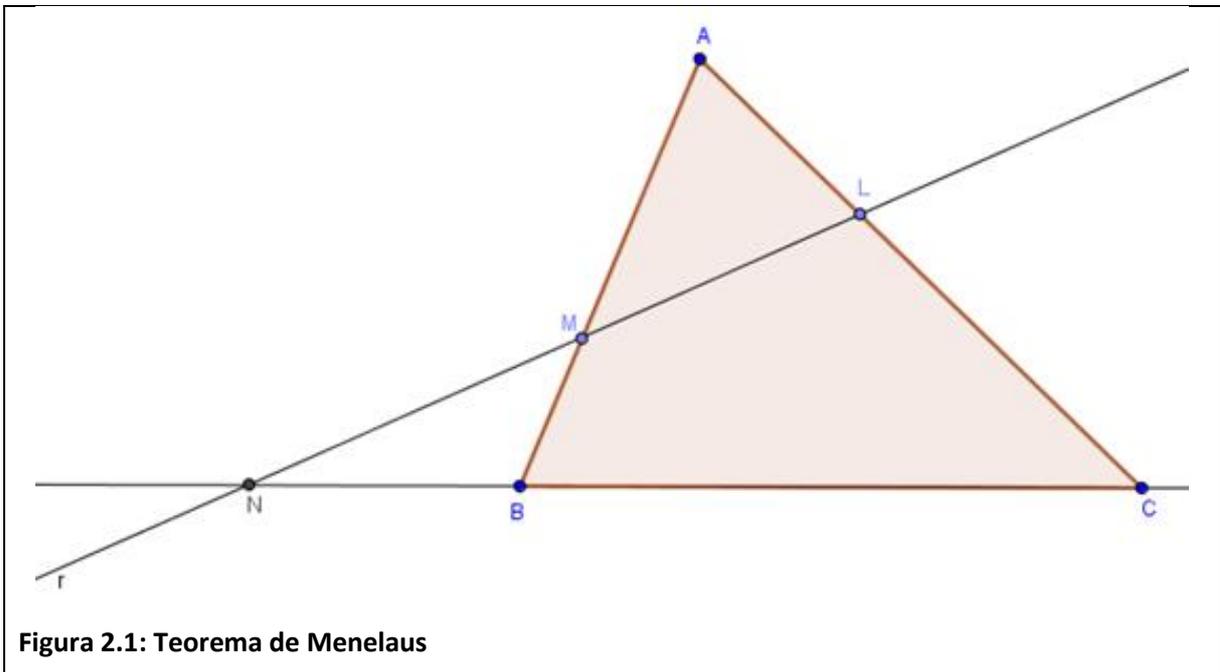
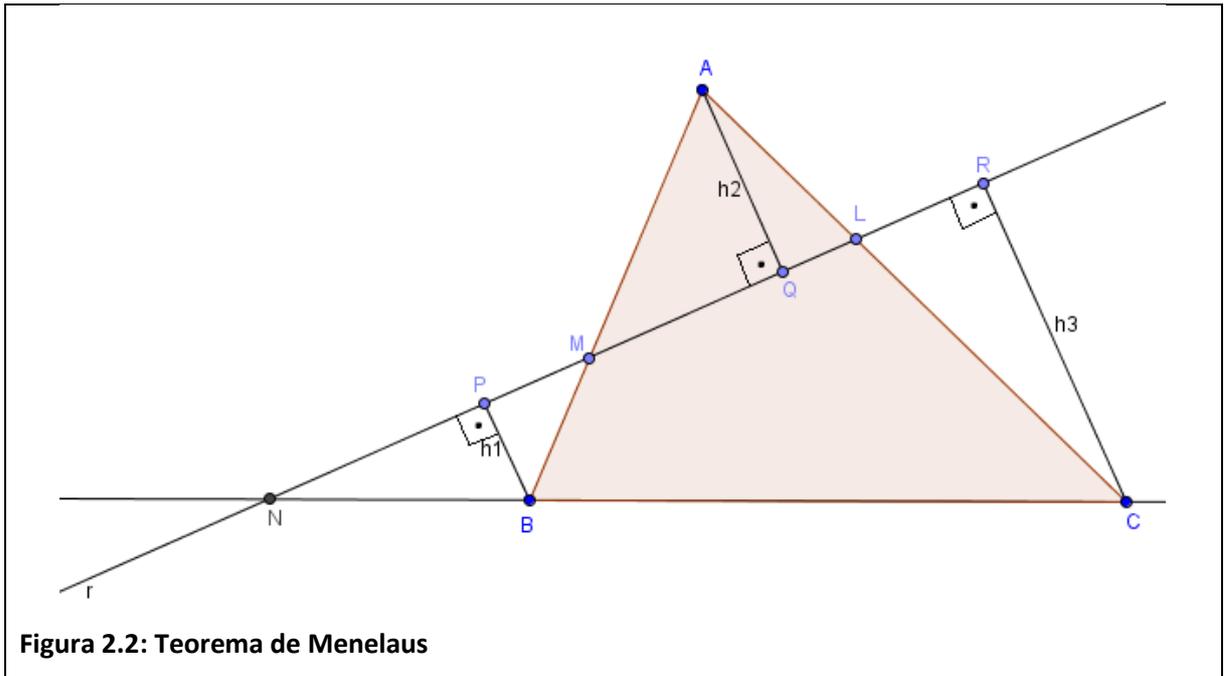


Figura 2.1: Teorema de Menelaus

Traçamos as perpendiculares cujos pés são, respectivamente, Q, P e R a reta r que partem dos vértices A, B e C , respectivamente do triângulo, ver Figura 2.2.



Os triângulos BPM , AQM , os triângulos RLC , AQL e são semelhantes, pois possuem um ângulo reto e um ângulo OPV cada, semelhança pelo caso A.A, segue

$$\frac{MA}{MB} = \frac{h2}{h1'}$$

$$\frac{NB}{NC} = \frac{h1}{h3'}$$

$$\frac{LC}{LA} = -\frac{h3}{h2}$$

Multiplicando as três equações temos:

$$\frac{MA}{MB} \cdot \frac{NB}{NC} \cdot \frac{LC}{LA} = \frac{h2}{h1} \cdot \frac{h1}{h3} \cdot \left(-\frac{h3}{h2}\right) = -1$$

Reciprocamente, suponha que $\frac{MA}{MB} \cdot \frac{NB}{NC} \cdot \frac{LC}{LA} = -1$ onde M, N, L estão nas retas suportes dos lados do triângulo. Denote o encontro da reta MN com AC de L'

$$\frac{MA}{MB} \cdot \frac{NB}{NC} \cdot \frac{L'C}{L'A} = -1.$$

Portanto

$$\frac{MA}{MB} \cdot \frac{NB}{NC} \cdot \frac{LC}{LA} = \frac{MA}{MB} \cdot \frac{NB}{NC} \cdot \frac{L'C}{L'A}$$

Simplificando, temos

$$\frac{LC}{LA} = \frac{L'C}{L'A}$$

Pelo lema 1, temos que $L = L'$.



3. TEOREMA DE CEVA

Ceviana é qualquer segmento de reta num triângulo com extremidades no vértice do triângulo e no lado oposto ou na reta suporte do lado oposto. Medianas, alturas e bissetrizes são casos especiais de cevianas. Vale lembrar que uma **mediatriz não é uma ceviana**. O nome ceviana vem do engenheiro italiano Giovanni Ceva, 1678, que formulou o Teorema de Ceva, que dá condições para que três cevianas sejam concorrentes.

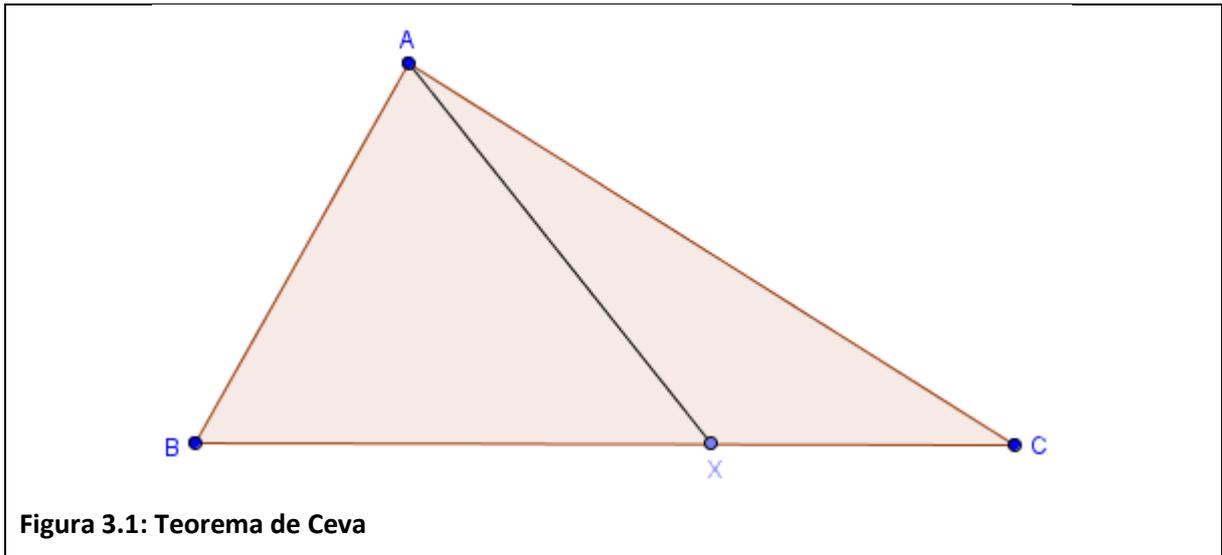
Para facilitar a escrita no que segue, vamos denotar a área de um polígono $ABC \dots N$ por $(ABC \dots N)$.

Teorema de Ceva

Teorema 3 *Três cevianas AX, BY e CZ , respectivamente de cada um dos vértices de um triângulo ABC , são concorrentes num mesmo ponto P , se e somente se,*

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = 1$$

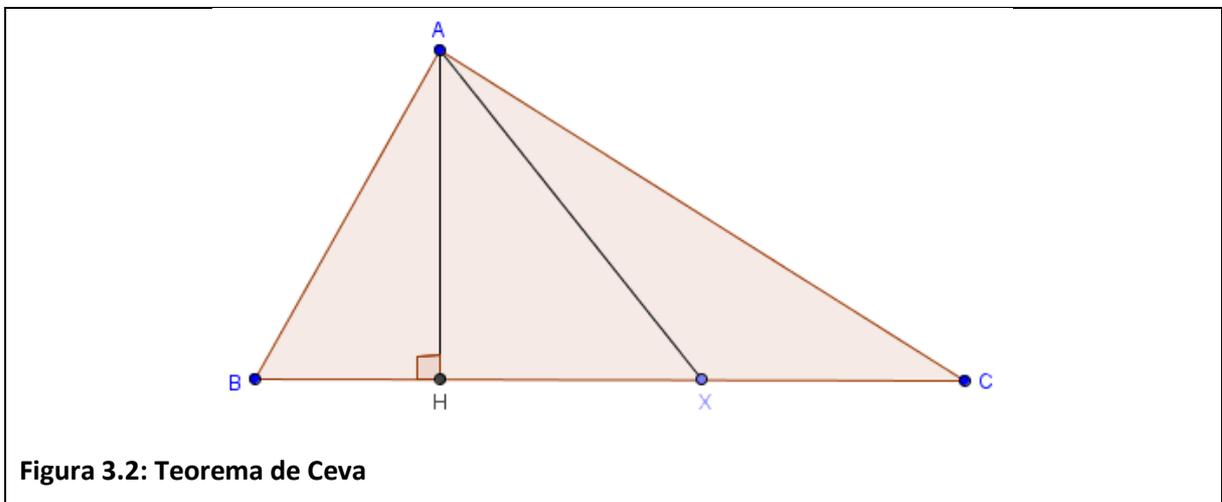
Demonstração: Considere um triângulo ABC e o ponto X no lado BC , traçamos a ceviana AX , ver *Figura 3.1*.



Agora começaremos pela proporção:

$$\frac{BX}{XC}$$

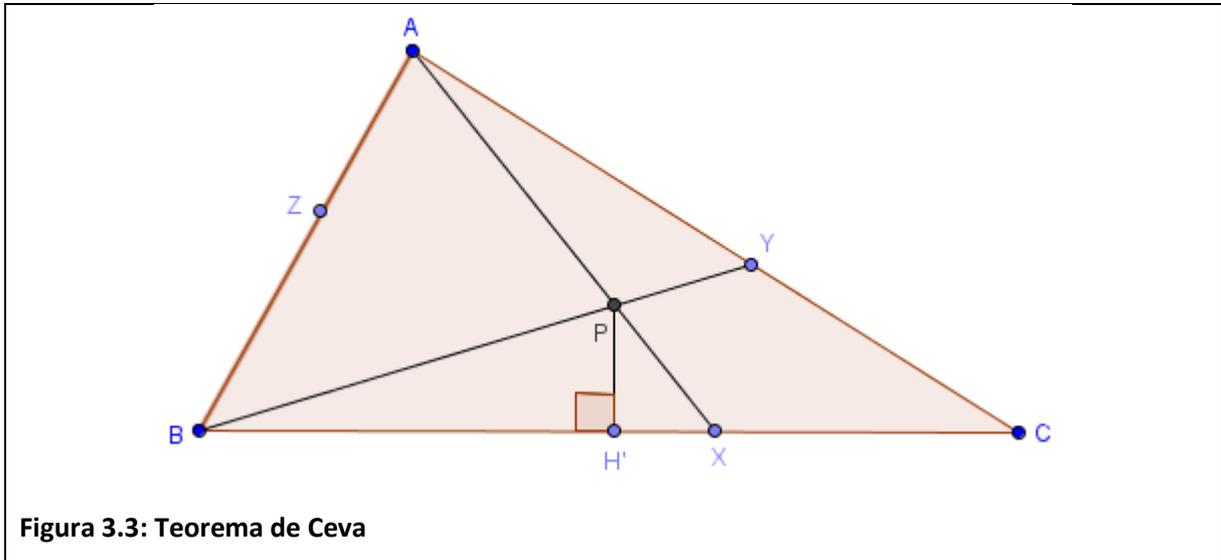
Essas duas bases possuem mesma altura, ver Figura 3.2.



Portanto, se multiplicarmos a razão por AH (altura relativa ao lado BC) e dividimos por 2 temos a área dos triângulos em questão

$$\frac{BX}{XC} = \frac{\frac{BX \cdot AH}{2}}{\frac{XC \cdot AH}{2}} = \frac{(ABX)}{(AXC)}$$

Seguindo o mesmo raciocínio a partir da altura relativa a base BC partindo do ponto P , ver Figura 3.3.



$$\frac{BX}{XC} = \frac{\frac{BX \cdot PH'}{2}}{\frac{XC \cdot PH'}{2}} = \frac{(PBX)}{(PXC)}$$

Portanto,

$$\frac{BX}{XC} = \frac{(ABX)}{(AXC)} = \frac{(PBX)}{(PXC)}$$

Sabemos que se subtrairmos o antecedente e conseqüente de duas proporções iremos continuar com uma proporção, isto é,

$$\frac{BX}{XC} = \frac{(ABX)}{(AXC)} = \frac{(PBX)}{(PXC)} = \frac{(ABX) - (PBX)}{(AXC) - (PXC)} = \frac{(ABP)}{(CAP)}$$

De maneira análoga,

$$\frac{CY}{YA} = \frac{(BCP)}{(ABP)}, \quad \frac{AZ}{ZB} = \frac{(CAP)}{(BCP)}$$

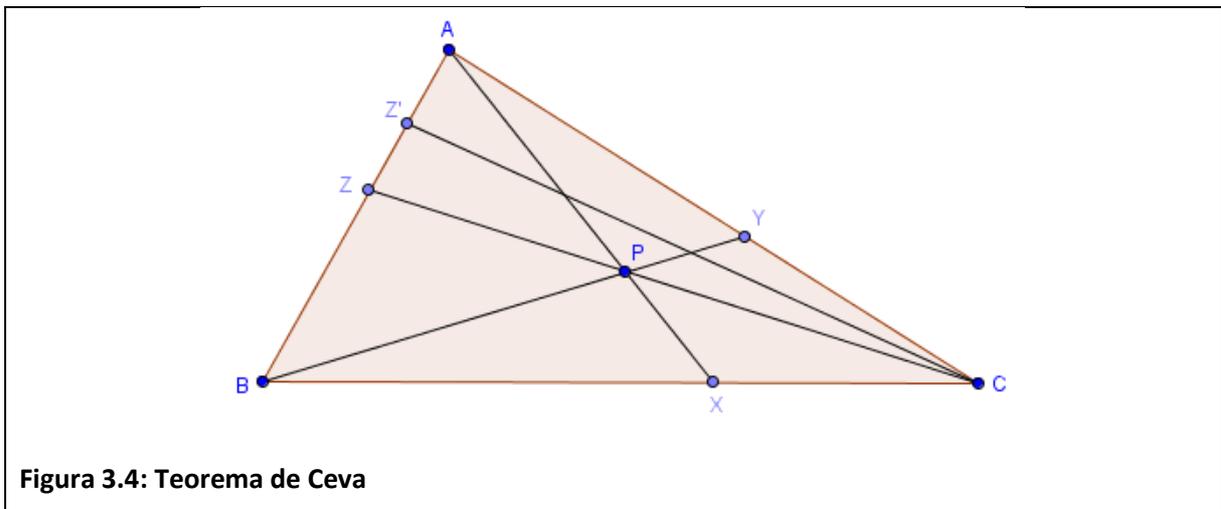
Se multiplicarmos as proporções

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = \frac{(ABP)}{(CAP)} \cdot \frac{(BCP)}{(ABP)} \cdot \frac{(CAP)}{(BCP)} = 1.$$

Portanto,

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = 1.$$

Reciprocamente, suponha que $\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = 1$ onde AX, BY, CZ são cevianas, do triângulo. Sendo P o ponto de concorrência entre AX e BY e denotando o a terceira ceviana sendo CZ' , mas que atente a $\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ'}{Z'B} = 1$ temos, ver figura 3.4.



Portanto

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ'}{Z'B}.$$

Simplificando, temos

$$\frac{AZ}{ZB} = \frac{AZ'}{Z'B}.$$

Pelo lema 1, temos que $Z = Z'$.



4. TEOREMA DE THALES

Teorema de Thales

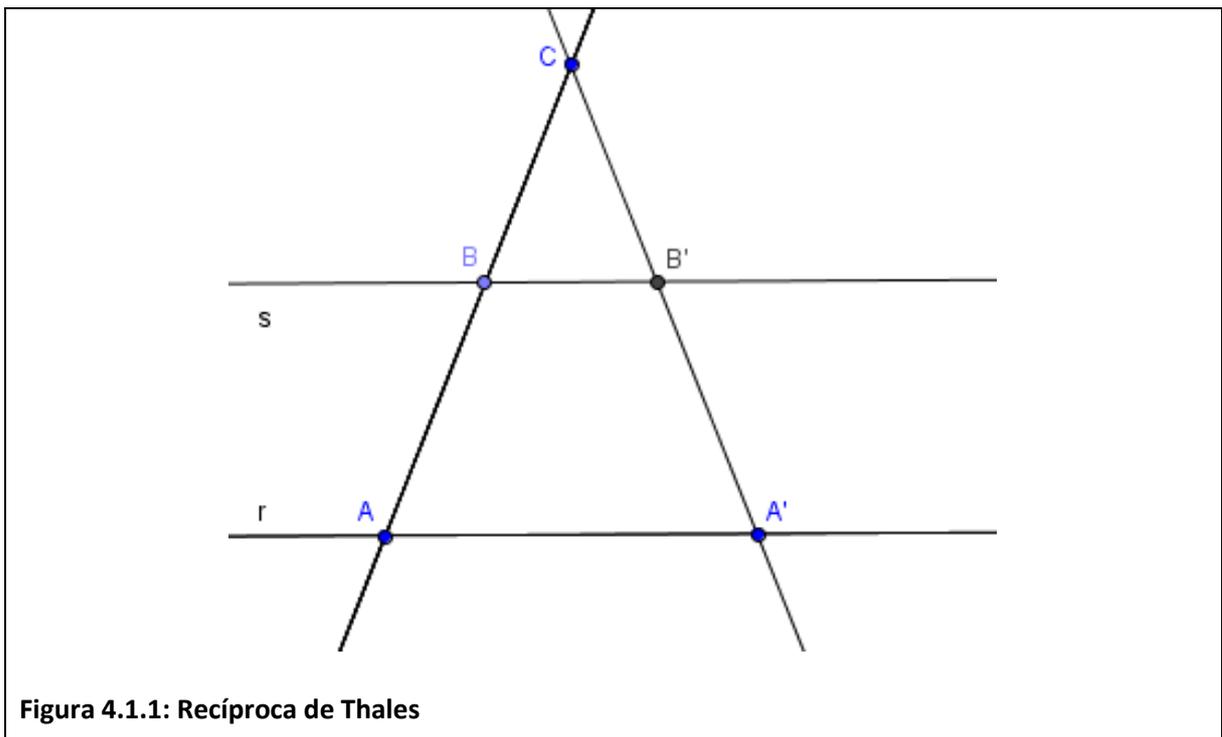
Teorema 4 *Sejam r, s, t retas paralelas. Escolhemos pontos $A, A' \in r, B, B' \in s$ e $C, C' \in t$, de modo que A, B, C e A', B', C' sejam dois ternos de pontos colineares, então*

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$$

Tão importante quanto o teorema de Thales, é sua recíproca parcial, também devida a Thales de Mileto.

Recíproca do Teorema de Thales

Corolário 4.1 *Sejam dados, no plano, retas r, s e pontos $A, A' \in r, B, B' \in s$, com $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{A'B'} = \{C\}$. Se $\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$, então $r \parallel s$, ver Figura 4.1.1.*



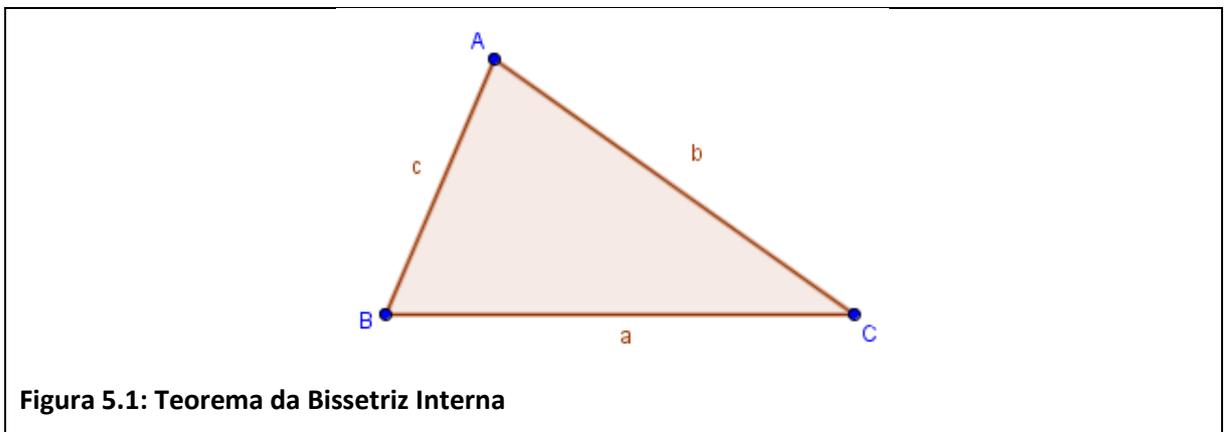
5. TEOREMA DA BISSETRIZ INTERNA

A bissetriz de um triângulo ABC é o segmento que parte de um vértice até o lado oposto dividindo seu ângulo em duas partes congruentes.

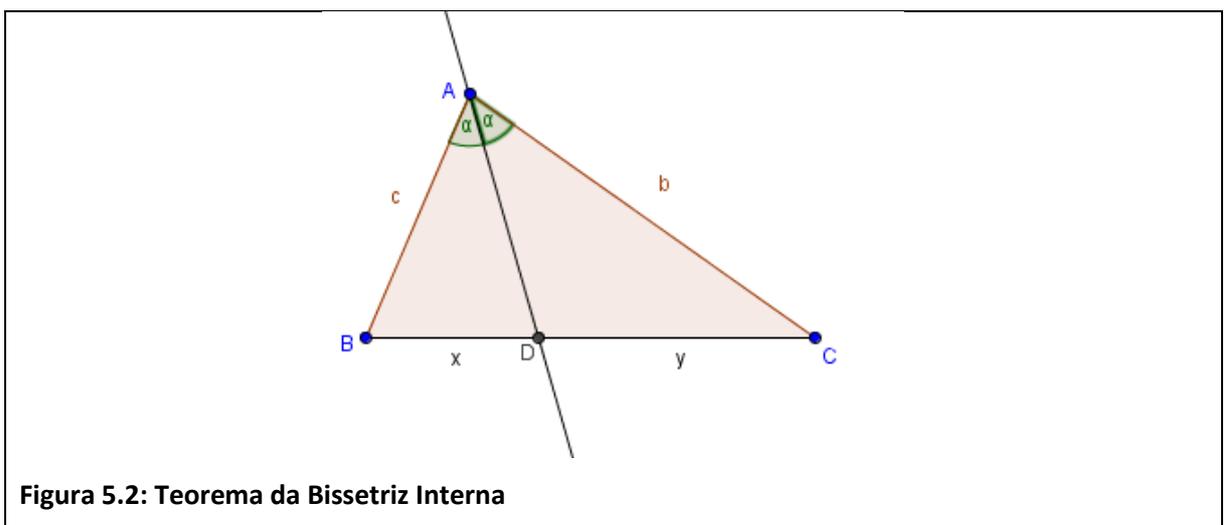
Teorema da bissetriz interna

Teorema 5 *Uma bissetriz interna de um triângulo divide o lado oposto em segmentos proporcionais aos lados adjacentes.*

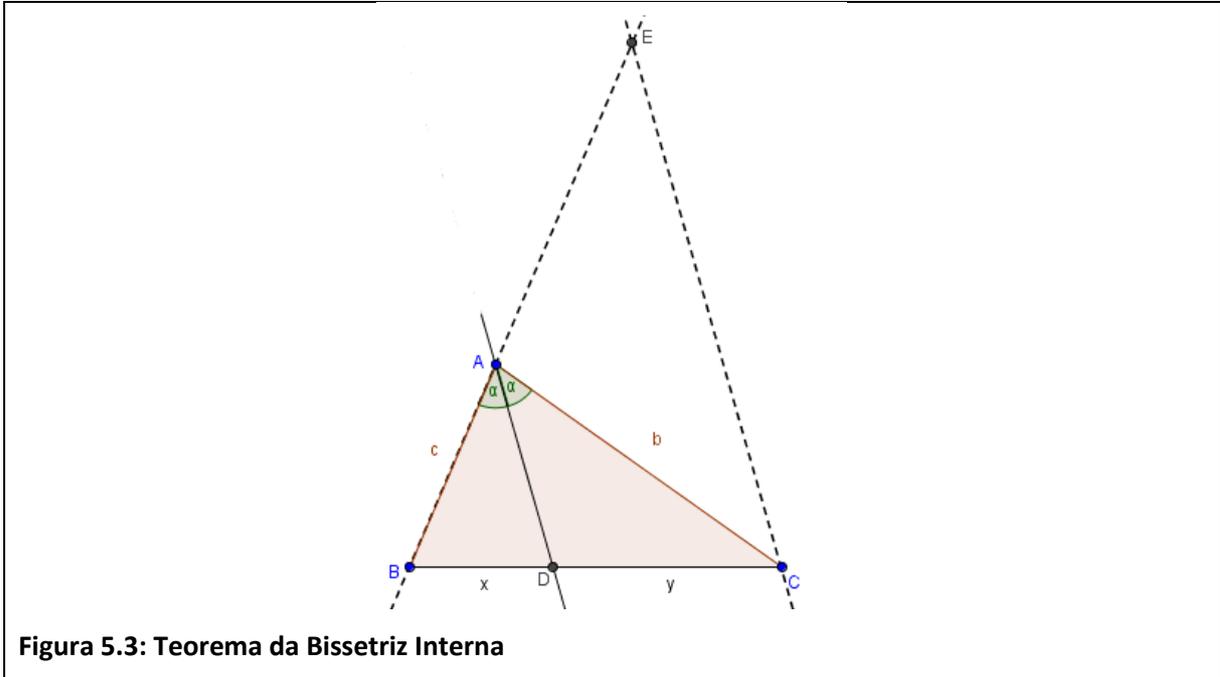
Demonstração: Considere um triângulo ABC com lados medindo a, b e c , ver Figura 5.1.



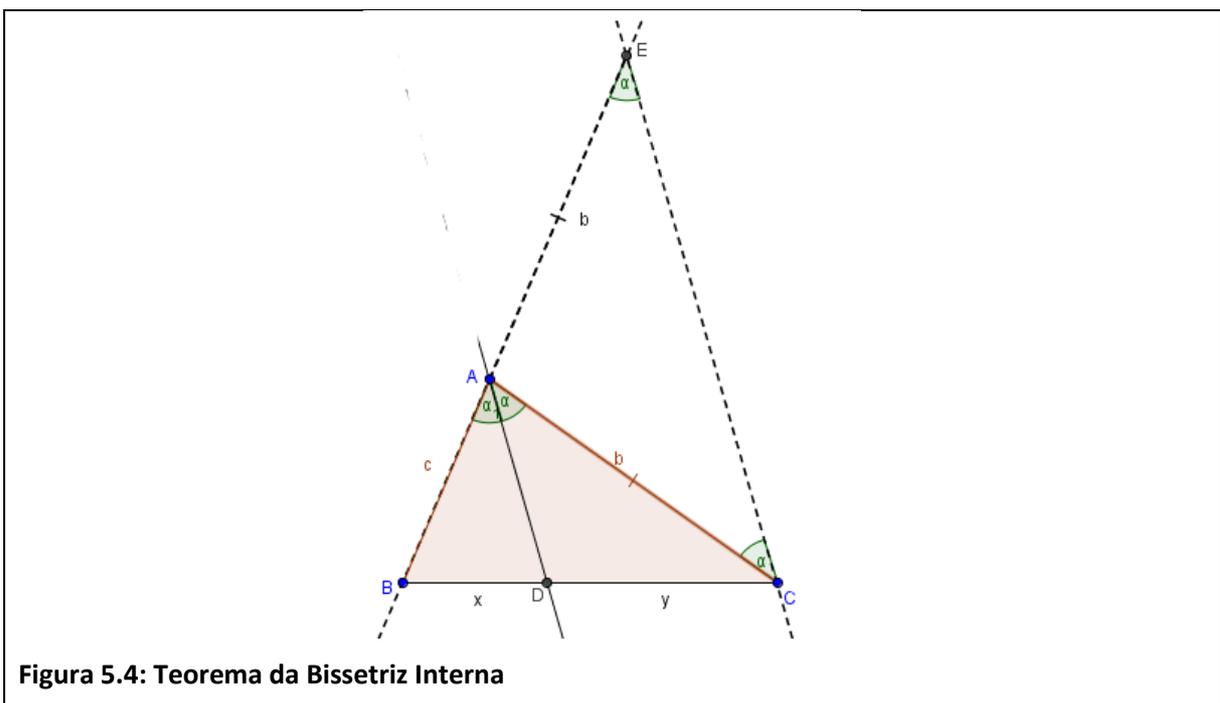
Vamos agora traçar a bissetriz interna AD do ângulo \hat{A} , que irá tocar o segmento BC no ponto D e dividi-lo em duas partes $BD = x$ e $CD = y$, ver Figura 5.2.



Agora prolongamos o lado AB e passando por C traçamos uma reta paralela a bissetriz AD essas duas retas irão se intersectar no ponto E , pois \overleftrightarrow{AB} é transversal a \overleftrightarrow{AD} e $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{CE}$, ver Figura 5.3.



Temos os ângulos $A\hat{E}C$ e $B\hat{A}D$ sendo correspondentes, portanto, congruentes. Ainda os ângulos $D\hat{A}C$ e $A\hat{C}E$ sendo alternos internos, desse modo, congruentes. Daí, segue que o triângulo AEC é isósceles de base EC , conseqüentemente, os lados AE e AC são congruentes e medem b , ver Figura 5.4.



Agora podemos considerar as retas que passam por BC e BE como retas transversais de um feixe de paralelas $AD//CE$, aplicamos teorema 4, obtendo:

$$\frac{x}{y} = \frac{c}{b}.$$

Ou seja,

$$\frac{x}{c} = \frac{y}{b}.$$



6. MEDIANAS

A mediana de um triângulo ABC é o segmento que parte de um vértice e divide o lado oposto em duas partes congruentes.

As medianas de um triângulo são concorrentes num mesmo ponto

Teorema 6 As três medianas de um triângulo são concorrentes em um mesmo ponto.

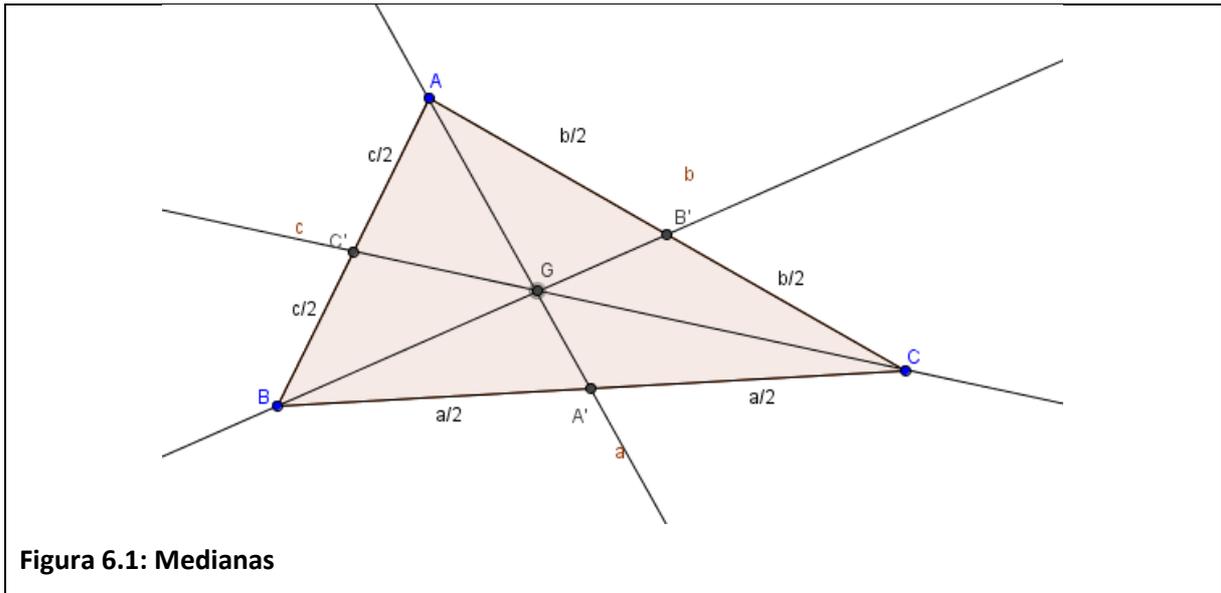
Demonstração: Como as medianas são cevianas que dividem os lados nos pontos médios temos

$$\frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} \cdot \frac{AC'}{C'B} = \frac{a/2}{a/2} \cdot \frac{b/2}{b/2} \cdot \frac{c/2}{c/2} = 1.$$

Pelo teorema 3, as medianas são concorrente em um ponto G .



O encontro das medianas é denominado Baricentro, ver Figura 6.1.



Dado um triângulo construído de material rígido e homogêneo, o baricentro é o centro de equilíbrio.

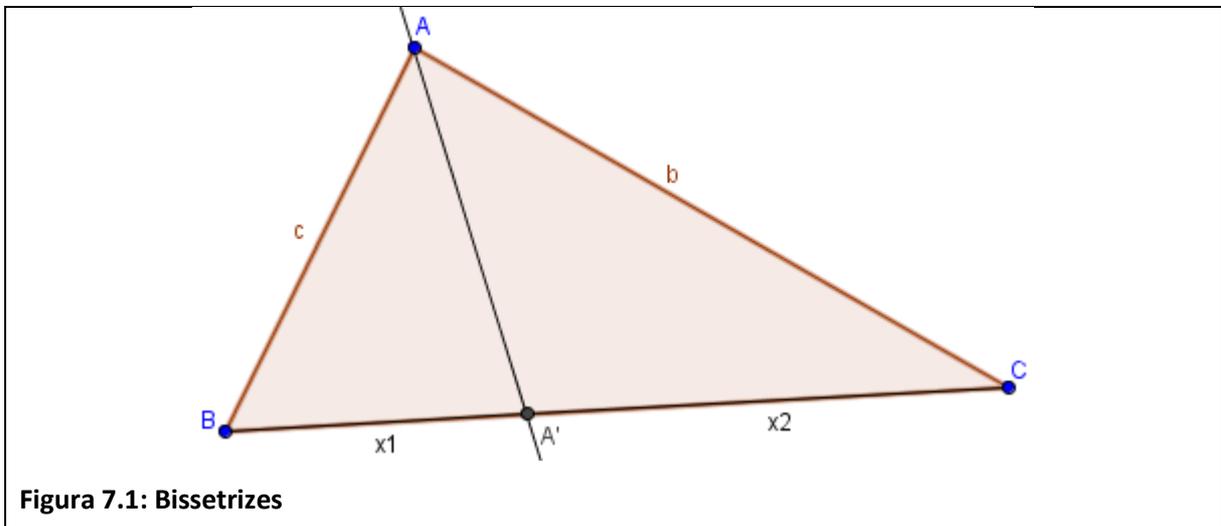
7. BISSETRIZES

As bissetrizes de um triângulo são concorrentes num mesmo ponto

Teorema 7 As três bissetrizes de um triângulo são concorrentes em um mesmo ponto.

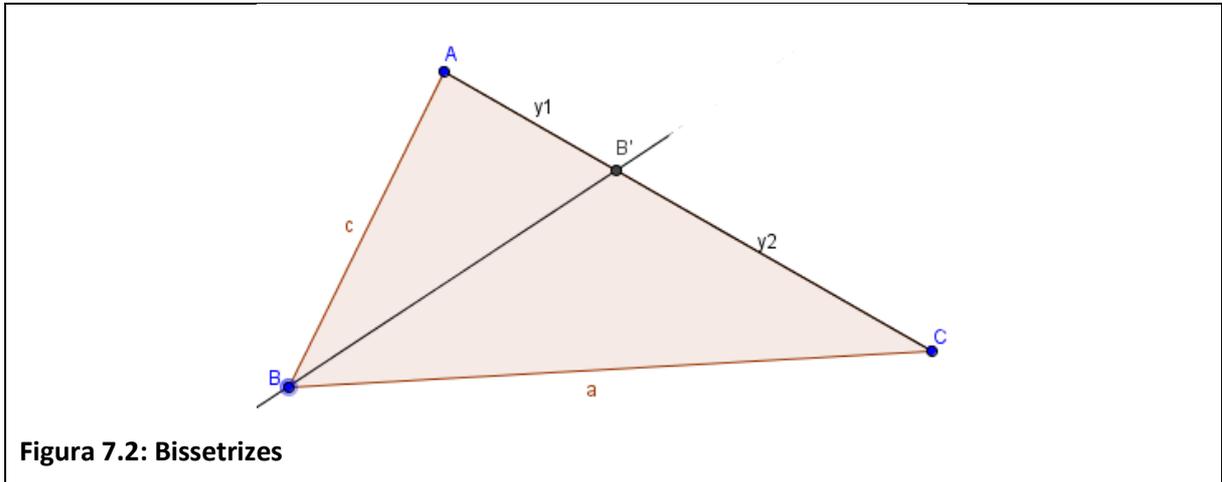
Demonstração: Usando a bissetriz partindo de cada vértice, podemos aplicar o teorema 5 nas três cevianas separadamente.

Primeira aplicação do teorema 5, ver Figura 7.1.



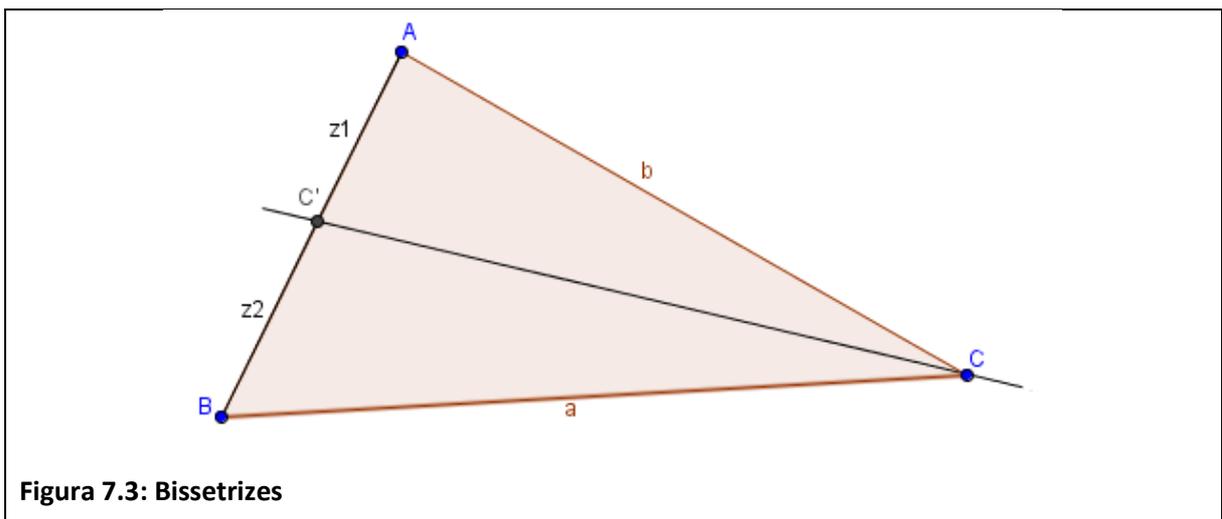
$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{c}{b}$$

Segunda aplicação do teorema 5, ver Figura 7.2.



$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{a}{c}$$

Terceira aplicação do teorema 5, ver Figura 7.3.



$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{b}{a}$$

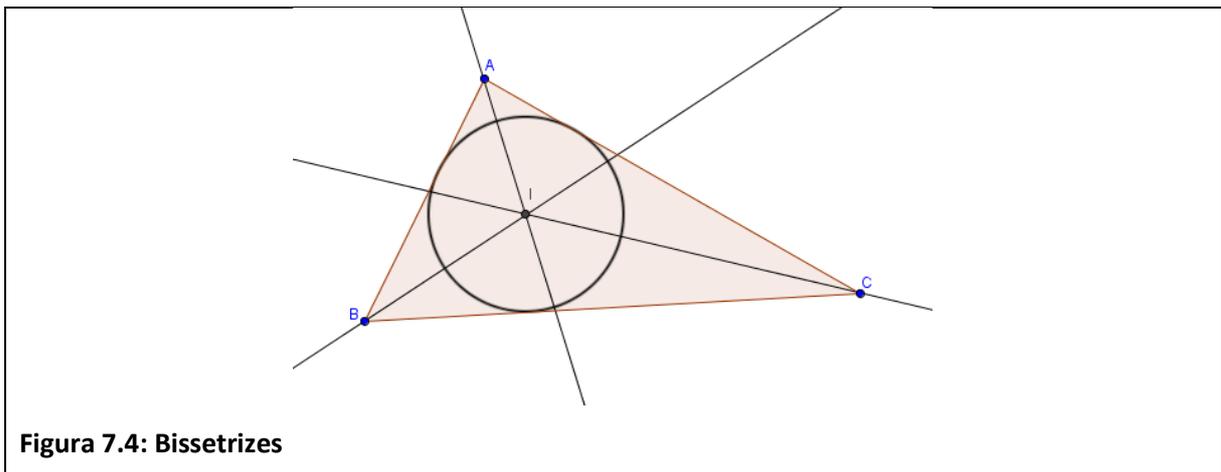
Multiplicando as três razões encontradas temos:

$$\frac{x_1}{x_2} \cdot \frac{y_1}{y_2} \cdot \frac{z_1}{z_2} = \frac{c}{b} \cdot \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{a} = 1.$$

Podemos afirmar, pelo teorema 3, podemos afirmar que as bissetrizes se encontram no mesmo ponto I .



O encontro das bissetrizes chama-se Incentro. Seja \widehat{AOC} um ângulo dado e \overrightarrow{OB} sua bissetriz, então os pontos de \overrightarrow{OB} estão à mesma distância das semirretas \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OC} . Como as bissetrizes se encontram no incentro, ele é o centro da circunferência inscrita no triângulo, ver Figura 7.4.



8. RELAÇÃO ENTRE ÂNGULO INSCRITO E ÂNGULO CENTRAL

Denominamos de ângulo central em uma circunferência aquele que possui seu vértice no centro da circunferência e suas semirretas tocando em dois pontos distintos na mesma circunferência.

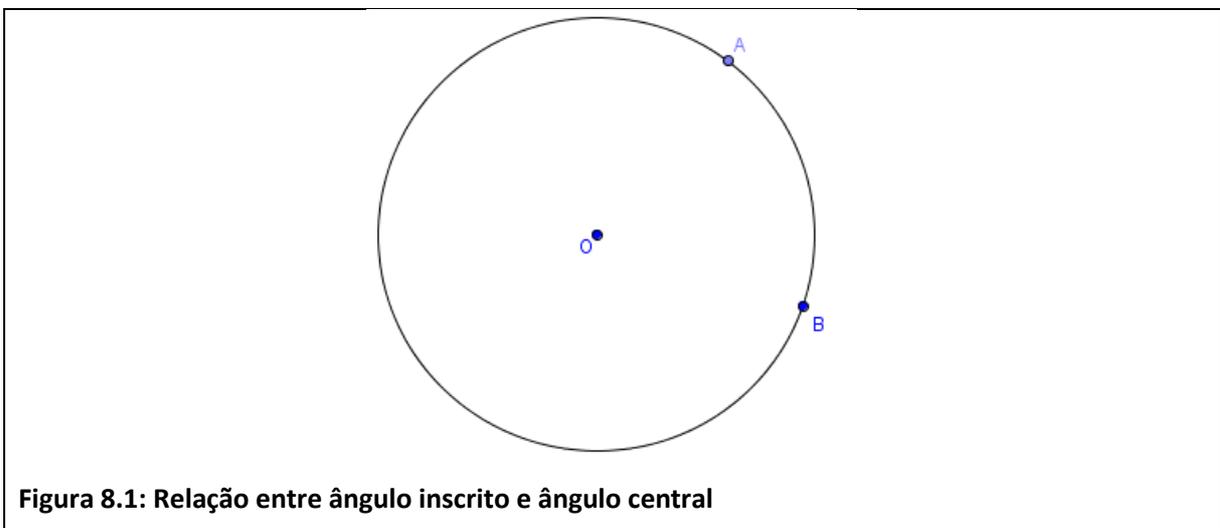
Denominamos de ângulo inscrito em uma circunferência aquele que possui seu vértice na circunferência e suas semirretas tocando em outros dois pontos distintos na mesma circunferência.

Relação entre ângulo inscrito e ângulo central

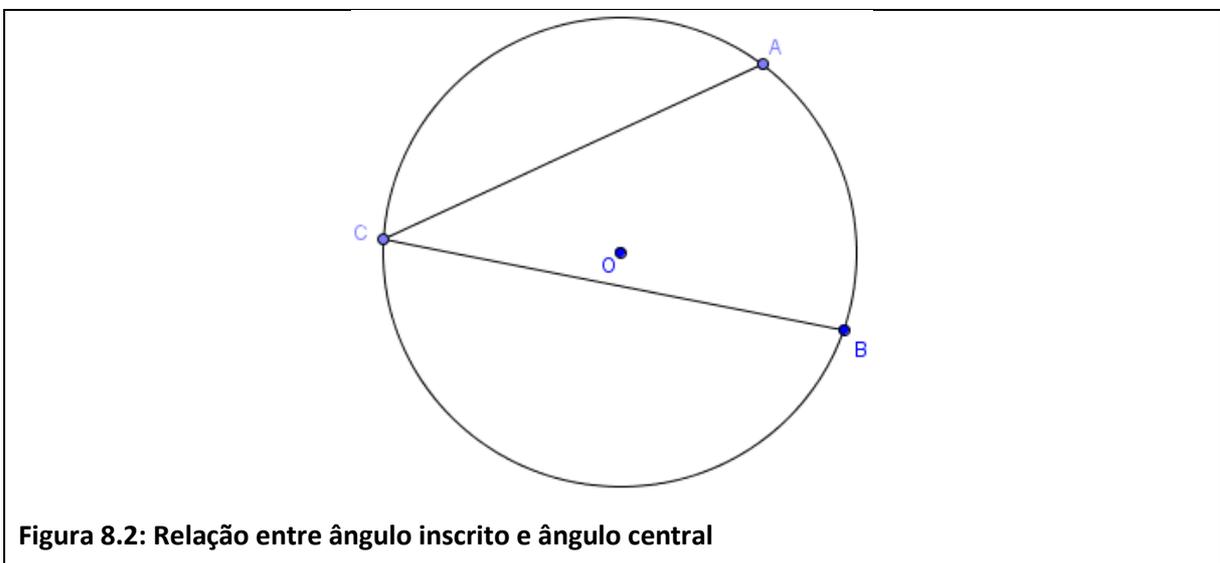
Teorema 8 *Seja uma circunferência de centro O e ângulo inscrito $A\hat{C}B$ e ângulo central $A\hat{O}B$ temos o ângulo inscrito medindo a metade do arco compreendido entre os seus lados*

$$A\hat{C}B = \frac{A\hat{O}B}{2}.$$

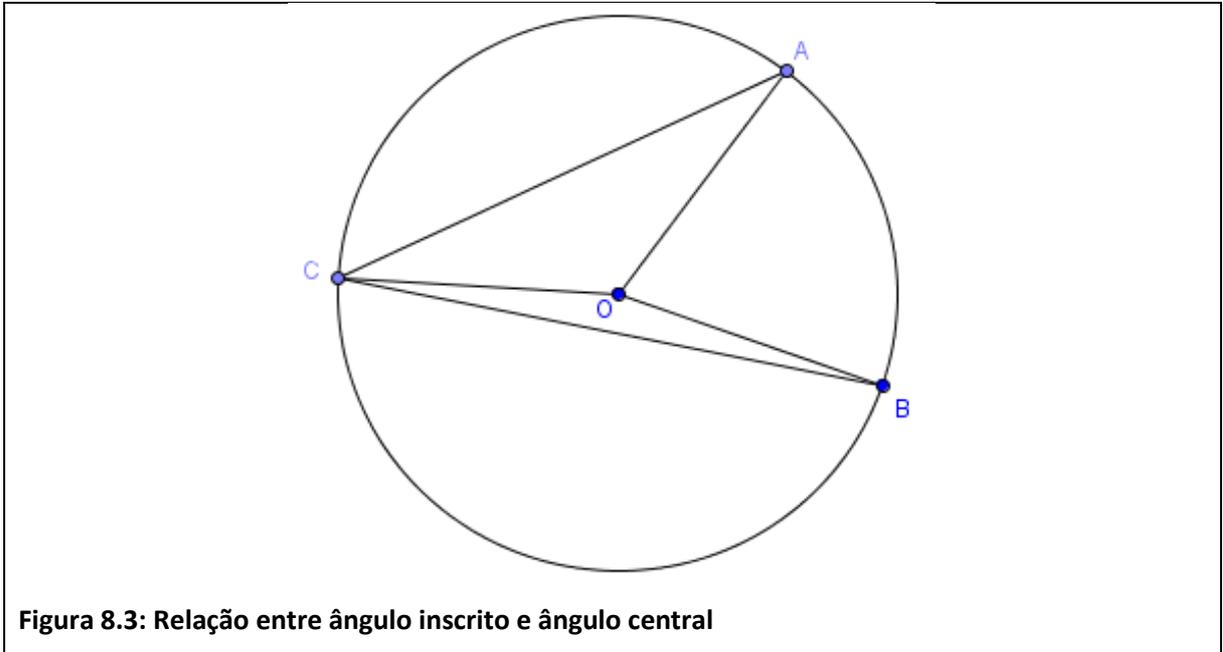
Demonstração: Considere a circunferência de centro O e o arco \widehat{AB} , ver Figura 8.1.



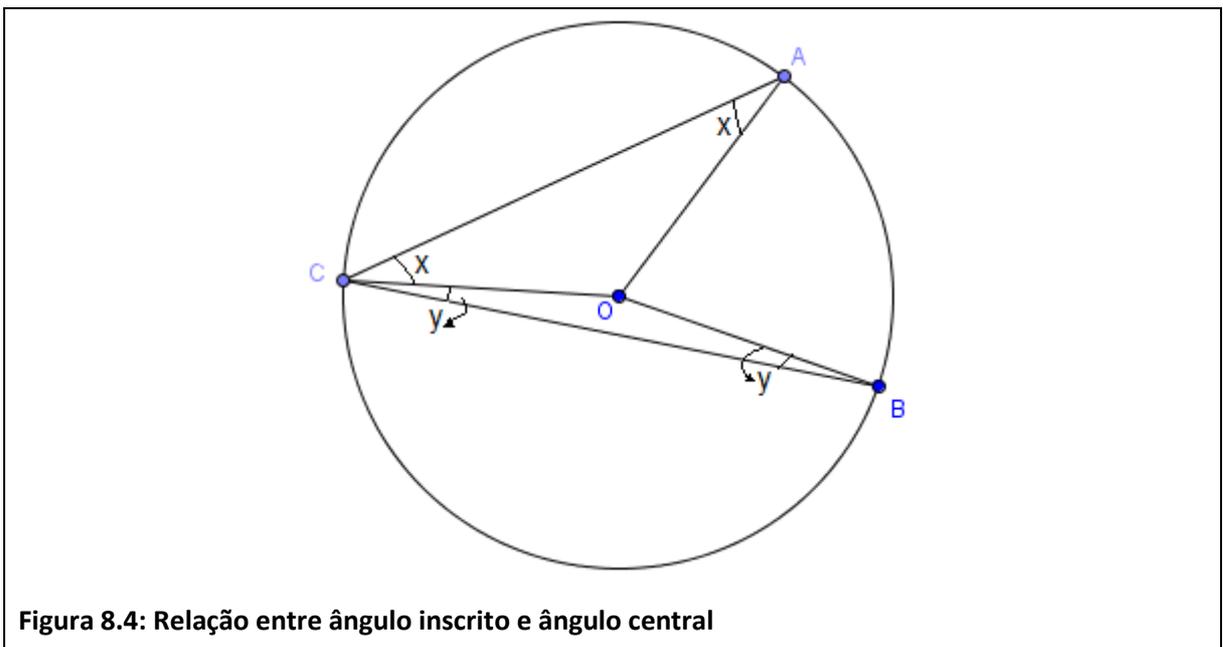
Sabemos que ângulo $A\hat{O}B$ é um ângulo central e possui mesma medida do arco \widehat{AB} . Agora vamos marcar o ângulo inscrito $A\hat{C}B$ com vértice C na circunferência, ver Figura 8.2.



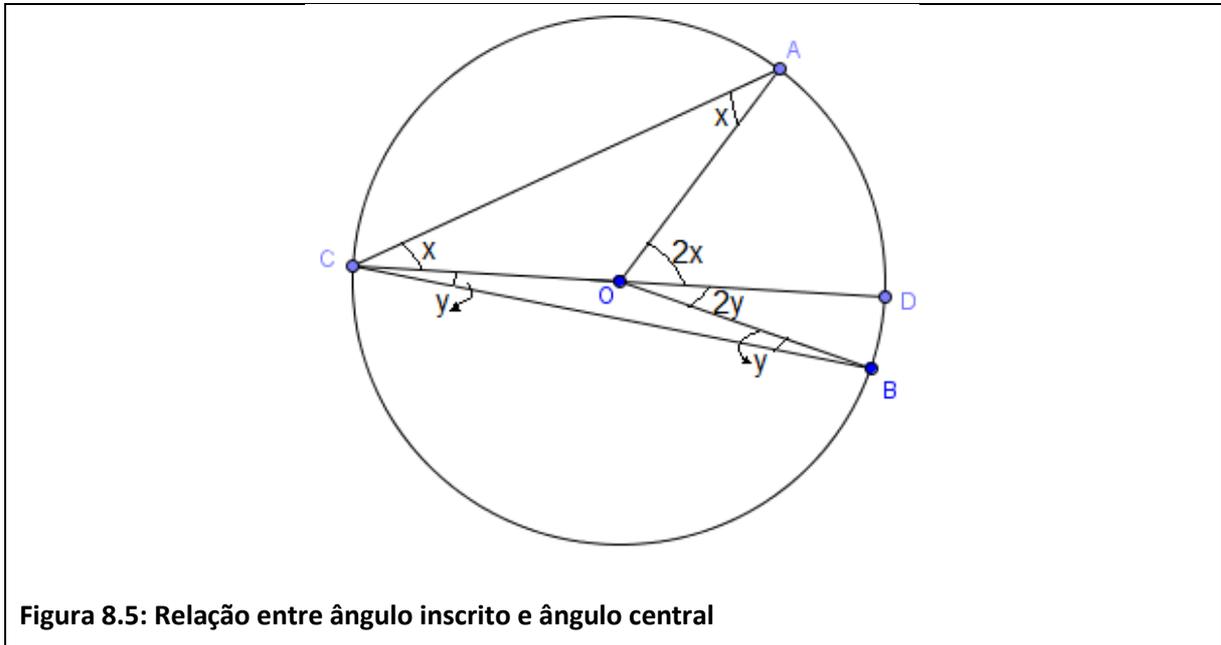
Os triângulos AOC e triângulo BOC são isósceles, pois possuem lados AO , OC e OB , OC congruentes, já que os mesmo são raios da circunferência de centro O , ver Figura 8.3.



Portanto podemos marcar os ângulos que são congruentes entre si, chamaremos $O\hat{A}C = x$ e $O\hat{C}A = x$ o mesmo faremos com $O\hat{B}C = y$ e $O\hat{C}B = y$, ver Figura 8.4.



Podemos calcular os ângulos externos dos triângulos AOC e BOC prolongando o lado OC que toca a circunferência no ponto D , ver Figura 8.5.



Daí, segue que, o ângulo inscrito $A\hat{C}B$ é a metade do ângulo central $A\hat{O}B$ então:

$$A\hat{C}B = \frac{A\hat{O}B}{2}.$$



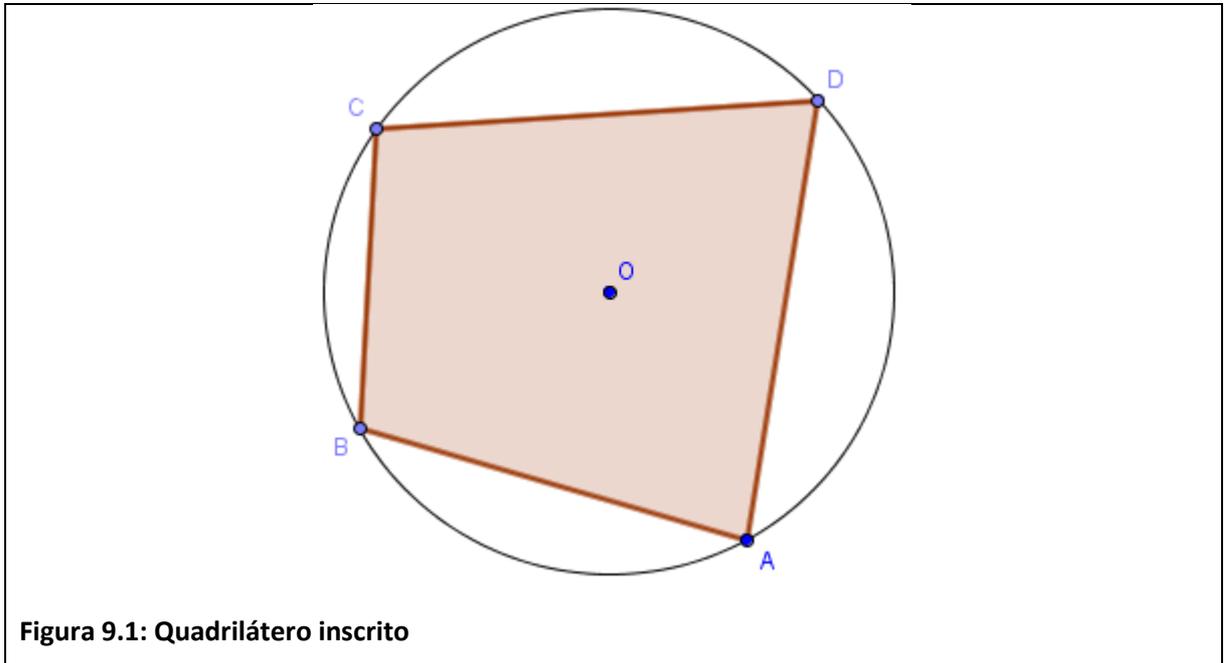
9. QUADRILÁTERO CONVEXO INSCRITÍVEL

Denominamos dois ângulos como sendo complementares quando somam 90° , se dois ângulos somam 180° denominamos suplementares e quando somam 360° chamamos de replementares.

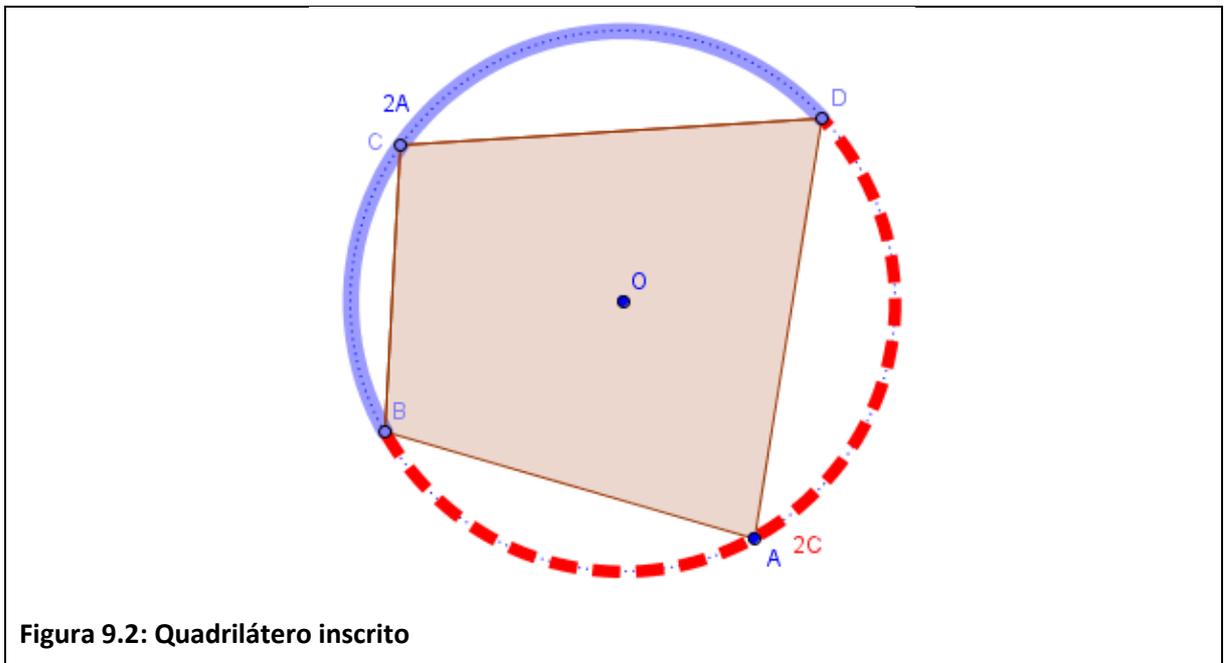
Quadrilátero inscrito

Teorema 9 *Um quadrilátero convexo $ABCD$ é inscrito em uma circunferência de centro O , se e somente se, seus ângulos opostos são suplementares.*

Demonstração: Considere a circunferência de centro O e o quadrilátero $ABCD$ inscrito, ver Figura 9.1.



Pelo teorema 8 temos que os arcos dos ângulos inscritos \hat{A} e \hat{C} são respectivamente $2\hat{A}$ e $2\hat{C}$, ver Figura 9.2.



Daí temos:

$$2\hat{A} + 2\hat{C} = 360^\circ.$$

Simplificando temos

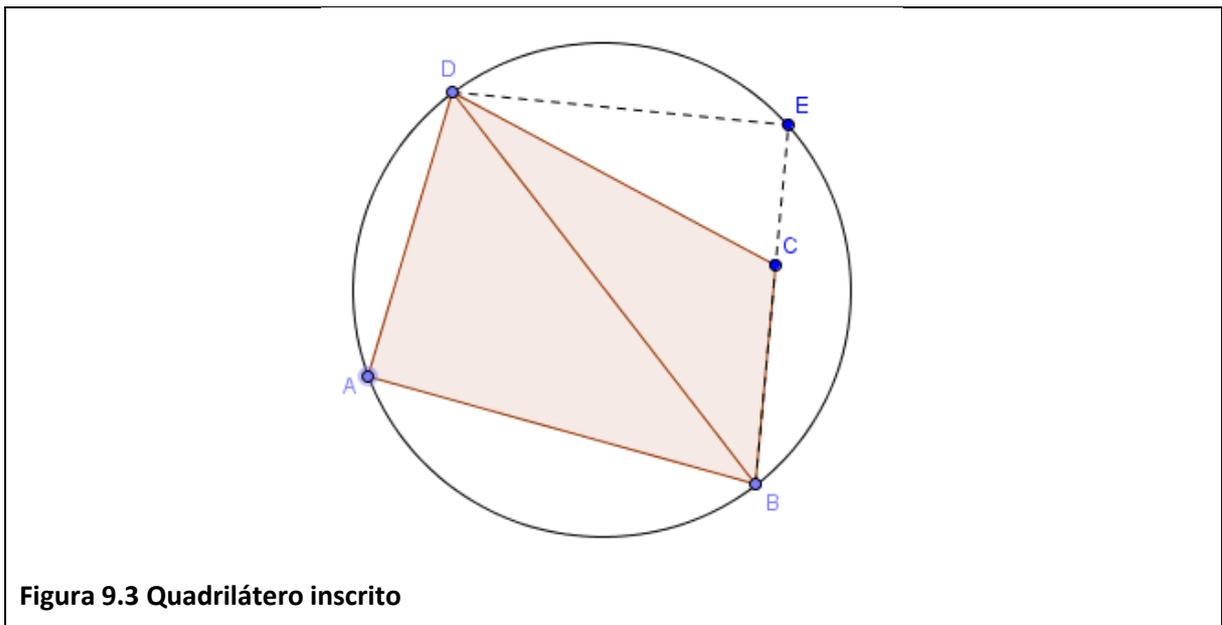
$$\hat{A} + \hat{C} = 180^\circ.$$

De maneira análoga tem-se

$$\hat{B} + \hat{D} = 180^\circ.$$

Portanto, os ângulos opostos de um quadrilátero inscrito são suplementares.

Reciprocamente, suponha que $D\hat{A}B + B\hat{C}D = 180^\circ$, ver Figura 9.3.



Consideramos o círculo α , circunscrito ao triângulo BAD . Se $C \notin \alpha$, seja $\overrightarrow{BC} \cap \alpha = \{E\}$, com $E \neq B, C$. Portanto temos,

$$D\hat{A}B + B\hat{E}D = 180^\circ = D\hat{A}B + B\hat{C}D.$$

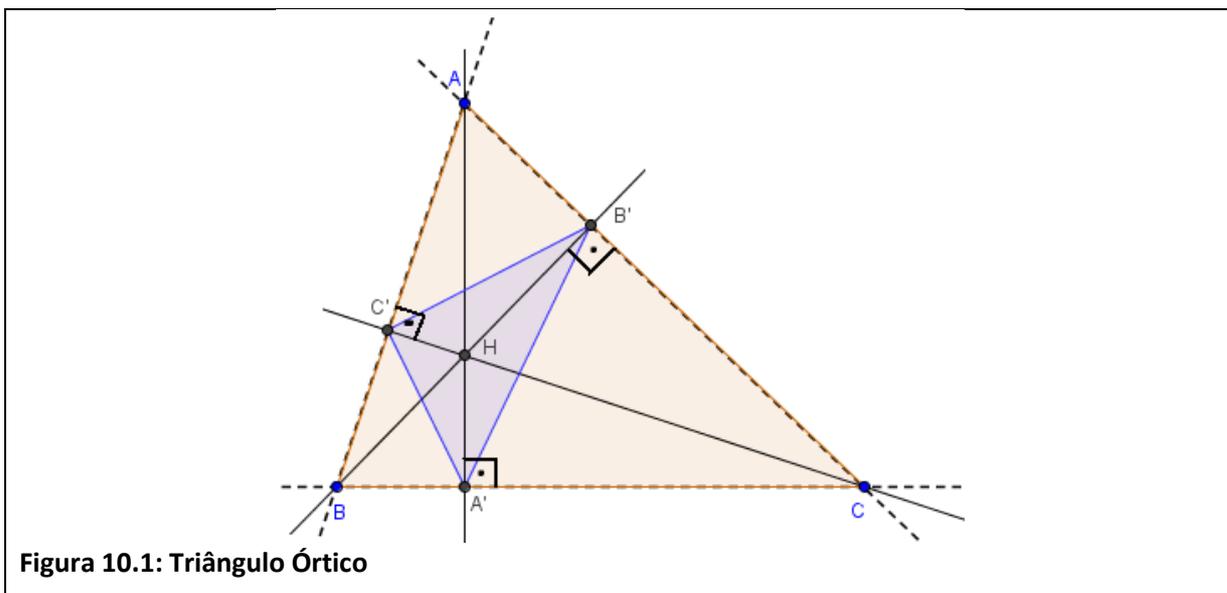
Daí, temos $B\hat{E}D = B\hat{C}D$. Mas, aplicando o teorema do ângulo externo do triângulo CDE , obtemos uma contradição. ■

10. TRIÂNGULO ÓRTICO

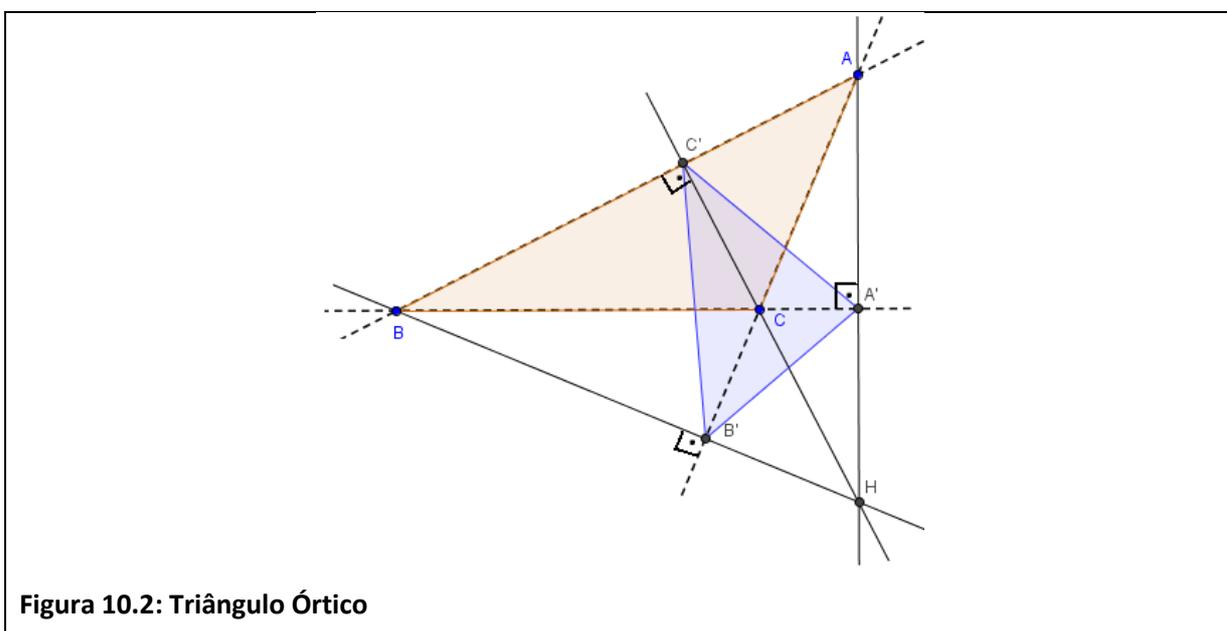
A altura de um triângulo ABC é o segmento que parte de um vértice e encontra a reta suporte do lado oposto fazendo um ângulo reto.

Chamamos de triângulo órtico $A'B'C'$ aquele obtido dos pés das alturas de um triângulo ABC não retângulo, pois o mesmo não possui triângulo órtico.

Podemos ter o triângulo órtico $A'B'C'$ em um triângulo ABC acutângulo, ver Figura 10.1.



Podemos ter o triângulo órtico $A'B'C'$ em um triângulo ABC obtusângulo, ver Figura 10.2.



Triângulo órtico

Teorema 10 *As alturas de um triângulo não retângulo ABC são bissetrizes dos ângulos internos do triângulo órtico $A'B'C'$.*

Demonstração: Os ângulos $B\hat{H}C'$ e $C\hat{H}B'$ são congruentes por opostos pelo vértice (OPV), ver Figura 10.3.

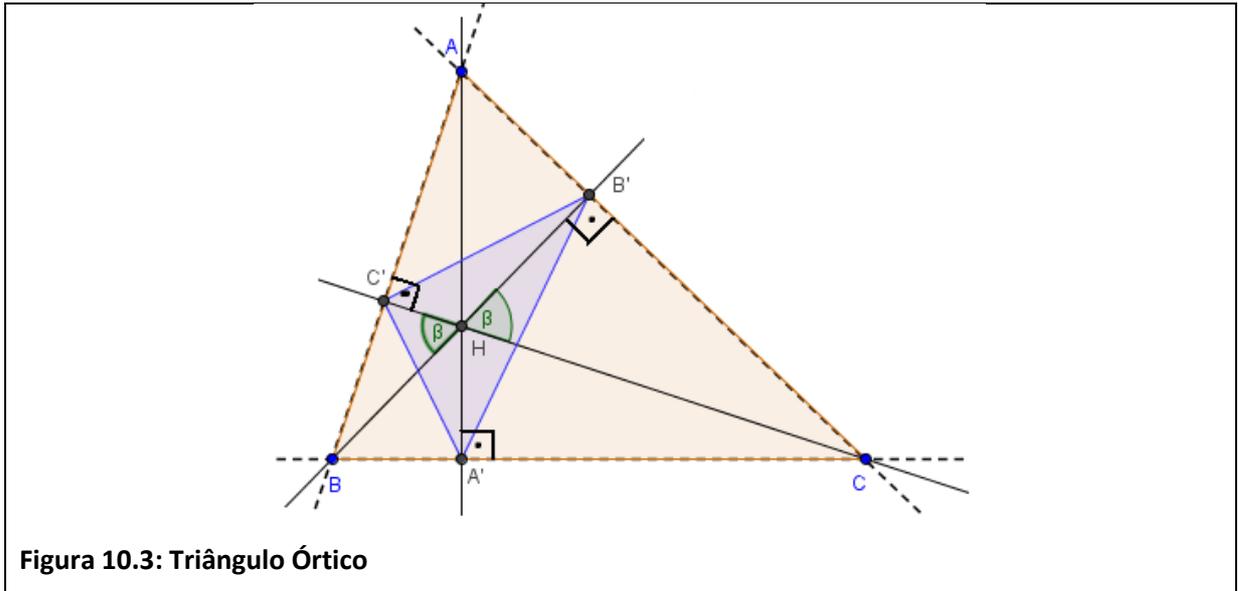


Figura 10.3: Triângulo Órtico

Como os triângulos BHC' e CHB' são retângulos e possuem o ângulo β em comum, concluímos que os ângulos $C'\hat{B}H$ e $B'\hat{C}H$ são congruentes vamos chamá-los de α , ver Figura 10.4.

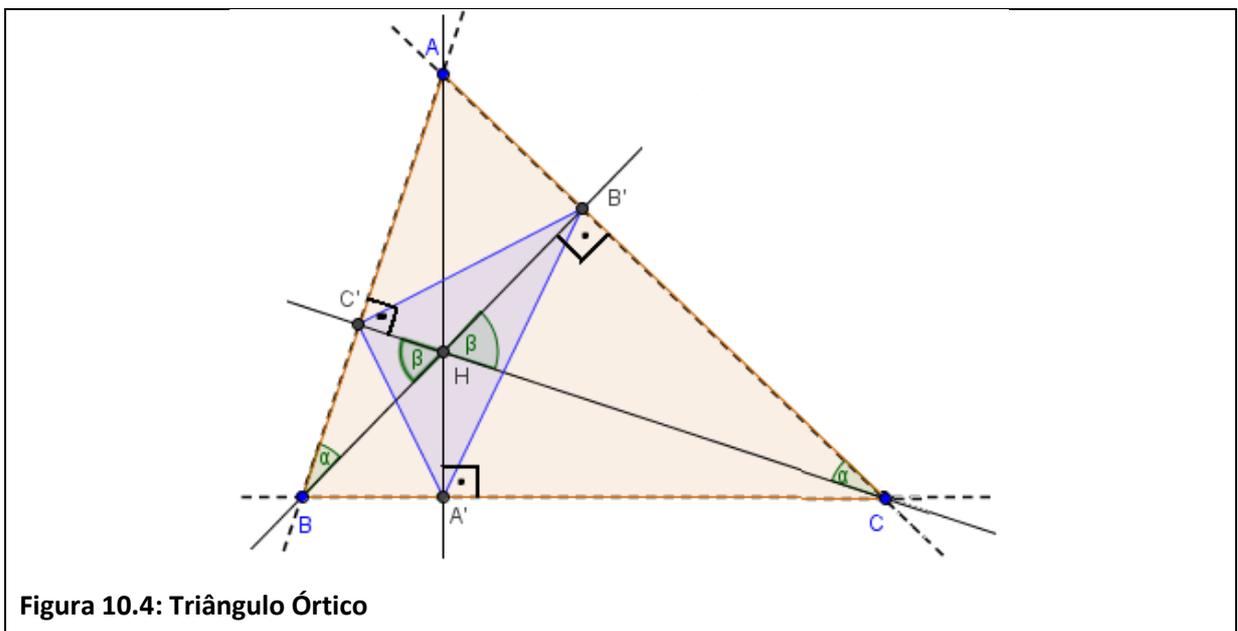
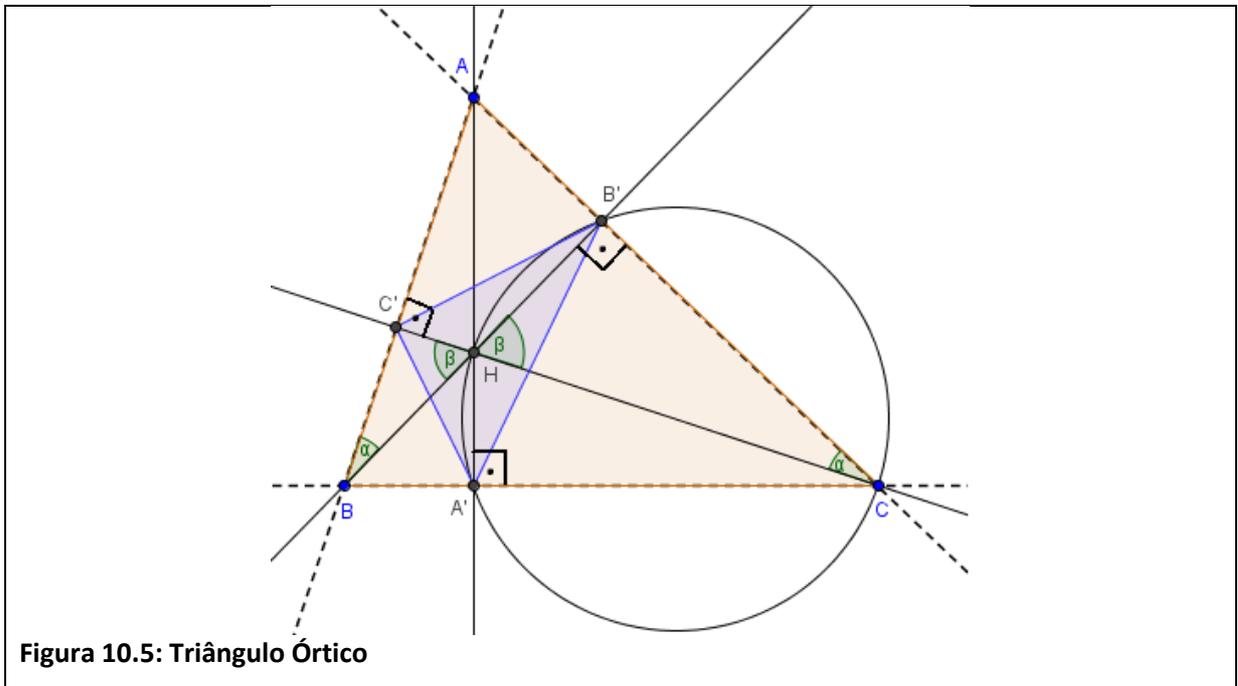
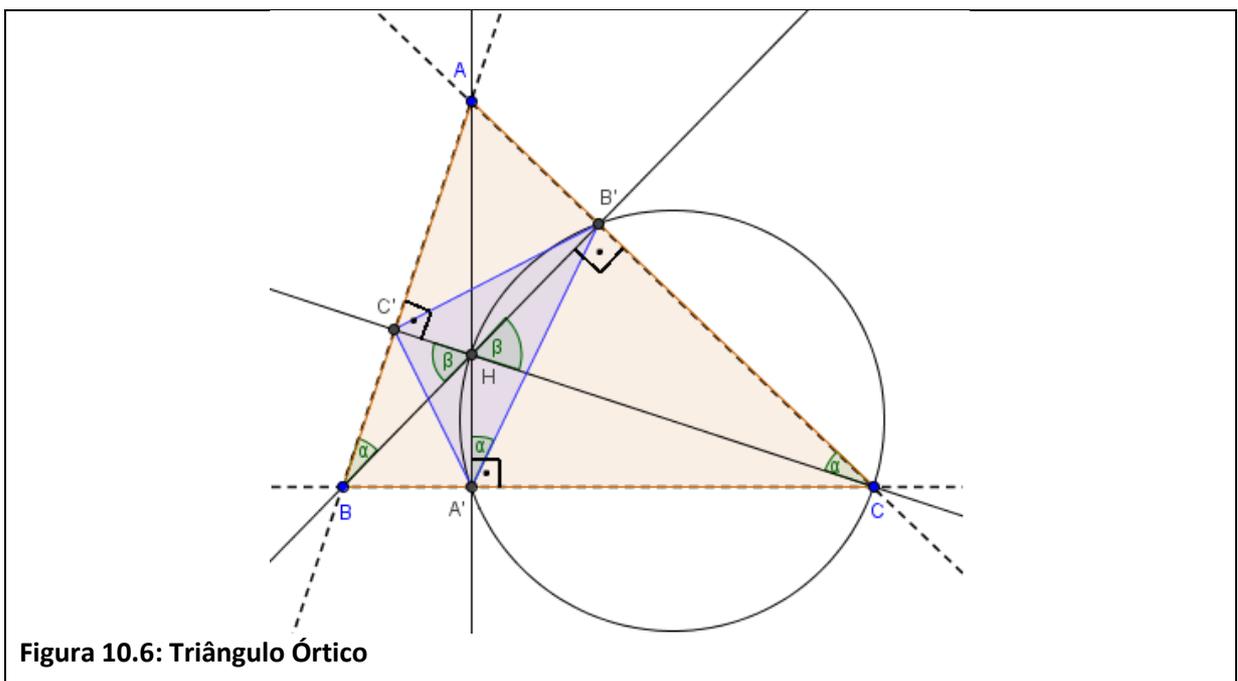


Figura 10.4: Triângulo Órtico

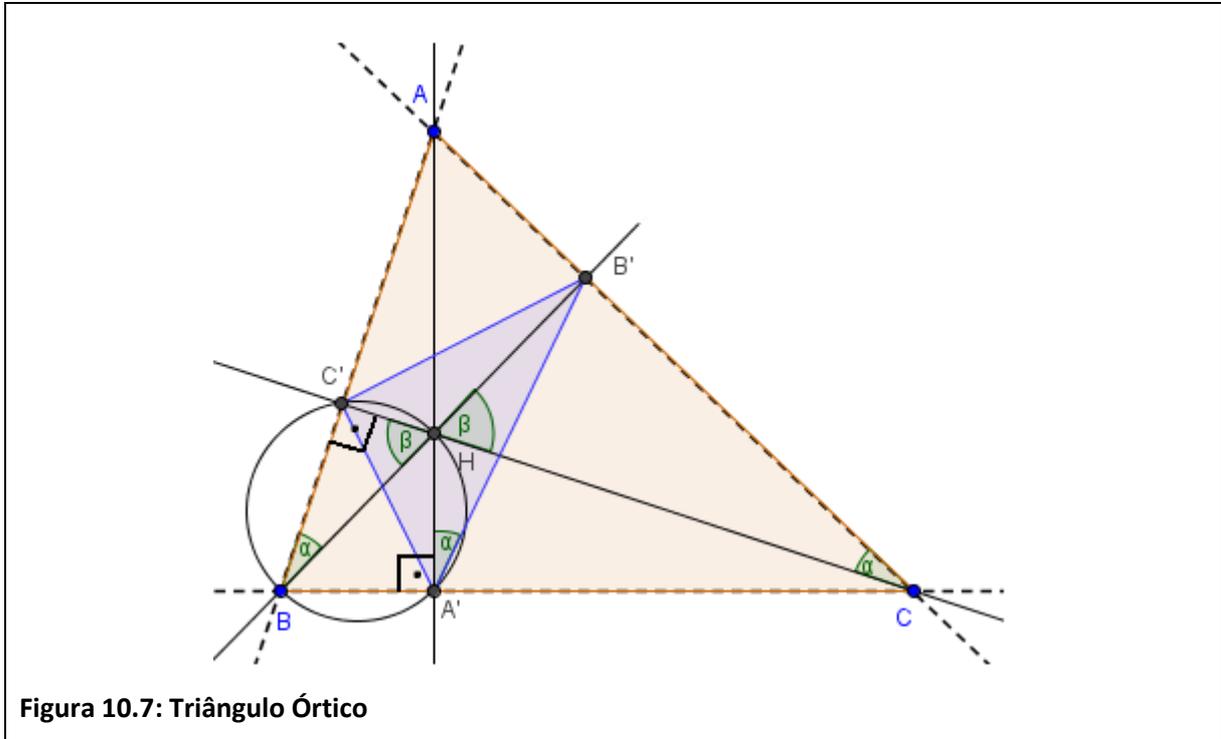
Pelo teorema 9 podemos inscrever um quadrilátero em uma circunferência se no mesmo os ângulos opostos são suplementares no nosso caso o quadrilátero $A'HB'C'$, ver Figura 10.5.



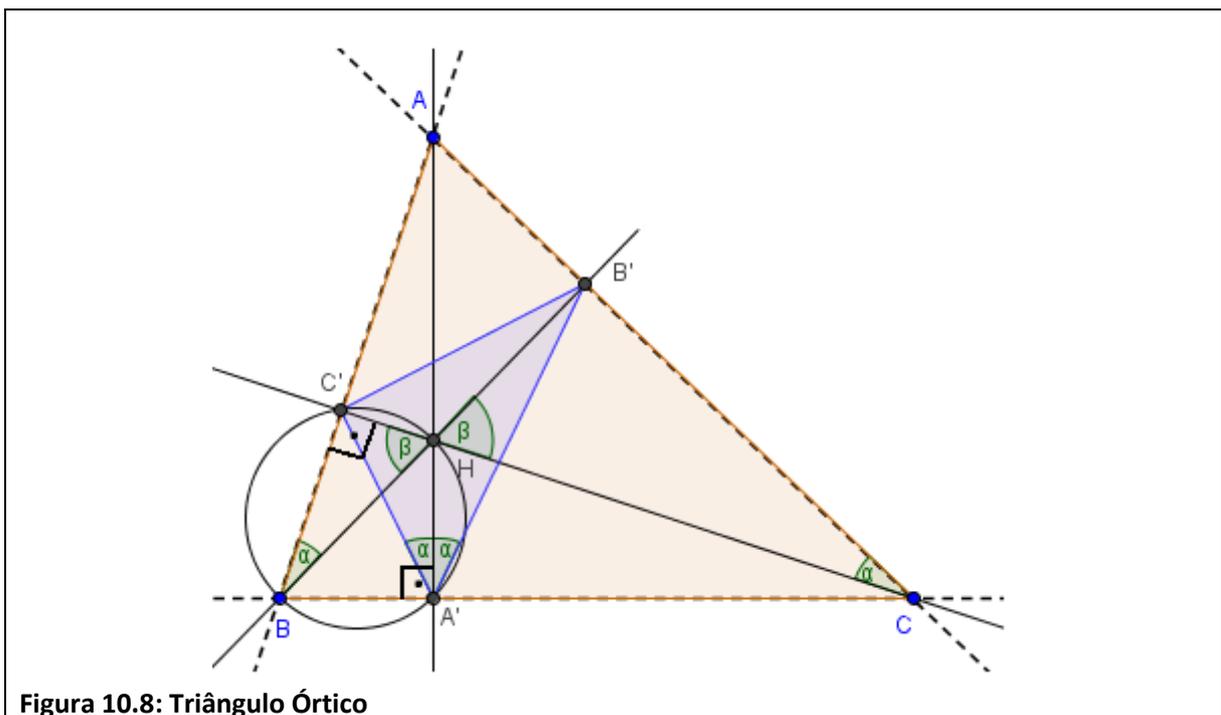
Os ângulos inscritos $H\hat{C}B'$ e $H\hat{A}'B'$ são inscritos na circunferência, que pelo teorema 8, são metade do arco central $\widehat{HB'}$ portanto congruentes, ver Figura 10.6.



Pelo teorema 9 podemos circunscrever uma circunferência no quadrilátero $A'HC'B$, ver Figura, 10.7.



Os ângulos inscritos $\widehat{HB'C'}$ e $\widehat{HA'C'}$ são inscritos na circunferência, que pelo teorema 8, são metade do arco central $\widehat{AC'}$ portanto congruentes, ver Figura 10.8.



Portanto, a altura AA' divide o ângulo A' do triângulo órtico $A'B'C'$ em duas partes congruentes, logo AA' é bissetriz do triângulo órtico. De maneira análoga podemos provar que as outras alturas são as bissetrizes dos outros dois ângulos internos do triângulo órtico.



11. ALTURAS

As alturas de um triângulo são concorrentes num mesmo ponto

Teorema 11 *Se traçarmos as três alturas de um triângulo, então elas serão concorrentes em um mesmo ponto.*

Demonstração: Dado um triângulo ABC não retângulo de alturas AA' , BB' e CC' . O triângulo $A'B'C'$ formado pelos pés das alturas é o triângulo órtico. Pelo teorema 10, as alturas do triângulo ABC coincidem com as bissetrizes do triângulo $A'B'C'$. Ou seja, o encontro das alturas é o encontro das bissetrizes do triângulo órtico. Pelo teorema 7 as bissetrizes são concorrentes, logo as alturas são concorrentes num mesmo ponto. Quando o triângulo é retângulo o ponto coincide com o vértice do ângulo reto.



O encontro das alturas é denominado de ortocentro.

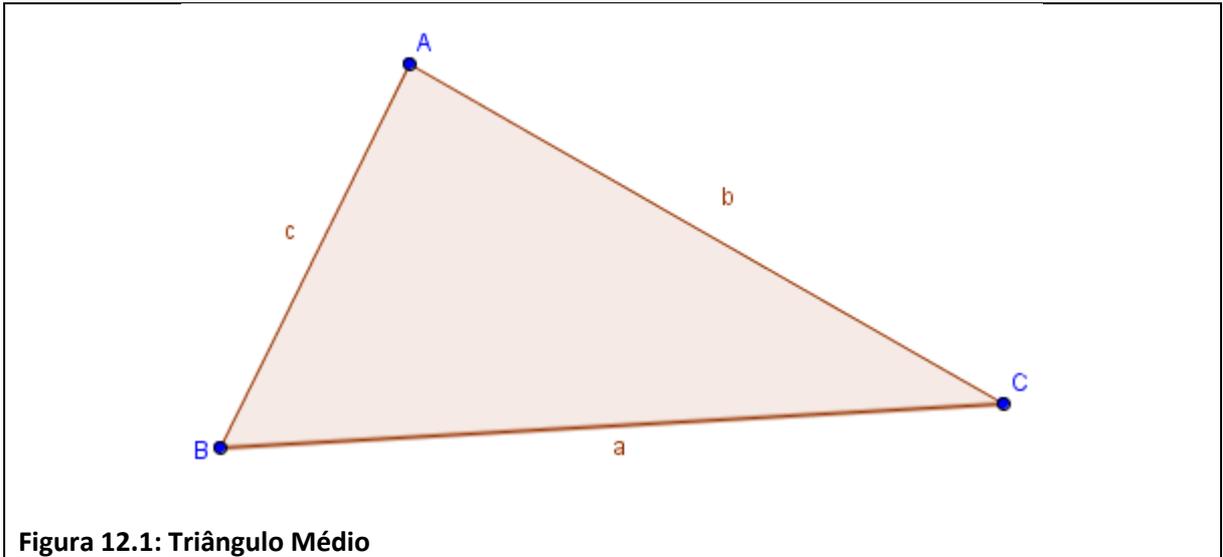
12. TRIÂNGULO MEDIAL

Denominamos de triângulo medial $A'B'C'$ aquele que possui os vértices nos pontos médios dos lados de um triângulo ABC .

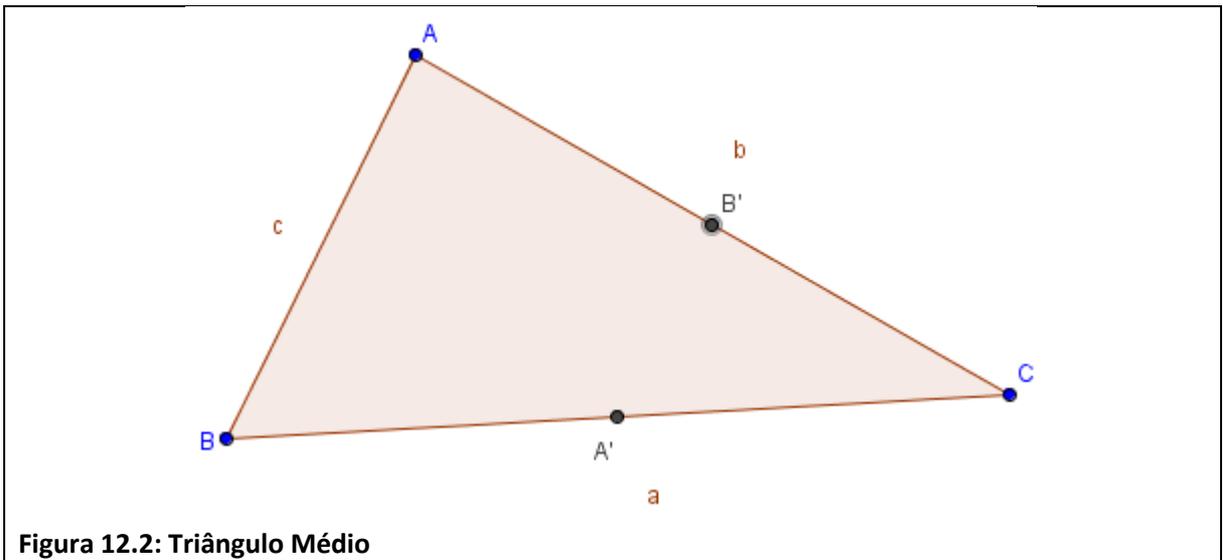
Triângulo medial

Teorema 12 *O triângulo $A'B'C'$ formado pelos pontos médios dos lados de um triângulo ABC são semelhantes na razão de 2 para 1*

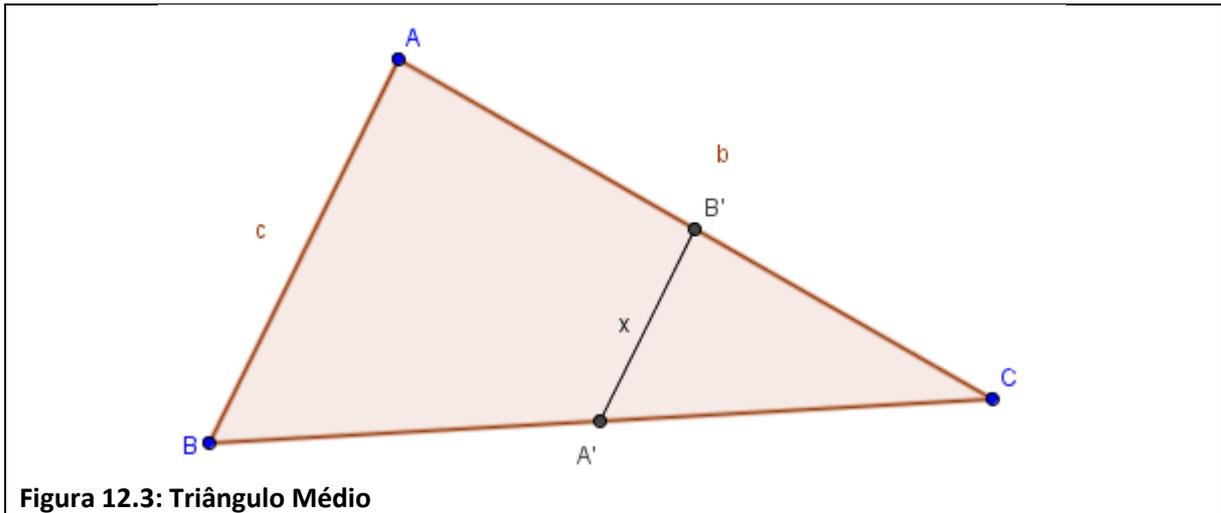
Demonstração: Considere o triângulo ABC de lados opostos aos vértices A , B e C medindo a , b e c , ver Figura 12.1.



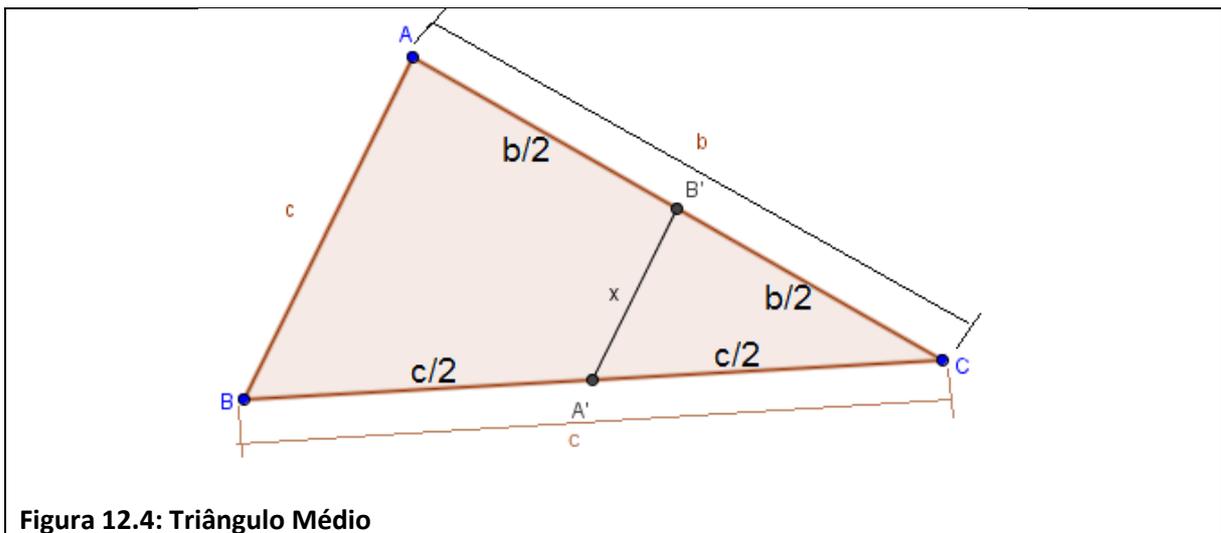
Agora chamamos de A' o ponto médio do lado BC e chamamos de B' o ponto médio do lado AC . ver Figura 12.2.



Agora iremos ligar esses dois pontos obtendo um segmento $A'B'$ de comprimento x , ver Figura 12.3.



Como temos B' sendo ponto médio de AC , podemos afirmar que $B'C$ é a metade da medida de AC . O mesmo acontece com o segmento $A'C$ que é a metade de BC , ver Figura 12.4.

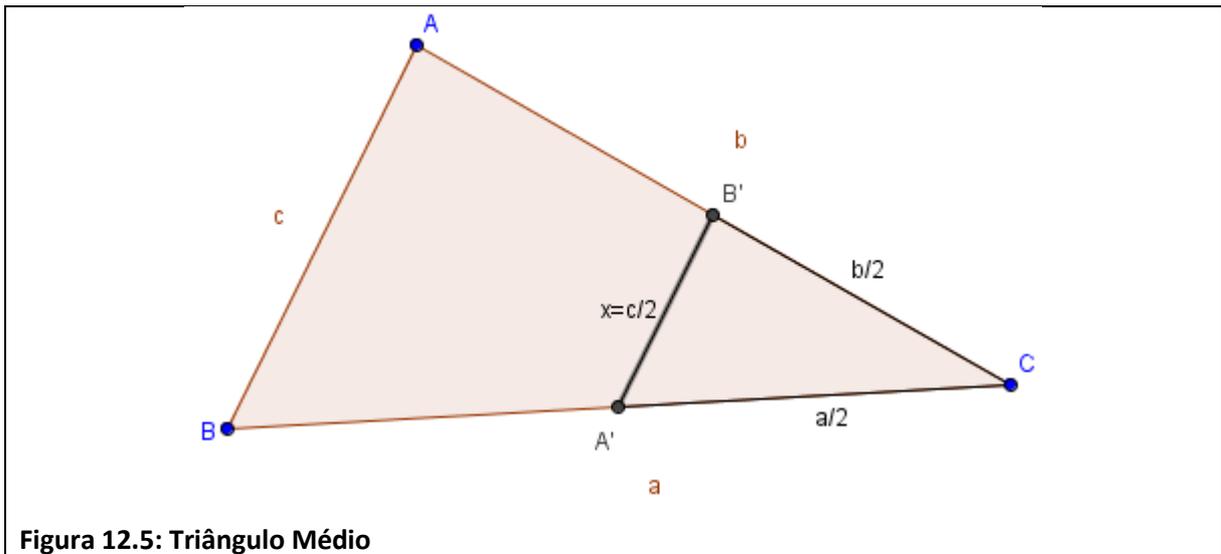


Portanto, o segmento $A'B'$ é paralelo ao segmento AB , pois os segmentos atendem ao corolário 4.1.

$$\frac{b}{b/2} = \frac{c}{c/2}$$

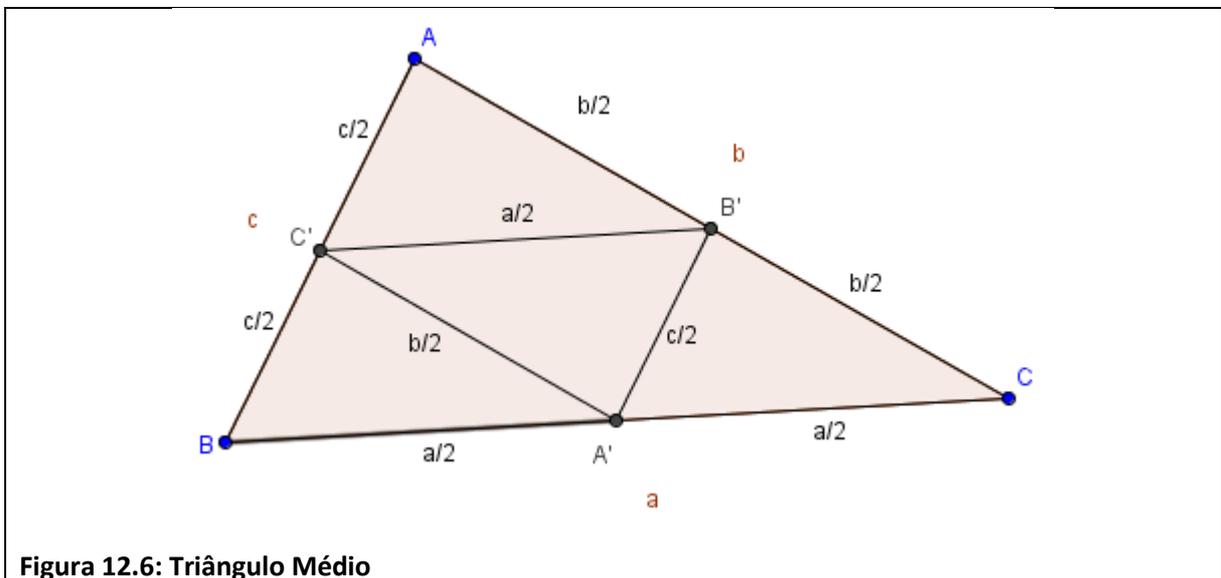
$$\frac{1}{1/2} = \frac{1}{1/2}$$

Isso acontece com garantia de paralelismo entre $A'B'$ e AB . Ainda podemos afirmar que o triângulo ABC é semelhante ao triângulo $B'A'C'$ na razão de 2 para 1, daí, ver Figura 12.5.



$$x = \frac{c}{2}.$$

Iremos traçar o ponto médio do lado AB e chamaremos de C' . O raciocínio então será o mesmo, ver Figura 12.6.



Concluimos então, o triângulo ABC é semelhante ao triângulo $A'B'C'$ na razão de 2 para 1, pelo caso (LLL) .



13. ÁREA DO TRIÂNGULO MEDIAL

Área do triângulo medial

Corolário 12.1 *Podemos afirmar que o triângulo medial $A'B'C'$ possui a quarta parte da área do triângulo ABC . Portanto na razão de 4 para 1. Podemos determinar quatro triângulos médios congruentes.*

Demonstração: Todos os triângulos são congruentes, portanto o triângulo medial é 1 de 4 triângulos totais, logo ele está na razão de 1 para 4, pelo caso (*LLL*).



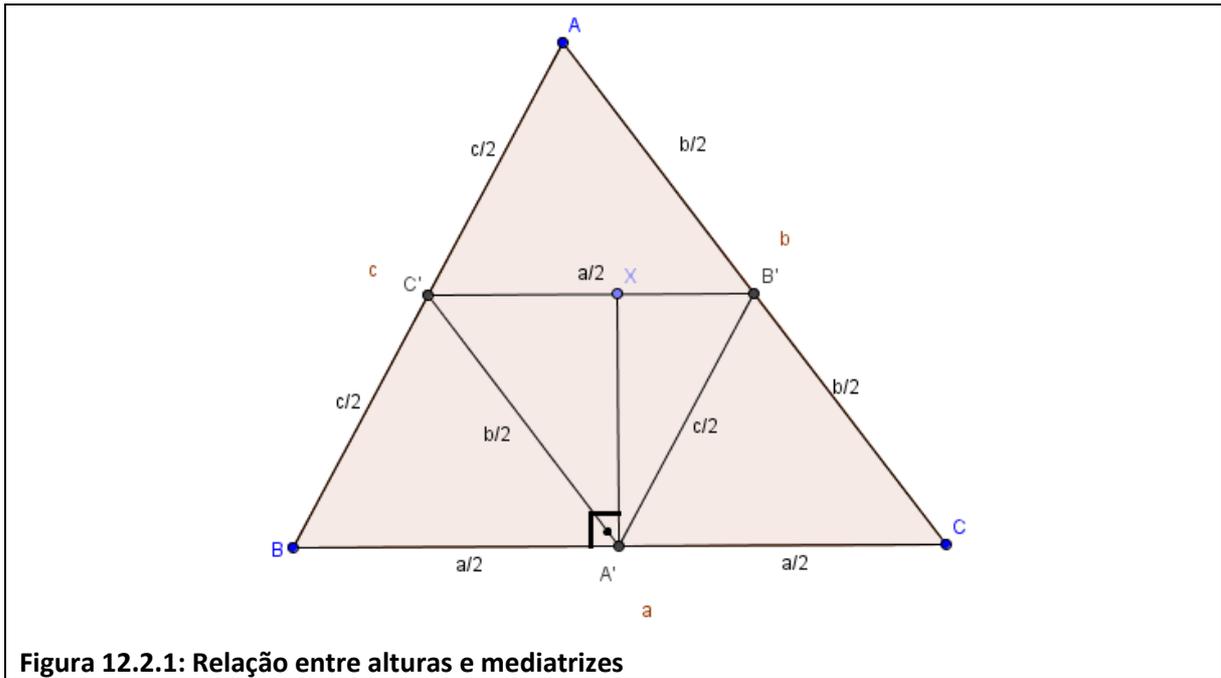
14. RELAÇÃO ENTRE ALTURAS E MEDIATRIZES

A mediatriz do segmento AB é a reta perpendicular a AB e que passa pelo seu ponto médio.

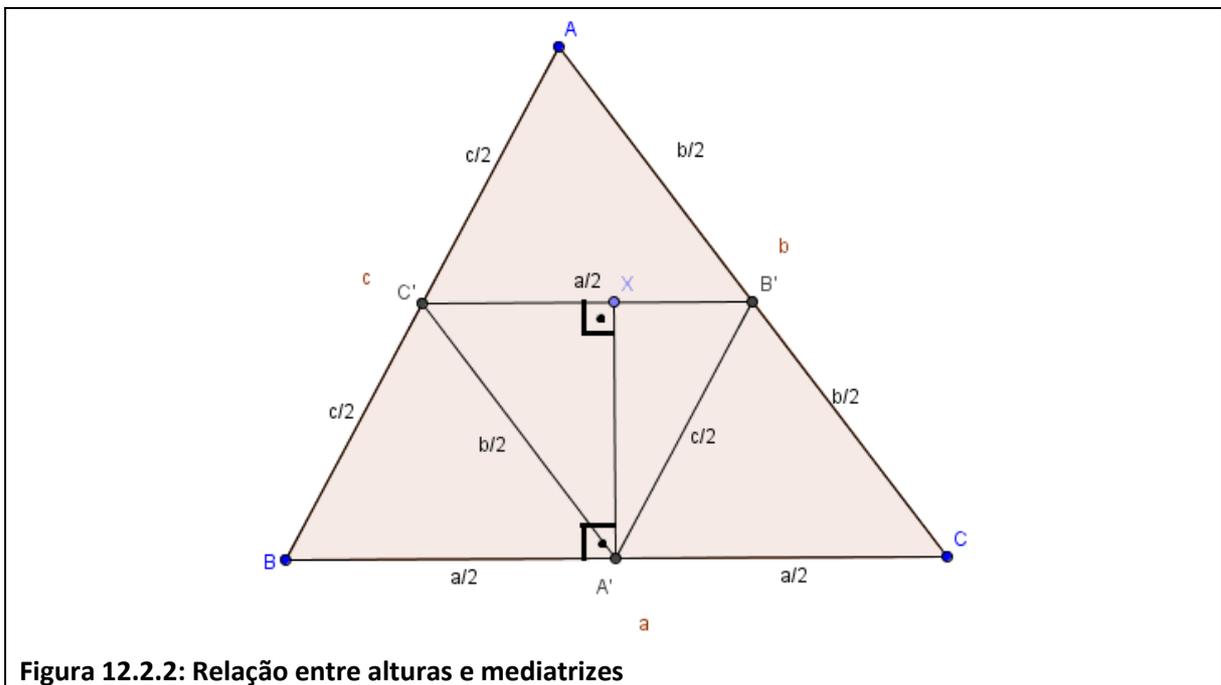
Relação entre alturas e mediatrizes

Corolário 12.2 *As alturas do triângulo medial $A'B'C'$ estão nas mediatrizes do triângulo ABC .*

Demonstração: Tracemos por A' a reta perpendicular ao lado BC que encontrará a reta suporte do lado $B'C'$ num ponto X , ver Figura 12.2.1.



Como $B'C'$ é paralelo ao lado BC temos que $A'X$ que é mediatriz do triângulo ABC também sendo altura do triângulo medial $A'B'C'$, ver Figura 12.2.2.



Tracemos por B' a reta perpendicular ao lado AC que encontrará a reta suporte do lado $A'C'$ num ponto Y . Como $A'C'$ é paralelo ao lado AC temos que $B'Y$ que é mediatriz do triângulo ABC também sendo altura do triângulo medial $A'B'C'$, ver Figura 12.2.3.

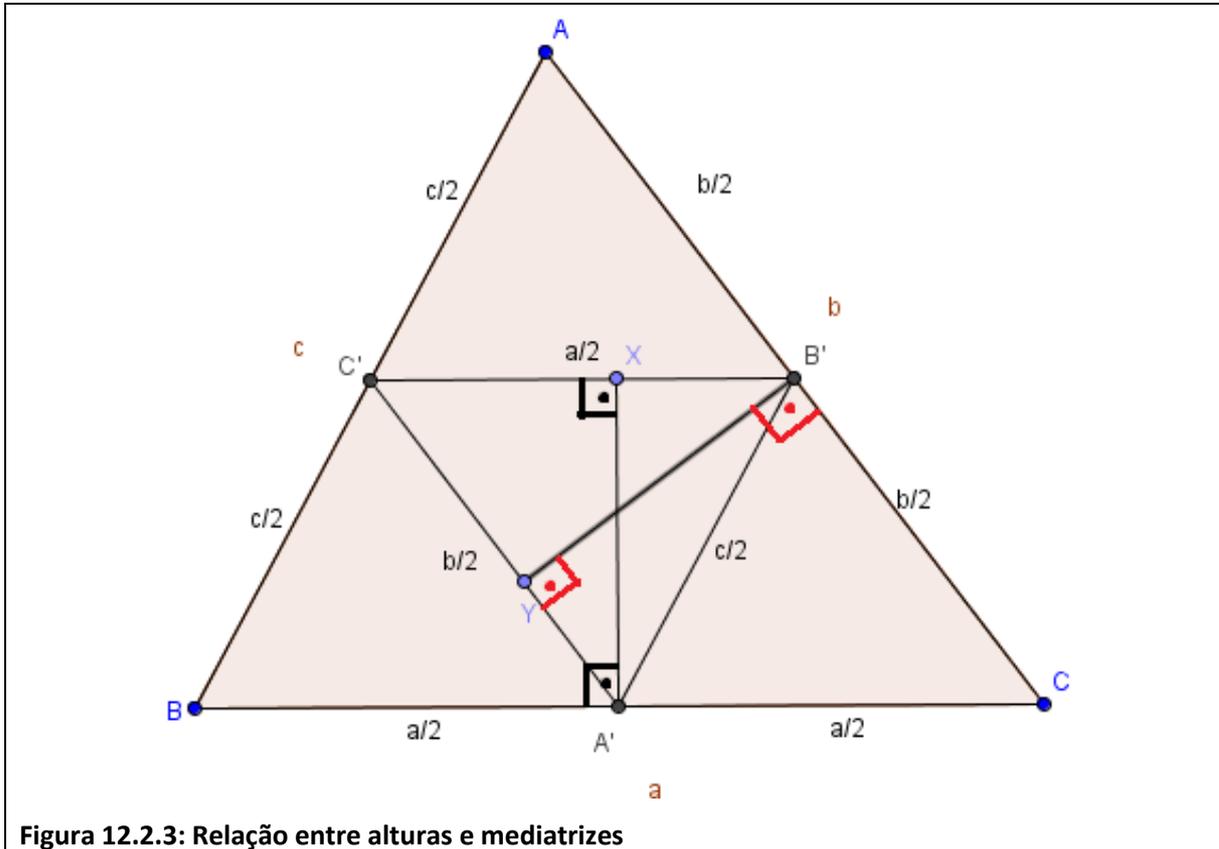
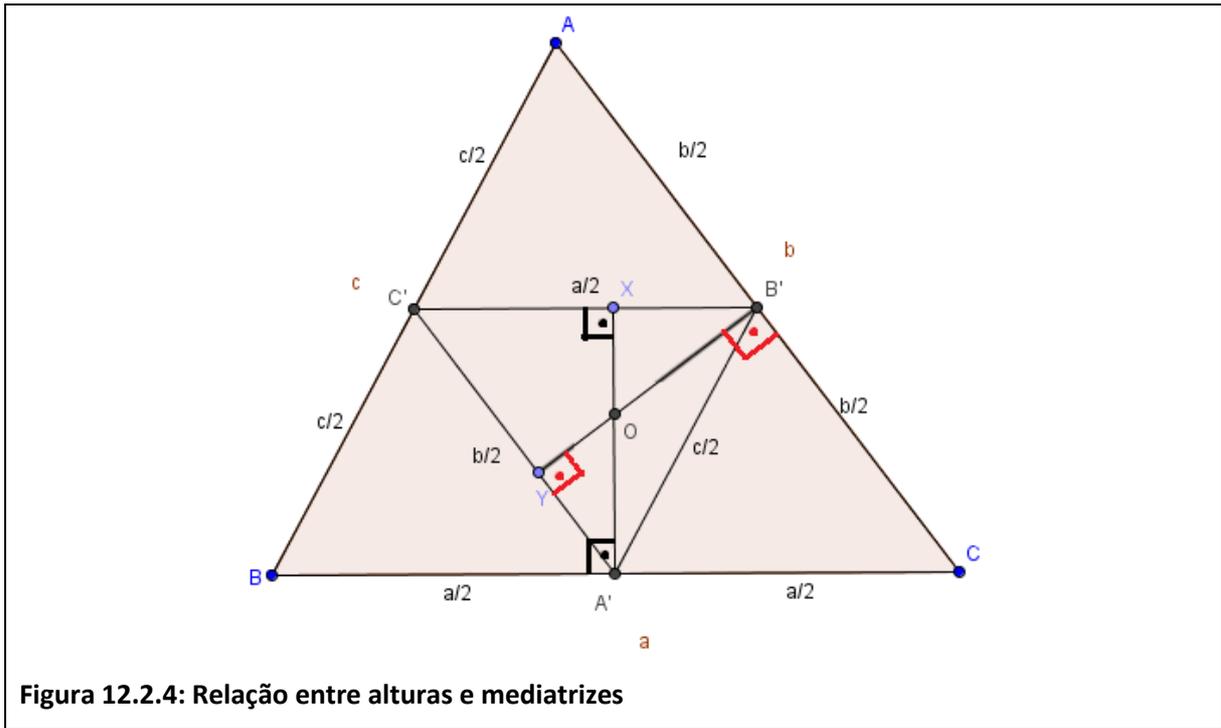


Figura 12.2.3: Relação entre alturas e mediatrizes

Analogamente a perpendicular traçada através de B' e C' que encontra $A'B' // AB$ no ponto Z é ao mesmo tempo mediatriz do triângulo ABC também sendo altura do triângulo medial $A'B'C'$, ver Figura 12.2.4.

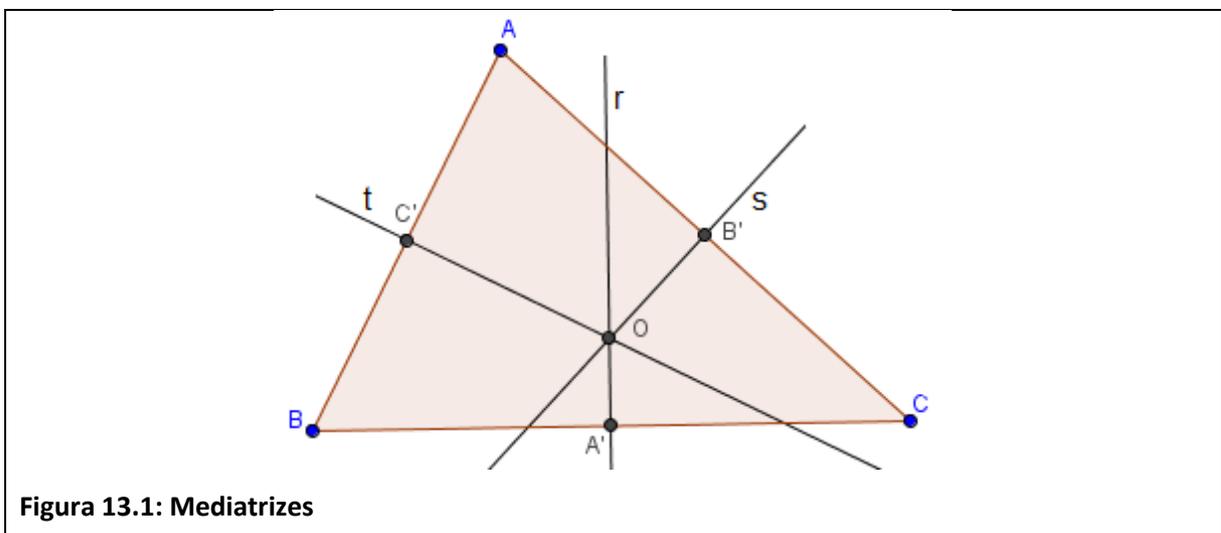


15. MEDIATRIZES

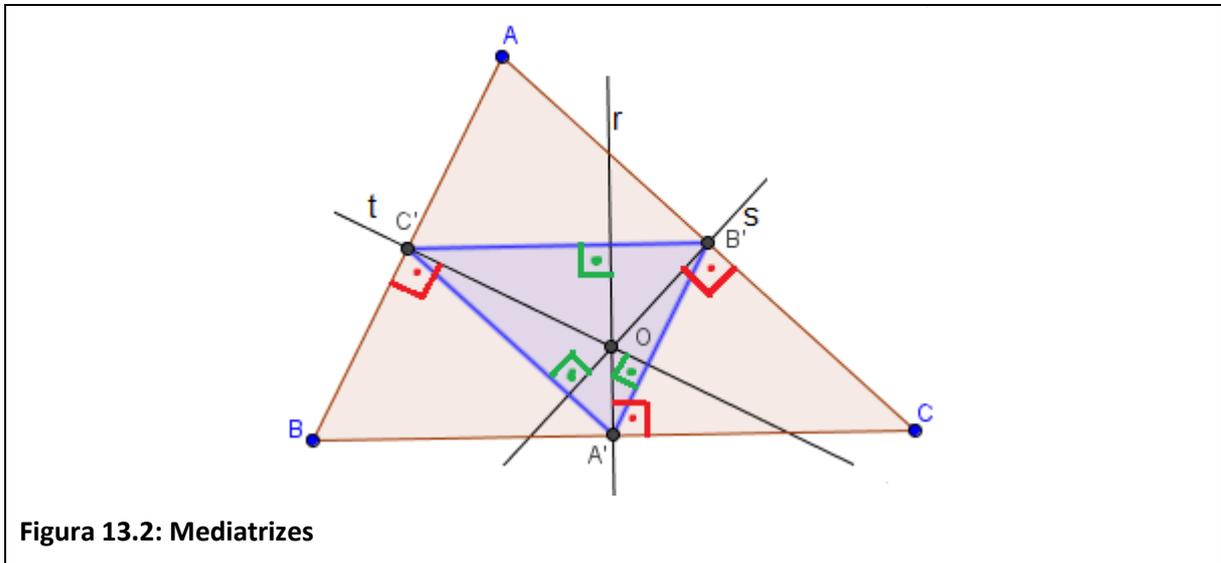
As metriatrizes de um triângulo são concorrentes num mesmo ponto

Teorema 13 As três mediatrizes de um triângulo são concorrentes em um mesmo ponto.

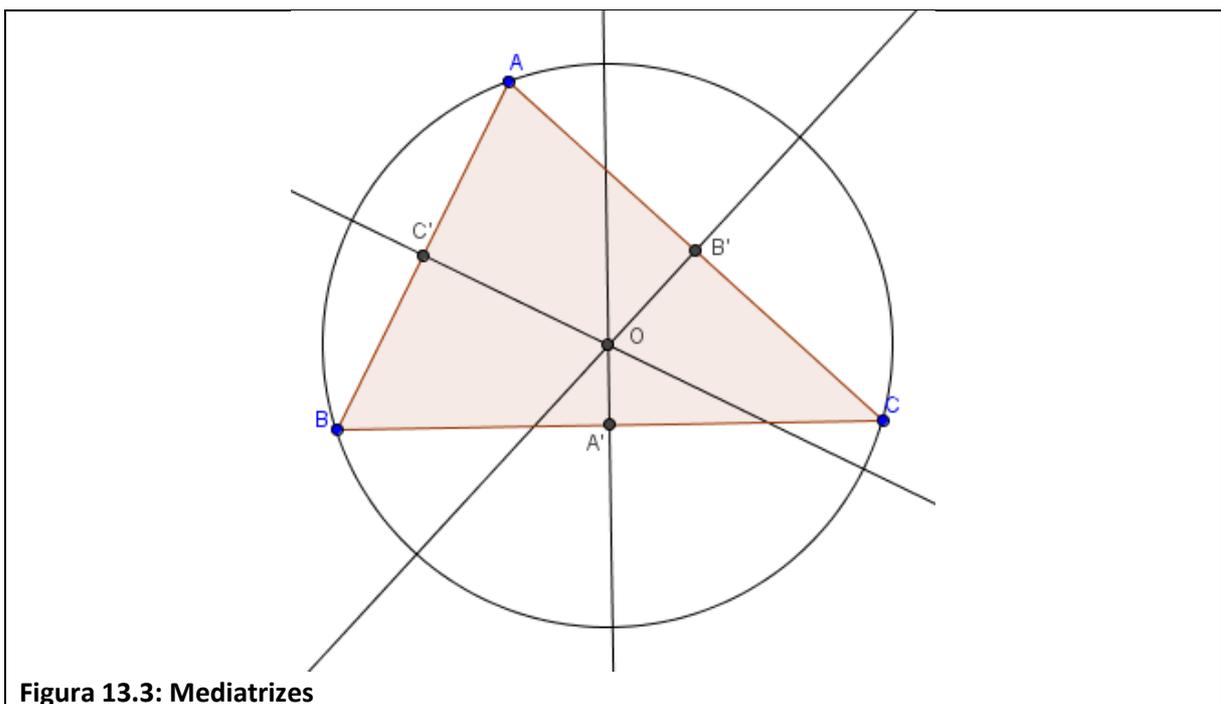
Demonstração: Na figura temos três mediatrizes r, s e t concorrentes entre si no ponto O interior ao triângulo, portanto não podemos usar o teorema de Ceva, ver Figura 13.1.



Pelo teorema 12, este ponto é o ortocentro do triângulo medial $A'B'C'$, ver Figura 13.2.



O encontro das mediatrizes de um triângulo é denominado circuncentro. A mediatriz de um segmento AB é o lugar geométrico dos pontos do plano que equidistam de A e de B . Como as mediatrizes de encontram no circuncentro, ele é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo, ver Figura 13.3.



CAPÍTULO 2

QUADRILÁTEROS ESPECIAIS

Neste capítulo iremos apresentar os teoremas de Varignon e Brahmagupta. Com este objetivo, vamos relembrar alguns conceitos.

O quadrilátero $ABCD$ que tem os lados opostos paralelos é denominado de paralelogramo, isto é, $AB//CD$ e $BC//AD$. Podemos definir um paralelogramo de outras formas equivalentes, isto é, se uma das características abaixo for atendida o quadrilátero será um paralelogramo:

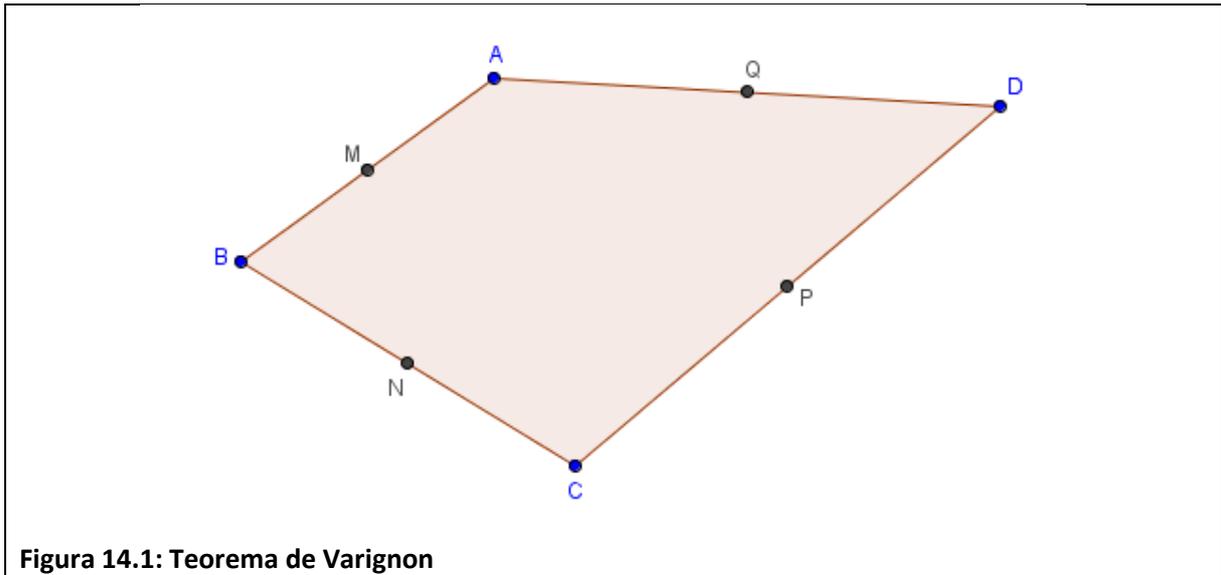
- Os lados opostos são congruentes;
- Os ângulos opostos são congruentes;
- Tem um par de lados opostos paralelos e congruentes;
- As diagonais se cruzam no ponto médio.

1. TEOREMA DE VARIGNON

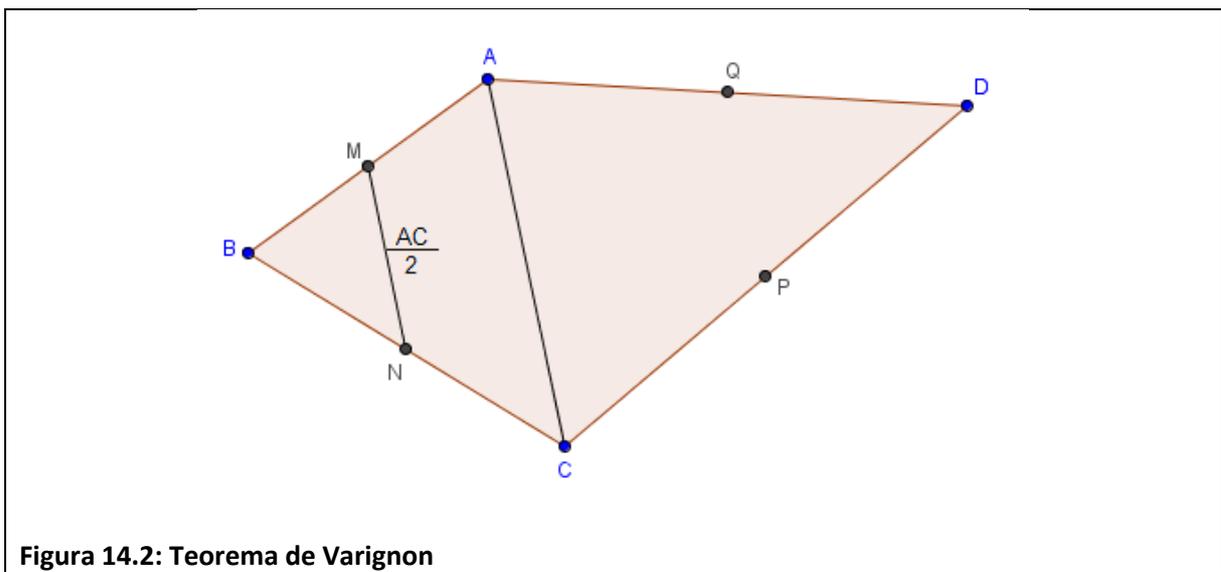
Teorema de Varignon

Teorema 14 *Dado um quadrilátero $ABCD$, os pontos médios M, N, P, Q dos lados AB, BC, CD, DA , respectivamente formam um paralelogramo.*

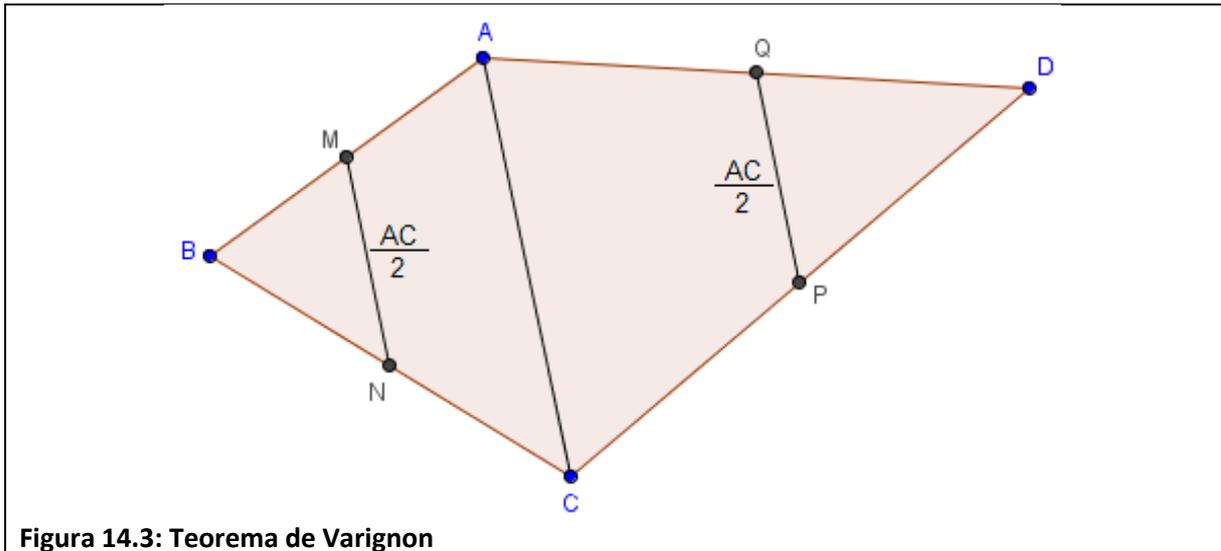
Demonstração: Considere o quadrilátero $ABCD$ e os pontos médios M, N, P e Q dos lados AB, BC, CD e DA , respectivamente, ver Figura 14.1.



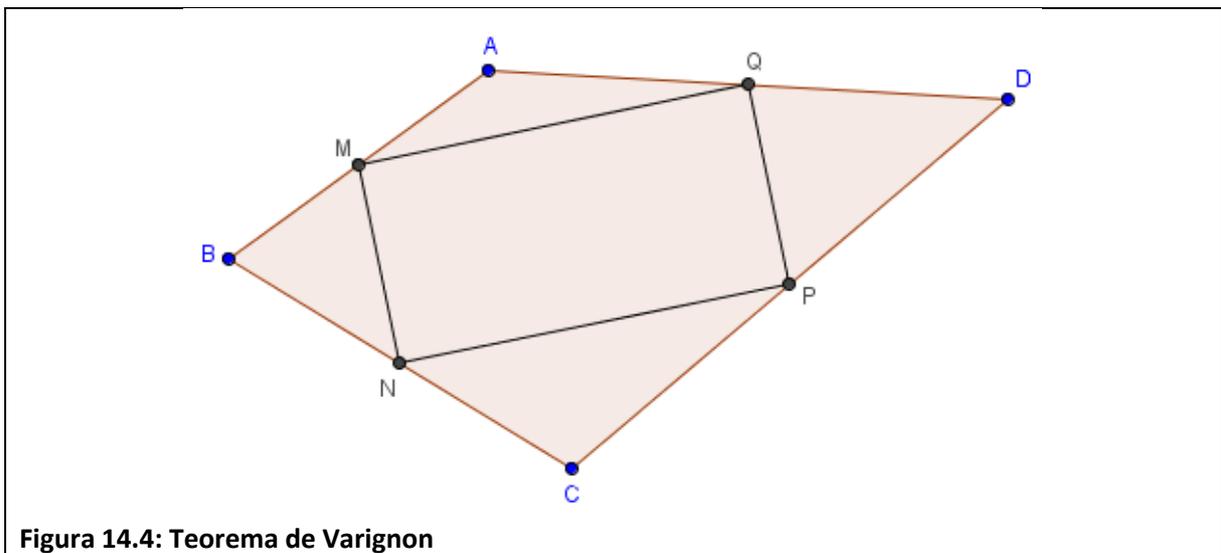
Pelo teorema 12 podemos perceber que no triângulo ABC temos $MN // AC$ e $MN = \frac{AC}{2}$, ver Figura 14.2.



De maneira análoga podemos perceber que no triângulo ADC temos $QP // AC$ e $PQ = \frac{AC}{2}$, ver Figura 14.3.



Assim, temos $MN \parallel AC$ e $PQ \parallel MN$, portanto $MN \parallel PQ$ ainda $MN = \frac{AC}{2}$ e $PQ = \frac{AC}{2}$, logo, $MN = PQ$, isto é, $MNPQ$ segundo nossa definição é um paralelogramo, ver Figura 14.4.



2. TEOREMA DE VARIGNON PERÍMETRO

Teorema de Varignon para perímetro

Colorário 15 *Se um paralelogramo $MNPQ$ é obtido dos pontos médios M, N, P, Q de um quadrilátero $ABCD$, então este paralelogramo tem perímetro igual à soma das diagonais do quadrilátero.*

Demonstração: Pelo teorema 14 temos que

$$PQ = \frac{AC}{2}, \quad MN = \frac{AC}{2}.$$

Portanto,

$$PQ + MN = AC.$$

De maneira análoga

$$MQ = \frac{BD}{2}, \quad NP = \frac{BD}{2}.$$

Daí,

$$MQ + NP = BD.$$

Concluimos então que

$$MQ + NP + PQ + MN = BD + AC.$$

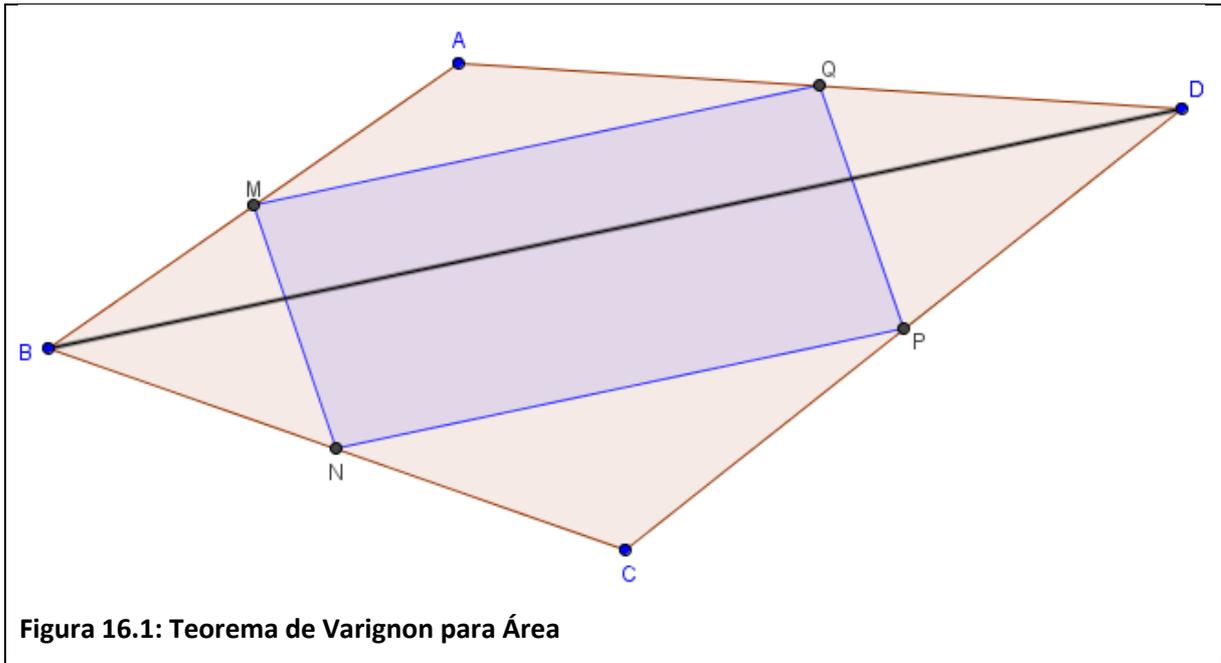


3. TEOREMA DE VARIGNON ÁREA

Teorema de Varignon para área

Colorário 16 *Se um paralelogramo $MNPQ$ é obtido dos pontos médios M, N, P, Q de um quadrilátero $ABCD$, então este paralelogramo tem área igual a metade da área do quadrilátero.*

Demonstração: Vamos considerar nosso quadrilátero $ABCD$ e o quadrilátero medial sendo $MNPQ$ cortado pela diagonal BD , ver Figura 16.1.



Podemos escrever a área do paralelogramo ($MNPQ$) como sendo

$$(MNPQ) = (ABCD) - (MNB) - (QPD) - (NPC) - (MQA)$$

$$(MNPQ) = (ABCD) - \frac{1}{4}(ACB) - \frac{1}{4}(ACD) - \frac{1}{4}(BDC) - \frac{1}{4}(BDA)$$

$$(MNPQ) = (ABCD) - \frac{1}{4}(ABCD) - \frac{1}{4}(ABCD)$$

$$(MNPQ) = \frac{1}{2}(ABCD)$$



4. TEOREMA DE PITÁGORAS

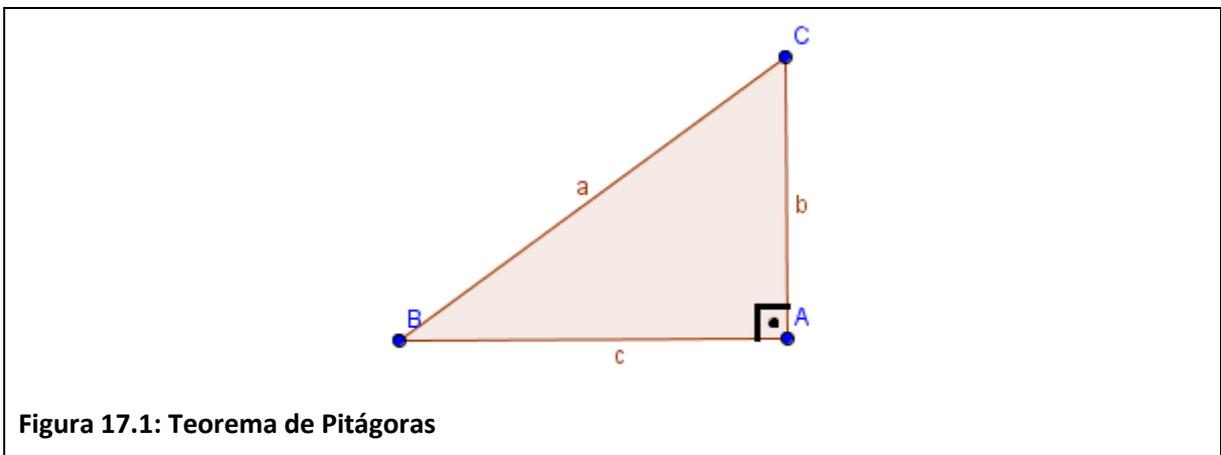
Para os próximos resultados necessitaremos de alguns conceitos que escreveremos a seguir, nós iremos assumi-los sem demonstração.

Teorema de Pitágoras

Teorema 17 Se um triângulo retângulo ABC reto em A , possui hipotenusa medindo a e catetos medindo b e c então

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Reciprocamente, se um triângulo possui lados medindo a , b e c e o quadrado do maior lado é a soma dos quadrados dos outros dois então o triângulo é retângulo de hipotenusa sendo o maior lado, ver Figura 17.1.



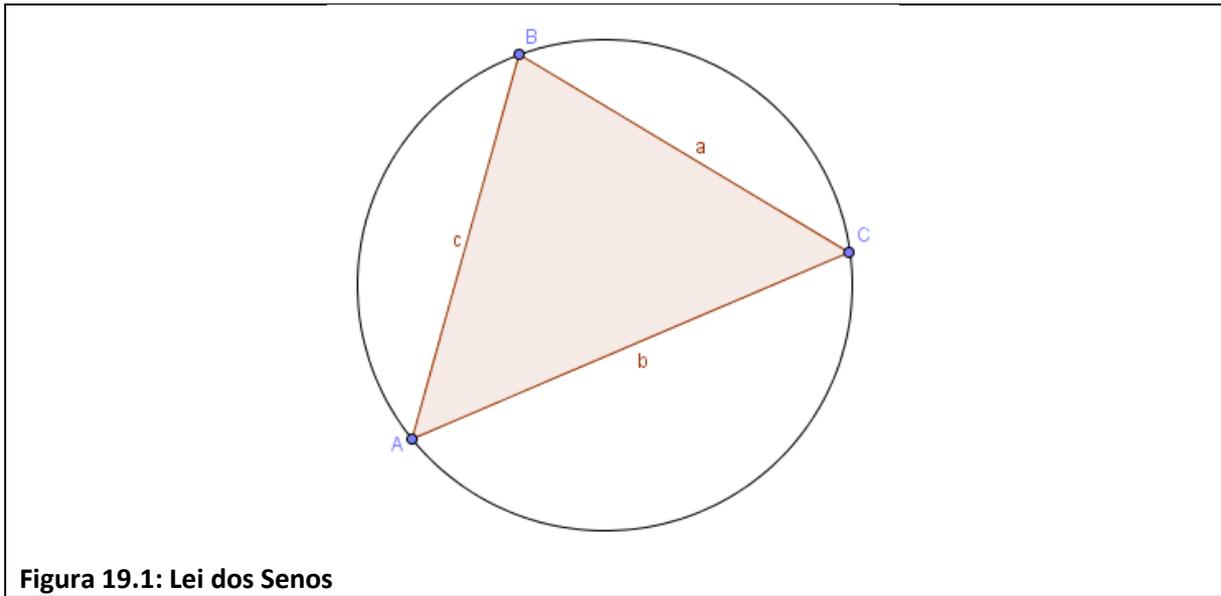
5. TEOREMA DOS SENOS

Teorema dos senos

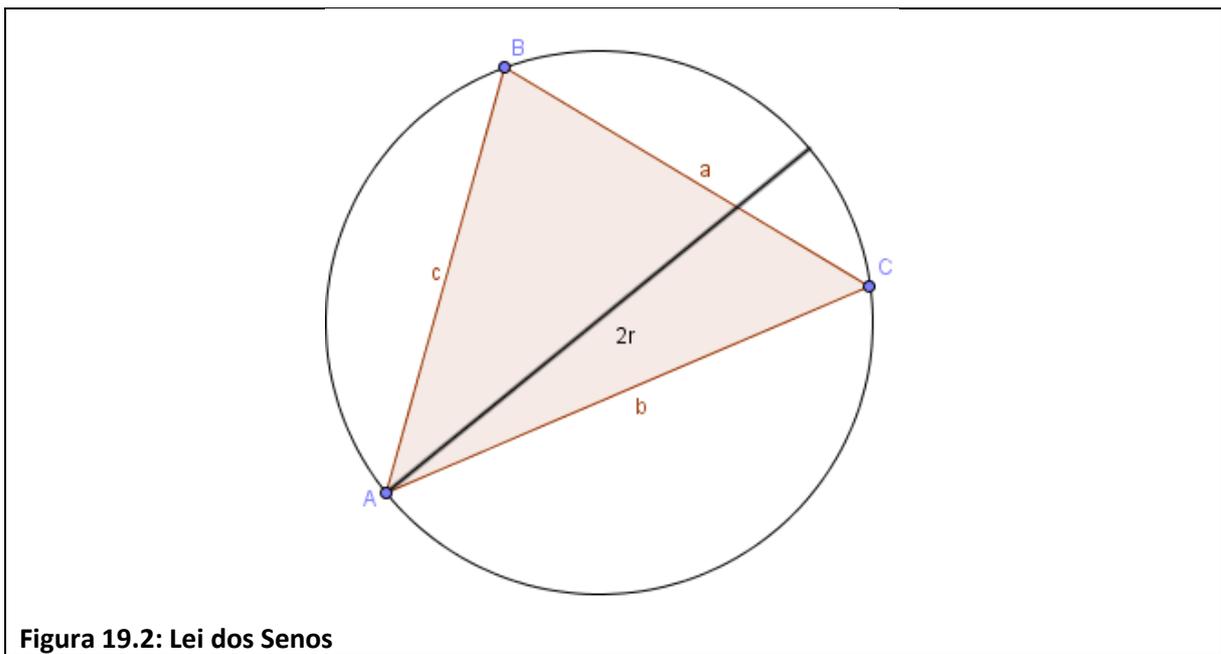
Teorema 19 Se um triângulo ABC de lados medindo a , b e c é inscrito em uma circunferência de raio r então

$$\frac{a}{\text{sen}A} = \frac{b}{\text{sen}B} = \frac{c}{\text{sen}C} = 2r.$$

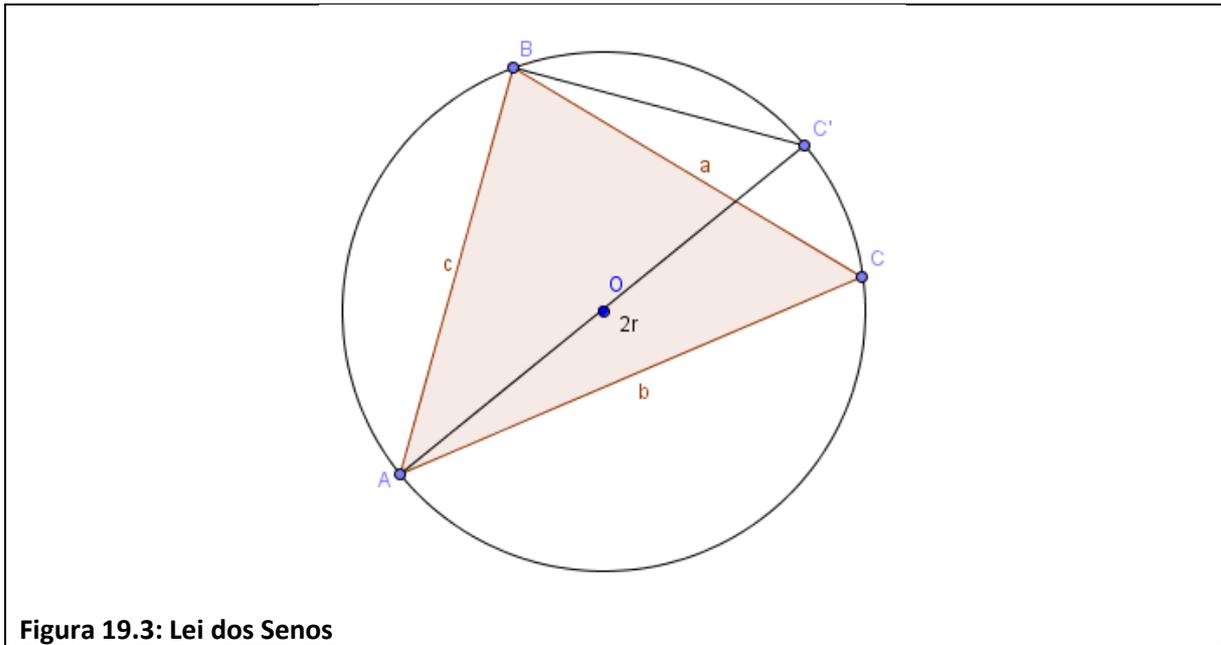
Demonstração: Consideremos uma circunferência e um triângulo nela inscrito, ver Figura 19.1.



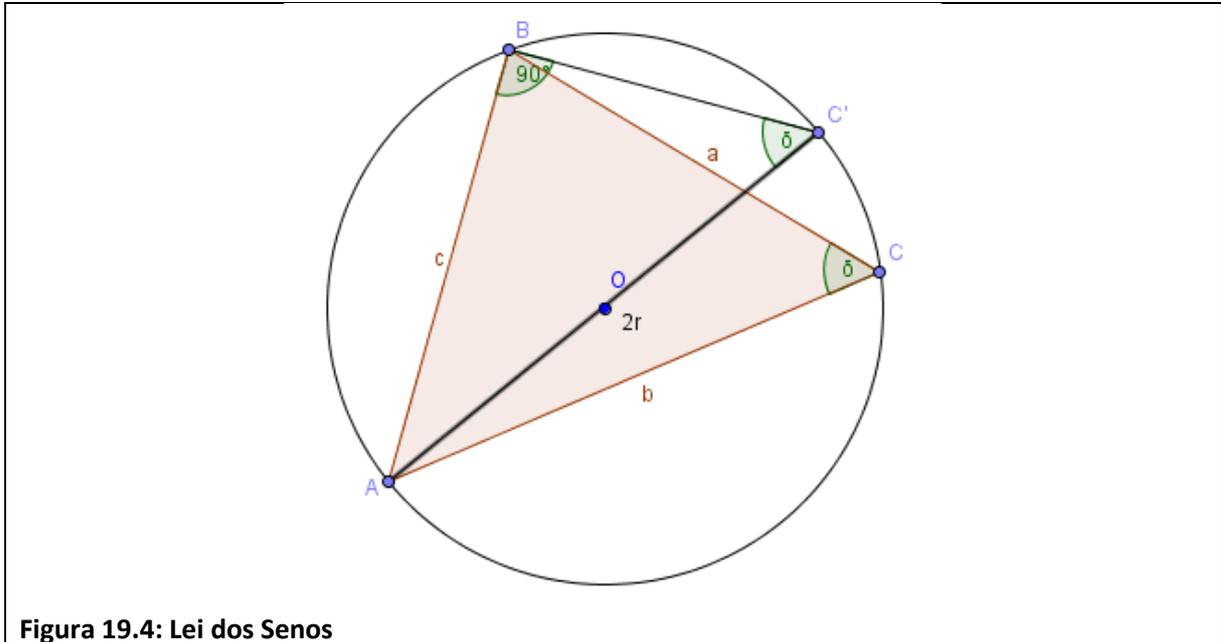
Escolhemos um dos vértices e traçaremos um diâmetro, ver Figura 19.2.



Vamos chamar o ponto que este diâmetro tem em comum com a circunferência de C' . Então consideremos o segmento BC' , ver Figura 19.3.



Podemos então perceber pelo teorema 8 que $\widehat{ABC'}$ é um ângulo inscrito que possui um ângulo central raso, daí, segue que $\widehat{ABC'}$ é reto. Os ângulos $\widehat{BC'A}$ e \widehat{BCA} são ângulos inscritos do mesmo arco \widehat{AB} , portanto, congruentes, ver Figura 19.4.



Podemos então destacar o triângulo ABC' retângulo, ver Figura 19.5.

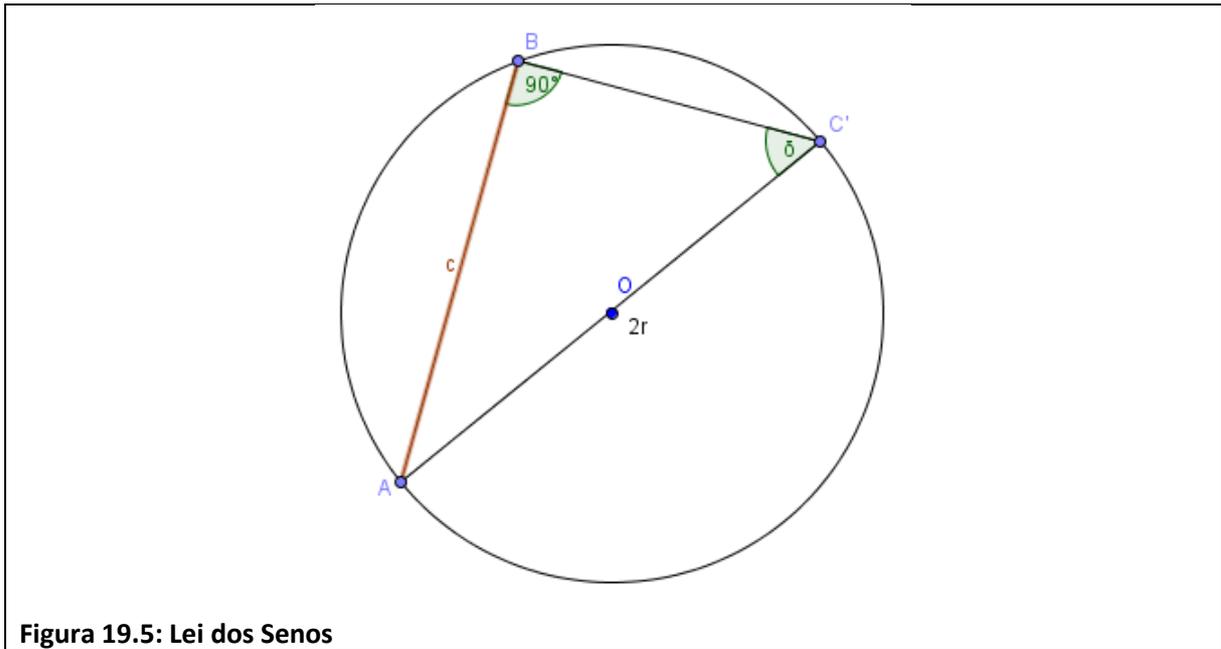


Figura 19.5: Lei dos Senos

Portanto podemos verificar que:

$$\begin{aligned} \text{sen}C &= \frac{c}{2r}, \\ 2r &= \frac{c}{\text{sen}C}. \end{aligned}$$

De maneira análoga podemos escrever:

$$\begin{aligned} \text{sen}A &= \frac{a}{2r}, \\ 2r &= \frac{a}{\text{sen}A}. \end{aligned}$$

E também,

$$\begin{aligned} \text{sen}B &= \frac{b}{2r}, \\ 2r &= \frac{b}{\text{sen}B}. \end{aligned}$$

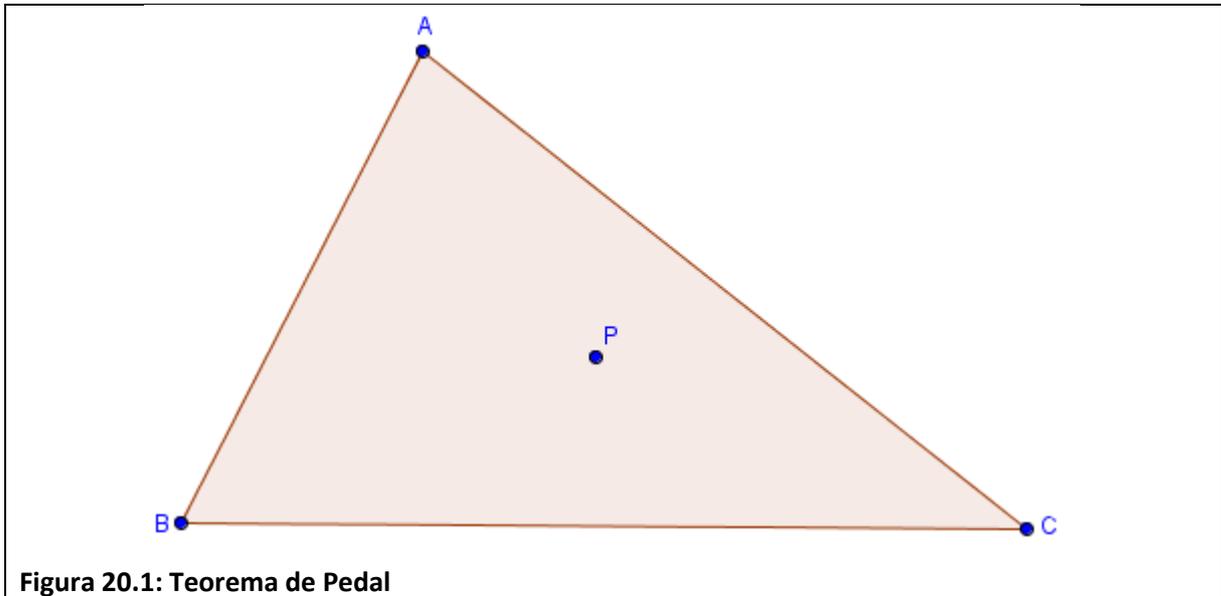
Portanto,

$$\frac{a}{\text{sen}A} = \frac{b}{\text{sen}B} = \frac{c}{\text{sen}C} = 2r.$$

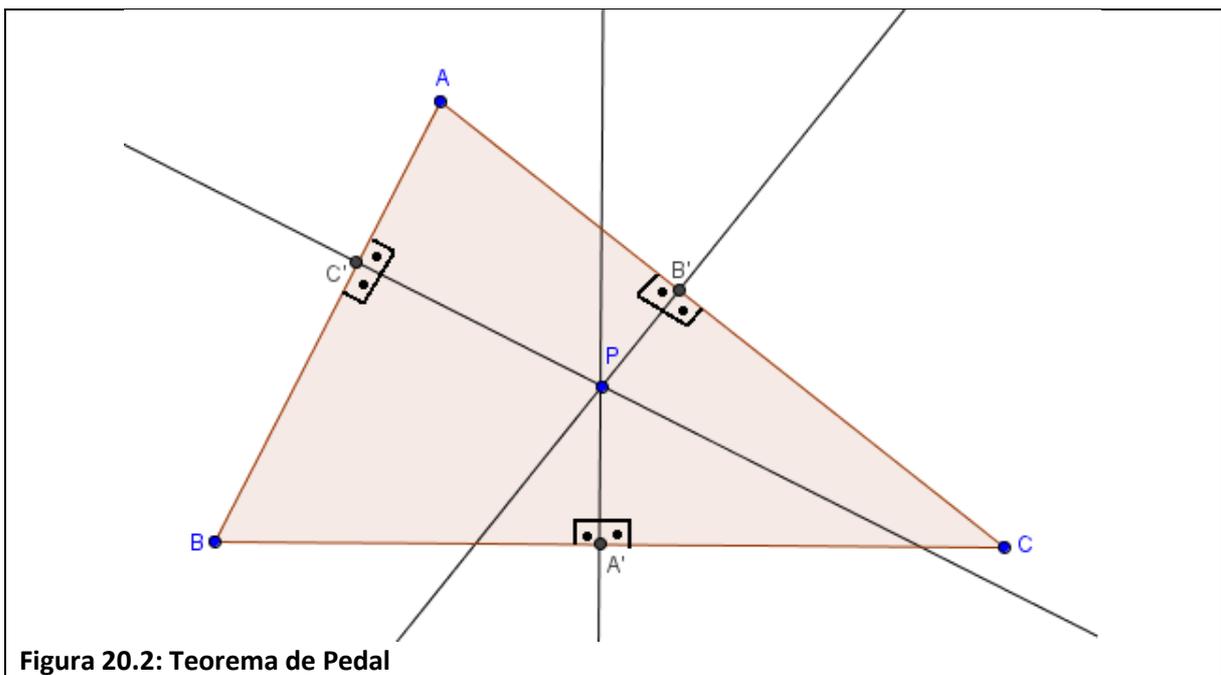


6. TEOREMA DE PEDAL

Dado um triângulo ABC escolhemos um ponto P na parte interna deste triângulo, ver Figura 20.1.



Agora traçamos as perpendiculares PA' , PB' e PC' aos lados BC , AC e AB respectivamente, ver Figura 20.2.



O triângulo $A'B'C'$ é chamado triângulo de pedal do triângulo ABC pelo ponto de pedal P , ver Figura 20.3.

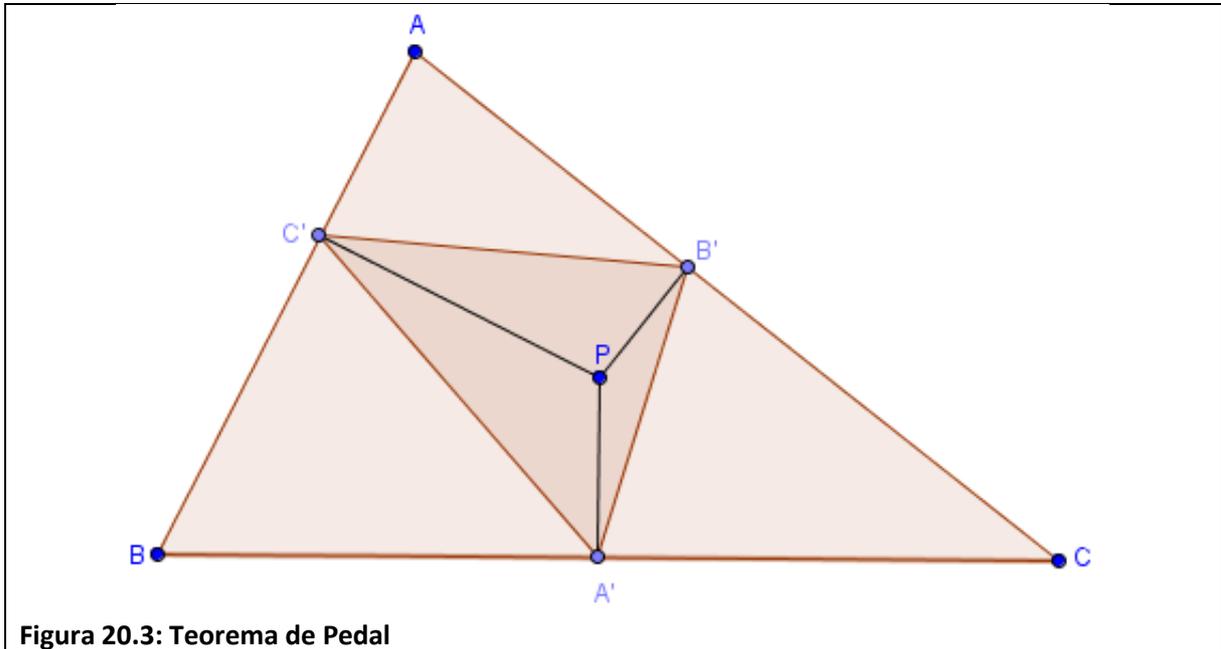


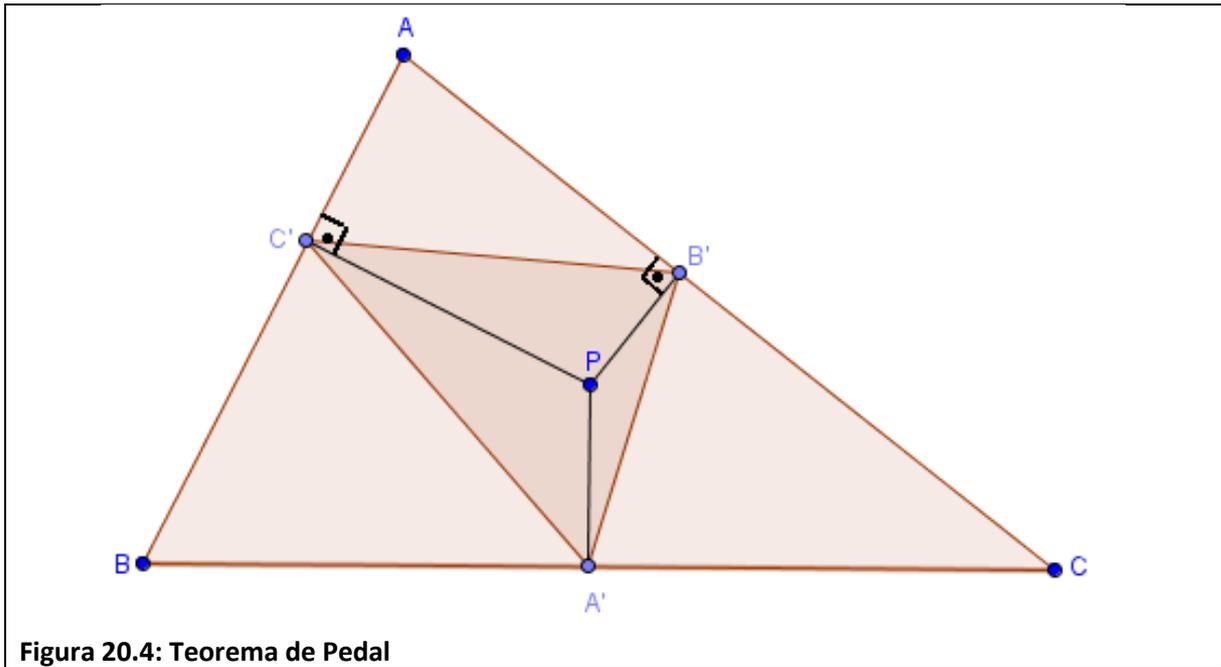
Figura 20.3: Teorema de Pedal

Teorema 20 Se a distância do ponto de pedal aos vértices do triângulo ABC inscrito em uma circunferência de raio R for x, y, z , então podemos afirmar que os lados do triângulo de pedal serão:

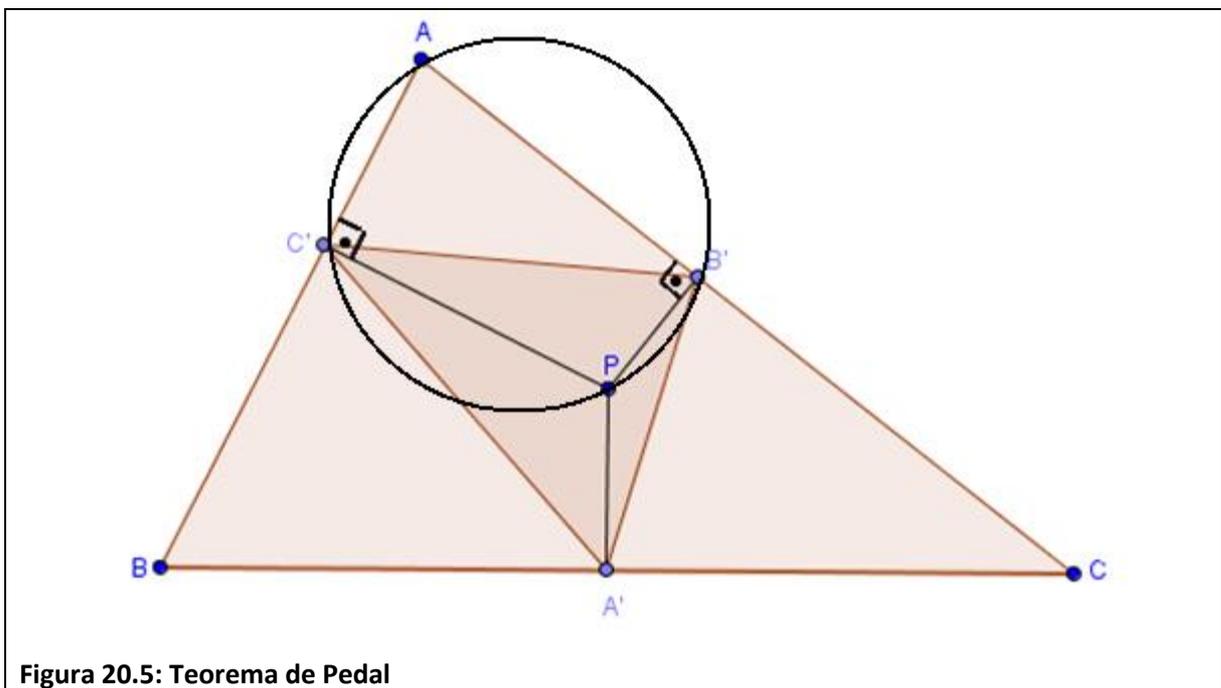
$$\frac{ax}{2R}, \quad \frac{by}{2R}, \quad \frac{cz}{2R}.$$

No caso de $x = y = z$ essa distância será o raio da circunferência circunscrita e o ponto pedal P será o circuncentro do triângulo ABC .

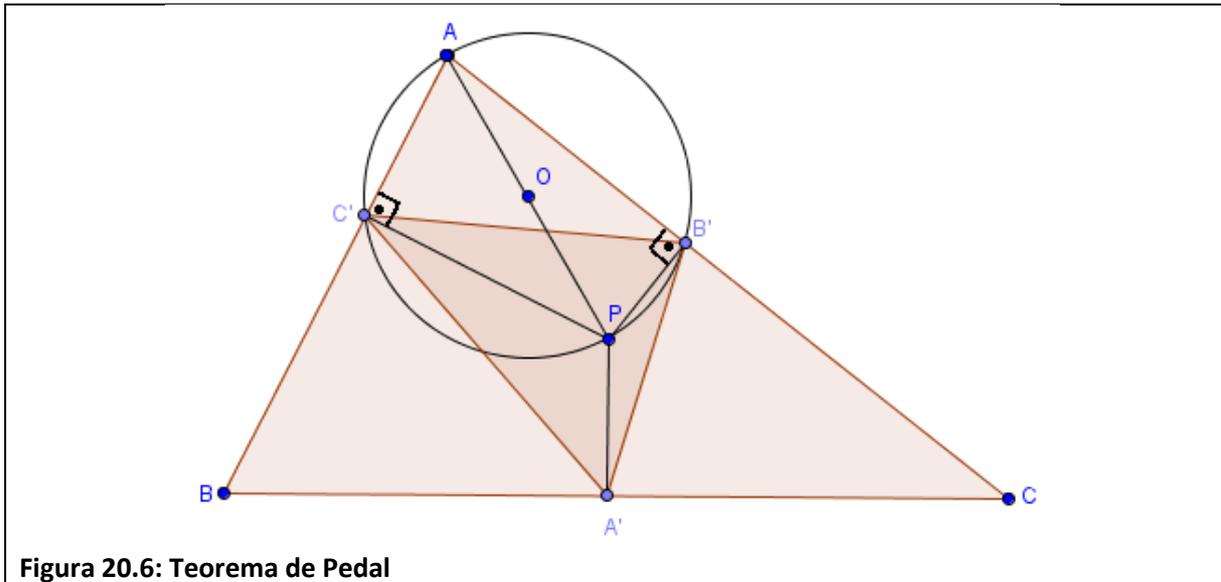
Demonstração: Na figura indicamos alguns elementos importantes que usaremos na nossa dedução. Como o ponto B' foi construído a partir de uma perpendicular temos $\widehat{PB'A}$ sendo reto o mesmo com $\widehat{PC'A}$, ver Figura 20.4.



Podemos concluir que o quadrilátero $AB'PC'$ pode ser inscrito em uma circunferência de centro O onde A, B', P e C' são pontos desta circunferência, ver Figura 20.5.



Como temos um quadrilátero $AB'PC'$ e ângulos opostos C' e B' replementares podemos dizer que o quadrilátero está inscrito em uma circunferência, ver Figura 20.6.

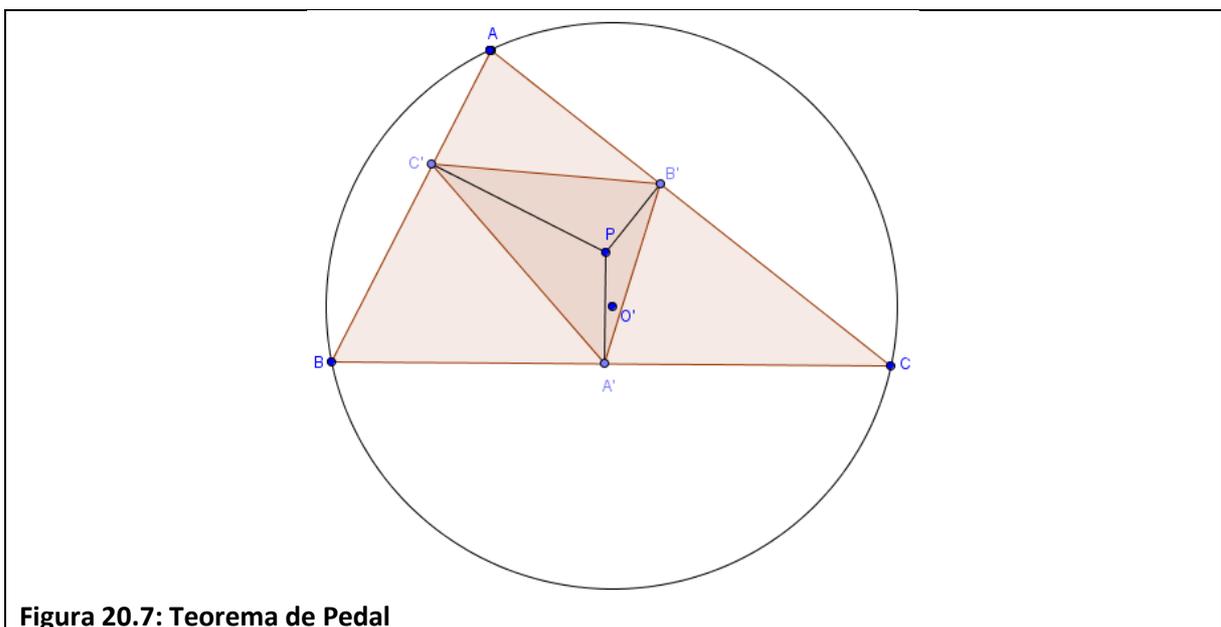


Portanto, podemos aplicar o teorema 19 no triângulo $AB'C'$, inscrito numa circunferência de centro O e raio OP e OA sendo assim $AP = 2r$.

$$\frac{B'C'}{\text{sen}A} = AP,$$

$$B'C' = AP \cdot \text{sen}A.$$

Daí, podemos aplicar o teorema 19 no triângulo ABC , inscrito numa circunferência de centro O' e raio R , ver Figura 10.7.



$$\frac{a}{\operatorname{sen}A} = 2R.$$

Isolando $\operatorname{sen}A$ e igualando temos:

$$B'C' = a \frac{AP}{2R}.$$

Nomeando $AP = x$,

$$B'C' = a \frac{x}{2R}.$$

Do mesmo modo, nos outros vértices obtemos

$$C'A' = b \frac{BP}{2R}, \quad A'B' = c \frac{CP}{2R},$$

$$C'A' = b \frac{y}{2R}, \quad A'B' = c \frac{z}{2R}.$$



7. TEOREMA DOS COSSENOS

Lei dos Cossenos

Teorema 21 *Se um triângulo ABC de lados medindo a, b, c e ângulos medindo $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ então*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{A};$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \hat{B};$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \hat{C}.$$

Demonstração: Considere um triângulo ABC de lados medindo a, b, c , ver Figura 21.1.

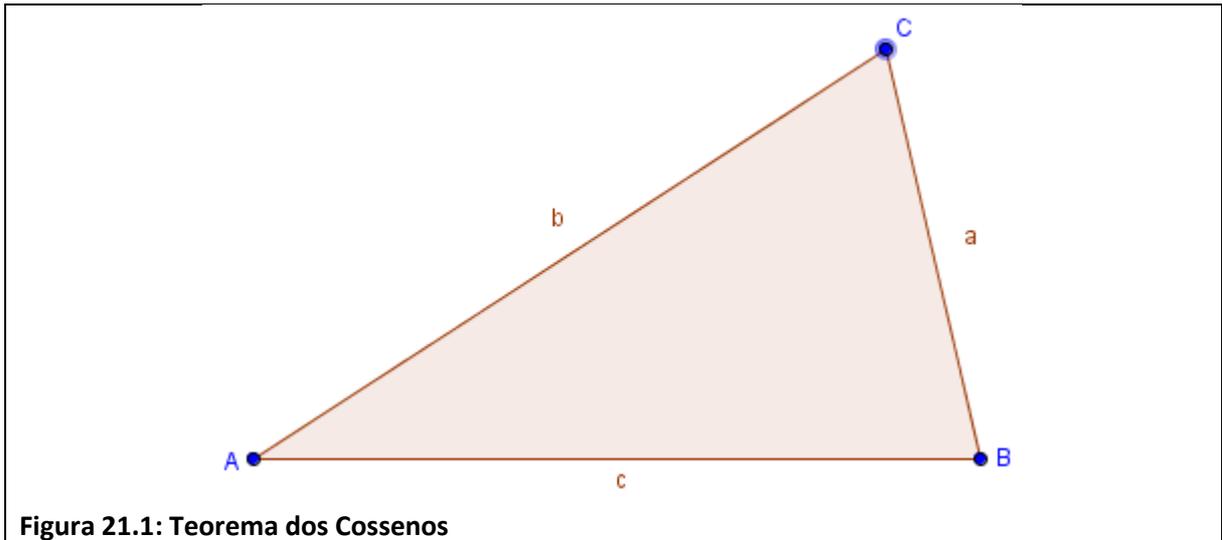


Figura 21.1: Teorema dos Cossenos

Traçamos a altura CC' relativa ao vértice C . Esta altura irá dividir o lado AB em duas partes: uma chamaremos de x e a outra de $c - x$, ver Figura 21.2.

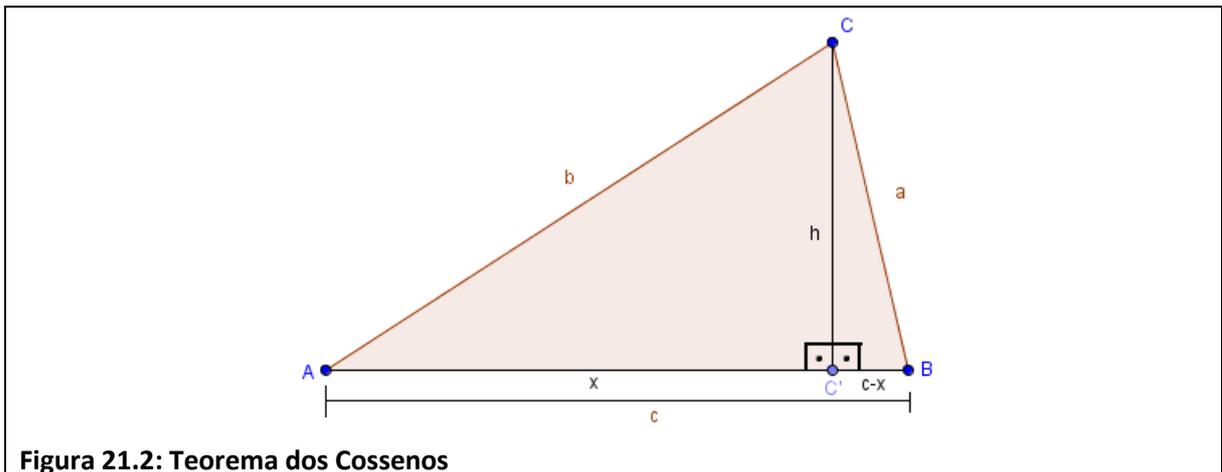


Figura 21.2: Teorema dos Cossenos

Aplicando o teorema 17 no triângulo ACC' temos,

$$b^2 = x^2 + h^2.$$

Fazendo o mesmo no triângulo BCC' ficamos com,

$$a^2 = (c - x)^2 + h^2.$$

Isolando h^2 na primeira equação e substituindo na segunda equação,

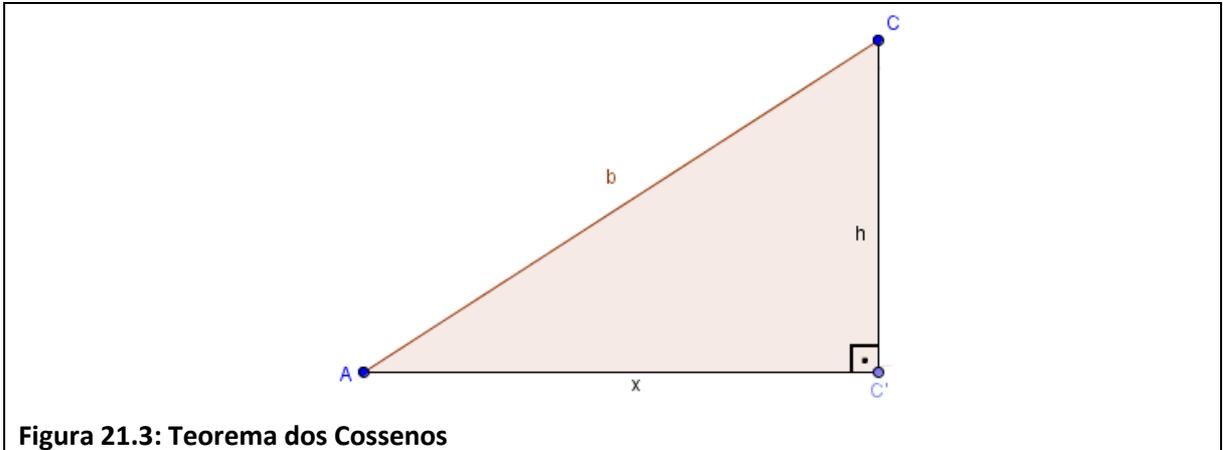
$$a^2 = (c - x)^2 + b^2 - x^2.$$

Desenvolvendo $(c - x)^2$ obtemos,

$$a^2 = c^2 - 2 \cdot c \cdot x + x^2 + b^2 - x^2.$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot c \cdot x.$$

Note que x pode ser escrito usando cosseno no triângulo ACC' , ver Figura 21.3.



$$\cos \hat{A} = \frac{x}{b},$$

$$b \cdot \cos \hat{A} = x.$$

Substituindo na nossa relação anterior temos,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{A}.$$

De maneira análoga escrevemos as outras relações,

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \hat{B},$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \hat{C}.$$



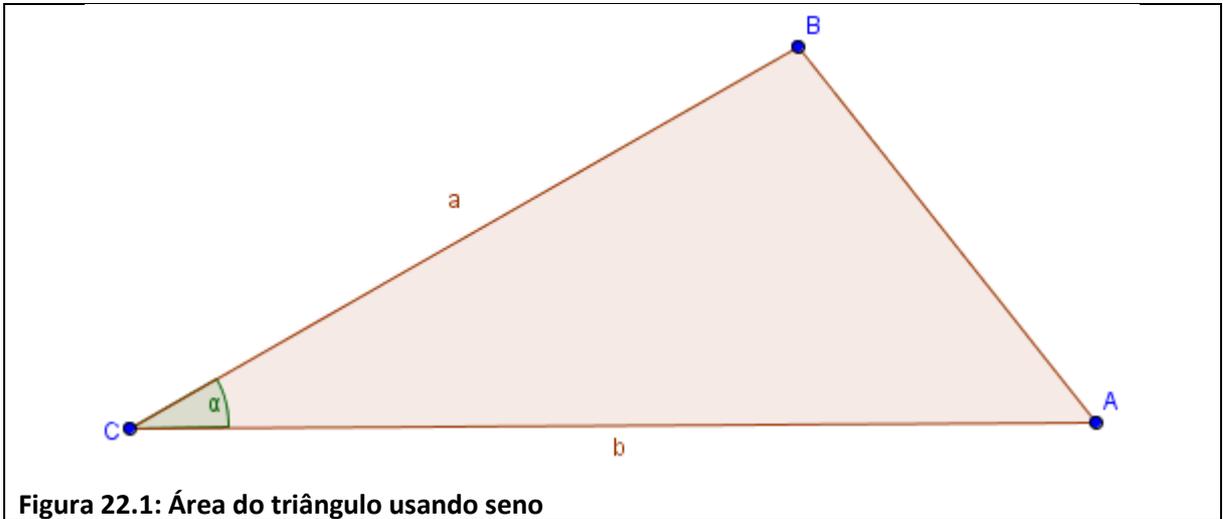
8. ÁREA DO TRIÂNGULO USANDO SENOS

Área do triângulo usando seno

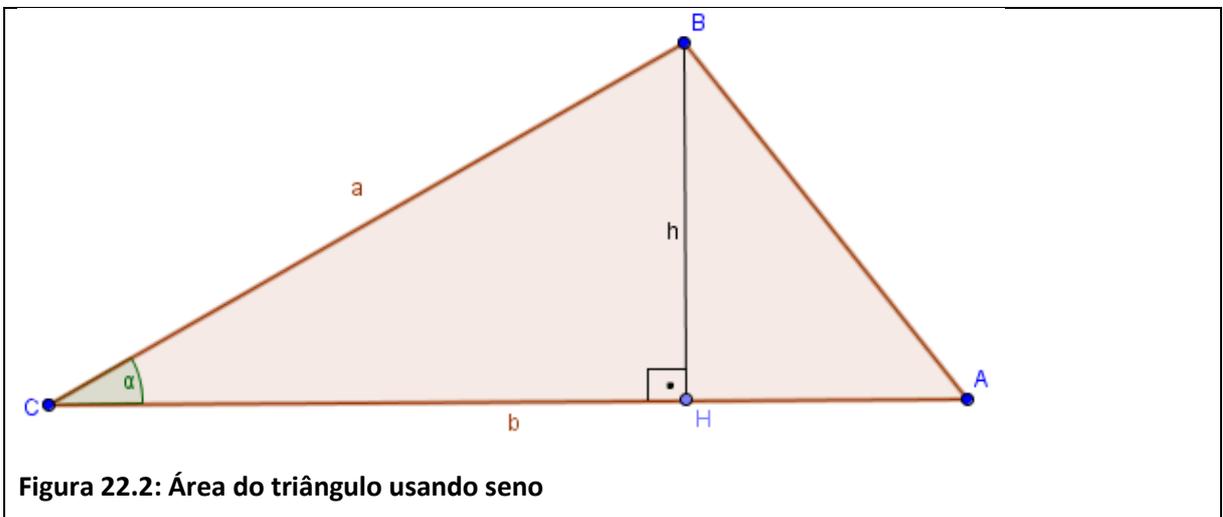
Teorema 22 *Se um triângulo possui dois lados medindo a e b e o ângulo compreendido por estes lados medindo α então sua área será*

$$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \text{sen} \alpha.$$

Demonstração: Considere um triângulo ABC com lados medindo a e b e o ângulo compreendido por estes lados medindo α , ver Figura 22.1.



Sabemos que a área de um triângulo pode ser calculada pela metade do produto da base pela altura, temos no nosso triângulo possuindo base b e a altura h que toca o lado AC no ponto H , ver Figura 22.2.



Podemos então escrever a altura h no triângulo retângulo CBH usando

$$\text{sen } \alpha = \frac{h}{a}$$

Isolando h temos

$$a \cdot \text{sen } \alpha = h.$$

Aplicando a fórmula da área do triângulo

$$A = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2},$$

$$A = \frac{a \cdot b \cdot \text{sen } \alpha}{2}.$$



9. ÁREA DO TRIÂNGULO POR HERON

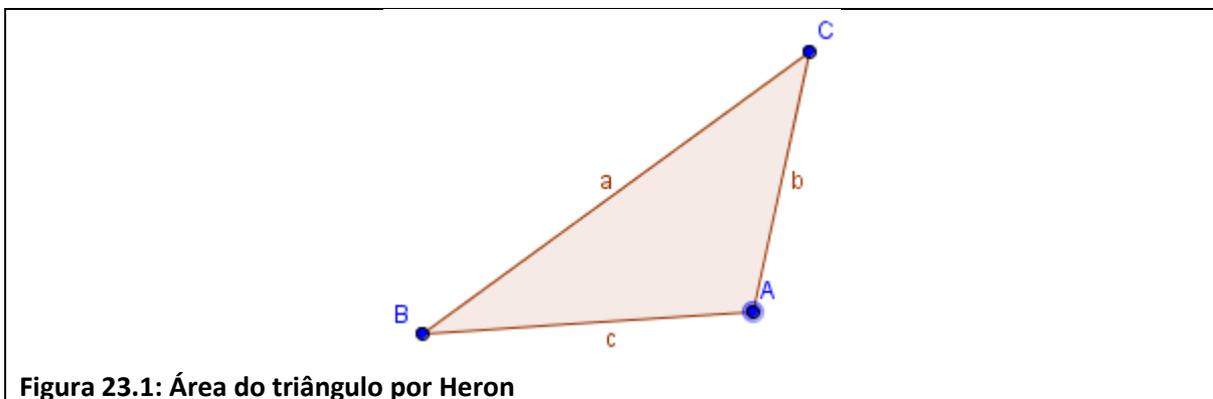
Denominamos o perímetro de um polígono como sendo a soma de todos seus lados e por consequência o semiperímetro de um polígono é a metade do perímetro do polígono em questão.

Heron de Alexandria, geômetra e engenheiro grego, é especialmente conhecido pela fórmula que leva seu nome e se aplica ao cálculo da área do triângulo.

Teorema de Heron

Teorema 23 *Se um triângulo, ABC possui lados medindo a, b, c e semiperímetro p, então sua área será expressa por*

$$A = \sqrt{p \cdot (p - a) \cdot (p - b) \cdot (p - c)}, \text{ ver Figura 23.1.}$$



10. ÁREA DO QUADRILÁTERO INSCRITÍVEL POR BRAHMAGUPTA

Para os próximos resultados usaremos as seguintes propriedades trigonométricas:

$$\operatorname{sen} A = \operatorname{sen}(180^\circ - A),$$

$$\cos A = -\cos(180^\circ - A),$$

$$\operatorname{sen}^2 A + \cos^2 A = 1.$$

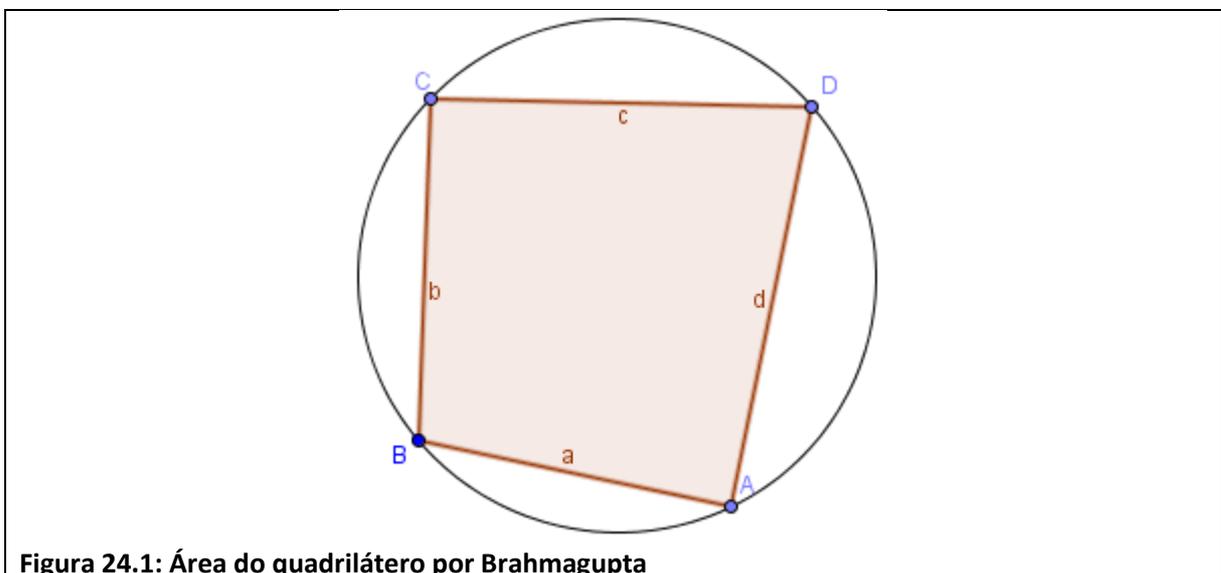
Brahmagupta, matemático e astrônomo indiano, possui várias contribuições à matemática. Iremos demonstrar um de seus mais famosos teoremas que generaliza o teorema de Heron para área de triângulos.

Teorema de Bhamagupta

Teorema 24 *Se um quadrilátero convexo, $ABCD$ possui lados medindo a, b, c, d e semiperímetro p , é inscritível a uma circunferência então sua área será expressa por*

$$A = \sqrt{(p - a) \cdot (p - b) \cdot (p - c) \cdot (p - d)}.$$

Demonstração: Considere o quadrilátero $ABCD$ de lados a, b, c, d inscrito em uma circunferência, ver Figura 24.1.



Usaremos o teorema 22 para calcular a área dos triângulos ABD e BCD , ver Figura 24.2.

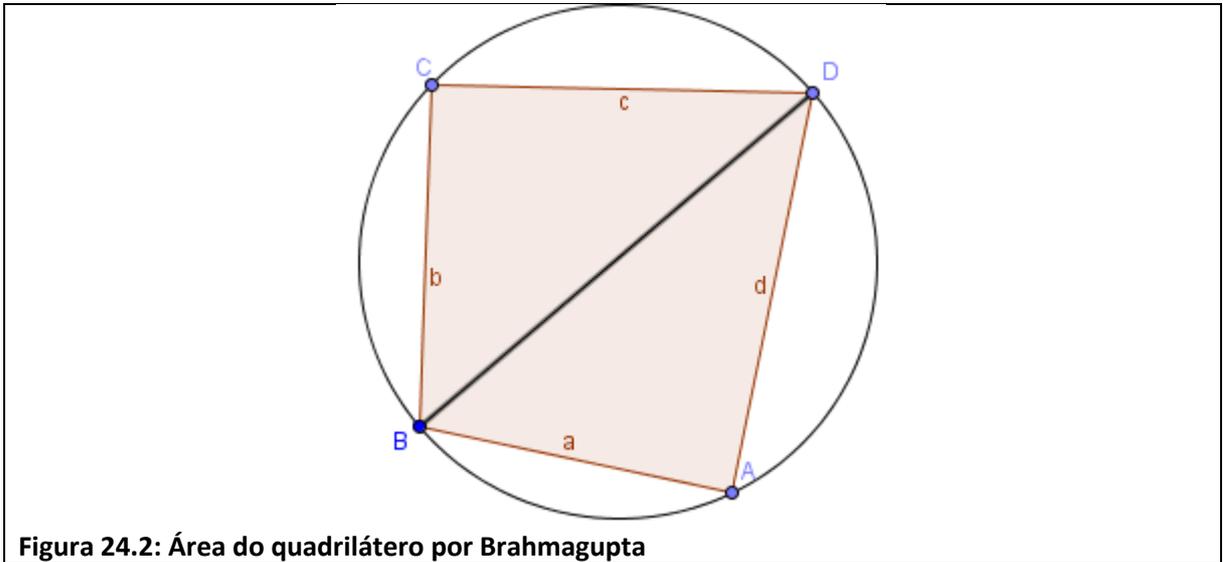


Figura 24.2: Área do quadrilátero por Brahmagupta

$$(ABD) = \frac{a \cdot d \cdot \text{sen } A}{2}, \quad (BCD) = \frac{b \cdot c \cdot \text{sen } C}{2}.$$

Portanto a área da nossa figura é

$$(ABCD) = \frac{a \cdot d \cdot \text{sen } A}{2} + \frac{b \cdot c \cdot \text{sen } C}{2}.$$

Pelo teorema 21 nos dois triângulos, iremos conseguir duas equações que em seguida serão igualadas,

$$BD^2 = a^2 + d^2 - 2 \cdot a \cdot d \cdot \cos A,$$

$$BD^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos C,$$

$$a^2 + d^2 - 2 \cdot a \cdot d \cdot \cos A = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos C.$$

Como nosso quadrilátero é inscrito, $(A + C) = 180^\circ$, logo $\text{sen } A = \text{sen } C$ e ainda $\cos A = -\cos C$, daí, segue

$$(ABCD) = \frac{(a \cdot d + b \cdot c) \text{sen } A}{2},$$

$$a^2 + d^2 - 2 \cdot a \cdot d \cdot \cos A = b^2 + c^2 + 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos A.$$

Isolando $\text{sen } A$ na primeira expressão e isolando $\cos A$ na segunda expressão temos

$$(ABCD) = \frac{(a \cdot d + b \cdot c) \text{sen } A}{2}.$$

$$2.(ABCD) = (a.d + b.c)\text{sen } A;$$

$$\frac{2.(ABCD)}{(a.d + b.c)} = \text{sen } A.$$

E

$$a^2 + d^2 - 2.a.d.\cos A = b^2 + c^2 + 2.b.c.\cos A;$$

$$a^2 + d^2 - b^2 - c^2 = 2.a.d.\cos A + 2.b.c.\cos A;$$

$$a^2 + d^2 - b^2 - c^2 = (2.a.d + 2.b.c)\cos A;$$

$$\frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2.(a.d + b.c)} = \text{cos } A.$$

Aplicando a relação fundamental da trigonometria temos

$$\text{sen}^2 A + \text{cos}^2 A = 1$$

$$\left(\frac{2.(ABCD)}{(a.d + b.c)}\right)^2 + \left(\frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2.(a.d + b.c)}\right)^2 = 1.$$

Nosso objetivo é isolar $(ABCD)$ então temos

$$\frac{4.(ABCD)^2}{(a.d + b.c)^2} + \frac{(a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2}{4.(a.d + b.c)^2} = 1.$$

Multiplicando ambos os membros por 4 temos

$$\frac{16.(ABCD)^2}{(a.d + b.c)^2} + \frac{(a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2}{(a.d + b.c)^2} = 4.$$

Multiplicando ambos os membros por $(a.d + b.c)^2$ temos

$$16.(ABCD)^2 + (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2 = 4.(a.d + b.c)^2;$$

$$16.(ABCD)^2 = 4.(a.d + b.c)^2 - (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2;$$

$$(ABCD)^2 = \frac{4.(a.d + b.c)^2 - (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2}{16}.$$

Usando a diferença entre quadrados sendo o produto notável da soma pela diferença temos

$$(ABCD)^2 = \frac{(2.(a.d + b.c) - (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)).(2.(a.d + b.c) + (a^2 + d^2 - b^2 - c^2))}{16};$$

$$(ABCD)^2 = \frac{(2 \cdot a \cdot d + 2 \cdot b \cdot c - a^2 - d^2 + b^2 + c^2) \cdot (2 \cdot a \cdot d + 2 \cdot b \cdot c + a^2 + d^2 - b^2 - c^2)}{16}.$$

Organizando os produtos temos

$$(ABCD)^2 = \frac{((-a^2 + 2 \cdot a \cdot d - d^2) + (b^2 + 2 \cdot b \cdot c + c^2)) \cdot ((a^2 + 2 \cdot a \cdot d + d^2) + (-b^2 + 2 \cdot b \cdot c - c^2))}{16}.$$

Usando o produto notável, quadrado da soma, temos

$$(ABCD)^2 = \frac{(-(a-d)^2 + (b+c)^2) \cdot ((a+d)^2 - (b-c)^2)}{16};$$

$$(ABCD)^2 = \frac{((b+c)^2 - (a-d)^2) \cdot ((a+d)^2 - (b-c)^2)}{16}.$$

Usando a diferença entre quadrados sendo o produto notável da soma pela diferença temos

$$(ABCD)^2 = \frac{((b+c-(a-d)) \cdot (b+c+(a-d))) \cdot ((a+d-(b-c)) \cdot (a+d+(b-c)))}{16};$$

$$(ABCD)^2 = \frac{(b+c-a+d) \cdot (b+c+a-d) \cdot (a+d-b+c) \cdot (a+d+b-c)}{16}.$$

Agora em cada um dos parênteses teremos o perímetro do quadrilátero, no primeiro parênteses iremos somar e subtrair a , no segundo parênteses iremos somar e subtrair d , no terceiro parênteses iremos somar e subtrair b e no quarto parênteses iremos somar e subtrair c .

$$(ABCD)^2 = \frac{(b+c-a+d+a-a) \cdot (b+c+a-d+d-d) \cdot (a+d-b+c+b-b) \cdot (a+d+b-c+c-c)}{16};$$

$$(ABCD)^2 = \frac{(2p-2a) \cdot (2p-2d) \cdot (2p-2b) \cdot (2p-2c)}{16}.$$

Em evidência colocamos os fatores 2, daí

$$(ABCD)^2 = \frac{2 \cdot (p-a) \cdot 2 \cdot (p-d) \cdot 2 \cdot (p-b) \cdot 2 \cdot (p-c)}{16}.$$

Simplificando temos

$$(ABCD)^2 = (p-a) \cdot (p-d) \cdot (p-b) \cdot (p-c).$$

Logo, a área do quadrilátero é

$$(ABCD) = \sqrt{(p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c) \cdot (p-d)}.$$



CAPÍTULO 3

RETA DE EULER

Neste capítulo iremos apresentar a reta de Euler, teorema que me inspirou inicialmente a realizar este trabalho.

Reta de Euler

Teorema 25 *O ortocentro, baricentro e o circuncentro de qualquer triângulo são colineares. E o baricentro divide a distância do ortocentro ao circuncentro na razão de 2 para 1.*

Demonstração: Considere o triângulo medial $A'B'C'$ do triângulo ABC , ver Figura 25.1.

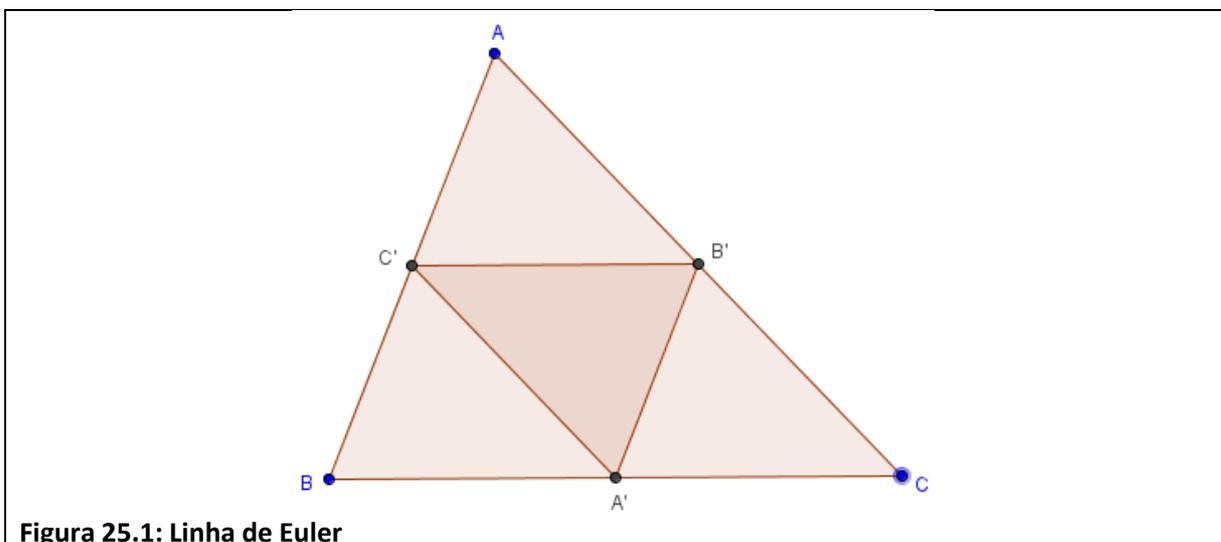


Figura 25.1: Linha de Euler

Agora inserimos no triângulo ABC duas medianas AA' e BB' se encontrando no baricentro G , ver Figura 25.2.

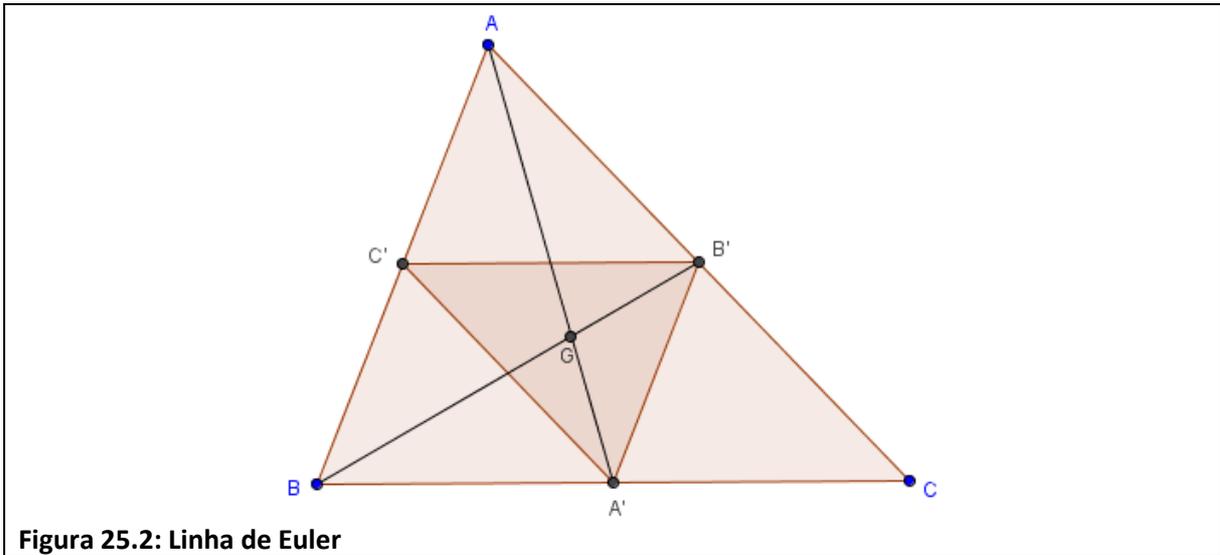


Figura 25.2: Linha de Euler

Agora inserimos no triângulo ABC duas alturas AD e BE se encontrando no ortocentro H , ver Figura 25.3.

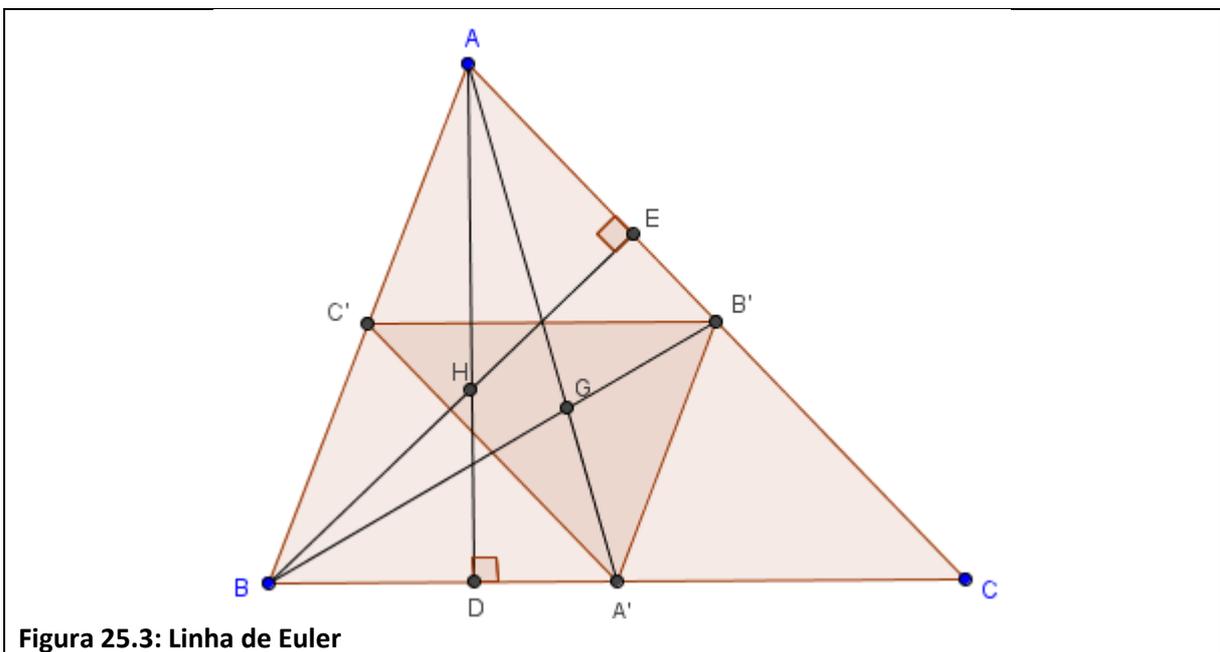
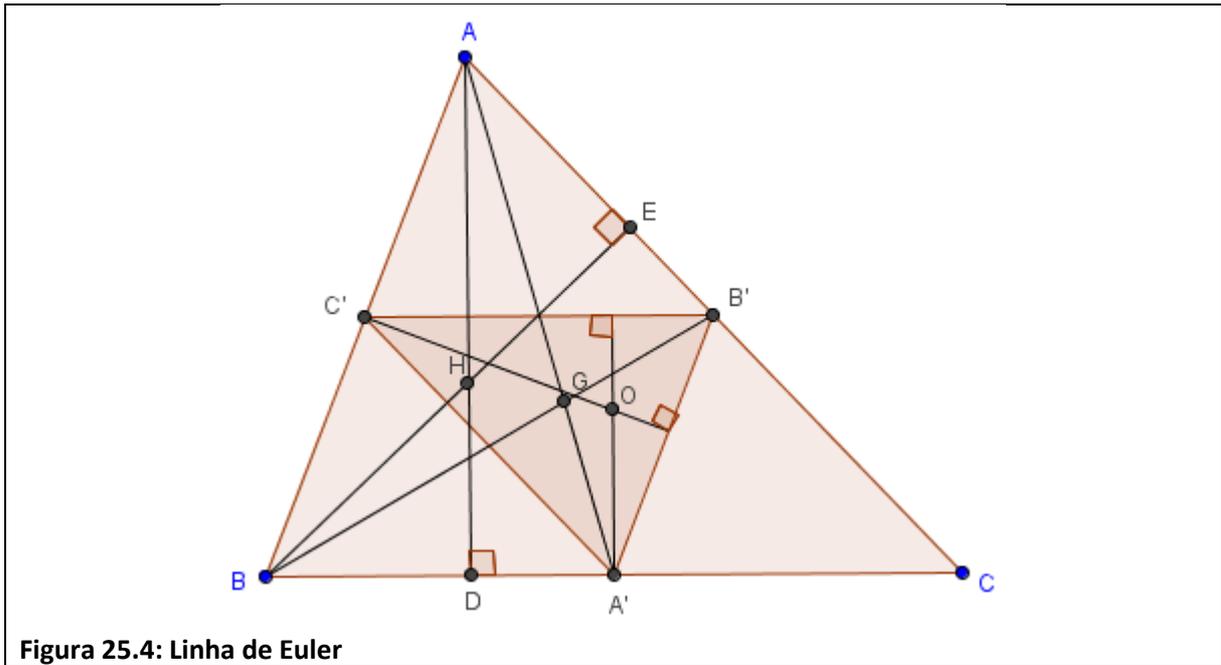
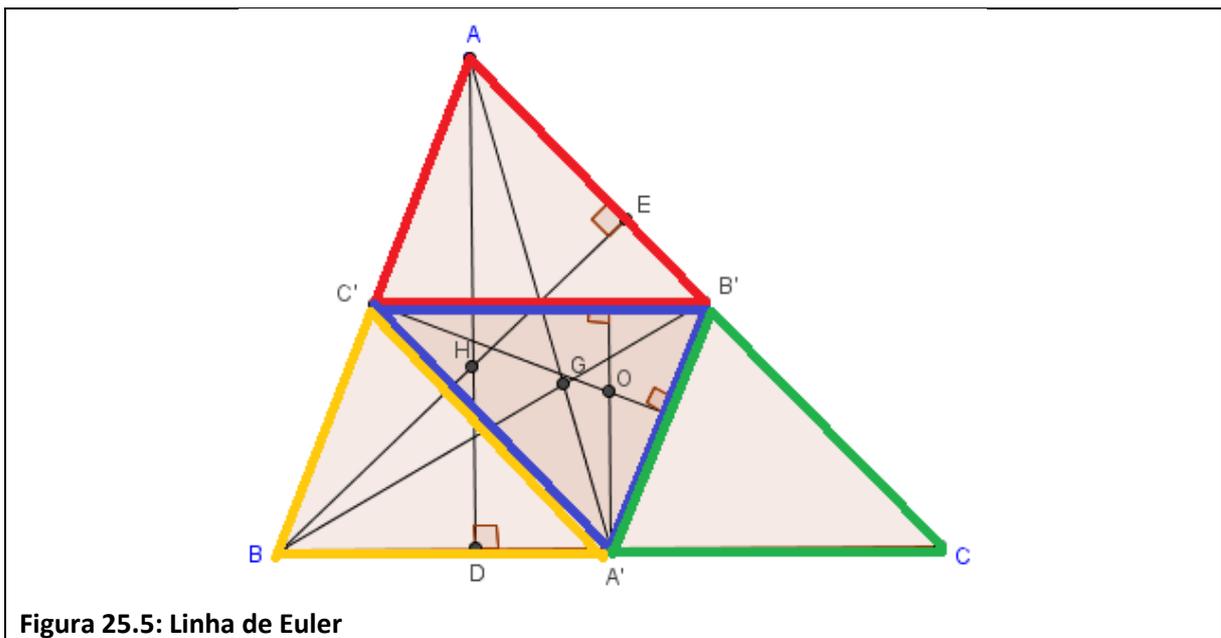


Figura 25.3: Linha de Euler

Agora inserimos no triângulo $A'B'C'$ duas alturas se encontrando no ortocentro O do triângulo $A'B'C'$, ver Figura 25.4.



Com base do teorema 12 fazemos as seguintes afirmações, no triângulo $A'B'C'$ temos lados paralelos aos lados dos triângulo ABC , então os triângulos são semelhantes na razão de 1 para 2. Podemos concluir então que $C'B' = \frac{1}{2}BC$, então a razão entre qualquer dos dois segmentos correspondentes, será 1 para 2. Na verdade os segmentos $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ divide o triângulo ABC em quatro triângulos congruentes, ver Figura 25.5.



Podemos notar que $AC'A'B'$ é um paralelogramo, afinal temos dois pares de lados paralelos $AC' // B'A'$ e $AB' // C'A'$ e congruentes, ver Figura 25.6.

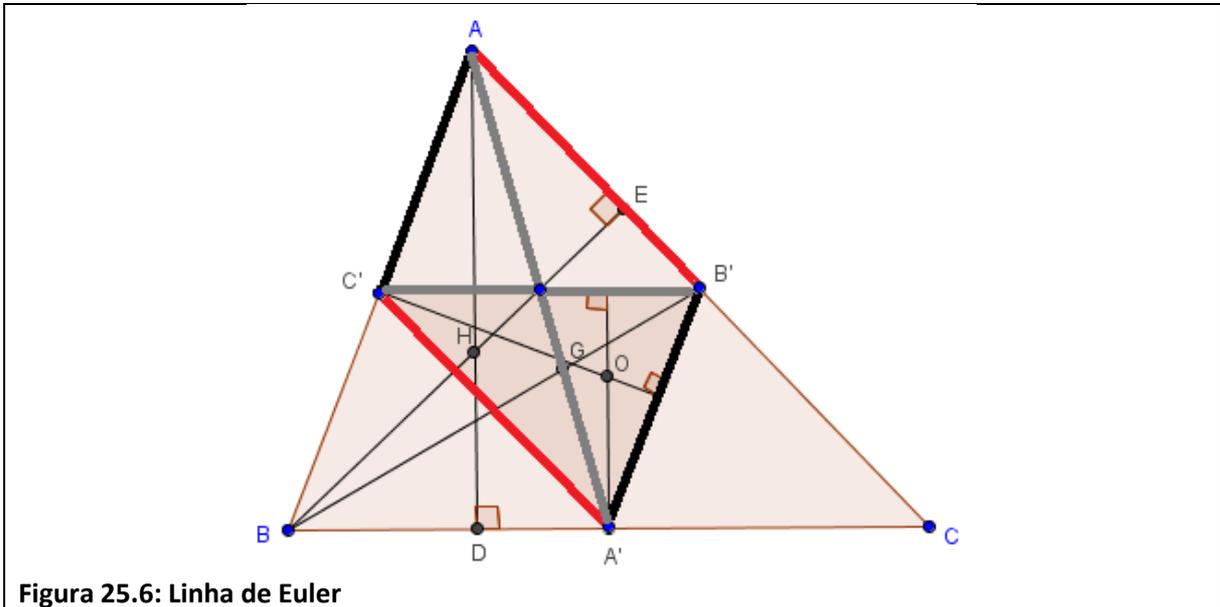


Figura 25.6: Linha de Euler

Pelo paralelogramo podemos afirmar que os segmentos AA' e $B'C'$ se cruzam nos seus pontos médios.

Portanto, as medianas do triângulo $A'B'C'$ estão ao longo das medianas do triângulo ABC , o que significa que os triângulos possuem o mesmo baricentro G .

Pelo paralelogramo podemos então dizer que P é ponto médio do lado $B'C'$ e também temos o mesmo ponto P sendo ponto médio do lado AA' , ver Figura 25.7.

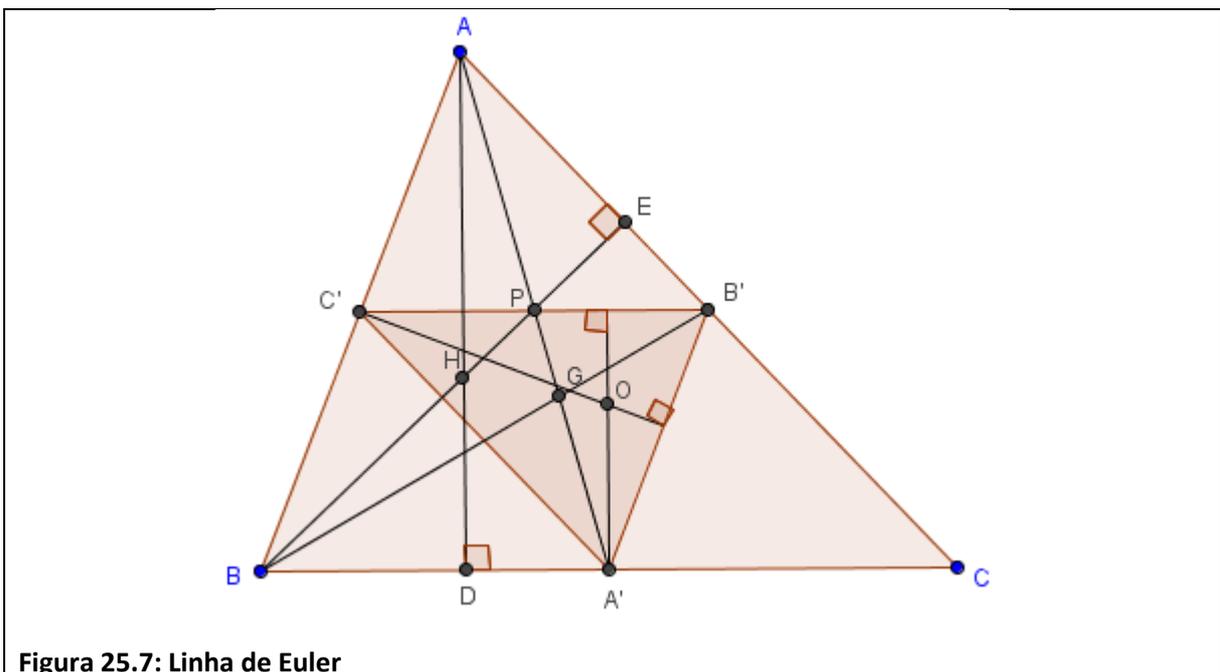


Figura 25.7: Linha de Euler

Agora, as alturas do triângulo $A'B'C'$ partem dos pontos médios do triângulo ABC e fazendo ângulo reto, já que os lados do triângulo $A'B'C'$ são paralelos aos lados do triângulo ABC , então na verdade temos que as alturas do triângulo $A'B'C'$ são as mediatrizes do triângulo ABC daí O , é o ortocentro do triângulo $A'B'C'$ e ao mesmo tempo circuncentro do triângulo ABC , ver Figura 25.8.

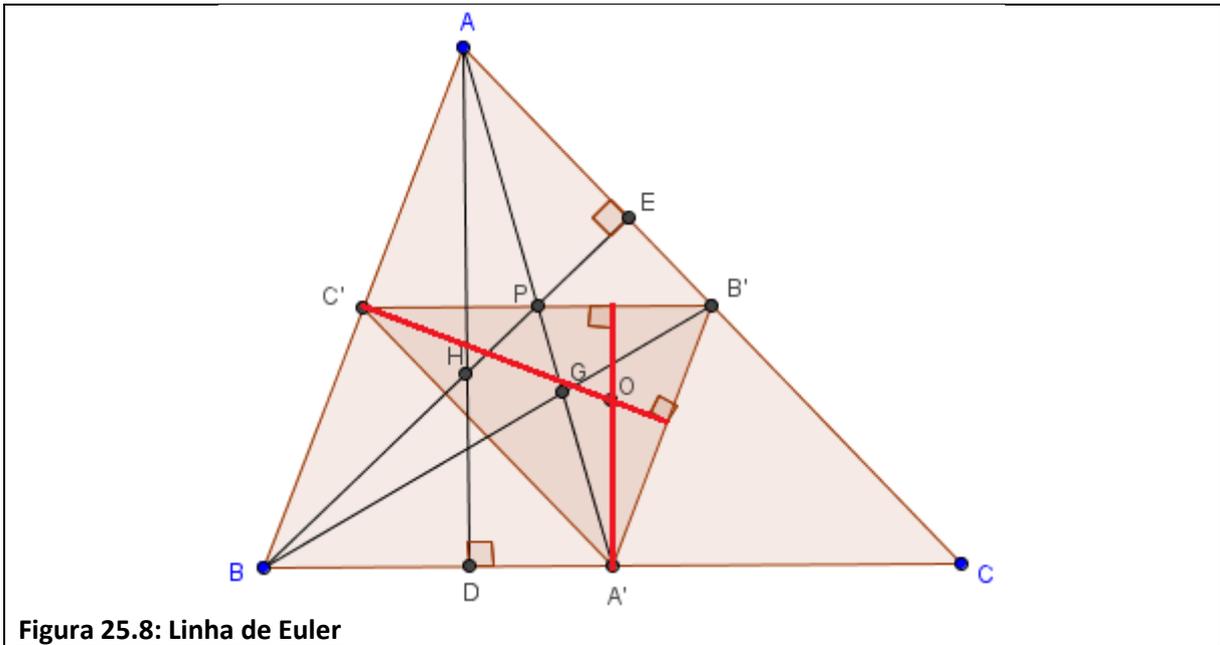


Figura 25.8: Linha de Euler

Segue que H sendo o ortocentro do triângulo ABC enquanto O é o ortocentro do triângulo $A'B'C'$ que são semelhantes na razão de 2 para 1 ainda pelo teorema 12, logo:

$$AH = 2.OA'.$$

Como as medianas se encontram no baricentro G , podemos dizer que:

$$AG = 2GA'.$$

Como AD e OA' são perpendiculares ao lado BC podemos concluir que AD e OA' são paralelos, ver Figura 25.9.

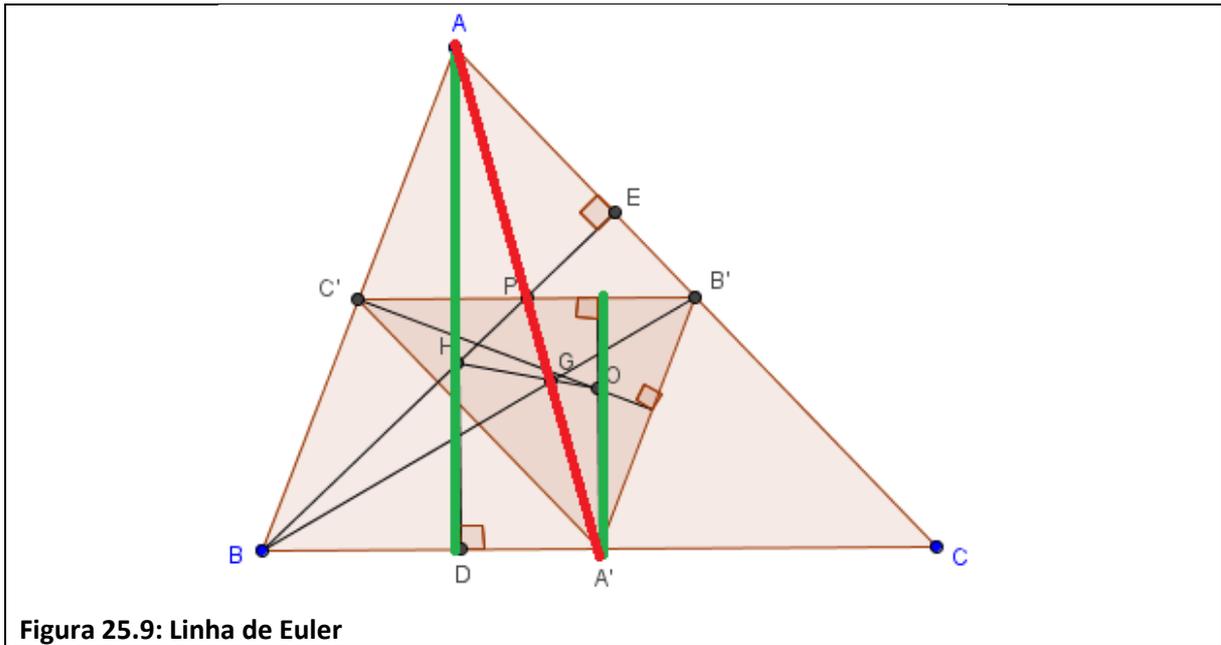


Figura 25.9: Linha de Euler

Podemos notar as paralelas AD e OA' em verde e a transversal AA' em vermelho. Daí, temos os ângulos $\widehat{DAA'}$ e $\widehat{OA'A}$ são alternos internos, portanto congruentes, ver Figura 25.10.

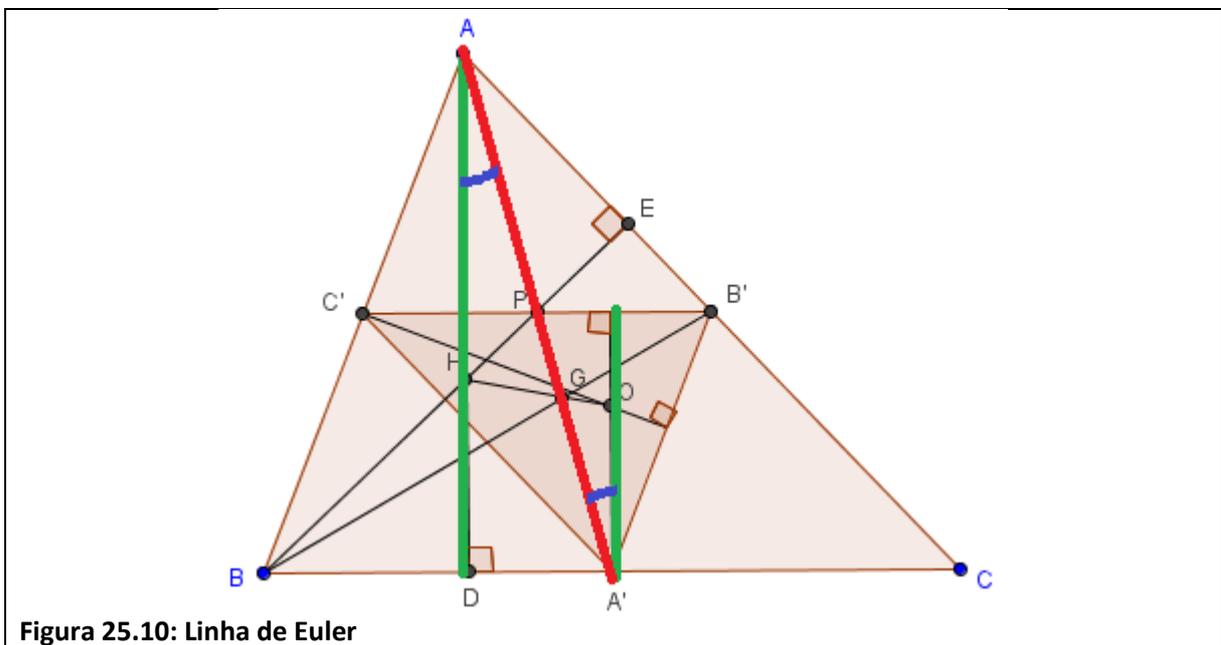
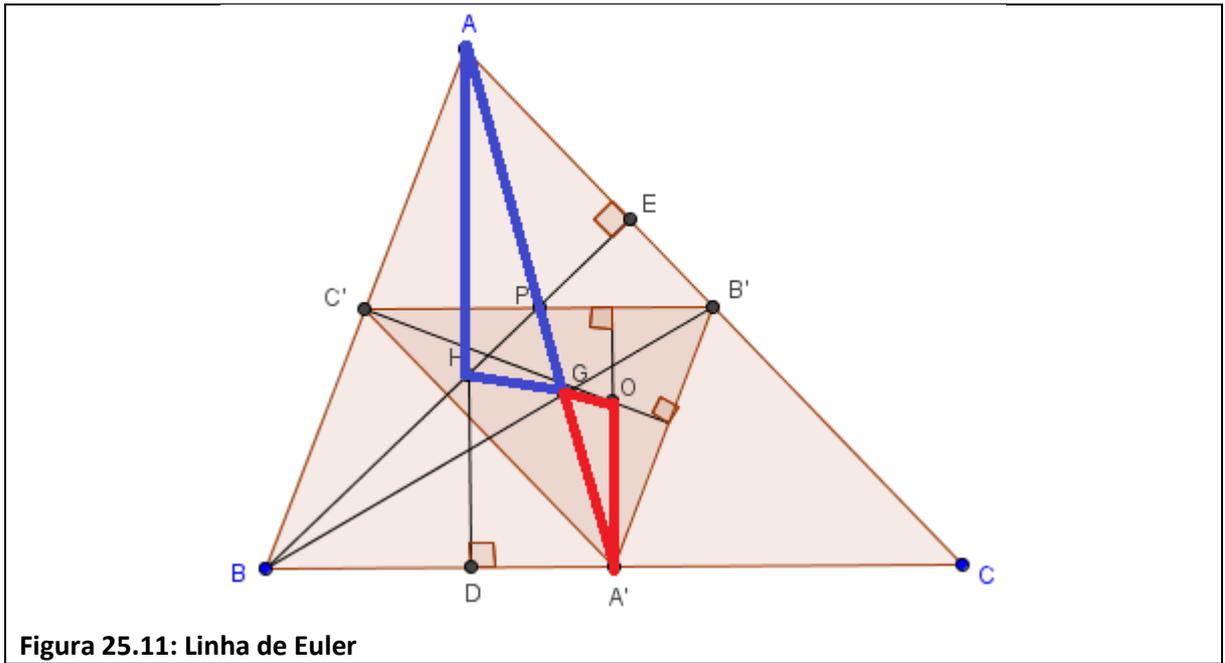


Figura 25.10: Linha de Euler

Como $AH = 2A'O$ e $AG = 2A'G$ e $\widehat{DAA} = \widehat{OA'A}$ concluímos que os triângulos AHG e $A'OG$ são semelhantes, pelo caso (LAL) .



Então $H\hat{G}A$ e $O\hat{G}A'$ são congruentes, portanto, *O.P.V.*
 Logo O, G, H são colineares e $HG = 2GO$.



CONCLUSÃO

Nesta dissertação, foram apresentados alguns teoremas que não são apresentados em sala de aula para alunos do ensino médio.

As cevianas de um triângulo são, de fato, concorrentes em pontos que denominamos notáveis. No ensino médio isso é comentado, porém não é deduzido junto aos alunos o porquê destas serem concorrentes, com o teorema de Ceva conseguimos fazer estas demonstrações de maneira compreensível. Ainda falamos do triângulo órtico e do triângulo medial, ferramentas fundamentais para provar essas concorrências.

Em seguida definimos alguns fatos de trigonometria e demonstramos o teorema de Varignon para quadriláteros convexos e a área dos quadriláteros inscritos usando o teorema de Brahmagupta.

Fechamos o trabalho com a reta de Euler, que enuncia o alinhamento do ortocentro, baricentro e o circuncentro em triângulos.

Vale deixar claro o quanto aprendi em geometria com este trabalho, como me encantei durante o processo. Comentava em sala de aula sobre o mesmo e via nos olhos de alguns de meus alunos de ensino médio o entusiasmo que tenho nos meus hoje.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] BARBOSA, JOÃO LUCAS MARQUES, Geometria Euclidiana plana, SBM. 2006
- [2] COXETER, H. S. M., GREITZER, S. L., Geometry Revisited, The Mathematical Association of America, 1967.
- [3] DOLCE, OSVALDO. POMPEO, NICOLAU, Fundamentos de Matemática Elementar Vol. 9 – Geometria Plana, Atual, 2013.
- [4] EVES, HOWARD, Introdução à história da matemática, Unicamp, 2004.
- [5] MAGALHÃES, CÍCERO THIAGO, Ponto Médio Lembra? Outro Ponto Médio! Dois Pontos Médios Lembram? Base Média! Disponível em:
http://www.obm.org.br/export/sites/default/revista_eureka/docs/artigos/ponto_medio_cicero.pdf. Acesso em 20/06/2015.
- [6] NETO, ANTONIO CAMINHA MUNIZ, Geometria, Coleção PROFMAT, 2013.
- [7] O BARICENTRO DA MENTE, Triângulo órtico. Disponível em:
<http://obaricentrodamente.blogspot.com.br/2015/06/triangulos-orticos.html>.
Acesso em: 18/09/2015 14:07.

[8] OLIVEIRA, MARCELO MENDES DE, Teorema de Ceva e Menelaus.
Disponível em :
http://www.obm.org.br/export/sites/default/semana_olimpica/docs/2003/menelCeva.doc. Acesso em 15/06/2015.

[9] REZENDE, ELIANE Q. F. E QUEIROZ, MARIA L. B DE, Geometria Euclidiana plana e construções geométricas, Editora UNICAMP, 2000.

