

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
MESTRADO PROFISSIONAL
MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

ELTON DA SILVA PAIVA VALIENTE

APLICAÇÕES DE SISTEMAS LINEARES E
DETERMINANTE NA ENGENHARIA CIVIL

CAMPO GRANDE-MS

SETEMBRO DE 2015

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
MESTRADO PROFISSIONAL
MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

ELTON DA SILVA PAIVA VALIENTE

APLICAÇÕES DE SISTEMAS LINEARES E
DETERMINANTE NA ENGENHARIA CIVIL

Orientadora: Prof.^a Dr.^a Rúbia Mara de Oliveira Santos

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Matemática - INMA/UFMS, como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre.

CAMPO GRANDE-MS

SETEMBRO DE 2015

APLICAÇÕES DE SISTEMAS LINEARES E DETERMINANTE NA ENGENHARIA CIVIL

ELTON DA SILVA PAIVA VALIENTE

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Instituto de Matemática, da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre.

Aprovado pela Banca Examinadora:

Prof.^a Dr.^a Rúbia Mara de Oliveira Santos - UFMS (orientadora)

Prof. Dr. Andrés Batista Cheung - UFMS

Prof.^a Dr.^a Silvia Lopes de Sena Tagliarenha - UFSC

CAMPO GRANDE-MS

SETEMBRO DE 2015

Dedico a minha família, pelo apoio incondicional, incentivo e compreensão sem igual pela minha ausência enquanto desenvolvia esta dissertação.

Epígrafe

"Não há nada mais prático do que uma boa teoria."

William James

AGRADECIMENTOS

Agradeço em primeiro lugar a Deus, por ter me dado paciência e sabedoria para buscar meios de desenvolver este trabalho.

Em especial a minha generosa esposa Vanessa por estar sempre ao meu lado me apoiando enquanto pesquisava e desenvolvia este trabalho.

As minhas lindas filhas, Isabela e Beatriz, por entenderem a falta de tempo para brincar.

Ao meu pai Norberto, minha mãe Odália, meu irmão Emerson, pela atenção dada a minha família enquanto trabalhava.

Ao meu sogro Narciso, minha sogra Maria Inês, por cuidarem das minhas filhas quando precisava.

A minha orientadora Prof^a Dr^a Rúbia pela atenção e paciência que me concedeu nas várias reuniões e trocas de mensagens que tivemos para tratar desta dissertação.

Ao Prof. Dr. Andrés pelo incentivo e apoio dado para que esse trabalho fosse bem desenvolvido, indicando bibliografia e auxiliando na escrita.

Em suma, agradeço a todos que de alguma forma contribuíram para o desenvolvimento deste trabalho.

Resumo

O conteúdo desta dissertação aborda aplicações dos conceitos Matrizes, Sistemas Lineares e Determinante em problemas reais na Engenharia Civil, tais como: resolução de treliças e na determinação dos modos de vibração de uma estrutura, sendo este um conjunto de elementos conectadas para suportar um carregamento. O desenvolvimento é feito inicialmente com uma abordagem histórica e posteriormente é apresentada a fundamentação teórica, expondo as definições, teoremas e propriedades. Para a resolução de Sistemas Lineares, são exibidos Métodos Diretos e Iterativos, sendo este último usado em problemas reais por se tratar de situações que envolvem grande número de incógnitas e equações. Contudo, para melhor entendimento da aplicabilidade serão apresentados conceitos físicos como equilíbrio estático de um corpo e resultados já conhecidos de vibrações.

Palavras-Chave: Sistemas Lineares. Determinante. Treliças. Vibrações.

Abstract

The content of this thesis comprehends the concepts of Matrices, Linear Systems and Determinants applied to problem solving of real situations in Civil Engineering, such as: trusses resolutions and the determination of vibration modes of a structure, considering this as a group of assembled elements in order to support a load. The development is initially carried out through a historical approach. After that, the theoretical basis is introduced, showing definitions, theorems and properties. For Linear Systems resolutions, Direct and Interactive Methods are presented, being the latter used in real problem solving since they are situations that comprehend several unknown factors and equations. Nevertheless, for a better understanding of the applicability, physical concepts such as the static balance of a body and vibration known results will be presented.

Keywords: Linear Systems. Determinants. Trusses. Vibrations.

Nomenclatura

$A = (a_{ij})$	Matriz formada por elementos a_{ij} de ordem $m \times n$, com $i = 1, 2, \dots, m$ e $j = 1, 2, \dots, n$
$\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$	Conjunto das matrizes reais de ordem $m \times n$
$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$	Conjuntos das matrizes reais quadradas de ordem n
$A_{m \times n}$	Matriz de ordem $m \times n$, ou seja, com m linhas e n colunas
A^{-1}	Matriz Inversa de A , $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$
I_n	Matriz Identidade de ordem n , $a_{ii} = 1$ e $a_{ij} = 0$ se $i \neq j$
\bar{A}	Matriz dos cofatores
$adj A$	Matriz Adjunta
F	Matriz das Forças, Carregamentos
K	Matriz de Rigidez
X	Matriz de Deslocamentos
M	Matriz de Massa
C	Matriz de Amortecimento
A^T	Transposta de A
A_{ij}	Submatriz de A , na qual a i -ésima linha e a j -ésima coluna foram retiradas
Δ_{ij}	Cofator ou complemento algébrico do elemento a_{ij}
k	Número real
$\sum_{k=1}^n$	Somatório definido com k variando de 1 até n
L_i	Linha i de uma matriz qualquer
$e(I_n)$	Matriz obtida da Identidade por meio de operações elementares
$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$	Lista ordenada de números reais ou simplesmente <i>vetor</i>
\mathbb{R}^n	Conjunto das n - <i>uplas</i> de números reais
$\ x\ $	Norma de um vetor
$\ A\ $	Norma de uma matriz quadrada
$ x_i $	Módulo de um número real x_i
$x^{(k)}$	Sequência de vetores
$\det A$ ou $ A $	Determinante de uma matriz quadrada A

ΣF_x	Somatório de todas as forças componente em x
ΣF_y	Somatório de todas as forças componente em y
ΣM	Somatório de momento devidos as forças em relação a um ponto qualquer
\rightarrow	Sentido adotado como positivo para eixo x
$+\uparrow$	Sentido adotado como positivo para eixo y
$+$ \searrow	Sentido adotado como positivo para eixo x
$+$ \nearrow	Sentido adotado como positivo para eixo y
$+$ \nwarrow	Sentido adotado como positivo para eixo y
θ_A	Rotação no ponto A
Δ_B	Deslocamento no ponto B
ω	Frequência circular
f	Frequência de oscilação
ϕ_n	Vetor que representa os modos de vibração natural da estrutura
$v(t)$	Deslocamento do sistema em direção à um eixo de referência
$\dot{v}(t)$	Velocidade do sistema
$\ddot{v}(t)$	Aceleração do sistema

Lista de Figuras

4.1	Modelo de ponte treliçada [18].	42
4.2	Placa de reforço (a) e Ligação com pino (b) [18].	42
4.3	Treliças Planas (a) e Espaciais (b).	43
4.4	Estrutura instável (a) e Estrutura estável (b) [18].	43
4.5	Treliça Simples [18].	44
4.6	Treliças Compostas [18].	44
4.7	Treliça Complexa [18].	45
4.8	Treliças planas usadas em telhados [18].	46
4.9	Treliças planas usadas em pontes [18].	47
4.10	Estrutura de telhado (a) e modelo de treliça - tesoura (b) [18].	48
4.11	Estrutura de ponte (a) e modelo de treliça de ponte (b) [18].	48
4.12	Diagramas de corpo livre de barras carregadas axialmente e nós adjacentes: (a) barra AB em tração; (b) barra AB em compressão [20].	49
4.13	Treliças instáveis [18].	51
4.14	Treliça estável [18].	51
4.15	Treliça internamente instável [18].	51
4.16	Treliça 1 [18]	53

4.17	Forças atuantes no nó A (a), nó B (b) e nó C (c).	53
4.18	Treliça <i>Fink</i> .	55
4.19	Reações dos apoios e articulações.	56
4.20	Forças aplicadas - Nó A.	56
4.21	Forças aplicadas - Nó B.	56
4.22	Forças aplicadas - Nó C.	57
4.23	Forças aplicadas - Nó D.	57
4.24	Forças aplicadas - Nó E e esquema geométrico.	57
4.25	Forças aplicadas - Nó F e esquema geométrico.	58
4.26	Forças aplicadas - Nó G e esquema geométrico.	58
4.27	Reações de apoio e esforços nas barras (corrigidos), em kN.	59
4.28	Estruturas com um (a), quatro (b) e três graus de liberdade (c) [21]	65
4.29	Vibrações livre (a) e forçada (b).	65
4.30	Ponte Tacoma Narrows - EUA	68
4.31	Pórtico de três níveis (a) e Coeficiente de rigidez em cada nó do pórtico (b)	69
4.32	Modos de vibração da estrutura deformada	72

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Abordagem Histórica sobre Matrizes, Sistemas Lineares e Determinante	2
1.2	O ensino de Matrizes e Sistemas Lineares na Educação Básica	4
1.3	Objetivos	6
2	Matrizes e Sistemas Lineares	7
2.1	Definições Básicas e Tipos de Matrizes	7
2.2	Operações com Matrizes	10
2.3	Sistemas Lineares	14
2.3.1	Forma Matricial de um Sistema Linear	15
2.3.2	Sistemas Lineares Equivalentes	16
2.3.3	Classificação de um Sistema Linear	19
2.3.4	Sistemas Escalonados	20
2.3.5	Discussão e Resolução de um Sistema Linear por Escalonamento	21
2.4	Métodos Iterativos	23
2.4.1	Método de Jacobi-Richardson	26
2.4.2	Método de Gauss-Seidel	28

2.5	Considerações Finais	31
3	Determinante e Matriz Inversa	32
3.1	Determinante	32
3.2	Desenvolvimento de Laplace	35
3.3	Obtenção da Matriz Inversa por Determinante	37
3.4	Procedimento para a Inversão de Matrizes	38
3.5	Aplicação de Determinante em Sistemas Lineares - Regra de <i>Cramer</i>	38
3.6	Considerações Finais	40
4	Aplicações de Sistemas Lineares e Determinante - Treliças e Vibrações	41
4.1	Treliças	41
4.1.1	Classificação quanto à formação	42
4.1.2	Classificação quanto à estaticidade	50
4.1.3	Resolvendo uma Treliça Isostática Plana	52
4.2	Aplicação de Sistemas Lineares - Treliça Simples	53
4.3	Aplicação de Sistemas Lineares - Treliça <i>Fink</i>	55
4.4	Caso Geral	60
4.5	Aplicações de Sistemas Lineares e Determinante em Vibrações Livres	61
4.5.1	Autovalores e Autovetores na Engenharia	61
4.5.2	Conceitos básicos de Vibração	63
4.5.3	Aplicação de Sistemas Lineares e Determinante	69
4.6	Considerações Finais	72
5	Conclusão	73

Capítulo 1

Introdução

É sabido que o conhecimento matemático é necessário em diversas situações seja como apoio a outras áreas do conhecimento, como instrumento para lidar com situações da vida cotidiana ou, ainda, como forma de desenvolver habilidades e pensamentos [1].

Na etapa final da educação básica, no ensino médio, a Matemática deve ser tratada como uma parcela do conhecimento essencial para a formação de todos os jovens, se fazendo responsável para a construção de visão de mundo, para ler e interpretar a realidade e desenvolver capacidades que deles serão exigidas ao longo da vida social e profissional. Portanto, a Matemática tem o poder de ir além de seu caráter instrumental, caracterizando-se como ciência com características próprias de investigação através de linguagem própria e com papel essencial junto às demais Ciências da Natureza. Sob o olhar de ciência, sua dimensão histórica, sua íntima relação com a sociedade, a cultura de diferentes épocas ampliam e aprofundam o espaço de conhecimentos não só nesta disciplina, mas mostrando sua importância nas inter-relações com outras áreas de conhecimento [1].

Considerando a forma de abordagem apresentada nos livros didáticos de assuntos específicos do ensino médio, em especial, Matrizes, Sistemas Lineares e Determinante, sentiu-se a necessidade de apresentar de forma simples aplicações desses conceitos. Dessa forma, será desenvolvido uma fundamentação teórica dos conceitos supracitados, para posterior aplicação em problemas concretos da Engenharia Civil. Essas aplicações serão feitas nas resoluções de treliças e na determinação dos modos de vibração de uma estrutura aporticada de três pavimentos. Para tanto, se fará necessário as definições de alguns conceitos físicos e nomenclaturas usadas nas Engenharias.

O leitor, seja ele um professor de Matemática do ensino médio ou um aluno de graduação em Ciências Exatas, encontrará aqui exemplos de aplicações de conceitos vistos nas disciplinas de Álgebra Linear e Geometria Analítica.

1.1 Abordagem Histórica sobre Matrizes, Sistemas Lineares e Determinante

Uma antiga obra chinesa consta que a ordem cronológica dos assuntos foi Sistemas Lineares, Determinante e Matrizes, sendo esta última estudada de forma profunda por apresentar sua álgebra muito organizada. No início do século I da era cristã, os chineses publicaram um livro intitulado *K'ui-ch'ang Suan-Shu (Os Nove Capítulos sobre a Arte Matemática)* [2]. Essa produção de conhecimento por parte dos chineses se deu durante o declínio de produção por parte dos europeus, sendo que estes iriam redescobrir resultados já produzidos pelos chineses muito mais tarde, durante ou após o Renascimento.

Na obra *K'ui-ch'ang Suan-shu*, em seu oitavo capítulo, é abordado o conceito de Sistemas de Equações Lineares e procedimentos matriciais. O método para resolver sistemas de equações lineares baseava-se curiosamente em operações que eram realizadas com o auxílio da manipulação de pequenos gravetos dispostos em uma folha de papel, sendo que esta técnica se assemelhava ao método de eliminação de Gauss (apresentado, somente, no século XIX). Essas operações eram efetuadas com os coeficientes das equações que compunham o sistema de equações, daí a origem da técnica adotada como precursora de métodos de solução propostos em épocas posteriores [3].

Em [4], apresenta um problema da época que foi resolvido utilizando a técnica chinesa, a saber:

- “Três feixes de uma colheita de boa qualidade, dois feixes de uma de qualidade regular e um feixe de uma de má qualidade são vendidos por 39 *dou*. Dois feixes de boa, três de regular e um de má qualidade são vendidos por 34 *dou*. Um feixe de boa, dois de regular e três de má são vendidos por 26 *dou*. Qual o preço do feixe para cada uma das qualidades?”

Percebe-se que os chineses organizavam os dados, neste caso os coeficientes das equações e termos independentes, em forma matricial. Os dados do problema eram organizados da seguinte forma:

1	2	3
2	3	2
3	1	1
26	34	39

Tabela 1.1: Informações do problema

No final do século XVII, um matemático japonês, Takakazu Seki Kowa (1642-1708), estudou o conceito de determinante. Kowa era um dos matemáticos da vanguarda que fizeram grandes descobertas da matemática ocidental. Cerca de 10 anos depois, o alemão Gottfried Wilhelm Von Leibniz (1646-1716), de forma independente, também obteve um método bem similar ao de Kowa [5].

Leibniz deixa de forma explícita numa carta escrita por ele destinada a Guillaume François Antoine Marquis de L'Hôpital (1661-1704) um método para eliminar valores desconhecidos de um sistema linear. Na carta, Leibniz dizia que o sistema de equações lineares

$$10 + 11x + 12y = 0$$

$$20 + 21x + 22y = 0$$

$$30 + 31x + 32y = 0$$

não possuía solução, uma vez que a seguinte igualdade $10.21.32 + 11.22.30 + 12.20.31 = 10.22.31 + 11.20.32 + 12.21.30$ era verdadeira [6] .

A condição apresentada por Leibniz é exatamente a que faz com que a matriz dos coeficientes tenha determinante nulo. O curioso é que Leibniz não usou os coeficientes numéricos das equações, mas dois caracteres, o primeiro que indica a equação ocorre e o segundo a que incógnita pertence. Por exemplo, aqui 21 denota o que podemos escrever como a_{21} . Ele estava convencido de que uma boa notação matemática era a chave para o progresso que ele experimentou com notação diferente para os sistemas de coeficientes. Seus manuscritos publicados contêm mais de 50 maneiras diferentes de representar os coeficientes do sistema.

O matemático Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855) em 1801 deu sequência ao estudo de determinante. Foi na obra *Disquisitiones Arithmeticae* (1801) que Gauss introduziu o conceito “determinante” ao discutir formas quadráticas pois esse elemento é o que determinava as propriedades da forma quadrática. Gauss organiza os coeficientes de formas quadráticas por meio de matriz retangular [6].

Jacobi em 1841 publicou três trabalhos sobre determinante, sendo que um deles trazia a definição de determinante de maneira algorítmica, e ainda as entradas não eram especificadas como numéricas ou funções, podendo ser qualquer um destes conceitos. Arthur Cayley (1821-1895) em 1841 publicou a primeira contribuição inglesa para a teoria dos determinante. Nesta publicação foi utilizado duas linhas verticais em ambos os lados da matriz para denotar determinante, uma das notações atuais. Nesses três trabalhos de 1841 já era possível identificar que as tabelas tratadas até então como caixas de armazenar coeficientes de equações de um Sistema Linear não eram estáticas e sim dinâmicas, tendo

a necessidade de serem estudadas de forma sistematizada. Ferdinand Gotthold Max Eiseinstein (1823-1852) em 1844, estudou essas tabelas e as chamou de “matrizes”, mediante o uso de letras e suas operações como as resultantes de regras operatórias usuais sobre essas letras, com exceção da lei da comutatividade [6].

1.2 O ensino de Matrizes e Sistemas Lineares na Educação Básica

De acordo com a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB - Lei 9.394/96) [7] a educação escolar está dividida em duas fases, educação básica e educação superior. Sendo que ainda a educação básica é formada por: educação infantil, ensino fundamental e ensino médio. Conforme a LDB, a educação básica tem por finalidades desenvolver o educando, assegurar-lhe a formação comum indispensável para o exercício da cidadania e fornecer-lhe meios para progredir no trabalho e em estudos posteriores.

A matemática no ensino médio deve seguir as Orientações Curriculares para o Ensino Médio [8], documento este formulado pelo Departamento de Políticas do Ensino Médio, vinculado ao Ministério da Educação - MEC, no qual se encontra orientações de como se deve trabalhar os conceitos matemáticos durante a fase do ensino médio de modo a atender as competências especificadas. O início deste documento afirma que o ponto de partida é assumir que toda situação de ensino aprendizagem deve agregar o desenvolvimento de habilidades que caracterizem o “pensar matematicamente”. Assim, é necessário dar prioridade à qualidade do processo e não à quantidade de conteúdos trabalhados. A escolha dos conteúdos deve ser cuidadosa e criteriosa, propiciando ao aluno um “fazer matemático” por meio de um processo investigativo que o auxilie na apropriação de conhecimento. Os conteúdos básicos estão organizados em quatro blocos: *Números e operações; Funções; Geometria; Análise de dados e probabilidade*. Isso não significa que os conteúdos desses blocos devam ser trabalhados de forma isoladas, e sim deve-se buscar constantemente a articulação entre eles [8]. Dentro destes blocos estão ainda as competências que devem ser desenvolvidas durante o processo de ensino-aprendizagem.

Posteriormente foi escrita a Matriz de Referência de Matemática e suas Tecnologias [9], sendo uma das quatro áreas de conhecimento abordada no Exame Nacional do Ensino Médio - ENEM que tem o objetivo de avaliar o desempenho do estudante ao fim da escolaridade básica onde os participantes são alunos que estão concluindo ou que já concluíram o ensino médio em anos anteriores e que também é utilizado como forma de ingresso em Instituições Federais de Ensino Superior - IFES ou Privadas por meio de

programas oferecidos pelo Governo Federal como o Programa Universidade para Todos - ProUni.

Para a formulação das Matrizes de Referência são utilizados os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEMs) que foram elaborados para difundir os princípios de reforma curricular e orientar os professores de matemática na busca de novas abordagens e metodologias.

Considerando o tratamento da álgebra, juntamente com a geometria, dada por esse documento o estudante deve ser **capaz de**: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas. E ainda desenvolver as seguintes **habilidades**: Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos, utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação e Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos algébricos.

Para se desenvolver essas habilidades, no estudo de sistemas de equações lineares, além de trabalhar a técnica de resolução de sistemas lineares, é recomendável fazer a ligação entre a álgebra e a geometria, valendo ressaltar que isso é possível em casos de equações com duas variáveis, sendo esta representada geometricamente por uma reta, ou ainda no caso de equações com três variáveis, que podem ser a representação de uma reta ou um plano no espaço, sendo que em todos os casos tem-se equações lineares [8].

A resolução de um sistema 2×2 , ou seja, de duas equações e duas variáveis, pode estar associada ao estudo da posição relativa de duas retas no plano. Por meio de operações elementares simples, pode-se determinar a existência ou não de soluções desse sistema, o que significa geometricamente os casos de intersecção/coincidência de retas ou paralelismo de retas. A resolução de sistemas 2×3 ou 3×3 deve ser feita por meio de operações elementares (o processo de escalonamento, que será apresentada no Capítulo 2), com discussão das diferentes situações. A regra de *Cramer*, usada para resolução de sistemas de equação 3×3 , dever ser abandonada, por ser um procedimento custoso (em geral, apresentado sem demonstração, e, portanto de pouco significado para o aluno), em que é possível aplicação em sistemas apenas com o mesmo número de equações e variáveis, chamados de *quadrados*. Determinante deve ser dispensado, uma vez que a utilização se dá apenas para resolução de Sistemas Lineares com a Regra de *Cramer* [8].

1.3 Objetivos

O presente trabalho tem como principal objetivo a aplicabilidade de conceitos como Matrizes, Sistemas Lineares e Determinante vistos durante o 2^o ano do ensino médio e na disciplina de Álgebra Linear em nível de graduação em Ciências Exatas em problemas reais da Engenharia Civil, tais como: resoluções de treliças e nas determinações dos modos de vibração de uma estrutura. Para isso será necessário desenvolver a parte teórica dos tópicos supracitados e apresentar conceitos físicos imprescindíveis para uma melhor compreensão das aplicações que serão feitas.

Dessa forma, a organização do trabalho será feita como segue:

Capítulo 2: Será apresentada a fundamentação teórica dos conceitos Matrizes e Sistemas Lineares, a incluir, definições, propriedades e teoremas, cujo principal objetivo é mostrar a ligação existente entre os dois assuntos. Para a resolução de Sistemas Lineares serão utilizados Métodos *Diretos* e *Iterativos*, sendo este último com aplicabilidade em problemas concretos, devido ao elevado número de equações.

Capítulo 3: É exibido a definição formal de determinante de uma matriz quadrada. Para o desenvolvimento analítico de Determinante, é importante o estudo de propriedades de modo a facilitar a sua obtenção. Serão apresentados métodos de resolução de Sistemas Lineares por meio de Determinante e métodos de obtenção da matriz inversa.

Capítulo 4: Serão apresentados duas aplicações de Sistemas Lineares e Determinante, primeiro na resolução de treliças e segundo na determinação dos modos de vibração de uma estrutura. A metodologia usada visa a aplicação dos conceitos abordados durante toda dissertação. Para compor essas aplicações serão apresentados conceitos não vistos durante o ensino médio, como treliças e vibrações.

E por fim, no Capítulo 5, serão apresentados as Conclusões do Trabalho.

Capítulo 2

Matrizes e Sistemas Lineares

Neste capítulo será visto de forma sistematizada todas as definições, propriedades e teoremas para uma fundamentação teórica acerca de Matrizes e Sistemas Lineares. As formas de representação matricial aparecem de forma natural na resolução de muitos problemas, não apenas porque eles “ordenam e simplificam” a linguagem do problema, mas também porque possibilitam a utilização de novos métodos de resolução através de ferramentas como o computador, sendo este de fundamental importância na resolução de Sistemas Lineares com um grande número de variáveis. Serão apresentados Métodos Diretos (Escalonamento e *Cramer*) e Iterativos (Processo de Jacobi-Richardson e Processo de Gauss-Seidel) de resolução de Sistemas Lineares.

2.1 Definições Básicas e Tipos de Matrizes

Definição 2.1. Matriz

Sejam $m \geq 1$ e $n \geq 1$ dois números inteiros. Uma *matriz* $m \times n$ *real* é a dupla sequência de números reais, distribuídos em m *linhas* e n *colunas*, formando uma tabela que se indica do seguinte modo:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Abreviadamente esta matriz pode ser expressa por $A = (a_{ij})$, com $i = 1, 2, \dots, m$ e $j = 1, 2, \dots, n$. Cada elemento que compõe uma matriz chama-se *termo* dessa matriz. Dada a matriz $A = (a_{ij})$, ao símbolo a_{ij} que representa indistintamente todos os seus termos dá-se o nome de *termo geral* sendo que o índice i indica a linha ao qual o elemento

pertence e o índice j a coluna ao qual o elemento pertence com as linhas numeradas de 1 até m , e as colunas numeradas de 1 até n . Será indicado por $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ o conjunto das matrizes reais $m \times n$, sendo que é usual representar uma matriz de $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ simplesmente por $A_{m \times n}$. Se $m = n$, será usada a notação $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, e cada matriz chamada de *matriz quadrada de ordem n* [10].

Matrizes Especiais

a) *matriz linha*: Toda matriz de ordem $1 \times n$, isto é, uma matriz que possui apenas uma linha.

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{bmatrix}_{1 \times n}$$

b) *matriz coluna*: Toda matriz de ordem $m \times 1$, isto é, uma matriz que possui apenas uma coluna.

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}_{m \times 1}$$

c) *matriz nula*: Toda matriz, em que, para qualquer elemento a_{ij} , tem-se $a_{ij} = 0$.

$$0_{m \times n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{m \times n}$$

d) *matriz quadrada*: Toda matriz, em que, o número de linhas é igual ao número de colunas.

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n \times n}$$

e) *matriz triangular inferior*: Toda matriz quadrada, na qual, todos os elementos a_{ij} , em que, $i < j$ são iguais a zero.

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n \times n}$$

f) *matriz triangular superior*: Toda matriz quadrada, na qual, todos os elementos a_{ij} , em que, $i > j$ são iguais a zero.

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n \times n}$$

g) *matriz diagonal*: Toda matriz quadrada, na qual, todos os elementos a_{ij} , em que, $i \neq j$ são iguais a zero.

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n \times n}$$

h) *matriz identidade*: Toda matriz diagonal, na qual, todos os elementos a_{ij} são iguais a 1 para $i = j$ e 0 para $i \neq j$.

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{n \times n}$$

i) *matriz escada*: Uma matriz de ordem $m \times n$ será dita na forma *escada* se for nula, ou se:

(i) O primeiro elemento não nulo de uma linha não nula é o número 1.

(ii) Cada coluna que contém o primeiro elemento não nulo de alguma linha tem todos os seus outros elementos iguais a zero.

(iii) Toda linha nula ocorre abaixo de todas as linhas não nulas.

(iv) Se as linhas $1, 2, \dots, r$ são as linhas não nulas, e se o primeiro elemento não nulo da linha i ocorre na coluna K_i então $K_1 < K_2 < \dots < K_r$. Esta última condição impõe a forma escada à matriz [10].

Dessa forma, uma matriz estará na forma escada se, o número de zeros precedendo o primeiro elemento não nulo de uma linha aumenta a cada linha, até que sobreem somente linhas nulas, se houver.

2.2 Operações com Matrizes

Definição 2.2. Igualdade de Matrizes

Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$. Tem-se que A e B são iguais, e escreve-se $A = B$ se, e somente se, $a_{ij} = b_{ij}$, para todo $i = 1, \dots, m$ e todo $j = 1, \dots, n$.

Definição 2.3. Adição de Matrizes

Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$. Indica-se por $A + B$ e chama-se *soma* de A com B a matriz $m \times n$ cujo termo geral é $a_{ij} + b_{ij}$, ou seja

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

Dá-se o nome de *adição* à operação que transforma cada par (A, B) de matrizes reais do mesmo tipo $m \times n$ na matriz $A + B$. Esta é uma operação no conjunto $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$.

Propriedades

Sejam $A, B, C \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$, tem-se:

i) $A + B = B + A$ (comutatividade);

ii) $A + (B + C) = (A + B) + C$ (associatividade);

iii) $A + 0_{m \times n} = A$, sendo $0_{m \times n}$ representa a matriz nula de $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$;

iv) $A + (-A) = 0_{m \times n}$, sendo $(-A)$ é a matriz oposta da matriz A .

Demonstração. A demonstração dos itens decorrem diretamente das definições de igualdade e adição de matrizes. Por esse motivo será provado apenas o item *(ii)*, a demonstração dos itens *(i)*, *(iii)* e *(iv)*, pode ser encontrada em [11].

(ii): Sejam $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $C = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$, então

$$A + (B + C) = (a_{ij}) + (b_{ij} + c_{ij}) = (a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})) = ((a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}) + (c_{ij}) = (A + B) + C. \quad \blacksquare$$

As operações que serão definidas a seguir utilizam a multiplicação de uma matriz por um número real, também chamada *multiplicação de uma matriz por escalar*.

Definição 2.4. Multiplicação de uma Matriz por escalar

Seja $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ e k um número real, o *produto* de k por A é a matriz real, $m \times n$ cujo termo geral é a matriz $k.A = (ka_{ij})$, ou seja:

$$k.A = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \dots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \dots & ka_{mn} \end{bmatrix}$$

Dessa forma se definiu a operação que transforma cada par (k, A) de $\mathbb{R} \times \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ na matriz real $kA \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$.

Propriedades

Sejam $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$, e $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$, tem-se:

i) $k_1(A + B) = k_1A + k_1B$;

ii) $(k_1 + k_2)A = k_1A + k_2A$;

iii) $0.A = 0_{m \times n}$;

iv) $k_1(k_2A) = (k_1k_2)A$;

v) $1.A = A$ (elemento neutro).

Demonstração. (i): De fato, sejam $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ e $k \in \mathbb{R}$, então

$$k(A + B) = k(a_{ij} + b_{ij}) = (k(a_{ij} + b_{ij})) = (ka_{ij} + kb_{ij}) = (ka_{ij}) + (kb_{ij}) = k(a_{ij}) + k(b_{ij}) = kA + kB. \quad \blacksquare$$

Definição 2.5. Transposição

Seja $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ denomina-se *transposta* de A e indica-se por A^T a seguinte matriz $n \times m$: $A^T = (b_{ji})$, onde $b_{ji} = a_{ij}$ com $i = 1, 2, \dots, m$ e $j = 1, 2, \dots, n$.

Propriedades

Sejam $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ e $k \in \mathbb{R}$, tem-se:

i) $(A^T)^T = A$;

ii) $(A + B)^T = A^T + B^T$;

iii) $(kA)^T = kA^T$.

Demonstração. (ii) Sejam $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$. Então,

$$(A + B)^T = (a_{ji} + b_{ji}) = (a_{ji}) + (b_{ji}) = A^T + B^T. \quad \blacksquare$$

As demonstrações dos demais itens acerca de multiplicação por escalar e transposição é encontrada em [11].

Definição 2.6. Matriz Simétrica

Uma matriz $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, é *simétrica* se, e somente se, $A^T = A$, ou seja, quando $a_{ij} = a_{ji}$.

Definição 2.7. Matriz Anti Simétrica

Uma matriz $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, é *anti simétrica* se, e somente se, $A^T = -A$, isto é, quando $a_{ij} = -a_{ji}$.

Definição 2.8. Produto de Matrizes

Sejam $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m \times p}(\mathbb{R})$ e $B = (b_{jk}) \in \mathcal{M}_{p \times n}(\mathbb{R})$, denomina-se *produto* de A por B e representa-se por AB a matriz $C = (c_{ik}) \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$, cujo termo geral é tal que $c_{ik} = a_{i1}.b_{1k} + a_{i2}.b_{2k} + \dots + a_{in}.b_{nk} = \sum_{j=1}^n a_{ij}.b_{jk}$, $\forall i \in \{1, 2, \dots, m\}$ e $\forall k \in \{1, 2, \dots, p\}$.

Esta operação é definida apenas quando o número de colunas da matriz A é o mesmo número de linhas da matriz B .

Propriedades

Sejam A , B e C matrizes reais, tem-se:

$$i) AI_n = I_n A = A, \text{ com } A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R});$$

$$ii) A(B + C) = AB + AC, \text{ com } A \in \mathcal{M}_{m \times p}(\mathbb{R}) \text{ e } B, C \in \mathcal{M}_{p \times n}(\mathbb{R});$$

$$iii) (A + B)C = AC + BC, \text{ com } A, B \in \mathcal{M}_{m \times p}(\mathbb{R}) \text{ e } C \in \mathcal{M}_{p \times n}(\mathbb{R});$$

$$iv) A(BC) = (AB)C, \text{ com } A \in \mathcal{M}_{m \times p}(\mathbb{R}), B \in \mathcal{M}_{p \times q}(\mathbb{R}) \text{ e } C \in \mathcal{M}_{q \times n}(\mathbb{R});$$

$$v) (AB)^T = B^T A^T, \text{ com } A \in \mathcal{M}_{m \times p}(\mathbb{R}) \text{ e } B \in \mathcal{M}_{p \times n}(\mathbb{R}).$$

Não é válida a propriedade comutativa na multiplicação de matrizes, pois em geral, $AB \neq BA$.

Definição 2.9. Matriz Ortogonal

Seja $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, denomina-se A como *ortogonal* quando $AA^T = A^T A = I_n$.

Definição 2.10. Matriz Inversa

Uma matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, possui inversa se existir uma matriz $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, tal que $AB = BA = I_n$. Caso esta matriz B exista, ela é única e chama-se *inversa de A* , e indica-se por A^{-1} .

Quando uma matriz real quadrada A não é invertível diz-se que é uma *matriz singular*.

Proposição 2.11. Unicidade da Matriz Inversa

Se A é invertível, então sua inversa A^{-1} é única.

Demonstração. Sejam duas matrizes B e C tais que $BA = I_n$ e $AC = I_n$. Note que $B = C$. De fato,

$$AC = I_n \Rightarrow B(AC) = BI_n \Rightarrow (BA)C = B \Rightarrow (I_n)C = B \Rightarrow I_n C = B \Rightarrow C = B.$$

Portanto, $B = C$. ■

Definição 2.12. Operações Elementares

Define-se por *operações elementares* nas *linhas* de uma matriz A , as seguintes operações:

(i) Permutação das linhas L_i e L_j , indicada por $L_i \leftrightarrow L_j$;

(ii) Multiplicação de uma linha L_i por um número real k não nulo, indicado por $L_i \leftarrow kL_i$;

(iii) Substituição de uma linha L_i pela adição desta linha com k vezes uma outra linha L_j , indicada por $L_i \leftarrow L_i + kL_j$, $k \in \mathbb{R}$ e $k \neq 0$.

Definição 2.13. Matriz Elementar

Seja uma matriz $E = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, obtida a partir de I_n , pela aplicação de uma e somente uma das *operações elementares*, em sua i -ésima linha, denotada por L_i . Diz-se que $E = (a_{ij})$, é uma *matriz elementar* e representa-se por $E = e(I_n)$.

Em outras palavras, tem-se que uma *matriz elementar* é aquela que foi obtida a partir da matriz identidade através de uma única aplicação de operações elementares.

Proposição 2.14. Reversibilidade das Operações Elementares

Toda operação elementar “ e ” nas linhas de uma matriz A é reversível.

Demonstração. Se “ e ” é uma transformação elementar do tipo $e : L_i \leftrightarrow L_j$ tome a transformação $e' \neq e$ tal que $e' : L_j \leftrightarrow L_i$. Se “ e ” é uma transformação do tipo $e : L_i \leftarrow$

kL_i , tome a transformação $e' : L_i \leftarrow \frac{1}{k}L_i$. Mas, se “ e ” é uma transformação do tipo $e : L_i \leftarrow L_i + kL_j$, tome e' como a transformação $e' : L_i \leftarrow L_i - kL_j$. ■

Definição 2.15. Matrizes Equivalentes

Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$. A matriz A é dita equivalente por linhas à matriz B se B pode ser obtida de A pela aplicação sucessiva de um número finito de transformações elementares sobre linhas. Notação: $A \sim B$.

Teorema 2.16. *Toda matriz é equivalente a uma única matriz na forma escada.*

Corolário 2.17. *Toda matriz elementar é invertível e sua inversa também é uma matriz elementar.*

As demonstrações destes resultados pode ser encontrada em [12].

2.3 Sistemas Lineares

Definição 2.18. Equação Linear

Chama-se *equação linear* nas incógnitas x_1, x_2, \dots, x_n as equações da forma

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b$$

onde $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}$ são números reais e denominados de *coeficientes da equação* e b , também real, é o *termo independente* da equação.

A *solução* de uma equação linear é a n -upla de números $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ que quando substituídos na equação, no lugar das incógnitas x_1, x_2, \dots, x_n , respectivamente, fazem com que a sentença seja verdadeira [13].

Definição 2.19. Sistema Linear

Um *Sistema Linear* de m equações lineares com n incógnitas, onde m e n são inteiros e $m, n \geq 1$ é um conjunto de m equações lineares, cada uma delas com n incógnitas, consideradas simultaneamente. Um Sistema Linear se apresenta do seguinte modo:

$$S : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

Se $m = n$ simplesmente diz-se *Sistema Linear de ordem n* .

Definição 2.20. Solução de um Sistema Linear

Uma n -upla de números reais $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ é dita *solução* de um Sistema Linear se satisfaz a todas as equações do conjunto simultaneamente, isto é: $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ é solução se, e somente se,

$$a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \dots + a_{in}\alpha_n = b_i$$

para todo $i \in \{1, 2, \dots, m\}$.

2.3.1 Forma Matricial de um Sistema Linear

Considere o Sistema Linear com m equações e n incógnitas

$$S : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

associa-se a este sistema três matrizes: A (*matriz dos coeficientes*), X (*matriz das incógnitas*) e B (*matriz dos termos independentes*) [10]. Dessa forma,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

O produto que representa o Sistema Linear é dado pela equação matricial

$$AX = B \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

A *matriz completa* de um Sistema Linear é a matriz formada pelos coeficientes de cada equação e os respectivos termos independentes desse sistema, assim dado o Sistema Linear

$$S : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Segue que a matriz completa de S é:

$$A_c = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

2.3.2 Sistemas Lineares Equivalentes

Definição 2.21. Sistemas Lineares Equivalentes

Dois Sistemas Lineares S_1 e S_2 são ditos *equivalentes*, quando toda solução de S_1 é solução de S_2 e toda solução de S_2 também é solução de S_1 , ou seja, quando possuem o mesmo conjunto solução.

Teorema 2.22. *Multiplicar qualquer uma das equações do Sistema Linear inicial S , por um número real $k \neq 0$, o novo Sistema Linear S' obtido é equivalente ao sistema inicial S , assim toda solução de S' é solução de S e toda solução de S é solução de S' .*

Demonstração. Seja

$$S : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Multiplicando a i -ésima linha de S por um número real $k \neq 0$, obter-se-á o seguinte sistema:

$$S' : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ ka_{i1}x_1 + ka_{i2}x_2 + \dots + ka_{in}x_n = kb_i \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

A única diferença entre os sistemas S e S' é a i -ésima equação. Portanto, deve-se analisar somente esta linha do sistema.

(\Rightarrow) Suponha que $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ é uma solução de S .

Por hipótese, $a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \dots + a_{in}\alpha_n = b_i$.

Daí segue que também é uma solução de S' . Assim, tem-se que:

$$ka_{i1}\alpha_1 + ka_{i2}\alpha_2 + \dots + ka_{in}\alpha_n = k(a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \dots + a_{in}\alpha_n) = kb_i.$$

O que prova que $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ satisfaz a i -ésima equação de S' . Portanto $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ é solução de S' .

(\Leftarrow) Suponha agora que $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ é uma solução de S' .

Por hipótese, $ka_{i1}\alpha_1 + ka_{i2}\alpha_2 + \dots + ka_{in}\alpha_n = kb_i$, donde tem-se que:

$$a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \dots + a_{in}\alpha_n = \frac{k}{k}a_{i1}\alpha_1 + \frac{k}{k}a_{i2}\alpha_2 + \dots + \frac{k}{k}a_{in}\alpha_n = \frac{1}{k}[ka_{i1}\alpha_1 + ka_{i2}\alpha_2 + \dots + ka_{in}\alpha_n] = \frac{1}{k}.k.b_i = b_i.$$

O que prova que $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ é solução da i -ésima equação de S . Portanto $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ é solução de S . ■

Teorema 2.23. Teorema de Jacobi

Multiplicando qualquer equação do sistema por um número real $k \neq 0$ e adicionando esta a uma outra equação qualquer do sistema S , o novo sistema S' obtido é equivalente ao sistema inicial S , assim toda solução de S' é solução de S e vice versa.

Demonstração. Seja

$$S : \left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i \\ \vdots \\ a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \dots + a_{jn}x_n = b_j \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right.$$

Substituindo a i -ésima equação de S , pela soma, membro a membro, dela com a j -ésima

equação, obtém-se o seguinte sistema:

$$S' : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & \vdots & \\ (a_{i1} + a_{j1})x_1 + (a_{i2} + a_{j2})x_2 + \dots + (a_{in} + a_{jn})x_n & = & b_i + b_j \\ & \vdots & \\ a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \dots + a_{jn}x_n & = & b_j \\ & \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

A única diferença entre S e S' é a i -ésima equação, logo deve-se analisar somente esta linha do sistema.

(\Rightarrow) Suponha que $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ é solução de S e prove que também é solução de S' .

De fato, por hipótese:

$$(I) \quad a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \dots + a_{in}\alpha_n = b_i$$

$$(II) \quad a_{j1}\alpha_1 + a_{j2}\alpha_2 + \dots + a_{jn}\alpha_n = b_j$$

Colocando $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ no primeiro membro da i -ésima equação de S' , tem-se que:

$$\begin{aligned} & (a_{i1} + a_{j1})\alpha_1 + (a_{i2} + a_{j2})\alpha_2 + \dots + (a_{in} + a_{jn})\alpha_n = \\ & = (a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \dots + a_{in}\alpha_n) + (a_{j1}\alpha_1 + a_{j2}\alpha_2 + \dots + a_{jn}\alpha_n) = b_i + b_j \end{aligned}$$

O que prova que $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ satisfaz a i -ésima equação de S' . Portanto $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ é solução de S' .

(\Leftarrow) Suponha agora que $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ é uma solução de S' . Deve-se provar que também é solução de S .

De fato, por hipótese:

$$(I) \quad (a_{i1} + a_{j1})\alpha_1 + (a_{i2} + a_{j2})\alpha_2 + \dots + (a_{in} + a_{jn})\alpha_n = b_i + b_j$$

e

$$(I) \quad a_{j1}\alpha_1 + a_{j2}\alpha_2 + \dots + a_{jn}\alpha_n = b_j$$

Das igualdades (I) e (II), conclui-se que $a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \dots + a_{in}\alpha_n = b_i$, o que prova que $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ satisfaz a i -ésima equação de S . Portanto $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ é solução de S . ■

Teorema 2.24. *Sistemas Lineares que possuem matrizes ampliadas (completas) equivalentes, são equivalentes.*

Demonstração. Será feita usando matrizes elementares. Sejam A e A' matrizes ampliadas dos sistemas S e S' respectivamente, sendo estas matrizes-linha equivalentes. Então, tem-se que $A' = MA$, onde M é um produto de matrizes elementares, e portanto, invertível. Os sistemas S e S' podem ser escritos respectivamente: $NX = B$ e $N'X = B'$, sendo N é a matriz A na qual se substituiu a última coluna por B , da mesma forma N' é a matriz A' na qual se substituiu a última coluna por B' . Além disto, verifica-se que: $N' = MN$ e $B' = MB$.

Portanto, $NX = B \Leftrightarrow MNX = MB \Leftrightarrow N'X = B'$. Isto significa que os sistemas S e S' são equivalentes pois toda matriz $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ que seja a solução do sistema S será solução do sistema S' e vice versa. ■

Definição 2.25. Sistemas Lineares Homogêneos

São Sistemas Lineares em que *todos* os termos independentes b_1, b_2, \dots, b_n são iguais a zero, ou seja:

$$S : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} .$$

Dado um Sistema Linear homogêneo a n -upla $(0, 0, 0, \dots, 0)$ é uma solução do sistema. Esta é denominada de *solução trivial* de qualquer Sistema Linear homogêneo. Assim todo Sistema Linear homogêneo terá pelo menos uma solução, já que a n -upla nula satisfaz todas as equações.

2.3.3 Classificação de um Sistema Linear

Considerando um Sistema Linear de ordem 2×2 , pode-se utilizar a posição relativa entre as retas que representam as equações do Sistema Linear, verificando se estas são

paralelas (não admite solução), concorrentes (solução única) ou coincidentes (mais de uma solução).

Em um Sistema Linear de ordem 3×3 , é possível verificar a intersecção entre os planos que representam as equações do sistema, que pode ser um único ponto (solução única), uma reta ou plano (mais de uma solução) e os planos serem paralelos (não admite solução).

Definição 2.26. Classificação de um Sistema Linear

Um Sistema Linear S é dito *impossível* se S não admite nenhuma solução. Um Sistema Linear que admite uma única solução é chamado de *possível e determinado*. Se um Sistema Linear S admitir mais do que uma solução então ele recebe o nome de *possível e indeterminado*.

É comum encontrar na literatura a classificação *compatível* e *incompatível* quando se classifica como *possível* e *impossível*, respectivamente. De forma resumida, tem-se que um Sistema Linear é classificado como:

- i) *Sistema Possível e Determinado - SPD*, quando admite uma única solução;
- ii) *Sistema Possível e Indeterminado - SPI*, quando admitir mais de uma solução;
- iii) *Sistema Impossível - SI*, quando não admitir solução.

2.3.4 Sistemas Escalonados

Um método prático e usual para resolver um Sistema Linear de forma analítica é o *Método de Escalonamento*, também conhecido por *Eliminação de Gauss com Retrosubstituição*. Antes de iniciar a resolução por escalonamento será definido o que é um *Sistema Linear Escalonado* e quais *operações* podem ser realizadas com as equações do conjunto para se obter um Sistema Linear equivalente na forma escalonada.

Definição 2.27. Sistema Linear Escalonado

Seja S o Sistema Linear de m equações com n incógnitas que tem o seguinte aspecto:

$$S : \begin{cases} a_{1r_1}x_{r_1} + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{2r_2}x_{r_2} + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{kr_k}x_{r_k} + \dots + a_{kn}x_n = b_k \end{cases}$$

onde $a_{1r_1} \neq 0, a_{2r_2} \neq 0, \dots, a_{kr_k} \neq 0$ e cada $r_i \geq 1$. Se $1 \leq r_1 < r_2 < \dots < r_k \leq n$ diz que S é um *Sistema Linear Escalonado*. Caso a última equação seja da forma $0x_n = b_m$, com

2. De forma análoga, se durante o escalonamento, for obtido um Sistema Linear na forma:

$$S' : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{nn}x_n = b_n \end{cases},$$

da última equação será possível determinar x_n , e por substituição na equação anterior determinar x_{n-1} e assim por diante, encontrando-se a n -upla que satisfaz todas as equações de S' . Logo como S e S' são equivalentes, segue que S será determinado.

3. E por fim, obtém-se um Sistema Linear escalonado da forma:

$$S' : \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1r_2}x_{r_2} + \dots + a_{1r_3}x_{r_3} + \dots + a_{1r_p}x_{r_p} + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{2r_2}x_{r_2} + \dots + a_{2r_3}x_{r_3} + \dots + a_{2r_p}x_{r_p} + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{3r_3}x_{r_3} + \dots + a_{3r_p}x_{r_p} + \dots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \vdots \\ a_{pr_p}x_{r_p} + \dots + a_{pn}x_n = b_p \end{cases}$$

sendo $p < n$.

Neste caso, através de operações elementares será eliminado o termo em x_{r_2} na primeira equação, os termos em x_{r_3} da primeira e segunda equações, de forma sucessiva, os termos em x_{r_p} da primeira à $(p-1)$ -ésima equação. Em seguida, passa-se para o segundo membro de cada equação todas as parcelas, exceção feita à primeira. Assim ter-se-á algo do tipo:

$$S'' : \begin{cases} x_1 = f_1 \\ x_{r_2} = f_2 \\ \vdots \\ x_{r_p} = f_p \end{cases}$$

sendo cada f_i é uma expressão linear nas variáveis x_j com $j \neq 1, j \neq r_2, \dots, j \neq r_p$. Dessa forma, a cada sequência de valores que se dá a estas $n - p$ variáveis (*variáveis livres*) será obtido valores para $x_1, x_{r_2}, \dots, x_{r_p}$ e conseqüentemente uma solução do sistema linear. E ainda, como $p < n$, o sistema terá mais do que uma solução, desse modo será indeterminado. Essa n -upla que fornece todas as soluções é chamada de *solução geral* do sistema linear.

De forma simplificada, suponha que um sistema tenha sido escalonado e, retiradas as equações do tipo $0 = 0$, restando p equações com n incógnitas, então a discussão do sistema S poderá ser resumida da seguinte forma:

- i) Se a última das equações restantes é $0x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_n = b_p$ ($b_p \neq 0$), então o sistema é *impossível*;
- ii) Se $p = n$, então o sistema é *possível e determinado*;
- iii) Se $p < n$, então o sistema é *possível e indeterminado*.

Este último caso ocorre quando o número de equações é maior que o número de incógnitas.

2.4 Métodos Iterativos

Segundo a literatura pesquisada, a aplicação de Sistemas Lineares nas áreas de Engenharias, Ciência da Computação, Economia, Biologia, entre outros, costumam envolver um grande número de incógnitas, na ordem de 100 ou 10.000, por exemplo, se faz necessário a utilização de meios computacionais para resolver tais problemas.

Sendo assim, é possível desenvolver sequência de passos (algoritmos) para obtenção da solução do sistema linear de forma *exata* (*Métodos Diretos*) ou *aproximada* (*Métodos Iterativos*). Estas sequências de passos que fornecem a solução exata foi apresentada no escalonamento de Sistemas Lineares. As soluções aproximadas, encontradas por *Métodos Iterativos*, que são aqueles que fornecem uma sequência de soluções aproximadas, em que cada solução aproximada é obtida da anterior pela aplicação de um mesmo procedimento. Neste trabalho serão apresentados os Métodos de Jacobi-Richardson e suas modificações.

Dado um Sistema Linear $AX = B$ que possui solução única, sendo A a matriz dos coeficientes das equações, X a matriz coluna das incógnitas e B a matriz coluna dos termos independentes das equações, com A não singular, pode-se determinar uma sequência de soluções aproximadas.

Para determinar a solução de um Sistema Linear por Métodos Iterativos, se faz necessário transformar o Sistema Linear dado em outro Sistema Linear equivalente no qual possa ser definido um processo iterativo, e ainda que a solução desse sistema transformado seja solução do Sistema Linear original.

Considere que o Sistema Linear $AX = B$ seja transformado num Sistema Linear equivalente da forma

$$X = HX + G.$$

Assim, a partir de uma solução aproximada inicial $X^{(0)}$, encontra-se a sequência de

soluções aproximadas considerando o processo iterativo:

$$X^{(k+1)} = HX^{(k)} + G$$

sendo $k = 0, 1, 2, \dots$ e H é a *matriz iterativa* ou *matriz de iteração* de ordem n e G é uma matriz $n \times 1$ [14]. Dessa forma, a partir de uma aproximação inicial $x^{(0)}$ para a solução exata \bar{x} do sistema linear $AX = B$, encontra-se as seqüências de soluções aproximadas $x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, \dots$ que sejam convergentes para a solução \bar{x} , isto é,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = \bar{x}.$$

Para a apresentação dos Métodos Iterativos, algumas definições são necessárias.

Definição 2.29. Norma de Vetor

Chama-se *norma de um vetor*¹ $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, o número real obtido por uma função tal que:

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow \|x\| \end{aligned}$$

Satisfazendo as seguintes condições:

- 1) $\|x\| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n; \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (*vetor nulo*);
- 2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|; \forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ e } x \in \mathbb{R}^n$;
- 3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, x, y \in \mathbb{R}^n$ (*desigualdade triangular*).

De forma especial será definido Normas usuais para vetores de \mathbb{R}^n :

- $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ com $p \geq 1$;
- $\|x\|_\infty = \max \{ |x_i|, 1 \leq i \leq n \}$.

Como ilustração, considere $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, segue assim:

- $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n| = \sum_{i=1}^n |x_i|$;
- $\|x\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$;
- $\|x\|_\infty = \max \{ |x_1|, |x_2|, \dots, |x_n| \} = \max_{1 \leq i \leq n} \{ |x_i| \}$.

¹Chama-se de *vetor* uma *n-upla* de \mathbb{R}^n . Um vetor é uma matriz linha ou coluna, que será representado neste trabalho por letras minúsculas

Definição 2.30. Norma de Matriz

Chama-se *norma de uma matriz* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, o número real obtido por uma função tal que:

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R} \\ A &\rightarrow \|A\| \end{aligned}$$

Satisfazendo as seguintes condições:

- 1) $\|A\| \geq 0$; $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$ (*matriz nula*);
- 2) $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$; $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ e $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$;
- 3) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$; $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

De forma especial será definido Normas usuais para uma matriz $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

- $\|A\|_1 = \|A\|_C = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right\}$ (*norma coluna*);
- $\|A\|_\infty = \|A\|_L = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right\}$ (*norma linha*);
- $\|A\|_2 = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n (a_{ij})^2}$ (*norma Euclidiana*).

A utilização de método iterativo dependerá se as soluções aproximadas encontradas em cada iteração irão convergir para a solução do Sistema Linear ou não. Será utilizado o *critério geral de convergência*, para garantir a aplicabilidade de um método iterativo.

Definição 2.31. Convergência de Sequência

Dada uma sequência de vetores $x^{(k)} \in \mathbb{R}^n$ e uma norma qualquer sobre \mathbb{R}^n , dizemos que a sequência $\{x^{(k)}\}$ converge para $x \in \mathbb{R}^n$ se, $\|x^{(k)} - x\| \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$.

Teorema 2.32. Critério Geral de convergência

O método iterativo definido como $X^{(k+1)} = HX^{(k)} + G$ é convergente se, para qualquer norma de matrizes tem-se que $\|H\| < 1$ [15].

Uma vez verificada a possibilidade de aplicar um método iterativo para resolver aproximadamente um sistema linear, se faz necessário estabelecer um critério de parada do processo. Ao aplicar-se um processo iterativo para resolver um Sistema Linear da forma $AX = B$ escolhe-se uma aproximação inicial, digamos $x^{(0)}$, para a solução aproximada do Sistema Linear. Uma vez adotada esta aproximação inicial e um método iterativo,

procura-se refinar a solução até encontrar uma aproximação com determinada precisão (equivale a encontrar uma aproximação com certo número de casas decimais corretas).

Para determinar a solução com uma determinada precisão ϵ deve-se, durante o método iterativo, fazer o teste.

Critério de parada

Se $\frac{\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|_\infty}{\|x^{(k+1)}\|_\infty} < \epsilon$, sendo ϵ é uma precisão pré-fixada, $x^{(k)}$ e $x^{(k+1)}$ são duas aproximações consecutivas para \bar{x} , então $x^{(k+1)}$ é a solução procurada, isto é, adota-se $\bar{x} = x^{(k+1)}$.

2.4.1 Método de Jacobi-Richardson

Considerando um sistema de equações lineares $AX = B$, sendo $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e A não singular, com a diagonal principal não nula, isto é, $a_{ii} \neq 0$.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}.$$

Desenvolvendo de forma conveniente as equações pode-se dividir cada equação pelo coeficiente da diagonal principal da respectiva equação e explicitando x_1 na 1ª equação, x_2 na 2ª equação, x_3 na 3ª equação e x_n na n-ésima equação:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \dots - a_{1n}x_n) \\ x_2 = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \dots - a_{2n}x_n) \\ \vdots \\ x_n = \frac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \dots - a_{nn-1}x_{n-1}) \end{cases}.$$

Na forma matricial tem-se:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & -\frac{a_{13}}{a_{11}} & \dots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & -\frac{a_{23}}{a_{22}} & \dots & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n2}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n3}}{a_{nn}} & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \frac{b_2}{a_{22}} \\ \vdots \\ \frac{b_n}{a_{nn}} \end{bmatrix}.$$

Dessa forma, pode-se escrever:

$$X = HX + G.$$

Sendo $H = (h_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $G = (g_i) \in \mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{R})$ com $h_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{se } i = j \\ -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}, & \text{se } i \neq j \end{cases}$ e $g_i = \frac{b_i}{a_{ii}}$. A matriz H é a matriz iterativa. Assim define-se o **Método Iterativo de Jacobi-Richardson**:

$$X^{(k+1)} = HX^{(k)} + G, \text{ com } k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

De forma equivalente tem-se:

$$\begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & -\frac{a_{13}}{a_{11}} & \dots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & -\frac{a_{23}}{a_{22}} & \dots & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n2}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n3}}{a_{nn}} & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \frac{b_2}{a_{22}} \\ \vdots \\ \frac{b_n}{a_{nn}} \end{bmatrix}.$$

Pode-se escrever:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2^{(k)} - \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3^{(k)} - \dots - \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n^{(k)} + \frac{b_1}{a_{11}} \\ x_2^{(k+1)} = -\frac{a_{21}}{a_{22}}x_1^{(k)} - \frac{a_{23}}{a_{22}}x_3^{(k)} - \dots - \frac{a_{2n}}{a_{22}}x_n^{(k)} + \frac{b_2}{a_{22}} \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} = -\frac{a_{n1}}{a_{nn}}x_1^{(k)} - \frac{a_{n2}}{a_{nn}}x_2^{(k)} - \dots - \frac{a_{nn-1}}{a_{nn}}x_{n-1}^{(k)} + \frac{b_n}{a_{nn}} \end{cases}.$$

Uma observação importante a respeito da convergência do método de Jacobi-Richardson considerando $\|H\|$ é que se $\|H\| \ll 1$ (lê-se: norma de H muito menor do que 1), então $\|x^{(k)} - x\| \rightarrow 0$ rapidamente, ou seja, a sequência das soluções aproximadas converge para a solução do sistema rapidamente. Agora se $\|H\| \approx 1$, mas com $\|H\| < 1$, a convergência ocorre, porém de forma lenta [15].

A convergência das soluções aproximadas para o método de Jacobi-Richardson depende da matriz H , o que não é uma forma elegante de verificação, uma vez que será necessário obter a matriz H . Sendo assim será apresentado critérios para garantir a convergência das soluções aproximadas pelo método de Jacobi-Richardson que dependerão exclusivamente da matriz dos coeficientes das equações do sistema.

Critérios de convergência

O método Jacobi-Richardson converge se pelo menos uma das sentenças a seguir for satisfeita:

1. o **critério das linhas** for satisfeito, isto é, se:

$$\max_{1 \leq i \leq n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| < 1.$$

2. o **critério das colunas** for satisfeito, isto é, se:

$$\max_{1 \leq j \leq n} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| < 1.$$

Uma outra maneira de garantir a convergência será verificando se a matriz é **estritamente diagonalmente dominante** [15], o que ocorre na maioria dos casos da engenharia civil.

Definição 2.33. Matriz Estritamente Diagonalmente Dominante

Uma matriz $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ é dita **estritamente diagonalmente dominante** se:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| < |a_{ii}|, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Se a matriz dos coeficientes é estritamente diagonalmente dominante o critério das linhas é satisfeito. De fato, se a condição da definição 2.33 é satisfeita para todo i , então se dividir cada equação pelo correspondente elemento da diagonal principal tem-se que:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| < |a_{ii}|, \quad 1 \leq i \leq n \Rightarrow \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| < \left| \frac{a_{ii}}{a_{ii}} \right|, \quad 1 \leq i \leq n \Rightarrow \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| < 1, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Portanto, tem-se mais um critério de convergência, isto é, pode-se verificar se o método de Jacobi-Richardson converge testando se a matriz dos coeficientes é estritamente diagonalmente dominante.

2.4.2 Método de Gauss-Seidel

O método de Gauss-Seidel é conhecido como o método de Jacobi-Richardson modificado. Para tanto, considerando um sistema de equações lineares do tipo $AX = B$, sendo

$A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e A não singular, com a diagonal principal não nula, isto é, $a_{ii} \neq 0$.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

De forma análoga com o que foi feito no método de Jacobi-Richardson apresentado na seção 2.4.1, tem-se dividindo cada equação pelo coeficiente da diagonal principal da respectiva equação e explicitando x_1 na 1ª equação, x_2 na 2ª equação, x_3 na 3ª equação e x_n na n -ésima equação, tem-se o sistema equivalente:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \dots - a_{1n}x_n) \\ x_2 = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \dots - a_{2n}x_n) \\ \vdots \\ x_n = \frac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \dots - a_{nn-1}x_{n-1}) \end{cases}$$

Atribuindo a solução inicial $X^{(0)}$ o método iterativo de Gauss-Seidel é dado:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2^{(k)} - \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3^{(k)} - \dots - \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n^{(k)} + \frac{b_1}{a_{11}} \\ x_2^{(k+1)} = -\frac{a_{21}}{a_{22}}x_1^{(k+1)} - \frac{a_{23}}{a_{22}}x_3^{(k)} - \dots - \frac{a_{2n}}{a_{22}}x_n^{(k)} + \frac{b_2}{a_{22}} \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} = -\frac{a_{n1}}{a_{nn}}x_1^{(k+1)} - \frac{a_{n2}}{a_{nn}}x_2^{(k+1)} - \dots - \frac{a_{nn-1}}{a_{nn}}x_{n-1}^{(k+1)} + \frac{b_n}{a_{nn}} \end{cases}$$

Note que da forma que o processo é executado, uma vez determinado $x_1^{(1)}$ pode-se utilizá-lo na aproximação de $x_2^{(1)}$ e assim por diante na 1ª iteração. Assim uma vez calculado o i -ésimo termo da solução aproximada já se faz o uso dele na determinação do $(i+1)$ -ésimo seguinte e assim sucessivamente.

Na forma matricial tem-se:

$$\begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n2}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n3}}{a_{nn}} & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & -\frac{a_{13}}{a_{11}} & \dots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ 0 & 0 & -\frac{a_{23}}{a_{22}} & \dots & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \frac{b_2}{a_{22}} \\ \vdots \\ \frac{b_n}{a_{nn}} \end{bmatrix}$$

Dessa forma, pode-se escrever:

$$X^{(k+1)} = PX^{(k+1)} + QX^{(k)} + G.$$

Sendo que $P = (p_{ij})$, $Q = (q_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ onde p_{ij} e q_{ij} são dados por:

$$p_{ij} = \begin{cases} -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}, & \text{se } i > j \\ 0, & \text{se } i \leq j \end{cases}, \quad q_{ij} = \begin{cases} -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}, & \text{se } i < j \\ 0, & \text{se } i \geq j \end{cases} \quad \text{e } g = \frac{b_i}{a_{ii}}.$$

Da expressão matricial $X^{(k+1)} = PX^{(k+1)} + QX^{(k)} + G$ tem-se o Método Iterativo de Gauss-Seidel:

$$(I_n - P)X^{(k+1)} = QX^{(k)} + G.$$

Com I_n representando a matriz identidade tem-se que a matriz $(I_n - P)$ é invertível por ser triangular, e multiplicando ambos os membros da expressão, tem-se:

$$X^{(k+1)} = (I_n - P)^{-1} QX^{(k)} + (I_n - P)^{-1} G.$$

Fazendo $H^* = (I_n - P)^{-1} Q$ como a matriz iterativa e $G^* = (I_n - P)^{-1} G$ escreve-se o **Método Iterativo de Gauss-Seidel** como:

$$X^{(k+1)} = H^* X^{(k)} + G^*, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

O método de Gauss-Seidel também é conhecido por **Método dos Deslocamentos Sucessivos**.

Será apresentado a seguir critérios para garantir a convergência da sequência de soluções aproximadas geradas pelo Método Iterativo de Gauss-Seidel.

Critérios de convergência

O método de Gauss-Seidel poderá ser aplicado se um dos resultados seguintes for satisfeito.

1. Se o **Critério de Sassenfeld** for satisfeito, ou seja, se

$$\beta = \max_{1 \leq i \leq n} \beta_i < 1,$$

em que as constantes β_i são definidas pelas seguintes fórmulas de recorrência:

$$\beta_i = \sum_{j=1}^{i-1} |h_{ij}| \beta_j + \sum_{j=i+1}^n |h_{ij}|, \quad 1 \leq i \leq n.$$

2. Se o **critério das linhas** for satisfeito, isto é, se:

$$\max_{1 \leq i \leq n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| < 1.$$

3. A matriz dos coeficientes for **estritamente diagonalmente dominante**.

As demonstrações destes critérios podem ser encontradas em [14]. A convergência para os métodos de Jacobi-Richardson e de Gauss-Seidel não depende da solução inicial $x^{(0)}$ dada.

2.5 Considerações Finais

Abordou-se toda a fundamentação teórica de Matrizes e Sistemas Lineares, com definições e principais resultados. Foram exibidos métodos de resolução de Sistemas Lineares, classificados como Diretos e Iterativos, sendo este último visto somente em cursos de graduações na área de Ciências Exatas. O método direto mais usado no ensino médio é o escalonamento, também chamado por alguns autores de eliminação de Gauss com retrosubstituição, essa forma de resolver um Sistema Linear pode-se dizer que é mais simples, pois utiliza somente as operações elementares sobre as equações. Foi apresentado a necessidade do tratamento matricial dado à Sistemas Lineares, uma vez que a implementação computacional é usual para resolver problemas reais por tratarem de situações que envolvem elevado número de incógnitas e equações.

Capítulo 3

Determinante e Matriz Inversa

Neste capítulo será apresentado a definição de *Determinante* de uma matriz quadrada e um procedimento de como determiná-lo. O Determinante, que formalmente é obtido de forma trivial, é obtido com operações que envolvem todos os coeficientes das equações de um Sistema Linear. Uma das aplicações de Determinante ocorre na resolução de alguns Sistemas Lineares. Para o desenvolvimento do tema algumas definições serão necessárias para melhorar a compreensão do assunto.

3.1 Determinante

Inicialmente considere um número natural $n \geq 1$ e o conjunto $N_n = \{1, 2, \dots, n\}$.

Definição 3.1. Permutações

Chama-se *permutação* do conjunto N_n a toda função bijetora $\sigma : N_n \rightarrow N_n$.

Notação: Uma permutação σ de N_n será representada por:

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{bmatrix}$$

Por exemplo, em $N_3 = \{1, 2, 3\}$ existem 6 ($=3!$) permutações, a saber:

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \sigma_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \sigma_4 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\sigma_5 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ e } \sigma_6 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Definição 3.2. Sinal da Permutação

Considere uma permutação de N_n .

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{bmatrix}$$

Seja r o número de pares ordenados (i, j) com $1 \leq i < j \leq n$ tais que $\sigma(i) > \sigma(j)$. Chama-se *sinal da permutação* σ o número inteiro denotado por $s(\sigma)$, definido por:

$$s(\sigma) = \begin{cases} 1, & \text{se } r \text{ é par} \\ -1, & \text{se } r \text{ é ímpar} \end{cases}.$$

Considerando as 6 permutações de $N_3 = \{1, 2, 3\}$, segue que: $s(\sigma_1) = s(\sigma_5) = s(\sigma_6) = 1$ e $s(\sigma_2) = s(\sigma_3) = s(\sigma_4) = -1$.

Paridade da permutação

Diz que uma permutação σ é *par* (respectivamente, *ímpar*) se $s(\sigma) = 1$ (respectivamente, $s(\sigma) = -1$).

Definição 3.3. Determinante

Seja $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Dá-se o nome de *determinante da matriz* A ao número real obtido pela seguinte expressão:

$$\det A = \sum_{\sigma} s(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdot \dots \cdot a_{n\sigma(n)}.$$

Sendo que σ representa todas as permutações de N_n , dessa forma a somatória terá $n!$ parcelas. A notação usual para o determinante de uma matriz quadrada A são as seguintes: $\det A$ ou $|A|$.

Da forma com que é definido o Determinante de uma matriz quadrada percebe-se que em cada parcela do somatório aparecerá apenas um único elemento de cada linha e um único elemento de cada coluna.

As proposições que serão apresentadas tem a finalidade de minimizar a quantidade de operações a serem desenvolvidas para obtenção do determinante de uma matriz quadrada. Estas serão divididas em alguns casos: quando o Determinante será nulo, o que não altera o determinante, as manipulações que podem ser feitas de modo que se saiba a interferência desta no determinante e ainda algumas relações entre Determinante e operações com matrizes.

Proposição 3.4. *Seja $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, tem-se que o:*

(i) *Determinante será nulo quando:*

- A possuir uma fila (linha ou coluna) com todos os elementos nulos;
- A possuir duas filas (linhas ou colunas) iguais ou proporcionais;
- A possuir uma fila (linha ou coluna) como sendo a combinação linear de outras duas filas paralelas a ela;

(ii) *Determinante não será alterado quando:*

- Escreve-se a matriz transposta de A , ou seja, $\det A = \det A^T$.
- Substitui-se uma fila (linha ou coluna) pela soma dela com outra previamente multiplicada por uma constante.

(iii) *Determinante será alterado quando:*

- Troca-se duas filas paralelas de posição entre elas o determinante mudará de sinal;
- Multiplicando-se uma fila (linha ou coluna) de A por uma constante real k , seu determinante ficará multiplicado por essa mesma constante;
- Multiplicando A , por uma constante real k , seu determinante ficará multiplicado por k^n . Ou seja, $\det(kA) = k^n \det A$.

(iv) *Casos especiais.*

- O determinante do produto de duas matrizes A e B desde que possível, é o produto dos Determinante, ou seja, $\det(A.B) = \det A.\det B$.
- Uma matriz triangular (superior ou inferior) tem o determinante igual ao produto dos elementos da diagonal principal.
- O determinante da *matriz identidade* de ordem n é igual a 1, ou seja, $\det(I_n) = 1$.

Caso particular:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{i1} + c_{i1} & \cdots & b_{in} + c_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Deve-se tomar cuidado pois tem-se a soma de uma linha, e não uma soma de matrizes. De modo geral, o determinante da soma de duas matrizes A e B não é a soma dos Determinante dessas matrizes, ou seja, $\det (A + B) \neq \det A + \det B$. Todas estas demonstrações são encontradas em [10] e [12].

Quando se deseja obter o determinante de uma matriz quadrada de ordem superior a 3 se torna desconfortável sua manipulação manual através da definição 3.3, uma vez que a quantidade de parcelas da somatória é $n!$. Dessa forma, será apresentado um método que minimiza essas operações.

3.2 Desenvolvimento de Laplace

O desenvolvimento de Laplace é uma fórmula de recorrência que permite calcular o determinante de uma matriz de ordem n , a partir dos Determinante das submatrizes quadradas de ordem $n - 1$.

Obtenção do Determinante de uma matriz de ordem 3 genérica através da definição.

Seja $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$. Assim tem-se que:

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

É possível reescrever a soma como:

$$\det A = a_{11} (a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12} (a_{21}a_{33} + a_{23}a_{31}) + a_{13} (a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}).$$

Ou ainda,

$$\det A = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Note que o determinante de $A_{3 \times 3}$, pode ser reescrito em função dos Determinante de submatrizes 2×2 , isto é,

$$\det A = a_{11} |A_{11}| - a_{12} |A_{12}| + a_{13} |A_{13}|,$$

onde A_{ij} é a submatriz de A , na qual a i -ésima linha e a j -ésima coluna foram retiradas.

Definição 3.5. Cofator do elemento a_{ij}

Define-se por *cofator* ou *complemento algébrico* do elemento a_{ij} ao número Δ_{ij} (que é modificado pelo sinal de $(-1)^{i+j}$ da submatriz A_{ij} , obtida de A omitindo-se a i -ésima linha e a j -ésima coluna). Dessa forma o cofator de a_{ij} é dado por:

$$\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot |A_{ij}|.$$

Sendo assim obtém-se a expressão:

$$\det A = a_{11}\Delta_{11} + a_{12}\Delta_{12} + a_{13}\Delta_{13}.$$

A fórmula apresentada foi desenvolvida pela i -ésima linha que de forma análoga é válida para as colunas. Uma demonstração para o desenvolvimento de Laplace para uma matriz de ordem n é encontrada em [16]. O desenvolvimento continua sendo válido para matrizes de ordem n , e assim pode-se escrever:

$$\begin{aligned} \det A &= a_{i1}\Delta_{i1} + \dots + a_{in}\Delta_{in} \\ &= \sum_{j=1}^n a_{ij}(-1)^{i+j} \det(A_{ij}) \\ &= \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot \Delta_{ij} \end{aligned}$$

Definição 3.6. Matriz Adjunta

Seja $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, pode-se formar uma nova matriz com os respectivos cofatores dos elementos a_{ij} da matriz A . Esta matriz é chamada de *matriz dos cofatores* de A . A notação utilizada aqui para essa matriz será:

$$\bar{A} = (A_{ij})$$

Chama-se *matriz adjunta* de A a transposta da matriz dos cofatores de A . Tem-se:

$$\text{adj } A = (\bar{A})^T$$

3.3 Obtenção da Matriz Inversa por Determinante

Seja $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, invertível, isto é, existe A^{-1} tal que $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$. Usando a propriedade $\det(AB) = \det A \cdot \det B$ tem-se:

$$\begin{aligned} \det(AA^{-1}) &= \det I_n \\ \det(A) \cdot \det(A^{-1}) &= 1 \end{aligned}$$

Como consequência desse resultado tem-se que A tem inversa se, e somente se,

$$\det A \neq 0 \quad \text{e} \quad \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

Teorema 3.7. Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admite inversa, então ela é dada por, $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \text{adj}A$.

Propriedades

Sejam $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $k \in \mathbb{R}$ com $k \neq 0$, então,

$$i) (A^{-1})^{-1} = A$$

$$ii) (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

$$iii) (kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$$

$$iv) (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

Demonstração. (i) Seja $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Suponha que A é invertível e que sua inversa seja a matriz A^{-1} . Dessa forma:

$$AA^{-1} = I_n = A^{-1}A$$

Logo, A^{-1} também é invertível e sua inversa é $(A^{-1})^{-1} = A$.

(ii) Sejam $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Suponha que A e B são invertíveis e que suas inversas sejam respectivamente A^{-1} e B^{-1} . Então:

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n \text{ e}$$

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}I_nB = B^{-1}B = I_n$$

Portanto, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. ■

A demonstração das demais propriedades pode ser encontrada em [11].

3.4 Procedimento para a Inversão de Matrizes

Teorema 3.8. *Se A é uma matriz invertível, sua matriz linha reduzida à forma escada, R , é a identidade. Além disso, A^{-1} é dada por um produto de matrizes elementares [10].*

Um procedimento para se obter a inversa de uma matriz quadrada de ordem n será dado pela recíproca deste teorema. Suponha que ao reduzir A à forma escada linha reduzida, a matriz identidade seja obtida como resultado. Assim, como a cada operação com linhas corresponde uma multiplicação por uma matriz elementar, E_i , tem-se então:

$$\begin{aligned} I_n &= E_k \cdot E_{k-1} \cdot \dots \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A \\ I_n &= (E_k \cdot E_{k-1} \cdot \dots \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot I_n) \cdot A \end{aligned}$$

Como a inversa de uma matriz é única segue que, $E_k \cdot E_{k-1} \cdot \dots \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot I_n = A^{-1}$.

Teorema 3.9. *Se uma matriz A real quadrada pode ser reduzida à matriz identidade, por sequência de operações elementares com linhas, então A é inversível e a matriz inversa de A é obtida a partir da matriz identidade, aplicando-se a mesma sequência de operações com linhas.*

O teorema 3.9 informa que operando simultaneamente com as matrizes A e I_n , através de operações elementares, até chegar à matriz I_n na posição correspondente à matriz A , a matriz obtida no lugar correspondente à matriz I_n será a inversa de A .

$$\left(A : I_n \right) \rightarrow \left(I_n : A^{-1} \right)$$

3.5 Aplicação de Determinante em Sistemas Lineares - Regra de *Cramer*

Um método para resolver um sistema de equações lineares pode ser obtido através da inversão de matrizes. Porém, este somente é aplicado a Sistemas Lineares em que o número de equações é igual ao número de incógnitas. Para efeito, seja um Sistema Linear de n equações e n incógnitas.

$$S : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Na forma matricial,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \Rightarrow AX = B$$

Suponha que $\det A \neq 0$, portanto A admite inversa. Assim segue,

$$AX = B \Leftrightarrow A^{-1}(AX) = A^{-1}B \Leftrightarrow (A^{-1}A)X = A^{-1}B \Leftrightarrow I_n X = A^{-1}B \Leftrightarrow X = A^{-1}B.$$

Na forma matricial tem-se

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Usando a relação $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \text{adj } A$ segue,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \dots & \Delta_{n1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_{1n} & \Delta_{2n} & \dots & \Delta_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Então

$$x_1 = \frac{b_1 \cdot \Delta_{11} + \dots + b_n \cdot \Delta_{n1}}{\det A}$$

O numerador desta fração é igual ao Determinante da matriz que se obtém de A , substituindo a primeira coluna pela matriz dos termos independentes, que de fato ocorre, uma vez que usando o Desenvolvimento de Laplace, tem-se:

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = b_1 \cdot \Delta_{11} + \dots + b_n \cdot \Delta_{n1}$$

Ou seja,

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}.$$

De forma análoga, com $i = 1, 2, \dots, n$, tem-se que:

$$x_i = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}.$$

Desse modo, a solução de um sistema de equações lineares pode ser escrito como frações sendo que no denominador tem-se o determinante da matriz dos coeficientes A , desde que $\det A \neq 0$, e no numerador aparece o determinante da matriz obtida de A , substituindo a i -ésima coluna pela coluna dos termos independentes. Este método, chamado *Regra de Cramer*, pode ser aplicado somente em Sistemas Lineares com n equações e n incógnitas que tem o determinante da matriz dos coeficientes não nulo.

Nota-se nesse método que a quantidade de operações que devem ser realizadas é grande, uma vez que as incógnitas são obtidas por razões de Determinante e a obtenção destes leva a necessidade de um número grande de somas de produtos.

3.6 Considerações Finais

Foi definido formalmente o determinante de uma matriz quadrada real e uma notação utilizada não muito usual durante o ensino médio. Destacou-se as propriedades que envolvem tal conceito, evidenciando a importância do seu uso para um cálculo analítico. Verificou-se que uma das aplicações de determinante se dá na resolução de Sistemas Lineares, por meio da Regra de *Cramer* e também para a obtenção da matriz inversa. Foi apresentado um processo para obtenção da matriz inversa que utiliza operações elementares.

Capítulo 4

Aplicações de Sistemas Lineares e Determinante - Treliças e Vibrações

Este trabalho foi desenvolvido com o objetivo de apresentar aplicações de Sistemas Lineares e Determinante na resolução de problemas reais ligados à engenharia. Assim serão apresentados nesse capítulo algumas situações que podem ser formuladas e resolvidas utilizando-se Sistemas Lineares e/ou Determinante. Entretanto, para isso será necessário a utilização de alguns conceitos da física, que será considerado conhecido pelo leitor. Os problemas poderiam ser resolvidos através de outras ferramentas, porém a escolha do método foi feito de modo a aplicação das teorias apresentadas até aqui. Inicialmente será visto sobre um elemento estrutural largamente utilizado nas engenharias, as *treliças*, que em alguns casos são estruturas que utilizam menos material para sua fabricação, conseqüentemente, tornando mais leve e com custo menor, do que se fosse uma estrutura maciça. A aplicação de Determinante será feita no estudo dos modos de vibração livre e não forçada de um pórtico idealizado.

4.1 Treliças

São conhecidas por *treliças* as *estruturas* de elementos consideravelmente esbeltos (peças onde a área de seção transversal é pequena em relação ao seu comprimento) que são ligados entre si pelas extremidades, figura 4.1. Entende-se por *estrutura* como sendo um *sistema (conjunto)* de partes conectadas para suportar uma carga [17].



Figura 4.1: Modelo de ponte treliçada [18].

Essas estruturas são utilizadas em construções feitas com diversos tipos de materiais, tais como: *madeira*, *aço*, *alumínio* e outros, que são usualmente unidas uns aos outros através de uma *ligação com placa* onde essas barras são aparafusadas ou soldadas, figura 4.2(a), ou ainda podem ser unidas por um grande parafuso ou pino que perfura cada um dos elementos, figura 4.2(b), ou ainda por outros nós especiais.

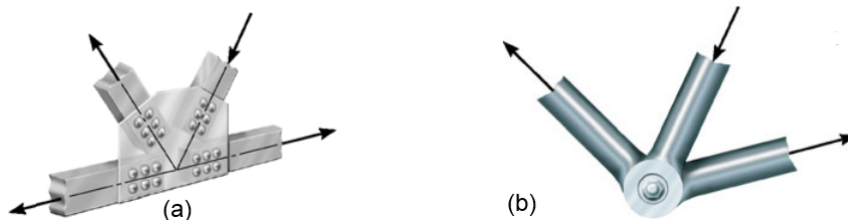


Figura 4.2: Placa de reforço (a) e Ligação com pino (b) [18].

4.1.1 Classificação quanto à formação

Considerando a disposição espacial, as treliças podem ser *planas* ou *espaciais*, de acordo com que suas barras e forças externas estejam em um mesmo plano ou não. Entretanto, treliça plana costuma ser a idealização de parte de uma estrutura espacial, como pode ser observado no esquema ponte, representada na figura 4.3. Neste trabalho serão considerados somente aplicações idealizadas com treliças planas.

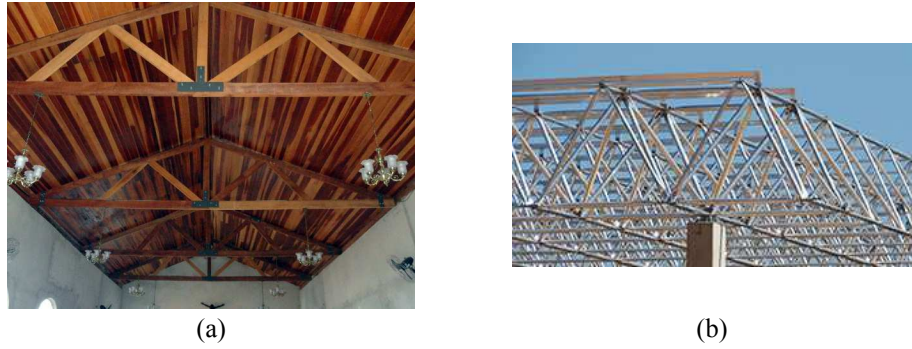


Figura 4.3: Treliças Planas (a) e Espaciais (b).

Será considerada uma *treliça ideal* um sistema reticulado cujas barras têm todas as extremidades rotuladas e são dispostas de tal forma a formar triângulos cujas cargas estão aplicadas apenas em seus nós [17].

Uma preocupação que se deve ter na concepção de uma estrutura treliçada é sua estabilidade, de modo que a treliça seja suficientemente rígida. É intuitivo que a geometria das quatro barras $ABCD$, figura 4.4(a), não será estável, a menos que seja adicionado um elemento diagonal AC à estrutura. A forma geométrica mais simples que seja rígida ou estável é a de um *triângulo*. Sendo assim, uma *treliça simples* é construída a partir de uma estrutura triangular, tal como ABC na figura 4.4(b), e em seguida acrescentando-se dois elementos (AD e BD) para formar outra estrutura triangular.

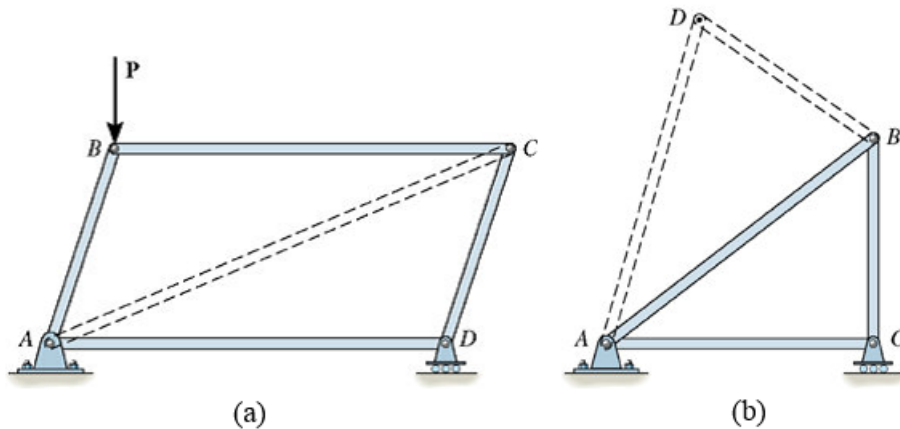


Figura 4.4: Estrutura instável (a) e Estrutura estável (b) [18].

Quanto aos apoios nos modelos de treliças, vale ressaltar que serão utilizados dois tipos, os *móveis* (*apoios de 1^o gênero*) que são aqueles que restringem a estrutura em movimentos verticais ou horizontais e, os *fixos* (*apoios de 2^o gênero*) que são aqueles que restringem a movimentação horizontal e vertical da estrutura.

As treliças são classificadas quanto à formação em: Simples, Compostas e Complexas.

Treliça Simples: Uma *treliça simples* pode ser formada a partir de três barras birrotuladas ligadas em forma de triângulo, à qual são acrescentadas duas barras não colineares ligadas por meio de uma rótula, e assim sucessivamente, com mais duas novas barras e uma rótula. Dessa forma, o conjunto de barras é estável, ou seja, suas partes não tem possibilidade de deslocamento relativo entre si. E ao acrescentar a esse conjunto apoios que impeçam deslocamentos do corpo rígido, obtém-se uma treliça plana simples isostática, figura 4.5 [19].

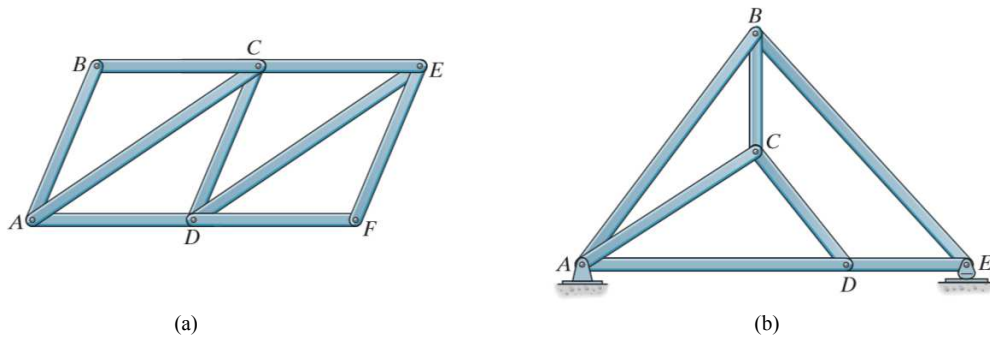


Figura 4.5: Treliça Simples [18].

Treliça Composta: Toda *treliça composta* é formada a partir de treliças simples de maneira que não haja deslocamento relativo entre essas treliças e o conjunto não seja outra treliça simples. A ligação dessas treliças simples para formação de uma composta é feita por meio de uma rótula comum e uma barra, ou pela ligação através de duas ou três barras, como observa-se na figura 4.6(a) e (b)[19].

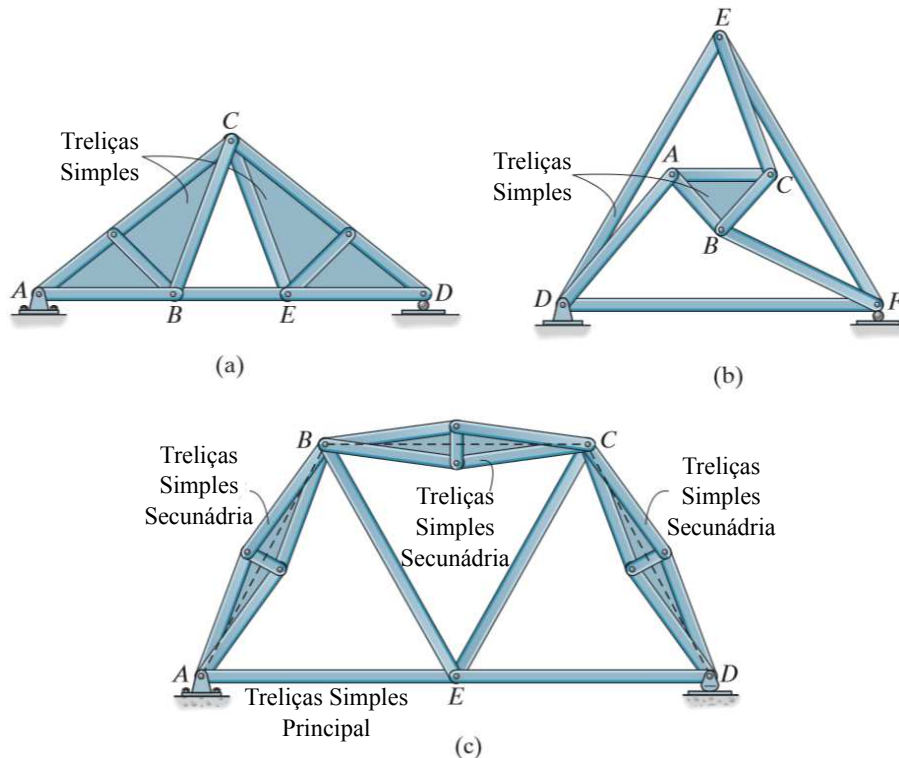


Figura 4.6: Treliças Compostas [18].

Já na figura 4.6(c), tem-se uma treliça composta que foi obtida a partir de uma treliça simples $ABCDE$, chamada de *treliça principal*, na qual foram substituídos alguns membros por outras treliças simples, chamadas aqui de *treliças secundárias*.

Treliça Complexa: Uma treliça será *complexa* quando não for nem simples nem composta, como pode ser observado na figura 4.7 [19].

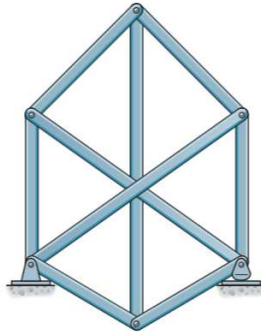


Figura 4.7: Treliça Complexa [18].

A figura 4.8 representa algumas treliças usuais para telhados, sendo que a escolha da treliça é dado de acordo com o vão a ser vencido, inclinação do telhado e ao carregamento. A treliça *Pratt* 4.8(c) é a mais utilizada nas estruturas de telhados de residências. Para grandes vãos, como hangares, o tipo usual de treliça é a representada pela 4.8(i). O tipo *Shed* 4.8(h) são geralmente usadas em indústrias ou ainda galpões, onde a iluminação uniforme é importante.

A figura 4.9, apresenta exemplos de treliças usuais em pontes, em particular, as treliças *Pratt*, *Howe* e *Warren*, são normalmente usadas para vãos de até 60 m de comprimento. Em treliças de aço é preferível que as barras mais longas estejam tracionadas para que não fiquem sujeitas à *flambagem* (fenômeno quando a peça sofre deflexão transversal quando submetida a carga axial). Como em treliças de madeira as barras são menos esbeltas, essas barras podem ser comprimidas.

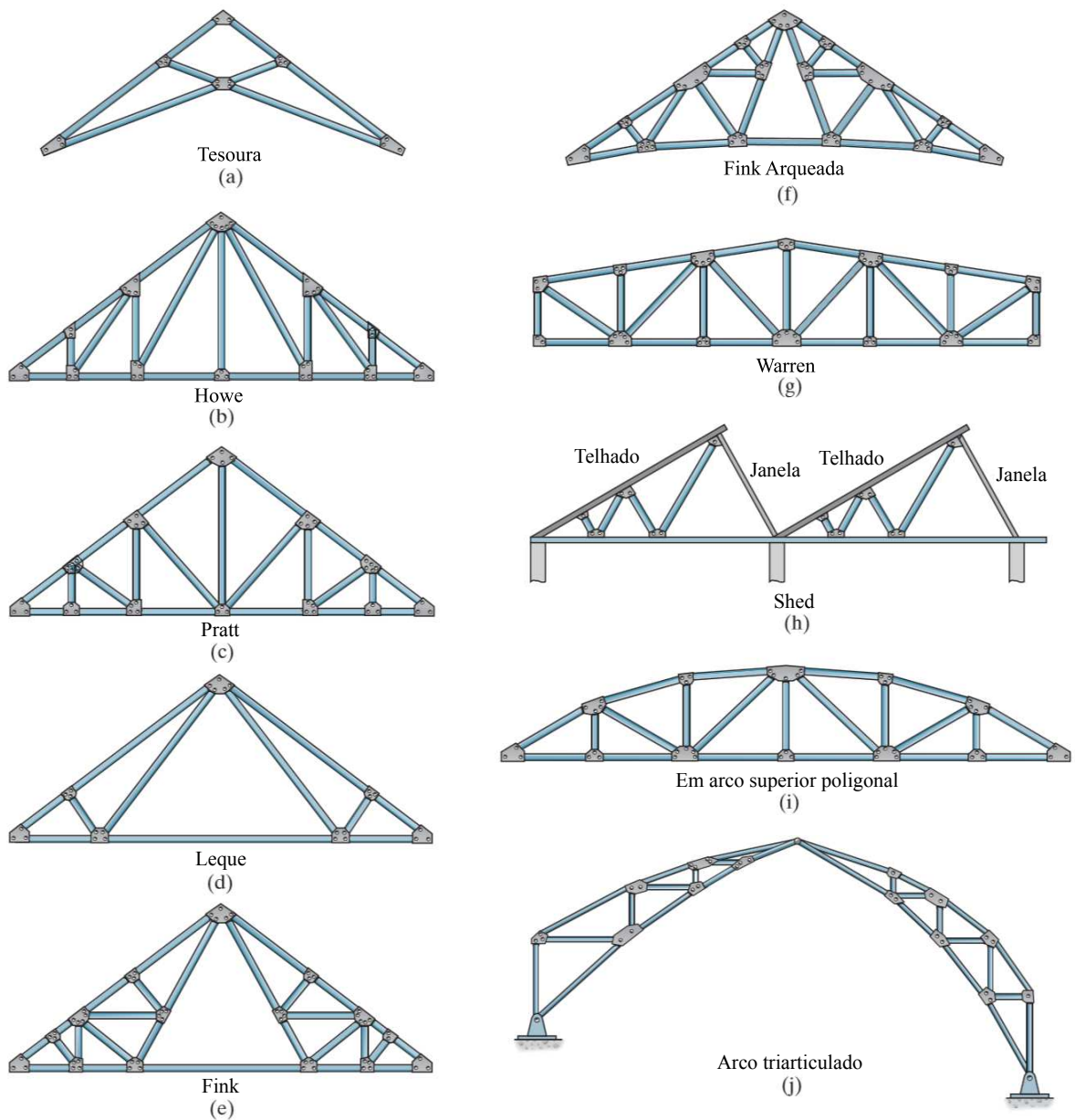


Figura 4.8: Treliças planas usadas em telhados [18].

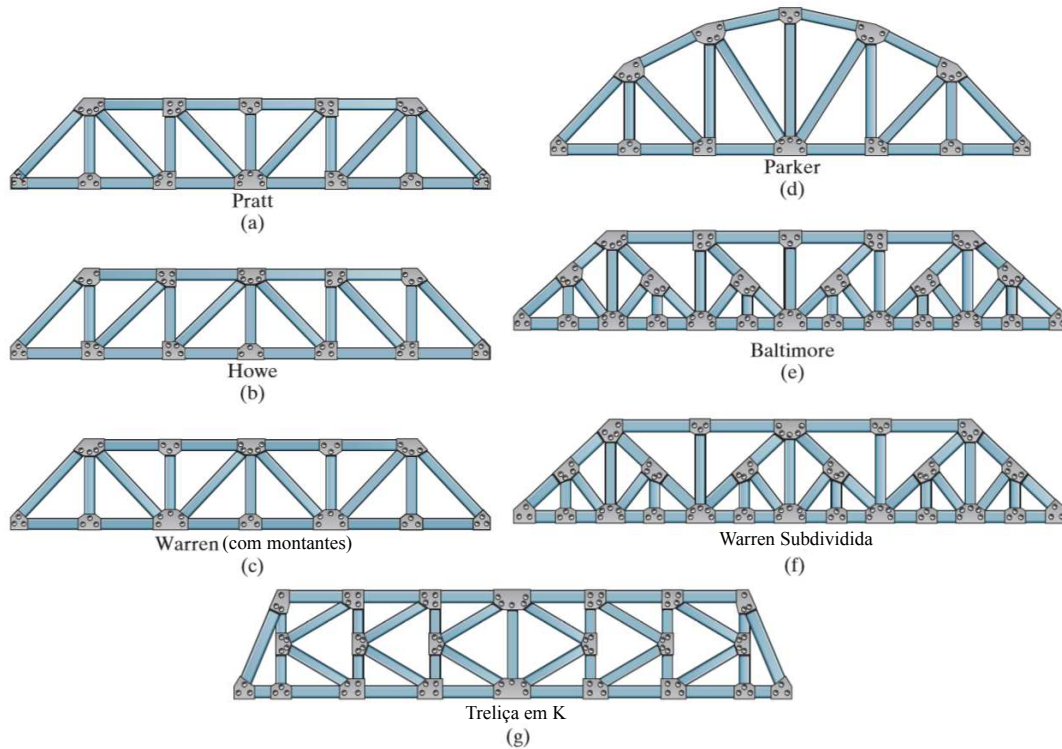


Figura 4.9: Treliças planas usadas em pontes [18].

Um exemplo de utilização dessas treliças está na figura 4.10(a), em que a treliça $ABCDE$ é um modelo típico utilizado na sustentação de telhados, chamadas de *tesouras*. Nesse modelo, a carga do telhado é transmitida à treliça nos pontos de ligação dos elementos por meio de uma série de *travessas*, usualmente chamadas de *terças*, como em DD' . A análise das forças aplicadas nos seus elementos é bidimensional, uma vez que o carregamento imposto pelo telhado atua no mesmo plano da treliça, figura 4.10(b).

No caso de uma ponte, figura 4.11(a), a carga aplicada no piso é primeiro transmitida às *longarinas*, que por suas vez transmite às *transversinas* e, finalmente, aos pontos B , C e D das duas treliças de apoio lateral. De forma análoga, como ocorre na treliça de telhado, o carregamento da treliça de ponte pode ser considerado *coplanar*, como pode ser observado na figura 4.11(b).

As treliças de pontes ou telhados quando se estendem por grandes vãos (distância a ser vencida pela estrutura), é comum apoiar uma das extremidades em *roletes* (apoio de 1º gênero ou *charriot*), ou apoios que permitam liberdade de expansão ou contração dos elementos, seja por causa da variação de temperatura ou pela aplicação de cargas, como por exemplo, no ponto E nas figuras 4.10(a) e 4.11(a).

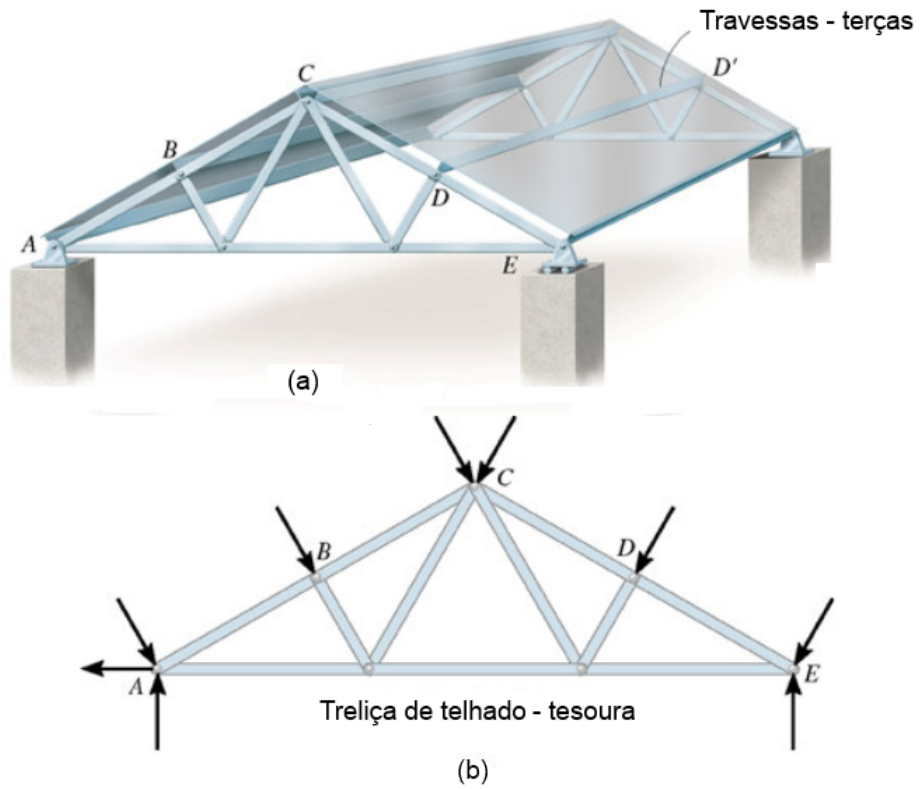


Figura 4.10: Estrutura de telhado (a) e modelo de treça - tesoura (b) [18].

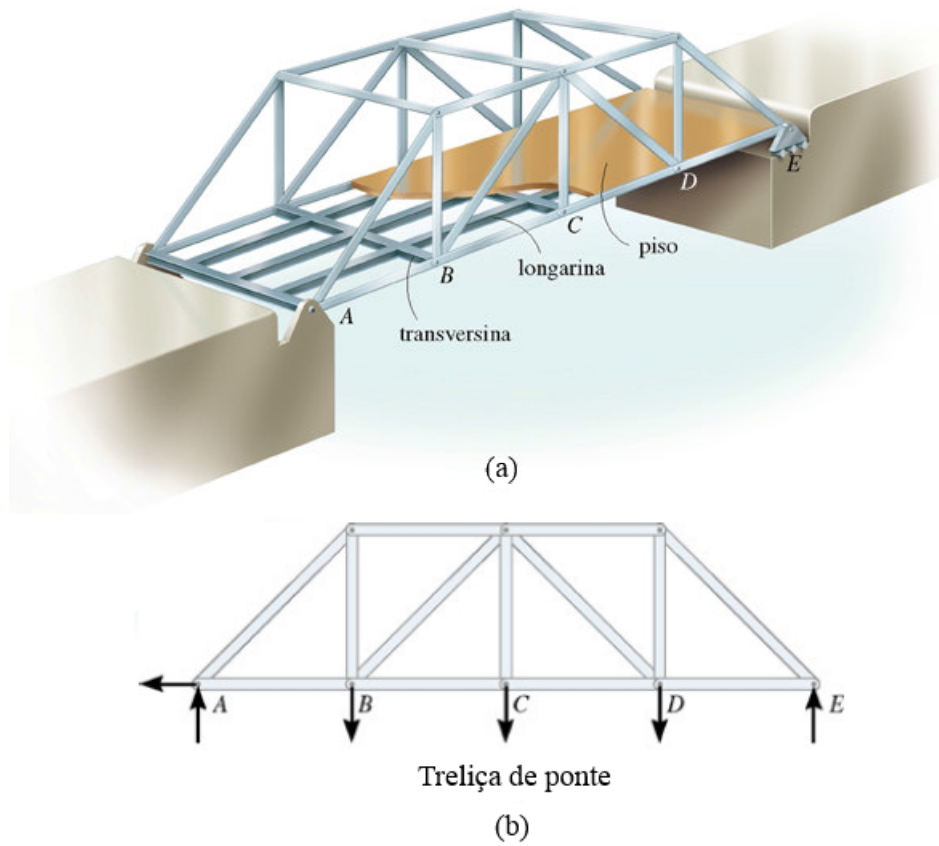


Figura 4.11: Estrutura de ponte (a) e modelo de treça de ponte (b) [18].

Para projetar os elementos e as ligações nos nós de uma treliça, é necessário, primeiramente determinar os esforços atuantes nesses elementos. Para fazer essa análise estrutural, serão consideradas duas hipóteses. A saber:

1. *Todas as cargas são aplicadas aos nós:* Geralmente ao projetar uma estrutura como treliças de pontes e telhados, essa suposição é verificada. É usual desprezar a deflexão devido o peso próprio dos elementos uma vez que os esforços normais são mais significativos.
2. *Os elementos são ligados entre si por rótulas:* Quando as conexões são feitas por parafusos ou chapas soldadas, essa suposição é satisfatória, isso por que as linhas centrais dos elementos ligados são consideradas *concorrentes*.

Considerando essas hipóteses, ocorrerá que cada elemento de treliça atua com um elemento de duas forças fazendo que as forças em suas extremidades sejam direcionadas ao longo do seu próprio eixo (forças axiais).

Chama-se *força de tração*, figura 4.12(a), aquela que tende a *alongar* o elemento, e *força de compressão*, figura 4.12(b), aquela que tende a *encurtar* o elemento.

É importante durante o análise do projeto de uma treliça identificar se os elementos estão sendo tracionados ou comprimidos, uma vez que os elementos comprimidos tem seção maior afim de evitar o efeito de deformação.

Da física, sabe-se que toda ação (força aplicada) tem como consequência uma reação (força aplicada com sentido contrário), assim se uma barra está sendo comprimida, esta exerce uma reação no nó, que tende a empurrá-lo. De forma análoga, se uma barra está sendo tracionada, esta exerce sobre o nó, uma reação que tende a puxá-lo. Pode-se verificar essas situações na figura 4.12.

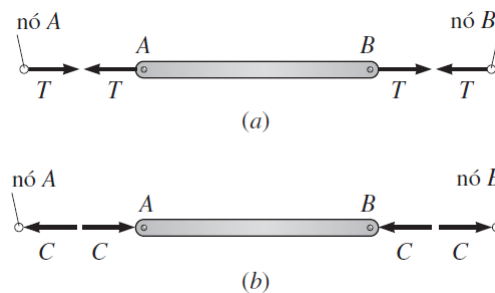


Figura 4.12: Diagramas de corpo livre de barras carregadas axialmente e nós adjacentes: (a) barra AB em tração; (b) barra AB em compressão [20].

4.1.2 Classificação quanto à estaticidade

Quando se faz a análise de uma treliça, alguns conceitos devem ser observados, a saber: a determinação e a estabilidade. De forma resumida serão apresentados esses conceitos.

Determinação: Em qualquer problema que se analise uma treliça, deve-se levar em conta o número total de incógnitas que inclui as forças atuantes no número b de barras da treliça e o número total de reações de apoio r . Assumindo que os membros da treliça são retos e com apenas forças axiais que atuam no mesmo plano, o sistema de forças atuantes em cada nó será *coplanar e concorrente*. Logo, o equilíbrio rotacional ou de momento, $\Sigma M = 0$, é seguramente satisfeito no nó, sendo assim se faz necessário satisfazer apenas as condições que evitem translação da estrutura, ou seja, $\Sigma F_x = 0$ e $\Sigma F_y = 0$. Sendo assim, pode-se escrever apenas duas equações de equilíbrio para cada nó, e se existem um número de nós igual a N , o número total de equações disponíveis para solução será $2N$. Comparando o número total de incógnitas ($b + r$) com o número de equações disponíveis, é possível especificar a determinação de uma treliça simples, composta, ou complexa. Dessa forma, classifica-se quando:

- $b + r = 2N \rightarrow$ estaticamente determinada;
- $b + r > 2N \rightarrow$ estaticamente indeterminada.

O grau de indeterminação é dado pela diferença entre o número de incógnitas e o número de equações, $(b + r) - 2N$.

Estabilidade: Caso $b + r < 2N$, a treliça será classificada como *instável*, uma vez que não haverá número suficiente de barras ou reações para restringir todos os nós. Dessa forma diz-se que a treliça irá se colapsar. Uma treliça poderá ser instável mesmo sendo estaticamente determinada ou indeterminada, sendo que a estabilidade terá de ser analisada por exame ou análise de força.

Estabilidade Externa: São as condições impostas pelos apoios usados na treliça. A treliça é externamente instável se todas as reações de apoio forem concorrentes ou paralelas. Isso pode ser constatado na figura 4.13, onde no caso (a) as reações de apoio não restringem a movimentação rotacional da estrutura e no caso (b) não restringem o movimento de translação da treliça, sendo possível sua movimentação na horizontal. Essas instabilidades se dão ao fato de as linhas de ação das reações serem concorrentes ou paralelas.

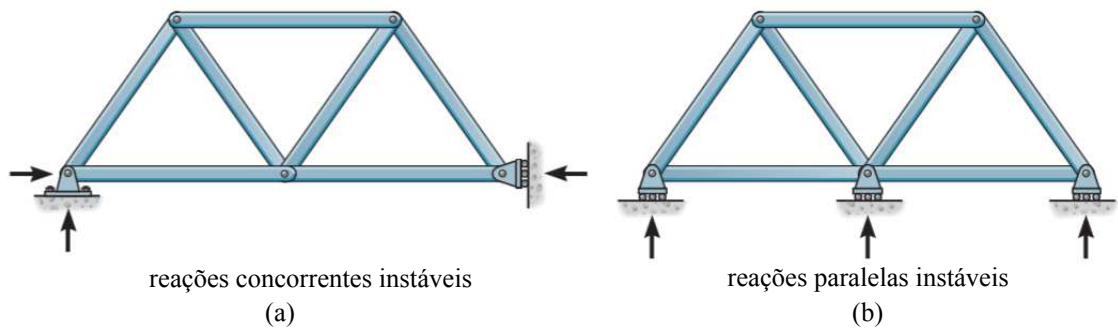


Figura 4.13: Treliças instáveis [18].

Estabilidade Interna: Na maioria dos casos a estabilidade interna pode ser conferida através de um exame cuidadoso do arranjo de seus membros. Quando se pode determinar que cada nó está fixo, de maneira a garantir a não movimentação do “corpo rígido” em relação a outros nós, então a treliça será estável. Pode-se constatar que uma *treliça simples sempre será estável internamente* e isso se dá pelo processo de construção da treliça. A treliça da figura 4.14 exemplifica de forma clara essa afirmação, uma vez que começando a construção da treliça pelo triângulo sombreado ABC , e adicionando os nós sucessivos D, E, F, G, H será garantido a estabilidade interna, de forma que os elementos adicionados à treliça ABC deram continuidade a forma rígida da treliça.

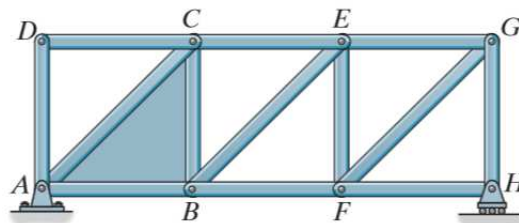


Figura 4.14: Treliça estável [18].

Caso a treliça seja construída de forma que não seja garantida a posição fixa dos nós, ela será instável ou terá a “forma crítica”. A figura 4.15, é um exemplo deste caso, onde pode ser visto que não existe nenhuma restrição ou fixação entre os nós C e F ou B e E , e assim a treliça irá colapsar quando carregada.

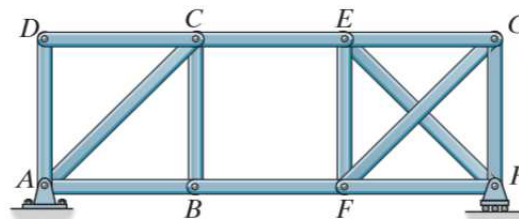


Figura 4.15: Treliça internamente instável [18].

Considerando uma treliça simples, composta ou complexa, a instabilidade pode ser

observada através de um computador no momento de resolver o conjuntos de equações obtidos para cada nó. Se os resultados forem inconsistentes, a treliça será instável ou terá forma crítica. De forma resumida, se a treliça tem b barras, r reações de apoio e N nós, então se,

- $b + r < 2N \rightarrow$ instável;
- $b + r \geq 2N \rightarrow$ instável se as reações de apoio da treliça forem concorrentes ou paralelas, ou se alguns dos componentes da treliça formam um sistema colapsável.

4.1.3 Resolvendo uma Treliça Isostática Plana

Para resolver uma treliça será necessário entender o conceito de equilíbrio estático de uma estrutura, que consiste em manter nula as somas vetoriais das forças atuantes na estrutura e os momentos consequentes dos pontos de aplicação das forças externas e os apoios. O equilíbrio estático de uma estrutura bidimensional pode ser modelado da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\Sigma F_x &= 0 \\ \Sigma F_y &= 0, \\ \Sigma M &= 0\end{aligned}$$

em que a última equação representa momento nulo em relação a um ponto A qualquer no referido plano, o que impede o giro da estrutura.

Resolver uma treliça significa determinar os esforços em seus elementos assim como as reações de apoio. Para que seja possível aplicar Sistemas Lineares na resolução de uma treliça é **condição necessária** que *o dobro do número de nós (N) seja igual ao número de barras (b) mais as reações de apoio (r)*. Neste caso diz-se que a estrutura é *isostática*.

$$2N = b + r$$

Sendo satisfeita essa condição encontram-se as equações em cada nó, considerando o equilíbrio da estrutura, ou seja, $\Sigma F_x = 0$ e $\Sigma F_y = 0$, uma vez que em cada nó cada uma força terá sua componente horizontal e vertical.

Considerando o que foi exposto verifica-se a aplicação direta de Sistemas Lineares na resolução de uma treliça, sendo a classificação quanto à estaticidade verificada na resolução do sistema linear produzido a partir dos nós da treliça. A estabilidade é verificada caso o Sistema Linear seja classificado como possível e determinado. Dessa forma resolver uma treliça é um problema de Sistemas Lineares.

4.2 Aplicação de Sistemas Lineares - Treliça Simples

Considerando a estrutura treliçada, figura 4.16, solicitada com 500 N no ponto B , determinar os *esforços* em cada barra e se as barras estão sendo *tracionadas* ou *comprimidas*.

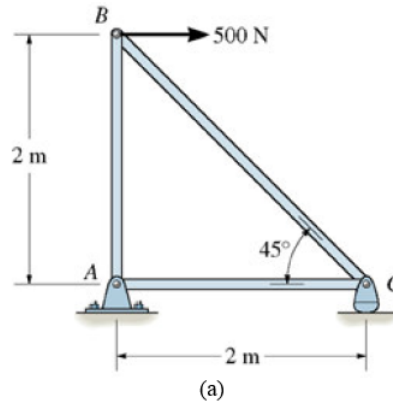


Figura 4.16: Treliça 1 [18]

O modelo matemático usado neste problema consiste em *isolar* os elementos da treliça indicando os efeitos causados pela solicitação e analisar o equilíbrio de cada nó.

Esse problema é apresentado em [21], sendo que as equações foram escritas de forma a aplicar os assuntos tratados neste trabalho - Sistemas Lineares.

Dessa forma, aplicando a metodologia apresentada tem-se que:

- Nó A , figura 4.17(a): terá *quatro* forças atuantes, as duas reações de apoio, A_x e A_y , uma vez que é apoio fixo e as reações das barras BA e CA no nó A , F_{BA} e F_{CA} .
- Nó B , figura 4.17(b): terá *três* forças atuantes, as reações das barras BA e BC no nó B , F_{BA} e F_{BC} , e a força externa de 500 N .
- Nó C , figura 4.17(c): terá *três* forças atuantes, uma reação de apoio C_y e as reações das barras BC e AC no nó C , F_{CA} e F_{BC} , respectivamente.

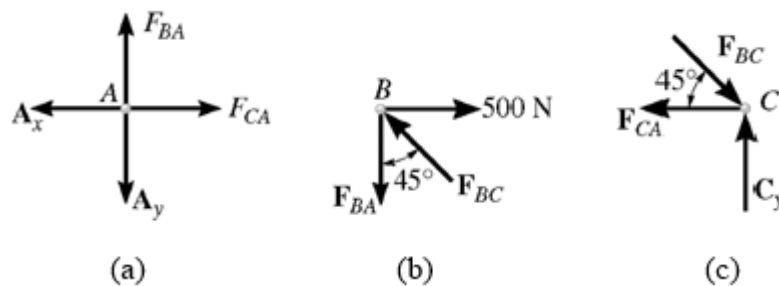


Figura 4.17: Forças atuantes no nó A (a), nó B (b) e nó C (c).

Nesse modelo foi considerado que a barra BC está “empurrando” o nó B , isto é, foi suposto que a barra BC está sob *compressão*. De forma análoga, a barra BA está “puxando” o nó A , isto é, foi suposto que a barra BA está sob *tração*. Os mesmos efeitos foram considerados no nó C .

Os sentidos das forças em cada nó, devido ao efeito de compressão ou tração considerados em cada barra, poderá ser adotado de forma aleatória, uma vez que o sentido correto da força será verificado na solução do sistema linear.

De forma geral, quando uma barra está *empurrando* o nó significa que este elemento está sob *compressão*, e quando está *puxando* o nó é porque este elemento está sob *tração*.

Adotando a orientação para o sistema de eixos convenientes, tem-se as seguintes equações:

$$\begin{aligned}
 \text{Nó } A : & \begin{cases} \overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0 \Rightarrow -A_x + F_{AC} = 0 \\ + \uparrow \Sigma F_y = 0 \Rightarrow -A_y + F_{BA} = 0 \end{cases} \\
 \text{Nó } B : & \begin{cases} \overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0 \Rightarrow 500 - \cos(45^\circ)F_{BC} = 0 \\ + \uparrow \Sigma F_y = 0 \Rightarrow -F_{BA} + \cos(45^\circ)F_{BC} = 0 \end{cases} \\
 \text{Nó } C : & \begin{cases} \overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0 \Rightarrow -F_{CA} + \cos(45^\circ)F_{BC} = 0 \\ + \uparrow \Sigma F_y = 0 \Rightarrow C_y - \text{sen}(45^\circ)F_{BC} = 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Desse modo, tem-se o **Sistema Linear Escalonado** com 6 equações e 6 incógnitas:

$$\left\{ \begin{array}{l} -A_x \qquad \qquad \qquad +F_{CA} \qquad \qquad \qquad = 0 \\ \qquad -A_y \quad +F_{BA} \qquad \qquad \qquad = 0 \\ \qquad \qquad -F_{BA} \qquad \qquad \qquad +0,71F_{BC} = 0 \\ \qquad \qquad \qquad -F_{CA} \qquad \qquad \qquad +0,71F_{BC} = 0 \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad C_y \quad -0,71F_{BC} = 0 \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad 0,71F_{BC} = 500 \end{array} \right.$$

Na forma matricial tem-se:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0,71 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0,71 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -0,71 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,71 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ F_{BA} \\ F_{CA} \\ C_y \\ F_{BC} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 500 \end{bmatrix}$$

Das equações do sistema linear se obtêm os valores das incógnitas:

$$\left\{ \begin{array}{l} -A_x + F_{CA} = 0 \Rightarrow A_x = 500N \\ -A_y + F_{BA} = 0 \Rightarrow A_y = 500N \\ -F_{BA} + 0,71F_{BC} = 0 \Rightarrow F_{BA} = 500N \\ -F_{CA} + 0,71F_{BC} = 0 \Rightarrow F_{CA} = 500N \\ C_y - 0,71F_{BC} = 0 \Rightarrow C_y = 500N \\ 0,71F_{BC} = 500 \Rightarrow F_{BC} = 704,2N \end{array} \right.$$

Como a solução do sistema não apresentou nenhuma incógnita negativa significa que os sentidos adotados (tração e compressão) em cada barra está correto. Os esforços nas barras são de tração (BA e CA) e compressão (BC).

4.3 Aplicação de Sistemas Lineares - Treliça *Fink*

É usual que as estruturas de telhado sejam treliçadas, isto se deve ao fato de ser uma estrutura leve e de fácil dimensionamento. Considerando uma treliça de telhado do tipo *Fink* (figura 4.18), pede-se para determinar os esforços em cada barra e identificar se é de tração ou compressão.

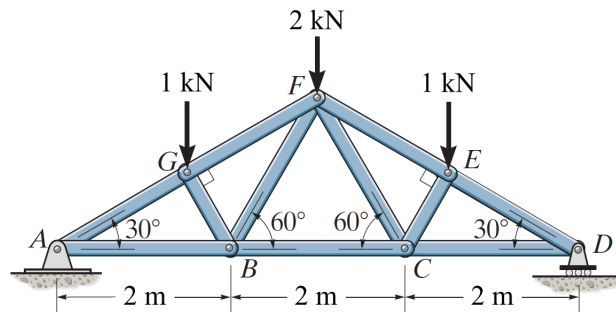


Figura 4.18: Treliça *Fink*.

Observando a estrutura verifica-se que é formada por 11 barras e 7 nós. Por outro lado, dos apoios tem-se ainda 3 esforços a se determinar (reações de apoio). Dessa forma a condição necessária para que seja possível resolver a estrutura por Sistemas Lineares é satisfeita, ou seja, $2N = b + r$, já que $N = 7$, $b = 11$ e $r = 3$.

Isolando-se os elementos da estrutura e considerando somente os carregamentos, as reações de apoio e os efeitos das barras nos nós tem-se a situação apresentada na figura 4.19.

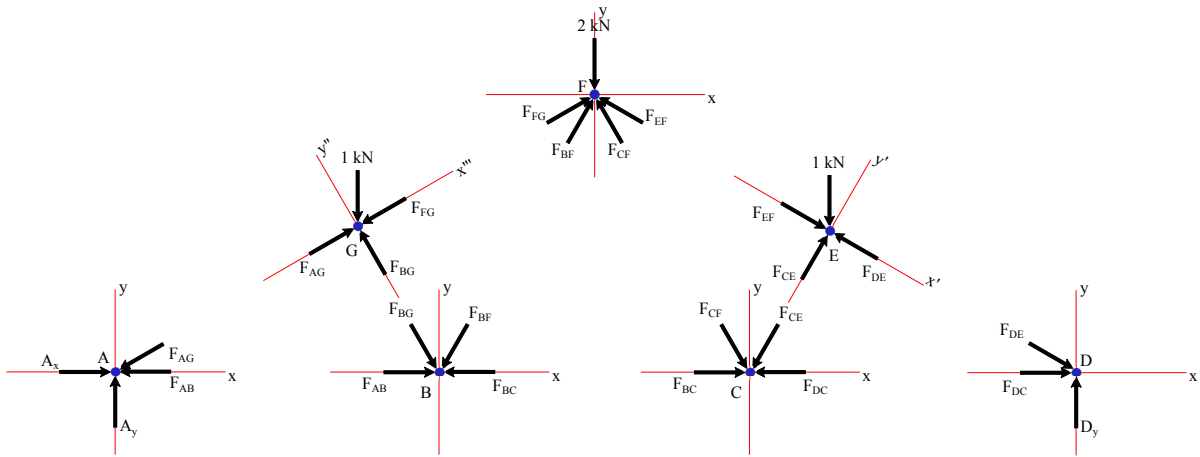


Figura 4.19: Reações dos apoios e articulações.

E como os nós devem estar em equilíbrio tem-se:

- Para o nó A;

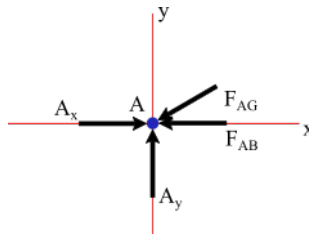


Figura 4.20: Forças aplicadas - Nó A.

$$Nó A : \begin{cases} \rightarrow \Sigma F_x = 0 \Rightarrow A_x - F_{AB} - \cos(30^\circ)F_{AG} = 0 \\ + \uparrow \Sigma F_y = 0 \Rightarrow A_y - \sin(30^\circ)F_{AG} = 0 \end{cases}$$

- Para o nó B;

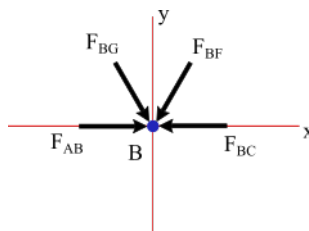


Figura 4.21: Forças aplicadas - Nó B.

$$Nó B : \begin{cases} \rightarrow \Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_{AB} + \cos(60^\circ)F_{BG} - F_{BC} - \cos(60^\circ)F_{BF} = 0 \\ + \uparrow \Sigma F_y = 0 \Rightarrow -\sin(60^\circ)F_{BG} - \sin(60^\circ)F_{BF} = 0 \Rightarrow F_{BG} + F_{BF} = 0 \end{cases}$$

- Para o nó C ;

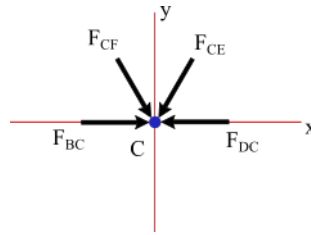


Figura 4.22: Forças aplicadas - Nó C.

Nó C :

$$\begin{cases} \rightarrow \Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_{BC} + \cos(60^\circ)F_{CF} - F_{DC} - \cos(60^\circ)F_{CE} = 0 \\ + \uparrow \Sigma F_y = 0 \Rightarrow -\text{sen}(60^\circ)F_{CF} - \text{sen}(60^\circ)F_{CE} = 0 \Rightarrow F_{CF} + F_{CE} = 0 \end{cases}$$

- Para o nó D ;

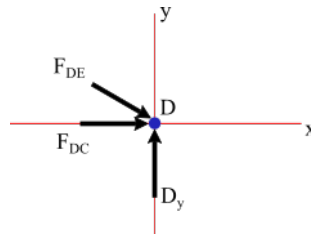


Figura 4.23: Forças aplicadas - Nó D.

$$\text{Nó } D : \begin{cases} \rightarrow \Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_{DC} + \cos(30^\circ)F_{DE} = 0 \\ + \uparrow \Sigma F_y = 0 \Rightarrow D_y - \text{sen}(30^\circ)F_{DE} = 0 \end{cases}$$

- Para o nó E ;

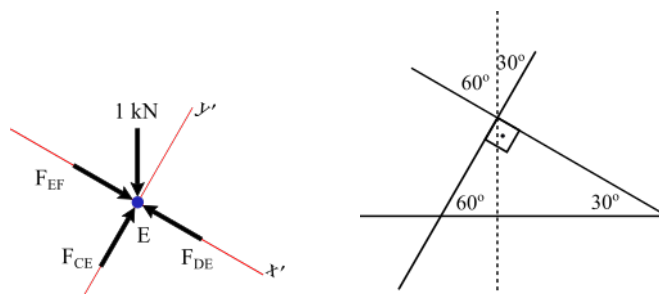


Figura 4.24: Forças aplicadas - Nó E e esquema geométrico.

$$\text{Nó } E : \begin{cases} \searrow \Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_{EF} + \cos(60^\circ)1 - F_{DE} = 0 \\ + \nearrow \Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_{CE} - \text{sen}(60^\circ)1 = 0 \Rightarrow F_{CE} = 0,86 \end{cases}$$

- Para o nó F ;

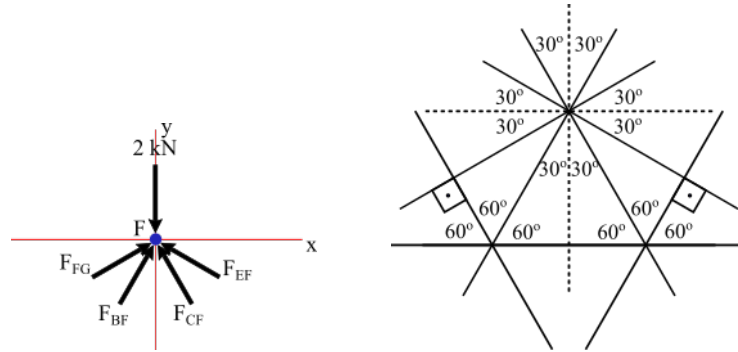


Figura 4.25: Forças aplicadas - Nó F e esquema geométrico.

Nó F :

$$\begin{cases} \rightarrow \Sigma F_x = 0 \Rightarrow \cos(30^\circ)F_{FG} + \cos(60^\circ)F_{BF} - \cos(30^\circ)F_{EF} - \cos(60^\circ)F_{CF} = 0 \\ + \uparrow \Sigma F_y = 0 \Rightarrow \text{sen}(30^\circ)F_{FG} + \text{sen}(60^\circ)F_{BF} + \text{sen}(30^\circ)F_{EF} + \text{sen}(60^\circ)F_{CF} - 2 = 0 \end{cases}$$

- Para o nó G .

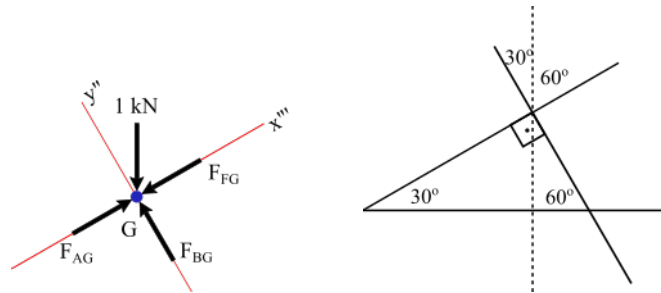


Figura 4.26: Forças aplicadas - Nó G e esquema geométrico.

$$\text{Nó } G : \begin{cases} \nearrow \Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_{AG} - F_{FG} - \cos(60^\circ)1 = 0 \Rightarrow F_{AG} - F_{FG} = 0,5 \\ + \nwarrow \Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_{BG} - \text{sen}(60^\circ)1 = 0 \Rightarrow F_{BG} = 0,86 \end{cases}$$

Assim, tem-se um Sistema Linear com 14 equações e 14 incógnitas:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1A_x - 1F_{AB} - 0,86F_{AG} = 0 \quad (1) \\ 1A_y - 0,5F_{AG} = 0 \quad (2) \\ 1F_{AB} + 0,5F_{BG} - 0,5F_{BF} - 1F_{BC} = 0 \quad (3) \\ \phantom{1F_{AB}} + 1F_{BG} + 1F_{BF} = 0 \quad (4) \\ \phantom{1F_{AB}} \phantom{1F_{BG}} + 0,5F_{CF} - 0,5F_{CE} - 1F_{DC} + 1F_{BC} = 0 \quad (5) \\ \phantom{1F_{AB}} \phantom{1F_{BG}} \phantom{0,5F_{CF}} + 1F_{CF} + 1F_{CE} = 0 \quad (6) \\ \phantom{1F_{AB}} \phantom{1F_{BG}} \phantom{0,5F_{CF}} \phantom{1F_{CF}} + 0,86F_{DE} + 1F_{DC} = 0 \quad (7) \\ \phantom{1F_{AB}} \phantom{1F_{BG}} \phantom{0,5F_{CF}} \phantom{1F_{CF}} - 0,5F_{DE} + 1D_y = 0 \quad (8) \\ \phantom{1F_{AB}} \phantom{1F_{BG}} \phantom{0,5F_{CF}} \phantom{1F_{CF}} \phantom{0,86F_{DE}} + 1F_{EF} - 1F_{DE} = -0,5 \quad (9) \\ \phantom{1F_{AB}} \phantom{1F_{BG}} \phantom{0,5F_{CF}} \phantom{1F_{CF}} \phantom{0,86F_{DE}} \phantom{1F_{CE}} + 1F_{CE} = 0,86 \quad (10) \\ \phantom{1F_{AB}} \phantom{1F_{BG}} \phantom{0,5F_{CF}} \phantom{1F_{CF}} \phantom{0,86F_{DE}} \phantom{1F_{CE}} + 0,86F_{FG} + 0,5F_{BF} - 0,5F_{CF} - 0,86F_{EF} = 0 \quad (11) \\ \phantom{1F_{AB}} \phantom{1F_{BG}} \phantom{0,5F_{CF}} \phantom{1F_{CF}} \phantom{0,86F_{DE}} \phantom{1F_{CE}} \phantom{0,86F_{FG}} + 0,5F_{FG} + 0,86F_{BF} + 0,86F_{CF} - 0,5F_{EF} = 2 \quad (12) \\ \phantom{1F_{AB}} \phantom{1F_{BG}} \phantom{0,5F_{CF}} \phantom{1F_{CF}} \phantom{0,86F_{DE}} \phantom{1F_{CE}} \phantom{0,86F_{FG}} \phantom{0,5F_{FG}} + 1F_{AG} - 1F_{FG} = 0,5 \quad (13) \\ \phantom{1F_{AB}} \phantom{1F_{BG}} \phantom{0,5F_{CF}} \phantom{1F_{CF}} \phantom{0,86F_{DE}} \phantom{1F_{CE}} \phantom{0,86F_{FG}} \phantom{0,5F_{FG}} \phantom{1F_{AG}} + 1F_{BG} = 0,86 \quad (14) \end{array} \right.$$

Aplicando-se as operações elementares sobre as linhas obtemos o seguinte Sistema Linear na form Escalonada.

$$\left\{ \begin{array}{l} 1A_x - 1F_{AB} - 0,86F_{AG} = 0 \quad (1) \\ 1A_y - 0,5F_{AG} = 0 \quad (2) \\ 1F_{AB} + 0,5F_{BG} - 0,5F_{BF} - 1F_{BC} = 0 \quad (3) \\ 1F_{AG} - 1F_{FG} = 0,5 \quad (4) \\ 1F_{BG} + 1F_{BF} = 0 \quad (5) \\ 0,86F_{FG} + 0,5F_{BF} - 0,5F_{CF} - 0,86F_{EF} = 0 \quad (6) \\ 0,57F_{BF} + 1,15F_{CF} + 1F_{EF} = 2 \quad (7) \\ 1F_{CF} = 0 \quad (8) \\ 1F_{EF} - 1F_{DE} + 1F_{CE} = -0,5 \quad (9) \\ -0,5F_{DE} + 1D_y = 0 \quad (10) \\ 1F_{CE} = 0,86 \quad (11) \\ 1F_{DC} + 1,72D_y = 0 \quad (12) \\ 1,72D_y + 1F_{BC} = 0,86 \quad (13) \\ -2,04F_{BC} = 5,23 \quad (14) \end{array} \right.$$

Fazendo as retrosubstituições tem-se:

(14), $F_{BC} = -2,57 \text{ kN (T)}$	(7), $F_{BF} = -0,86 \text{ kN (T)}$
(13), $D_y = 2 \text{ kN (C)}$	(6), $F_{FG} = 3,48 \text{ kN (C)}$
(12), $F_{DC} = -3,43 \text{ kN (T)}$	(5), $F_{BG} = 0,86 \text{ kN (C)}$
(11), $F_{CE} = 0,86 \text{ kN (C)}$	(4), $F_{AG} = 3,98 \text{ kN (C)}$
(10), $F_{DE} = 3,98 \text{ kN (C)}$	(3), $F_{AB} = -3,43 \text{ kN (T)}$
(9), $F_{EF} = 3,48 \text{ kN (C)}$	(2), $A_y = 2 \text{ kN}$
(8), $F_{CF} = -0,86 \text{ kN (T)}$	(1), $A_x = 0 \text{ kN}$

Dessa forma, foram determinados todos os esforços nas barras e as reações de apoio. Os resultados negativos, indicam que o sentido adotado inicialmente estava errado, assim tem-se que os esforços corrigidos serão, em kN, conforme indicado na figura 4.27.

Fazendo uma análise simplificada da estrutura é notável que a geometria da estrutura e os carregamentos são simétricos em relação ao ponto F . Dessa forma, era esperado encontrar esforços iguais nas barras e apoios simétricos.

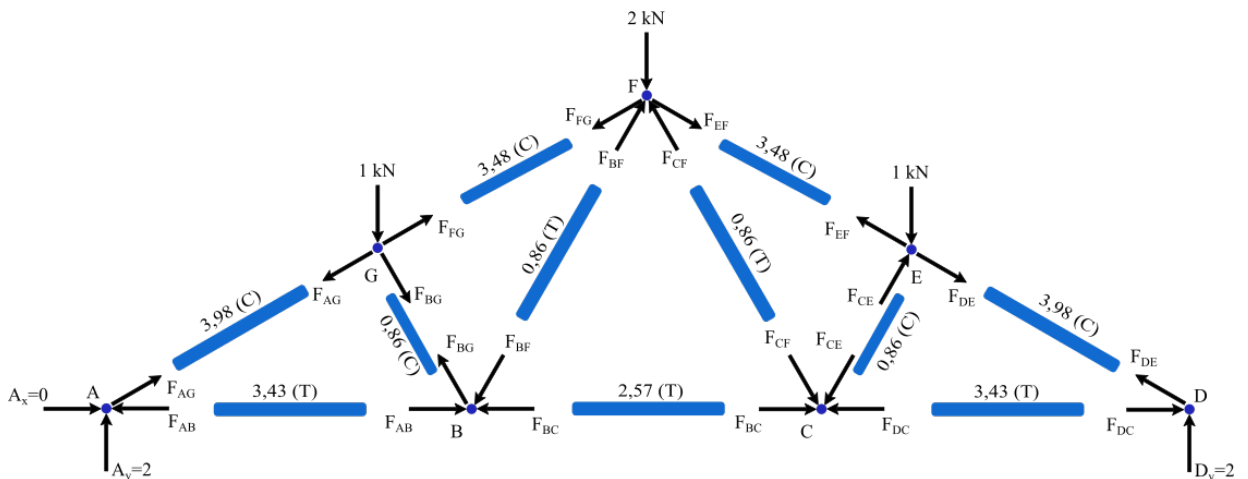


Figura 4.27: Reações de apoio e esforços nas barras (corrigidos), em kN.

4.4 Caso Geral

A aplicabilidade do processo apresentado anteriormente não é viável em qualquer caso, dessa forma se faz necessário a formulação de um procedimento para resolver uma estrutura treliçada qualquer. Esses tipos de problemas podem ser resolvidos utilizando o *Método da Rigidez*, preferido para analisar uma estrutura por meio computacional, metodologia descrita de forma clara e objetiva com exemplos em [21].

A metodologia é baseada na rigidez da estrutura, que é função de propriedades geométrica e mecânica do material usado, como *Área* e *Módulo de Elasticidade*. Dessa forma, encontrado a matriz da rigidez estrutural K , os componentes de força global F atuando na treliça podem ser relacionados aos seus deslocamentos globais X usando a relação:

$$F = KX$$

Esta é conhecida como *equação de rigidez da estrutura*. Sendo usual designar os índices menores para identificar os graus de liberdade não restringidos, isso permitirá dividir a equação na seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} F_k \\ F_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_u \\ X_k \end{bmatrix}$$

Sendo,

F_k, X_k = cargas externas e deslocamentos *conhecidos*. São os carregamentos existentes na treliça e os deslocamentos que geralmente são especificados como zero devido as restrições dos apoios.

F_u, X_u = cargas e deslocamentos *conhecidos*. São as reações de apoio desconhecidas, e os deslocamentos dos nós onde o movimento não é restringido em um sentido particular.

K = matriz de rigidez *da estrutura*, que é dividida para ser compatível com a divisão de F e X .

Dessa forma, se obém um Sistema Linear com as incógnitas sendo os *deslocamentos nodais* e as *reações de apoio* desconhecidos [21].

4.5 Aplicações de Sistemas Lineares e Determinante em Vibrações Livres

Um ponto insatisfatório na formação em nível de graduação em Matemática é a aplicação de conceitos vistos durante todo o processo acadêmico. O objetivo nesta seção é aplicar as ferramentas Sistemas Lineares e Determinante em problemas reais como *vibrações livres*, uma vez que os efeitos deste conceito devem ser utilizados na análise estrutural. As definições formais de *autovalor* e *autovetor* assim como outros conceitos são encontrados em livros clássicos de Álgebra Linear como [10] e [12].

4.5.1 Autovalores e Autovetores na Engenharia

Em problemas de Engenharia Estrutural, é comum situações envolvendo sistemas de equações lineares que matricialmente são do tipo [22]:

$$AX = \lambda BX$$

onde:

- A e B são *matrizes quadradas de mesma ordem n* , simétricas nas aplicações estruturais, *sendo pelo menos uma não singular* (sem perda de generalização, considere B a matriz não singular);
- λ é um escalar, que pode assumir n valores (*valores característicos*), cada λ_i tornando possível a verificação das equações com raízes não nulas;
- $X_i \neq 0$ vetor característico associado a λ_i .

Se A for matriz não singular e B singular, dividindo-se ambos os membros da equação por λ , obtém-se

$$\frac{1}{\lambda}AX = BX$$

sendo este da forma e com as mesmas restrições da primeira equação, com $\frac{1}{\lambda}$ sendo os valores característicos.

Se B for uma matriz diagonal com elementos positivos, ocorre um problema especial de valores característicos que tem a solução mais simples.

Se B for não singular, pode-se partir da equação $AX = \lambda BX$, multiplicar os dois membros pela inversa de B .

$$B^{-1}AX = \lambda I_n X$$

ou ainda, fazendo $H = B^{-1}A$, tem-se

$$\begin{aligned}HX &= \lambda I_n X \\HX - \lambda X &= 0 \\(H - \lambda I_n) X &= 0\end{aligned}$$

Ou seja, tem-se um Sistema Linear de equações homogêneas que na forma matricial é

$$\begin{bmatrix} (h_{11} - \lambda) & h_{12} & \dots & h_{1n} \\ h_{21} & (h_{22} - \lambda) & \dots & h_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n1} & h_{n2} & \dots & (h_{nn} - \lambda) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.5.1)$$

Considerando que todo Sistema Linear homogêneo admite sempre a *solução trivial*, ou seja, $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$, e as soluções não triviais, com $x_i \neq 0$ somente se tornam possíveis quando a *matriz dos coeficientes for singular*, isto é, se seu Determinante for nulo:

$$\det(H - \lambda I_n) = 0$$

ou ainda

$$\begin{vmatrix} (h_{11} - \lambda) & h_{12} & \dots & h_{1n} \\ h_{21} & (h_{22} - \lambda) & \dots & h_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n1} & h_{n2} & \dots & (h_{nn} - \lambda) \end{vmatrix} = 0$$

Resolvendo o determinante encontra-se a seguinte equação

$$\lambda^n + C_1 \lambda^{n-1} + C_2 \lambda^{n-2} + \dots + C_{n-1} \lambda + C_n = 0$$

conhecida como *equação característica* de grau n em λ .

A equação característica possui n raízes, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, cada uma delas sendo um *valor característico* (ou *autovalor*, ou *valor próprio*, ou *raiz latente*) da matriz H .

Substituindo cada valor de λ_i na equação 4.5.1, obtém-se um sistema possível e indeterminado. Dessa forma arbitrando-se um dos valores de X_i , por exemplo x_{1i} , e considerando as $(n - 1)$ equações, determinam-se os demais valores das raízes $x_{2i}, x_{3i}, \dots, x_{ni}$.

Assim o vetor

$$X_i = \begin{bmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \\ \vdots \\ x_{ni} \end{bmatrix} \text{ está associado ao valor } \lambda_i.$$

De forma geral, as soluções são

$$\lambda_1 \rightarrow X_1 = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{bmatrix}, \lambda_2 \rightarrow X_2 = \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{bmatrix}, \dots, \lambda_n \rightarrow X_n = \begin{bmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{bmatrix}.$$

Onde os vetores X_1, X_2, \dots, X_n são chamados *vetores característicos*, *autovetor*, *vetores próprios*, *vetores modais* ou simplesmente *modos* de H .

Todos os autovetores organizados em forma matricial dão origem a *matriz modal*, como segue

$$M^* = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{bmatrix}.$$

É usual apresentar cada autovetor *normalizado*, isto é, algum dos elementos de X_i igual a 1 [22].

Os valores de λ que satisfazem a equação $AX = \lambda BX$, são os mesmos encontrados para as raízes da equação característica, isto é, o tratamento algébrico dado à equação $AX = \lambda BX$ não alterou os autovalores e nem os autovetores encontrados, mostrando que essa “manipulação” aos problemas devem ser feitos somente seja realmente conveniente.

4.5.2 Conceitos básicos de Vibração

Sabe-se intuitivamente que as vibrações existem e tem seus efeitos em instrumentos musicais, sistemas de motores, sistemas elétricos entre outros, assim ocorre nas estruturas, entretanto usualmente desprezada devido a sua magnitude ou efeito causados na estrutura. A análise de vibrações tem papel importante no estudo do comportamento das estruturas sujeitas a carregamentos sísmicos e de vento.

- **Vibração**

Chama-se *vibração*, a qualquer movimento periódico ou não de um corpo ou sistema de corpos interligados, em torno de uma posição ou equilíbrio [20].

São exemplos de vibrações o movimento de uma corda dedilhada, o balançar de um pêndulo, a torcida pulando na arquibancada, vento atuando em uma ponte, entre outros.

- **Graus de liberdade**

Chama-se de *grau de liberdade*, ao número mínimo de coordenadas independentes requeridas para determinar completamente as posições de todas as partes de um sistema a qualquer instante [23].

Em estruturas reais tem-se infinitos graus de liberdade que podem ser representados simplificadamente por alguns pontos representativos.

Quando vigas e pórticos estão carregados, tem-se que os pontos chamados de *nós*, que são pontos específicos da estrutura, passarão por deslocamentos desconhecidos. Esses deslocamentos serão considerados *graus de liberdade* para a estrutura, que serão usados na análise para determinação dos esforços de uma estrutura indeterminada. Para encontrar o grau de liberdade de uma estrutura, pode-se imaginar que a estrutura consiste de uma série de membros conectados aos nós, que normalmente estão localizados na *ligação* de dois ou mais membros, nos *apoios*, nas *extremidades* de um membro, ou onde os membros tem uma *mudança* súbita na *seção transversal* [21]. Considerando cada nó de uma viga ou de um pórtico no espaço, estes poderão ter no máximo três deslocamentos lineares e três deslocamentos rotacionais; agora considerando no plano os nós desses mesmos elementos, poderão ter no máximo dois deslocamentos lineares e um deslocamento rotacional. Entretanto, dependendo dos apoios ou por pressupostos baseados no comportamento da estrutura os nós poderão ter deslocamentos restritos. Pode-se citar o exemplo de uma viga que sofre apenas deformação em razão da flexão, então não pode haver deslocamento linear ao longo do eixo da viga tendo em vista que esse deslocamento é causado por uma deformação de força axial.

De forma a ilustrar o conceito de grau de liberdade, considere a viga da figura 4.28(a), em que foi aplicada uma carga \mathbf{P} que fará com que o nó A apenas gire (desprezando a deformação axial), enquanto o nó B está restrito ao deslocamento linear devido o apoio. Dessa forma a viga tem apenas um grau de liberdade desconhecido, θ_A . A viga também com uma carga \mathbf{P} aplicada da figura 4.28(b), tem três nós, A , B e C , sendo que apresenta quatro graus de liberdade, devido aos deslocamentos rotacionais θ_A , θ_B , θ_C e o deslocamento linear Δ_C . De forma análoga, na figura 4.28(c) se uma carga \mathbf{P} for aplicada

no pórtico e for desprezado a deformação axial dos membros, pode fazer com que os nós B e C girem, e esses nós podem ser deslocados horizontalmente por um montante *igual*. Dessa forma a estrutura apresenta três graus de liberdade, θ_B , θ_C e Δ_B .

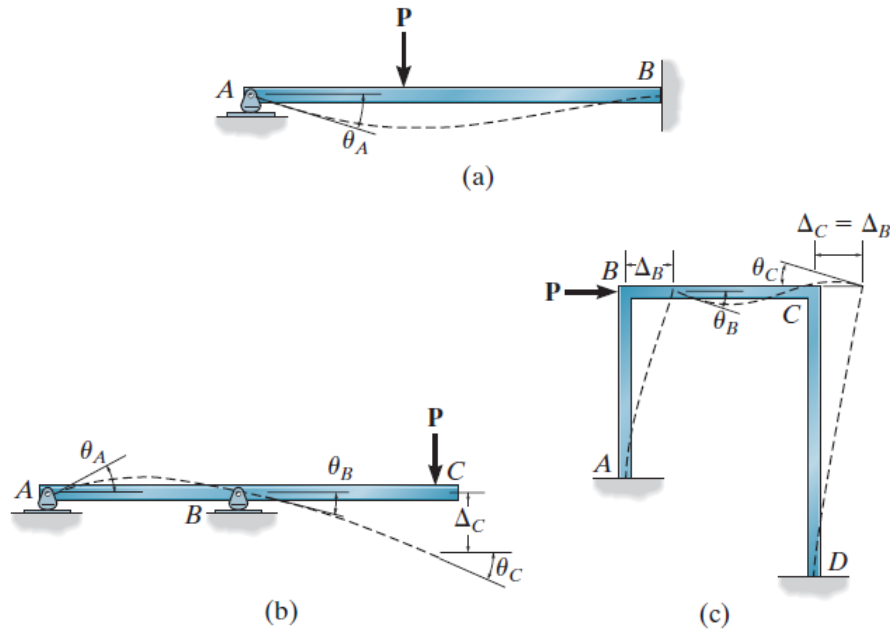


Figura 4.28: Estruturas com um (a), quatro (b) e três graus de liberdade (c) [21]

- **Vibrações livres e forçadas**

Se um sistema, mesmo após uma perturbação inicial, continuar a vibrar por conta própria, a vibração resultante é chamada de *vibração livre*. Como exemplo tem-se a vibração de um pêndulo simples que permanece em movimento oscilatório sem que nenhum efeito externo intervenha figura 4.29(a). Agora se um sistema estiver sujeito a uma força externa, a vibração resultante é conhecida como *vibração forçada* [23]. Um conjunto de pessoas dançando sob o mezanino de uma boate, figura 4.29(b).

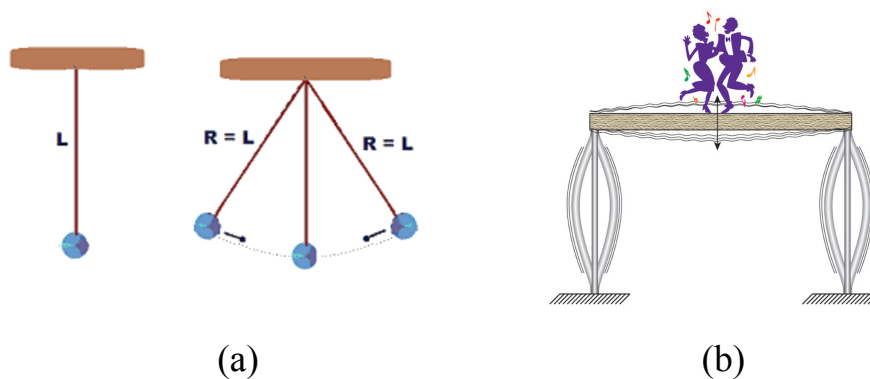


Figura 4.29: Vibrações livre (a) e forçada (b).

- **Vibrações não amortecida e amortecida**

Quando nenhuma energia for perdida ou dissipada por atrito ou outra resistência durante a oscilação, a vibração é conhecida como *vibração não amortecida*. Entretanto, se qualquer energia for perdida, ela é denominada *vibração amortecida* [23].

- **Ciclo**

Quando um corpo que está em estado vibratório se movimenta de sua posição de repouso ou equilíbrio até sua posição extrema em um sentido, então até a posição de equilíbrio, daí até a sua posição extrema no outro sentido e de volta à posição de equilíbrio é chamado de um *ciclo* de vibração [23].

- **Frequência de oscilação**

Chama-se de *frequência de oscilação* ou simplesmente *frequência*, denotado por f , ao número de ciclos por unidade de tempo. Dessa forma

$$f = \frac{\omega}{2\pi}$$

Sendo que ω é a frequência circular, que é a velocidade angular do movimento cíclico; f é a medida em ciclos por segundo (Hertz), enquanto ω é medida em radianos por segundo [23].

- **Frequência natural**

Se um sistema continuar a vibrar por si próprio, mesmo após a perturbação inicial e sem ação de forças externas, a frequência com que o sistema oscila é chamada de *frequência natural*. Será visto posteriormente que um sistema vibratório com n graus de liberdade, em geral, terá n frequências naturais de vibrações distintas [23]. O estudo da frequência natural é importante pois caso haja uma fonte externa excitatória, pode ocorrer a amplificação da vibração, neste caso esse fenômeno é chamado de *ressonância*.

- **Equação de movimento de um sistema dinâmico básico**

As propriedades físicas essenciais usadas em uma estrutura que tem comportamento elástico linear ou sistema mecânico sujeitos a alguma força de excitação externa ou carregamento dinâmico são as *massas* dos elementos que formam o sistema, propriedades elásticas, como *flexibilidade* e *rigidez*, e mecanismo de perda de energia ou *amortecimento*.

Para o caso de um sistema com n graus de liberdade, tem-se que a equação de movimento que descreve tal sistema é dado por

$$M\ddot{v}(t) + C\dot{v}(t) + Kv(t) = p(t)$$

Sendo que M representa a matriz de massa, C a matriz de amortecimento e K a matriz de rigidez com $v(t)$, $\dot{v}(t)$ e $\ddot{v}(t)$ os vetores que representam, respectivamente, o deslocamento do sistema em direção à um eixo de referência, a velocidade e a aceleração do sistema, e $p(t)$ o vetor que representa o efeito da ação do carregamento no sistema, aplicado no sistema [24].

Caso o sistema seja não amortecido e esteja em equilíbrio dinâmico e não for excitado por carregamento externo, ou seja, os efeitos do carregamento sejam nulos, tem-se a equação homogênea

$$M\ddot{v}(t) + Kv(t) = 0.$$

Para um sistema não amortecido a equação de vibração livre num dos modos de vibração naturais é dada por

$$v(t) = q_n(t)\phi_n. \quad (4.5.2)$$

Sendo que ϕ_n é o modo de vibração natural n não variável no tempo e $q_n(t)$ é a variação dos deslocamentos com o tempo.

A equação que exprime a variação dos deslocamentos é dada por

$$q_n(t) = A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t). \quad (4.5.3)$$

Fazendo a substituição da equação 4.5.3 em 4.5.2, tem-se que o deslocamento será dado por

$$v(t) = \phi_n [A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)].$$

Dessa forma, derivando $v(t)$ e substituindo na equação de movimento temos a seguinte equação

$$(K - \omega_n^2 M) \phi_n = 0.$$

Como M é não singular e multiplicando a equação $K\phi_n = \omega_n^2 M\phi_n$ por M^{-1} , tem-se:

$$\begin{aligned} K\phi_n &= \omega_n^2 M\phi_n \\ M^{-1}K\phi_n &= \omega_n^2 M^{-1}M\phi_n \end{aligned}$$

Considerando $H = M^{-1}K$, segue

$$\begin{aligned} H\phi_n &= \omega_n^2 I_n \phi_n \\ (H - \omega_n^2 I_n) \phi_n &= 0 \end{aligned}$$

Como o Sistema Linear é homogêneo, segue que admite a solução trivial, entretanto esta solução não será única, dessa forma o sistema admitirá outras soluções, logo deve-se ter

$$\det(H - \omega_n^2 I_n) = 0.$$

Para uma estrutura com n graus de liberdade, a condição de determinante nulo, implica em uma *equação característica*, que será um polinômio de grau n na variável ω_n^2 , sendo ω_n a *frequência natural de vibração*. Da equação característica do sistema, se obtém n soluções $\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_n^2$ que são as frequências dos n modos de vibração do sistema.

Os valores de ω_n encontrados pela equação característica $\det(H - \omega_n^2 I_n) = 0$, são os mesmos encontrados pela equação $\det(K - \omega_n^2 M) \phi_n = 0$, não modificando a determinação das frequências naturais ω_n , nem os modos de vibração.

Na prática, os modos correspondentes a frequências naturais mais baixas, menores ω_n , porque essas frequências são mais facilmente atingidas pelas forças excitadoras (vento, terremotos, etc.), havendo o perigo de *ressonância*. Entende-se por ressonância o efeito quando a força excitatória e a frequência de sua aplicação estão em certa harmonia, de modo que seja amplificado o efeito das vibrações, podendo ocasionar o colapso da estrutura.

Foi esse efeito devido excitado pelo vento que ocasionou a queda poucos meses após a inauguração da Ponte Tacoma Narrows, construída em 1940 sobre o Estreito de Tacoma, nos Estados Unidos da América.



Figura 4.30: Ponte Tacoma Narrows - EUA

- **Matriz de Massa**

A *matriz de massa* da estrutura é uma matriz quadrada e simétrica, onde os elementos m_{ij} serão dados pela força de inércia desenvolvida na direção i devida a uma aceleração unitária na direção j .

Um procedimento para definir as propriedades de massa de qualquer estrutura é assumir que toda a massa está concentrada nos pontos em que os deslocamentos de translação são definidos.

Para definir o ponto de concentração de massa (massa modal) é usual assumir que a estrutura é dividida em segmentos e os nós servem como pontos de conexão. A massa de cada segmento é então concentrada em massas pontuais em cada um de seus nós, a distribuição da massa do segmento a esses pontos é determinada por equilíbrio estático [24].

- **Matriz de Rigidez**

A *matriz de rigidez* da estrutura é uma matriz quadrada e simétrica, onde os elementos k_{ij} serão dados pela força ou momentos necessários no nó i para que se tenha um deslocamento unitário na direção j . A rigidez de uma barra pode ser obtida por diversos métodos.

4.5.3 Aplicação de Sistemas Lineares e Determinante

Considerando um pórtico de três pavimentos com vigas de rigidez infinita (hipótese de diafragma rígido), isto é, para uma deformação horizontal de um ponto de um lado do pórtico, o outro lado da estrutura acaba tendo o mesmo deslocamento, e indicados a massa de cada nível, os coeficientes de rigidez de cada ponto do pórtico, será possível determinar os modos de vibração do pórtico. Esta aplicação foi adaptada de [24].

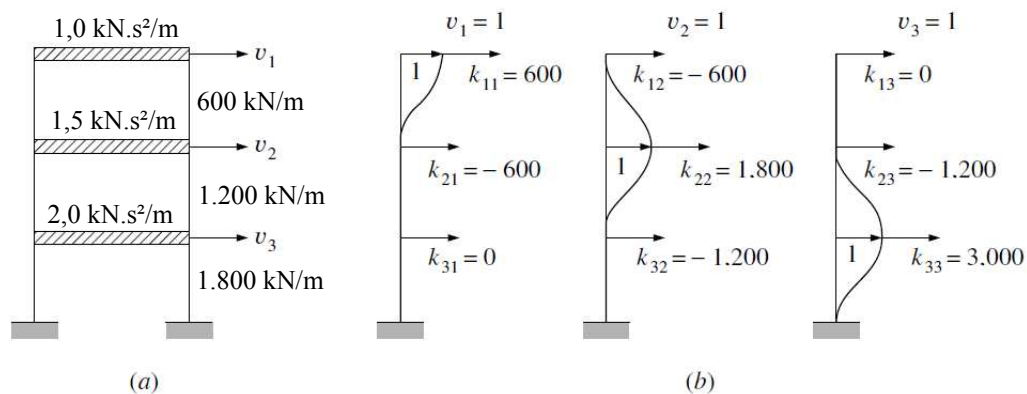


Figura 4.31: Pórtico de três níveis (a) e Coeficiente de rigidez em cada nó do pórtico (b)

Dessa forma para determinar os modos de vibração deve-se escrever a matriz de massa (M) e a matriz de rigidez (K).

$$M = 1 \text{ kN}\cdot\text{s}^2/\text{m} \begin{bmatrix} 1,0 & 0 & 0 \\ 0 & 1,5 & 0 \\ 0 & 0 & 2,0 \end{bmatrix}$$

$$K = 600kN/m \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

Assim, a expressão matricial $K - \omega_n^2 M$ pode ser escrita como:

$$K - \omega_n^2 M = 600kN/m \begin{bmatrix} 1 - B & -1 & 0 \\ -1 & 3 - 1,5B & -2 \\ 0 & -2 & 5 - 2B \end{bmatrix}.$$

Onde $B = \frac{\omega_n^2}{600}$.

Os modos de vibração do pórtico serão obtidos fazendo o determinante da matriz igual a zero. Sendo assim, desenvolvendo o Determinante e simplificando obtém-se o seguinte polinômio característico.

$$B^3 - 5,5B^2 - 7,5B - 2 = 0.$$

Utilizando método gráfico ou métodos iterativos, obtem-se as seguintes raízes: $B_1 = 0,3515$, $B_2 = 1,6066$ e $B_3 = 3,5420$. Mas como $B = \frac{\omega_n^2}{600}$, segue que $\omega_1^2 = 210,88$, $\omega_2^2 = 963,96$ e $\omega_3^2 = 2.125,20$. Dessa forma obtém-se que as frequências circulares serão, em rad/s , $\omega_1 = 14,522$, $\omega_2 = 31,048$ e $\omega_3 = 46,100$, e conseqüentemente as frequências das vibrações, $f_1 = 2,3$, $f_2 = 4,9$ e $f_3 = 7,3$, em *Hertz*.

Agora resta encontrar os modos de vibração, para tanto, basta resolver o sistema linear homogêneo $(K - \omega_n^2 M) \phi_n = 0$, considerando os valores de ω_n encontrados.

- 1º Modo de vibração:

Para para $\omega_1 = 15,52 rad/s$

$$(K - \omega_n^2 M) \phi_n = 0$$

$$\begin{bmatrix} 600 - \omega_1^2 & -600 & 0 \\ -600 & 1800 - 1,5\omega_1^2 & -1200 \\ 0 & -1200 & 3000 - 2\omega_1^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \\ \phi_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 600 - 210,88 & -600 & 0 \\ -600 & 1800 - 1,5 \times 210,88 & -1200 \\ 0 & -1200 & 3000 - 2 \times 210,88 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \\ \phi_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 389,12 & -600 & 0 \\ -600 & 1483,68 & -1200 \\ 0 & -1200 & 2578,24 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \\ \phi_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dessa forma, considerando um deslocamento para $\phi_{11} = 1,00$, figura 4.32(a), encontra-se o sistema linear

$$\begin{cases} 389,12 - 600\phi_{21} & = 0 \\ -600 + 1483,68\phi_{21} - 1200\phi_{31} & = 0 \\ -1200\phi_{21} + 2578,24\phi_{31} & = 0 \end{cases}$$

O qual admite solução

$$\begin{bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \\ \phi_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,0000 \\ 0,6486 \\ 0,3018 \end{bmatrix}.$$

- 2^o Modo de vibração:

De forma análoga para $\omega_2 = 31,04 \text{ rad/s}$ e considerando um deslocamento para $\phi_{22} = 1,00$, figura 4.32(b), encontra-se a solução

$$\begin{bmatrix} \phi_{12} \\ \phi_{22} \\ \phi_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1,6485 \\ 1,0000 \\ 1,1193 \end{bmatrix}.$$

- 3^o Modo de vibração:

De forma análoga para $\omega_3 = 46,10 \text{ rad/s}$ e considerando um deslocamento para $\phi_{33} = 1,00$, figura 4.32(c), encontra-se a solução

$$\begin{bmatrix} \phi_{13} \\ \phi_{23} \\ \phi_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,3652 \\ 0,9278 \\ 1,0000 \end{bmatrix}.$$

Assim, os modos de vibração serão da seguinte forma:

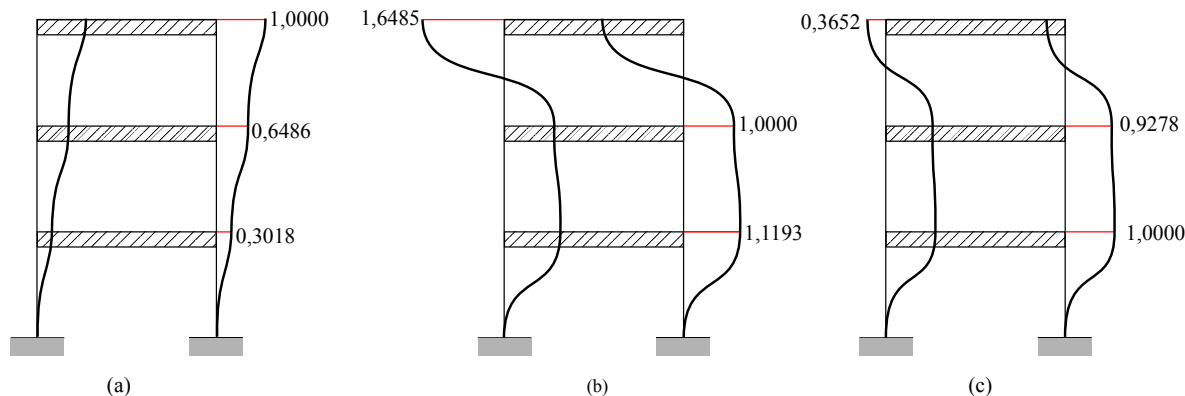


Figura 4.32: Modos de vibração da estrutura deformada

4.6 Considerações Finais

Neste Capítulo foram apresentado conceitos físicos e definições de estruturas usuais na engenharia, em especial as treliças, de modo possibilitar aplicação de Sistemas Lineares para resolver situações que envolvem a resolução de uma treliça. Foram feitos dois exemplos, um sistema treliçado simples com apenas três barras e uma tesoura típica para sustentação de telhados, esta com onze barras. A metologia utilizada destacou o uso de Sistemas Lineares em problemas reais de engenharia civil, no entanto, existem outros métodos que resolvem esses problemas por meio analítico e computacionais, sendo este último utilizado em problemas envolvendo um grande número de incógnitas por envolverem mais elementos.

Já o uso de Determinante se deu no estudo de vibrações livres, onde foi possível encontrar os modos de vibração de um pórtico com três pavimentos e três graus de liberdade, sendo esta problemática adaptada de [24]. Para tanto, foram apresentados conceitos fundamentais sobre vibrações, e também a definição de autovalor e autovetor que foi aplicado na tal situação. Este problema específico também utilizou métodos de resolução de Sistema Linear, entretanto de modo geral, para um sistema com vários graus de liberdade o problema necessita do auxílio de computadores, uma vez que o número de equações será elevado.

Capítulo 5

Conclusão

Nesta dissertação foram tratados de forma sucinta o histórico de Matrizes, Sistemas Lineares e Determinante, contemplando definições, teoremas, propriedades e métodos de resolução de Sistemas Lineares. Destacou-se pontos da legislação que orienta quais as competências e habilidades a serem adquiridas pelos estudantes do ensino médio destaca a importância do tratamento algébrico e geométrico de forma conjunta. Quanto ao uso de determinante nos documentos consultados, fica claro o equívoco cometido, isso por tratarem tal assunto somente como mais uma ferramenta para resolver um Sistema Linear por meio da Regra de *Cramer*, o que neste trabalho foi abordado de forma diferenciada, apresentando outra aplicação como a obtenção de autovalores, mostrando a utilidade do conceito.

A fundamentação teórica de Matrizes e Sistemas Lineares, apresentada no Capítulo 2, com conceitos e metodologia de resolução de Sistemas Lineares sendo estes divididos em Métodos Diretos e Iterativos foi feita com intuito de facilitar a leitura por Professor de Matemática e acadêmicos de cursos na área de Ciências Exatas. Ficou evidenciado a ligação que existe entre esses conceitos.

No Capítulo 3, foi definido o determinante de uma matriz quadrada real, sendo essa definição não usual no ensino médio, por apresentar em sua definição uma linguagem formal, porém sofisticada e elegante, que nem sempre é apresentada aos alunos de ensino médio. Além da aplicação na Regra de *Cramer*, foi exibido outra, sendo esta na obtenção da matriz inversa, destacando a condição de existência com demonstração simples.

A aplicação de Sistemas Lineares e Determinante, desenvolvida no Capítulo 4, de forma precisa e clara fazendo com que o leitor entenda a importância e visualize possíveis aplicações de tais assuntos. No entanto, para garantir essas aplicações, foi necessária a apresentação de alguns conceitos da física que tratam sobre o equilíbrio de um corpo rígido

e também sobre conceitos e resultados já conhecidos sobre vibrações.

Como trabalhos futuros serão aprofundados as aplicações de Métodos Iterativos na resolução de uma treliça de ponte, por envolver muitos elementos, para determinar os esforços atuantes em cada barra, onde utilizando conceitos de Resistência dos Materiais será possível fazer o dimensionamento dos mesmos, que podem ser confeccionados com palito de madeira, bambu ou ainda macarrão. Essa metodologia despertará no estudante a curiosidade de utilizar ferramentas matemáticas para resolver problemas reais. Também como sugestão fica um estudo aprofundado sobre Autovalores e Autovetores em outros problemas das Engenharias, podendo desenvolver o estudo de vibrações de uma ponte que sofre um carregamento variável e móvel.

Referências Bibliográficas

- [1] BRASIL. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Média e Tecnológica (Semtec). PCN + Ensino Médio: Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC/Semtec, 2002. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>>. Acesso em: 15 ago. 2014.
- [2] EVES H. Introdução à História da Matemática. Tradução: DOMINGUES, H. H. 4^a ed. Campinas: Unicamp, 2004.
- [3] TAVARES A. H. C.; PEREIRA A. G. C. História da Matemática no Ensino de Sistemas Lineares, Determinante e Matrizes. Rio Grande do Norte, 2013. Disponível em: <<http://www.cibem7.semur.edu.uy/7/actas/pdfs/262.pdf>>. Acesso em: 15 ago 2014.
- [4] BOYER, C. B. História da Matemática. 2 ed. Tradução GOMIDE, E. F. São Paulo: Edgard Blucher, 1996.
- [5] FILHO P. R. P. Uma Proposta de Ensino dos Temas Sistemas Lineares e Determinante. Vitória: UFES, 2014.
- [6] O'CONNOR, J.J.; ROBERTSON E.F. In Matrices and determinants. Disponível em: <http://www-history.mcs.standrews.ac.uk/history/HistTopics/Matrices_and_determinants.html>. Acesso em: 20 set. 2014.
- [7] BRASIL. Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, Lei 9.394, de 20 de dezembro de 1996 (LDB). Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/arquivos/pdf/ldb.pdf>>. Acesso em: 15 ago. 2014.
- [8] BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. (2006) Orientações curriculares para o ensino médio, vol. 2: Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC. Disponível em:

<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf>.

Acesso em: 15 ago. 2014.

- [9] BRASIL. Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Matriz de Referência de Matemática e suas Tecnologias ENEM 2012. Brasília: INEP/MEC. Disponível em: <http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/downloads/2012/matriz_referencia_enem.pdf>. Acesso em: 15 ago. 2014 .
- [10] BOLDRINI J. L., et al. Álgebra Linear. 3^a ed. São Paulo: Harper & Row do Brasil, 1980.
- [11] HEFEZ A.; FERNANDES C. D. S. Introdução à Álgebra Linear. Coleção PROF-MAT, SBM, 2012.
- [12] CALLIOLI C. A.; DOMINGUES H. H. COSTA R.C.F. Álgebra Linear e Aplicações. 6^a ed. São Paulo: Atual, 1990.
- [13] IEZZI G.; HASSAN S. Fundamentos de Matemática Elementar. 6^a ed. São Paulo: Atual, 1993.
- [14] ARENALES S.; DAREZZO A. Cálculo Numérico: aprendizagem com apoio de software. São Paulo: Thomson Learnig, 2008.
- [15] FRANCO N. B. Cálculo Numérico. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006.
- [16] LIPSCHUTZ S. Álgebra Linear. Rio de Janeiro: McGrawn do Brasil Ltda, 1971.
- [17] SUSSEKINK J.C. Curso de Análise Estrutural vol. 1. Estruturas Isostáticas. Porto Alegre: Editora Globo, 1977.
- [18] HIBBELER R.C. Estática: Mecânica para Engenharia vol. 1. 10^a ed. Tradução: CARRARA E. A.; PINHEIRO J. N. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2005.
- [19] SORIANO H.L. Estática das Estruturas - 2^a Edição Revisada e Ampliada. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda, 2010.
- [20] HIBBELER R.C. Dinâmica: Mecânica para Engenharia vol. 2. 10^a ed. Tradução TENAN, M. A. São Paulo: Thomson Learnig, 2005.
- [21] HIBBELER R.C. Análise da Estruturas 8^a ed. Tradução: RITTER J. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2013.
- [22] MOREIRA D. F. Análise Matricial das Estruturas. Livros Técnicos e Científicos. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 1977.

- [23] RAO S. Vibrações Mecânicas. 4^a ed. Tradução MARQUES A. S. São Paulo: Thomson Learnig, 2008.
- [24] CLOUGH R. W.; PENZIEN J. Dynamics of Estructures. 3^a ed. Berkeley: Computers & Structures, Inc., 2003.