UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
MESTRADO PROFISSIONAL

ELTON FERNANDES BARBOSA

SEQUÊNCIAS APLICÁVEIS PARA O ENSINO MÉDIO

CAMPO GRANDE - MS
AGOSTO DE 2015

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
MESTRADO PROFISSIONAL

ELTON FERNANDES BARBOSA

SEQUÊNCIAS APLICÁVEIS PARA O ENSINO MÉDIO

ORIENTADOR: Prof. Dr. CLAUDEMIR ANIZ

Dissertação apresentada ao programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Matemática - INMA/UFMS, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre.

CAMPO GRANDE - MS
AGOSTO DE 2015

SEQUÊNCIAS APLICÁVEIS PARA O ENSINO MÉDIO

ELTON FERNANDES BARBOSA

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Instituto de Matemática, da Universidade Ferderal de Mato Grosso do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre.

Aprovado pela Banca Examinadora:

Prof. Dr. Claudemir Aniz - UFMS
Prof. Dr. Jesus Carlos da Mota - UFG
Profa. Dra. Elisabete Sousa Freitas - UFMS

CAMPO GRANDE - MS
AGOSTO DE 2015

Dedico este trabalho à Marlene Fernandes, minha mãe. Brigido Barbosa, meu pai, Rosemeire e Evelyn, minhas irmãs e a todos os meus sobrinhos, pelo carinho e incentivos com palavras de ânimo nos momentos difíceis...

Agradecimentos

Agradeço, em primeiro lugar a DEUS, por ter realizado o sonho que sempre esteve em meu coração. A Palavra do Senhor diz em Salmos 37:4b - "O Senhor concederá os desejos do seu coração, e vejo essa Palavra se cumprir em minha vida".

Aos meus pais e minhas irmãs que entenderam esses dois anos de "ausência" pois sempre me apoiaram com palavras de ânimo, incentivando-me em todos os momentos.

Aos meus colegas do PROFMAT, por estarem nesta caminhada comigo, e ao grupo de estudos formado por Everton Melo, Mônica Martins e Nivaldo Alves, que me incentivaram e estiveram nos momentos fáceis e difíceis, amigos que jamais esquecerei, e em especial ao Sérgio esposo da Mônica, que nos ajudou e nos acolheu em sua casa, nos encontros diários após o expediente. Jamais esquecerei o delicioso arroz carreteiro do domingo de estudos. A vocês, muito obrigado! Foram pessoas fundamentais nessa conquista.

Ao meu orientador Prof. Dr. Claudemir Aniz, que me ensinou muito durante os encontros de orientação, pela dedicação, disponibilidade e palavras de incentivo, sempre me auxiliando na pesquisa de materiais bibliográfico. Obrigado por aceitar me orientar e acreditar em meu potencial. É um exemplo de professor para minha vida profissional. Muito obrigado.

Aos professores do polo UFMS-Campo Grande, obrigado pelo carinho e dedicação de cada um, em suas aulas. Em especial a Profa. Dra. Elisabete Sousa Freitas, por sempre ser essa professora dedicada, por ajudar-me a encontrar esse orientador abençoado e por acreditar em meu potencial, sempre me incentivando com palavras. Será sempre uma referência em vida. Muito Obrigado.

A Diretora da Escola Zamenhof, Renata Barcelos Blini Duarte, pois, em momentos de desânimo, sempre acreditou em mim, ajudando-me com palavras e risos. Gostaria que soubesse que foi muito importante nessa conquista. A toda equipe da Escola Zamenhof, em especial a Elizabete, Irene Alves, Ana Cristina, Laís, Gissele, Josiane, Elaine, tia Cristina, Lucimary e Fabiane, que sempre cuidaram de mim e me ajudaram com palavras de ânimo. E, em especial, aqueles que fazem de mim professor, meus alunos que tanto amo e me ajudam a vencer cada desafio em minha vida.

As minhas amigas Tânia Mara e família que se encontram em Fortaleza - CE e Janayna Garcia, que sempre me incentivaram com palavras e versículos abençoados.

Aos meus Líderes Álvaro Coutinho, Ângela R.C. e família, que sempre me orientaram e motivaram com Palavras de Deus, para não desistir.

A Cia de Dança Yeshua e a célula Geração Daniel, que compreenderam minha "ausência" e aos meus amigos e "irmão em Cristo", Junior Florentino, Rossana, Jéssica Deiró, Elessandra e Jennifer Lima que estiveram ao meu lado, buscando apoiar-me nos momentos em que eu quis desistir.

A CAPES pelo apoio financeiro.

E a todos que contribuiram de alguma forma para a realização e concretização deste trabalho. Vocês me ajudaram a realizar o meu sonho, muito obrigado.

Resumo

Este trabalho apresenta inicialmente conceitos importantes como o princípio de indução matemática, sequências, progressões e recorrências de primeira e segunda ordem. Em seguida apresentamos a sequência de Fibonacci em situações como na mágica de números, as frações que geram a sequência, o problema de quadratura e o fractal de Grossman, que são assuntos que podem ser inseridos no ensino médio. Também apresentamos o triângulo de Pascal, relacionando-o com a sequência de potência de dois, sequência de potência de onze e a sequência de Fibonacci. E para finalizar, destacamos algumas sequências interessantes que não são muito conhecidas no ensino médio, apresentadas em artigos da Revista do Professor de Matemática, como a progressão exponencial, progressão aritmético-geométrica, progressão geométrico-aritmética e números místicos.

Palavras-chave: Sequências, Sequências de Fibonacci, Triângulo de Pascal, Progressão Aritmético-Geométrica, Progressão Geométrico-Aritmética.

Abstract

This work presents important concepts such as the principle of mathematical induction, sequences and progressions first and second order recurrence. Then we present the Fibonacci sequence in situations like the magic numbers, fractions that generate the sequence, the quadrature problem and Grossman of fractal, which are subjects that can be inserted in high school. We also present Pascal's triangle, linking it to the two power sequence, eleven power sequence and Fibonacci sequence. And finally, we highlight some interesting sequences are not well known in high school, presented in articles of Mathematics Teacher Magazine as the exponential progression, arithmetic-geometric progression, geometric-arithmetic progression and mystical numbers.

Keywords: Sequences, Sequences Fibonacci, Pascal's Triangle, Arithmetic-Geometric Progression, Geometric-Arithmetic Progression.

Sumário

Lista de Figuras

INTRODUÇÃO

As sequências são conteúdos obrigatórios do currículo do ensino médio. As progressões aritméticas e geométricas têm aplicabilidades em vários ramos da atividade humana. Essas progressões fazem parte do currículo escolar em Mato Grosso do Sul no segundo ano do ensino médio. Nesta dissertação, apresentaremos sequências que trazem um raciocínio mais elaborado, utilizando estratégias e aplicações das fómulas. Também será visto o triângulo de Pascal, que é um assunto apresentado no terceiro ano, onde mostraremos que em algumas de suas propriedades, estão relacionadas as sequências da base dois, da base onze e a de Fibonacci. Assim, esperamos fornecer aos professores formas diferentes de apresentar os conteúdos.

O trabalho desenvolvido está dividido em quatro capítulos. No primeiro capítulo definiremos o que são sequências, princípio de indução matemática, as progressões aritméticas e geométricas, onde apresentaremos as fórmulas dos termos gerais e as somas dos n primeiros termos de cada uma. Também será feito um breve estudo sobre recorrências lineares de primeira e segunda ordem.

No segundo capítulo, será apresentada a sequência de Fibonacci, trabalhando o problema dos coelhos, relacionando-o com uma recorrência de segunda ordem linear e homogênea. Serão apresentados, também, as frações que geram a sequência de Fibonacci, a sequência de Fibonacci na mágica com números, um problema de quadratura chamado de “quebra-cabeça” de Fibonacci e o fractal de Grossman, que, em cada estágio do fractal, temos os números de Fibonacci.

No terceiro capítulo, será apresentado o triângulo de Pascal e algumas sequências. Inicialmente, é definido o triângulo de Pascal e a demonstração da relação de Stifel. Em seguida, o triângulo de Pascal será relacionado com a sequência da potência de dois, a sequência da potência de onze e a sequência de Fibonacci.

No quarto capítulo, serão vistas algumas sequências interessantes não apresentadas no ensino médio, como a progressão exponencial e sua definição, a fórmula do seu termo geral, o cálculo de sua razão e o produto dos n primeiros termos. A Progressão Aritmético-Geométrica que é uma sequências numérica de termos consecutivos de uma PA, ordenadamente multiplicada por uma PG e a Progressão Geométrico-Aritmética que é uma sequência numérica de termos consecutivos de uma PG, ordenadamente somados a uma PA. E para encerrar o capítulo, serão estudados os números místicos na sequência de números de base 10, que são escritos usando-se apenas os algarismo 1 e algumas de suas propriedades.

Capítulo 1

SEQUÊNCIAS E RECORRÊNCIAS

1 Sequências

Definição 1. *Uma sequência é uma função* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, *que associa a cada número natural* n, *um número real* $f(n)$. *Denotamos* $f(1) = a_1$, $f(2) = a_2$, ...,$f(n) = a_n$,... *e a sequência por* $(a_n) = (a_1, a_2, ..., a_n, ...)$, *onde chamamos* a_n *de n-ésimo termo da sequência.*

Vejamos agora algumas definições importantes.

Definição 2. *Uma sequência* (a_n) *é limitada quando o conjunto de seus termos é limitado, ou seja, quando existem números reais* c *e* d, *tais que* $c \leqslant a_n \leqslant d$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 1. *A sequência* $a_n = \dfrac{1}{n}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *é limitada, pois* $0 \leqslant a_n \leqslant 1$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Definição 3. *Uma sequência* (a_n) *é denominada:*

i) decrescente , *se* $a_{n+1} < a_n$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$,

ii) crescente, *se* $a_{n+1} > a_n$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$,

iii) não crescente, *se* $a_{n+1} \leqslant a_n$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$,

iv) não decrescente, *se* $a_{n+1} \geqslant a_n$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Toda sequência crescente, decrescente, não crescente e não decrescente é chamada de *sequência monótona.*

O teorema a seguir, será utilizado no capítulo 4, na seção 4.2 e sua demonstração encontra-se em [8].

Teorema 1. *Toda sequência monótona e limitada é convergente.*

2 Princípio da Indução Matemática

Teorema 2. *Seja $P(n)$ uma sentença sobre $\mathbb{N}$, e seja $a \in \mathbb{N}$. Suponha que*:

i) $P(a)$ é verdadeira, e

ii) qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq a$, sempre que $P(n)$ é verdadeira, implica $P(n+1)$ é verdadeira.

   Então $P(n)$ é verdadeira para todo número natural $n \geq a$.

Este teorema é uma ferramenta que será utilizada ao longo do texto e sua demonstração encontra-se em [7].

Exemplo 2. *Prove que, para todo $n \in \mathbb{N}$:*

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Solução:

i) Para $n = 1$, temos $P(1) : 1^2 = \dfrac{1(1+1)(2 \cdot 1 + 1)}{6} = \dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = \dfrac{6}{6} = 1$. Logo $P(1)$ é verdadeira.

ii) Suponhamos que para algum $n \geq 1$, $P(n)$ é verdadeira. Assim temos:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Somando em ambos os lados $(n+1)^2$, temos:

$$\begin{aligned}
1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2+(n+1)^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2 \\
1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2+(n+1)^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{6(n+1)^2}{6} \\
1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2+(n+1)^2 &= \frac{(n+1)[n(2n+1)+6(n+1)]}{6} \\
1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2+(n+1)^2 &= \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} \\
1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2+(n+1)^2 &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \\
1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2+(n+1)^2 &= \frac{(n+1)[(n+1)+1][2(n+1)+1]}{6}
\end{aligned}$$

Porém $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2+(n+1)^2 = \dfrac{(n+1)[(n+1)+1][2(n+1)+1]}{6}$ é $P(n+1)$.

Portanto, pelo Princípio da Indução Matemática, $P(n)$ é válido para todo $n \in \mathbb{N}$, isto é, $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ■

3 Progressão Aritmética

Definição 4. *Uma sequência na qual a diferença entre cada termo e o termo anterior é constante é chamada de* ***Progressão Aritmética****. Essa diferença constante é chamada de* ***razão*** *da progressão e representada pela letra* ***r****.*

Exemplo 3. *Um corpo caindo livremente (desprezando-se a resistência do ar) tem, ao final do primeiro segundo, velocidade de $9,8m/s$; velocidade de $19,6m/s$ no final do segundo seguinte; de $29,4m/s$ no final do terceiro segundo; e assim por diante.*

Essa situação problema gera uma Progressão Aritmética do tipo $(9,8; 19,6; 29,4; ...)$, a PA tem $a_1 = 9,8$ e razão $r = 9,8$.

3.1 Fórmula do termo geral de uma Progressão Aritmética

Teorema 3. *Se (a_n) é uma progressão aritmética de razão r, então $a_n = a_1 + (n-1)r$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração: Seja $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$, uma Progressão Aritmética de razão r. Pela definição, temos que:

$$\begin{aligned} a_2 - a_1 &= r \\ a_3 - a_2 &= r \\ a_4 - a_3 &= r \\ &\vdots \\ a_n - a_{n-1} &= r \end{aligned}$$

Somando essas $n-1$ igualdades, obtemos $a_n - a_1 = (n-1)r$, isto é, $a_n = a_1 + (n-1)r$. Portanto o termo geral de uma Progressão Aritmética é:

$$a_n = a_1 + (n-1)r, \qquad \forall n \geqslant 1.$$

■

Exemplo 4. *Um pequeno cometa periódico do nosso Sistema Solar com um período orbital de 13 anos teve sua última passagem pelo planeta Terra em janeiro de 2010. Quantas vezes ele visitou a Terra desde que o Brasil foi descoberto? Em que ano foi sua primeira passagem na era da descoberta do Brasil?*

Solução: Os anos de passagem do cometa no planeta Terra foram $2010; 1997, 1984, ...$ Podemos notar que essa sequência de anos, formam um Progressão Aritmética de razão -13 anos.

O termo de ordem n dessa progressão é

$$a_n = a_1 + (n-1)r \Rightarrow a_n = 2010 - 13(n-1) = 2023 - 13n$$

Como $a_n \geqslant 1500$, temos que

$$\begin{gathered} 2023 - 13n \geqslant 1500 \\ 13n \leqslant 2023 - 1500 \\ n \leqslant \frac{523}{13} \\ n \leqslant 40,23... \end{gathered}$$

Portanto, os termos dessa progressão que são maiores que o ano de 1500 são os 40 primeiros, $a_1, a_2, a_3, ..., a_{40}$. Logo ele visitou o planeta Terra após a descoberta do Brasil 40 vezes.

Para sabermos a primeira vez que ele visitou o planeta Terra após a descoberta do Brasil, basta calcularmos a_{40}. Assim:

$$a_{40} = 2023 - 13 \cdot 40 = 2023 - 520 = 1503.$$

Portanto o cometa visitou o planeta Terra após a descoberta do Brasil no ano de 1503.

3.2 Representação geométrica de uma Progressão Aritmética

Em uma progressão aritmética, o termo geral é dado por um polinômio em n, $a_n = a_1 + (n-1)r = r \cdot n + (a_1 - r)$.

- Se $r \neq 0$, ou seja, se a progressão não for constante, esse polinômio é de grau 1.

- Se $r = 0$ e $a_1 \neq 0$, isto é, a progressão é constante, e esse polinômio tem grau 0.

Assim, temos que

Se a progressão aritmética tiver razão $r \neq 0$ então é chamada de *progressão aritmética de primeira ordem*. Reciprocamente se em uma sequência o termo de ordem n for dado por um polinômio em n, de grau menor ou igual a 1, ela será uma progressão aritmética.

Com efeito, se $a_n = an + b$, então (a_n) é uma progressão aritmética na qual $a = r$ e $b = a_1 - r$, ou seja, $r = a$ e $a_1 = a + b$.

Uma progressão aritmética é uma função polinomial do 1º grau onde, para cada $i \in \mathbb{N}$ se associa um $a_i \in \mathbb{R}$, ou seja, $(1, a_1), (2, a_2), (3, a_3), ..., (n, a_n)$. O gráfico dessa função é uma sequência de pontos colineares no plano.

O gráfico da função polinomial do 1º grau é uma reta, enquanto o gráfico de uma PA é o conjunto de pontos dessa reta de abscissas dos números naturais.

Daí, (a_n) é uma progressão aritmética se, e somente se, os pontos do plano que têm coordenadas $(1, a_1), (2, a_2), (3, a_3), ...$ estão em linha reta.

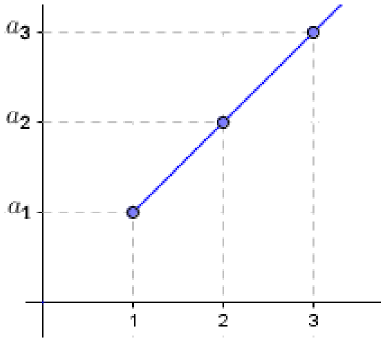


Figura 1.1: Gráfico da P.A.

3.3 Soma dos n primeiros termos de uma Progressão Aritmética

Teorema 4. *A soma dos n primeiros termos da progressão aritmética (a_n) é igual a*

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}.$$

Demonstração: Temos $S_n = a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}+a_n$ e $S_n = a_n+a_{n-1}+\cdots+a_3+a_2+a_1$

Daí,

$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \cdots + (a_n + a_1)$

como $a_2 + a_{n-1} = a_1 + r + a_1 + (n-1-1)r = a_1 + a_1 + (n-1)r = a_1 + a_n$.

Podemos observar que, ao passar de um parênteses para o seguinte, a primeira parcela aumente de r e a segunda parcela diminui de r, o que não altera a soma, ou seja,

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \cdots$$

Desta maneira, todas as somas são iguais a primeira $(a_1 + a_n)$, e como temos n parênteses, segue que:

$$2 \cdot S_n = (a_1 + a_n) \cdot n \text{ ou } S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}.$$

■

Exemplo 5. *Qual é o valor da soma dos 30 primeiros termos da progressão aritmética $5, 9, 13, 17, ...$?*

Solução: Temos que $a_{30} = a_1 + 29 \cdot r = 5 + 29 \cdot 4 = 5 + 116 = 121$

Assim

$$S_{30} = \frac{(5+121)\cdot 30}{2} = \frac{3780}{2} = 1890$$

Exemplo 6. *Qual é a soma dos n primeiros números inteiros e positivos, ou seja,* $1+2+3+4+5+6+\cdots+n$*?*

Solução: Sendo $a_1 = 1$ e $a_n = n$, utilizando a fórmula da soma dos termos de uma PA finita, temos:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)\cdot n}{2} = \frac{(1+n)\cdot n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

Observação 1. Podemos notar que S_n é um polinômio do segundo grau em n, sem termo independente.

Generalizando, temos que substituindo $a_n = a_1 + (n-1)\cdot r$ na fórmula da soma do n primeiros termos de uma PA , segue:

$$S_n = \left(\frac{a_1 + a_1 + n\cdot r - r}{2}\right)\cdot n = \left(\frac{2a_1 + n\cdot r - r}{2}\right)\cdot n$$
$$S_n = a_1\cdot n + \frac{n^2\cdot r}{2} - \frac{n\cdot r}{2}$$
$$S_n = \frac{n^2\cdot r}{2} + \left(a_1 - \frac{r}{2}\right)\cdot n$$

Se $r \neq 0$, S_n é um polinômio do segundo grau em n, desprovido de termo independente, que pode ser reescrito da seguinte forma:

$$S_n = an^2 + bn \text{ na qual } a = \frac{r}{2} \text{ e } a_1 - \frac{r}{2} = b, \text{ ou seja, } r = 2a \text{ e } a_1 = a + b.$$

Se $r = 0$, S_n é um polinômio de grau menor que 2, sem termo independente.

Definição 5. *Defini-se para sequências o operador* Δ*, chamado de operador diferença, por* $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$.

Daí, temos que uma sequência (a_n) é uma progressão aritmética se e somente se $(\Delta a_n) = (a_{n+1} - a_n)$ é constante.

Definição 6. *Uma progressão aritmética de segunda ordem é uma sequência* (a_n) *na qual as diferenças* $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$*, entre cada termo e o termo anterior, formam uma* *progressão aritmética não constante.*

Exemplo 7. *A sequência* $(a_n) = (6, 2, 0, 0, 2, 6, ...)$ *é uma progressão artimética de segunda ordem, isto é, é uma sequência onde* $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$ *formam a progressão aritmética não-constante* $(-4, -2, 0, 2, 4, ...)$. *Qual é a expressão geral de* a_n*?*

Solução: Como a diferença forma uma progressão aritmética não-estacionária, onde o primeiro termo é -4 e a razão é 2, assim:

$$b_n = a_{n+1} - a_n = b_1 + (n-1) \cdot r = -4 + (n-1) \cdot 2 = 2n - 6.$$

Temos:

$$\begin{aligned} a_2 - a_1 &= -4 \\ a_3 - a_2 &= -2 \\ a_4 - a_3 &= 0 \\ &\vdots \\ a_n - a_{n-1} &= 2 \cdot (n-1) - 6 = 2n - 8 \end{aligned}$$

Somando, obtemos

$$\begin{aligned} a_n - a_1 &= -4 - 2 + 0 + 2 + \cdots + (2n-8) \\ a_n - a_1 &= \frac{(-4 + 2n - 8) \cdot (n-1)}{2} \\ a_n - a_1 &= n^2 - 7n + 6. \end{aligned}$$

Logo

$$a_n = a_1 + n^2 - 7n + 6 = 6 + n^2 - 7n + 6 = n^2 - 7n + 12$$

■

4 Progressão Geométrica

Definição 7. *Uma sequência na qual é constante o quociente da divisão de cada termo pelo termo anterior é chamada de* ***progressão geométrica****. Esse quociente é chamado* *de razão da progressão e é representado pela letra **q**.*

Exemplo 8. *A sequência* $(2, 10, 50, 250, ...)$ *é uma PG na qual* $a_1 = 2$ *e a razão é* $q = 5$.

4.1 Fórmula do termo geral de uma Progressão Geométrica

Sendo (a_n) uma progressão geométrica, temos que cada termo sequente é encontrado multiplicando o termo anterior pela razão **q**. Daí

$$\begin{aligned}
a_2 &= a_1 \cdot q \\
a_3 &= a_2 \cdot q = a_1 \cdot q \cdot q = a_1 \cdot q^2 \\
a_4 &= a_3 \cdot q = a_1 \cdot q^2 \cdot q = a_1 \cdot q^3 \\
&\vdots \\
a_n &= a_1 \cdot q^{n-1}
\end{aligned}$$

Portanto o termo geral de uma PG é $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$.

■

Exemplo 9. *Se a população de um país cresce* 3% *ao ano, quanto crescerá em* n *anos?*

Solução: Temos que $i = 3\% = 0,03$

População inicial: P_0

População após 1 ano: $P_0 \cdot (1 + 0,03) = P_0 \cdot (1,03)$

População após 2 anos: $P_0 \cdot (1,03) \cdot (1,03) = P_0 \cdot (1,03)^2$

$\vdots$

População após n anos: $P_0 \cdot (1,03)^n$

Portanto a população daqui n anos é de $P_0 \cdot (1,03)^n$

■

4.2 Representação geométrica de uma Progressão Geométrica

Uma Progressão Geométrica é uma função que associa a cada número natural n o valor a_n, onde o gráfico dessa função é formado por uma sequência de pontos pertencentes ao gráfico de uma função exponencial.

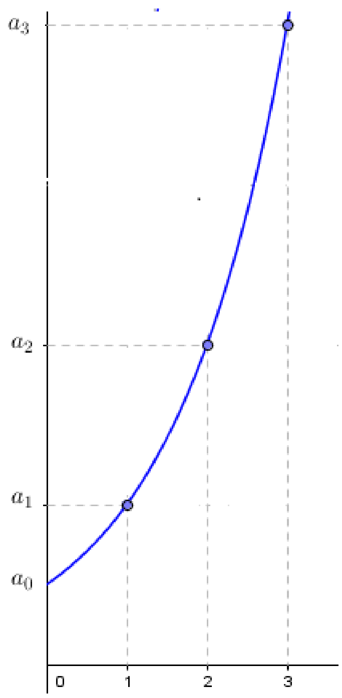


Figura 1.2: Gráfico da P.G.

4.3 Soma dos n primeiros termos de uma Progressão Geométrica

Teorema 5. *A soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica (a_n) de razão $q \neq 1$, é*

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$

Demonstração: Seja a soma dos n termos de uma PG dada por:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

Multiplicando S_n por q, temos

$$q \cdot S_n = q \cdot a_1 + q \cdot a_2 + q \cdot a_3 + \cdots + q \cdot a_n$$

Como $q \cdot a_1 = a_2$, $q \cdot a_2 = a_3$, $q \cdot a_3 = a_4$, ... , $q \cdot a_n = a_{n+1}$. Assim

$$q \cdot S_n = a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{n+1}$$

Fazendo $S_n - q \cdot S_n$, temos

$$\begin{aligned} S_n - q \cdot S_n &= a_1 - a_{n+1} \\ S_n \cdot (1-q) &= a_1 - a_1 \cdot q^n \\ S_n &= a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} \end{aligned}$$

Portanto,

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$

■

No caso em que $|q| < 1$,temos $\lim_{n \to +\infty} q^n = 0$, ou seja,

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q}$$

Exemplo 10. *Determine a fração geratriz da dízima periódica* $0,3333333...$.

Solução: Seja $x = 0,33333...$, poderá ser escrito por $x = 0,3 + 0,03 + 0,003 + \cdots$, ou ainda, $x = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \cdots$, daí temos que esse x é a soma de uma progressão geométrica de razão $q = \frac{1}{10}$. Como $0 < q < 1$, com primeiro termo $a_1 = \frac{3}{10}$, temos que

$$x = S_n = \frac{\frac{3}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$$

Portanto,

$$0,3333333... = \frac{1}{3}.$$

5 Sequências de Recorrência

Definição 8. *Uma relação de recorrência para a sequência* (a_n) *é uma fórmula que expressa* a_n *em termos de um ou mais termos anteriores da sequência, isto é,* $a_1, ...a_{n-1}$*, para todos os números naturais* n *com* $n > n_0$.

Exemplo 11. *A sequência de números ímpares* $\{1, 3, 5, 7, ...\}$ *é uma sequência recorrente, que pode ser definida por* $a_{n+1} = a_n + 2, (n \geqslant 1)$*, com* $a_1 = 1$.

Nas sequências recorrentes faz necessário saber o primeiro termo para que se possa identificar a sequência.

Alguns exemplos importantes de sequências recorrentes são a P.A e a P.G.

Exemplo 12. *Uma P.A* (a_n) *de razão* r *e primeiro termo* a *pode ser definida por* $a_{n+1} = a_n + r, (n \geqslant 1)$*, com* $a_1 = a$.

Exemplo 13. *Uma P.G* (a_n) *de razão* q *e primeiro termo* a *pode ser definida por* $a_{n+1} = a_n \cdot q, (n \geqslant 1)$*, com* $a_1 = a$.

6 Recorrência Linear de Primeira Ordem

Definição 9. *Uma recorrência é de primeira ordem quando um termo* a_{n+1} *depende do termo* a_n*. A recorrência é dita linear, quando a função formada pela mesma for do primeiro grau.*

Exemplo 14. *As recorrências* $a_{n+1} = 5a_n - n^2$ *e* $a_{n+1} = na_n$ *são lineares e a recorrência* $a_{n+1} = {a_n}^2$ *não é linear. Também podemos notar que as duas últimas recorrências são homogêneas, pois não possui termo independente de* a_n.

Exemplo 15. *Resolva a recorrência* $a_{n+1} = n \cdot a_n, a_1 = 1$.

Solução: Temos que

$$\begin{aligned}
a_2 &= a_1 \\
a_3 &= 2 \cdot a_2 \\
a_4 &= 3 \cdot a_3 \\
&\vdots \\
a_n &= (n-1) \cdot a_{n-1}
\end{aligned}$$

Multiplicando ambos os lados, temos $a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot \cdots \cdot a_n = a_1 \cdot 2 \cdot a_2 \cdot 3 \cdot a_3 \cdot \cdots \cdot (n-1) \cdot a_{n-1}$.

Dividindo ambos os membros por $a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot \cdots \cdot a_{n-1}$, pois todos os termos são não nulos.

Temos $a_n = (n-1)! \cdot a_1$.

Como $a_1 = 1$, podemos concluir que $a_n = (n-1)!$

■

Exemplo 16. *A fórmula do termo geral de uma P.A pode ser encontrada por uma solução de recorrência de primeira ordem não-homogênea. A mesma pode ser escrita pela recorrência $a_{n+1} = a_n + r, (n \geqslant 1)$, com $a_1 = a$. Resolvendo a recorrência, temos*:

$$\begin{aligned}
a_2 &= a_1 + r \\
a_3 &= a_2 + r \\
a_4 &= a_3 + r \\
&\vdots \\
a_n &= a_{n-1} + r
\end{aligned}$$

Fazendo a soma de cada membro, temos

$$a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n = a_1 + r + a_2 + r + a_3 + r + \cdots + a_{n-1} + r$$

Subtraindo ambos os membros da igualdade por $a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{n-1}$, temos $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$ que é a fórmula do termos geral da P.A.

Como $a_1 = a$, temos que $a_n = a + (n-1) \cdot r$. $\blacksquare$

Exemplo 17. *A Fórmula do termo geral de uma PG também pode ser encontrada por uma solução de recorrência de primeira ordem, porém homogênea. A mesma pode ser escrita pela recorrência* $a_{n+1} = q \cdot a_n$*, com* $a_1 = a$ *e* $a \neq 0$*. Resolvendo a recorrência, temos*

$$\begin{aligned} a_2 &= q \cdot a_1 \\ a_3 &= q \cdot a_2 \\ a_4 &= q \cdot a_3 \\ &\vdots \\ a_n &= q a_{n-1} \end{aligned}$$

Multiplicando os termos de cada membro, temos

$a_n \cdot a_{n-1} \cdot \dots \cdot a_3 \cdot a_2 = q^{n-1} \cdot a_{n-1} \cdot a_{n-2} \cdot \dots \cdot a_2 \cdot a_1$

Dividindo ambos os membros da igualdade por $a_{n-1} \cdot \dots \cdot a_3 \cdot a_2$, segue

$a_n = q^{n-1} \cdot a_1$ que é a fórmula do termo geral de uma PG.

Como $a_1 = a$, temos que $a_n = q^{n-1} \cdot a$

$\blacksquare$

7 Recorrência Linear de Segunda Ordem

Definição 10. *Uma recorrência que expressa* a_{n+2} *em função de seus anteriores* a_{n+1} *e* a_n *será chamada de* ***recorrência de segunda ordem****. Trataremos de recorrências lineares de segunda ordem homogêneas e com coeficientes constantes onde:*

$$a_{n+2} + p a_{n+1} + q a_n = 0$$

Vamos admitir que $q \neq 0$, pois caso contrário teremos uma recorrência linear de primeira ordem.

Podemos associar cada uma das recorrências a uma equação do segundo grau, do tipo $r^2 + pr + q = 0$, chamada de **equação característica**. Uma observação importante é que se $q \neq 0$ então 0 não poderá ser raiz da equação característica.

Teorema 6. *Se as raízes de $r^2 + pr + q = 0$ são r_1 e r_2, então $x_n = c_1(r_1)^n + c_2(r_2)^n$ é solução da recorrência $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$, quaisquer que sejam os valores das constantes c_1 e c_2.*

Demonstração: Substituindo $x_n = c_1(r_1)^n + c_2(r_2)^n$ na recorrência, temos

$$\begin{aligned} a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n &= c_1(r_1)^{n+2} + c_2(r_2)^{n+2} + p(c_1(r_1)^{n+1} + c_2(r_2)^{n+1}) + q(c_1(r_1)^n + c_2(r_2)^n) \\ &= c_1(r_1)^n((r_1)^2 + pr_1 + q) + c_2(r_2)^n((r_2)^2 + pr_2 + q) \\ &= c_1(r_1)^n 0 + c_2(r_2)^n 0 = 0. \end{aligned}$$

Daí, podemos concluir que x_n é uma solução da recorrência.

■

Teorema 7. *Se as raízes de $r^2 + pr + q = 0$ são r_1 e r_2, com $r_1 \neq r_2$, então, todas as soluções da recorrência $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$, são da forma $x_n = c_1(r_1)^n + c_2(r_2)^n$, c_1 e c_2 constantes.*

A demonstração encontra-se em [9].

Exemplo 18. *Determine a solução da recorrência*

$$a_{n+2} + 3a_{n+1} - 4a_n = 0.$$

Solução: A equação característica da recorrência é $r^2 + 3r - 4 = 0$, resolvendo a equação, temos $r_1 = 1$ e $r_2 = -4$.

Daí temos que as soluções da recorrência são as sequências da forma $x_n = c_1(1)^n + c_2(-4)^n$, isto é, $x_n = c_1 + c_2(-4)^n$, sendo c_1 e c_2 constantes arbitrárias.

Capítulo 2

SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

Neste capítulo iremos falar sobre sequência de Fibonacci. Será apresentado alguns artigos da Revista do Professor de Matemática com resultados curiosos que envolvem a sequência de Fibonacci.

Sequência de Fibonacci

Definição 11. *Chama-se sequência de Fibonacci a sequência definida recursivamente por* $F_1 = 1$ *e* $F_2 = 1$

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \text{ para todo } n > 2$$

Os termos dessa sequência são chamados de Números de Fibonacci.

O problema dos coelhos e a sequência de Fibonacci

O matemático Eduard Lucas (1842 - 1891), em 1877 nomeou essa sequência como sequência de Fibonacci (veja [10]). Um dos motivos foi o problema proposto pelo matemático italiano Leonardo de Pisa, que propos em seu livro *Liber Abacci*, de 1202 o seguinte:

Quot paria coniculorum in uno anno ex uno pario germinentur?

O que significa para a tradução na língua portuguesa:

Quantos casais de coelhos descendem de um casal em um ano?

Leonardo passa a explicar o seu problema e a sua solução, como segue:

Um casal de coelhos recém-nascidos foi posto num lugar cercado. Quantos casais de coelhos serão produzidos num ano, se a natureza desses coelhos é tal que a partir do segundo mês um casal gera a cada mês um novo casal de coelhos que se torna produtivo ao fim de dois meses?

Temos uma solução:

i) no primeiro mês, temos apenas um casal de coelhos recém-nascidos;

ii) no segundo mês, temos o casal adulto e fértil;

iii) no terceiro mês, o casal adulto gera o primeiro par de coelhos, sendo assim temos dois casais;

iv) no quarto mês, temos o primeiro casal, o casal jovem que nasceu no mês anterior e mais um novo casal gerado pelo primeiro casal, sendo assim, temos um total de três casais;

v) no quinto mês, temos dois casais adultos que geram mais dois pares de casais e um casal que nasceu no mês anterior que não gera nenhum ainda, sendo assim temos um total de cinco casais;

vi) no sexto mês, temos três casais adultos que geram mais três casais e dois casais que ainda não geram nenhum casal, sendo assim temos um total de oito casais;

vii) e assim por diante.

mês	número de casais do mês anterior	número de casais recém-nascidos	total
1º	0	1	1
2º	1	0	1
3º	1	1	2
4º	2	1	3
5º	3	2	5
6º	5	3	8
7º	8	5	13
8º	13	8	21
9º	21	13	34
10º	34	21	55
11º	55	34	89
12º	89	55	144

Tabela 2.1: Contagem dos casais de coelhos mês a mês

Notemos que a solução do problema dos coelhos gera os doze primeiros termos da sequência de Fibonacci.

A sequência de Fibonacci é uma recorrência linear de segunda ordem, homogênea de coeficientes constantes,

$$a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$$

onde $a_1 = a_2 = 1$, $p = -1$, $q = -1$ e $n \geqslant 1$.

A sequência de Fibonacci tem a equação característica $r^2 - r - 1 = 0$, cujas raízes são:

$$r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ e } r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Assim as soluções dessa recorrência são:

$$F_n = c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Vamos calcular os valores de c_1 e c_2, substituindo os valores $F_1 = 1$ e $F_2 = 1$, segue que:

$$\begin{cases} c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1 = 1 \\ c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 1 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, temos que:

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \text{ e } c_2 = \frac{-1}{\sqrt{5}}$$

Substituindo em F_n, temos:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

que é a fórmula que gera os números de Fibonacci.

1 Frações que geram a sequência de Fibonacci

Maurício Zahn, em [20], apresenta um resultado curioso sobre a sequência de Fibonacci. Como visto, a sequência de Fibonacci é definida recursivamente por:

$$F_1 = 1 \text{ e } F_2 = 1$$
$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \text{ para todo } n > 2,$$

ou seja, cada termo da sequência, a partir do segundo, é obtido pela soma dos dois anteriores, assim, a sequência de números de Fibonacci é: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...$ Temos uma relação curiosa:

Utilizando um programa computacional adequado e considerando as representações decimais das seguintes frações:

$$\frac{100}{89}, \frac{10000}{9899}, \frac{1000000}{998999}, \frac{100000000}{99989999}, \ldots$$

e assim por diante.

Temos que:

$$\frac{100}{89} = 1,12359550561797752808988764044943820224719101123...$$

$$\frac{10000}{9899} = 1,01020305081321345904636832003232649762602228...$$

$$\frac{1000000}{998999} = 1,001002003005008013021034055089144233...$$

$$\frac{100000000}{99989999} = 1,00010002000300050008001300210034005500089...$$

Observando os dígitos das representações decimais, podemos notar que geram os termos da sequência de Fibonacci!

Vamos justificar esses resultados.

Consideremos a função $f : \mathbb{R} - \left\{ \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \right\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{1}{1-x-x^2}$$

Podemos notar que a expressão que define f pode ser representada por

$$f(x) = \frac{1}{1-x-x^2} = \frac{1}{1-x(1+x)}$$

Daí, se x é tal que $|x(1+x)| < 1$, temos que a última expressão é a soma infinita da progressão geométrica $(1, x(1+x), x^2(1+x)^2, ...)$ que tem razão $q = x(1+x)$. Ou seja,

$$\frac{1}{1-x-x^2} = \frac{1}{1-x(1+x)} = \sum_{n=0}^{+\infty}[x(1+x)]^n =$$

$$1 + x(1+x) + [x(1+x)]^2 + [x(1+x)]^3 + [x(1+x)]^4 + [x(1+x)]^5 + [x(1+x)]^6 + ... =$$

$1+x+x^2+x^2(1+2x+x^2)+x^3(1+3x+3x^2+x^3)+x^4(1+4x+6x^2+4x^3+x^4)+$ $x^5(1+5x+10x^2+10x^3+5x^4+x^5)+x^6(1+...)+...=$

$1+x+x^2+x^2+2x^3+x^4+x^3+3x^4+3x^5+x^6+x^4+4x^5+6x^6+4x^7+x^8+x^5+$ $5x^6+10x^7+10x^8+5x^9+x^{10}+x^6+...=$

$1+x+2x^2+3x^3+5x^4+8x^5+13x^6+...=$

$F_1+F_2x+F_3x^2+F_4x^3+F_5x^4+F_6x^5+...=\sum_{n=0}^{+\infty} F_{n+1}x^n.$

Portanto,

$$f(x)=\frac{1}{1-x-x^2}=\sum_{n=0}^{+\infty} F_{n+1}x^n, \text{ se } |x(1+x)|<1$$

Assim, para $x=0,1$ temos:

$$f(0,1)=\frac{1}{1-0,1-(0,1)^2}=\frac{1}{1-\frac{1}{10}-\frac{1}{100}}=\frac{100}{89},$$

que pela série infinita determinada, implica

$$\begin{aligned} f(0,1) &= 1+0,1+2(0,1)^2+3(0,1)^3+5(0,1)^4+8(0,1)^5+13(0,1)^6+21(0,1)^7+... \\ &= 1,12359550561797752808988764044943820224719101123... \end{aligned}$$

Assim, para $x=0,01$ temos:

$$f(0,01)=\frac{1}{1-0,01-(0,01)^2}=\frac{1}{1-\frac{1}{100}-\frac{1}{10000}}=\frac{10000}{9899},$$

que pela série infinita determinada, implica

$$\begin{aligned} f(0,01) &= 1+0,01+2(0,01)^2+3(0,01)^3+5(0,01)^4+8(0,01)^5+13(0,01)^6+... \\ &= 1,01020305081321345590463683200323264976260228... \end{aligned}$$

E assim por diante, podemos atribuir valores sucessivos para x, sendo $0,001, 0,0001$, etc.

Notemos que, quanto menor o valor que atribuiremos para x da sucessão descrita, nas casas decimais aparecem mais termos da sequência de Fibonacci.

2 Utilizando a sequência de Fibonacci na mágica com números

Lúcia Resende P. Bonfim, em [2], traz uma "brincadeira" cujo assunto está relacionado a algumas propriedades da sequência de Fibonacci.

A brincadeira é a seguinte:

O professor entrega para o aluno uma folha com dez linhas em branco, numeradas de 1 a 10, e pede para eles escolherem dois números inteiros, digamos entre 1 a 20, e anotá-los nas duas primeiras linhas.

Feitas as escolhas, o professor solicita aos alunos que escrevam, em cada linha, a partir da terceira, a soma das duas linhas anteriores, e assim sucessivamente até chegarem na décima linha.

Vejamos um exemplo:

Linha	Número
1	9
2	14
3	23
4	37
5	60
6	97
7	157
8	254
9	411
10	665

Tabela 2.2: Exemplo com dois números escolhidos

Terminada a construção da lista o professor pergunta:

- Qual a soma dos dez números?

Antes que os alunos terminem de calcular a soma, sem o professor saber os dois primeiros números iniciais, é possível dizer qual é o resultado desde que o mesmo forneça o sétimo elemento da lista. Para que isso ocorra, o professor deve ser hábil na multiplicação por 11, pois o resultado é 11 vezes o elemento da sétima linha. No exemplo citado, a soma é 1727, que é o produto de 11 por 157.

O professor também pode "adivinhar" a divisão da linha 10 pela linha 9, com duas casas decimais. Esse quociente é igual a $1,61$, isso acontece para quaisquer que sejam os dois números iniciais inteiros escolhidos no inicio da brincadeira.

Por que o truque funciona?

Sejam x e y dois números escolhido inicialmente pelos alunos.

Linhas	Números
1	x
2	y
3	$x+y$
4	$x+2y$
5	$2x+3y$
6	$3x+5y$
7	$5x+8y$
8	$8x+13y$
9	$13x+21y$
10	$21x+34y$

Tabela 2.3: Dois números escolhidos quaisquer

Os dez números da lista são os da tabela e sua soma total é $55x+88y=11(5x+8y)$, ou seja, 11 vezes o elemento da sétima linha.

Essa explicação acima é para deteminar a soma dos dez números utilizando apenas o sétimo número.

Agora para determinarmos o quociente da linha 10 pela 9, vamos utilizar a seguinte propriedade:

Propriedade 1. Se a, b, c e d são números positivos tais que $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, então $\frac{a+c}{b+d}$ está entre $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$.

Assim, como $\frac{21}{13} = 1,615384$ e $\frac{34}{21} = 1,619047$, temos, $\frac{21}{13} < \frac{34}{21}$, logo $\frac{21x}{13x} < \frac{34y}{21y}$. Pela propriedade, o resultado da divisão $\frac{21x+34y}{13x+21y}$ da linha 10 pela 9 estará entre os números $\frac{21}{13}$ e $\frac{34}{21}$, o que confirma que o resultado independente dos valores iniciais com duas casa é $1,61$.

Analisando os números da Tabela 2.3, observamos que a partir do terceiro, eles são obtidos somando-se os dois anteriores, com a diferença que os dois números iniciais não necessáriamente sejam iguais a 1. Logo é natural que as propriedades da sequência de Fibonacci possam ser reinterpretadas na sequência construida na atividade. Observando a tabela, notemos que os coeficientes de y nas linhas de 2 a 10 são os primeiros termos da sequência de Fibonacci. Também a partir da terceira linha os coeficientes de x geram também sequência de Fibonacci.

Assim, caso o professor queira que os alunos percebam a sequência, pode pedir para que os mesmos avancem na lista. Ao chegar nas linhas 24 e 25 os números gerados serão da forma $17711x + 28657y$ e $28657x + 46368y$, respectivamente. Daí o quociente desses dois números estará entre $\frac{28657}{17711} \approx 1,6180339$ e $\frac{46368}{28657} \approx 1,6180339$. Como ocorre coincidência em sete casas decimais, o professor poderá "adivinhar" o quociente com o grau de precisão melhor, sem o conhecimento prévio dos dois números iniciais ou quarquer outra informação.

Uma pergunta natural que surge é a seguinte: Se avançarmos na sequência, para qual número os quocientes de termos sucessivos se aproximam?

A resposta a essa pergunta é dada pelo teorema a seguir:

Teorema 8. *O limite da razão $\frac{F_{n+1}}{F_n}$, quando n tende ao infinito é aproximadamente $1,618...$, mais precisamente,*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Demonstração: Temos que:

$$F_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]$$

e

$$F_{n} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right]$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{F_{n+1}}{F_n} &= \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]}{\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right]} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}} \\
&= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} \cdot \left[1 - \frac{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}\right]}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} \cdot \left[1 - \frac{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}}\right]} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n}}
\end{aligned}$$

Como $-1 < \dfrac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} < 1$ temos:

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n+1} = 0$$

Logo,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1+\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1+\sqrt{5}}{2}\cdot\lim_{n\to+\infty}\frac{1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n}}$$

$$= \frac{1+\sqrt{5}}{2}\cdot 1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Portanto,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

■

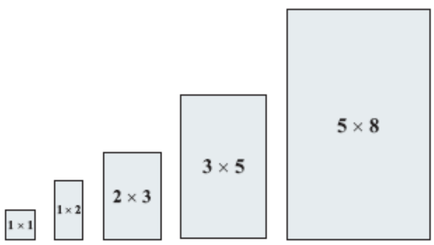
3 Quebra-Cabeça de Fibonacci

Bruno Alves Dassie em [5], traz um problema de quadratura muito interessante, chamado de quebra-cabeça de Fibonacci.

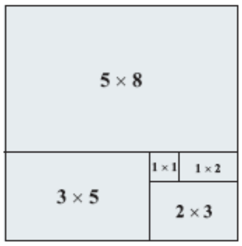
Esse quebra-cabeça de Fibonacci é um problema de quadratura de um quadrado, que consiste em cobrir um quadrado usando ladrilhos retangulares. A solução apresentada é bastante interessante, pois as peças são compostas a partir dos números da sequência de Fibonacci: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...$ e assim por diante.

Observe o exemplo abaixo:

Considere as peças:



Com essas peças, podemos montar o quadrado:



Denominando como *Quebra-Cabeça de Fibonacci* o problema de montar um quadrado com um número ímpar de retângulos cujas dimensões são dadas pelos termos iniciais e consecutivos da sequência de Fibonacci.

Mas uma pergunta muito interessante seria: O problema sempre terá solução?

Uma teorema interessante sobre a sequência de Fibonacci é o seguinte:

Teorema 9. *Se somarmos um número ímpar de produtos cujas parcelas sejam números sucessivos da sequência, iniciando com* 1×1 *obtemos o quadrado do último número. Ou seja,*

$$a_1 \times a_2 + a_2 \times a_3 + a_3 \times a_4 + \cdots + a_{n-2} \times a_{n-1} + a_{n-1} \times a_n = (a_n)^2$$

sendo a_i*,* $i = 1, 2, ..., n$ *os primeiros termos da sequência e* n *é par.*

Demonstração: Vamos utilizar o princípio de indução matemática.

i) O teorema é valido para $n = 2$, pois $a_1 \times a_2 = 1 \cdot 1 = 1 = (a_2)^2$.

ii) Suponhamos válido para $n = k$, ou seja,

$$a_1 \times a_2 + a_2 \times a_3 + a_3 \times a_4 + \cdots + a_{k-2} \times a_{k-1} + a_{k-1} \times a_k = (a_k)^2$$

sendo a_k um termo de ordem par na sequência de Fibonacci. Agora, vamos provar que o teorema é válido para a_{k+2}, pois teremos um número ímpar de parcelas, ou seja, queremos provar que:

$$a_1 \times a_2 + a_2 \times a_3 + a_3 \times a_4 + \cdots + a_{k-1} \times a_k + a_k \times a_{k+1} + a_{k+1} \times a_{k+2} = (a_{k+2})^2.$$

Usando a hipótese de indução, temos que

$$a_1 \times a_2 + a_2 \times a_3 + a_3 \times a_4 + \cdots + a_{k-1} \times a_k + a_k \times a_{k+1} + a_{k+1} \times a_{k+2} =$$
$$= (a_k)^2 + a_k \times a_{k+1} + a_{k+1} \times a_{k+2} = a_k \times (a_k + a_{k+1}) + a_{k+1} \times a_{k+2}.$$

Mas $a_k + a_{k+1} = a_{k+2}$ então

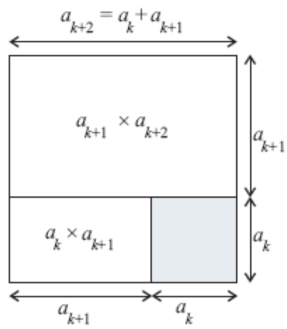
$$a_k \times (a_k + a_{k+1}) + a_{k+1} \times a_{k+2} = a_k \times a_{k+2} + a_{k+1} \times a_{k+2} = a_{k+2} \times (a_k + a_{k+1}) = (a_{k+2})^2$$

$\blacksquare$

Portanto, o teorema foi demonstrado, porém não basta apenas isso para mostrar que o quebra-cabeça pode ser montado, pois é possível exibir alguns exemplos de retângulos com soma de suas áreas igual a um quadrado perfeito, mas que não formam um quadrado.

Um exemplo é a soma das áreas dos retângulos 1×1 e 1×3 é igual a 4, mas com esses retângulos não podemos montar um quadrado 2×2.

Por indução, iremos provar que o quadrado pode efetivamente ser montado. Vamos mostrar que, se n é par com as $(n-1)$ peças (retângulos de dimensões ($a_1 \times a_2$, $a_2 \times a_3$, ..., $a_{n-1} \times a_n$)), podemos formar um quadrado de lado a_n.



Utilizaremos o princípio de indução matemática.

i) Para $n = 2$, o retângulo $1 \times 1 = a_1 \times a_2$ é um quadrado.

ii) Suponhamos que possamos montar um quadrado de lado a_k com as primeiras $(k-1)$ peças, sendo k par. Os próximos retângulos da sequência são $a_k \times a_{k+1}$ e $a_{k+1} \times a_{k+2}$.

Como $a_{k+2} = a_k + a_{k+1}$, esses retângulos podem ser justapostos ao quadrado de lado a_k, de modo a formar um quadrado de lado a_{k+2}. Assim com as primeiras $k+1$ peças (com $k+2$ par) também podemos montar um quadrado de lado a_{k+2}.

Portanto, pelo princípio da indução matemática, os primeiros $(n-1)$ retângulos podem ser justapostos de modo a formar um quadrado de lado a_n quando n é par.

O interessante é que o argumento geométrico substitui com vantagens o argumento puramente algébrico, porque, além de mostrar que a soma das áreas dos primeiros $(n-1)$

retângulos (n par) é igual a $(a_n)^2$, mostra que eles podem ser justapostos formando um quadrado.

É bastante interessante notar que, em ambas as demonstrações, ao passar de k para $k+2$ não usamos o fato de que k é par. Mas o próprio resultado só vale, para k par (para um número ímpar de retângulos). Isso ocorre porque, começando de 1, temos um quadrado inicial, mas caso começássemos de 2, não daria certo, pois os retângulos 1×1 e 1×2 não formariam um quadrado.

4 O fractal de Grossman e a sequência de Fibonacci

Ana Lúcia Braz Dias, em [6], traz o Fractal de Grossman relacionando a sequência de Fibonacci. O Fractal de Grossman, criado pelo matemático George Grossman (1997), tem algumas propriedades importantes, sendo uma delas o aparecimento da sequência de Fibonacci.

A construção de um fractal é um processo que não se completa em um número finito de passos. Ele se dá pela aplicação de uma regra de transformação em determinadas partes do objeto resultante, repetidas vezes. Idealmente, infinitas vezes.

Existem três informações importantes para que se construa um fractal:

i) Qual a semente;

ii) Qual é a transformação ou o procedimento gerador;

iii) Onde será aplicado o procedimento gerador.

Falando especificamente do fractal de Grossman, sua construção é gerada a partir de um triângulo retângulo isósceles.

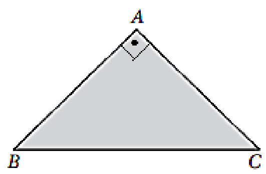


Figura 2.1: Estágio 0

A regra de iteração para a construção do fractal, consiste na construção de duas projeções ortogonais. Vamos descrever o procedimento:

A partir do vértice do ângulo reto, baixemos uma perpendicular ao lado oposto (a hipotenusa). Do ponto onde essa perpendicular intercepta a hipotenusa (o ponto médio), construiremos outro segmento de reta, dessa vez perpendicular a um dos catetos. A escolha do cateto é importante: Se A é o vértice do ângulo reto, D é o ponto de sobre a hipotenusa e E é o ponto sobre o cateto, este deve ser escolhido de forma que o ponto A fique à sua direita. Assim eliminamos a região triangular formada no interior da figura.

Considerando o triângulo da Figura 2.1 como o estágio 0, o procedimento consiste em, partindo do ponto A, construir a perpendicular ao lado $\overline{BC}$, que intercepta $\overline{BC}$ em D. Traçando $\overline{DE}$, a perpendicular a $\overline{AB}$ que passa por D, de tal forma que o ponto A fique a direita da semirreta DE, resultando a Figura 2.2, estágio 1, no qual o triângulo retângulo isósceles original foi substituido por dois novos triângulos retângulos isósceles com um espaço vazio triangular entre eles.

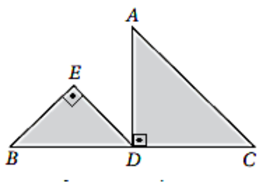


Figura 2.2: Estágio 1

A estrutura do estágio 1 é a configuração que posteriormente será observada em várias partes de estágios mais avançados do fractal, no entanto em escalas e posições diferentes. (autossemelhança)

Agora, temos duas informações importantes sobre o fractal de Grossman:

i) A semente;

ii) O procedimento.

Agora, devemos obter apenas mais uma informação: onde o procedimento será aplicado a cada iteração?

Respondendo a essa questão importante, será sempre nos triângulos de maior área, a cada estágio, e apenas neles.

Observando a Figura 2.2 do estágio 1, o triângulo ADE foi retirado do fractal, e nele não ocorrerá mais nenhuma transformação. Temos, então, somente dois triângulos BED

e ACD, dos quais ACD é o maior. Assim, fazendo o procedimento apenas no triângulo ACD, obteremos o estágio 2, como mostra a Figura 2.3:

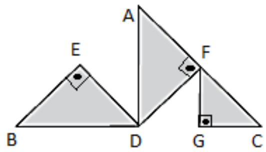


Figura 2.3: Estágio 2

Daí tiramos uma pergunta: Quantas regiões triangulares temos no estágio 2 do fractal?

Respondendo a essa questão: sobraram três regiões triangulares, pois retiramos duas até este estágio.

Assim, depois de responder a essa pergunta, permaneceremos como candidatos a futuras transformações apenas três triângulos. Observando a Figura 2.3, notamos que dois deles são congruentes, e de área maior que a do terceiro. Então será nesses dois triângulos maiores que aplicaremos o procedimento gerador para obtermos o estágio 3 como mostra a Figura 2.4.

Vamos demonstrar que realmente os triângulos BED e AFD do Estágio 2 são congruentes e de maior área.

Lema 1 - $\triangle BED \equiv \triangle AFD$

Demonstração: Sejam $\overline{AB} = a$, $\overline{AC} = a$ e $\overline{BC} = a\sqrt{2}$, pois a semente é um triângulo retângulo isósceles.

Após os procedimentos iniciais, no estágio 2, temos:

i)$\overline{BD} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, pois D é ponto médio de $\overline{BC}$;

ii) $\overline{BE} = \dfrac{a}{2}$, pois E é ponto médio de $\overline{BA}$;

iii) $\overline{AD} = \sqrt{\dfrac{2a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, pois $\overline{AD}$ é altura do triângulo ABC;

iv) $\overline{AF} = \dfrac{a}{2}$, pois F é ponto médio de $\overline{AC}$.

Analisando os $\triangle BED$ e $\triangle AFD$, pelo fato de

i) Os dois triângulos são retângulos;

ii) $\overline{BD} \equiv \overline{AD} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$;

iii) $\overline{BE} \equiv \overline{AF} = \dfrac{a}{2}$.

Pelo caso de congruência **Cateto-hipotenusa**, podemos concluir que os triângulos BED e AFD são congruentes. ■

Lema 2 - Área $\triangle BED$ é maior que a área $\triangle FGC$

Demonstração: Utilizando as fórmulas das áreas, temos:

$$\text{Área}_{\triangle BED} = \frac{\overline{EB} \times \overline{ED}}{2} = \frac{\frac{a}{2} \times \frac{a}{2}}{2} = \frac{a^2}{8}$$

$$\text{Área}_{\triangle FGC} = \frac{\overline{GC} \times \overline{GF}}{2} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{4} \times \frac{a\sqrt{2}}{4}}{2} = \frac{2a^2}{32} = \frac{a^2}{16}$$

Daí,

$$\text{Área}_{\triangle FGC} = \frac{1}{2}\,\text{Área}_{\triangle BED}.$$

Portanto os triângulos $\triangle BED$ e $\triangle AFD$ tem maior área. ■

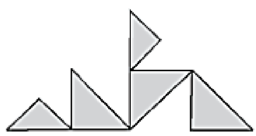


Figura 2.4: Estágio 3

Lembrando que o procedimento parte sempre dos ângulos retos e prosseguem em sentido horário.

Observando a Figura 2.4, que é o estágio 3 do fractal de Grossman, notemos que ainda retém cinco triângulos, dos quais um trio e um par são congruentes entre si.

O trio consiste nos triângulos de maior área, ou seja, nesses que iremos aplicar o procedimento gerador, assim obtendo o estágio 4, figura 2.5. Como mostra a figura a seguir:

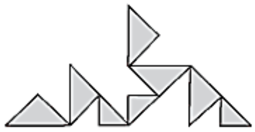


Figura 2.5: Estágio 4

E assim sucessivamente,

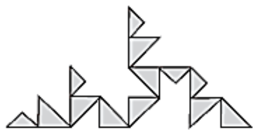


Figura 2.6: Estágio 5

Relacionando o fractal de Grossman com a sequência de Fibonacci

Vamos contar e analisar o número de triângulos a cada estágio.

Será que podemos prever o número de triângulos envolvidos em uma iteração do fractal de Grossman?

Vamos observar os primeiros estágios e procurar alguma regularidade.

i) No estágio 0 temos apenas um triângulo, que participou da primeira iteração;

ii) No estágio 1 havia um triângulo maior e outro menor. Neste caso apenas um, o maior, participou da iteração;

iii) No estágio 2 envolveu apenas dois triângulos;

iv) No estágio 3 envolveu apenas três triângulos.

Até o momento, poderiamos ser tentados a concluir que a próxima iteração envolveria quatro triângulos, pensando que o número deles estivesse sempre sendo acrescido de uma unidade. Porém ao analisarmos o estágio 4, mostra que foram envolvidos cinco triângulos. No estágio 5 o números de triângulos “grandes”, que serão usados na próxima iteração, é oito. Notemos que a sequência de triângulos que serão usados para a iteração é a sequência de Fibonacci, na qual cada termo é a soma dos dois anteriores.

Se denotarmos por Q_n e q_n, $n > 1$, o número de triângulos maiores e menores a cada etapa, respectivamente, teremos $Q_{n+1} = q_n + Q_n$, $q_{n+1} = Q_n$. Segue $Q_{n+1} = Q_n + Q_{n-1}$, o que define a sequência de Fibonacci. E esse resultado, permite dizer que o estágio 6 da construção do fractal de Grossman terá 13 triângulos maiores.

Interessante também, é que a sequência de Fibonacci é obtida se contarmos o número de triângulos menores a cada estágio, bem como se contarmos o número total de triângulos a cada estágio.

A tabela a seguir é uma mostra dos números de Fibonacci:

Estágio n	Triângulos menores q_n	Triângulos maiores Q_n	Total de triângulos T_n
1	1	1	2
2	1	2	3
3	2	3	5
4	3	5	8
5	5	8	13

Tabela 2.4: Números de Fibonacci

Capítulo 3

TRIÂNGULO DE PASCAL E ALGUMAS SEQUÊNCIAS

Neste capítulo estudaremos o triângulo de Pascal e algumas sequências contidas no mesmo, isto é, a sequência da potência de 2, a sequência da potência de 11 e a sequência de Fibonacci.

1 O Triângulo de Pascal

Para definirmos o Triângulo de Pascal, primeiramente vamos definir o que é um número binomial.

Definição 12. *Chama-se* ***número binomial*** *o número*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

onde $n, k \in \mathbb{N}$ *e* $n \geqslant k$*.*

Agora podemos definir o Triângulo de Pascal.

Definição 13. *Chama-se* ***Triângulo de Pascal*** *ao conjunto formado pelos números binomiais* $\binom{n}{k}$*, dispostos em linhas e colunas de tal modo que em cada linha os números binomiais apresentam o mesmo valor de* n *e em cada coluna apresentam o mesmo valor de* k*. As linhas e colunas do Triângulo de Pascal são numeradas a partir de zero.*

Daí, podemos escrever o Triângulo de Pascal usando os números binomiais da seguinte forma:

$$
\begin{array}{cccccccc}
\binom{0}{0} \\
\binom{1}{0} & \binom{1}{1} \\
\binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} \\
\binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} \\
\binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} \\
\binom{5}{0} & \binom{5}{1} & \binom{5}{2} & \binom{5}{3} & \binom{5}{4} & \binom{5}{5} \\
\binom{6}{0} & \binom{6}{1} & \binom{6}{2} & \binom{6}{3} & \binom{6}{4} & \binom{6}{5} & \binom{6}{6} \\
\binom{7}{0} & \binom{7}{1} & \binom{7}{2} & \binom{7}{3} & \binom{7}{4} & \binom{7}{5} & \binom{7}{6} & \binom{7}{7} \\
 & & & & \vdots & & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccccccc}
1 \\
1 & 1 \\
1 & 2 & 1 \\
1 & 3 & 3 & 1 \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 \\
1 & 7 & 21 & 35 & 35 & 21 & 7 & 1 \\
 & & & & \vdots & & &
\end{array}
$$

Triângulo de Pascal e os coeficientes binomiais

Este triângulo também chamado de aritmético e de Triângulo de Tartaglia em alguns países, já era conhecido no século XII, e algumas de suas propriedades foram estudadas pelos matemáticos Yang Hui na China e por Omar Khayyam na Pérsia (veja [13].

Blaise Pascal (1623 - 1662) tem seu nome fortemente associado ao triângulo, pois foi o primeiro a escrever um tratado sobre o triângulo aritmético. O nome Tartaglia, pseudônimo do italiano Niccolò Fonana (1500 - 1557) vem porque foi um dos primeiros a publicar na Europa.

Teorema 10. ***(Relação de Stifel)*** *A partir da terceira linha do Triângulo de Pascal, cada elemento entre o primeiro e o último, pode ser obtido pela soma de dois elementos consecutivos da linha anterior sendo o segundo o elemento imediatamente acima do que se quer obter. Usando a notação de números binomiais podemos escrever essa relação como:*

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

Demonstração:

$$\begin{aligned}
\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1} &= \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!}+\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}\\
&= \frac{(n-k)(n-1)!}{(n-k)k!(n-1-k)!}+\frac{k(n-1)!}{k(k-1)!(n-k)!}\\
&= \frac{(n-k)\cdot(n-1)!+k\cdot(n-1)!}{k!(n-k)!}\\
&= \frac{(n-1)![k+(n-k)]}{k!(n-k)!}\\
&= \frac{n(n-1)!}{k!(n-k)!}=\binom{n}{k}
\end{aligned}$$

■

2 O Triângulo de Pascal e a Sequência da Potência de 2

Definição 14. *Denomina-se* ***Binômio de Newton****, a todo binômio da forma* $(a+b)^n$*, para todo* $n \geqslant 0$.

Teorema 11. A equação geral para o desenvolvimento do binômio de Newton é:

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k=\binom{n}{0}a^nb^0+\binom{n}{1}a^{n-1}b^1+\cdots+\binom{n}{n-1}a^1b^{n-1}+\binom{n}{n}a^0b^n,$$

para $n \geqslant 1$.

Demonstração. Vamos utilizar o princípio de indução matemática.

Seja $P(n) : (a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$.

i) O teorema é válido para $n=1$, pois $P(1) : (a+b)^1=a+b=\binom{1}{0}a^1b^0+\binom{1}{1}a^0b^1=a+b$

ii) Suponhamos que $P(n)$ seja válido para algum $n \geqslant 1$. Vamos provar para $n+1$.

$(a+b)^{n+1}=(a+b)(a+b)^n$

Utilizando a hipótese de indução, temos

$(a+b)^{n+1}=(a+b)(a+b)^n=(a+b)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$

Efetuando a propriedade distributiva:

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= a\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^{k} + b\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^{k}\\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n+1-k}b^{k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^{k+1}\end{aligned}$$

A primeira soma pode ser escrita como:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n+1-k}b^{k} = a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^{n+1-k}b^{k}$$

A segunda soma pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^{k+1} &= b^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}a^{n-k}b^{k+1}\\ &= b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}a^{n+1-k}b^{k}\end{aligned}$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right]a^{n+1-k}b^{k}\\ &= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}a^{n+1-k}b^{k}\\ &= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^{n-k}b^{k}\end{aligned}$$

Logo é válido para $n+1$. O que podemos concluir pelo princípio de indução matemática que

$(a+b)^{n} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^{k} = \binom{n}{0}a^{n}b^{0} + \binom{n}{1}a^{n-1}b^{1} + \cdots + \binom{n}{n-1}a^{1}b^{n-1} + \binom{n}{n}a^{0}b^{n}$, para $n \geqslant 1$.

■

Vamos mostrar que a soma de cada linha do triângulo de Pascal é uma potência de 2. Veja a Figura 3.1:

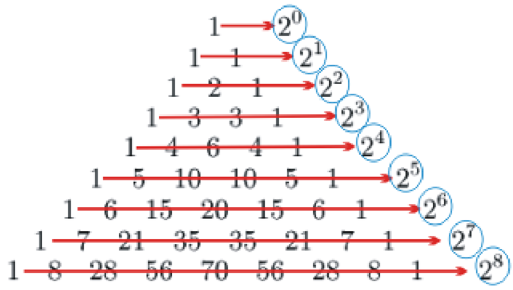


Figura 3.1: Soma de cada linha e a potência de 2

Ao somarmos os coeficientes binomiais de uma mesma linha teremos uma potência de 2.

Corolário 1. *Para todo $n \in \mathbb{N}$,*

$$(1+1)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

Demonstração. Aplicar o teorema 11 para $a = b = 1$

$\blacksquare$

Portanto a soma de cada linha do triângulo de Pascal é uma potência de 2.

3 O Triângulo de Pascal e a Sequência da Potência de 11

Cada linha do triângulo de Pascal pode ser gerada utilizando o binômio de Newton.

$(a+b)^0 = 1$	1
$(a+b)^1 = 1a + 1b$	1 1
$(a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$	1 2 1
$(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$	1 3 3 1
$\vdots$	$\vdots$

Observando o triângulo de Pascal, cada linha como um números inteiro, obtém-se as potência de 11. Essas potências são geradas da seguinte maneira: basta substituir no quadro acima $a = 10$ e $b = 1$.

Linha 0: $11^0 = 1(10^0) = \binom{0}{0}(10^0) = 1$

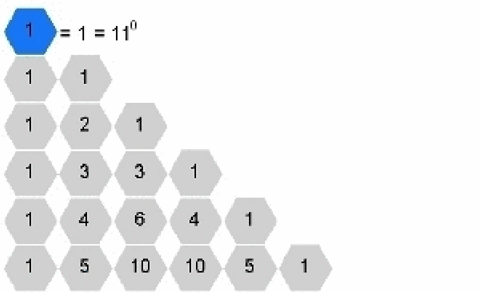


Figura 3.2: Triângulo de Pascal e Potência de 11 com expoente 0

Linha 1: $11^1 = 1(10^1) + 1(10^0) = \binom{1}{0}(10^1) + \binom{1}{1}(10^0) = 10 + 1 = 11$

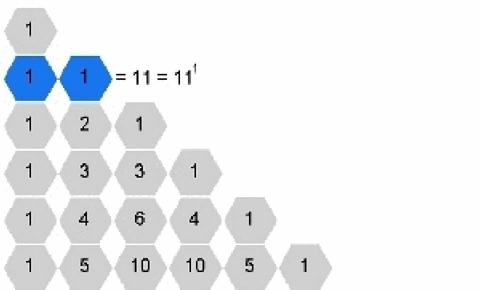


Figura 3.3: Triângulo de Pascal e Potência de 11 com expoente 1

Linha 2: $11^2 = 1(10^2) + 2(10^1) + 1(10^0) = \binom{2}{0}(10^2) + \binom{2}{1}(10^1) + \binom{2}{2}(10^0) = 100 + 20 + 1 = 121$

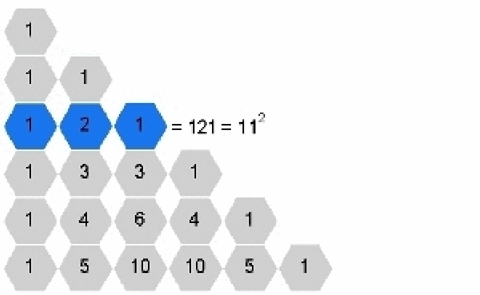


Figura 3.4: Triângulo de Pascal e Potência de 11 com expoente 2

Linha 3: $11^3 = 1(10^3)+3(10^2)+3(10^1)+1(10^0) = \binom{3}{0}(10^3)+\binom{3}{1}(10^2)+\binom{3}{2}(10^1)+\binom{3}{3}(10^0) = 1000 + 300 + 30 + 1 = 1331$

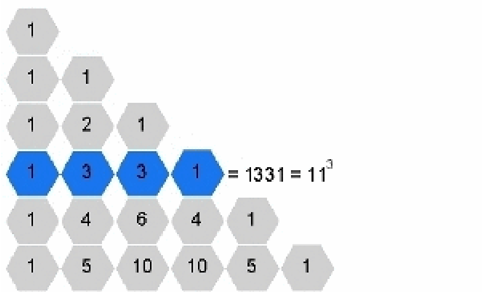


Figura 3.5: Triângulo de Pascal e Potência de 11 com expoente 3

Linha 4: $11^4 = 1(10^4) + 4(10^3) + 6(10^2) + 4(10^1) + 1(10^0) = \binom{4}{0}(10^4) + \binom{4}{1}(10^3) + \binom{4}{2}(10^2) + \binom{4}{3}(10^1) + \binom{4}{4}(10^0) = 10000 + 4000 + 600 + 40 + 1 = 14641$

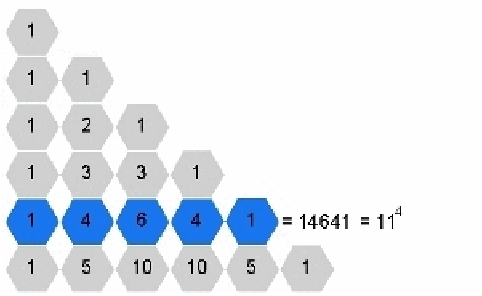


Figura 3.6: Triângulo de Pascal e Potência de 11 com expoente 4

Linha 5: $11^5 = 1(10^5) + 5(10^4) + 10(10^3) + 10(10^2) + 5(10^1) + 1(10^0) = \binom{5}{0}(10^5) + \binom{5}{1}(10^4) + \binom{5}{2}(10^3) + \binom{5}{3}(10^2) + \binom{5}{4}(10^1) + \binom{5}{5}(10^0) = 100000 + 50000 + 10000 + 1000 + 50 + 1 = 161051$

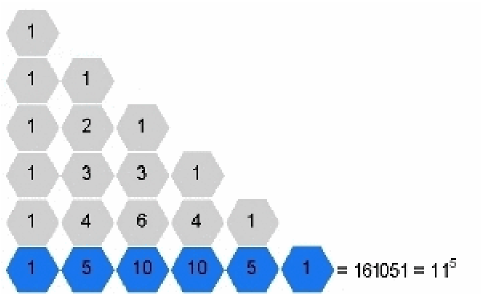


Figura 3.7: Triângulo de Pascal e Potência de 11 com expoente 5

Utilizando o Binômio de Newton, temos:

Linha n: $11^n = (10+1)^n = \binom{n}{0}(10^n)(1^0) + \binom{n}{1}(10^{n-1})(1)^1 + \binom{n}{2}(10^{n-2})(1)^2 + \cdots + \binom{n}{k}(10^{n-k})(1)^k + \cdots + \binom{n}{n}(10^{n-n})(1)^n =$

$$= (10+1)^n = \binom{n}{0}(10^n) + \binom{n}{1}(10^{n-1}) + \binom{n}{2}(10^{n-2}) + \cdots + \binom{n}{k}(10^{n-k}) + \cdots + \binom{n}{n}$$

Assim podemos notar que os coeficientes de cada linha formam o triângulo de Pascal.

4 O Triângulo de Pascal e a Sequência de Fibonacci

A partir do triângulo de Pascal também podemos obter os números de Fibonacci, para isso, basta somar os números das diagonais como na Figura 3.8. Começando da primeira diagonal 1, a segunda 1, a terceira $1 + 1 = 2$, a quarta $2 + 1 = 3$, a quinta $1 + 3 + 1 = 5$, e assim por diante.

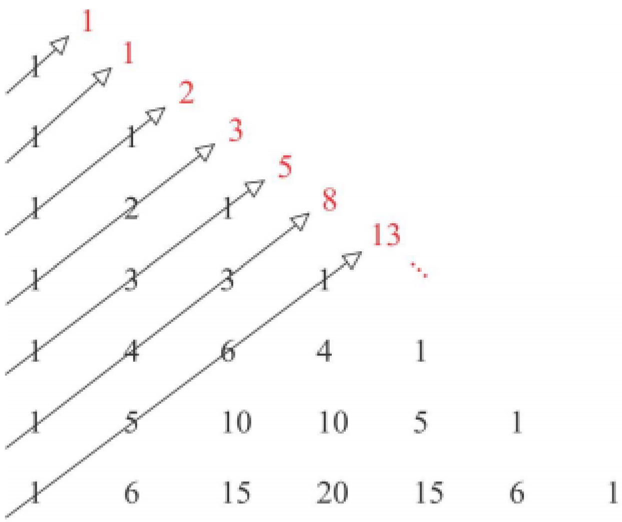


Figura 3.8: Triângulo de Pascal e a Sequência de Fibonacci

Teorema 12. *A soma dos elementos da n-ésima "diagonal inversa" do Triângulo de Pascal é o número de Fibonacci F_n.*

Demonstração: Observando a Figura 3.8 e a sequência de Fibonacci, devemos provar que:

$$\begin{cases} F_0 & = & F_1 & = & 1 \\ F_{n+2} & = & F_{n+1} & + & F_n \quad para \quad n \geqslant 0. \end{cases}$$

temos que:

$$\begin{aligned}
F_0 &= \binom{0}{0} = 1 \\
F_1 &= \binom{1}{0} = 1 \\
F_2 &= \binom{2}{0} + \binom{1}{1} \\
F_3 &= \binom{3}{0} + \binom{2}{1} \\
F_4 &= \binom{4}{0} + \binom{3}{1} + \binom{2}{2} \\
F_5 &= \binom{5}{0} + \binom{4}{1} + \binom{3}{2} \\
&\vdots \\
F_n &= \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \cdots + \binom{n-k}{k} \\
F_{n+1} &= \binom{n+1}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n+1-p}{p} \\
F_{n+2} &= \binom{n+2}{0} + \binom{n+1}{1} + \cdots + \binom{n+2-s}{s}
\end{aligned}$$

onde temos que k, p e s são os maiores números inteiros que satisfazem

$$\begin{cases} k & \leqslant & n-k \\ p & \leqslant & n+1-p \\ s & \leqslant & n+2-s \end{cases}$$

ou seja,

$$\begin{cases} k & \leqslant & \dfrac{n}{2} \\ p & \leqslant & \dfrac{n+1}{2} \\ s & \leqslant & \dfrac{n+2}{2} = \dfrac{n}{2}+1 \end{cases}$$

Como queremos demonstrar que $F_{n+1} + F_n = F_{n+2}$, vamos dividir em dois casos.

i) Quando n for ímpar, temos que $k = \dfrac{n-1}{2}$, $p = \dfrac{n+1}{2} = \dfrac{n-1+2}{2} = k+1$ e $s = k+1$ independente da paridade.

Assim,

$$\begin{aligned} F_{n+1} + F_n &= \binom{n+1}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n+1-(k+1)}{k+1} \\ &\quad + \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \cdots + \binom{n-k}{k}. \\ &= \binom{n+1}{0} + \left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1}\right] + \left[\binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2}\right] \\ &\quad + \cdots + \left[\binom{n-k}{k} + \binom{n-k}{k+1}\right]. \end{aligned}$$

aplicando a Relação de Stifel, $\dbinom{n}{k} + \dbinom{n}{k+1} = \dbinom{n+1}{k+1}$, obtemos:

$$F_{n+1} + F_n = \binom{n+1}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n+1-k}{k+1}.$$

Como $s = k+1$ e $\dbinom{n+1}{0} = \dbinom{n+2}{0} = 1$, obtemos

$$F_{n+1} + F_n = \binom{n+2}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n+2-s}{s} = F_{n+2}.$$

ii) Quando n for par, temos que $k = \dfrac{n}{2}$ e como $p \leqslant \dfrac{n}{2} + \dfrac{1}{2}$, como p é inteiro, então $p = \dfrac{n}{2} = k$ e $s = k+1$, pois independe da paridade. Já que $k = p$, F_{n+1} e F_n terão o mesmo número de parcelas. Assim

$$
\begin{aligned}
F_{n+1}+F_n &= \binom{n+1}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n+1-k}{k}\\
&\quad+\binom{n}{0}+\binom{n-1}{1}+\cdots+\binom{n+1-k}{k-1}+\binom{n-k}{k}.\\
&= \binom{n+1}{0}+\left[\binom{n}{0}+\binom{n}{1}\right]+\left[\binom{n-1}{1}+\binom{n-1}{2}\right]\\
&\quad+\cdots+\left[\binom{n+1-k}{k-1}+\binom{n+1-k}{k}\right]+\binom{n-k}{k}.
\end{aligned}
$$

Novamente aplicando a relação de Stifel, temos

$$
F_{n+1}+F_n=\binom{n+1}{0}+\binom{n+1}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n+2-k}{k}+\binom{n-k}{k}
$$

Lembrando que $n=2k$ e $s=k+1$, obtemos $n+2-k=n+2-(s-1)$, $n-k=2k-k=k$ e $n+2-s=2k+2-s=2(k+1)-s=2s-s=s$. Como

- $\binom{n+1}{0}=\binom{n+2}{0}=1$
- $\binom{n+2-k}{k}=\binom{n+2-(s-1)}{s-1}$
- $\binom{n-k}{k}=\binom{k}{k}=1=\binom{s}{s}=\binom{n+2-s}{s}$

Assim,

$$
F_{n+1}+F_n=\binom{n+2}{0}+\binom{n+1}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n+2-(s-1)}{s-1}+\binom{n+2-s}{s}=F_{n+2}
$$

Portanto, $F_{n+1}+F_n=F_{n+2}$ é válida para qualquer $n\geqslant 0$.

$\blacksquare$

Capítulo 4

SEQUÊNCIAS INTERESSANTES

Neste capítulo estaremos vendo algumas sequências interessantes apresentadas em artigos da Revista do Professor de Matemática.

1 Progressão Exponencial

Célia Barros Nunes, em [12], traz um relato de experiência de um aluno do ensino médio que deu o nome a uma sequência interessante. Essa sequência foi denominada por *Sequência Exponencial (PE).*

Definição 15. *Uma PE é uma sequência com primeiro termo sendo um determinado número real (positivo), e os termos seguintes obtidos elevando-se cada termo anterior a um expoente-razão E.*

Vejamos com um exemplo a diferença entre uma PA, uma PG e uma PE.

Uma PA com $a_1 = 2$ e $r = 2$: $(2, 4, 6, 8, ...)$

Uma PG com $a_1 = 2$ e $q = 2$: $(2, 4, 8, 16, ...)$

Uma PE com $a_1 = 2$ e $E = 2$: $(2, 4, 16, 256, ...)$

Fórmula do termo geral

Sendo o primeiro termo da PE igual a a_1, temos

1º termo: a_1;

2º termo: $a_2 = (a_1)^E$;

3^{o} termo: $a_3 = (a_2)^E = (a_1)^{E^2}$;

4^{o} termo: $a_4 = (a_3)^E = (a_1)^{E^3}$;

$\vdots$

n^{o} termo: $a_n = (a_{n-1})^E = (a_1)^{E^{n-1}}$.

Portanto $a_n = (a_{n-1})^E = (a_1)^{E^{n-1}}$ é a fórmula do termo geral de uma PE.

Analizando o exemplo temos que:

$$\begin{aligned}
a_1 &= 2;\\
a_2 &= 2^2 = 4;\\
a_3 &= (2)^{2^{3-1}} = 2^4 = 16;\\
a_4 &= (2)^{2^{4-1}} = (2)^8 = 256;\\
&\vdots\\
a_n &= (2)^{2^{n-1}};
\end{aligned}$$

Cálculo da razão de uma PE dados o primeiro termo e o último termos

Seja uma PE $(a_1, a_2, ..., a_n)$. Como $a_n = (a_1)^{E^{n-1}}$, temos

Aplicando logaritmo de base 10 em ambos os lados,

$$\log(a_n) = \log(a_1)^{E^{(n-1)}} \text{ ou } \log(a_n) = E^{(n-1)} \log(a_1)$$

Então,

$$E^{(n-1)} = \frac{\log(a_n)}{\log(a_1)} \text{ ou } E = \sqrt[(n-1)]{\frac{\log(a_n)}{\log(a_1)}}$$

Produto dos n primeiros termos de uma PE

Observando a PE $(a_1, a_1^E, a_1^{E^2}, a_1^{E^3}, ...) = (a_1, a_2, a_3, a_4, ...)$.

Fazendo o produto P dos termos, temos

$P = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \cdots \cdot a_n = (a_1)^{(1+E+E^2+\cdots+E^{n-1})}$

Notemos que, $1, E, E^2, ..., E^{n-1}$ é uma PG, tal que $a_1 = 1$ e a razão $q = E$

Utilizando a fómula da soma dos termos de uma PG, temos que

$S_n = \dfrac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$ para $q \neq 1$.

Então $S_n = \dfrac{1(E^n - 1)}{E - 1} = \dfrac{(E^n - 1)}{E - 1}$.
Portanto

$$P = (a_1)^{\frac{(E^n - 1)}{E-1}}.$$

2 Uma resposta para uma pergunta

Carlos Alberto M. de Assis e Raphael Antunes do Santos, em [1], traz um relato de experiência com alunos do ensino médio, onde coloca uma questão do livro fundamentos da matemática elementar do autor Gelson Iezzi e outros, que diz: "Mostre que $x = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots}}}$ é um número inteiro".

Podemos resolver essa questão da seguinte forma:

$$x^2 = 2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots}}$$
$$x^2 = 2 + x$$
$$x^2 - x - 2 = 0$$

Resolvendo a equação temos que $x_1 = -1$ ou $x_2 = 2$, daí os alunos concluiram que $x = 2$.

Ao resolvermos a questão, há algo que podemos nos perguntar:

E se o x da questão fosse escrito da seguinte maneira: $x = \sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3+\cdots}}}$, $x = \sqrt{4+\sqrt{4+\sqrt{4+\cdots}}}$ ou ainda, $x = \sqrt{5+\sqrt{5+\sqrt{5+\cdots}}}$ e assim sucessivamente? Mas precisamente, para que valores de $n, n > 0$, teremos que $x = \sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n+\cdots}}}$ é inteiro?

Generalizando o raciocínio, tomando $x = \sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n+\cdots}}}$. Elevando ao quadrado, temos

$$x^2 = n + x$$
$$x^2 - x - n = 0.$$

Resolvendo a equação, temos que $x_1 = \dfrac{1+\sqrt{1+4n}}{2}$ e $x_2 = \dfrac{1-\sqrt{1+4n}}{2}$

Claro que $x > 0$, logo:

$$x = \frac{1+\sqrt{1+4n}}{2}$$

Notemos que, para x ser um inteiro positivo, necessariamente $1 + 4n$ deverá ser um quadrado perfeito (necessariamente ímpar) e somente neste caso. Sendo $D = 1+4n$, vamos analisar os quadrados ímpares, construindo uma tabela, onde mostra os correspondentes do valores de $n = \dfrac{D-1}{4}$ e os seus respectivos valores para x. Uma observação é que D não poderá ser um, pois para isso $n = 0$, porém $n > 0$.

D	$n = \dfrac{D-1}{4}$	$x = \dfrac{1+\sqrt{D}}{2}$
$3^2 = 9$	2	2
$5^2 = 25$	6	3
$7^2 = 49$	12	4
$9^2 = 81$	20	5
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$

Assim, podemos notar que, a primeira linha significa que $x = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}} = 2$, a segunda linha $x = \sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\cdots}}} = 3$, e assim por diante.

De um modo geral, sendo $x = \dfrac{1+\sqrt{D}}{2}$ tiramos que $D = (2x-1)^2$ e, portanto, substituindo em n, temos que $n = \dfrac{(2x-1)^2-1}{4}$.

Isso mostra que x pode assumir qualquer valor natural maior do que 1, mas n só pode assumir os valores $n = \dfrac{(2x-1)^2-1}{4}$, que formam a Progressão Aritmética de segunda ordem $(2,\ 6,\ 12,\ 20,\ 30,\ 42, ...)$.

Assim, temos que $\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3+\cdots}}}$ não é inteiro, mas $\sqrt{12+\sqrt{12+\sqrt{12+\cdots}}}$ é um inteiro igual a 4.

Devemos tomar alguns cuidados com este raciocínio realizado.

Primeiro, devemos explicar que, nessas equações, os "pontinhos" indicam que está ocorrendo um processo infinito, mais precisamente, um processo de limite.

Por trás da expressão $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}}$ está a sequência $x_1 = \sqrt{2}$, $x_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}}$, $x_3 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$, ...

Quando escrevemos $x = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}}$, pretende-se que x seja o limite dessa sequência.

Quando escrevemos $x^2 = 2 + x$, usamos a "aritmética dos limites", como "o limite do quadrado é o quadrado do limite", "o limite da soma é a soma dos limites", etc. Esses teoremas são aplicados apenas quando temos a certeza da existência dos limites.

No presente caso, é claro que a sequência $\sqrt{2}$, $\sqrt{2+\sqrt{2}}$, $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$, ... é crescente, ou seja, cada termo é maior que o anterior.

Também temos que todos os termos dessa sequência são menores do que 2.

Vamos provar utilizando o princípio de indução matemática.

Para $k = 1$, temos que $x_1 = \sqrt{2} < 2$

Suponhamos que seja verdadeira a sentença para algum k natural, ou seja $x_k < 2$.

Temos que $x_{k+1} = \sqrt{2+x_k} < \sqrt{2+2} = 2$. Daí pelo princípio de indução matemática, podemos concluir que todos os termos dessa sequência é menor que 2.

Finalmente, como a sequência é crescente e limitada superiormente, pelo teorema 1, ela tem um limite.

De modo análogo é válido para qualquer n da forma $\dfrac{[(2x-1)^2-1]}{4}$.

3 Progressões Aritmético-Geométricas e Progressões Geométrico-Aritméticas

Iremos ver duas progressões que não são estudadas no ensino médio, porém que estão muito ligadas as progressões importantes do ensino básico. Rui Eduardo Brasileiro Paiva, em [15], traz essas duas progressões interessantes.

Observemos a sequência $\frac{1}{2}, \frac{5}{4}, \frac{9}{8}, \frac{13}{16}, \ldots$. A pergunta é se esta sequência é uma PA ou uma PG?

Podemos notar que os numeradores formam uma progressão aritmética de razão igual a 4 e os denominadores formam uma progressão geométrica de razão igual a 2.

Essa pergunta muitas vezes deixa os estudantes confusos, pois seu conhecimento do assunto é limitado às progressões aritméticas e geométricas.

Temos o objetivo de encontrar respostas usando sequências obtidas pelo produto ordenado dos termos consecutivos de uma PA e uma PG, bem como sequências obtidas pela soma ordenada desses termos.

3.1 Progressões Aritmético-Geométricas

Termos consecutivos de uma PA $a, a+r, a+2r, a+3r, \ldots, a+(n-1)r, \ldots$ quando ordenadamente multiplicados por termos de uma PG $1, q, q^2, \ldots, q^{n-1}, \ldots$ geram a sequência $a, (a+r)q, (a+2r)q^2, \ldots, (a+(n-1)r)q^{n-1}, \ldots$ que é denominada progressão aritmético-geométrica.

Definição 16. *Uma PAG é uma sequência* (a_n) *cujo termo geral é dado por* $a_n = (a+(n-1)r)q^{n-1}$*, sendo* a*,* r *e* q *constantes não nulas e* $q \neq 1$*.*

Exemplo 19. *A sequência* $1, \frac{2}{2}, \frac{3}{4}, \frac{4}{8}, \frac{5}{16}, \ldots$ *é uma PAG, onde a razão da PA é* $r = 1$*,* $a = 1$ *e a razão da PG é* $\frac{1}{2}$*.*

Assim, o termo geral é

$$a_n = [a+(n-1)r]q^{n-1} = [1+(n-1)1]\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = n \cdot \frac{1}{2^{n-1}}$$

Exemplo 20. *A sequência* $1, \frac{5}{3}, \frac{9}{9}, \frac{13}{27}, \frac{17}{81}, ...$ *é uma PAG, onde a razão da PA é* $r = 4$, *o* $a = 1$ *e a razão da PG é* $\frac{1}{3}$.

Assim, o termo geral é

$$a_n = [a + (n-1)r]q^{n-1} = (4n-3) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{4n-3}{3^{n-1}}$$

Agora vamos determinar a fórmula para encontrar a soma dos n primeiros termos de uma PAG.

Proposição 1. A soma S_n dos n primeiros termos de uma PAG é dada por

$$S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q} + \frac{rq[1 - nq^{n-1} + (n-1)q^n]}{(1-q)^2}.$$

Demonstração: Temos:

$S_n = a + (a+r)q + (a+2r)q^2 + \cdots + [a + (n-1)r]q^{n-1}$ e

$q.S_n = qa + (a+r)q^2 + (a+2r)q^3 + \cdots + [a + (n-1)r]q^n$. Fazendo $S_n - qS_n$ segue que

$S_n(1-q) = a + rq(1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^{n-2}) - aq^n - (n-1)rq^n$, calculando a soma da PG $(1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^{n-2})$, temos:

$$S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q} + \frac{rq\left[\dfrac{1-q^{n-1}}{1-q} - (n-1)q^{n-1}\right]}{1-q} = \frac{a(1-q^n)}{1-q} + \frac{rq[1 - nq^{n-1} + (n-1)q^n]}{(1-q)^2}$$

■

Exemplo 21. *Qual é o valor, em função de* n, *da soma* $S_n = 1 + 11 + 111 + 1111 + 11111 + \cdots + \underbrace{1111...1111}_{n \ 1\text{‘}s}$?

Solução: Temos que

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + (1 + 10^1) + (1 + 10^1 + 10^2) + \cdots + (1 + 10^1 + 10^2 + \cdots + 10^{n-1}) \\ &= n.1 + (n-1)10^1 + (n-2)10^2 + (n-3)10^3 + \cdots + 3.10^{n-3} + 2.10^{n-2} + 1.10^{n-1} \end{aligned}$$

Notemos que é a soma de uma PAG cujo temo geral a_N é dado por

$$a_N = [n + (N-1)(-1)]10^{N-1}$$

onde, $a = n$, $r = -1$ e $q = 10$.

Utilizando a fórmula da soma da PAG, temos:
$S_n = \dfrac{n(1-10^n)}{1-10} + \dfrac{(-1)10[1 - n10^{n-1} + (n-1)10^n]}{(1-10)^2} = \dfrac{10^{n+1} - 9n - 10}{81}$.

Uma observação importante é que quando $|q| < 1$, o limite, quando n tende a infinito, q^n é zero. Assim o limite de S_n dos n primeiros termos de uma PAG de primeiro termo a, razão aritmética r e razão geométrica q, com $|q| < 1$, quando n tende a infinito é igual a:

$$S = \frac{a}{1-q} + \frac{rq}{(1-q)^2}$$

Exemplo 22. *Quanto vale a soma* $1 + \dfrac{2}{2} + \dfrac{3}{4} + \dfrac{4}{8} + \dfrac{5}{16} + \cdots$ *?*

Solução:

$$S = \frac{a}{1-q} + \frac{rq}{(1-q)^2} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 4.$$

Um problema interessante usando uma PAG

Raphael Alcaires de Carvalho, em [4], traz um problema em que utilizamos a PAG para sua resolução.

Observemos o problema proposto:

"Em uma antiga prisão há uma passagem secreta que conduz a um porão onde há três túneis. O primeiro, túnel A, leva à liberdade em 5 horas, o segundo, túnel B, leva em 10 horas, e o terceiro, túnel C, leva de volta ao ponto de partida (porão) em 12 horas. Considere que os presos fugitivos sejam pessoas perturbadas mentalmente a ponto que mesmo utilizando o terceiro túnel, de não perceberem que retornaram ao ponto de partida e assim tentarão escapar sempre utilizando os três túneis. Determine em média, quanto tempo os presidiários fugitivos que descobrem os túneis, levariam para escapar."

Para resolvermos esse problemas além de utilizarmos o conceito de PAG, devemos entender que é um problema de **valor esperado**. Observemos a definição a seguir:

Definição 17. ***Valor esperado*** *de uma variável aleatória é a soma das probabilidades de cada possibilidade de saída da experiência multiplicada pelo seu valor. Isto é, representa o valor médio "esperado" de uma experiência se ela for repetida muitas vezes.*

Agora vamos resolver o problema proposto anteriormente.

Solução: As possibilidades para os presos fugitivos sairem da prisão pela passagem secreta são:

i) Sair pelo túnel A;

ii) Sair pelo túnel B;

iii) Entrar no túnel C e depois sair pelo túnel A;

iv) Entrar no túnel C e depois sair pelo túnel B;

v) Entrar no túnel C duas vezes e sair pelo túnel A;

vi) Entrar duas vezes no túnel C e sair pelo túnel B;

$\vdots$

E assim por diante.

Fazendo um diagrama de árvores com as possibilidades, temos:

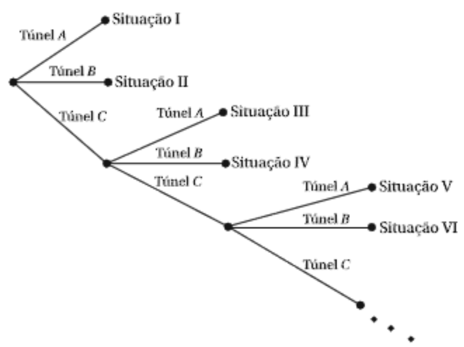


Figura 4.1: Diagrama de árvore de possibilidades de saídas do porão

Para o preso sair, ele demora, em cada umas das situações descritas:

i) 5 horas;

ii) 10 horas;

iii) $(12 + 5)$ horas;

iv) $(12 + 10)$ horas;

v) $(12 + 12 + 5)$ horas;

vi) $(12+12+10)$ horas;

$\vdots$

e assim por diante.

Agora, analisando a probabilidade de o preso sair em cada uma dessas situações é:

i) $\frac{1}{3}$;

ii) $\frac{1}{3}$;

iii) $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$;

iv) $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$;

v) $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{27}$;

vi) $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{27}$;

$\vdots$

e assim por diante.

Portanto, o tempo médio T para o preso sair da prisão é calculado da seguinte maneira:

$$T=\frac{1}{3}\cdot 5+\frac{1}{3}\cdot 10+\frac{1}{9}\cdot(12+5)+\frac{1}{9}\cdot(12+10)+\frac{1}{27}\cdot(12+12+5)+\frac{1}{27}(12+12+10)+\cdots$$

Daí podemos separar essa soma da seguinte forma:

$$\begin{aligned} T &= 5\cdot\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\cdots\right)+10\cdot\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\cdots\right)+2\cdot 12\cdot\left(\frac{1}{9}+\frac{2}{27}+\frac{3}{81}+\cdots\right)\\ T &= 5\cdot\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\cdots\right)+10\cdot\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\cdots\right)+2\cdot 12\cdot\frac{1}{9}\left(1+\frac{2}{3}+\frac{3}{9}+\cdots\right)\end{aligned}$$

sendo $S_1=\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\cdots$ $\quad S_2=\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\cdots$ e $S_3=1+\frac{2}{3}+\frac{3}{9}+\cdots$

temos

$T=5\cdot S_1+10\cdot S_2+2\cdot 12\cdot\frac{1}{9}\cdot S_3$

Analisando as somas S_1, S_2 e S_3 segue que:

As somas infinitas S_1 e S_2, são somas de uma PG de razão $\frac{1}{3}$. Já S_3 é uma soma infinita de PAG.

Calculando S_1 e S_2:

$$S_1 = S_2 = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

Calculando S_3:

$$S_3 = \frac{a}{1-q} + \frac{rq}{(1-q)^2} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} + \frac{1.\frac{1}{3}}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{1}{\frac{2}{3}} + \frac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{9}} = \frac{3}{2} + \frac{3}{4} = \frac{9}{4}$$

Portanto, $T = 5 \cdot \frac{1}{2} + 10 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot 12 \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{9}{4} = \frac{486}{36} = 13,5$ horas.

Assim, o prisioneiro leva em média 13h30min para sair da prisão.

3.2 Progressões Geométrico-Aritméticas

Termos consecutivos de uma PG $a, aq, aq^2, ..., aq^{n-1}, ...$, quando ordenadamente somados com os termos consecutivos de uma PA $0, r, 2r, ..., (n-1)r, ...$, geram a sequência $a, aq + r, aq^2 + 2r, ..., aq^{n-1} + (n-1)r, ...$ denominada progressão geométrico-aritmética (PGA).

Definição 18. *Uma PGA é uma sequência* (a_n) *cujo termo geral,* a_n *é dado por* $a_n = aq^{n-1} + (n-1)r$*, sendo* a*,* r *e* q *constantes não nulas e* $q \neq 1$.

Exemplo 23. *A sequência* $(7, 25, 71, 201, 583, ...)$ *é uma PGA, gerada pela PG* $(7, 7 \times 3, 7 \times 3^2, ...)$ *e pela PA* $(0, 4, 8, 12, ...)$.

Seu termo geral é $a_n = 7 \times 3^{n-1} + 4n - 4$.

Exemplo 24. *A sequência* $(1, 2, 7, 8, 13, 14, \cdots)$ *é uma PGA, gerada pela PG* $(1, -1, 1, -1, ...)$ *e pela PA* $(0, 3, 6, 9, ...)$.
Seu termo geral é $a_n = (-1)^{n-1} + 3n - 3$.

Proposição 2. A soma S_n dos n primeiros termos de uma PGA é dada por

$$S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q} + \frac{(n-1)nr}{2}$$

Demonstração: Temos que

$$\begin{aligned} S_n &= a + (aq + r) + (aq^2 + 2r) + \cdots + (aq^{n-1} + (n-1)r) \\ S_n &= (a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1}) + [0 + r + 2r + \cdots + (n-1)r] \qquad (1) \end{aligned}$$

Notemos que a soma dos n primeiros termos da PGA é a soma dos termos da PG mais a soma dos termos da PA. Utilizando a fórmula da soma dos n primeros termos da PG e a fórmula da soma dos n primeiros termos da PA, segue

$$a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} = \frac{a(1-q^n)}{1-q} \qquad (2)$$

e

$$0 + r + 2r + \cdots + (n-1)r = \frac{(n-1)rn}{2} \qquad (3)$$

Substituindo (2) e (3) em (1), podemos concluir

$$S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q} + \frac{(n-1)nr}{2}$$

■

4 Números Místicos

Nesta seção iremos ver os números místicos na sequência de números que, na base 10, são escritos usando-se somente o algarismo 1.

Frederico Reis Marques de Brito, em [3], traz algumas propriedades importantes dessa sequência.

Os números que, na base 10, são escritos usando-se somente o algarismo 1:

$$1, 11, 111, 1111, 11111, ...$$

têm uma série de peculiaridades que despertam um olhar matemático interessante.

Esses números são chamados de **repunidades**, nome adotado por Albert H. Beiler em 1964, significando algo como unidades repetidas.

Indicamos a n-ésima repunidade por R_n:

$$R_n = \underbrace{1111 \cdots 1111}_{n\ algarismos}$$

Notemos que $R_n = 1 + 10 + 10^2 + \cdots + 10^{n-1} = \dfrac{10^n - 1}{9}$

Temos também que R_n pode ser definida recursivamente por:

$$R_1 = 1 \text{ e } R_n = 10R_{n-1} + 1, n \geqslant 2.$$

Samuel Yates, em seu artigo de 1978, impressinado pelas propriedades das repunidades, refere-se a elas como "místicas". Vejamos algumas curiosidades sobre as repunidades

$$\begin{aligned}
1^2 &= 1 \\
11^2 &= 121 \\
111^2 &= 12321 \\
1111^2 &= 1234321 \\
&\vdots \\
111111111^2 &= 12345678987654321
\end{aligned}$$

E o que há de comum nos seguintes produtos?

$$\begin{aligned}
R_5 \cdot R_3 &= 1233321 \\
R_7 \cdot R_2 &= 1222221 \\
R_6 \cdot R_4 &= 123444321 \\
R_9 \cdot R_8 &= 1234567887654321 \\
R_{13} \cdot R_3 &= 123333333333321
\end{aligned}$$

Notemos que todos os resultados são **palíndromos**, ou seja, números que têm uma representação decimal que lida da direita para a esquerda, coincide com a lida da esquerda para a direita. E um fato geral é:

$$R_n.R_m, \text{ com } m \leq n \text{ e } m \leqslant 9, \text{ é sempre um número palíndromo.}$$

Observamos que se $m > n$, $m > 9$, $R_n \cdot R_m$ não podemos garantir que é um número palíndromo. Veja o exemplo a seguir.

Exemplo 25. *Considerando $m = 11$ e $n = 10$, temos:*

$$R_{10} \cdot R_{11} = 12345679010987654321$$

*o que não é um número **palíndromo**.*

Vejamos algumas proposições interessantes dessa repunidade.

Proposição 3. $(R_n - n)$ é sempre múltiplo de 9.

Demonstração: Vamos utilizar o princípio de indução matemática.

i) Para $n = 1$, temos que a afimação é verdadeira, pois $R_1 - 1 = 1 - 1 = 0$.

ii) Suponhamos verdadeira para algum n que $(R_n - n)$ é multiplo de 9,

isto é, $R_n - n = 9k$, com $k \in \mathbb{Z}$.Então

$R_{n+1} - (n+1) = 10.R_n + 1 - n - 1 = 9R_n + (R_n - n) = 9R_n + 9k = 9(R_n + k)$

é multiplo de 9, o que comprova a afimação.

Portanto, $(R_n - n)$ é sempre múltiplo de 9 para todo n. ■

Analisando para $2 \leqslant n \leqslant 10$, temos algo interessante.

Para $n = 2$, temos $\dfrac{R_2 - 2}{9} = \dfrac{11 - 2}{9} = 1$

Para $n = 3$, temos $\dfrac{R_3 - 3}{9} = \dfrac{111 - 3}{9} = 12$

Para $n = 4$, temos $\dfrac{R_4 - 4}{9} = \dfrac{1111 - 4}{9} = 123$

Para $n = 5$, temos $\dfrac{R_5 - 5}{9} = \dfrac{11111 - 5}{9} = 1234$

Para $n = 6$, temos $\dfrac{R_6 - 6}{9} = \dfrac{111111 - 6}{9} = 12345$

Para $n = 7$, temos $\dfrac{R_7 - 7}{9} = \dfrac{1111111 - 7}{9} = 123456$

Para $n = 8$, temos $\dfrac{R_8 - 8}{9} = \dfrac{11111111 - 8}{9} = 1234567$

Para $n = 9$, temos $\dfrac{R_9 - 9}{9} = \dfrac{111111111 - 9}{9} = 12345678$

Para $n = 10$, temos $\dfrac{R_{10} - 10}{9} = \dfrac{1111111111 - 10}{9} = 123456789$

Uma Aplicação interessante

Numa sequência dos números naturais de 1 *a* N*, o número total de dígitos escritos é* $n(N+1) - R_n$*,* n *representa a quantidade de digitos de* N*.*

Exemplo 26. *Se* $N = 14$*, ao escrevermos* $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14$*, escrevemos um total de digítos igual a* 19*, e nesse caso,*

$$n(N+1) - R_n = 2(14+1) - 11 = 30 - 11 = 19.$$

Proposição 4. Exceto $R_1 = 1$, nenhum R_n é quadrado perfeito.

Demonstração: Observemos que

$$\begin{aligned}
R_2 &= 11 = 4 \cdot 2 + 3 \\
R_3 &= 111 = 100 + 11 = 4 \cdot 25 + 4 \cdot 2 + 3 = 4 \cdot 27 + 3 \\
R_4 &= 1111 = 1100 + 11 = 4 \cdot 275 + 11 = 4 \cdot 275 + 4 \cdot 2 + 3 = 4 \cdot 277 + 3 \\
&\vdots \\
R_n &= 111 \cdots 11 = 111 \cdots 100 + 11 = 100 \cdot R_{n-2} + 11 = 4 \cdot (25R_{n-2} + 2) + 3 = 4t + 3. \qquad (4)
\end{aligned}$$

em que $t = 25R_{n-2} + 2$. Portanto, para $n \geqslant 2$, R_n deixa resto 3 na divisão por 4.

Porém como todas as repunidades são ímpares, se algum deles fosse um quadrado perfeito, seria o quadrado de algum número ímpar.

Assim, $R_n = (2k+1)^2 = 4k^2+4k+1 = 4(k^2+k)+1$, ou seja, R_n seria da forma $4q+1$. O que mostra que R_n deixaria resto 1 na divisão por 4, contrariamente o que vimos em (4).

Portanto, nenhum $R_n, n \geqslant 2$ é um quadrado perfeito.

$\blacksquare$

CONCLUSÃO

Nesta dissertação, foram apresentadas diferentes situações envolvendo sequências, progressões, sequências de Fibonacci e o triângulo de Pascal.

A sequência de Fibonacci, pode ser aplicada em vários exemplos que podem ser desenvolvidos no ensino médio. Um exemplo é o problema de quadratura, que pode ser construído utilizando o material concreto, relacionando-o com os números de Fibonacci, e um outro é o fractal de Grossman, que a medida que os estágios do fractal são realizados, a sequência de Fibonacci vai sendo construída.

Quanto ao estudo sobre o triângulo de Pascal, ao desenvolver o tema e buscar a ligação do conteúdo com as sequências, foi produzido um material diferenciado dos apresentados nos livros didáticos. O trabalho traz formas de desenvolver o assunto relacionando o número binomial que forma o triângulo de Pascal com as sequências de potência de dois, de onze e de Fibonacci.

Ao desenvolvimento dos assuntos de sequências interessantes, como as Progressões Geométrico-Aritméticas e Progressões Aritmético-Geométricas, no quarto capítulo que envolveram PA e PG em uma única sequência e vice-versa, proporcionou conceitos novos e diferentes.

Assim, esta proposta de trabalho, objetiva contribuir com os professores de ensino médio na preparação de suas aulas sobre sequências, buscando assim, aprofundarem o conhecimento dos seus alunos.

Referências Bibliográficas

[1] ASSIS, CARLOS ALBERTO M. de, *Uma Resposta para uma Pergunta*. Revista do Professor de Matemática, nº 74, 2010, p. 12-14.

[2] BONFIM, LÚCIA RESENDE P., *Mágica com números?*. Revista do Professor de Matemática, nº 66, 2008, p. 20-23.

[3] BRITO, FREDERICO REIS MARQUES., *Números Místicos*. Revista do Professor de Matemática, nº 58, 2005, p. 37-41.

[4] CARVALHO, RAPHAEL ALCAIRES de, *Valor Esperado e PAG na fuga de Prisioneiros*. Revista do Professor de Matemática, nº 77, 2012, p.20-22.

[5] DASSIE, BRUNO ALVES., *O Quebra-Cabeça de Fibonacci*. Revista do Professor de Matemática, nº 64, 2007, p. 10-13.

[6] DIAS, ANA LÚCIA BRAZ., *O Fractal de Grossman*. Revista do Professor de Matemática, nº 72, 2010, p. 24-28.

[7] HEFEZ, ABRAMO., *Aritmética*,1ª edição. Rio de Janeiro:SBM, Coleção PROFMAT, 2013.

[8] LIMA, ELON LAGES, *Curso de Análise*, Vol. 1. Rio de Janeiro. SBM, Projeto Euclides, 2009, p. 100-111.

[9] LIMA. ELON LAGES, *A Matemática do Ensino Médio*. Vol. 2. Elon Lages Lima, Paulo Cezar Pinto Carvalho, Eduardo Wagner, Augusto Cesar Morgado. Coleção do Professor de Matemática. 6ª Ed, Rio de Janeiro. SBM, 2006.

[10] MAGALHÃES, CÍCERO THIAGO B., *SEQUÊNCIA DE FIBONACCI*. Eureka, Rio de Janeiro. nº 21, 2005, p. 38-42.

[11] MORGADO. AUGUSTO CESAR, *Progressões e Matemática Financeira*. Augusto Cesar Morgado, Eduardo Wagner,Sheila Cristina Zani. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro. SBM, 2005.

[12] NUNES, CÉLIA BARROS., *Uma Descoberta Exponencial Interessante*. Revista do Professor de Matemática, nº 57, 2005, p. 21-22.

[13] OLIVEIRA, FÁBIO BARBOSA de., *Modelagem e Sequências Numéricas*. Dissertação de Mestrado - PROFMAT - UFPI, Teresina, 2013.

[14] OLIVEIRA, JOSÉ JACKSON de., *Sequências de Fibonacci: Possibilidades de Aplicações no Ensino Básico*. Dissertação de Mestrado - PROFMAT - UFBA, Salvador, 2013.

[15] PAIVA, RUI EDUARDO BRASILEIRO., *Progressões Aritmético-Geométricas (PAG) e Progressões Geométrico-Aritméticas (PGA)*. Revista do Professor de Matemática, nº 73, 2010, p. 47-49.

[16] SECRETARIA DO ESTADO DE EDUCAÇÃO DE MATO GROSSO DO SUL. *Referêncial Curricular 2012 - Ensino Médio*. Campo Grande, MS. 2012.

[17] SENA, CARLOS ÁTILA RODRIGUES de., *Sequências de Fibonacci: Propriedades, Aplicações e Curiosidades*. Dissertação de Mestrado - PROFMAT - UFCE, Fortaleza, 2013.

[18] SILVA, SALATIEL DIAS da., *Estudo do Binômio de Newton*. Dissertação de Mestrado - PROFMAT - UFPB, João Pessoa, 2013.

[19] WINTER, OSÓRIO CABO., *Relações de Recorrência: Para Além da P.A. e P.G.*. Dissertação de Mestrado - PROFMAT - UFABC, Santo André, 2013.

[20] ZAHN, MAURÍCIO., *Frações que Geram a Sequência de Fibonacci*. Revista do Professor de Matemática, nº 74, 2011, p. 06-08.