UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
MESTRADO PROFISSIONAL
MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

MARCOS RODRIGO DA SILVA DELFINO

O ENSINO DA TRIGONOMETRIA VIA GEOGEBRA E APLICAÇÕES

CAMPO GRANDE – MS
SETEMBRO DE 2015

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO

MESTRADO PROFISSIONAL

MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

MARCOS RODRIGO DA SILVA DELFINO

O ENSINO DA TRIGONOMETRIA VIA GEOGEBRA E APLICAÇÕES

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Rúbia Mara de Oliveira Santos

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre.

CAMPO GRANDE – MS

SETEMBRO DE 2015

O ENSINO DA TRIGONOMETRIA VIA GEOGEBRA E APLICAÇÕES

MARCOS RODRIGO DA SILVA DELFINO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre.

Aprovado pela Banca Examinadora:

Profª Dr.ª Rúbia Mara de Oliveira Santos – UFMS
Profª Dr.ª Edilene Simões Costa dos Santos – UFMS
Profª Dr.ª Silvia Lopes de Sena Taglialenha – UFSC

CAMPO GRANDE – MS
SETEMBRO DE 2015

Aos Meus Filhos Maria Eduarda e Matheus, minha esposa Ana Carolina, meu pai Ramão e minha mãe Gesselina, dedico.

“A Matemática apresenta invenções tão sutis que poderão servir não só para satisfazer os curiosos como, também para auxiliar as artes e poupar trabalho aos homens.”

Descartes

AGRADECIMENTOS

Agradeço, em primeiro lugar, a Deus por ter me dado forças para superar todos os obstáculos, aos meus pais, que sempre estiveram ao meu lado me incentivando e me apoiando em minhas decisões, ensinando a enfrentar as dificuldades que surgiram no caminho. A minha esposa, pelo carinho, dedicação e empenho para que eu possa ter sucesso nesta batalha e aos meus filhos que com seu amor, percebo que preciso ir além de onde eu cheguei.

Agradeço aos meus colegas de turma, pelos momentos que passamos juntos e pela dedicação mutua. Aos meus queridos professores e professoras, que acrescentaram em muito na minha profissão e em minha formação. Sou grato em especial, a minha professora e orientadora Prof.ª Dra Rúbia Mara de Oliveira Santos que com sua paciência e dedicação infinita, ajudou me em todos os momentos me incentivando e auxiliando, muito mais do que eu merecia, e que com suas palavras, conseguiu me ajudar a cumprir essa meta.

RESUMO

O conteúdo desta dissertação aborda de forma sucinta os principais conceitos de trigonometria, os quais são trabalhados ao longo do Ensino Médio. O desenvolvimento é feito, inicialmente, apresentando a legislação vigente, aspectos históricos e sugestões didáticas através do GeoGebra. Posteriormente, é apresentada a fundamentação teórica, expondo as definições, principais teoremas e propriedades. São apresentadas aplicações no cálculo da velocidade do Tsunami de Sendai, seguida pela determinação do comprimento de uma ponte que ligará uma cidade costeira com uma ilha. O problema posterior é para determinar a altura do ponteiro do relógio Big Bem, e por final uma situação em que se calcula a pressão exercida pelos pulmões na caixa torácica e a quantidade de ar presente na traquéia, sendo usada uma metodologia que enfatiza a aplicabilidade dos conteúdos apresentados.

Palavras-Chaves: Trigonometria. Aplicações. Ensino.

ABSTRACT

The content of this dissertation discusses briefly the main concepts of trigonometry, which are worked over high school. Development is done, initially, by law, historical aspects and teaching suggestions via GeoGebra. Subsequently, the theoretical basis is presented, exposing their definitions, theorems and properties. The applications are related so that the first is the calculation speed of the tsunami Sendai, followed by determining the length of a bridge linking a coastal town with an island. The latter problem is to determine the height of the clock hand big well, and end a situation in which it calculates the pressure exerted by the lungs in the chest and the amount of air present in the trachea, being used a method which emphasizes the applicability of our contents.

Key Words: Trigonometry. Applications. Education.

LISTAS DE FIGURAS

1. Interface 14
2. Gráfico de senx 14
3. Gráfico de y = 2 + senx 15
4. Gráfico de y = 2senx 16
5. Gráfico de y = sen(2x)..17
6. Lousa Digital 18
7. Ângulo 21
8. Triângulos Semelhante 22
9. Triângulo Retângulo I...23
10. Triângulo Retângulo II..24
11. Quadrado..25
12. Triângulo Equilátero...26
13. Ciclo Trigonométrico I..28
14. Ângulos Correspondentes..30
15. Eixo Seno..31
16. Sinais do Seno..32
17. Eixo Cosseno..32
18. Sinais do Cosseno..33
19. Eixo Tangente...34
20. Sinais da Tangente...36
21. Lei dos Senos...36
22. Lei dos cossenos I 38
23. Lei dos cossenos II...38
24. Secante...39
25. Cossecante...40
26. Cossecante I...40
27. Arco Soma I..42
28. Arco Soma II...42
29. Função Seno I...46
30. Gráfico da Função Seno 47
31. Função Cosseno I...47
32. Gráfico da Função Cosseno 48

33. Função Tangente I..49
34. Gráfico da Função Tangente...50
35. Função Secante..51
36. Função Cossecante..51
37. Função Cotangente 51
38. Tsunami...54
39. Ponte...56
40. Projeto da Ponte...56
41. Big Bem...58
42. Relógio..59

SUMÁRIO

1 Introdução..1

2 Ensino da Trigonometria..4

2.1 Conteúdos e Legislação..4

2.2 O Ensino da trigonometria no Mato Grosso do Sul..................................6

2.3 Aspectos Históricos...8

2.4 Experimentação, abstração e modelagem...11

2.5 O uso do GeoGebra como instrumento mediador no ensino e aprendizagem de conceitos trigonométricos...12

2.6 Considerações Finais..19

3. Fundamentação Teórica..20

3.1 O Ângulo...20

3.2 As Funções Trigonométricas do Ângulo Agudo......................................21

3.3 As Razões Trigonométricas dos Ângulos Notáveis..................................25

3.4 O Radiano...27

3.5 As Razões Trigonométricas Para Todos os Reais 29

3.6 Relações Trigonométricas Para Quaisquer Triângulos..............................35

3.7 Outras Relações Trigonométricas...39

3.8 Arco Soma...41

3.9 Transformação de Soma em Produto..45

3.10 Funções Trigonométricas...46

3.11 Funções Auxiliares...50

3.12 Equações Trigonométricas...52

3.13 Considerações Finais...52

4. Aplicações Trigonométricas...53

4.1 O Tsunami de Sendai...53

4.2 O Preço da Ponte..55

4.3 O Big Bem...57

4.4. O Processo Respiratório 61

4.5 Considerações Finais...62

5. Conclusão...63

Capítulo 1

Introdução

Com o objetivo de melhorar a Educação Básica, através da qualificação dos professores, surge o Profmat, que é um programa de Mestrado Profissional em Matemática coordenado pela Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), integrado por Instituições de Ensino Superior que tem como objetivo a formação matemática aprofundada, relevante e articulada com o exercício da docência no Ensino Básico.

Ao longo de 10 anos ministrando aulas em escolas públicas e privadas em Campo Grande-MS, e no interior do mesmo estado, percebi algumas dificuldades em que vários professores de matemática apresentavam ao ensinar trigonometria, alguns por defasagem no conteúdo outros por dificuldades no processo de ensino da trigonometria, e como sempre tive facilidade com o conteúdo e com a didática.

Analisando os materiais didáticos, os quais eram adotados pelas instituições de ensino, tanto livros quanto apostilas, percebi que os mesmos deixavam a desejar, alguns em conteúdos, outros em demonstrações e até em organização do texto, e que em nenhum desses materiais, dos quais já analisei, fazia uma ligação entre a teoria e o mundo digital.

Com o propósito de contribuir com o desenvolvimento da educação brasileira, e com base nas dificuldades que encontrei por parte dos docentes em ensinar trigonometria, me motivei a escrever um material de trigonometria ligado a um software educacional.

A palavra **trigonometria** significa medida das partes de um triângulo e vem da junção de duas palavras de origem grega, “metrein” e “trigon”, que significam respectivamente, “medida” e “triângulo” [1]. Nos dias atuais, a trigonometria não se limita em estudar triângulos. Suas aplicações se estendem a outros campos da matemática, da ciência e da tecnologia, como

Análise, Eletricidade, Topologia, Mecânica, Acústica, Música, Engenharia Civil, entre outras.

O presente trabalho tem como principal objetivo contribuir com a educação por meio da apresentação de um material de apoio para o professor de matemática com tópicos relacionados à trigonometria, assim como apresentar sugestões didáticas para facilitar o processo de ensino aprendizagem de trigonometria, por meio da utilização de um software educacional, o **GeoGebra** que possibilita, a construção de gráficos das funções trigonométricas.

Outra sugestão didática apresentada nessa dissertação, são aplicações em problemas reais tais como: A velocidade do tsunami que devastou a província de Sendai, a distância que deve ser construída uma ponte que liga uma ilha a uma cidade litorânea, a altura do ponteiro do relógio mais famoso do mundo, o “Big Bem”, e a pressão exercida pelos pulmões na caixa torácica e quantidade de ar presente na traquéia.

Dessa forma, o trabalho está organizado em capítulos e sua estrutura é:

Capítulo 2: Apresentou-se os parâmetros legais que regem o ensino da trigonometria e seus conteúdos no âmbito nacional e estadual, em ênfase no estado do Mato Grosso do Sul. Aspectos históricos da trigonometria, sugestões didáticas, através do uso da tecnologia no ensino da trigonometria, com o GeoGebra serão mecanismo aplicados.

Capítulo 3: Será apresentada a fundamentação teórica dos conceitos da trigonometria, a incluir definições, propriedades e teoremas. A lei dos senos e lei dos cossenos, relações trigonométricas para qualquer triângulo, estendendo para as outras relações trigonométricas. A soma de arcos, para o arco duplo e arco metade, relações que transforma soma em produto nas relações trigonométricas. As funções trigonométricas, equações e as inequações trigonométricas.

Capítulo 4: Serão apresentadas e discutidas quatro aplicações de trigonometria, sendo a primeira em lei dos cossenos na determinação de distâncias, para o cálculo da velocidade do tsunami que atingiu a província de Sendai. A segunda de lei dos senos para determinar o melhor local para a construção de uma ponte que ligará a costa a uma ilha. O terceiro e o quarto são problemas gerados a partir das funções periódicas, sendo o cálculo da altura máxima e mínima do ponteiro dos minutos do famoso relógio Big Bem, e um problema de saúde, que determina a pressão que os pulmões exercem sobre a caixa torácica e a quantidade de ar, presente na traquéia de um individuo.

E, por fim, o Capítulo 5 será apresentado à conclusão do trabalho.

Capítulo 2
O Ensino da Trigonometria

Este capítulo aborda, em âmbito nacional e estadual, os parâmetros legais do ensino da trigonometria e seus conteúdos, dando ênfase ao estado de Mato Grosso do Sul, seus aspectos históricos e sugestões didáticas através do uso da tecnologia no ensino da trigonometria, com o GeoGebra.

2.1 Conteúdos e Legislações

O ensino brasileiro segundo a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB-Lei 9.394/96) [11] é dividida em duas etapas: a educação básica e o ensino superior, sendo a educação básica ainda dividida em três fases: educação infantil, ensino fundamental e ensino médio.

O objetivo da educação básica, conforme a LDB, é desenvolver o educando, assegurar-lhe a formação comum indispensável para o exercício da cidadania e fornecer-lhe meios para progredir no trabalho e em estudos posteriores.

Segundo as Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio [14], para atender os objetivos e as competências referente ao ensino da matemática, de acordo com a LDB, o ponto de partida é assumir que toda situação de ensino aprendizagem deve agregar o desenvolvimento de habilidades que caracterizam o "pensar matematicamente", tendo assim a necessidade de priorizar a qualidade dos conteúdos assimilados pelos alunos, não a quantidade dos conteúdos trabalhados, sendo assim a escolha dos conteúdos um processo cuidadoso e criterioso.

De acordo com [11], os conteúdos de matemática da educação básica são organizados em 4 blocos: Números e operações; Funções; Geometria;

Análise de dados e probabilidade, dentro desses blocos ainda estão presente as competências e habilidades que devem ser desenvolvidas durante o processo de ensino aprendizagem, de modo que os blocos devem ser trabalhados de maneira interligada, proporcionando assim a matemática relacionar com as outras disciplinas, interdisciplinaridade. A trigonometria está presente no bloco da geometria.

A Matriz de Referência de Matemática e suas Tecnologias [14] foi escrita posteriormente, sendo uma das quatro áreas de conhecimento abordada pelo Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM, que tem por objetivo avaliar o desempenho do estudante ao fim da educação básica, onde os participantes são os alunos que estão concluindo ou que já concluíram o ensino médio, e serve de processo de seleção para universidades públicas, e ou privadas, e para o processo seletivo do financiamento público de educação tecnológica e superior, o PROUNI – Programa Universidade Para Todos.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) da Educação Básica [15], elenca os seguintes os objetivos das Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias:

- Compreender as ciências como construções humanas, entendendo como elas se desenvolvem por acumulação, continuidade ou ruptura de paradigmas, relacionando o desenvolvimento científico com a transformação da sociedade;
- Entender e aplicar métodos e procedimentos próprios das Ciências Naturais, identificar variáveis relevantes e selecionar os procedimentos necessários para produção, análise e interpretação de resultados de processos ou experimentos científicos e tecnológicos, apropriar-se dos conhecimentos da Física, da Química e da Biologia;
- Aplicar os conhecimentos adquiridos para explicar o funcionamento do mundo natural, planejar, executar e avaliar ações de intervenção na realidade natural, identificar, representar e utilizar o conhecimento geométrico para o aperfeiçoamento da leitura, da compreensão e da ação sobre a realidade, entender a relação entre o desenvolvimento das Ciências Naturais e o desenvolvimento tecnológico;

- Associar as diferentes tecnologias aos problemas que se propuseram e propõem solucionar, entender o impacto das tecnologias associadas às Ciências Naturais na sua vida pessoal, nos processos de produção, no desenvolvimento do conhecimento e na vida social, aplicar as tecnologias associadas às Ciências Naturais na escola, no trabalho e em outros contextos relevantes para sua vida;
- Compreender conceitos, procedimentos e estratégias matemáticas, e aplicá-las a situações diversas no contexto das ciências, da tecnologia e das atividades cotidianas;

O desenvolvimento científico ocorre por continuidade dos conteúdos, e na trigonometria é bem visto esse objetivo, pois a mesma depende de pré-requisitos vistos anteriormente. Com relação a quebrar os paradigmas e interligar conteúdo científico com o dia a dia do estudante, a trigonometria faz de maneira elegante essa ligação, pois a maioria de seus conteúdos tem uma aplicação prática no cotidiano do aluno, ajudando-o na interpretação e na solução de problemas.

A trigonometria é ferramenta para as áreas das ciências da natureza, oferecendo suporte na interpretação e na solução de seus problemas, sendo a física uma das áreas que mais utiliza seus conceitos, como na determinação de distâncias usando suas inclinações e aberturas entre outras aplicações.

Todos os objetivos juntos determinam que, ao final do ensino médio, o aluno tenha a capacidade de integrar o que foi apreendido em sala de aula, com o contexto em que vive, tendo a capacidade de identificar, representar e solucionar problema utilizando as áreas de conhecimento, e se preciso, fazer a interdisciplinaridade dos conteúdos, das diferentes áreas de ensino.

2.2 O Ensino da Trigonometria no Estado Mato Grosso do Sul

A matemática, de acordo com o Referencial Curricular da Educação Básica da Rede Estadual de Ensino de Mato Grosso do Sul [17], "... não tem como função formar matemáticos, ou mesmos formar estudantes, de forma restrita, apenas às competências relacionadas a este componente curricular", mas sim, formar cidadãos que possam aplicar a matemática em situações sociais, desenvolvendo um raciocínio lógico aplicado ao cotidiano. Para que isso ocorra, exige-se tanto da escola quanto do professor, segundo [17], que:

> ... métodos de ensino suficientemente elaborados, capazes de proporcionar aos estudantes as condições efetivas para a comunicação, argumentação, confronto e compreensão de situações-problema, escolhas e proposições; enfim, para que tomem gosto pelo conhecimento e aprendam a aprender a matemática, não há mais espaço, no ambiente escolar, para o mero transmissor e comunicador de conteúdo, assim como não se pode admitir a postura passiva do aluno que busca conhecimentos prontos do professor a serem dirigidos.

A matemática é dividida ao longo dos nove anos do ensino fundamental e nos três anos do ensino médio, sendo a trigonometria presente desde o ensino fundamental até o ensino médio [11]. Sua divisão é feita de tal forma que no final do sétimo ano do Ensino Fundamental começa a introdução à trigonometria, terminando essa base no nono ano da mesma etapa de ensino. No Ensino Médio, iniciam-se novos conteúdos que se desenvolvem e isso ocorre ao longo das três séries da mesma etapa de ensino.

No Ensino Fundamental, o aluno terá a noção de Ângulos; Semelhança de Triângulos; Relações Métricas no Triângulo Retângulo; As Razões Trigonométricas; Seno, Cosseno e Tangente de Ângulos Agudos.

Na fase final da educação básica, os conteúdos ministrados nas três etapas de ensino são: Lei dos Senos; Lei dos Cossenos; Área de um triângulo em função de um lado e da altura relativa a esse lado; Área de um triângulo em função de dois lados e do ângulo agudo correspondente entre eles; Arcos e Ângulos; Funções e Relações Trigonométricas; Equações e Inequações Trigonométricas e a forma trigonométrica do número complexo.

Os objetivos dos conteúdos ministrados no ensino médio são de preparar o aluno para enfrentar desafios, utilizando-se de conceitos e procedimentos peculiares (experimentação, abstração e modelagem), transformando-os em situações-problemas e tendo condições de resolvê-las utilizando-se do conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade.

Outro objetivo é possibilitar a modelagem e a resolução de problemas que envolvam variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, com o auxilio das representações algébricas e utilização de conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano. A trigonometria, em sua maioria, possibilita alcançar todos esses objetivos, pois permitem inúmeras aplicações.

2.3 Aspectos Históricos

Os PCNs defendem a idéia do uso da história da matemática como ferramenta pedagógica, relacionando os problemas históricos com os conceitos matemáticos desenvolvidos na época.

A história da matemática pode ser um instrumento pedagógico muito eficaz no processo de ensino aprendizagem de matemática, uma vez que proporciona ao aluno reflexões, que podem levá-lo à compreensão de conceitos a partir de sua origem, considerando todas as suas modificações e desenvolvimento ao longo da história. Daí surge a necessidade de montar uma cronologia da trigonometria.

A **trigonometria** é um "ramo da matemática que estuda as relações entre o comprimento de dois lados de um triângulo retângulo para diferentes valores de um dos seus ângulos agudos".[12]

Esse mecanismo surgiu da necessidade de calcular dimensões em triângulos retângulos, que não poderiam ser calculadas utilizando somente seus lados. Há registros de problemas que envolvem cálculos de lados de triângulos retângulos, com o auxílio de seus ângulos, no século V antes de Cristo.

Os primeiros estudos de trigonometria foram feitos por Hiparco no século II a.C, quando relacionou geometria com astronomia. No século III a.C, há estudos relacionados a triângulos, que também são considerados como marco inicial da trigonometria.

A trigonometria, provavelmente, surgiu no Egito e na Babilônia, a partir da razão entre lados de triângulos semelhantes, que é encontrado no Papiro de Rhind, que tem por data de 1650 a.C [9]. Na Babilônia, foi desenvolvido um astrolábio primitivo, que servia para verificar o deslocamento dos astros e de seus ângulos a fim de medir as partes de circunferência, com o intuito de aplicar esse conhecimento à astronomia, em questões religiosas para entender as fazes da lua para o desenvolvimento da agricultura.

Os egípcios traziam problemas relacionados à altura de suas pirâmides, das quais fazem menção a uma razão entre triângulos semelhantes, pois nas construções de pirâmides era necessário manter a mesma razão de inclinação entre suas faces laterais. No mesmo período de desenvolvimento uma trigonometria primitiva foi encontrada na China. Os triângulos retângulos eram constantemente usados com o intuito de medir distâncias, comprimentos e profundidades, aplicando também as relações trigonométricas e as medições de ângulos, em documentos datados de 1110 a.C.

A trigonometria Grega relata Thales de Mileto (642 – 546 a.C), com o estudo da semelhança de triângulos, seu discípulo Pitágoras de Samos (571 – 496 a.C), que recebe o toerema relacionado aos lados de um triângulo retângulo com o seu nome "Teorema de Pitágoras". Hipsícles de Alexandria (240 – 170 a.C) na qual pertencia a escola Pitagórica, dividiu em 360 partes o zodíaco, sendo mais tarde generalizada para qualquer circulo por Hiparco Nicéia (180 – 125 a.C), o mesmo o dividiu o arco de 1 grau em 60 partes, gerando assim o arco de 1 minuto. Sua trigonometria era uma única função que associava o arco de uma circunferência de raio qualquer à respectiva corda definida por esse mesmo arco. Construiu a primeira tabela trigonométrica com os valores das cordas de 0º a 180º, com isso houve desenvolvimento da trigonometria, e a astronomia. Por isso recebeu o titulo de "Pai da Trigonometria".

A mais importante obra relacionada à trigonometria da antiguidade foi elaborada por Claudio Ptolomeu (90 – 168 d.C) surgida no século II d.C que reuniu todo o conhecimento de astronomia ligada aos conhecimentos matemáticos de Hiparco. Seus livros se perderam na história nos dois séculos que separavam os tempos em que viveram. Esse livro ficou conhecido como Almagesto, que significa no árabe a "maior", sendo composta por 13 volumes.

Outra civilização que contribuiu para o desenvolvimento da trigonometria foi o povo Hindu no século V d.C, onde introduziram os conceitos de semi corda e do seno, e ainda demonstraram algumas identidades trigonométricas como $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$.

Depois dos hindus foram os Árabes e os Persas que deram continuidade ao estudo da trigonometria. Aos árabes se dá a extraordinária idéia de introduzir em um circulo de raio unitário triângulos retângulos de hipotenusa, definindo assim, o seno, na qual começou a construir a tábua trigonométrica para ângulos não inteiros. Como primeiro foi calculado para $\frac{1}{4}$ de 90º.

No ano de 1250 d.C a trigonometria passou a ser considera como ciência, por isso foi atribuída ao povo persa, desvinculando-a assim da astronomia, esse feito aconteceu na escola de Bagdá. Quando essa escola entrou em declínio, o desenvolvimento da ciência passou a acontecer no sul da Europa, mas precisamente na Península Ibérica. O matemático que mais contribui nessa era para a trigonometria foi o italiano Leonardo Fibonacci (1170 – 1250 d.C), além das contribuições na matemática, publicou uma obra na qual traz aplicações da trigonometria árabe na agrimensura.

Foi século XV que se desenvolveu na trigonometria as funções trigonométricas, feitas por Nicole Oresme (1320 – 1382 d.C), que introduziu a representação gráfica que explicita a noção de funcionalidade, influenciando com seu trabalho Galileu Galilei (1564 – 1642 d.c) e René Descartes (1596 – 1650 d.C), que teve o primeiro trabalho de trigonometria impresso, a “Tabula Directionum”, publicado em Nunremberg na Alemanha, antes de 1485.

François Viète (1540 – 1603 d.C) iniciou o estudo dos lados e ângulos em triângulos quaisquer. Foi o primeiro a dividir um triângulo qualquer em triângulos retângulos para calcular todos os lados do mesmo.

Foi Bartholomaeus Pitiscus (1561 – 1613) que corrigiu em 1595 as tábuas Rhaeticus e modernizou o assunto, foi o primeiro a publicar um livro com o nome de trigonometria. Isac Newton (1643 – 1727 d.C) contribuiu com a trigonometria com o desenvolvimento da função inversa arcsen(x).

Outros matemáticos também contribuíram para evolução da mesma, em particular à trigonometria, até chegar ao nível de conhecimento que se tem hoje, desenvolvendo assim toda a ciência.

Não existe nenhum documento oficial antes de 1960 que registra os conteúdos ministrados no ensino brasileiro. Pela análise feita a diversos livros didáticos e matérias impressos em diferentes épocas históricas, acredita-se que a trigonometria esteve presente na Educação Secundária em todo o século XX [12], e atualmente é abordada no final do Ensino Fundamental e no Ensino Médio da Educação Básica.

Os primeiros registros de ensino da trigonometria foi no Colégio Pedro II, que preparava os alunos, e ao final deste curso poderia ingressar em qualquer Curso Superior, desde a época do Brasil Império, sendo considerado como modelo para as outras instituições de ensino, até 1929.

2.4 Sugestões Didáticas

Lecionando matemática no ensino médio em escolas públicas e privadas no Estado do Mato Grosso do Sul desde 2005, principalmente trigonometria, pois vários colegas com quem trabalhei tinham dificuldades, ou com o conteúdo de trigonometria ou com a didática a ser empregada para ensinar trigonometria, percebi detalhes que podem melhorar uma aula dessa disciplina. O ensino de trigonometria deve ser iniciado pelas definições utilizando-seo que é o estudo das medidas dos triângulos, e a origem da palavra.

Outro quesito que é de suma importância durante a aprendizagem de trigonometria, trazer o conteúdo estudado para próximo da realidade do aluno, pois através das aplicações, os mesmos despertarão interesse pelo conteúdo estudado em sala de aula.

Por exemplo, ensinando razões trigonométricas no triângulo retângulo a partir da planta de uma rampa para uma pista de skate, através de seu comprimento e sua inclinação. Um problema simples, que traz a realidade do aluno para dentro da sala de aula. A utilização da trigonometria na topografia para o cálculo da altura de um morro, ou na construção civil para determinar a medida de um caibro em um telhado de uma casa que tem inclinação ou na construção de rampas de acesso.

Para tornar as aulas de trigonometria mais produtivas, pode-se demonstrar as razões trigonométricas através do ciclo trigonométrico. Para isso, deve-se primeiro definir um ciclo trigonométrico e posteriormente apresentar as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente. Demonstrar a relação fundamental da trigonometria em que $sen^2(x) + cos^2(x) = 1$, utilizando o teorema de Pitágoras.

2.5 O GeoGebra Como Instrumento Mediador no Ensino e Aprendizagem da Trigonometria

A realidade tecnológica em que a sociedade vive, não deve servir de barreira para a educação e sim como aliada. Os PCNs enfatizam a importância dos recursos tecnológicos para a educação, visando a melhoria da qualidade do ensino aprendizagem, afirmam que a informática na educação permite criar ambientes de aprendizagem que fazem surgir novas formas de pensar e aprender.

O Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) é um programa do governo federal, que tem por objetivo principal subsidiar o trabalho pedagógico dos professores, por meio da distribuição de coleções de livros didáticos aos alunos da educação básica, das escolas públicas.

As escolhas dos livros didáticos são feitas pelos docentes, a partir da análise de exemplares de livros de diversas editoras, que são enviados às escolas. Participando dessa escolha desde quando iniciei na educação percebi que o material impresso dos livros didáticos em sua maioria, não traz uma linguagem clara no desenvolvimento do conteúdo ou nas demonstrações, ou está incompleto, ou até mesmo com conceitos ou demonstrações erradas.

São inúmeros livros didáticos de matemática, que fazem parte do PNLD e que se diferenciam pela forma de organizar os seus conteúdos, formas diferentes de apresentação e pela didática em que esses livros transmitem os conteúdos do processo de ensino aprendizagem.

Existe uma lacuna, pouco explorada por essas editoras, que é a utilização de um software educacional como uma ferramenta de apoio ao livro didático no processo de ensino aprendizagem.

Tendo em vista a omissão por parte dos livros didáticos, já que em toda escola pública existe ao menos uma sala de recursos tecnológicos e a facilidade em que os alunos possuem com o mundo interativo na qual não pode ser desprezada, e sim aproveitada para que facilite a aprendizagem, tornando o processo mais agradável. Nessa seção será apresentadas propostas didáticas através de um software educacional para o ensino da trigonometria.

Um software de domínio público, que se pode fazer um dowload gratuito em computadores, celulares e tablets que pode enriquecer uma aula é o GeoGebra, um software multiplataforma que permite a construção de gráficos de funções algébricas e trigonométricas, e integra álgebra e geometria em um único ambiente fácil de usar.

O GeoGebra surgiu na Universidade de Salzburg para a educação matemática nas escolas. Esse software é um sistema operacional de geometria dinâmica permitindo realizar construções tanto com pontos, vetores, segmentos e retas. Auxilia no estudo das funções trigonométricas, na construção de seu gráfico básico, transladando esse gráfico nos eixos das abscissas e das ordenadas, a partir das funções do tipo trigonométrica.

Na minha experiência percebi que a dificuldade apresentada pelos alunos na visualização do deslocamento do gráfico das funções trigonométricas quando é alterado os coeficientes dessa função, dificultando assim a compreensão do período e da imagem dessas funções trigonométricas e até mesmo a construção de seus gráficos.

A utilização do GeoGebra irá contribuir nas aulas de trigonometria, sobre as funções trigonométricas, pois facilitará a compreensão dos alunos sobre os movimentos que o gráfico das funções trigonométricas realizam ao variar seus coeficientes. A interface desse software é de fácil manuseio e pode ser observado na figura

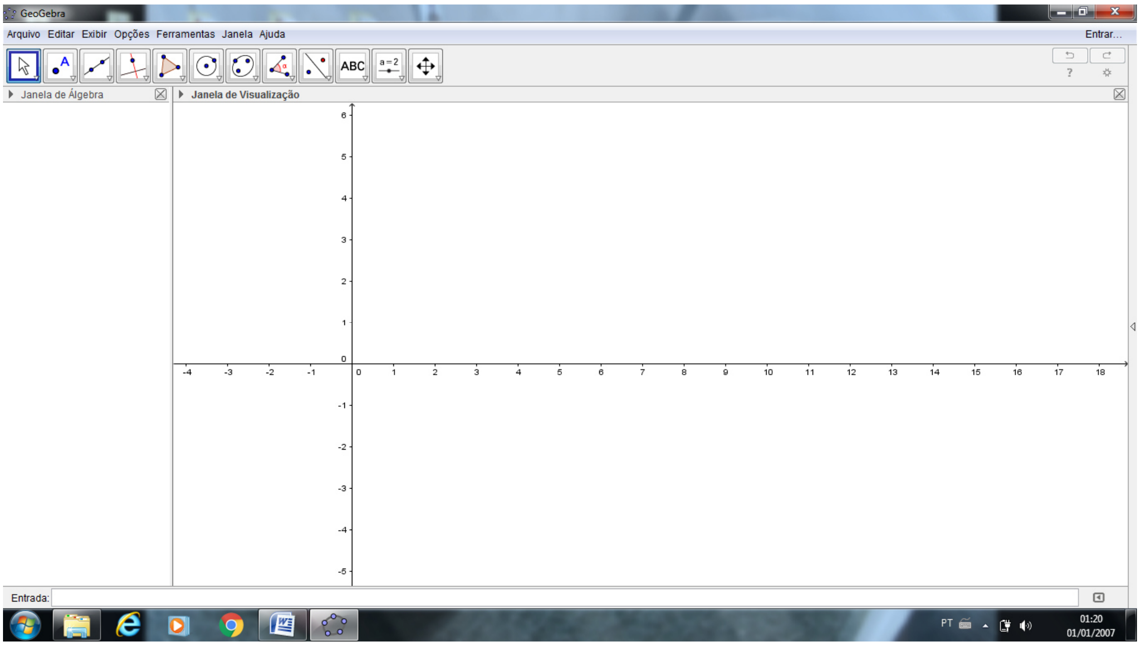

Figura 1: Interface

Dada uma função y = a + b.sen(k.x + t), com a, b, e t ∈ R, cujo domínio são os reais e imagem sendo [b + a; - b + a], se a = t = 0 e b = t = 1 tem se a função y = senx, para construir esse gráfico no Geogebra, é necessário inserir no campo entrada a função y = senx, com imagem [1;-1] e período igual a 2π, veja a figura 2.

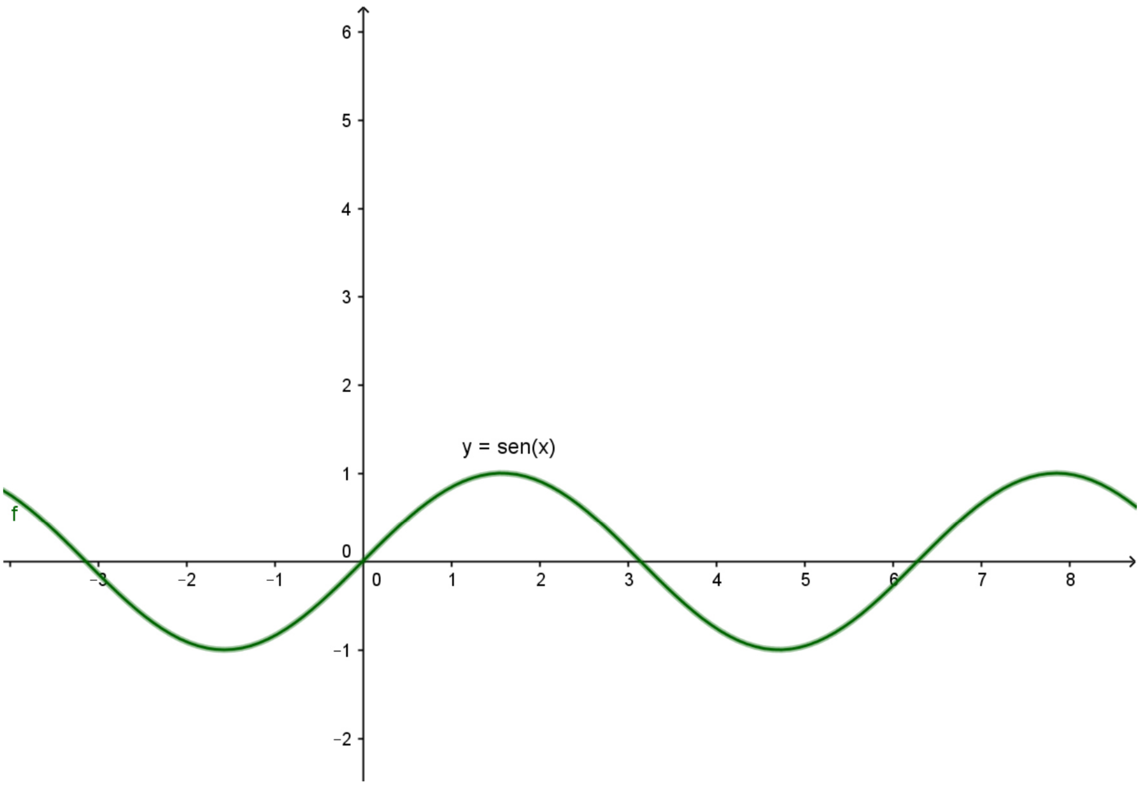

Figura 2: gráfico de senx

Modificando os valores de a, mantendo b = k = 1, e t = 0, pode-se verficar o comportamente do gráfico, com sua translação em relação ao eixo das abscissas, e a variação de sua imagem de [1;-1], para [a + 1; a – 1]. Para a construção do gráfico da figura 3, será considerado a = 2, alterando sua imagem para [3;1], o gráfico de y = 2 + senx está transladado duas unidades em relação ao eixo x, do seu gráfico original y = senx.

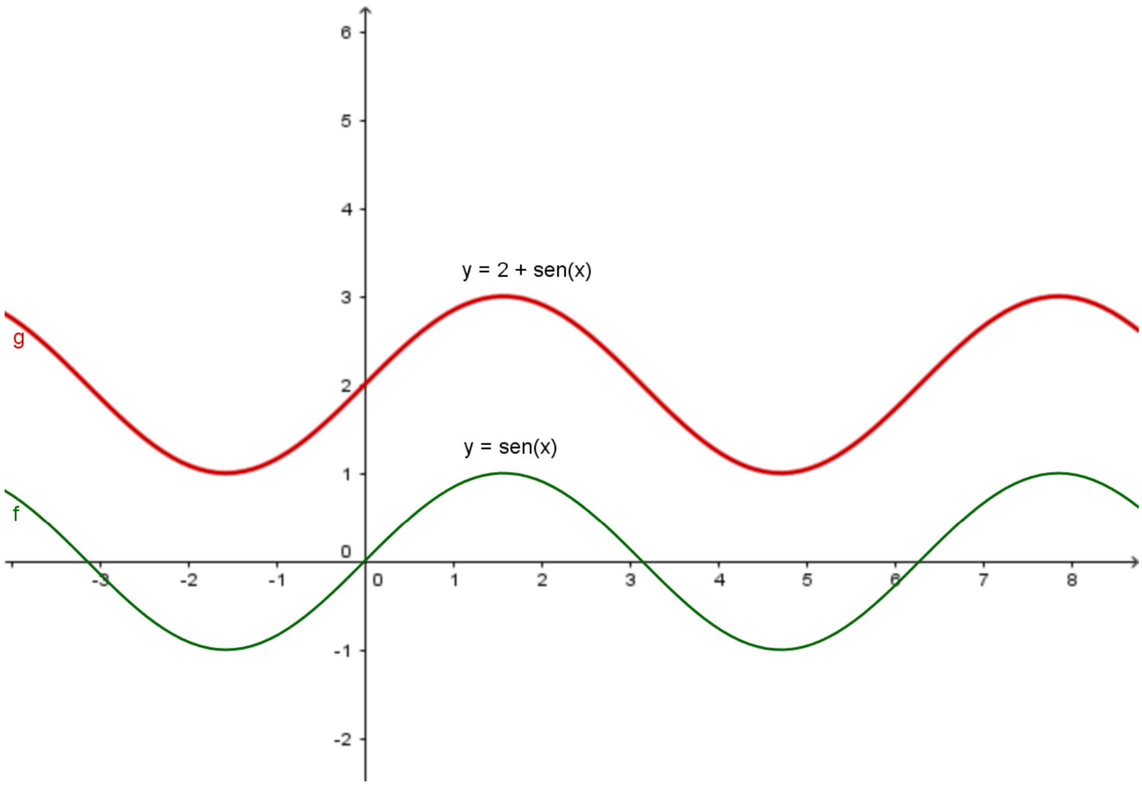

Figura 3: Gráfico de y = 2 + senx

Se variar o valor de b, considerando a = t = 0 e k = 1, o gráfico de y = senx não será deslocado em relação ao eixo x, variando somente os valores de máximos e minímos, e sua imagem de [1;-1] para [b;-b]. Na figura 4, considerou-se b = 2, as funções y = 2senx e y = senx.

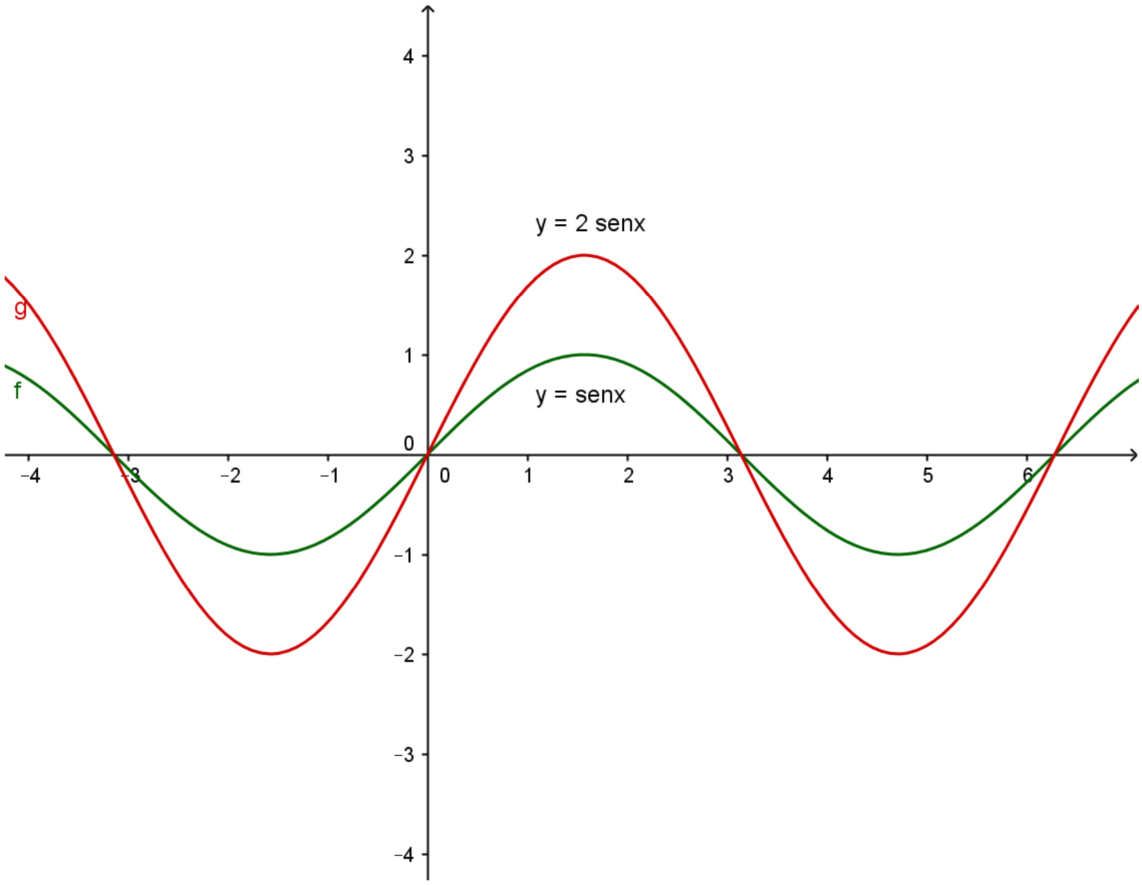

Figura 4: grafico de y = 2senx

Variando o valor de k, não se altera a imagem, e sim o período que é qualquer valor que ao ser adicionado ao argumento da função, conserva o valor da mesma, fixando os valores iniciais de a, b, e t, variando o valor de k o novo período será $\frac{2\pi}{k}$, se considerar k = 2, o gráfico reduzirá seu período como pode ser observado na figura 5.

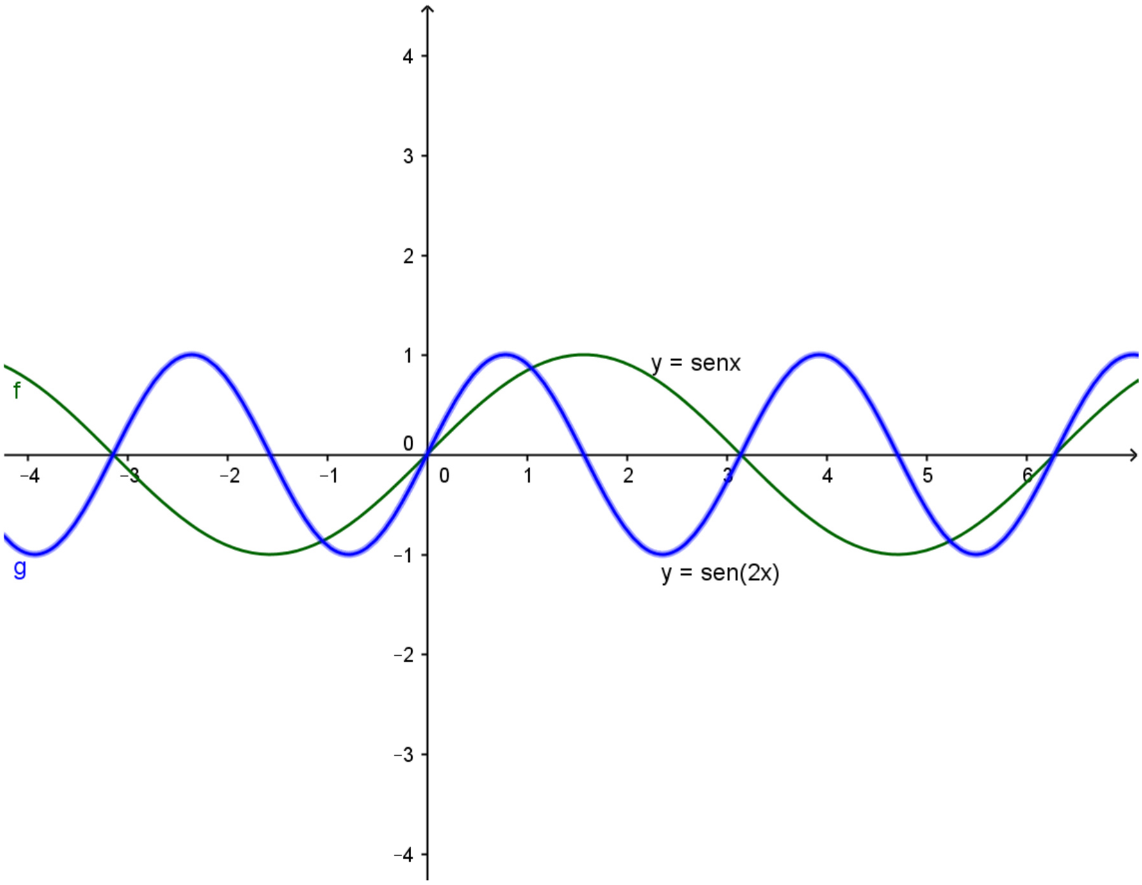

Figura 5: gráfico de y = sen(2x)

Algumas escolas públicas dispõe de outra ferramenta que enriqueceria essa aula que é a **lousa digital** ou também conhecida como **lousa interativa**, uma tela de computador no tamanho de uma lousa tradicional, e sensível ao toque, com isso os dispositivos de computadores podem ser projetados na lousa e sendo comandada pelo toque do professor, na qual tanto se pode escrever como uma lousa tradicional como tem a função do mouse do computador, podendo exercutar todos os comandos de mouse e teclado com apenas um toque. Monstra-se na figura 6, a apresentação da lousa digital adiquirida por uma escola pública de Mato Grosso do Sul, demonstrando o recurso tecnológico adiquirido.

Figura 6: Lousa digital [13]

O Ministério da Educação e do Desporto (MEC) disponibiliza para o Programa Nacional de Formação Continuada em Tecnologia Educacional (Proinfo Integrado) que articula a oferta de conteúdos e de recursos multimidia e digitais, que são oferecidos por diversos programas do MEC. Com isso, o governo federal, por meio de projetos do MEC e do Fundo Nacional do Desenvolvimento Escolar (FNDE) possibilita as escolas interessadas a adquirir um computador interativo (projetor multimidia), concebido e desenvolvido pela Universidade Federal de Santa Catarina e de Pernambuco, um dispositivo leve e portátil podendo ser usado em qualquer sala pelo professor de matemática.

Com essa ferramenta e o uso do Geogebra simultaneamente, uma aula de função trigonométrica torna-se mais dinâmica, fazendo todas as alterações na imagem, no período e nos deslocamentos verticais e horizontais ocorrido a cada variação no coeficientes das funções trigonométricas analisadas, tornando assim um processo compreensível, permitindo ao aluno construir conceitos, nos quais existiam dificuldades nessa construção.

2.6 Considerações Finais.

Neste capítulo foi apresentada uma contextualização da legislação vigente do ensino da trigonometria no Brasil e no Estado do Mato Grosso do Sul, sua história e algumas sugestões didáticas afim de facilitar o processo de ensino e aprendizagem. Aplicações reais que envolvem o cotidiano do aluno, e o uso do software Geogebra no ensino das funções trigonométricas com o auxilio da lousa digital ambos, se de interesse da escola pública, podem ser adquiridos pela mesma.

Capítulo 3:
Fundamentação Teórica

A partir das análises feitas nos materiais fornecidos pelas escolas públicas ou privadas, ao longo de toda minha trajetória em sala de aula, surgiu o interesse e a motivação de criar um material com os principais conceitos da trigonometria, estudados no Ensino Médio da Educação Básica, suas definições, postulados e teoremas, de uma maneira sucinta que servirá de material de apoio para o professor de matemática.

3.1 O Ângulo

O **ângulo** é a abertura formada por duas semirretas de mesma origem, sendo esses os lados dos ângulos. O limite da região angular delimitada por esse ângulo, o ponto de origem das mesmas semi retas é chamado de **vértice** do ângulo.

Dados os pontos O, A e B, sendo o primeiro a origem de duas semirretas, e os pontos A e B os pontos que pertencem respectivamente as semirretas OA e OB, o ângulo formado por essas semirretas pode ser representado por AÔB ou BÔA. Se não existir outro ângulo com o mesmo vértice, o ângulo pode ser representado apenas por Ô, como pode ser visto na figura 7.

.

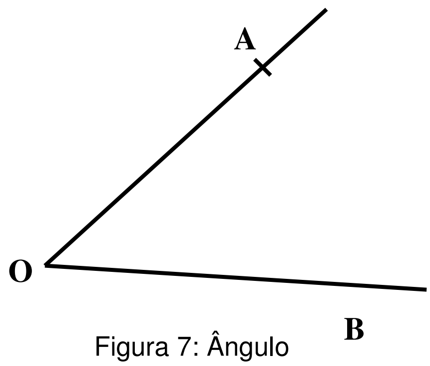

Figura 7: Ângulo

Para medir ângulo usa-se um instrumento chamado de transferidor, que consiste em um círculo graduado, dividido em 360 partes, e uma das unidades de medida de ângulo é o grau, no qual 1 grau (1º) consiste em $\frac{1}{360}$ do círculo. Outra maneira de medir ângulo é o radiano que será apresentado na seção 3.4.

Todo transferidor possui duas escalas, uma no sentido horário e outra no sentido anti-horário, por uma questão de preferência entre os matemáticos, o sentido anti-horário é chamado de sentido positivo, e no sentido horário chamado de negativo.

3.2 As Funções Trigonométricas do Ângulo Agudo

O estudo da trigonometria tem que começar pela sua origem, que são as relações entre os lados e os ângulos de um triângulo retângulo, o primeiro a definir as razões trigonométricas foi Jochim Rhaeticus (1514-1576), sendo este discípulo de Nicolau Copérnico.

Para definir as razões trigonométricas, considera-se os pontos A_1, A_2, A_3, A_4, ... A_n, pertencente à semirreta OA, e os pontos B_1, B_2, B_3, B_4, ..., B_n, que pertencem à semirreta OB, tal que os segmentos A_1B_1;A_2B_2; A_3B_3...A_nB_n, sejam perpendiculares à semirreta OB, para que os triângulos retângulo OA_nB_n, sejam todos semelhantes.

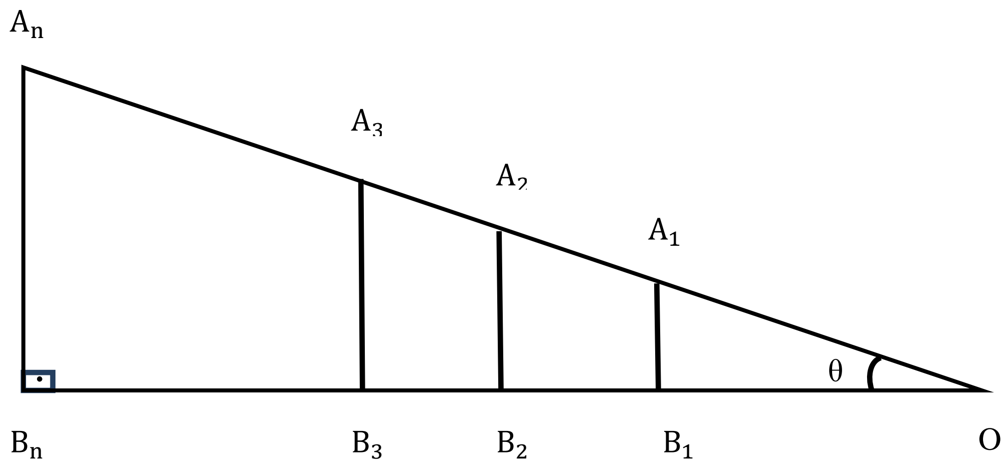

Figura 8: Triângulos Semelhantes

Como os triângulos OA_1B_1, OA_2B_2, OA_3B_3...OA_nB_n são todos semelhantes, pois possuem os mesmos ângulos, pode-se considerar que as razões entre seus lados adjacentes são constantes, ou seja:

$$\frac{A_1B_1}{OA_1} = \frac{A_2B_2}{OA_2} = \frac{A_3B_3}{OA_3} = \ldots\ldots = \frac{A_nB_n}{OA_n}. \quad (1)$$

As razões (1) são constantes, logo as mesmas não dependem do tamanho dos segmentos e somente do ângulo θ, pois variando o valor de θ serão gerados novos triângulos retângulos semelhantes com novas razões. Surgiu a necessidade de nomear essa razão, sendo o mesmo pertencente ao intervalo 0 < θ < 90º e se deu o nome de **seno** do ângulo θ e representada por:

$$\text{sen}(\theta) = \frac{A_1B_1}{OA_1}$$

Observando a figura 7, percebe-se que existem outras razões que não dependem do tamanho do segmento e sim somente do ângulo, que são:

$$\frac{OB_1}{OA_1} = \frac{OB_2}{OA_2} = \frac{OB_3}{OA_3} = \ldots\ldots = \frac{OB_n}{OA_n} \text{ e } \frac{A_1B_1}{OB_1} = \frac{A_2B_2}{OB_2} = \frac{A_3B_3}{OB_3} = \ldots\ldots = \frac{A_nB_n}{OB_n},$$

as quais foram chamadas, respectivamente de **cosseno** e **tangente** do ângulo θ, representadas por $\cos(\theta) = \frac{OB_n}{OA_n}$ e $\text{tg}(\theta) = \frac{A_nB_n}{OB_n}$.

Estas relações são chamadas de razões trigonométricas no triângulo retângulo, e não são independentes. Por exemplo, existem relações em que é fácil verificar essa dependência como:

(I) $\text{sen}^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$.

(II) $\text{tg}(\theta) = \dfrac{\text{sen}(\theta)}{\cos(\theta)}$.

Para as demonstrações (I) e (II), considere a figura 9 e as relações:

(R1) $\text{sen}(\theta) = \dfrac{\text{cateto oposoto}}{\text{hipotenusa}} = \dfrac{b}{a}$.

(R2) $\cos(\theta) = \dfrac{\text{cateto ajacente}}{\text{hipotenusa}} = \dfrac{c}{a}$.

(R3) $\text{tg}(\theta) = \dfrac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \dfrac{b}{c}$.

(R4) $a^2 = b^2 + c^2$. (Teorema de Pitágoras).

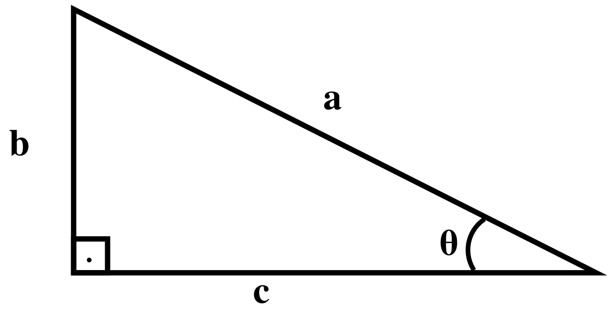

Figura 9: Triângulo Retângulo I

Demonstração (I):

- Substituindo (R1) e (R2) em $\text{sen}^2(\theta) + \cos^2(\theta)$, têm se que:

$$\text{sen}^2(\theta) + \cos^2(\theta) = \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 = \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} = \frac{b^2 + c^2}{a^2},$$

substituindo (R4) segue que:

$$\text{sen}^2(\theta) + \cos^2(\theta) = \frac{a^2}{a^2},$$

logo $\text{sen}^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$, conhecida como **relação fundamental da trigonometria**. ■

Demonstração (II):

- Substituindo (R1) e (R2) em $\dfrac{\text{sen}(\theta)}{\cos(\theta)}$, têm se que $\dfrac{\text{sen}(\theta)}{\cos(\theta)} = \dfrac{b/a}{c/a} = \dfrac{b}{c}$, e

pela relação (R3) $\text{tg}(\theta) = \dfrac{b}{c}$, logo $\dfrac{\text{sen}(\theta)}{\cos(\theta)} = \text{tg}(\theta)$. ■

Portanto verifica-se a independência entre as funções seno e cosseno, e a dependência da função tangente pelas funções seno e cosseno.

Para construir a tabela trigonométrica das funções seno, cosseno e tangente, algumas proposições, são necessárias:

- P_1: Dados dois ângulos agudos α e β, tais que os mesmos sejam complementares, ou seja, α + β = 90º, então o sen(α) = cos(β) (O seno de um ângulo é igual ao cosseno de seu ângulo complementar) e tg(α) = $\frac{1}{tg\beta}$ (A tangente de um ângulo é igual ao inverso da tangente de seu ângulo complementar).

Para mostrar a veracidade de P_1, serão aplicadas as definições das razões trigonométricas da figura 10. Como o triângulo da figura 10 é retângulo, um de seus ângulos é reto, os outros ângulos α e β, são complementares.

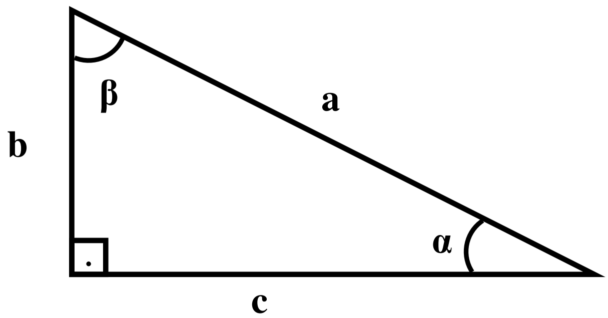

Figura 10: Triângulo Retângulo II

Considerando o ângulo α e (R1) por sen(α) = $\frac{b}{a}$. Da mesma forma, considerando o ângulo β, cos(β) = $\frac{b}{a}$, logo sen(α) = cos(β). De maneira análoga tem-se que sen(β) = cos(α) e $tg\alpha = {}^{b}/_{c}$ e $tg\beta = {}^{c}/_{b}$, logo a tangente entre dois ângulos complementares são inversas, portanto $tg\alpha = {}^{1}/_{tg\beta}$

Conhecendo algumas razões trigonométricas, de alguns ângulos, é possível construir outras razões trigonométricas.

3.3 As Razões Trigonométricas dos Ângulos Notáveis

Para alguns ângulos, é possível construir suas razões trigonométricas, utilizando-se conceitos de álgebra e de geometria. Esses ângulos são chamados de **ângulos notáveis**, que são os ângulos de 30º, 45º e 60º.

As razões trigonométricas do ângulo de 45º, podem ser obtidas em um quadrado de lado a, e diagonal $a\sqrt{2}$. Como os ângulos internos de um quadrado são retos, então terá um triângulo retângulo isósceles formado por dois lados adjacentes de um quadrado e sua diagonal, como observado na figura 11.

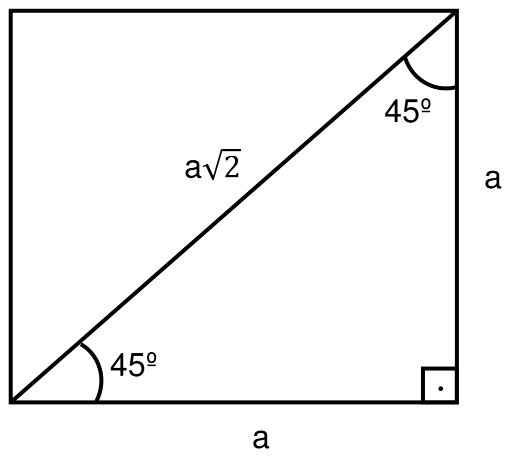

Figura 11: Quadrado

A figura 11 com as definições das razões trigonométricas têm-se que:

- sen45º = $\frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
- cos45º = $\frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
- tg45º = $\frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{a}{a} = 1$.

Para as razões trigonométricas de 30º e de 60º, pode-se usar um triângulo equilátero com lado igual **a** de altura igual a $\frac{a\sqrt{3}}{2}$, como pode ser observado na figura 12.

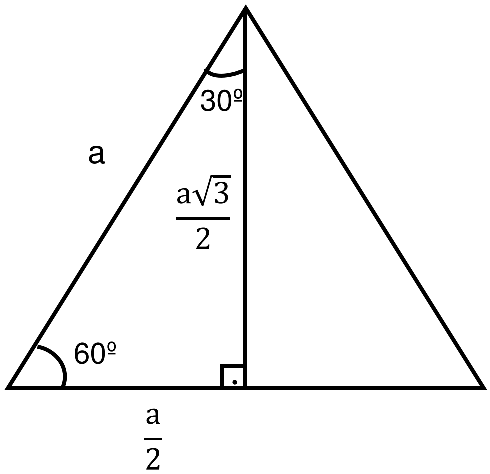

Figura 12: Triângulo Equilátero

Aplicando-se as razões trigonométricas no triângulo retângulo da figura 11, segue as razões trigonométricas de 30º e 60º. De fato:

- sen30º = $\frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$;

- cos30º = $\frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

- tg30º = $\frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$;

- sen60º = $\frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

- cos60º = $\frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$;

- tg60º = $\frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3}$;

Com as razões trigonométricas dos ângulos notáveis, têm-se a **tabela trigonométrica** dos ângulos notáveis, representada pela tabela 1.

Tabela 1: Tabela Trigonométrica

	30º	45º	60º
Seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

3.4 O Radiano

O **radiano** é uma forma de medir ângulo que usa como base de medida não o ângulo central do arco formado por esse mesmo ângulo, e sim o comprimento de seu arco, pois um ângulo α em radianos é a razão entre o comprimento de um arco (L) pelo raio de uma circunferência R, essa razão, para certo arco é constante para qualquer tamanho dos segmentos de seus lados, seus raios.

$$\alpha = \frac{L}{R}$$

Pode-se relacionar uma medida em graus e uma medida em radianos. Considere uma circunferência completa corresponde a um arco de 360º ou 2π radianos, estabeleça uma proporção entre seus ângulos, na qual 360º está para 2π radianos, assim como um ângulo em graus está para um ângulo em radiano.

Quando se fixa um ponto pertencente a uma circunferência, pode-se gerar dois arcos, dependendo do sentido que se adote a partir do ponto fixado. Convencionou como positivo o sentido contrário aos ponteiros do relógio (sentido anti-horário) e sentido negativo o sentido oposto ao adotado como positivo.

Fixando-se dois pontos em uma circunferência, sendo eles os pontos A e B, tem-se o arco AB, dependendo do sentido que se adote um arco será o orientado, formando assim dois arcos AB na qual são replementares.

Uma circunferência de raio 1, com centro na origem do sistema de eixos ortogonais, chama-se **circunferência trigonométrica** ou **ciclo trigonométrico**. Por convenção adota-se como origem dos arcos orientados pertencentes à circunferência trigonométrica, o ponto (1 , 0).

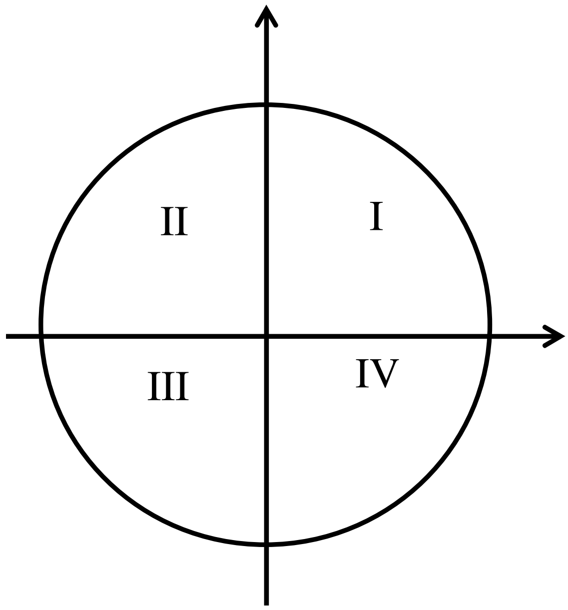

Figura 13: Ciclo trigonométrico I

Todo ciclo trigonométrico é dividido em 4 partes. Cada parte do ciclo é chamada de **quadrante** é orientada por um numeral ordinal, que inicia no primeiro arco positivo até a intersecção do ciclo com o eixo das ordenadas, assim o quadrantes são definidos como:

- 1º Quadrante está definido de 0 a $\frac{\pi}{2}$ rad.
- 2º Quadrante está definido de $\frac{\pi}{2}$ a π rad.
- 3º Quadrante está definido de π a $\frac{3\pi}{2}$ rad.
- 4º Quadrante está definido de $\frac{3\pi}{2}$ a 2π rad.

Cada ponto do clico trigonométrico passa ser ponto de um plano cartesiano, portanto as ferramentas da geometria analítica estão a disposição da trigonometria. Na trigonometria do ciclo trigonométrico, todos os arcos são medidos em função de seu raio, sendo que a unidade de medida do ciclo trigonométrico é o radiano.

Quando se adota um ângulo maior que 2π rad., para calcular as razões trigonométricas do arco que ele representa, usa-se as mesmas sobre um ângulo correspondente, que é o angulo que ele representa ao se retirar voltas completas desse ângulo.

3.5 As Razões Trigonométricas Para Todos os Reais

As razões trigonométricas estão definidas para ângulos que pertencem ao primeiro quadrante do ciclo trigonométrico (intervalo de 0º a 90º), como esses ângulos podem ser medidos em radianos, então as razões trigonométricas são definidas para o intervalo de 0 a $\frac{\pi}{2}$ radianos.

Para definir as razões trigonométricas para todos os números reais, será definida uma função $F : R \rightarrow S$, sendo S uma circunferência com origem no ponto A. Considere um número real x, pertencente a S, a partir do ponto A no sentido anti-horário (sentido positivo) para $x > 0$, e para $x < 0$ será percorrido a medida x no sentido anti-horário (sentido negativo), então tem-se que F(x) é o ponto pertencente a S, tal que esse ponto seja uma das extremidades do arco de origem em A e de comprimento x. Para $x > 2\pi$ ou $x < -2\pi$, é necessário dar mais de uma volta para atingir F(x).

Dado um ponto P pertencente a S que seja a imagem da função F(x), existem infinitos números reais x tais que esses números correspondem F(x) = P. Para determinar os valores de x, tais que possuem como imagem um ponto P, deve-se ao número x somar pelo menos uma volta completa, ou seja, $x + 2k\pi$.

No ciclo trigonométrico de origem em A, quando as extremidades de dois arcos têm uma mesma distância do eixo das abscissas, a esses arcos são chamados de **arcos correspondentes** ou **ângulos simétricos**, dentro da primeira volta pares de ângulos com extremos simétricos tem que obedecer as seguintes relações.

- B e C são simétricos em relação à origem, pois são arcos suplementares (dois arcos são suplementares, quando sua soma resulta em 180º).

- B e D são simétricos, pois são arcos explementares (dois arcos são explementares, quando sua soma resulta em 270º).
- B e E são simétricos em relação à origem, pois são replementares. (dois arcos são replementares, quando sua soma resulta em 360º).

Esses arcos correspondentes podem ser observados na figura 13.

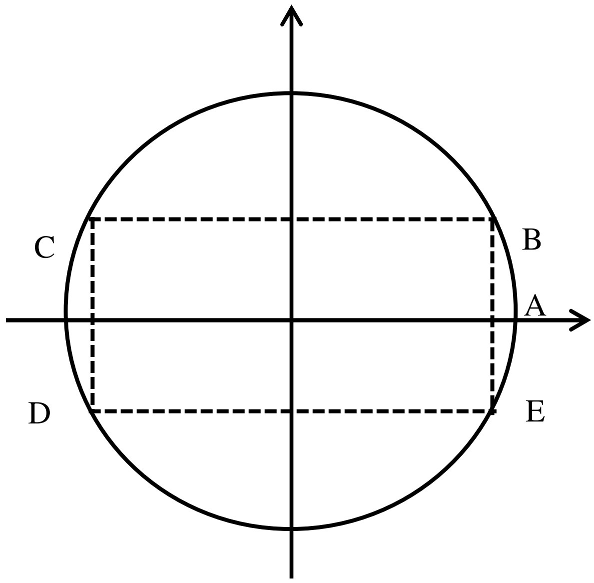

Figura 14: Ângulo Correspondentes

A partir do arco AB pode-se escrever os outros três arcos, na primeira volta do ciclo trigonométrico. A extremidade do arco AC é dado por 180º subtraindo a do arco AB, do arco AD é encontrado somando a 180º o arco AB, por sua vez a extremidade do arco AD é dada da retirada do arco AB de 360º.

- C = π rad – B
- D = π rad + B
- E = 2 π rad – B

Considerando uma extremidade M, marcada em qualquer ponto do ciclo trigonométrico, de acordo com a figura 15 por definição tem-se que o senα = $\frac{y}{1}$, logo o sen(α) = y, então pela geometria analítica, o senα é representado no eixo das ordenadas no intervalo – 1 ≤ sen(α) ≤ 1 do ponto M.

O senα, para qualquer arco M, é dado pelo valor da coordenada Y do ponto M, com isso pode-se adotar o eixo das ordenadas na Geometria Analítica, coincida com o eixo dos senos na Trigonometria.

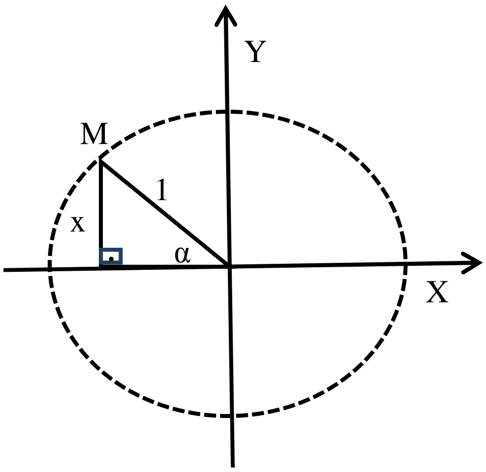

Figura 15: Eixo seno

Consequências importantes:

- Estende-se o seno para qualquer número real.
- Obter senos de ângulos nulos, obtusos e até de ângulos negativos (basta orientar o arco no sentido contrário ao positivo).
- A noção do cosseno amplia-se, podendo ter valores negativos e até nulos.

Como o raio do ciclo trigonométrico é 1 e como o valor do seno é o correspondente do ponto M no eixo das ordenadas, concluí-se que o seno das extremidades do ciclo é:

- sen(0) = 0;
- sen $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ = 1;
- sen (π) = 0;
- sen $\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ = – 1 ;
- sen (2π) = 0;

E pode-se concluir ainda que no primeiro e segundo quadrante o seno tem sinal positivo, e no terceiro e quarto quadrante, tem sinal negativo, como mostra a figura 16.

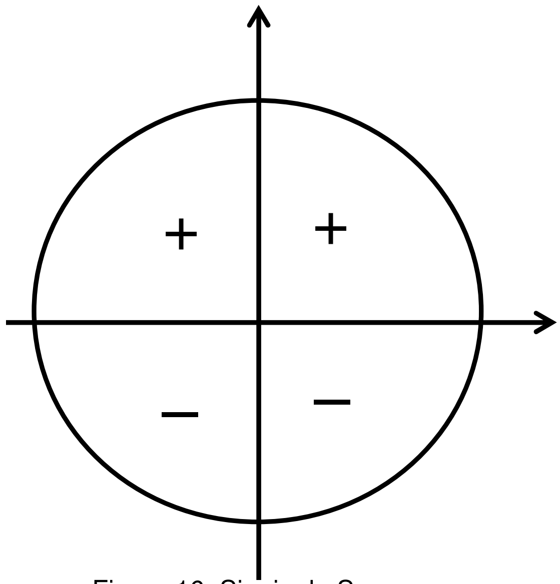

Figura 16: Sinais do Seno

Para definir o cosseno no ciclo trigonométrico, será considerada de maneira análoga à definição do seno, uma extremidade M, marcada em qualquer ponto (x,y) do ciclo trigonométrico, pela definição tem-se que cos(α) = $\frac{x}{1}$, logo o cos(α) = x, porém pela Geometria Analítica que o cos(α) é a abscissas do ponto M, como pode ser visto na figura 17.

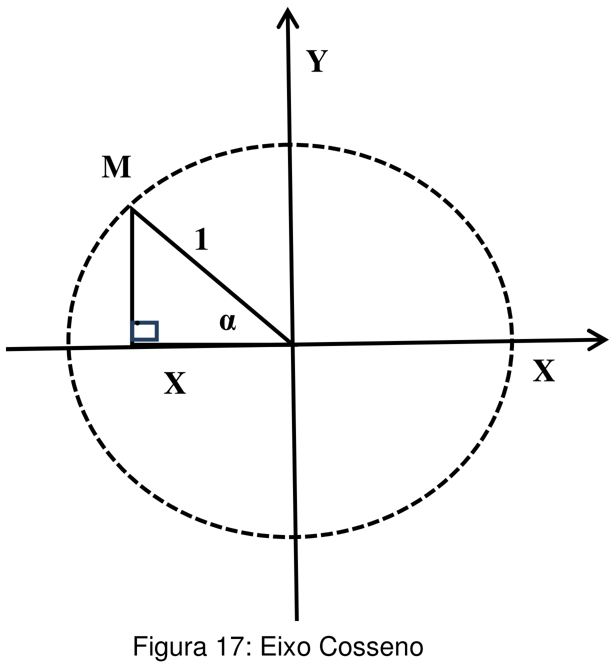

Figura 17: Eixo Cosseno

Pode-se afirmar que o cosα, para qualquer arco M, é dado pelo valor da coordenada x do ponto M, assim o eixo das abscissas na Geometria Analítica, coincida com o eixo dos cossenos na Trigonometria.

Consequências importantes:

- A noção do cosseno é generalizada para todos os números reais, libertando dos ângulos dos triângulos retângulos.
- Obter cossenos de ângulos, nulos, obtusos e até de ângulos negativos (basta orientar o arco no sentido contrário ao positivo).
- A noção do cosseno amplia-se, podendo assumir valores negativos e até nulos.

Como o raio do ciclo trigonométrico é 1 e o cosseno é o correspondente do ponto M no eixo das abscissas, pode-se afirmar que o seno das extremidades do ciclo são:

- $\cos(0) = 1$;
- $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$;
- $\cos(\pi) = -1$;
- $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$;
- $\cos(2\pi) = 1$;

E pode-se concluir ainda que no primeiro e quarto quadrante o cosseno tem sinal positivo, e no segundo e terceiro quadrante, tem sinal negativo, como mostra a figura 18.

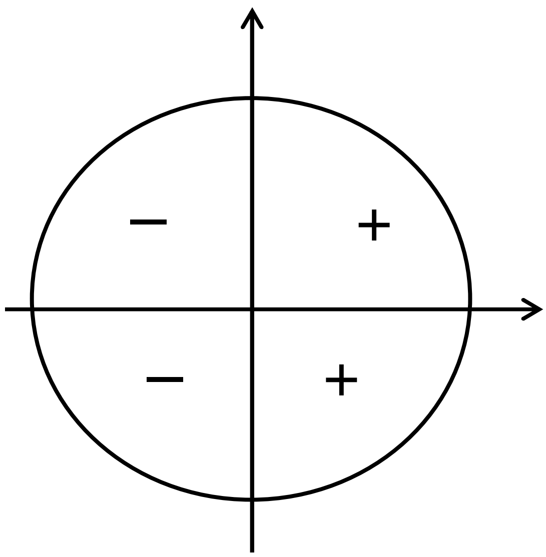

Figura 18: Sinais do cosseno

Considere um arco AM no ciclo trigonométrico, uma reta tangente t ao ciclo trigonométrico no ponto A e um triângulo retângulo OAP, sendo P o ponto de intersecção entre a reta OM e a reta t, como na figura 19.

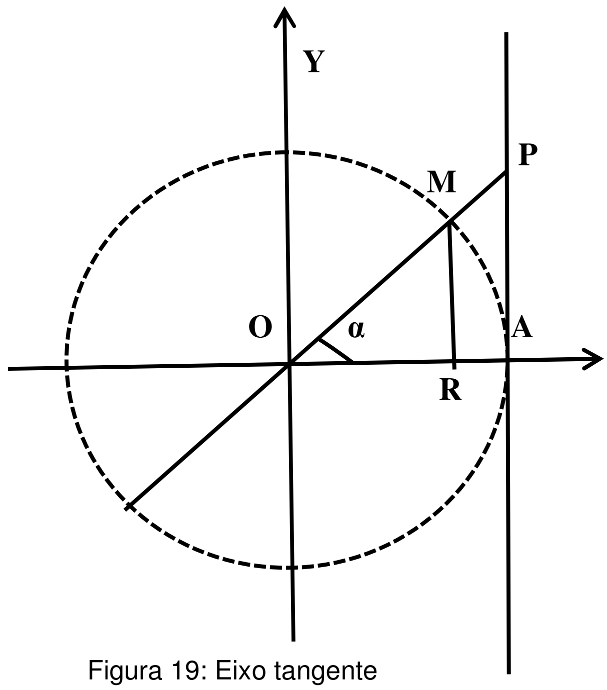

Figura 19: Eixo tangente

Como o arco AM é congruente ao ângulo α, pela trigonometria tem que a tgα = $\frac{\text{Cateto Oposto}}{\text{Cateto Adjacente}}$, logo tgα = $\frac{AP}{OA}$, e como o segmento OM = OA é o raio do círculo trigonométrico, então OA = 1, a tangente do ângulo α, é congruente ao segmento AP.

O seno do ângulo α é o segmento RM e o cosseno do ângulo é o segmento OR, então pelo triângulo MOR, têm se que a tangente do ângulo α também é dada por:

$$tg\alpha = \frac{Sen\alpha}{Cos\alpha}$$

Ao seno e ao cosseno tem-se as 3 conseqüências:

- Estende a noção da tangente, libertando de somente nos triângulos retângulos para todos os números reais.
- Permite-se obter tangentes de ângulos obtusos e até de ângulos negativos (basta orientar o arco no sentido contrário ao positivo).
- A noção da tangente amplia-se, podendo ter valores negativos e até nulos.

Como o raio do ciclo trigonométrico é 1, pode-se dizer que a tangente das extremidades do ciclo, são dadas por:

- $tg0 = 0$;
- $tg\frac{\pi}{2} = \nexists$;
- $tg\pi = 0$;
- $tg\frac{3\pi}{2} = \nexists$;
- $tg2\pi = 0$;

A tangente que possui como resultado 1 é a tangente de $\frac{\pi}{4}$, pois em um triângulo retângulo, se um de seus ângulos agudos tem esse valor, pela teorema angular de Tales, em que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º, o outro também terá, sendo esse triângulo retângulo isósceles, logo o cateto adjacente e oposto são iguais, sendo assim tangente de um ângulo de $\frac{\pi}{4}$ é o quociente entre duas medidas congruentes, logo $tg\frac{\pi}{4} = 1$.

Nos extremos verticais não existe a tangente dos mesmos, pois nesses extremos o cosseno é nulo, e a tangente é o quociente entre o seno e o cosseno, logo não existe a $tg\frac{\pi}{2}$, da mesma forma mostra-se que não existe a $tg\frac{3\pi}{2}$.

Os sinais da tangente no primeiro e no terceiro quadrantes são positivos, já no segundo e no quarto quadrantes são negativos, como está representado na figura 20.

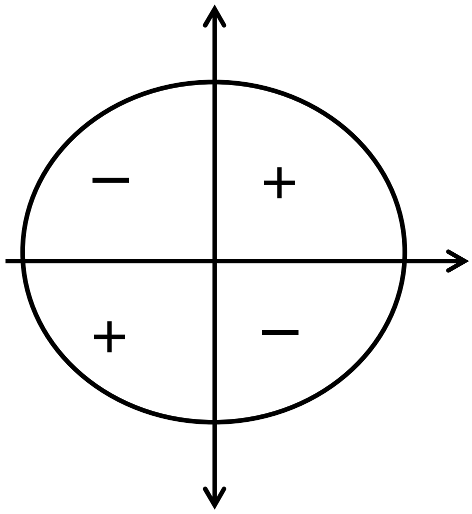

Figura 20: Sinais da Tangente

3.6 Relações Trigonométricas Para Quaisquer Triângulos

As razões trigonométricas do triângulo retângulo seno, cosseno e tangente relacionam os lados com os ângulos em um triângulo retângulo, porém essas relações são verdadeiras para os triângulos retângulos. Para outros tipos de triângulos as relações que envolvem os lados do triângulo com seus ângulos são chamadas de lei dos senos e lei dos cossenos.

A **lei dos senos** para qualquer triângulo, dada pelo quociente entre um lado e o seno do ângulo oposto, é constante para os três lados do triângulo, e igual ao diâmetro de uma circunferência circunscrita a esse triângulo, como será demonstrado a seguir:

Em um triângulo qualquer ABC traça-se a altura h relativa ao vértice A, como mostra figura 21.

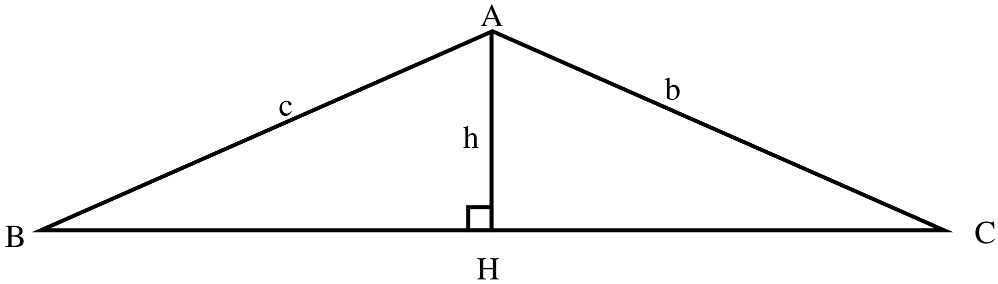

Figura 21: Lei dos Senos

Assim, considerando-se os ângulos B e C, tem-se:

- senB = $\frac{h}{c}$, $\rightarrow$ h = c.senB;
- senC =$\frac{h}{b}$, $\rightarrow$ h = b.senC;

Igualando as alturas tem-se que c.senB = b. senC, dividindo ambos os lados por senB.senC, tem-se a $\frac{c}{\text{senC}} = \frac{b}{\text{senB}}$, de maneira análoga as outras as outras relações serão construídas e têm-se que:

$$\frac{c}{\text{senC}} = \frac{b}{\text{senB}} = \frac{a}{\text{senA}}$$

Para verificar as igualdades da relação do diâmetro da circunferência circunscrita a esse triângulo, considere dois triângulos, ambos inscritos a uma mesma circunferência, sendo o triângulo ABC qualquer e o triângulo ABC', retângulo em B e AC' diâmetro dessa circunferência, como os ângulos com vértice em C e C', possuem o mesmo arco AB, de comprimento c, logo os ângulos C e C' são iguais, logo tem que senC = $\frac{c}{2R}$, então $\frac{c}{\text{senC}}$ = 2R, logo a lei dos senos:

$$\frac{c}{\text{senC}} = \frac{b}{\text{senB}} = \frac{a}{\text{senA}} = 2R \qquad \blacksquare$$

A **Lei dos Cossenos** relaciona os lados de um triângulo qualquer com um de seus ângulos. A diferença para a Lei dos Senos, é que na primeira relaciona todos os lados com apenas um ângulo e a segunda relaciona dois lados com os seus ângulos opostos.

A Lei dos Cossenos: "O quadrado de um lado qualquer é igual a soma dos quadrados dos outros dois lados diminuído pelo dobro do produto dos outros dois lados multiplicado pelo cosseno do ângulo oposto ao lado analisado". Para demonstrar a lei dos cossenos será dividido o triângulo ABC em dois, utilizando a sua altura h em relação ao vértice A e será considerado dois casos, o primeiro considerando o ângulo Â agudo e o segundo como obtuso.

Para o ângulo Â ser agudo, considere BH = h e AH = x como na figura 22 no triângulo BHC que:

$$a^2 = h^2 + (b - x)^2$$

No triângulo ABH têm se que:

$c^2 = h^2 + x^2$, logo

$a^2 = c^2 - x^2 + b^2 - 2bx + x^2$, então

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bx$, como x é igual a $c.\cos\hat{A}$, segue que

$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos\hat{A}$.

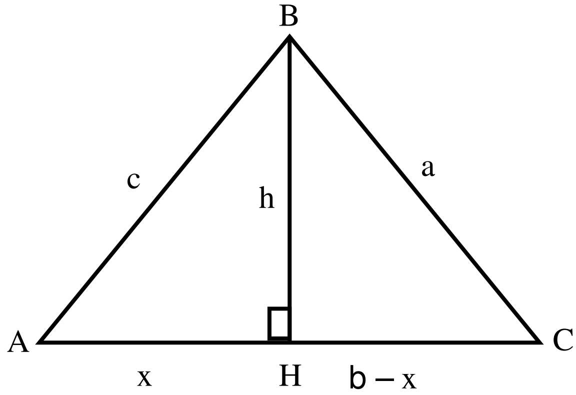

Figura 22: Lei dos Cossenos I

Em um triângulo obtusângulo, com um ângulo obtuso no vértice A, de acordo com a figura 23, considera-se que BH = h e AH = x, tem no triângulo BHC.

$a^2 = h^2 + (b + x)^2$

No triângulo BHA, têm se que:

$c^2 = h^2 + x^2$, logo

$a^2 = c^2 - x^2 + b^2 + 2bx + x^2$,

$a^2 = b^2 + c^2 + 2\ bx$.

Como $x = c.\cos(B\hat{A}H) = c(-\cos\hat{A})$ segue que

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos\hat{A}$ ■

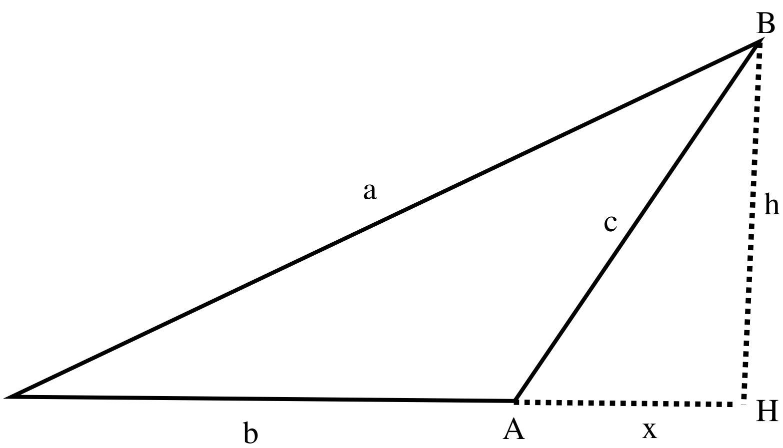

Figura 23: Lei dos Cossenos II

Para demonstrar a lei dos cossenos para os outros lados, segue de maneira análoga o mesmo raciocínio.

Na classificação de triângulos quanto aos seus ângulos, a lei dos cossenos tem um papel importante, pois em triângulos que se tem apenas os valores de seus lados, uma maneira de classificá-lo quanto aos seus ângulos é aplicar a lei dos cossenos, referente ao ângulo opostos ao lado de maior valor, pois pela desigualdade triangular o maior ângulo de um triângulo é oposto ao maior lado do mesmo, logo se o cosseno desse ângulo for positivo, esse será agudo, portanto o triângulo será acutângulo, mas se for negativo ele será obtuso portanto o triângulo será obtusângulo, e se for nulo o mesmo será retângulo.

3.7 Outras Relações Trigonométricas

Para definir a **secante** de um ângulo α, será usado a semelhança entre os triângulos OMR e OPA, na figura 24.

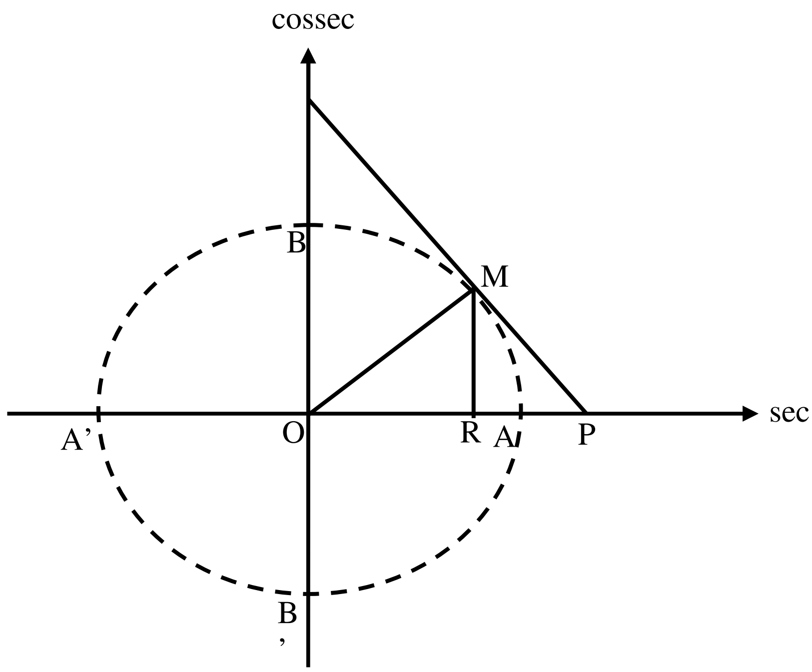

Figura 24: Secante

Tem que $\frac{\text{PO}}{\text{MO}} = \frac{\text{OA}}{\text{OR}}$ como o segmento MO é o raio do ciclo trigonométrico, MO = 1, o segmento OR é congruente ao cosα, e o segmento

AO é o raio do ciclo trigonométrico, OA = 1, então tem-se que $\frac{OP}{1} = \frac{1}{Cos\alpha}$,

OP = $\frac{1}{Cos\alpha}$ a secante de um ângulo α é o inverso do cosseno e definido pelo segmento OP na figura 24.

Como a secante é o inverso do cosseno os sinais de seus quadrantes permanecem os mesmos do cosseno, sendo positivo no primeiro e quarto quadrantes, e negativos no segundo e terceiro quadrantes. Porém quando o cosseno é zero, a secante não existe e isso ocorre nos ângulos de $\frac{\pi}{2} + k.\pi$.

Para definir a **cossecante** e a **cotangente** será usada a figura 25.

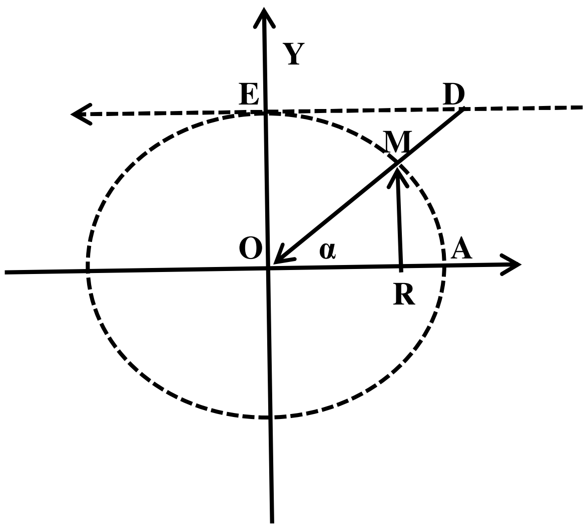

Figura 25: Cossecante

Dada a reta que passa pelos pontos ED, que é paralela à reta AO, logo o ângulo EDO é congruente DOA, como os ângulos DEO e MRO são retos, então os triângulos EDO e MOR são semelhantes.

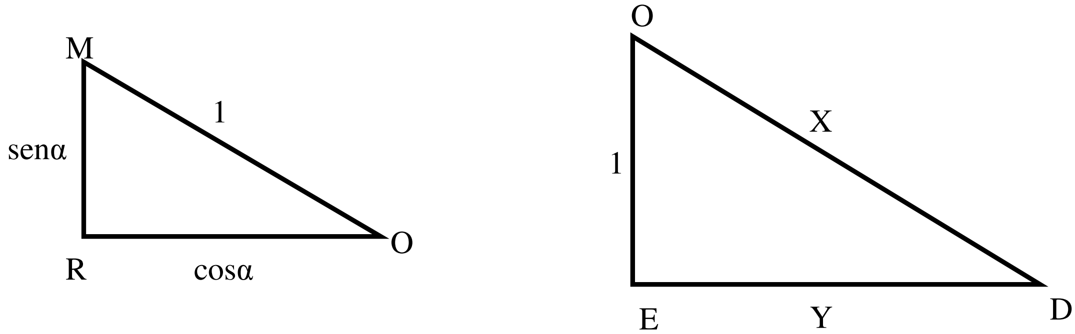

Figura 26: Cossecante I

Usando a semelhança dos triângulos $\frac{x}{1} = \frac{1}{\text{sen}\propto}$, logo o segmento OD representa o inverso do seno do ângulo α, definindo por cossecante do ângulo α. Os sinais dos quadrantes da cossecante permanecem os mesmos do seno, sendo positivo nos dois primeiros quadrantes e negativo no terceiro e quarto. Como a cossecante é o inverso do seno então a mesma não existe quando o seno for zero, logo não existe para todo ângulo $k.\pi$, com $k \in Z$.

Considerando-se os mesmos triângulos da figura 25, aplicando-se a semelhança em outros lados tem-se que $\frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{Y}$, então Y = $\frac{\cos\alpha}{\text{sen}\alpha}$, a essa razão se dá o nome de cotangente (inverso da tangente). A cotgα = $\frac{\cos\alpha}{\text{sen}\alpha}$ pode ser representada por cotgα = $\frac{1}{\text{tg}\alpha}$. Como a cotangente é o inverso da tangente os sinais de seus quadrantes permanecem os sinais da tangente, sendo positivo no primeiro e terceiro quadrantes e negativo no segundo e quarto quadrantes, não existindo quando a tangente for nula, que ocorrerá nos ângulos $k.\pi$, com $k \in Z$.

Da relação fundamental da trigonometria $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, dividindo-se os dois lados da igualdade por $\text{sen}^2\alpha$, têm se que:

$\frac{\text{sen}^2\alpha}{\text{sen}^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\text{sen}^2\alpha} = \frac{1}{\text{sen}^2\alpha}$, ou seja, têm se outra ralação importante:

$$\text{cossec}^2\alpha = 1 + \text{cotg}^2\alpha.$$

Se for dividida por $\cos^2\alpha$, tem-se: $\frac{sen^2\alpha}{cos^2\alpha} + \frac{cos^2\alpha}{cos^2\alpha} = \frac{1}{cos^2\alpha}$, obtendo-se outra relação:

$$\sec^2\alpha = 1 + \text{tg}^2\alpha.$$

3.8 Arco Soma

Existem outras demonstrações das fórmulas das razões trigonométricas que permitem aplicá-las na soma ou subtração de dois arcos, será usada uma de fácil compreensão pelos alunos.

Inicialmente será construído um triângulo AEF, retângulo em E e de hipotenusa igual a 1 unidade de comprimento, inscrito em um retângulo ABCD sendo os ângulos EÂF = α e FÂC = β , conforme a figura 27.

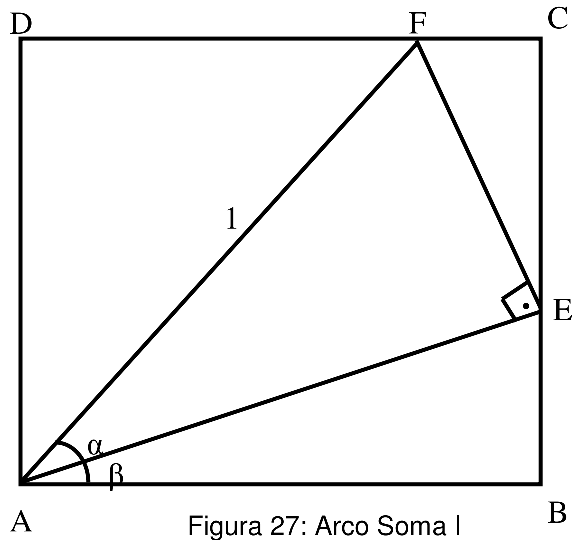

Figura 27: Arco Soma I

Aplicando as razões trigonométricas nos triângulos retângulos AEF e ABE, tem-se que as medidas dos segmentos AE = cosα e EF = senα, além disso AB = cosα.cosβ, e BE = senβ.cosα. Como o ângulo AÊB = α, então o ângulo FÊC = β e o ângulo AFD = α + β, segue que CE = senα.cosβ, CF = senα.senβ, FD = cos(α + β) e AD = sen(α + β), como pode ser observado pela figura 28.

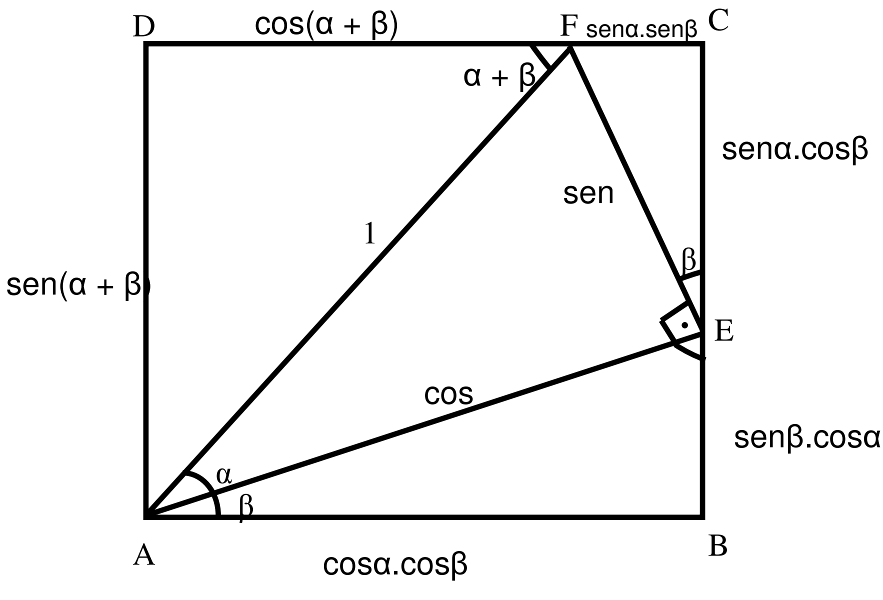

Figura 28: Arco Soma II

Em um retângulo, os lados paralelos são congruentes, então com:

- $\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen}\alpha.\cos\beta + \text{sen}\beta.\cos\alpha$;
- $\cos\alpha.\cos\beta = \cos(\alpha + \beta) + \text{sen}\alpha.\text{sen}\beta$, logo:

$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha.\cos\beta - \text{sen}\alpha.\text{sen}\beta$.

Para mostrar o $\text{sen}(\alpha - \beta)$, basta aplicar na fórmula do arco soma substituindo β por $-\beta$, têm se que:

$\text{sen}[\alpha + (-\beta)] = \text{sen}\alpha.\cos(-\beta) + \text{sen}(-\beta).\cos\alpha$,

como o $\text{sen}(-\beta) = -\text{sen}\beta$, então,

$\text{sen}(\alpha - \beta) = \text{sen}\alpha.\cos\beta - \text{sen}\beta.\cos\alpha$.

De maneira análogo à demonstração do $\text{sen}(\alpha - \beta)$, têm se que $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha.\cos\beta + \text{sen}\alpha.\text{sen}\beta$.

Como a tangente é a razão entre o seno e o cosseno, logo:

$\text{tg}(\alpha + \beta) = \dfrac{\text{sen}(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)}$, substituindo-se a fórmulas de arco soma, segue que $\text{tg}(\alpha + \beta) = \dfrac{\text{sen}\alpha.\cos\beta + \text{sen}\beta.\cos\alpha}{\cos\alpha.\cos\beta - \text{sen}\alpha.\text{sen}\beta}$, dividindo-se ambos os membros do quociente por $\cos\alpha \,.\, \cos\beta$.

$$\text{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\text{sen}\alpha.\cos\beta + \text{sen}\beta.\cos\alpha}{\cos\alpha.\cos\beta - \text{sen}\alpha.\text{sen}\beta} : \frac{\cos\alpha.\cos\beta}{\cos\alpha.\cos\beta}.$$

$\tan(\alpha + \beta) = \dfrac{\frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\text{sen}\beta}{\cos\beta}}{1 - \frac{\text{sen}\alpha.\text{sen}\beta}{\cos\alpha\,.\cos\beta}}$, concluindo que a $\text{tg}(\alpha + \beta) = \dfrac{\text{tg}\alpha + \text{tg}\beta}{1 - \text{tg}\alpha.\text{tg}\beta}$.

De maneira análoga à demonstração de $\text{tg}(\alpha + \beta)$, a relação da $\text{tg}(\alpha - \beta)$ é dada por $\text{tg}(\alpha - \beta) = \dfrac{\text{tg}\alpha - \text{tg}\beta}{1 + \text{tg}\alpha.\text{tg}\beta}$.

Ao aplicar o arco soma $\alpha = \beta$, tem-se o arco duplo, substituindo nas relações de arco soma, o $\text{sen}(2\alpha)$ é dado por:

$\text{sen}(\alpha+\alpha) = \text{sen}\alpha.\cos + \text{sen}\alpha \,.\, \cos$, então

$\text{sen}(2\alpha) = 2\text{sen}\alpha\,.\cos\alpha$. ■

De maneira análoga o $\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha$ e a $\text{tg}(2\alpha) = \dfrac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}$.

Para o arco triplo substituí $\beta = 2\alpha$, então:

$\text{sen}(\alpha + 2\alpha) = \text{sen}\alpha.\cos(2\alpha) + \text{sen}(2\alpha).\cos\alpha$

Substituindo as fórmulas de arco duplo:

do cosseno do arco metade, segue que a tg$\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\pm\sqrt{\frac{1-cosx}{2}}}{\pm\sqrt{\frac{1+cosx}{2}}}$, ou seja,

tg$\left(\frac{x}{2}\right)$=$\pm\sqrt{\frac{1-cosx}{1+cosx}}$. ■

3.9 Transformações de Soma em Produto.

Algumas identidades trigonométricas permitem fazer a conversão entre uma identidade de soma em uma identidade de produto. Para isso será usada o seno, cosseno e a tangente de arco soma, e ainda adotar que a + b = α e que a – b = β, somando as duas equações tem que a = $\frac{\alpha+\beta}{2}$, se diminuir as duas equações segue b = $\frac{\alpha-\beta}{2}$.

Recordando as equações do seno da soma e da diferença entre dois ângulos terá sen(a + b) = sena.cosb + senb.cosa, e que sen(a + b) = sena.cosb - senb.cosa. Somando as duas equações sen(a + b) + sen(a – b) = 2sena.cosb. Diminuindo as duas equações sen(a + b) - sen(a –b) = 2senb.cosa. De maneira análoga com o cosseno cos(a + b) + cos(a – b) = 2cosa.cosb e cos(a + b) - cos(a – b) = - 2.sena.senb.

Substituindo a, b, a + b e a – b têm se que:

- senα + senβ = 2.sen$\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$.cos$\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$
- senα-senβ = 2.sen$\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$.cos$\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$
- cosα + cosβ = 2.cos$\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ .cos$\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$
- cosα - cosβ = -2.sen$\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ .sen$\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

$$sen3\alpha = sen\alpha.(cos^2\alpha - sen^2\alpha) + 2sen\alpha.cos\alpha.cos\alpha,$$

$$sen3\alpha = sen\alpha.cos^2\alpha - sen^3\alpha + 2\, sen\alpha.cos^2\alpha,$$

A fórmula do arco triplo é dada por:

$$sen3\alpha = 3sen\alpha.cos^2\alpha - sen^3\alpha. \qquad \blacksquare$$

De maneira análoga demonstra-se a fórmula de arco triplo do cosseno e da tangente, que são $cos3\alpha = cos^3\alpha - 3sen^2\alpha.cos\alpha$ e a $tg3\alpha = \frac{3tg\alpha - tg^3\alpha}{1-3tg^2\alpha}$.

Para a demonstração do arco metade, será usada as fórmulas de arco duplo do cosseno e substituímos $\alpha = \frac{x}{2}$, então:

$$cos\left(2.\frac{x}{2}\right) = cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - sen^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$cosx = cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - sen^2\left(\frac{x}{2}\right) \quad (1)$$

Pela relação fundamental da trigonometria segue que:

$$sen^2\left(\frac{x}{2}\right) + cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = 1, \ (2).$$

Somando as duas equações (1) e (2) terá:

$$cosx + 1 = 2cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

Logo:

$$cos\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+cosx}{2}}. \qquad \blacksquare$$

Se diminuir da equação (2) a equação (1):

$$2sen^2\left(\frac{x}{2}\right) = 1 - cosx.$$

Segue que:

$$sen\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-cosx}{2}}. \qquad \blacksquare$$

A fórmula $tg\left(\frac{x}{2}\right)$, usa-se a definição da tangente que, o quociente entre o seno e o cosseno, então $tg\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{sen\left(\frac{x}{2}\right)}{cos\left(\frac{x}{2}\right)}$ substituindo as fórmulas do seno e

3.10 Funções trigonométricas

Para definir a **função seno**, será considerado um ponto P pertencente ao ciclo trigonométrico com imagem, um número real P_1 pertencente ao eixo das ordenadas, eixo y, como na figura 29.

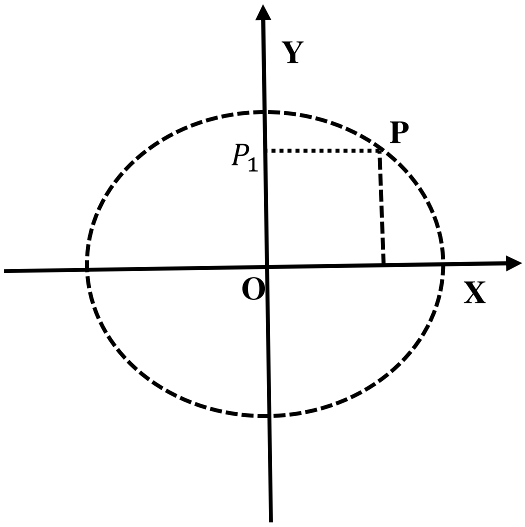

Figura 29: Função Seno I

A função seno é uma função definida de F:R→R, que associa qualquer número real x a um número real y, sendo y congruente ao segmento OP_1, ou seja, sendo para cada $x \in R$, existe um $y \in R$ tal que y = F(x) = senx.

O domínio e o contradomínio da função seno são todos os números reais, sua imagem está compreendida entre o intervalo [−1;1]. Outra representação de $Im = \{y \in R/-1 \leq y \leq 1\}$. Essa imagem é justificada pelo raio do ciclo trigonométrico que é 1, logo $-1 \leq senx \leq 1$.

Como foi visto figura 16 o sinal do seno é positivo no primeiro e segundo quadrantes, e negativo no terceiro quarto, e os zeros da função são da forma kπ, sendo $k \in Z$.

O gráfico de uma função seno é uma curva periódica chamada de **senóide**, que intercepta os eixo das abscissas para todo x = k. π, intercepta o eixo das ordenadas quando x = 0, e possui valores máximos para todo x = $\frac{\pi}{2}$ +

$2k\pi$ e valores mínimos para todo x = $\frac{3\pi}{2}$ + $2k\pi$, com $k \in Z$. Na primeira volta do ciclo trigonométrico, o gráfico da função seno é representado pela figura 30.

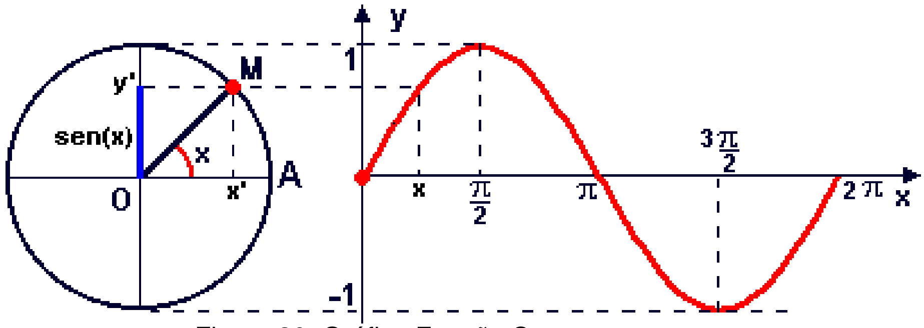

Figura 30: Gráfico Função Seno

A função seno, é uma função periódica de período 2π radiano, domínio e contradomínio todos os números reais, de máximo e mínimo sendo respectivamente 1 e – 1, e de imagem [-1; 1], como pode ser observado na figura 30.

Existem variações da função seno, a elas se dá o nome de funções do tipo seno e são definidas da seguinte forma f(x) = a + b.sen(kx), de modo que os coeficientes da função seno variam, alterando seu gráfico, sua imagem e seu período, com domínio sendo todos os números reais, imagem estando compreendida no intervalo [a + b ; a - b] e período sendo igual a $\frac{2\pi}{k}$, com a, b e k ∈ R.

Para definir a função cosseno considere um número real x, com imagem P no ciclo trigonométrico.

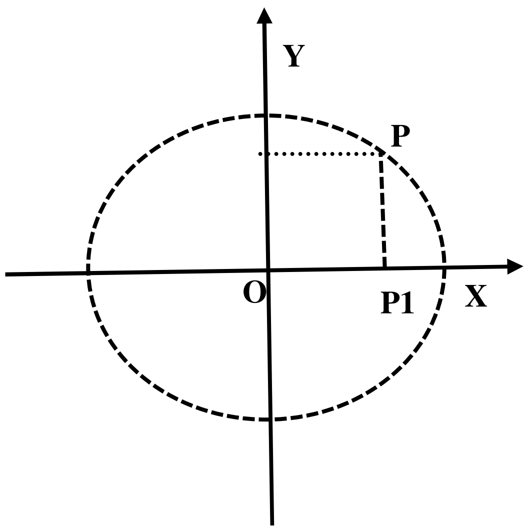

Figura 31: Função Cosseno I

A **função cosseno** é uma função definida de F:R→R, que associa qualquer número real x a um número real y, sendo y congruente ao segmento OP_1, ou seja, sendo para cada $x \in R$, existe um $y \in R$ tal que y = F(x) = cosx.

O domínio e o contradomínio de uma função cosseno são todos os números reais, a imagem está compreendida entre o intervalo [-1;1] ou $\mathrm{Im} = \{\mathrm{y} \in \mathrm{R}/-1 \leq \mathrm{y} \leq 1\}$. Essa imagem se dá a esse intervalo por causa do raio do ciclo trigonométrico que é 1, logo $-1 \leq \cos\mathrm{x} \leq 1$.

Como foi visto na figura 18 o sinal do é positivo no primeiro e quarto quadrantes, e negativo no segundo e terceiro quadrantes, e os zeros da função são todos os múltiplos de π, logo as raízes da função cosseno são quando x $=k\frac{\pi}{2}$, sendo $k \in Z$.

O gráfico de uma função cosseno é uma curva periódica chamada de senóide, que intercepta os eixo das abscissas para todo x = k$\frac{\pi}{2}$, $k \in Z$, intercepta o eixo das ordenadas quando x = o, e possui como valores máximos para todo x = $2k\pi$, e valores mínimos para todo x = $\pi + 2k\pi,$ tem-se $k \in Z$.

O gráfico da função cosseno no intervalo de [0;2π] é crescente no terceiro e quarto quadrantes e decrescente no primeiro e segundo quadrantes, como pode ser observado na figura 32.

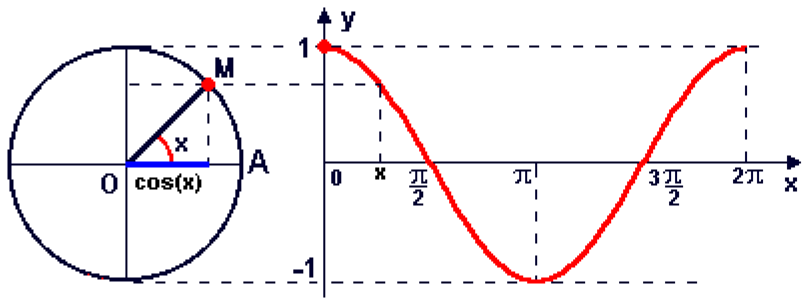

Figura 32: Gráfico Função Cosseno

A função cosseno, é uma função periódica de período 2π radianos, domínio e contradomínio todos os números reais, de máximo e mínimo sendo respectivamente 1 e – 1, e de imagem [-1; 1].

Existem variações da função cosseno, que alteraram seu gráfico, sua imagem e seu período.

Para definir a função tangente, considere um número real x, com imagem P no ciclo trigonométrico, como está representado na figura 33.

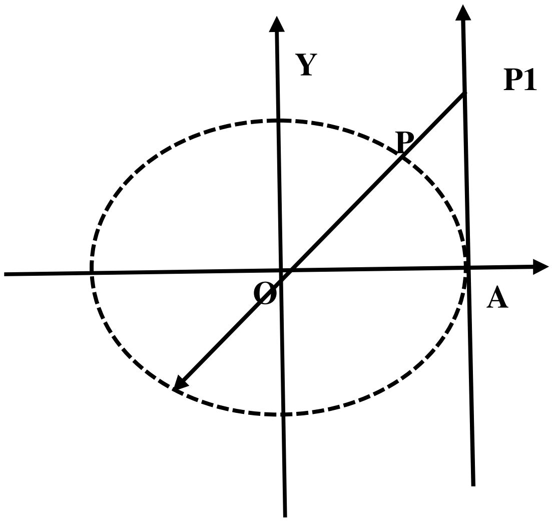

Figura 33: Função Tangente I

A **função tangente** é uma função definida, em seu domínio e contradomínio R $- \left\{\frac{\pi}{2} + \mathrm{k}\pi,\ \mathrm{k}\ \in \mathrm{Z}\right\} \rightarrow \mathrm{R}$, que associa qualquer número real x a um número real y, sendo y congruente ao segmento AP1, ou seja, sendo para cada $x \in R$, existe um $y \in R$ tal que y = F(x) = tgx.

O domínio de uma função tangente é o conjunto $D = \left\{x \in R/x \neq \frac{\pi}{2} + xk\pi,\ k\ \in Z\right\}$ e o contradomínio e a imagem são todos os números reais.

O sinal da tangente é positivo no primeiro e terceiro quadrantes, e negativo no segundo e quarto quadrantes, e os zeros da função são todos os múltiplos de π, logo as raízes da função tangente são quando x = $k\pi$, sendo $k \in Z$.

O gráfico da função tangente que intercepta os eixo das abscissas para todo x = $k\pi$, $k \in Z$, intercepta o eixo das ordenadas quando x = 0, não possui valores máximos e nem valores mínimos, sendo sua representação no intervalo de [0;2π], crescente em todos os quadrantes, seu gráfico pode ser verificado na figura 34.

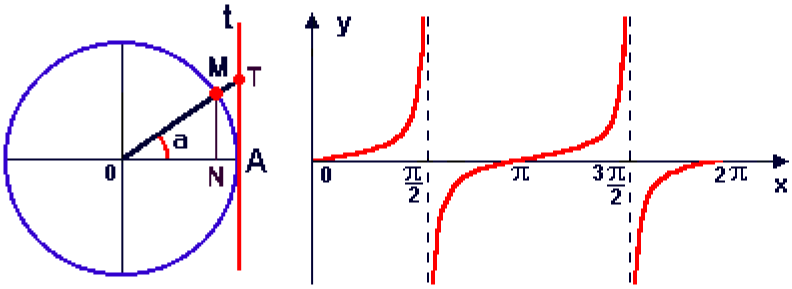

Figura 34: Gráfico Função Tangente

A função tangente é uma função periódica de período π radiano, com domínio D= $R - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z\right\}$ e imagem todos os números reais.

3.11 Funções Auxiliares

É interessante introduzir as funções trigonométricas auxiliares, pois facilitam na resolução de problemas que envolvam o inverso das funções tradicionais, como isso $\frac{1}{\text{senx}}$; $\frac{1}{\text{cosx}}$; $\frac{1}{\text{tgx}}$, adotadas como:

- Secante de x:

  secx = $\frac{1}{\text{cosx}}$, com cosx≠0;

- Cossecante de x:

  cossecx = $\frac{1}{\text{senx}}$, com senx≠0;

- Cotangente de x:

  cotgx = $\frac{1}{\text{tgx}}$, com tgx≠0;

Os gráficos das funções auxiliares são obtidos diretamente dos gráficos das funções trigonométricas, como da função secante que possui domínio R $- \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, \text{k} \in Z\right\}$, im = $]-\infty;-1[\ \cup\ ]1;\infty[$ e período 2π, sendo assíntotas horizontais as retas y = 1 e y = - 1, e as assíntotas verticais são as retas x= $\frac{\pi}{2} + \text{k}\pi$, k ∈ Z, como está representado pela figura 35.

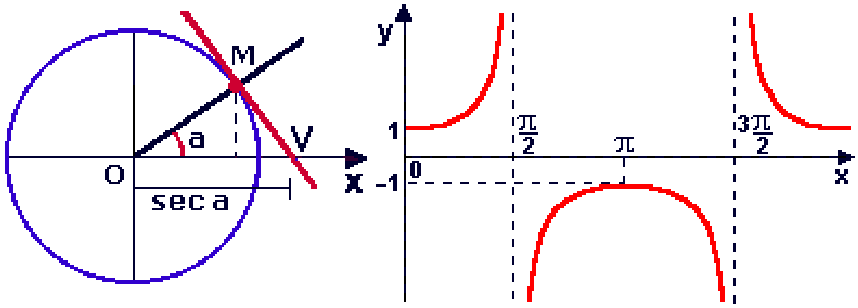

Figura 35: Função Secante

O gráfico da **função cossecante** é dado da função inversa da função seno então seu domínio é $\mathrm{R} - \{\pi + k\pi, k \in \mathrm{Z}\}$, im= $]-\infty; -1[\cup]1; \infty[$ e período 2π, sendo assíntotas horizontais as retas y = 1 e y = - 1, e as assíntotas verticais são as retas x= $\frac{\pi}{2} + k\pi$, k ∈ Z, representada pela figura 36.

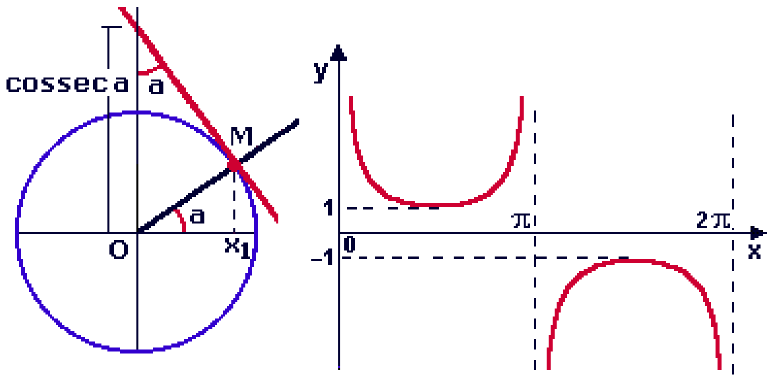

Figura 36: Gráfico da Função Cossecante

Invertendo a função tangente tem o domínio $\mathrm{R} - \{\pi + k\pi, k \in \mathrm{Z}\}$, imagem R e período π, representado pela figura 37.

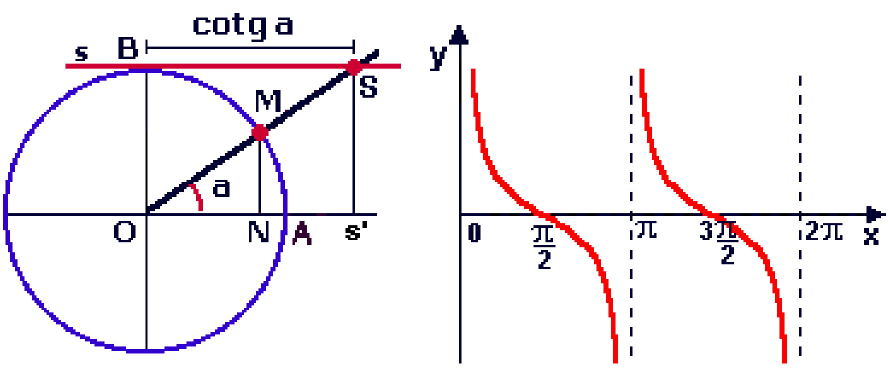

Figura 37: Gráfico da Função Cotangente

As funções inversas das funções trigonométricas, chamadas de arcsenx, arccosx, e arctgx, associam um valor da função trigonométrica a um ângulo.

3.12 Equações Trigonométricas

As equações trigonométricas aparecem naturalmente na solução de problemas de geometria, quando a incógnita é um ângulo, logo a solução das equações são ângulos no ciclo trigonométrico.

As equações fundamentais são senx = a, cosx = a, tgx = b, onde $-1 \leq a \leq 1$, e α é a solução da equação e representa o ângulo que possui como seno igual a.

Como os valores do seno são simétricos em relação ao eixo OY, no ciclo trigonométrico, então a solução da equação senx = a, esta nos quadrantes 1 e 2, ou nos quadrantes 3 e 4, e podem ser escritas sendo $x' = \alpha + 2k\pi$ e $x'' = \pi - \alpha + 2k\pi$, com $k \in Z$, o cosseno é simétrico em relação ao eixo OX, então a solução da equação cosx = a, é da forma:

$$x' = \alpha + 2k\pi \text{ e } x'' = 2\pi - \alpha + 2k\pi = -\alpha + 2k\pi$$

Então a solução pode ser $x = \pm\alpha + 2k\pi$ com $k \in \mathbb{Z}$.

Por sua vez a tangente é simétrica em relação a origem então a solução da equação da função tgx = b, é da forma $x' = \alpha + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

3.13 Considerações Finais

No presente Capítulo, foram definidos, os principais conceitos de trigonometria, seus teoremas e postulados, contribuindo com o professor de matemática, através de um material de apoio, que possibilite desenvolver seu conhecimento, melhorando assim o processo de ensino aprendizagem.

Capítulo 4
Aplicações Trigonométricas

Serão apresentadas nesse capítulo situações reais que podem ser formuladas e resolvidas por meio da trigonometria. Os problemas poderiam ser resolvidos por outra ferramenta, porém a escolha do método foi feito de modo a aplicação das teorias apresentadas até aqui.

4.1 O Tsunami de Sendai

A velocidade média é a razão entre a variação de duas grandezas, sendo a primeira a distância percorrida em um determinado espaço de tempo, e o próprio tempo sendo a segunda grandeza. Para determinar a distância entre dois pontos, pode-se usar como ferramenta a trigonometria, após determiná-la e marcar o tempo, determina-se a velocidade média de um corpo no espaço e tempo definidos.

Um tsunami, em japonês quer dizer "onda de porto", ou maremoto. Em latin significa mar em movimento, trata-se de uma série de ondas causadas por um grande deslocamento de água, como a que aconteceu no dia 11 de março de 2011, na cidade de Sendai no Japão, que dista 320 km a nordeste de Tókio.

O tsunami foi causado por um terremoto com intensidade de 8,9 na Escala Richter, conhecida como escala de magnitude local, atribui um número único para qualificar a quantidade de energia liberada por um sismo, sendo uma escala logarítmica de base 10. O epicentro desse terremoto foi no Oceano Pacífico a 360 km de Tóquio.

Esses maremotos tem efeito devastador pela altura que essas ondas atingem e pela velocidade que a água chegou à costa. Quando foi detectado em Tóquio, onde fica localizado o centro de controle de abalos sísmicos do Japão, o tsunami demorou cerca de 13 minutos para que a onda atingisse a costa de Sendai. Com base nessas informações e sabendo que o ângulo formado pela distância entre Tókio-Epicentro e Tóquio-Sendai é de 21º, determine a velocidade média aproximada com que o tsunami atingiu Sendai. (dados cos21º ≅ 0,934). Para resolver esse problema será representada a cidade de Sendai pelo vértice B, Tóquio pelo vértice A e o epicentro do terremoto pelo vértice C do triangulo ABC, como na figura 38.

Figura 38: Tsunami

Para encontrar a velocidade que a onda atingiu a costa do Japão, precisa-se da distância entre a cidade de Sendai e o epicentro do terremoto, representado pelo segmento BC da figura 38. Como o ângulo BÂC, é aproximadamente 21º, pode-se aplicar a **lei dos cossenos** para determinar a distância desejada. Assim, tem-se:

$$(BC)^2 = (AB)^2 + (AC)^2 - 2.(AB).(AC).\cos(B\hat{A}C)$$

$$(BC)^2 = 320^2 + 360^2 - 2.320.360.\cos 21º$$

$$(BC)^2 = 102400 + 129600 - 230400.0,934$$

$$(BC)^2 = 232000 - 215193,6$$

$$(BC)^2 = 16806,4$$

E portanto,

$$BC \cong 129,64 \text{ km}$$

Como a distância entre Sendai e o epicentro foi aproximadamente 129,64km, e o tempo para percorrer esse percurso foi de aproximadamente 13 minutos, em horas $\frac{13}{60}$, sua velocidade foi:

$$V = \frac{\text{distância}}{\text{tempo}}$$

$$V = \frac{129{,}64}{\frac{13}{60}}$$

$$V = 129{,}64 \,.\frac{60}{13} = 598{,}34 \text{ km/h}$$

A velocidade que a água atingiu a praia foi de aproximadamente 598,34 quilômetros por hora. A trigonometria tem aplicação no cálculo da distância entre dois pontos, sendo utilizada na física para encontrar um vetor resultante da soma de dois vetores, na agrimensura, entre outras atividades em que haja a necessidade de encontrar distâncias desconhecidas.

4.2 O Preço da Ponte.

Estudos mostraram a viabilidade da construção de uma ponte que liga uma cidade litorânea a uma ilha, esta muito frequentada por turistas, figura 39. Duas empresas forneceram para a prefeitura dois projetos distintos para a construção: o primeiro projeto, do ponto P até o ponto I e o segundo projeto vai ligar o ponto Q até o I.

Figura 39: Ponte

Os pontos P e Q pertencem à costa da cidade, e distam 2400 metros um do outro, e o ponto I pertencente à ilha. Se a ponte for construída do P até o ponto I, o ângulo formado por ela e pela reta PQ é IPQ =45º, e se for construída do ponto Q até o ponto I, seu ângulo será IQP = 60º, como está representado na figura 40.

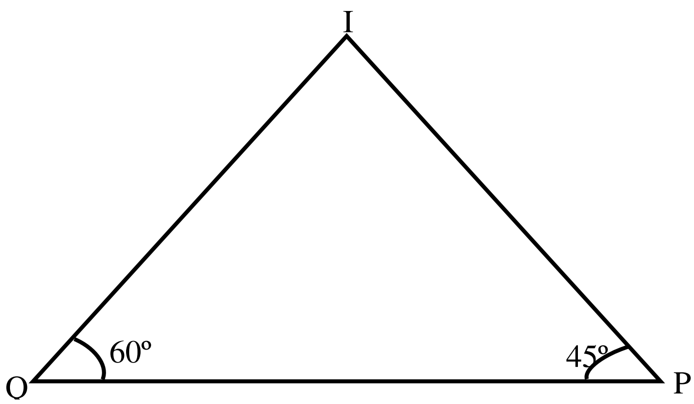

Figura 40: Projeto da Ponte

O custo final aproximado da obra é obtido do produto do comprimento da ponte por R$ 12000,00, que é o custo de cada metro linear construído. A prefeitura da cidade irá escolher a empresar que realizar o serviço pelo menor preço. Para fazer essa escolha terá que determinar o comprimento aproximado das duas opções de ponte, e para isso será usada a **lei dos senos** no triângulo da figura 40.

Considere o ângulo QIP = 75º, como os senos aproximados dos ângulos de 75º; 45º e 60º, são respectivamente: sen75º = 0,96, sen60º = 0,85 e sen45º = 0,7, então o comprimento aproximado das pontes que liga os pontos Q e I será:

$$\frac{\mathrm{IQ}}{\mathrm{sen}45^0} = \frac{\mathrm{QP}}{\mathrm{sen}75^0}$$

$$\frac{\mathrm{IQ}}{0,7} = \frac{2400}{0,96}$$

$$0,96.\mathrm{IQ} = 1680$$

Portanto a medida aproximada da ponte IQ = 1750 metros, e seu custo será de 1750.1200 = R$ 2.100.000,00. A ponte que liga os pontos PI tem comprimento aproximado igual a:

$$\frac{\mathrm{IP}}{\mathrm{sen}60^0} = \frac{\mathrm{QP}}{\mathrm{sen}75^0}$$

$$\frac{\mathrm{IQ}}{0,85} = \frac{2400}{0,96}$$

$$0,96.\mathrm{IQ} = 2040$$

Então a segunda ponte terá comprimento igual 2040 metros e custo final de R$ 2.448.000,00, portanto a ponte que terá o menor custo é a que ligará os pontos Q e I.

4.3 O Big Bem

A altura do ponteiro de um relógio, como o “Big Bem”, o relógio mais famoso do mundo, localizado em Londres, na Inglaterra, seus ponteiros das horas e minutos medem respectivamente 2,7 e 4,3 metros, e seu centro está situado a uma altura de 65m em relação ao solo, como pode ser observado na figura 41.

Figura 41: Big Bem

A altura do ponteiro dos minutos do relógio Big Bem, em relação ao solo, pode ser representada por uma função periódica, em função da quantidade de minutos decorridos em certa hora.

É necessário relacionar a altura do ponteiro de minutos com o tempo em minutos, em determinada hora do dia, sua altura máxima se dá em certa hora cheia, ou seja, 0 minuto, que é equivalente a hora anterior com mais 60 minutos, sendo essa altura igual 69,3m, e sua altura mínima se dá em certa hora do dia, quando os minutos representam 30 minutos, e essa altura é 60,7m.

Como a variação do ponteiro a partir, do centro, é de 4,7m acima ou abaixo do centro, e seu centro está localizado a 65m, pode-se usar então a **função seno**, multiplicada pela variação do ponteiro. Analisando a altura do ponteiro dos minutos no primeiro intervalo de tempo de 0 a 30 minutos, primeira meia volta do relógio, a altura é decrescente, e sai da altura máxima até a altura mínima, no segundo intervalo de tempo de 30 a 60 minutos, na segunda meia volta do relógio, sai de seu valor mínimo e atinge seu valor máximo. Analisando as funções trigonométricas, a que obedece essa queda e depois seu crescimento, é a função cosseno.

A função cosseno y = a + b.cos(kx), como no relógio o seu centro está localizado a 65m de altura, quando o cos(kx) = 0, a altura será de 65m. Assim tem-se que, uma função para a altura do ponteiro do relógio H(t), em função do tempo (t) medido em minutos será:

$$H(t) = 65 + b.\cos(kt)$$

Como o valor máximo e mínimo variam do valor central de 4,7 para mais ou para menos, então o cos(kx) será multiplicado por 4,7, o valor de b será:

$$b = 4,7,$$

$$H(t) = 65 + 4,7.\cos(kt)$$

A cada minuto percorrido pelo ponteiro dos minutos do relógio, o ângulo α que ele descreve a partir de um segmento de reta que estará centrado na vertical, correspondo a 6º, conforme figura 42.

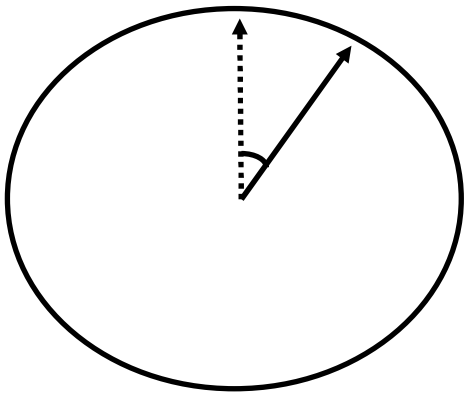

Figura 42: Relógio

O ângulo α formado entre a posição inicial do ponteiro dos minutos (0 minuto) e sua posição final, para representar a quantidade de minutos percorridos, será determinado pela relação α = t.6º, sendo t a quantidade de minutos decorridos naquela hora. Para representar esse valor em radianos, utilizando-se a proporção:

$$\frac{180^0}{t.6^0} = \frac{\pi}{\alpha \text{ radianos}}.$$

Resolvendo:

$$\alpha = \frac{\pi}{30} . \text{t radianos}$$

O valor de k da função H(t) = 65 + 4,7.cos(kt), é igual $\frac{\pi}{30}$. A função que determina a altura do ponteiro dos minutos, do relógio Big Ben, em função da quantidade de minutos percorridos, é:

$$H(t) = 65 + 4{,}7.\cos\left(\frac{\pi}{30}.t\right);$$

Sendo o tempo t dado em minutos, e a altura H em metros. Outros questionamentos podem surgir a partir desse problema, como determine a altura do ponteiro dos minutos do relógio Big Ben, as 6 horas 15 minutos. Como se passaram 15 minutos, o tempo t é igual a 15 minutos, tem-se que:

$$H(15) = 65 + 4{,}7.\cos\left(\frac{\pi}{30}.15\right)$$

$$H(15) = 65 + 4{,}7.\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$H(15) = 65 + 4{,}7.0$$

$$H(15) = 65 \text{ metros}$$

Quantos minutos após as 7 horas, o ponteiro dos minutos do relógio Big Ben atinge uma altura de 67,35m?

Têm se que:

$$H(t) = 67{,}35$$

$$67{,}35 = 65 + 4{,}7.\cos\left(\frac{\pi}{30}.t\right)$$

$$67{,}35 - 65 = 4{,}7.\cos\left(\frac{\pi}{30}.t\right)$$

$$2{,}35 = 4{,}7.\cos\left(\frac{\pi}{30}.t\right)$$

$$\frac{2{,}35}{4{,}7} = \cos\left(\frac{\pi}{30}.t\right)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{30}.t\right) = \frac{1}{2}$$

Então $\frac{\pi}{30}.t = \frac{\pi}{3}$, logo t = 10 minutos, que representa 10 minutos passados da 7 horas, portanto eram 7 horas e 10 minutos. Ou tem-se que $\frac{\pi}{30}.t = \frac{5\pi}{3}$, outro valor que t pode assumir é t = 50 minutos, sendo assim, outro horário em que o ponteiro dos minutos atinge a altura de 67,35 metros é 7 horas e 50 minutos.

4.4 O Processo Respiratório

O processo respiratório do ser humano consiste em dois movimentos a inspiração, quando o oxigênio entra pelas vias aéreas, passando pela traquéia, até os pulmões, e a expiração, quando o gás carbônico é expelido passando novamente pela traquéia.

Para apresentar um modelo para descrever o processo respiratório, considera-se que o fluxo de ar F na traquéia, em ambos os sentidos - inspiração e expiração, e a pressão interpleural P, que é a pressão existente na caixa torácica produzido pelo diafragma e por músculos intercostais, e as **funções periódicas** do tempo t, para $t > 0$, são dadas por:

$$F(t) = a.\text{sen}(\alpha t) \text{ (Fluxo de ar)}$$

$$P(t) = c - b.F(t + k/\alpha),\ a;\ c;\ b \text{ e } k \in \mathbb{R} \text{ (Pressão)}$$

- Determine o fluxo máximo de ar na traquéia, em função de a.

Como o maior valor para o seno de um número real é igual a 1, o maior valor que o fluxo pode assumir é quando o seno for máximo, ou seja, quando F(t) = a, logo $F(t)_{max}$= a.

- Qual a função P(t)?

A função da pressão interpleural é dada por P(t) = c – b.F(t + k/α), calculando F(t + k/α) = a.sen[α.(t + k/α)], logo F(t + k/α) = a.sen(α.t + k), portanto:

$$P(t) = c - b.a.\text{sen}(\alpha.t + k).$$

- As funções P(t) e F(t) tem o mesmo período?

O período da função F(t) é dado por $\frac{2\pi}{\alpha}$, pois c, é a constante que multiplica a grandeza t, e 2π o período da função t, e o período é inversamente proporcional á constante, logo o período da função P(t) é dado por $\frac{2\pi}{\alpha}$, pois a constante que multiplica a grandeza t nessa função é o α, logo as duas funções possuem o mesmo período.

4.5 Considerações Finais

Foram apresentados quatro exemplos de contextualização da trigonometria, o primeiro sendo no cálculo da velocidade do tsunami que devastou a província de Sendai, utilizando-se conceitos da física para determinar distância, seguindo para a velocidade da onda.

O segundo problema traz o do tamanho de uma ponte utilizando a lei dos senos, para auxiliar uma prefeitura na escolha, entre duas opções, da ponte que deve ser construída.

O problema que envolve curiosidade da altura do ponteiro dos minutos do relógio mais famoso do mundo o Big Bem em função da hora que está sendo marcada, relacionando esse problema com as funções trigonométricas.

Por fim o último problema envolve conceitos de saúde e trigonometria, calculando o fluxo de ar presente na traquéia em ambos os sentidos, aplicando essa continuidade a uma função trigonométrica.

Capítulo 5
Conclusão

Nessa dissertação foram relacionados de forma objetiva a história da trigonometria, sua legislação vigente, sua ementa curricular, os principais tópicos da trigonometria, assim como sugestões didáticas, através da utilização do GeoGebra, que possibilita a construção de gráficos de funções trigonométricas e aplicações em problemas reais.

Os parâmetros legais que regem o ensino da trigonometria, apresentada no Capítulo 2, assim como seus conteúdos no Estado do Mato Grosso do Sul. Os aspectos históricos da trigonometria, sugestões didáticas, através do uso da tecnologia no ensino da trigonometria.

No capítulo 3 foi exibida a fundamentação teórica dos conceitos da trigonometria, a incluir, definições, propriedades e teoremas. A lei dos senos e lei dos cossenos que são relações trigonométricas para qualquer triângulo, estendendo para as outras relações trigonométricas, soma de arcos, para o arco duplo e arco metade, relações que transforma soma em produto, nas relações trigonométricas. Ficou evidenciado a ligação existente entre os conceitos de trigonometria.

Foram exibidas, no Capítulo 4, as quatro aplicações de trigonometria, de forma precisa e clara fazendo com que o leitor entenda a importância da trigonometria e visualize possíveis aplicações da mesma. O primeiro problema Considerou a lei dos cossenos, o segundo a lei dos senos e os dois últimos foram aplicações de funções periódicas.

Como trabalhos futuros, serão aplicados, em escolas que possuem os recursos necessários, ensino da trigonometria por meio das sugestões didáticas descritas no texto, com o auxilio das ferramentas GeoGebra, lousa digital e a sala de informática, melhorando assim o índice de aproveitamento dessa disciplina, e as aprovações em exames realizados ao final do curso.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] BOYER, Carl B. História da Matemática. 2 ed. Tradução Gomide, Elza F. São Paulo: Edigard Blucher, 1996.

[2] CAMPBELL, Robert: A Trigonometria Volume 6. São Paulo: DIFEL 1961.

[3] CARMO, Manfredo Perdigão do; MORGADO, Augusto Cézar; WAGNER, Eduardo: Trigonometria Números Complexos 3 ed. Rio de Janeiro: SBM, 1992

[4] CURY, Augusto em seu livro: Pais brilhantes, professores fascinantes. 1 ed. São Paulo: SEXTANTE, 2003

[5] DANTE, Luiz Roberto: Matemática Contexto & Aplicações volume 2. 2 ed. São Paulo: SARAIVA, 2014.

[6] DEGENSZAJN, David; DOLCE, Osvaldo; IEZZI, Gelson: Matemática – Volume Único 5 ed. São Paulo: SARAIVA, 2011.

[7] EVES H., Introdução à História da Matemática. Tradução: Domingues, H. H. 4 ed. Campinas, São Paulo: Unicamp, 2004.

[8] Guidorizzi, Hamilton Luiz: Um Curso de Cálculo Volume 2. 5 ed. São Paulo: SARAIVA 2011.

[9] IEZZI, Gelson, DOLCE, Osvaldo, DEGENSZAJN, David, PÉRIGO, Roberto, ALMEIDA, Nilze de: Matemática Ciências e Aplicações Volume2. 6 ed. São Paulo: SARAIVA 2010.

[10] IEZZI, Gelson: Fundamentos de Matemática Elementar 3: Trigonometria. 9 ed. São Paulo: ATUAL 2013.

[11] Brasil, LDB - Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, Lei 9.394/96. Disponível em: URL: <http://portal.mec.gov.br/arquivos/pdf/ldb.pdf>. Acesso em: 09/2014.

[12] LOBO, Nilce M. da Costa: "A História da Trigonometria". Disponível em < http://www.ufrgs.br/espmat/disciplinas/geotri/modulo3/mod3_pdf/historia_triogono.pdf> Acesso em 09/14

[13] NACARATO, Adair Mendes, BREDARIOL, Claudia Cristiane e PASSOS, Mirian Paula Franco : TRIGONOMETRIA: uma análise da sua evolução histórica e da transposição didática desse conhecimento presente nos manuais didáticos e propostas curriculares. Disponível em URL:<

nutes2.nutes.ufrj.br/interage/download2.php?file=../arquivos/...pdf>. Acesso em:09/14.
[14] Orientações Curriculares para o Ensino Médio; Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias (volume 2)/ Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica. Brasília: 2006. Disponível em: URL: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf>. Acesso em: 06/2014.
[15] PCN + Ensino Médio: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC/Semtec, 2002.
[16] TAYLOR, Howard, WADE, Thomas: Trigonometria Contemporânea. México: LIMUSA 1976.
[17] Referencial curricular 2012 Ensino Médio /Secretaria de Educação do Estado de Mato Grosso do Sul. Campo Grande:SED/MS, 2012.
[18] SMOLE, Kátia Stocco, DINIZ, Maria Ignez: Matemática Ensino Médio Volume 2. 8 ed. São Paulo: SARAIVA 2013.

CRÉDITOS DE IMAGEM

- http://www.geraldoresende.com.br/imprensa/noticias/educacao/escola-presidente-vargas-recebe-lousas-digitais-viabilizadas-por-geraldo-resende
- https://www.google.com.br/search?q=grafico+fun%C3%A7%C3%A3o+seno&biw=1366&bih=643&tbm=isch&tbo=u&source=univ&sa=X&ved=0CBwQsARqFQoTCI_mgK3w6McCFZP9gAodqyMLYQ#imgrc=Nvxf
- https://www.google.com.br/search?q=grafico+fun%C3%A7%C3%A3o+cosseno&biw=1366&bih=643&tbm=isch&tbo=u&source=univ&sa=X&sqi=2&ved=0CBwQsARqFQoTCKfyw9nz6McCFcuXGgodQMMNUg&dpr=1#imgrc=WnaemRfQ4uEw3M%3A
- http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/trigonom/trigo07.htm
- http://www.estudavest.com.br/questoes/?resolver=340147&inicio=15.