UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
MESTRADO PROFISSIONAL

Roberto Luís Dambros

Software Interativo para o Ensino de Análise Combinatória

Campo Grande - MS

Setembro de 2015

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
MESTRADO PROFISSIONAL

Roberto Luís Dambros

Software Interativo para o Ensino de Análise Combinatória

Orientadora: Drª. Elen Viviani Pereira Spreafico

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - INMA/UFMS, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em matemática.

Campo Grande - MS

Setembro de 2015

Software Interativo para o Ensino de Análise Combinatória

Roberto Luís Dambros

Trabalho de Conclusão de Curso submetido ao Programa de Pós-Graduação em matemática em Rede Nacional do Instituto de matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em matemática.

Aprovado pela Banca Examinadora:

____

Profª Drª. Elen Vivani Pereira da Silva Spreafico – UFMS
Orientadora

____

Profª Dr. Edson Donizete de Carvalho – UNESP Ilha Solteira (São Paulo)
Primeiro Examinador

____

Profª Drª. Andréia Cristina Ribeiro – UFMS Campus Paranaíba-MS
Segundo Examinador

Campo Grande – MS, 28 de setembro de 2015

"Muito melhor é arriscar coisas grandiosas para ganhar vitórias gloriosas – mesmo que estampadas pelo fracasso – do que se alinhar com aqueles espíritos pobres que nem aproveitam muito nem sofrem muito, porque vivem em uma penumbra cinzenta que não conhece nem a vitória nem a derrota"

Theodore Roosevelt

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a DEUS por sempre me possibilitar oportunidades para que eu cresça e aprenda cada vez mais e me oportunizar ter coragem e fé para superar os eventuais obstáculos que possam surgir e tentar atrapalhar o bom andamento do caminho.

Agradeço a minha esposa que sempre foi muita compreensiva quando precisei ficar ausente ou mesmo não dar a atenção merecida em certas ocasiões.

Agradeço aos meus colegas de mestrado, Edilson e Dirceu os quais tivemos muitas horas de estudo e dedicação para concluirmos o mestrado, além da troca de conhecimentos que contribuiu e ainda contribui muito com minha aprendizagem.

Agradeço a professora Drª. Janete por ter iniciado este trabalho e a minha orientadora Drª. Elen Vivani Pereira Spreafico por ter aceito continua-lo e por suas relevantes contribuições e orientações que fizeram com que o trabalho ganhasse forma e fosse concluído.

Agradeço a professora Mª. Tânia Michel Pereira, pela sua atenção e por me possibilitar, através de seu curso [totalmente virtual que desenvolve em seu projeto de novas tecnologias, no DEFEM (Departamento de Física, Estatística e Matemática da UNIJUÍ (Universidade Regional do Noroeste do estado do Rio Grande do Sul)], me possibilitar o aprendizado para o desenvolvimento do software desta dissertação.

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho a minha família de origem, que mesmo distante fisicamente sempre está presente e quando necessito me auxilia.

Também dedico este trabalho a todos que gostam e dispendem um pouco de seu tempo para o estudo da Análise Combinatória, divertem-se e se sentem desafiados com os seus exercícios.

RESUMO

Este trabalho tem como primeiro objetivo fazer um breve histórico da Análise Combinatória, além de apresentar e demonstrar os seus princípios básicos, trazendo além dos casos comuns como princípio aditivo, princípio multiplicativo, arranjos, combinações e permutações, sendo as permutações simples, com repetições e circulares; outros tipos de raciocínios que não são explorados frequentemente tais como combinações com repetições, número de soluções de uma equação, princípio de Dirichlet, Binômio de Newton, triângulo aritmético de Tartaglia-Pascal, quantidade de divisores de um número e uma breve introdução a um novo e vasto ramo da matemática: Teoria dos Grafos. Além de demonstrar a lógica em cada um dos assuntos abordados é apresentado 23 exemplos resolvidos detalhadamente, para uma melhor compreensão do conteúdo. Como sugestão são deixadas 12 atividades para aplicar os conhecimentos, todas as atividades contextualizadas e cada uma com itens A, B, C e D. Em segundo momento é feito um estudo sobre o uso dos recursos tecnológicos na educação. E para finalizar apresenta-se uma nova ferramenta, um software interativo, criado por nós em linguagem Flash a partir deste trabalho para o ensino e aprendizagem da contagem.

Palavras-chave: Análise Combinatória. Tecnologia. Software. Contagem.

ABSTRACT

This work has the primary objective to make a brief history of Combinatorial Analysis, as well as present and demonstrate its basic principles, bringing in addition to the common cases as an additive principle, multiplicative principle, arrangements, combinations and permutations, and the simple permutations with repetitions and circular; other types of arguments that are not often explored such as combinations with repetitions, number of an equation solutions, principle of Dirichlet, binomial of Newton, arithmetic triangle Tartaglia-Pascal, number of divisors of a number and a brief introduction to a new and vast branch of mathematics: Graph Theory. In addition to demonstrating the logic in each of the topics addressed is solved examples 23 shown in detail for a better understanding of the content. As a suggestion are left 12 activities to apply the knowledge, all contextualized activities and each with items A, B, C and D. In the second moment is made a study on the use of technological resources in education. And finally presents a new tool, an interactive software, created by us in Flash language from this work for teaching and learning score.

Keywords: Combinatorial Analysis. Technology. Software. Count.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

Introdução

Atualmente, os estudantes estão cada vez menos interessados em aprender e não conseguem concentrar-se nas explicações dos professores, além de não apresentarem um comprometimento com seus deveres, e consequentemente não adquirem um aprendizado satisfatório.

Este tipo de comportamento dos estudantes normalmente está aliado à dois fatores: normalmente os conteúdos passados não são atrativos para a sua realidade e assim sendo não despertam interesse e vontade em aprender e também devido à tecnologia, que cada vez mais toma conta do cotidiano dos jovens e por muitas vezes está distante da prática pedagógica.

Na disciplina de matemática isto não é diferente, e um dos conteúdos que podem despertar uma maior vontade de aprender é a Análise Combinatória, ou como chamam os estudantes: contagem. Se unirmos a Análise Combinatória e a tecnologia para aprendermos com o auxílio dos recursos tecnológicos os estudantes poderão apresentar um maior interesse em aprender e consequentemente uma aprendizagem satisfatória.

Neste sentido, esta dissertação apresenta os princípios básicos e lógicos da Análise Combinatória demonstrando-os e apresentando exemplos em cada tipo de raciocínio, além do desenvolvimento de um software educativo para o ensino e a aprendizagem deste conteúdo.

Neste sentido, esta dissertação está estruturada desta forma:

No capítulo 1 descrevemos o que é Análise Combinatória, apresentando sua história, de onde surgiu e alguns exemplos para ilustrar.

No capítulo 2 apresentamos os princípios básicos da Análise Combinatória tais como: princípio aditivo, princípio fundamental da contagem, arranjos, combinações, permutações simples, permutações com repetições, permutações circulares, número de soluções inteiras e não negativas de uma equação, princípio de Dirichlet, Binômio de

Newton, Triângulo de Pascal e quantidade de divisores de um número, apresentando e demonstrando a teoria seguida de exemplos com soluções para um entendimento prático e fácil.

No capítulo 3 introduzimos o conteúdo de grafos, que é relativamente novo na matemática, e nosso objetivo neste capítulo é fornecer uma breve introdução deste assunto, com alguns exemplos e aplicações, para dar uma introdução a estudos posteriores.

No capítulo 4 trouxemos alguns exercícios como forma de testar os conhecimentos adquiridos de Análise Combinatória buscando que sejam todos eles contextualizados a exemplo do que acontece nos exames atuais tais como ENEM, seleção para empresas, concursos e vestibulares, todos eles com as suas soluções detalhadas.

No capítulo 5 criamos um software educativo para estudo do conteúdo de Análise Combinatória por meio dos recursos tecnológicos, além de fazermos um estudo sobre as tecnologias na educação, dando ênfase no ensino da Matemática. Neste software constam todas as atividades propostas do capítulo 4, incluindo imagens e informações em alguns exercícios mais detalhadamente, assim como as explicações dos conteúdos contidos nos capítulos 2 e 3. Este software pode ser aplicado tanto no início como no decorrer do processo de ensino e aprendizagem do conteúdo de contagem.

Finalmente encerramos com algumas perspectivas para o ensino da matemática e da Análise Combinatória com o auxílio das tecnologias.

1 O que é Análise Combinatória?

A Análise Combinatória é um conteúdo presente nos parâmetros nacionais da educação e aparenta ser um dos conteúdos mais temidos e que geram maiores dificuldades, tanto para alunos, como também para docentes do Ensino Médio. Para comprovar isto basta ir até uma escola de Ensino Médio e perguntar aos alunos e docentes qual o conteúdo mais difícil, ou que menos gostam, ou que têm maior receio, e na maioria das vezes a resposta é “contagem”, ou seja: Análise Combinatória.

Acreditamos que isto se deve ao fato de que a Análise Combinatória não pode ser padronizada como acontece em alguns conteúdos da matemática, pois cada exercício exige interpretação para poder aplicar os raciocínios. Além disso, mesmo que se decore todas as fórmulas, tais como princípio fundamental da contagem, arranjos, permutações, combinações, princípio das gavetas, Binômio de Newton, Triângulo de Pascal, Teoria dos Grafos, entre outros, a resolução dos problemas de Análise Combinatória requer acima de tudo interpretação, ou seja, é necessária uma leitura com muita atenção aos enunciados dos problemas para entender o que eles querem dizer, e a partir daí pensar em formas eficazes de realizar a contagem de todos os casos possíveis dos mesmos, sem precisar exibir um a um, já que esse último é um processo básico, porém extremamente demorado e não viável em situações que tenham diversas possibilidades.

Logo, entender a Análise Combinatória como um conteúdo em que se espera não decorar fórmulas, mas compreender os enunciados e criar mecanismos de resolver as situações problemas de uma forma simples, torná-la um conteúdo divertido e prazeroso de aprender.

Por exemplo, podemos calcular facilmente, como ganhar na mega-sena, esgotando todas as possibilidades de jogo, quantos jogos precisarei fazer? Ou seja, de quantas maneiras diferentes pode-se escolher seis entre sessenta números para jogar na mega-sena? Podemos questionar ainda se pagarmos R$24,50 para escolhermos sete números em uma única aposta, é mais ou menos vantajoso do que fazer sete jogos com seis números cada, que custa R$3,50?

Além deste exemplo, citamos a seguir mais alguns casos onde aplicamos a Análise Combinatória em situações do cotidiano, por meio dos quais podemos ter um melhor dimensionamento, e consequentemente um desfecho adequado para as situações problemas envolvidas.

- Atualmente as placas dos automóveis são formadas por três letras e quatro algarismos. A partir de 2016, os países do MERCOSUL irão padronizar as placas, estas sendo, provavelmente, formadas por quatro letras e quatro algarismos. Do sistema adotado atualmente no Brasil, para o provável sistema, a partir de 2016 para as placas dos automóveis, quantas placas a mais poderão ser confeccionadas?
- Em uma turma com trinta e cinco alunos, quantas são as possíveis escolhas para dois representantes? E se estes representantes forem um líder e um vice-líder, muda a quantidade de escolhas possíveis? Se sim, qual a diferença de escolhas possíveis?
- Quantos números de telefones de oito dígitos podem existir? No estado de São Paulo a quantidade de telefones com oito dígitos foi esgotada e para isso, acrescentou-se um novo dígito. Com este novo dígito, quantos novos números foram criados?
- Uma pessoa tem quantas formas diferentes de se vestir, se precisa escolher um entre três calçados para calçar, uma entre duas calças jeans para usar e uma entre quatro blusas para vestir?
- Qual a melhor jogada para vencer um jogo de estratégia (cartas, dados, tabuleiro)?
- Uma pessoa deixa suas meias todas desorganizadas na gaveta, e quando vai se vestir para uma festa acaba luz. Ela gostaria de estar com meias da mesma cor. Sabendo que ela tem 12 meias azuis, 8 meias amarelas, 6 meias pretas e 10 brancas, qual a menor quantidade de meias que a pessoa deve pegar para garantir ter pelo menos um par da mesma cor?
- Quantas senhas diferentes podem ser colocadas no cartão de crédito com seis algarismos? E se for uma senha de oito algarismos?
- Quatro homens e duas mulheres devem posar para uma fotografia em seis degraus de uma escada, sendo uma pessoa em cada degrau, de quantas disposições diferentes podem ser colocadas essas pessoas? E se as mulheres não podem ficar em degraus consecutivos, quantas disposições podem ser colocadas as pessoas?
- Quantos são os gabaritos possíveis, para a prova de ciências exatas do ENEM, onde tem quarenta e cinco questões e cada questão tem cinco alternativas?
- De quantos modos é possível dividir dezoito atletas em três times de seis atletas cada?

- Com sete frutas diferentes, quantas vitaminas podem ser criadas utilizando três dessas sete frutas? E se forem até três dessas sete frutas, quantas são as opções de vitaminas?

Além de resolver estes e muitos outros problemas, a Análise Combinatória serve para desenvolver o nosso raciocínio lógico-dedutivo e o pensamento matemático, pois esta é uma das áreas da matemática que, embora tenha fórmulas e padrões, o que realmente importa para se compreender este conteúdo é a capacidade de interpretar os problemas, entendendo os enunciados; e criando mecanismos e estruturas mentais para fazer a contagem dos casos possíveis, sem necessidade de fazê-los um a um, simplificando assim os cálculos e diminuindo consideravelmente o tempo de execução das tarefas.

1.1 Histórico da Análise Combinatória

Os relatos sobre o surgimento da Análise Combinatória são contraditórios. Fazendo uma análise nos livros didáticos do Ensino Médio [12], [15], [22] e [23], os mesmos omitem a parte histórica introduzindo o conteúdo diretamente por meio de resoluções de problemas e aplicação de fórmulas. Em [3] acredita-se que a Análise Combinatória se originou por meio do grego Arquimedes de Siracusa (287 a.C. - 212 a.C.) quando foi proposto o famoso problema do "estômago" que consiste em determinar de quantos modos podem ser reunidas quatorze peças planas, de diferentes formatos e tamanhos, para formar um quadrado. Segundo [3], este problema por mais de dois mil anos passou despercebido, até que recentemente provou-se que existem dezessete mil, quinhentos e doze (17512) possibilidades, ou desprezando as situações simétricas, duzentas e sessenta e oito (268) possibilidades.

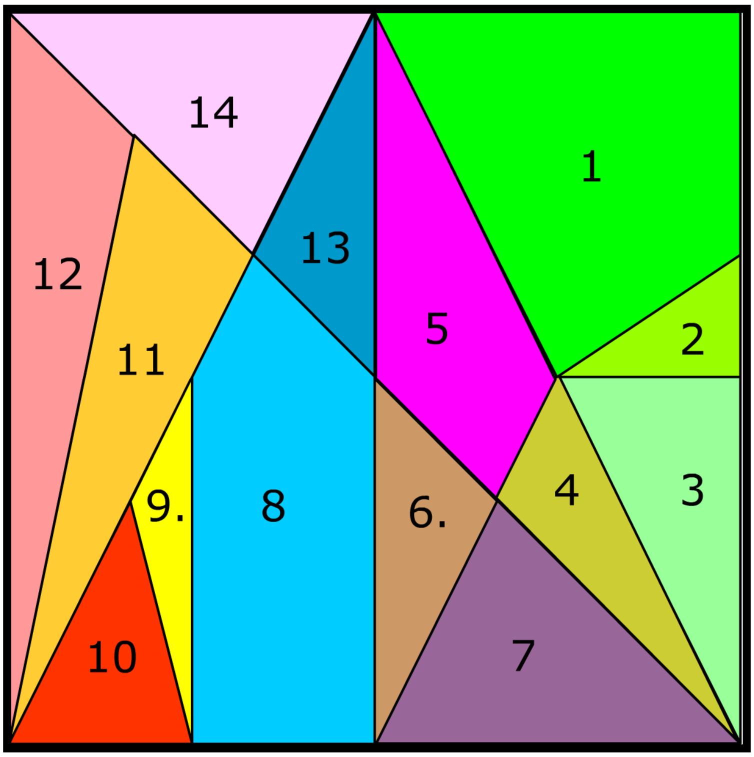

Figura 1: Problema do “estômago”, conhecido como Stomachion

Em [10] afirma-se que o desenvolvimento do binômio $(1+x)^n$ está entre os primeiros problemas estudados ligados a Análise Combinatória, onde o caso mais simples deste é encontrado nos Elementos de Euclides (aproximadamente 300 a.C.), ou seja, antes do problema do “estômago”.

Nos livros didáticos [12], [15], [22] e [23], onde o conteúdo é ensinado, notamos que a maioria dos autores aborda a Análise Combinatória como um conteúdo em que basta aplicar fórmulas para sua resolução, e desta forma, não fazem com que o aluno desenvolva o raciocínio lógico-dedutivo e aprimore o seu desenvolvimento intelectual. Ou seja, não fazem o aluno raciocinar, o que é um dos principais objetivos da Análise Combinatória, objetivo esse que ela cumpre muito bem se for ensinada/aprendida de forma coerente.

Na história da matemática, quando pesquisada como um todo, observamos diversos outros exemplos que nos indicam o uso de Análise Combinatória, tais como:

- Conforme [10], o livro Siddhanta Siromani do matemático indiano Sri Bhaskara (1114 -1185) contém no capítulo Lilavati que é um de seus mais conhecidos, alguns problemas de Análise Combinatória. Este capítulo do livro Bhaskara fez para sua filha resolver, já que ela não poderia casar-se e então ocuparia seu tempo resolvendo problemas de matemática, como por exemplo o problema de número 122 que propõe a seguinte situação: “Um rei tinha um belo palácio com oito portas. Engenheiros qualificados construiram quatro pátios abertos, enormes e brilhantes. Para conseguir mantê-los frescos as portas um, dois, três, ..., ficavam abertas. Quantos tipos diferentes de brisas poderia começar?”. No mesmo problema 122 aparece: “Quantos molhos diferentes podem ser feitos usando um, dois, três, quatro, cinco ou seis tipos de substâncias que se escolhe entre doce, amargo, adstringente, azedo, salgado e quente?”

- Conforme afirma [11], Fibonacci em seu livro Líber Abacci (1202-1228), propõe o seguinte problema: “Um casal de coelhos torna-se produtivo após dois meses de vida e, a partir de então, produz um novo casal a cada mês. Começando com um único casal de coelhos recém-nascidos, quantos casais existirão ao final de um ano?”
- Euler, em 1736, conforme [6], resolveu um problema que intrigava os matemáticos de sua época. Na Prússia, região leste da Alemanha, havia uma cidade chamada Königsberg, famosa por suas sete pontes, cinco das quais ligavam o continente a uma ilha. O problema consistia em saber se era possível dar uma volta pela cidade passando uma e somente uma vez por cada ponte, o que Euler provou ter resposta negativa. Este problema já está ligado à teoria dos grafos, outro campo de aplicação da Análise Combinatória, sobre o qual trataremos no Capítulo 3.
- Porém, um dos registros mais antigos, conforme [18], é o problema que aparece no papiro de Ahmes (1650 a.C.): “Em cada uma de sete casas, há sete gatos, cada um deles come sete ratos, cada um dos quais havia comido sete espigas de trigo, cada uma delas com sete hecates (medidas de grão). Casas, gatos, ratos, espigas e hecates, quantos são?”.
- O Quadrado Mágico, que é uma tabela quadrada de números em progressão aritmética em que a soma de cada coluna, de cada linha e das duas diagonais são iguais, conforme [17] existem registros de sua existência na China com data de 2850 a.C. Sabe-se que, na Idade Média, os quadrados mágicos se tornaram muito populares pelo seu uso em Pantáculos e Talismãs, onde eram associados a Planetas que atribuíam a eles o poder de atrair proteção astral para seus detentores.

Desta forma temos registros onde há mais de quatro mil oitocentos e sessenta e cinco anos a Análise Combinatória já era utilizada. Assim, podemos notar que a Análise Combinatória sempre esteve presente na vida de todos, certamente não com este nome, mas com a sua essência, pois mesmo antes de existir o sistema de numeração, quando a contagem de bens materiais e animais era realizada por correspondência, já estavam utilizando raciocínio de Análise Combinatória para saber ao final do dia se houve ganho ou perda. Outro exemplo de que a Análise Combinatória sempre existiu são os jogos de azar que há muito tempo servem como passatempos e/ou para alguns até como forma de rentabilidade.

Enfim, a Análise Combinatória sempre esteve presente em nossas vidas e sempre estará mesmo que sem percebermos, pois, temos que fazer escolhas constantemente. Para fazermos estas escolhas analisamos todas as possibilidades, ou seja, precisamos, muitas vezes sem perceber isso, fazer uma contagem e análise de todos os casos possíveis e decidir entre estes qual melhor se encaixa para conseguirmos o sucesso e assim atingir nosso objetivo.

2. Princípios de Análise Combinatória

Nosso objetivo neste capítulo é dar uma contribuição para uma possível desmitificação do ensino de Análise Combinatória, fazendo uma apresentação de suas principais vertentes, possibilitando assim um melhor entendimento do que é e como se resolvem as mais variadas situações problemas de Análise Combinatória.

Para começar a entender Análise Combinatória temos que saber que o mais importante não é decorar fórmulas e para resolver os problemas precisa-se, primeiramente interpretá-los. Conforme [7],

> A estratégia para resolver problemas de contagem é: 1º Postura: devemos sempre nos colocar no papel da pessoa que deve fazer a ação solicitada pelo problema e ver que decisões devemos tomar; 2º Divisão: Devemos, sempre que possível, dividir as decisões a serem tomadas em decisões mais simples, correspondentes às diversas etapas do processo de decisão; 3º Não adiar dificuldades: pequenas dificuldades adiadas costumam se transformar em imensas dificuldades. Se uma das decisões a serem tomadas for mais restrita que as demais, essa é a decisão que deve ser tomada em primeiro lugar. (p. 145-146)

Logo, podemos perceber que a Análise Combinatória precisa de um enfrentamento ao problema, uma interpretação do que o mesmo quer saber e assim partimos para a resolução, dividindo em casos, se possível, e resolvendo primeiramente as decisões mais restritas.

Apresentamos a seguir algumas linhas de raciocínios de contagem, suas demonstrações e exemplos.

2.1 Princípios Básicos de Contagem

Temos dois princípios básicos em Análise Combinatória que resolvem uma grande quantidade de problemas de forma extremamente simples que são os princípios aditivo e o fundamental da contagem, também conhecido como princípio multiplicativo.

2.1.1 Princípio Aditivo

O princípio aditivo é o princípio mais básico de Análise Combinatória e consiste no seguinte: se num determinado grupo tem 2 ou mais conjuntos que não possuem nenhum elemento em comum, ou seja, conjuntos disjuntos, sendo cada conjunto com uma quantidade (que pode ser igual ao outro conjunto) de elementos e temos que escolher um elemento do grupo, o total de possibilidades para fazer a escolha é a soma de todos os elementos de todos os conjuntos, ou seja, se A e B são dois conjuntos disjuntos $(A \cap B = \varnothing)$ com, respectivamente, m e n elementos, então $A \cup B$ possui m + n elementos.

Com rigor matemático podemos escrever que o princípio aditivo diz que: se $A_1, A_2, ..., A_n$ são conjuntos disjuntos 2 a 2, e se cada conjunto A_i possui a_i elementos, então a união $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ possui $\sum_{i=1}^{n} a_i$ elementos.

Exemplo 1: Sara foi até uma sorveteria e tinha a sua disposição seis tipos de picolé e cinco tipos de sorvete, porém sua mãe ordenou que ela escolhesse somente um picolé ou um sorvete. Quantas são as possíveis escolhas que Sara pode fazer?

Solução 1: Consideramos o conjunto A dos tipos de picolés como sendo $A = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\}$ e $B = \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5\}$ como o conjunto dos tipos de sorvete e como são conjuntos disjuntos temos que $A \cup B = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, S_1, S_2, S_3, S_4, S_5\}$ totalizando 11 possíveis escolhas para Sara.

2.1.2 Princípio Fundamental da Contagem (PFC)

O princípio fundamental da contagem diz simplesmente que: se temos ***a*** modos tomar uma decisão D_1 e, tomada a decisão D_1, temos ***b*** modos de tomar a decisão D_2, temos, então a•b (produto de a por b) modos de tomar sucessivamente as decisões D_1 e D_2.

O princípio pode ser estendido: se um evento A_i pode ocorrer de m_i maneiras diferentes para $i = 1, 2, 3, ..., n,$ então esses n eventos podem ocorrer, em sucessão de $m_1 \bullet m_2 \bullet\bullet\bullet m_n$ maneiras diferentes. Em linguagem de conjuntos, se o conjunto A_i tem cardinalidade m_i, para $i = 1, 2, 3, ..., n,$ então o produto cartesiano $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \cdots, a_n) \mid a_1 \in A_i, \text{ para } i = 1, 2, \cdots, n\}$ tem cardinalidade $m_1 \bullet m_2 \bullet\bullet\bullet m_n$.

Exemplo 2: Fernanda, ao se vestir para ir a uma festa ficou em dúvida, pois necessitava escolher um entre quatro pares de sapatos, uma entre três bermudas e uma entre sete camisas para finalizar sua vestimenta. De quantas formas diferentes Fernanda pode escolher sua vestimenta?

Solução 2: Consideramos o conjunto dos pares de sapato como sendo $A = \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$, o conjunto das bermudas como $B = \{B_1, B_2, B_3\}$ e o conjunto das camisetas $C = \{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7\}$. Logo, pelo princípio fundamental da contagem, basta fazer o produto da cardinalidade dos conjuntos A, B e C, ou seja 4•3•7=84 formas diferentes Fernanda tem se vestir com as opções de sapatos, bermudas e camisetas que possui.

A partir de ambos os princípios (aditivo e multiplicativo) é possível resolver vários problemas. Alguns casos mais frequentes são separados e classificados, sendo que para estes existem ferramentas de contagem especificas, tais como: arranjos, combinações (simples e complementares), permutações (simples, com repetição e circulares), número de soluções de uma equação, princípio de Dirichlet, Binômio de Newton, triângulo aritmético de Tartaglia-Pascal, quantidade de divisores de um número, grafos, entre outros que detalharemos a seguir.

2.2 Arranjos e Combinações

Até o momento vimos exemplos dos princípios básicos, que são os princípios aditivo e multiplicativo e mais a frente estudaremos as permutações, que em ambos os casos, utilizamos todos os elementos do conjunto, ou seja, se um conjunto tem oito elementos e utilizamos todos eles, é um problema que se resolve pelos princípios básicos ou por permutação (que é o princípio fundamental da contagem estendido com pequenas observações), desde que entendamos o enunciado saberemos por qual resolver.

Entretanto grande parte dos problemas de Análise Combinatória deriva do fato de termos um conjunto com “x” elementos e termos que escolher “x-y” elementos deste conjunto para formar o (s) grupo (s) de resposta e quando isso acontece, ou seja, quando não utilizamos todos os elementos do conjunto temos um caso de combinação (se não importar a ordem dos elementos a serem escolhidos) ou de arranjo (caso o grupo seja ordenado).

Embora nenhum autor apresente desta forma, eu prefiro inserir os casos de arranjos dentro da parte de combinações e sem a necessidade de decorar fórmulas, pois vamos a um exemplo simples para conseguir fazer as diferenciações necessárias.

Exemplo 3: Em um concurso de beleza com oito candidatas serão escolhidas duas destas candidatas para: A) uma ir a Paris e outra ir a Dubai; B) ambas irem à Nova York. Você consegue perceber a diferença entre as opções “a” e “b”? Se sim ótimo, se ainda não observe que na opção “a” importa a ordem, a primeira escolhida vai para um lugar e segunda vai para outro, ou seja, importa a ordem. Já na opção “b” não importa a ordem de quem foi escolhida primeira, pois ambas vão para o mesmo lugar.

Solução 3A: Quando temos um problema da opção “a” para resolver muitos autores prezam por utilizar arranjos para sua resolução, o que acredito que acaba por confundir, pois se importa a ordem, basta utilizar o princípio fundamental da contagem reduzido, ou seja, a primeira candidata pode ser escolhida de oito formas e a segunda de sete formas, ou seja: $8 \bullet 7 = 56$ formas de escolher as duas candidatas. Alguns autores utilizam a fórmula $A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$ que é exatamente o mesmo, pois teremos $A_{8,2} = \frac{8!}{(8-2)!} = \frac{8 \bullet 7 \bullet 6!}{6!} = 8 \bullet 7 = 56$

Solução 3B: Já na opção "b", temos que dividir o número total de formas por dois, pois se foi escolhida Maria e Joana ou Joana e Maria não importa a ordem, pois ambas vão para o mesmo lugar, e partindo deste princípio, que a fórmula para resolução de problemas onde não importa a ordem e sim somente o conjunto de escolhidos (o que é chamado de combinação em Análise Combinatória) surge: $C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$, já que $\frac{n!}{(n-p)!}$ é o princípio fundamental da contagem reduzido e dividimos isto por p! $\frac{\frac{n!}{(n-p)!}}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$, ou seja, dividimos por p! para não contar repetidamente as opções Maria e Joana e Joana e Maria neste caso e nos demais casos, quando tem mais de 2 elementos, fica p! pois são as combinações dos casos possíveis. Sendo assim, na opção b temos: $\frac{8!}{2!(8-2)!} = \frac{8.7}{2} = 28$ formas de escolher as duas candidatas.

Exemplo 4: Em uma corrida com dez participantes o primeiro colocado receberá cinco mil reais de prêmio, o segundo colocado receberá três mil reais de prêmio e o terceiro colocado receberá mil reais de prêmio. Quantas opções existem para a premiação? E se os prêmios, tanto para o 1º, como 2º como 3º forem todos iguais quantas opções existem?

Solução 4: No primeiro caso tem dez possibilidades para o primeiro, nove para o segundo e oito para o terceiro, ou seja: 10•9•8=720 possibilidades. Porém, se não importar a ordem, e sim somente quais serão os três, dividimos o número total de possibilidade (720) por 6 (pois 6=3!) = 120, que nada mais é do que $C_{10,3} = \frac{10!}{3!(10-3)!} = \frac{3628800}{6 \bullet 5040} = 120$

Logo, podemos perceber que se entendemos a lógica do problema, podemos resolver sem nos ater a fórmulas, apenas pensando e fazendo as contas adequadas. Cabe ressaltar que se decorarmos as fórmulas alguns exercícios podem ser mais facilmente resolvidos, mas o principal na Análise Combinatória é raciocinar, entender o enunciado para conseguir facilitar os cálculos e resolvê-los sem precisar contar caso a caso, o que muitas vezes é um processo longo, e pode levar facilmente a erros de cálculos.

2.2.1 Combinações e combinações complementares

Consideramos "n" objetos distintos. Já vimos que o número de maneiras de escolher p objetos em "n" é dado por $C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$. Este resultado é idêntico ao número de maneiras de escolhermos (n – p) objetos em "n", pois, se dos n objetos tirarmos (n – p), sobram p. Logo, $C_{n,p} = C_{n,(n-p)}$,onde $C_{n,(n-p)}$é chamada de combinação complementar de $C_{n,p}$.

Exemplo 5: A turma do professor Edilson tem 11 alunos, sendo 5 meninos que usam uniforme azul e 6 meninas que usam uniformes verdes. De quantas maneiras pode-se arrumar em fila os alunos considerando a cor dos uniformes.

Solução 5: Resolver este problema equivale a escolher 5 lugares para os meninos entre os 11 disponíveis, ou seja: $C_{11,5} = \frac{11!}{5!(11-5)!} = 462$ e os lugares restantes ficam para as meninas. Ou poderíamos ter escolhido 6 lugares para as meninas entre os 11 disponíveis: $C_{11,6} = \frac{11!}{6!(11-6)!} = 462$, logo temos que $C_{11,6} = C_{11,5} = 462$.

2.3 Permutações Simples

Permutar significa trocar, inverter a ordem, ou seja, trocar um elemento por outro do mesmo conjunto, sendo que não se pode inverter a ordem de dois elementos por um, mas somente de n elementos por n elementos, pois assim estará sendo feito a permutação dos elementos, a troca de ordem entre eles dentro do mesmo conjunto. Uma permutação de n objetos distintos é qualquer agrupamento ordenado desses objetos, de modo que, se denominamos P_n o número das permutações simples dos n objetos, então: $P_n = n(n-1)(n-2)\bullet\bullet\bullet 1 = n!$ Também definimos que $P_0 = 0! = 1$.

Para contar o número de permutação simples (onde não existe repetição dos elementos dentro de um conjunto) podemos utilizar o princípio básico, porém, se entendemos realmente o princípio básico, conseguimos padronizar a resolução de alguns tipos de problemas que resultam do seguinte raciocínio: Contar o número de permutações simples equivale à contar de quantos modos podemos ordenar, em fila, "**x**" objetos distintos. Para escolher o que fica em primeiro lugar teremos x opções, em segundo lugar teremos todas as opções menos a que foi escolhida para o 1º lugar, ou seja, (x-1) opções e seguindo esta lógica, teremos, (x)•(x-1)•(x-2)•(x-3)•...•2•1 opções a qual denotaremos por $P_x = x!$, ou seja, a permutação de x elementos é igual a x fatorial.

Exemplo 6: Quantos são os anagramas da palavra DEUS?

Solução 6: Para a primeira letra temos quatro opções de escolha, para a segunda temos três, para a terceira temos duas e para a quarta temos uma, ou seja: 4•3•2•1=24 [que nada mais é do que quatro fatorial (4!)] anagramas diferentes para a palavra DEUS.

Exemplo 7: Quantas maneiras diferentes podemos ordenar três pessoas em fila?

Solução 7: Para a primeira posição da fila temos 3 opções, para a segunda posição da fila teremos 2 e para a terceira posição da fila teremos 1, ou seja, 3•2•1=6 maneiras diferentes de ordenar três pessoas em fila.

2.4 Permutações com repetições

Temos casos de permutações com repetições, ou seja, que em um mesmo conjunto existem elementos que são repetidos, onde para contar o número de permutações que existem basta fazer o cálculo como se fossem todos os elementos diferentes (produto fatorial da quantidade total de letras conforme vimos nas permutações simples), dividindo o resultado pela quantidade de vezes, observando que também fatorial a quantidade de vezes, que se repetem os elementos (pois assim exclui-se os casos repetidos devido a existir elementos iguais). Essa divisão pela quantidade fatorial dos elementos que se repetem ocorre porque não importa a ordem, respectivamente, dos elementos repetidos, logo devemos excluir as repetições dividindo o resultado obtido através do princípio multiplicativo, pelo número de permutações dos grupos dos elementos repetidos, ou seja, pelo número de elementos em cada subconjunto. Vamos a alguns exemplos para compreendermos a ideia:

Exemplo 8: Quantos são os anagramas da palavra: assistir?

Solução 8: Como a palavra assistir possui oito letras, se fossem todas as letras diferentes, o total de anagramas seriam 40320 (resultado de $8!=8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=40320$), porém o "s" aparece três vezes, o que significa que no resultado obtido acima (8!) existem anagramas repetidos, e como o "s" aparece 3 vezes é necessário dividir por 3! e o "i" aparece duas vezes, logo $3!=6$ e $2!=2$, portanto temos que dividir o 40320 pelo produto de $3!=6$ e de $2!=2$, ou seja $40320\div12=3360$ anagramas para a palavra assistir. Essa divisão por 3! e por 2!, conforme explicado acima ocorre porque não importa a ordem, dos "s" e dos "i", logo devemos excluir as repetições dividindo o resultado obtido através do princípio multiplicativo, pelo número de permutações dos grupos dos "s" e dos "i", ou seja, pelo número de elementos em cada subconjunto.

Exemplo 9: De quantas maneiras podemos colocar em fila 8 letras, sendo 4 letras a, 3 letras b e 1 letra c.

Solução 9: Começamos escolhendo 4 lugares dos 8 disponíveis para colocar as letras a's que fizemos por $C_{8,4}$; feito isso teremos 4 lugares vagos. Temos agora de escolher 3 lugares para os 3 b's dentre estes 4 vagos que fizemos de $C_{4,3}$ maneiras diferentes, restando apenas uma maneira para a colocação da letra c; Logo teremos: $C_{8,4} \bullet C_{4,3} \bullet C_{1,1} = \frac{8!}{4!(8-4)!} \bullet \frac{4!}{3!(4-3)!} \bullet \frac{1!}{1!(1-1)!} = \frac{8!}{4!3!1!} = 280$.

Logo, entendemos a lógica de resolução e assim padronizamos este tipo de resolução, onde o número de permutações de "n" objetos, dos quais α são iguais a A, β são iguais a B, e assim sucessivamente é: $P_{n,(\alpha,\beta,\chi..)} = \frac{n!}{\alpha!\beta!\chi!...}$.

Exemplo 10: O Grêmio, na disputa do campeonato brasileiro da série A do ano de 2015, até o dia 01 de agosto, já havia disputado 16 jogos, sendo que venceu 8, empatou 3 e perdeu 5. De quantos modos isto pode ter acontecido?

Solução 10: Esta situação equivale a uma permutação com repetição, logo teremos como resposta: $P_{16,(8,3,5)} = \frac{16!}{8!3!5!} = \frac{16.15.14.13.12.11.10.9.8!}{8!.3.2.1.5.4.3.2.1} = 720.720$, ou seja, mais de setecentos e vinte mil modos que esta situação pode ter ocorrido.

2.5 Permutações circulares

Temos também os casos de permutações circulares onde existe a necessidade de dispor os elementos em círculos e não em fila (como consideramos nas permutações simples e com repetição).

Um exemplo que pode ser dado é saber de quantos modos quatro crianças podem formar uma roda? A princípio, podemos correr o risco de pensar que a resposta seria 4!=24 modos, porém, nomeando as crianças como A, B, C e D, as rodas ABCD, BCDA, CDAB e DABC são iguais, pois na roda o que importa é a posição relativa das crianças entre si, e as rodas podem ser "giradas" de quatro modos, logo, o número de maneiras de colocar "n" objetos em círculo, de modo que as disposições que possam coincidir por rotação sejam consideradas iguais e para que não se conte mais de uma vez, temos que dividir o total de casos (n!) pela quantidade (n), ou seja, é

$$(\text{Permutação Circular})_n = \frac{n!}{n} = (n-1)!$$

Exemplo 11: De quantos modos sete crianças podem formar uma roda de ciranda?

Solução 11: Como já vimos anteriormente, este caso se enquadra em permutação circular, logo o total de modos será igual a 6!=720.

2.6 Raciocínios Aprimorados de Análise Combinatória

Os casos de princípio fundamental da contagem, permutações e combinações, como vimos acima, o qual observamos nos livros didáticos, estimamos que representam a grande maioria dos problemas de Análise Combinatória, sendo que alguns livros didáticos trazem somente estes (quando não somente parte destes), porém, existem alguns problemas que necessitam um raciocínio mais aprimorado, pensar um pouco mais para resolvê-los utilizando-se do conhecimento acima, tais como combinações com repetição.

2.6.1 Número de soluções inteiras de uma equação $x_1 + x_2 + ... + x_n = p$

Consideramos a equação $x_1 + x_2 + x_3 = 8$. Soluções inteiras e positivas (não pode ter o 0 como solução) para esta equação são ternas ordenadas (x_1, x_2, x_3) de inteiros positivos tendo soma 8. Alguns exemplos: $(1,1,6),(1,3,4),(2,3,3)$. A fim de encontrarmos todas as soluções da equação $x_1 + x_2 + x_3 = 8$ escrevemos o 8 como a soma de oito 1's, isto é: $1+1+1+1+1+1+1+1=8$. Agora temos que considerar todas as separações possíveis do 8 em 3 parcelas, sendo cada parcela de 1 número inteiro positivo. Para isto basta introduzirmos duas barras entre o 1's na expressão acima. Exemplos:

$1+|1+|1+1+1+1+1+1=8$, $1+|1+1+1+|1+1+1+1=8$, $1+1+|1+1+1+|1+1+1=8$ que representam os exemplos: $(1,1,6),(1,3,4),(2,3,3)$ citados acima. Cabe observar que cada maneira de escolhermos dois lugares dentre os sete sinais "+" que separam os 1"s irá nos fornecer uma solução para a equação $x_1 + x_2 + x_3 = 8$. A partir destas observações podemos concluir que o número total de soluções inteiras e positivas da equação é igual ao número de maneiras de escolhermos 2 entre os sete sinais "+" para neles colocar as barras separadoras. Como este número é igual a $C_{7,2} = 21$ que é o número total de soluções positivas possíveis da equação, o que nos possibilita definir que o número de soluções inteiras e positivas da equação $x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n = p$ como sendo $C_{(p-1),(n-1)}$.

Se quisermos saber o número de soluções inteiras e não negativas (incluindo o 0 como um possível valor para os x_i) basta fazermos as seguintes observações:

Soluções de $x_1 + x_2 + x_3 = 8$	Soluções de $x_1 + x_2 + x_3 = 11$
(0, 1, 7)	(1, 2, 8)
(0, 3, 5)	(1, 4, 9)
(0, 0, 8)	(1, 1, 9)

Conforme tabela acima é fácil perceber que, a cada solução em inteiros não negativos da equação $x_1 + x_2 + x_3 = 8$ corresponde uma única solução em inteiros positivos da equação $x_1 + x_2 + x_3 = 11$, o que nos possibilita definir que o número de soluções inteiras não-negativas da equação $x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n = p$ como sendo $C_{(p+n-1),(n-1)}$, ou seja, acrescenta-se "n" ao p que equivale a somar 1 em todos os termos.

Estes tipos de problemas são raríssimos, pois são os casos onde acontece a combinação com repetição, por exemplo, se temos quatro conjuntos com uma quantidade de elementos maior ou igual que "p" em cada conjunto e temos que escolher "p" elementos do total dos conjuntos estamos realizando combinações com repetições, logo se resume a fazer diversas combinações e somar as possibilidades, ou como demonstramos a equação para calcular o número de soluções inteiras não-negativas (ou positivas caso não deseje-se deixar o 0 como uma opção). Vamos a exemplos de aplicações:

Exemplo 12: A sorveteria "Sabor Inigualável" oferece doze sabores de sorvetes, do qual Pedro Henrique vai tomar um sorvete de cinco bolas, sendo que as bolas podem ter sabores iguais ou diferentes. De quantos modos Pedro Henrique pode fazer esta escolha?

Solução 12: A princípio somos tentados a dizer que a resposta é $C_{12,5} = \frac{12!}{5!(12-5)!} = \frac{12.11.10.9.8}{5.4.3.2.1} = 792$. Porém, esta reposta estaria correta se Pedro Henrique tivesse que escolher 5 sabores diferentes, mas ele pode por exemplo escolher os cinco sorvetes de chocolate, ou 3 de morango e 2 de creme. Logo, temos, como alguns autores citam uma combinação completa ou combinação com repetição que resolvemos pelo princípio do número de soluções inteiras e não negativas de uma equação. Neste caso: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} = 5$ o que resulta em: $C_{12+5-1,12-1} = C_{16,11=} \frac{(5+12-1)!}{5!(12-1)!} = \frac{16.15.14.13.12}{5.4.3.2.1} = 4368$, ou seja, uma diferença de 3576 opções caso não analisarmos com cuidado.

Exemplo 13: Na competição de atletismo da escola "Matemática é Dez" a turma do 3º ano obteve, no total, dez medalhas dentre estas de ouro, prata e bronze. Sabendo-se que essa turma recebeu pelo menos uma medalha de ouro, uma de prata e uma de bronze, quantas são as possibilidades de composição do quadro de medalhas do 3º ano?

Solução 13: Como a turma recebeu pelo menos uma de cada, sobram sete medalhas para ser divididas entre ouro, prata e bronze, ou seja, o número de medalhas de bronze somado com o número de medalhas de prata somado com o número de medalhas de bronze é igual a sete, o que nos resulta na seguinte equação: $x_1 + x_2 + x_3 = 7$, o que resulta em: $C_{9,2} = \frac{(7+3-1)!}{7!(3-1)!} = 36$.

Exemplo 14: Encontrar o número de soluções em inteiros não-negativos de $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 16$ nas quais exatamente 2 incógnitas são nulas.

Solução 14: Se exatamente duas dessas incógnitas são nulas equivale a contar o número de soluções em inteiros positivos $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 16$ que equivale a $C_{15,3} = 455$

e multiplicar por $C_{6,2} = 15$ que é o número de escolha das duas incógnitas que terão valor nulo, logo: $455.15 = 6825$ soluções possíveis.

2.6.2 Princípio de Dirichlet

Este princípio, que também é conhecido como princípio da casa dos pombos ou princípio das gavetas, tem inúmeras aplicações e resolvem muitos problemas difíceis de resolver de uma forma simples. Vamos ao princípio: se n+1 ou mais objetos são colocados em n ou menos gavetas, então pelo menos uma gaveta recebe mais de um objeto.

Exemplo 15: Em um determinado grupo, são necessárias quantas pessoas para ter certeza que pelo menos três delas faz aniversário no mesmo mês? E para garantir que existem três pessoas que fazem aniversário no mesmo dia (sem necessariamente ser no mesmo o mês, ou seja, podendo ser em meses diferentes, mas no mesmo dia) quantas pessoas são necessárias? E para garantir que tem pelo menos três pessoas que fazem aniversário no mesmo dia e mês quantas pessoas são necessárias?

Solução 15: Para usar o princípio das gavetas utilizamos o raciocínio inverso, ou seja, pensamos na pior das hipóteses, e no primeiro caso a pior das hipóteses é ter duas pessoas fazendo aniversário em cada mês, logo totaliza-se vinte e quatro pessoas, portanto são necessárias vinte e cinco pessoas para ter certeza que pelo menos três delas faz aniversário no mesmo mês. No segundo caso, a pior das hipóteses é sempre ter duas pessoas fazendo aniversário no mesmo dia, pois um mês tem no máximo 31 dias, logo temos sessenta e duas pessoas, portanto com sessenta e três pessoas garantimos que tem três pessoas que fazem aniversário num mesmo dia (sem importar o mês); No último caso, basta considerar que teremos duas pessoas para cada dia e mês, totalizando 732 pessoas, logo é necessário 733 pessoas para garantir que tem pelo menos três pessoas que fazem aniversário num mesmo dia e mês.

Exemplo 16: Pressupondo as seguintes informações: a cidade de Maquiné, no interior do Rio Grande do Sul possui entre balneários, rios, cascatas, sítios e cachoeiras um total de 73 opções de lazer para banho para uma população de 8346 habitantes. Supondo que exatamente metade dos habitantes resolvam visitar algum ponto turístico no domingo, qual o número mínimo de visitantes vai receber o ponto turístico com maior visitação.

Solução 16: Primeiramente entendamos o problema: no domingo metade da população dos 8346 habitantes, ou seja: 4173 habitantes visitarão alguma das 73 opções de lazer para banho. Fazendo uma distribuição uniforme, ou seja, o 1º vai para a opção de lazer 1, o 2º para a opção 2, o 3º para 3.... o 73º habitante para opção 73, o 74º habitante para o opção 1 (pois esgotou-se as possibilidades)... assim teremos: 8346/73=57,16; Logo, no mínimo 58 visitantes vai receber o ponto turístico que tiver maior visitação.

Exemplo 17: Provar que em qualquer grupo de 6 pessoas existe, necessariamente, um conjunto de 3 pessoas que se conhecem ou que são totalmente estranhos.

Solução 17: Consideramos a pessoa A: veremos em relação as outras pessoas: se ela conhecer a B e conhecer a pessoa C, já teremos 3 pessoas que se conhecem; Porém se a pessoa A conhece a pessoa B e não conhece a pessoa C, se ela conhecer a pessoa D já serão 3 pessoas que se conhecem, ou caso ela não conheça a pessoa D já terão 3 pessoas estranhas.

Retornaremos ao exemplo 17 no ponto de vista da Teoria dos Grafos.

2.6.3 Binômio de Newton e o triângulo aritmético de Tartaglia-Pascal

Para começar vamos primeiramente definir o que é um binômio, e conforme [21], "Chamamos binômio qualquer expressão da forma a+b, isto é, a soma de dois símbolos distintos".

Considerando inicialmente a expansão do produto $(x+y)(z+t)(w+a)=$ $xzw+xza+xzw+xza+yzw+yza+yzw+yza$ que consiste de oito termos, onde cada termo consiste de três símbolos sendo um símbolo de cada termo selecionado de cada um dos binômios, logo podemos notar, pelo princípio multiplicativo que o total de termos da multiplicação de 3 binômios, todos eles com símbolos distintos é $2^3=8$, o que nos permite concluir que o produto de "n" binômios, todos eles com símbolos diferentes consistirá numa expressão de 2^n termos, sendo cada termo com n símbolos, uma de cada binômio.

Agora se os binômios tiverem símbolos repetidos, como por exemplo:

$$\left(x+a\right)^6 = \left(x+a\right)\left(x+a\right)\left(x+a\right)\left(x+a\right)\left(x+a\right)\left(x+a\right)$$

Se os símbolos fossem diferentes, teríamos $2^6 = 64$ maneiras de selecionarmos 6 símbolos, uma de cada binômio, porém como todos os binômios são iguais a $(x + a)$ teremos termos repetidos. Por exemplo, se tomarmos o símbolo x nos 4 primeiros e o símbolo a nos 2 últimos teremos x^4a^2 que irá aparecer toda vez que o símbolo x for escolhido 4 vezes e o símbolo a 2 vezes. Concluímos que este termo, ou seja, x^4a^2 aparecerá através da combinação de 6 elementos tomados 4, ou seja, $C_{6,4} = 15$. Cabe ressaltar que todo termo consiste do produto de 6 símbolos, logo o termo geral será da forma $x^i a^j$, onde $i + j = 6$, ou seja, cada termo será da forma $x^i b^{6-i}$. Logo, podemos concluir que no Binômio de Newton, se tivermos os símbolos x e a que são números reais e n é um inteiro positivo então:

$$\left(x+a\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C_{n,k} a^k x^{n-k} = C_{n,0} a^0 x^n + C_{n,1} a^1 x^{n-1} + C_{n,2} a^2 x^{n-2} + \ldots + C_{n,n} a^n x^0 .$$

Resolvendo o exercício:

$$\begin{aligned}
&\left(x+a\right)^6 = \left(x+a\right)\left(x+a\right)\left(x+a\right)\left(x+a\right)\left(x+a\right)\left(x+a\right) \rightarrow \\
&\left(x+a\right)^6 = \sum_{k=0}^{n} C_{n,k} a^k x^{n-k} = C_{6,0} x^0 a^6 + C_{6,1} x^1 a^5 + C_{6,2} x^2 a^4 + \\
&C_{6,3} x^3 a^3 + C_{6,4} x^4 a^2 + C_{6,5} x^5 a^1 + C_{6,6} x^6 a^0 \rightarrow \\
&\left(x+a\right)^6 = a^6 + 6xa^5 + 15x^2a^4 + 20x^3a^3 + 15x^4a^2 + 6x^5a^1 + x^6
\end{aligned}$$

Observamos que: o desenvolvimento de $\left(x+a\right)^n$ possui $n+1$ elementos; Os coeficientes do desenvolvimento de $\left(x+a\right)^n$ são os elementos da linha n do triângulo aritmético de Tartaglia-Pascal que detalharemos a seguir.

Escrevendo os termos do desenvolvimento na ordem acima, isto é, ordenados segundo as potências decrescentes de a, o termo de ordem $k+1$ será $T_{k+1} = C_{n,k} a^k x^{n-k}$

Exemplo 18: Calcular o 5º termo da expansão: $\left(2+w\right)^9$.

Solução 18: $T_5 = T_{4+1} = C_{9,4} 2^4 w^{8-4} = 126.16 w^4 = 2016 w^4$.

Logo, o Binômio de Newton apresenta uma conexão com a contagem, já que seus termos independentes são os resultados das combinações de n e k onde $0 \leq k \leq n$.

O triângulo aritmético de Tartaglia-Pascal é formado com os valores de $C_{n,p}$:

$C_{0,0}$							1					
$C_{1,0}$	$C_{1,1}$						1	1				
$C_{2,0}$	$C_{2,1}$	$C_{2,2}$					1	2	1			
$C_{3,0}$	$C_{3,1}$	$C_{3,2}$	$C_{3,3}$			$\rightarrow$	1	3	3	1		
$C_{4,0}$	$C_{4,1}$	$C_{4,2}$	$C_{4,3}$	$C_{4,4}$			1	4	6	4	1	
$C_{5,0}$	$C_{5,1}$	$C_{5,2}$	$C_{5,3}$	$C_{5,4}$	$C_{5,5}$		1	5	10	10	5	1

Figura 2: Triângulo Aritmético de Tartaglia-Pascal

A partir da observação surgem três teoremas, que são na realidade características do Triângulo Aritmético de Tartaglia-Pascal:

1º: Teorema das Linhas: $C_{n,0} + C_{n,1} + C_{n,2} + \ldots + C_{n,n} = 2^n$ onde basta observar que os dois membros são iguais ao número de subconjuntos de um conjunto com "n" elementos.

2º Teorema das Colunas: $C_{n,m} + C_{n+1,m} + C_{n+2,m} + \ldots + C_{n+\alpha,m} = C_{n+\alpha+1,m+1}$, onde a soma dos elementos de qualquer coluna, do 1º elemento até algum elemento qualquer, é igual ao elemento situado na coluna à direita da considerada e na linha imediatamente abaixo.

3º Teorema das Diagonais: $C_{n,m} + C_{n+1,m+1} + C_{n+2,m+2} + \ldots + C_{n+\alpha,m+\alpha} = C_{n+\alpha+1,m+\alpha}$ onde a soma dos elementos situados na mesma diagonal, desde o elemento da 1º coluna até o de uma coluna qualquer é igual ao elemento imediatamente abaixo deste último.

Exemplo 19: Um castelo tem oito portas. De quantos modos pode ser aberto o castelo?

Solução 19: Existem $C_{8,1}$ modos de abrir uma só porta, $C_{8,2}$ modos de abrir o castelo abrindo duas portas e assim sucessivamente, ou seja, a resposta será: $C_{8,1} + C_{8,2} + ... + C_{8,8} = 2^8 - C_{8,0} = 256 - 1 = 255$ modos de abrir o castelo.

2.6.4 Quantidade de divisores de um número

Achar a quantidade de divisores de um número pode ser muito útil e também muito trabalhoso. Por exemplo, os divisores do número 10 são 1, 2, 5 e 10. Fatorando o 10 obtemos $10 = 2{\bullet}5$. Mas, se quisermos saber quantos e quais são os divisores do número 4.200, por exemplo, como faremos?

Utilizando os princípios aditivo e multiplicativo podemos facilmente chegar a resposta. Primeiramente fatoramos o número 4200, onde temos que: $4200 = 2^3{\bullet}3{\bullet}5^2{\bullet}7$. Assim, podemos considerar alguns exemplos de divisores do 4200 como sendo $2^2{\bullet}3 = 12;\ \ 5{\bullet}7 = 35;\ \ 2{\bullet}5^2 = 50$ etc; Logo notamos que nos divisores de 4200 o expoente do fator 2 pode variar de 0 a 3 $\left(2^0, 2^1, 2^2, 2^3\right)$. O expoente do fator 3 pode variar de 0 a 1 $\left(3^0, 3^1\right)$. O expoente do fator 5 pode variar de 0 a 2 $\left(5^0, 5^1, 5^2\right)$ e o expoente do fator 7 pode variar de 0 a 1 $\left(7^0, 7^1\right)$.

Então, se representarmos os divisores de 4200 como número da forma $4200 = 2^a{\bullet}3^b{\bullet}5^c{\bullet}7^d$, das observações anteriores podemos dizer que o expoente a toma valores em {0, 1, 2, 3}, resultado em 4 o número de possibilidades para o expoente a. O expoente b toma valores em {0, 1}, resultado em 2 o número de possibilidades para o expoente b. O expoente c toma valores em {0, 1, 2}, resultado em 3 o número de possibilidades para o expoente c e o expoente d toma valores em {0, 1}, resultado em 2 o número de possibilidades para o expoente d. Então, pelo princípio multiplicativo, temos $4{\bullet}2{\bullet}3{\bullet}2 = 48$ divisores do número 4200. Para saber quais são os 48 divisores basta multiplicar todos os casos possíveis.

Logo, podemos padronizar que para calcular o número de divisores de um número $N = p_1^{\alpha_1}{\bullet}p_2^{\alpha_2}{\bullet}p_3^{\alpha_3}{\bullet\bullet\bullet}p_n^{\alpha_n}$ onde os p_n's são primos e distintos utilizando o princípio multiplicativo, podemos concluir que $(\alpha_1+1)\bullet(\alpha_2+1)\bullet(\alpha_3+1)\bullet\bullet\bullet(\alpha_n+1)$ representa o número de divisores de N.

Exemplo 20: Quantos são os divisores do número 100?

Solução 20: Como $100 = 2^2 \bullet 5^2$ temos que o 10 possui $(2+1)\bullet(2+1)=9$ divisores, que são: 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50 e 100.

3 Teoria dos Grafos

Teoria dos Grafos é um conteúdo relativamente recente na matemática e apresenta inúmeras aplicações em diversas áreas, tais como pesquisa operacional, teoria da computação, química orgânica, circuitos elétricos, genética, analise numérica, física e topologia, entre outros. Através de um raciocínio diferenciado resolve-se problemas que parecem insolúveis, ou com infinitas possibilidades, onde até mesmo para resolver computacionalmente seria demorado. A Teoria dos Grafos sugere mecanismos que os tornam fácil e rápidos. Conforme [8],

> Muitas situações podem ser convenientemente descritas através de diagramas que consistem de um conjunto de pontos, juntamente com linhas que ligam alguns pares destes pontos. Por exemplo, os pontos podem representar pessoas, as linhas ligam pares de amigos; os pontos podem representar centros de comunicações, as linhas ligações entre os centros. A abstração de situações desse tipo dá lugar ao conceito grafo. (p. 1)

Atualmente, a Teoria dos Grafos é trabalhada praticamente nos livros da OBMEP (Olimpíada Brasileira de Matemática de Escola Públicas) para os alunos medalhistas que realizam um estágio de aprendizagem. No ensino regular este conteúdo não é ensinado com regularidade, apenas alguns professores o apresentam como curiosidade.

Vamos apresentar uma introdução deste vasto ramo da matemática, pertencente à Análise Combinatória, conhecendo sua origem, sua teoria, classificação, contagem e algumas aplicações, como grafos valorados. Nos ateremos a algumas classificações específicas da Teoria.

3.1 Origem da Teoria dos Grafos

Para entendermos o que é um grafo vamos ao problema mais clássico, considerado o marco fundador da teoria dos grafos: as pontes de Köninsberg.

Conforme descrito em [6], [8] e [19] Königsberg foi uma cidade fundada em 1255, onde de 1457 a 1945 foi capital e centro cultural e econômico da Prussia e uma grande cidade situada ao leste e norte do império alemão. Atualmente é a cidade de Kaliningrad e como visualizamos pelo Google Mapas o local que originou o problema ainda existe, pois o rio passa pela cidade criando uma ilha, onde atualmente existe a Cathedral de Königsberg, e depois se divide em dois ramos, sendo que nesta região existiam sete pontes, conforme indico na figura 3, sendo que na 2ª guerra mundial 2 foram destruídas e agora tem uma nova constituição delas. Logo, atualmente a configuração de pontes está diferente conforme podemos observar pela figura abaixo. Porém, havia um problema de quando existiam as 7 pontes: o povo queria saber se era possível andar por toda a cidade, saindo e retornando a mesma região de tal modo que cada ponte fosse atravessada exatamente uma única vez.

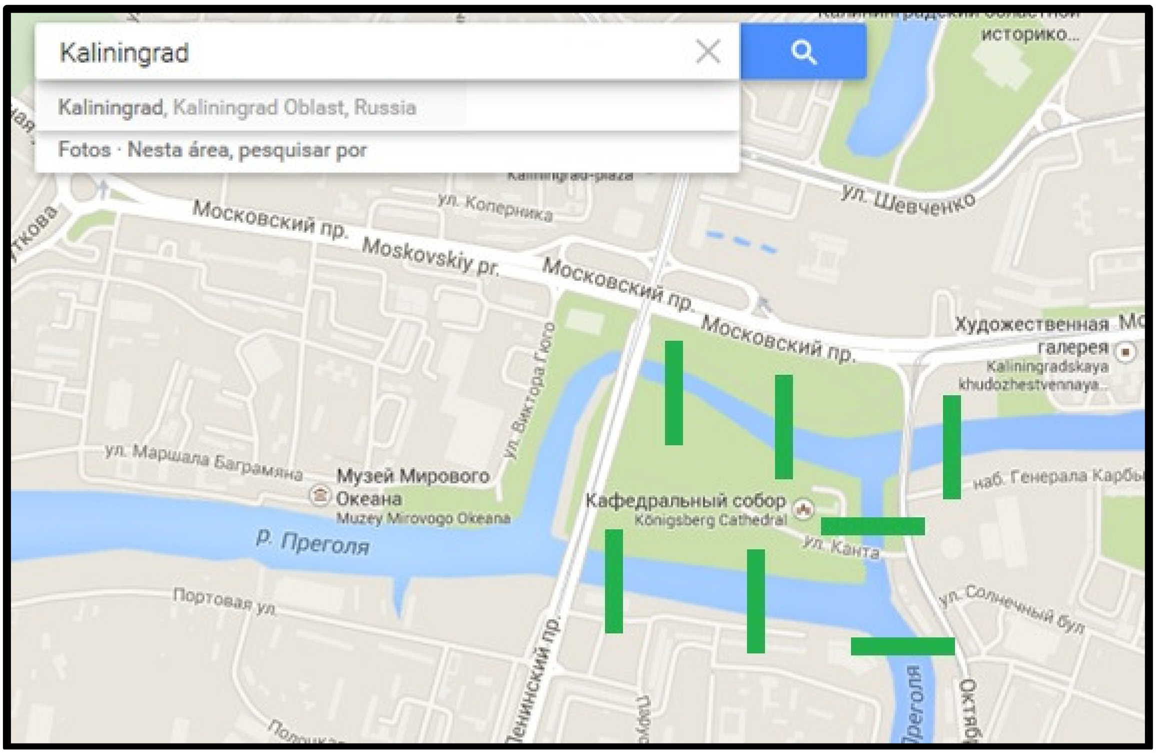

Figura 3: Mapa atual (2015) da cidade de Kaliningrad (antiga Königsberg)

Antes de prosseguirmos, vamos definir alguns conceitos:

A) Aresta: É um segmento de reta, ou seja, um caminho com início e fim de um diagrama.

B) Vértice: É um ponto comum a duas ou mais arestas.

C) Grafo: É uma estrutura matemática representada por um diagrama composta por vértices e arestas ligadas a estes vértices que representam uma situação, uma relação entre objetos.

D) O que é passar por um caminho em grafo? Passar por um caminho significa percorrer todas as arestas de um grafo sem passar duas vezes pela mesma aresta.

E) Grau de vértice: o grau de um vértice depende de quantas arestas chegam/saem deste vértice. Se um vértice possui "x" arestas chegando/saindo nele, dizemos que ele possui grau x.

Para solucionar o problema Euler sugeriu um esquema, que podemos chamar de grafo, onde em 1735 resolveu o problema das pontes de Königsberg:

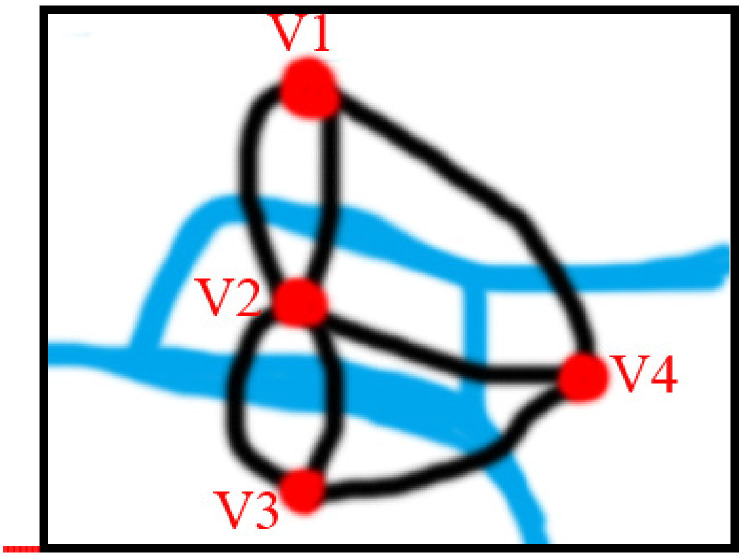

Figura 4: Esquema com vértices e arestas das pontes de Königsberg

Notamos que os vértices 1, 3 e 4 são de grau 3 e o vértice 2 de grau 5. Fica fácil observar, assim como Euler fez, que a primeira vez que você chegar a um vértice que possui três arestas você terá duas arestas restantes para sair dele, porém, quando chegar novamente neste vértice pela terceira aresta não terá por onde sair sem passar novamente por uma aresta já passada.

Logo, Euler concluiu que um vértice com um número ímpar de arestas tem de ser o primeiro ou o último da trajetória, ou seja, podem haver no máximo dois vértices com um número ímpar de arestas ligados a eles para que seja possível fechar a trajetória. Neste caso das pontes de Königsberg existem quatro vértices com uma quantidade ímpar de arestas, o que torna impossível realizar a trajetória. Este problema e sua resolução originaram a teoria dos grafos.

3.2 Teoria dos grafos

Um grafo é um esquema, um diagrama, uma figura que representamos os possíveis caminhos, trajetórias, ligações que podem ser feitos para resolver um determinado problema, onde temos os vértices que unem duas ou mais arestas (estas que podem ser segmentos de retas, curvas, circunferências ou semicircunferência dispostos das mais variadas formas) que sempre possui dois vértices como extremidade. Conforme [19],

> Um grafo é uma figura constituída de um número finito de arcos (ou curvas), chamados arcos ou arestas do grafo, cujas extremidades são chamadas de vértices do grafo. Um mesmo vértice pode pertencer a vários arcos e dois arcos só podem ter em comum um ou dois vértices de suas extremidades. As duas extremidades de um arco podem coincidir, dando lugar a um único vértice – esquerda da Figura a seguir; um grafo pode ter uma configuração espacial, como o grafo das arestas e vértices de um cubo, como no grafo do centro da figura a seguir. Se um grafo pode ser deformado, quando tem suas arestas esticadas, encolhidas ou deformadas, de modo a ser desenhado num plano, ele é chamado de grafo planar. As arestas de um cubo formam um grafo planar, que pode ser representado como na direita da figura a seguir.

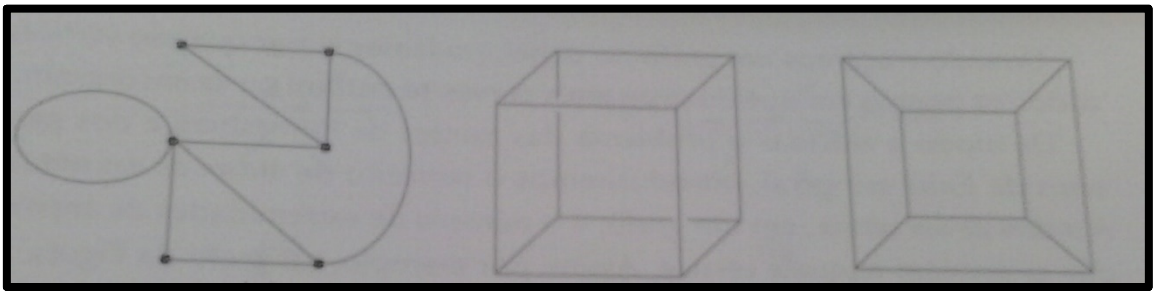

Figura 5: Grafos conforme definição de [19]

Vamos agora retornar ao exemplo 17, sob o ponto de vista da Teoria dos Grafos para sua resolução:

Exemplo 21: Problema da Amizade: Provar que em toda reunião com 6 pessoas, ou existem 3 que são 2 a 2 amigas ou existem 3 que são 2 a 2 não amigas.

Solução 21: Vamos analisar o grafo a seguir para entender a reposta: no grafo os vértices pretos representam as pessoas, as arestas azuis representam que as pessoas ligadas por elas são amigas e as arestas vermelhas representam que as pessoas ligadas por elas são não-amigas. Conforme podemos notar de cada pessoa fizemos 4 representações, duas sendo amigas e duas sendo não amigas, faltando a ligação na quinta pessoa, que será ou amiga ou não amiga, logo terá obrigatoriamente 3 que são 2 a 2 amigas ou 3 que são 2 a 2 não amigas, como queríamos demonstrar.

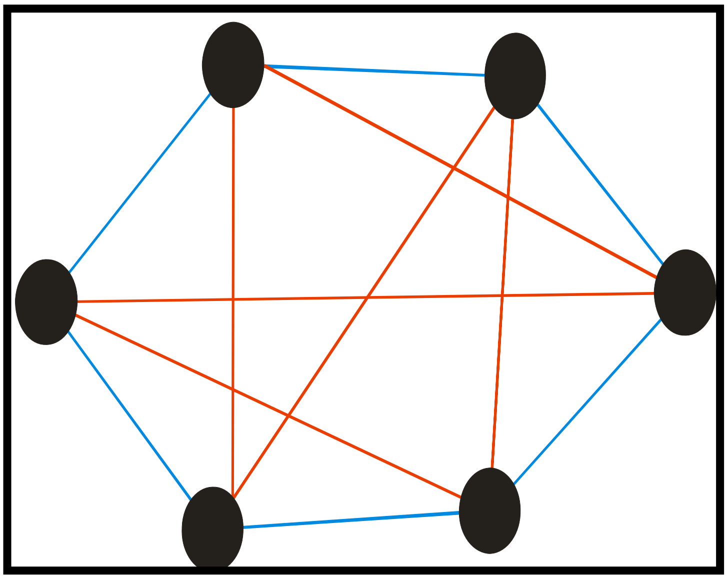

Figura 6: Inicio do desenho do grafo da amizade entre 6 pessoas

Também podemos notar que a soma dos graus dos vértices de um grafo é sempre o dobro do número de arestas, pois quando contamos os graus dos vértices estamos contando as extremidades das arestas uma vez. Como cada aresta tem duas extremidades, cada aresta foi contada duas vezes.

3.3 Classificação dos Grafos

Conforme [6] um grafo possui três classificações que foram atribuídas a Euler:

> GRAFO EULERIANO → Um grafo é Euleriano, ou seja, podemos percorrer cada aresta de um grafo uma e somente uma vez partindo de um vértice e a ele retornando se, e somente se, todos os seus vértices tem grau par.
>
> GRAFO SEMI-EULERIANO → Um grafo é semi-euleriano, ou seja, podemos percorrer cada aresta de um grafo uma e somente uma vez partindo de um vértice e finalizando em outro se, e somente se, no máximo dois vértices têm grau ímpar.
>
> GRAFO NÃO-EULERIANO → Um grafo é não-euleriano, ou seja, não existe um caminho onde podemos percorrer cada aresta de um grafo uma e somente uma vez partindo de um vértice e finalizando neste mesmo vértice, ou em outro se, e somente se, existem três ou mais vértices com grau ímpar. (2007, p. 54-58, com adaptações)

Exemplo 22: Veja as imagens a seguir e diga se é possível desenha-las sem passar duas vezes pela mesma aresta, ou seja, classifique os grafos a seguir em: Euleriano, semi-euleriano ou não-euleriano:

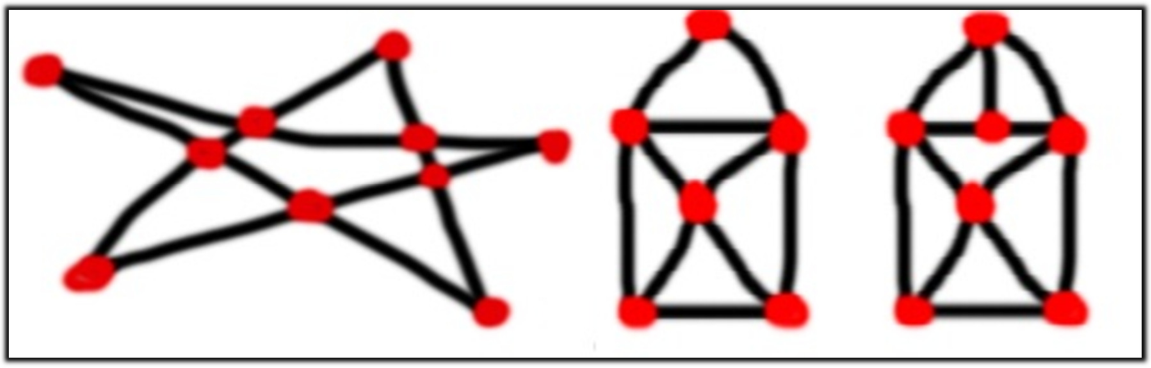

Figura 7: Grafos Variados

Solução 22: Na Figura acima a primeira imagem representa um grafo euleriano pois possui dez vértices, sendo cinco com grau dois e cinco com grau quatro, ou seja, todos os vértices têm grau par logo é possível desenhá-la sem passar duas vezes pela mesma aresta, começando e terminando no mesmo vértice. A imagem do meio é um grafo semi-euleriano, pois apresenta seis vértices, sendo dois de grau ímpar (grau 3), três de grau quatro e um de grau dois, ou seja, é possível desenhá-la sem passar duas vezes pela mesma aresta, porém começando por um vértice de grau ímpar e terminando noutro também de grau ímpar. A imagem da direita é um grafo não-euleriano, pois dos seus sete vértices três deles apresentam grau três, três apresentam grau quatro e um apresenta grau dois, logo não é possível desenhá-la sem passar duas vezes pela mesma aresta, pois três de seus vértices apresentam grau ímpar.

3.4 Grafos Valorados

Grafos valorados são grafos conforme estamos estudando até o momento, porém com uma coisa a mais: as arestas possuem valores, que podem ser representações de distâncias, preços, quantidade, tempo, custo, gastos, entre outros. Os grafos valorados são utilizados para percorrer os caminhos dos grafos de modo a constatar qual caminho é mais vantajoso, já que as arestas são valoradas, e dependendo da situação e do problema, em vez de contar e analisar todas as possibilidades, usamos o conhecimento de grafos valorados e conseguimos chegar a uma solução mais rapidamente.

Um exemplo de onde são utilizados grafos valorados é nos sistemas de GPS, pois ao calcular a rota o sistema do GPS esta verificando os possíveis caminhos (que são as arestas valoradas) entre as cidades (que são os vértices) e calcula a menor distância entre a origem e o destino.

Para resolver problemas deste tipo utiliza-se o algoritmo Dijkstra, que conforme [6] considera um conjunto dos menores caminhos, iniciado com um vértice inicial. A cada passo do algoritmo busca-se nas adjacências dos vértices pertencentes ao conjunto aquele vértice com menor distância relativa e o adiciona-o ao caminho e, então, repetindo os passos até que todos os vértices alcançáveis sejam atingidos, até completar o caminho. Arestas que ligam vértices já pertencentes ao conjunto são desconsideradas.

Exemplo 23: Veja o mapa entre as cidades A, B, C, D, E e F (que não está em escala) abaixo e diga qual o menor caminho que Elen deve tomar para se deslocar da cidade E até a cidade A:

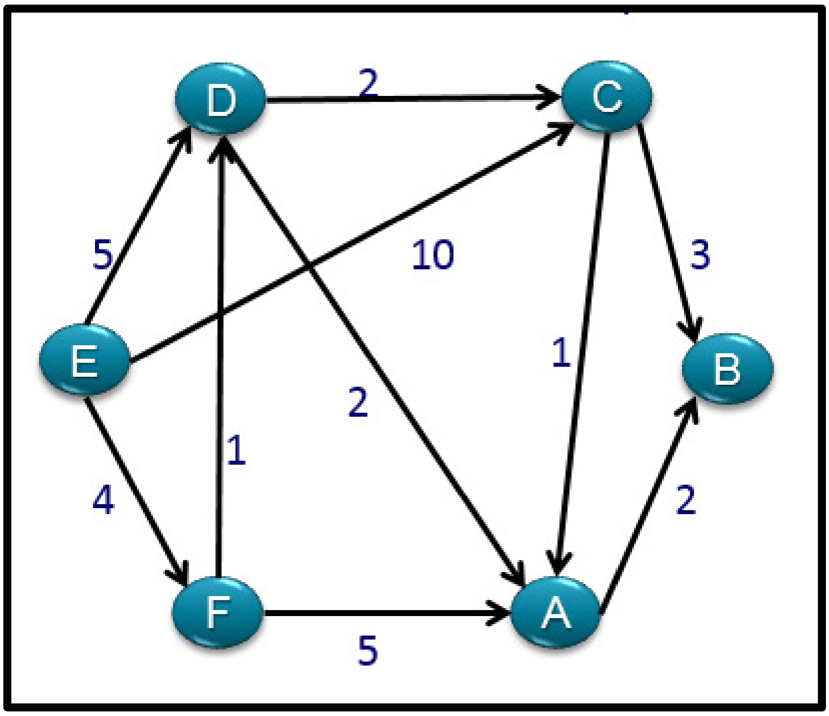

Figura 8: Mapa das Cidades A, B, C, D, E e F

Solução 23: Utilizando o algoritmo de Dijkstra vamos verificar as possibilidades: Saindo da Cidade E tem-se as seguintes possibilidade: EF – 4; EC – 10; ED – 5; Prosseguindo teremos: EFD – 5; EFA – 9; **ECB -13**; ECA – 11; EDF – 6; **<u>EDA</u>**

– 7; EDC – 7; Prosseguindo teremos: EFDA – 7; EFDC – 7; EFAC – 10; **EFAB – 11**; **ECAB – 13**; EDFA – 11; **EDAB – 9**; **EDCB – 10**; **EFDAB – 9**; **EFDCB – 10**; Logo a distância mínima será de 7, através do caminho EDA que Elen deve tomar.

4 Atividades de Análise Combinatória

Apresentamos a seguir algumas atividades para que por meio da sua resolução possamos verificar o entendimento dos conceitos introduzidos anteriormente e compor um material de consulta ao professor:

Atividade 1: Sabemos que para chegar ao sistema decimal, onde utilizamos os 10 algarismos (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0), muito precisou ser desenvolvido, desde o tempo em que a matemática era feita por correspondência biunívoca (contava-se o número de ovelhas de um rebanho através da associação de pedras colocadas numa sacola), até passando por diversos sistemas (binário que ainda hoje é base dos computadores, hexadecimal, entre outros). Mas, porque este sistema foi o escolhido? Certamente por causa da relação com a quantidade de dedos e por assim sendo ficar mais fácil os cálculos. Considerando para cada item o sistema decimal, com algumas restrições conforme enunciado, responda:

A) Quantos números de dois dígitos distintos existem? E se for um número de quatro dígitos distintos, quantos existem?

Solução: O primeiro dígito pode ser escolhido de 9 modos, pois não pode ser igual a zero. O segundo dígito pode ser o zero, porém não pode ser o que escolhido para o primeiro, logo temos 9 possibilidades também para o segundo. Portanto, basta multiplicarmos 9 por 9 que obtemos 81 números de dois dígitos distintos que existem. Dúvida? Faça contanto um a um todos os casos possíveis (10, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 23, 24, 25, ..., 98); Se forem quatro dígitos distintos teremos: $9 \bullet 9 \bullet 8 \bullet 7 = 4536$ números de quatro dígitos distintos que existem.

B) Com os números 1, 2, 3, 4, 5 e 6, quantos números de 4 algarismos podemos escrever?

Solução: Basta usar o princípio fundamental da contagem, onde para cada um dos 4 algarismos teremos 6 números como possibilidade, logo teremos $6 \bullet 6 \bullet 6 \bullet 6=1296$ algarismos que podemos escrever com os números 1, 2, 3, 4, 5 e 6.

C) Quantos números de sete algarismos podem ser formados com os números 5, 5, 5, 5, 7, 8, 8?

Resposta: Este exemplo equivale a resolver um problema de permutação com repetição, pois utilizaremos todos os elementos do conjunto, e existem elementos repetidos, logo: $P_{7,(4,1,2)} = \frac{7!}{4!1!2!} = 105$.

D) Quantos números naturais de três algarismos existem? E se forem inteiros, quantos números inteiros de três algarismos existem?

Solução: Para fazermos o cálculo da quantidade de números naturais com 3 algarismo, devemos considerar que o 1º algarismo não pode ser o zero, pois caso fosse o número só teria 3 algarismo, logo para o primeiro dígito temos 9 possibilidades, para o segundo dígito e para o terceiro dígito que pode ser o zero, teremos 10 possibilidades cada, logo teremos um total de: 9•10•10=900 números naturais com 3 algarismo e se forem inteiros esta quantidade dobra, pois serão os mesmos números, porém negativos, logo números inteiros de três algarismo serão 900•2=1800.

Atividade 2. Atualmente, com o desenvolvimento da tecnologia, surgem juntos aos diversos benefícios que nos é proporcionado, alguns problemas que antes não existiam, tais como: Um banco pode garantir ao seu cliente que esteja seguro ao realizar uma transação bancária? Se esquecer a senha de um equipamento eletrônico como fazer para recuperá-la? Tendo estas informações como base, responda as seguintes perguntas:

A) Para acessar ao site de um banco, Vitória sabe que a senha de acesso é composta de duas letras (dentre as vinte e seis do alfabeto) e quatro algarismos (de 0 a 9), respectivamente. Quantas senhas Vitória pode cadastrar nesse banco, sabendo-se que não é permitido cadastrar senhas repetidas.

Solução: Pelo princípio fundamental da contagem, para a primeira letra e para segunda letra Vitória têm 26 opções, e para os quatro algarismos finais ela têm 10 opções cada, logo basta fazer o produto de 26•26•10•10•10•10= 6.760.000, ou seja, praticamente sete milhões de senhas diferentes;

B) Considerando o item A, e se a senha for constituída de duas letras e quatro algarismos em qualquer ordem, quantas senhas diferentes podem ser criadas?

Solução: Temos que escolher agora quantos são os lugares possíveis para as letras (combinação de 6, 2 a 2) e os lugares restantes serão preenchidos pelos algarismos, ou escolher os lugares que colocaremos os algarismos (combinação de 6, 4 a 4 que equivale a combinação de 6, 2 a 2) e os lugares restantes serão preenchidos pelas letras. Logo, teremos: 15•26•26•10•10•10•10, ou seja, 101.400.000, ou seja, mais de cem milhões de senhas diferentes.

Solução errada: Se for em qualquer ordem, basta multiplicar por seis fatorial o resultado anterior, ou seja: 6.760.000•6!=4.867.200.000 (quase cinco bilhões de senhas diferentes).

C) A senha de segurança para pagamentos do banco "Confie Sempre" consiste no 5º termo da expansão do binômio $(\Delta + \nabla)^6$, onde Δ é o símbolo que corresponde a letra inicial do primeiro nome do cliente e ∇ é o símbolo que corresponde letra inicial do último sobrenome do cliente. Qual a senha de segurança do Cliente Roberto Luís Dambros neste banco?

Solução: Para saber a senha considera-se o binômio $(r+d)^6$ que corresponde as letras inicias de Roberto (primeiro nome) e Dambros (último sobrenome) e calcula-se o 5º termo da expansão: $T_5 = T_{4+1} = C_{6,4} r^4 d^{6-4} = 15 r^4 d^2$ que é a senha do cliente.

D) Miguel precisa de 30 moedas de 5 centavos e 10 centavos e solicita ao banco, que dispõe de um número ilimitado de moedas de cada um dos dois tipos que ele deseja. De quantas maneiras Miguel poderá receber as 30 moedas?

Solução: Para resolver consiste em saber quantas moedas de 5 centavos e quantas de 10 centavos Miguel vai receber. Logo consiste em saber a quantidade de soluções inteiras e não negativas da equação $x_1 + x_2 = 30$ o que equivale à $C_{29,1} = 29$.

Atividade 3. Uma brincadeira muito comum com crianças que estão sendo alfabetizadas é formar palavras com uma quantidade de letras. Por exemplo, com as letras A, V e E pode-se formar as palavras AVE, AEV, VEA, VAE, EVA e EAV, os quais cada "palavra" destas são chamadas de anagramas, logo, com as letras A, V e E temos 6 anagramas possíveis. As crianças gostaram desta brincadeira e assim continuaram:

A) Brincando com as palavras elas quiseram saber quantos são os anagramas da palavra grêmio. Quantos anagramas encontraram?

Solução: Como não tem nenhuma letra repetida na palavra grêmio, e esta palavra contêm 6 letras basta calcular a permutação de 6, que equivale a 6!=720 que é o total de anagramas da palavra grêmio.

B) Ao fazer o cálculo da quantidade de anagramas da palavra: Aquidauana as crianças encontraram 3.628.800; Elas acertaram? Porque?

Solução: As crianças erraram, pois não consideraram que a palavra Aquidauana tem letras repetidas, ou seja, Aquidauana tem 10 letras, sendo que o "a" aparece quatro vezes e o "u" aparece duas vezes, teremos que fazer o cálculo considerando uma permutação com repetição, ou seja, teremos um total de $P_{10,(4,2)} = \frac{10!}{4!2!} = \frac{3628800}{24.2} = 75600$.

C) João Pedro, uma das crianças que está sendo alfabetizada vai comprar 4 refrigerantes na cantina da escola para distribuir entre os seus amigos. Se na cantina só tem 2 tipos de refrigerantes de quantos modos ele pode comprar estes 4 refrigerantes.

Solução: Este problema equivale a resolver a seguinte equação $x_1 + x_2 = 4$ sendo que as variáveis podem ser 0, logo teremos $C_{(4+2-1),(2-1)} = C_{5,1} = 5$, ou seja, 5 possibilidades para João Pedro comprar os 4 refrigerantes.

D) Luís Otávio é um menino muito inteligente. Ela fez o desenho abaixo e começou a desenhar triângulos. Quantos triângulos com vértices nos pontos da figura são possíveis ele ter desenhado?

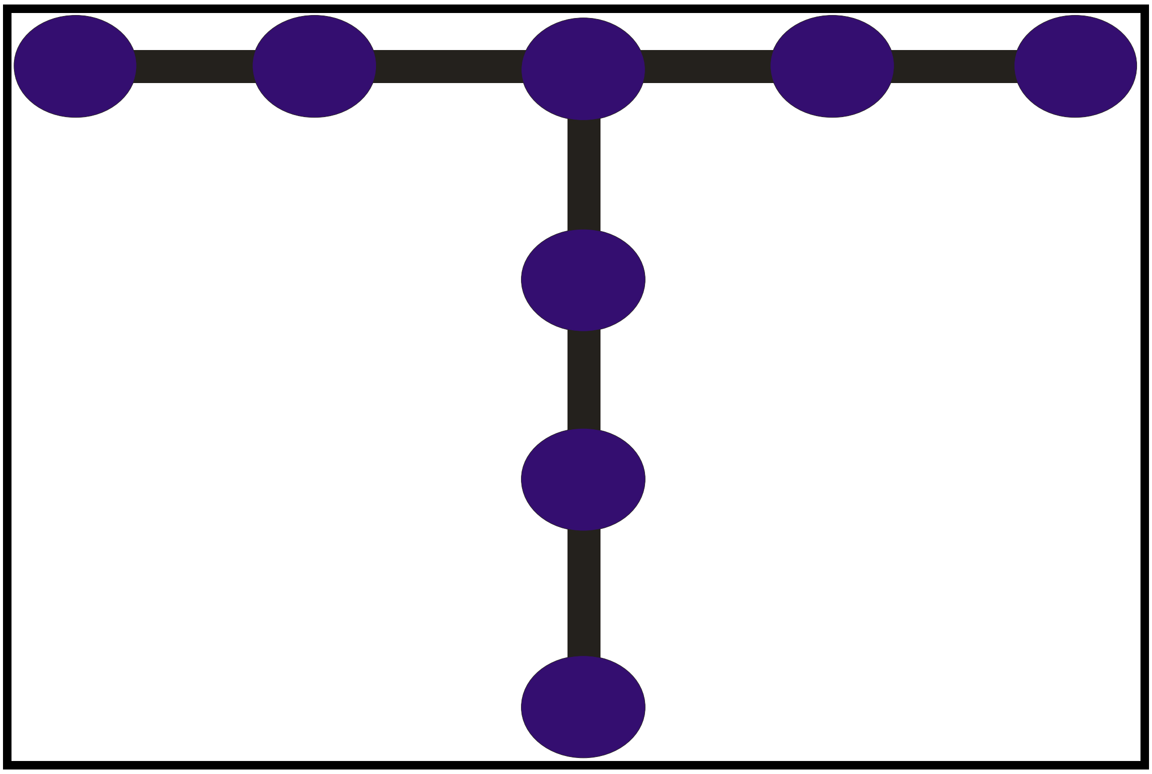

Figura 9: Figura da atividade 3A

Solução: Chamamos de A, B, C, D e E os 5 vértices da horizontal e F, G e H os 3 vértices da vertical. Para formar um triângulo precisa-se de 3 pontos não colineares, logo existem duas opções: 2 vértices na horizontal (entre os vértices A, B, C, D e E) e 1 na vertical: $C_{5,2} \cdot 3 = 10 \cdot 3 = 30$ e também temos a opção de dois vértices estarem na vertical (Consideramos somente os vértices F, G e H, pois o vértice C já foi contato anteriormente): $C_{3,2} \cdot 4 = 3 \cdot 4 = 12$. Daí basta somar as duas opções, ou seja: 30 + 12 = 42 triângulos com vértices diferentes Luis Otávio pode ter desenhado.

Atividade 4. A empresa "Aprender Sempre" está buscando aprimorar seus métodos e estratégias para ter um lucro maior, e para isso está implementando novas estratégias para alcançar o sucesso desejado. Entre estas destacamos algumas:

A) Uma de suas estratégias, é que em cada reunião que acontece todos tem que dar um abraço um ao outro para haver uma integração maior e mais confiança. Em uma reunião haviam doze pessoas e sabendo-se que cada uma abraçou a outra uma vez, quantos abraços houveram?

Solução: Se a pessoa A abraça a pessoa B é o mesmo que a pessoa B abraçar a pessoa A, logo não importa a ordem de quem abraça quem para fazermos a contagem dos abraços, e como não importa a ordem temos um problema de combinação de 12 elementos, tomados 2 a 2, logo basta fazer: $C_{12,2} = 66$.

B) A empresa está optando por formar comissões para resolver determinados problemas, e para resolução de um problema sobre fornecimento de mercadorias o chefe deve escolher entre seis homens e cinco mulheres uma comissão de cinco pessoas, com exatamente três homens. Quantas comissões diferentes o chefe pode formar?

Solução: O chefe deve escolher três dentre os seis homens (como não importa a ordem que fazer a escolha basta fazermos combinação de 6 tomados 3) e duas dentre as cinco mulheres (como não importa a ordem que fazer a escolha basta fazermos combinação de 5 tomados 2), e o multiplicar as duas possibilidades para ter o total de possibilidades: $C_{6,3} \bullet C_{5,2} = 20 \bullet 20 = 400$ comissões que podem ser formadas.

C) Já para resolver um assunto sobre promoções funcionais o chefe tem que escolher entre 6 estagiários e 4 efetivos para formar uma comissão com 3 estagiários e 2 efetivos. Quantas são as possibilidades?

Solução: Como não importa a ordem na escolha dos estagiários nem dos efetivos é um problema que resolve-se através de combinações, logo basta fazer: $C_{6,3} \bullet C_{4,2} = 20 \bullet 6 = 120$.

D) A empresa opta por bonificar os seus melhores funcionários, sendo que no último mês a funcionária Norma ganhou uma promoção e teve que escolher três brindes dentre sete possíveis. De quantas maneiras ela pode fazer esta escolha?

Solução: Como não importa a ordem de escolha dos brindes basta fazer 7•6•5 e dividir este resultado por 3!=6, já que não importa a ordem, o que equivale à $C_{7,3} = \frac{7!}{3!(7-3)!} = \frac{7.6.5}{3.2.1} = 35$ maneiras de escolher.

Atividade 5. Combinar diferentes sabores sempre foi e é uma das curiosidades do ser humano, que procura fazer novas combinações para inventar um gosto diferente, seja estas combinações feitas com sorvetes, frutas, lanches, comidas, entre outros. Sabendo disto, ajude as pessoas a contar as suas opções para variar os sabores que experimentam:

A) Carlos vai a uma sorveteria para comprar uma bola de sorvete e uma cobertura. Sabendo que existem sete sabores de sorvete e três tipos de cobertura, quantos tipos diferentes de combinação sorvete-cobertura ele poderá pedir?

Solução: Basta usar o princípio fundamental da contagem e Carlos terá 7•3=21 combinações de sorvetes-cobertura para escolher.

B) Waldineya tem nove espécies de frutas e deseja fazer uma salada de frutas contendo 3 espécies diferentes. Quantas opções de salada de frutas Waldineya pode fazer?

Solução: Como não importa a ordem de escolha das frutas, basta calcular a combinação de 9, tomados 3, ou seja: $C_{9,3} = 84$.

C) Eduardo vai até uma lanchonete que oferece aos seus clientes suco de frutas utilizando laranja, uva, maçã, abacaxi e kiwi, para produzir seus produtos, que são sucos com um único tipo de fruta ou sucos com a mistura de dois tipos de frutas. Os sucos produzidos podem conter açúcar ou adoçante. Qual a quantidade de sucos diferentes que o cliente pode optar?

Solução: De um tipo somente temos 10 opções (pois pode-se colocar açúcar ou adoçante) e de dois tipos teremos a combinação de 5 frutas tomadas 2 e o resultado multiplica-se por 2 (possibilidade de usar açúcar ou adoçante), ou seja: $C_{5,2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5.4}{2} = 10$ •2=20, logo Eduardo terá uma quantidade total de 10+20=30 opções de sucos diferentes para escolher.

D) Maria vai até outra lanchonete onde, para montar um sanduíche os clientes possuem três opções de pão: italiano, nove grãos ou integral para escolher uma, cinco opções de recheio: atum, rosbife, frango, peito de peru ou vegetariano para escolher uma, dois tipos de queijo: suíço ou chedder para escolher um, três tipos de molhos: mostarda com mel, maionese ou barbecue para escolher um. Quantos sanduiches diferentes Maria pode escolher?

Solução: Pelo Princípio Fundamental da Contagem basta multiplicar as opções de pão pelas opções de recheio pelas opções de queijo e pelas opções de molhos, ou seja, multiplicamos 3•5•2•3=90 opções de sanduiches diferentes que Maria poderá escolher dentre as opções disponíveis.

Atividade 6. Numa viagem de um navio cruzeiro existem diversas atividades para serem feitas. Fernanda em sua viagem teve que fazer diversas escolhas. Ajude Fernanda a analisar quantas opções têm para cada uma das atividades a seguir:

A) Fernanda decidiu comer uma salada de fruta, onde para montar a salada de frutas tinha a sua disposição nove frutas diferentes. Quantas saladas de frutas contendo duas ou mais frutas podem ser feitas?

Solução: Se Fernanda decidir uma salada de fruta com duas frutas ela terá que escolher 2 entre as 9, se quiser com 3 frutas terá que escolher 3 entre as 9, e assim sucessivamente ou que equivale a fazer combinação de 9 tomados 2, de 9 tomados 3, até combinação de 9 tomados 9, ou seja, basta utilizar o Teorema das Linhas e desconsiderar a combinação de 9 tomados 0 e de 9 tomados 1:

$C_{9,2} + C_{9,3} + \ldots + C_{9,9} = 2^9 - C_{9,0} - C_{9,1} = 512 - 1 - 9 = 502$ que fica bem mais fácil do que ir calculando caso por caso.

B) No salão de festa do navio existem nove lâmpadas. Qual o total de maneiras deste salão estar iluminado, sabendo que pelo menos uma lâmpada tem que estar acesa e no máximo oito podem estar acesas simultaneamente.

Solução: Se fosse calcular todas as possibilidades teríamos que fazer o cálculo de combinação de 9 tomados 2, de 9 tomados 3 até combinar de 9 tomados 8 e somar todos os casos. Porém, basta utilizar o Teorema das Linhas e desconsiderar a combinação de 9 tomados 0 e de 9 tomados 9, ou seja: basta fazermos: $C_{9,0} + C_{9,1} + C_{9,2} + \ldots + C_{9,9} = 2^9 - C_{9,0} - C_{9,9} = 512 - 1 - 1 = 510$ maneiras deste salão estar iluminado dentro das condições exigidas.

C) Fernanda observou que cinco pessoas estão na espera para serem atendidas no consultório dentário do navio, porém, só tem um sofá com três lugares disponível para que sentem. De quantas maneiras diferentes podem se sentar estas pessoas?

Solução: Como das 5 pessoas serão somente 3 que ficarão sentadas, para o primeiro lugar existem 5 opções, para o segundo lugar 4 opções e para o 3º lugar 3 opções, logo: 5•4•3=60 maneiras diferentes que estas pessoas podem sentar-se, ou simplesmente por arranjo de 5 tomados 3 que resulta também em 60 maneiras.

D) Para ir do navio até a cidade de Búzios, um bote tem capacidade para 10 pessoas, sendo que existem 5 assentos para sentar na frente e 5 assentos para sentar atrás. Dos 10 passageiros que vão andar de bote 4 preferem sentar na frente, 3 preferem sentar em algum lugar atrás e 3 não têm preferência. De quantas maneiras os lugares podem ser ocupados respeitando-se as preferências?

Solução: Para escolher os lugares dos 4 que preferem sentar na frente fizemos combinação de 5 tomados 4. Para os que preferem sentar atrás fizemos combinação de 5 tomados 3; E os três restantes, que não tem preferência temos para a primeira pessoa 3 opções, para a segunda 2 e para a terceira 1 opção, ou seja: 3! Opções. Logo, teremos um total de $C_{5,4} \bullet C_{5,3} \bullet 3! = 5 \bullet 10 \bullet 6 = 300$ maneiras de ocupar os lugares respeitando as preferências.

Atividade 7. O sistema administrativo atualmente envolve muitos fatores e exige-se muito conhecimento para dominá-lo ou mesmo para entendê-lo superficialmente, já que existe uma infinidade de regras e fatos normalmente desconhecidos. Tendo isto em vista, considere as seguintes situações:

A) Adelar, Basilio, Cristiano, Delourdes, Elena, Fabiana e Geisa disputam as vagas de síndico, subsíndico e tesoureiro do prédio onde moram. De quantas maneiras distintas estes cargos podem ser ocupados?

Solução: Como importa a ordem temos sete opções para o síndico, seis para o subsíndico e cinco para o tesoureiro, teremos portanto 7•6•5=210 maneiras distintas de ocupar os cargos.

B) Um político decide fazer quinze doações de cinco mil reais cada entre quatro instituições de caridade disponíveis, sendo que ele pode optar por dar quantas doações quiser entre as quinze (nenhuma, uma, duas, três, ... ou mesmo todas as doações para uma instituição). De quantas formas o político pode fazer esta doação?

Solução: Este problema consiste em resolver a seguinte equação: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15$, e como x_n pode ser zero temos que a resposta se dá pela fórmula de resolução do número de soluções inteiras e não negativas de uma equação, onde teremos: $C_{(15+4-1),(4-1)} = C_{18,3} = \frac{18!}{3!15!} = 816$ formas que o político tem de fazer a doação.

C) No estacionamento da Câmara Municipal da cidade “Políticos Honestos” existem 19 vagas reservadas para os vereadores. Dos 19 vereadores da cidade 8 possuem carros vermelhos, 7 possuem carros azuis e 4 possuem carros brancos, sendo todos os carros de modelos diferentes, apenas com a cor igual. De quantas maneiras os vereadores podem lotar as vagas reservadas no estacionamento de modo que os carros vermelhos fiquem nas primeiras 8 vagas, os azuis nas próximas 7 vagas e os brancos nas 4 vagas remanescentes?

Solução: Como todos os carros são distintos, temos 19! maneiras de colocar os carros no estacionamento. Porém vamos considerar indistinguíveis os carros da mesma cor, o que nos resulta em utilizarmos permutações com repetições para obter um total de $P_{19,(8,7,4)} = \frac{19!}{8!7!4!} = 24.942.060$ disposições diferentes.

D) De quantas maneiras podem ser distribuídas 8 leis para análise e 7 obras para fiscalização entre 3 vereadores, de modo que cada um dos 3 vereadores receba no mínimo 1 lei e 1 obra para fazer as verificações?

Solução: Para as leis, consiste em saber o número de soluções inteiras positivas da equação a $x_1 + x_2 + x_3 = 8$ que resulta em $C_{(8-1),(3-1)} = C_{7,2} = 21$ distribuições possíveis. Já para as obras consiste em saber o número de soluções inteiras positivas da equação a $x_1 + x_2 + x_3 = 7$ que resulta em $C_{(7-1),(3-1)} = C_{6,2} = 15$ 15 distribuições possíveis. Logo multiplicando o total de possibilidade de distribuição das leis pelo total de possibilidade da fiscalização das obras, temos $21 \cdot 15 = 315$ distribuições possíveis das leis e obras para os vereadores fazerem as verificações.

Atividade 8. João Vítor é um menino muito bagunceiro e sua mãe está sempre cobrando que ele organize suas coisas e que estude. As vezes até ele mesmo não consegue encontrar o que deseja. Ajude João Vitor a organizar seu quarto, sua estante da biblioteca e fazer seu dever de casa:

A) Na gaveta do guarda-roupa de João Vitor há oito pares de meias pretas, nove pares de meias brancas e seis pares de meias azuis. A escuridão no quarto onde está o guarda-roupa é total. Qual é o número mínimo de meias que João Vitor deve pegar para ter certeza de que um par seja de meias da mesma cor?

Solução: Pelo princípio das gavetas, basta pegar 4 meias, pois caso as três primeiras forem diferentes uma da outra, a quarta meia com certeza será igual a uma das três cores das anteriores, já que as meias servem para os dois pés, só importa a cor.

B) De quantos modos distintos, a prima de João Vitor, Melissa pode colocar 8 livros juntos em uma estante da biblioteca?

Solução: Basta utilizarmos o princípio fundamental da contagem que teremos 8!=40320.

C) Como tarefa escolar a Irmã de João Vitor, Heloisa, recebeu o seguinte desafio: marcam-se quatro pontos sobre uma reta r e cinco pontos sobre a reta s, que é paralela à reta r. Qual número de triângulos com vértices nesses pontos que podem ser construídos por Heloisa?

Solução: Para formar um triângulo precisamos de três pontos não colineares, logo temos duas opções, utilizamos dois pontos da reta r e um ponto da reta s ou um ponto da reta r e dois pontos da reta s, logo para escolher dois pontos da reta r teremos $C_{4,2} = 6$ multiplicado pelo total de pontos de S, ou seja 6•5=30; Escolhendo dois pontos da reta s termos $C_{5,2} = 10$ multiplicado pelo total de pontos de r, ou seja 10•4=40; Somando as duas possibilidades: 30+40 teremos 70 triângulos que podem ser construídos.

D) Como complementação do dever de casa, João Vitor recebeu o seguinte desafio: Quantas retas podem ser traçadas por 2 pontos das circunferências abaixo?

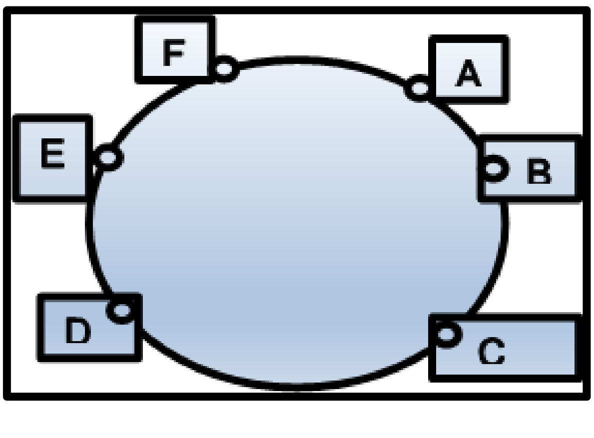

Figura 10: Figura da atividade 8D

Solução: Como a reta AF e a reta FA são a mesma reta, não importa a ordem, logo basta fazer $C_{6,2} = 15$.

Atividade 09. Elen gosta muito de viajar e sempre quando viaja, ela planeja com antecedência e analisa os percursos e caminhos que fará para conseguir economizar tempo e dinheiro e assim poder aproveitar mais. Verifique as questões a seguir de algumas viagens dela:

A) Em uma de suas viagens, Elen, que mora na cidade A, planeja visitar as cidades B, C e D e retornar a cidade onde reside sem passar duas vezes pela mesma estrada. É possível ela fazer a viagem com as condições que deseja?

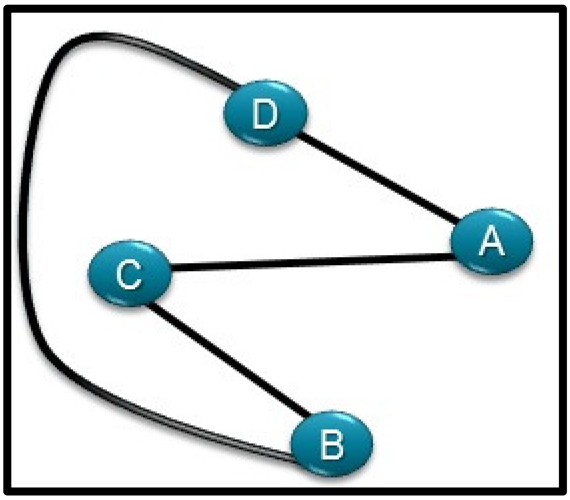

Figura 11: Figura da atividade 9A

Solução: Sim, é possível, pois, considerando a teoria dos grafos, sendo que cada cidade (A, B, C e D) é um vértice e cada estrada uma aresta, como de cada vértice saem exatamente duas arestas, logo é possível.

B) No próximo mês Elen desejar visitar as cidades E, F e G novamente sem passar duas vezes pela mesma estrada. Será possível?

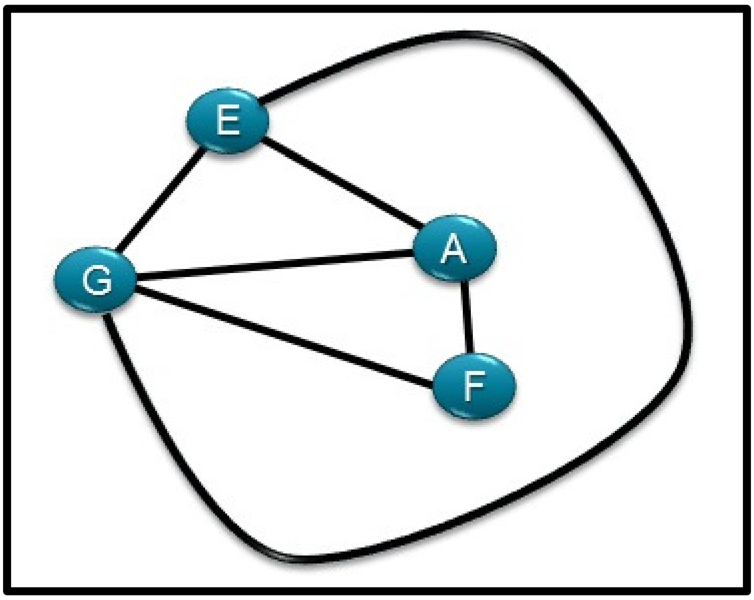

Figura 12: Figura da atividade 9B

Solução: Não, pois pela teoria dos grafos, considerando que cada cidade (A, E, F e G) é um vértice e cada estrada uma aresta, do vértice F sai duas arestas, do vértice G sai 4 arestas e dos vértices A e E três arestas, logo há possibilidade de Elen realizar seu desejo começando em A e terminando em E, mas daí ao retornar para A passaria 2 vezes pela estrada.

C) No mês passado Elen visitou as cidades H, I e J. Ela conseguiu fazer estas visitas passando por todas as 8 estradas disponíveis que interligam as cidades?

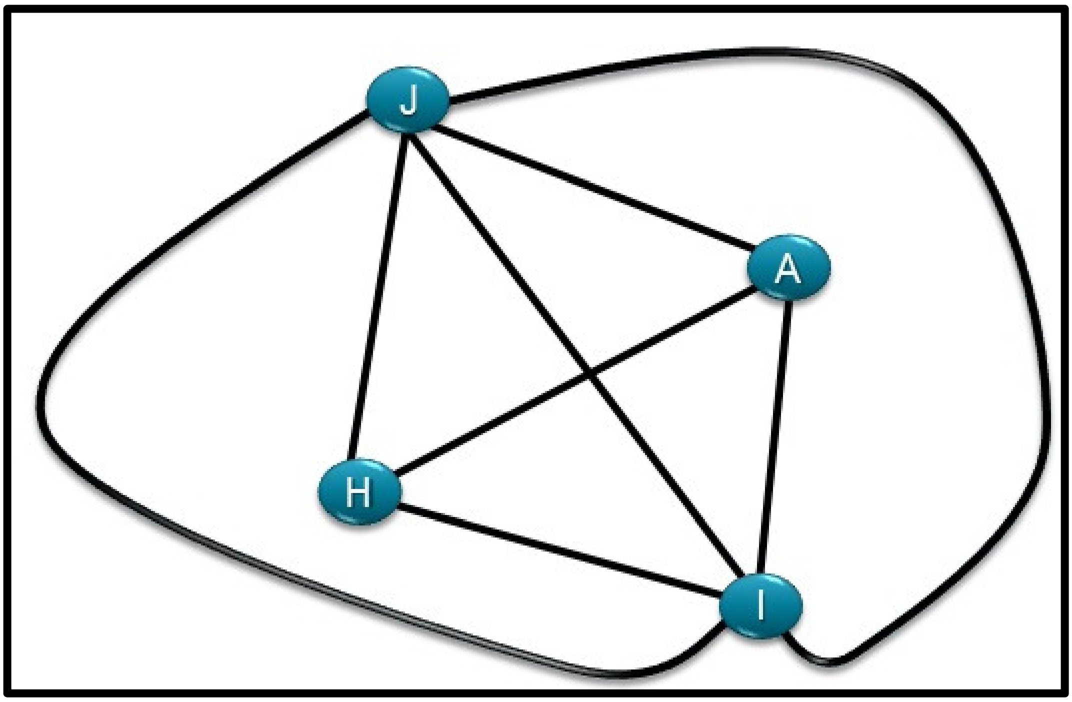

Figura 13: Figura da atividade 9C

Solução: Não, pois as cidades A e H possuem 3 estradas saindo/chegando nela e as cidade I e J possuem 5 estradas chegando/saindo nela, logo pela teoria dos grafos não é possível.

D) Para o final do Ano, Elen deseja visitar a cidade P, porém quer saber qual o menor caminho que deve seguir para chegar até a cidade P, se ela tem disponível todos os caminhos conforme mapa abaixo. Ajude Elen a encontrar o menor caminho dizendo qual o caminho e qual distância percorrida por ela?

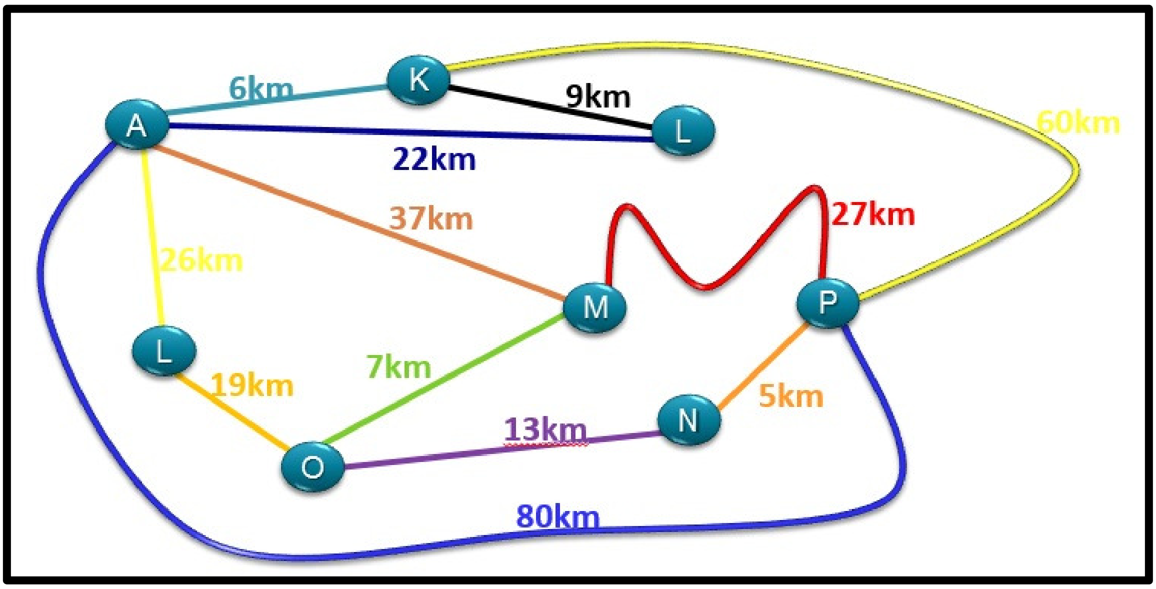

Figura 14: Figura da atividade 9D

Solução: Pela teoria dos grafos valorados o menor caminho será AMONP que resultará em 62km para Elen Percorrer.

Atividade 10. Uma das principais atividades de lazer das pessoas é viajar, e para isso sempre se tem que fazer escolhas de qual caminho deve-se tomar para chegar ao destino, considerando diversos fatores. Responda as situações a seguir:

A) Existem quatro estradas ligando duas cidades A e B, e três estradas ligando as cidades B e C. De quantos modos diferentes Melissa pode se deslocar da cidade A até a cidade C?

Solução: Basta utilizarmos o princípio fundamental da contagem que teremos 4 possibilidades para ela se deslocar de A para B e 3 possibilidades de se deslocar de B para C, logo pelo PFC Melissa tem 4•3=12 maneiras.

B) Ao fazer a mala para viajar, Edineia deve escolher quatro entre onze calças que possui. Quantas possibilidades ao todo ela tem para escolher as calças?

Solução: Como não importa a ordem que Edineia escolhe as calças, é um problema de combinação, logo basta, fazer combinação de 11 tomados 4, ou seja, $C_{11,4} = 330$ possibilidades de escolha.

C) Durante uma viagem, se encontram oito crianças que decidem formar uma roda de ciranda. De quantas formas elas podem formar esta roda?

Solução: Este é uma caso de permutação circular, logo basta fazer 7!=5040.

D) Eduarda é uma menina que tem muitos brinquedos e para viajar seus pais fizeram ela escolher 2 entre suas 15 bonecas e 3 entre 11 jogos que possui para levar para a viagem. De quantas formas Eduarda pode fazer esta escolha?

Solução. Como não importa a ordem de escolha, é um problema de combinação, onde primeiramente calcula-se as possibilidades de escolha das bonecas (combinação de 15 tomados 2) e a seguir multiplica-se este resultado pelas possibilidade de escolha dos jogos (combinação de 11 tomados 3): $C_{15,2} \bullet C_{11,3} = 105 \bullet 165 = 17325$ formas Eduarda pode fazer esta escolha.

Atividade 11. A Escola “Vontade de Saber Sempre Mais” propõe desafios para os seus alunos regularmente através de gincanas e premiando os melhores colocados. A turma de Ricardo foi a turma vencedora, onde acertou todos os desafios propostos pela escola. Prove que você também é capaz de acertar:

A) Qual é o número mínimo de pessoas que deve haver em um grupo para que possamos garantir que nele há pelos menos seis pessoas nascidas no mesmo mês?

Solução: Pelo princípio da casa dos pombos (princípio das gavetas), imaginamos a pior das hipóteses, onde no grupo existem cinco pessoas aniversariando em cada mês, logo totaliza-se sessenta pessoas, portanto, a 61ª pessoa integrará um grupo que já conta com cinco aniversariantes no mesmo mês, logo a resposta correta deste desafio é 61 pessoas.

B) A professora Sônia irá escolher três, dentre oito alunos, para fazer um passeio. De quantas maneiras ela poderá realizar esta escolha?

Solução: Como não importa a ordem de escolha dos 3 alunos, é um problema de combinação, logo: $C_{8,3} = \frac{8!}{3!(8-3)!} = \frac{8.7.6}{3.2.1} = 56$ maneiras.

C) Em uma caixa, totalmente escura, sem conseguir enxergar o que está dentro, há treze bolas do mesmo tamanho e peso, sendo quatro bolas azuis, quatro bolas vermelhas e cinco bolas pretas. Dario precisa retirar 1 bola azul da caixa. Quantas bolas Dario tem que retirar, no mínimo, para ter a certeza que uma delas é azul?

Solução: Pelo princípio das gavetas, imaginamos a pior das hipóteses, onde seria retirar todas as bolas vermelhas (4) e todas as bolas pretas (5) primeiramente, logo a próxima bola a ser retirada com certeza seria azul, portanto: 4+5+1=10 bolas no mínimo que Dario tem que retirar, no mínimo, para ter a certeza que uma delas é azul.

D) Num pomar de laranjeiras tem mais árvores que laranjas em qualquer das laranjeiras. Não existem duas laranjeiras com o mesmo número de laranjas. E também não há nenhuma laranjeira com exatas 18 laranjas. Qual é o maior número possível de laranjeiras desse pomar?

Solução: Como o problema fala que não há nenhuma laranjeira com exatas 18 laranjas, é sensato começar a observar com 18 laranjeiras. Suponhamos que temos 18 laranjeiras e 18 possibilidades de quantidades de laranja, a saber, 0, 1, 2,..., 17 que responde ao problema. Porém, caso seja maior que 18, 19, por exemplo, tem-se 19 laranjeiras e 18 possibilidades para quantidades de laranjas em laranjeiras, a saber, 0,1, 2, ..., 17 (18 não pode). O que contraria o fato de não haver laranjeiras com o mesmo número de laranjas. Logo, o número máximo é 18 laranjeiras.

Atividade 12. Colorir desenhos, fazer avaliações, dormir e organizar seus livros são algumas das atividades do cotidiano de Isadora. Ajude Isadora a resolver as seguintes situações de seu dia-a-dia:

A) Isadora recebeu como tarefa, fazer uma bandeira formada por oito listras horizontais usando apenas as cores do Grêmio (azul, preto e branco). Porém, cada listra deve ter apenas uma cor e não se podem usar cores iguais em listras adjacentes. Quantas bandeiras diferentes ela pode criar?

Solução: Para a primeira listra existem três modos de escolher a cor, e partir da segunda listra, dois modos, pois não pode ser igual ao anterior, logo temos: $3 \bullet 2^7 = 384$ modos de colorir a bandeira.

B) O professor Edilson aplicou uma prova com quinze questões de verdadeiro ou falso e Isadora gabaritou a prova, porém, sua colega não havia estudado e chutou todas as questões. De quantas maneiras distintas sua colega (que chutou as questões) pode ter respondido?

Solução: Como cada questão tem dois modos de resposta (verdadeiro ou falso), pelo princípio fundamental da contagem: $2^{15} = 32768$.

C) Como tarefa a professora deixou o seguinte desafio para turma de Isadora: quantas pessoas, no mínimo, devem morar numa casa com seis quartos, para que pelo menos duas durmam no mesmo quarto?

Solução: Basta colocar 1 pessoa em cada quarto, que com 6 pessoas cada quarto terá uma pessoa, logo a 7ª pessoa terá que dormir no mesmo quarto que uma das 6 anteriores, ou seja, pelo princípio das gavetas 7 pessoas são necessárias para que pelo menos duas durmam no mesmo quarto.

D) Um amigo mostrou a Isadora 5 livros diferentes de matemática, 7 livros diferentes de física e 10 livros diferentes de química e pediu-me para escolher 2 livros com a condição de que eles não fossem da mesma matéria. De quantas maneiras Isadora pode fazer esta escolha?

Solução: Pode fazer as seguintes escolhas: (a) matemática e física: 5.7=35 maneiras; (b) matemática e química: 5.10=50 maneiras; (c) física e química: 7.10=70 maneiras. Como as escolhas de Isadora só podem ocorrer dentre uma das possibilidades (a), (b) ou (c), então 35 + 50 + 70 = 155 foram as maneiras de fazer esta escolha.

5. RECURSOS TECNOLÓGICOS

Neste Capítulo falaremos sobre o uso da tecnologia de forma a beneficiar, interessar, propagar, problematizar e facilitar o ensino e aprendizagem de Análise Combinatória e apresentar a construção de um objeto de interação virtual com este propósito.

5.1 Uso da tecnologia no ensino e aprendizagem

Fazendo uma análise do que conhecemos e temos é considerado como um incomensurável salto de progresso dos homens das cavernas aos homens atuais, onde hoje tudo que imaginavam naquele período, provavelmente já deve ter sido criado e estamos usufruindo diariamente sem nem pensar em como teríamos que fazer se não tivéssemos disponível tal tecnologia, seja esta tecnologia desde um talher, algum mecanismo para fazer fogo, e todos os utensílios diários que utilizamos. Daqui algum tempo, o que temos hoje poderá ser considerado como pré-história e novas ideias que nem passam por nossas mentes surgirão.

A matemática é uma das ciências que mais contribui para o desenvolvimento do pensamento pois estrutura-o, além de possibilitar desenvolvimento de novas ferramentas e métodos alternativos em todas as dimensões e ambientes, o que é de grande importância na sociedade. Assim sendo, constata-se que a sociedade atual está passando por uma grande transformação e que exige cada vez mais dos indivíduos características como: cooperação, criatividade, autonomia, raciocínio lógico, pensamento evoluído, conhecimento e habilidades de lidar com situações diversas.

O fato é que com isso acabam ocorrendo mudanças em tudo, e na educação não é diferente. Um dos grandes desafios dos professores é saber utilizar os recursos tecnológicos de forma correta, fazendo com que o estudante se sinta fascinado por esta tecnologia como uma ferramenta didática e não somente como um passatempo, ou seja, usar os recursos como forma de desenvolver o pensamento, para modelar e resolver diversos problemas. O ensino com auxílio destes recursos implica que o aluno possa adquirir conceitos, aprender, buscar o conhecimento sobre qualquer assunto, ou seja, possibilita condições do aluno aprender e conforme afirma [24],

> Hoje, nós vivemos num mundo dominado pela informação e por processos que ocorrem de maneira muito rápida e imperceptível. Os fatos e alguns processos específicos que a escola ensina rapidamente se tornam obsoletos e inúteis. Portanto, ao invés de memorizar informação, os estudantes devem ser ensinados a buscar e a usar a informação. Estas mudanças podem ser introduzidas com a presença do computador que deve propiciar as condições para os estudantes exercitarem a capacidade de procurar e selecionar informação, resolver problemas e aprender independentemente. (p. 6).

Ainda conforme [24] (p. 49), “o computador deve ser usado como uma ferramenta que facilita a descrição, a reflexão e a depuração de ideias”. Nesse paradigma, as tecnologias estão cada dia mais presente em nossas vidas, sendo que se tornaram indispensáveis, e é impossível pensar na possibilidade de viver sem ela, pois imagine você viver sem celular, computador, televisão. Um excelente exemplo disto é o celular, que até quinze anos atrás era artigo de luxo, apenas quem realmente tivesse poder aquisitivo muito elevado o possuía. Hoje em dia não é fácil encontrar alguém que não possua celular e que este não seja considerado indispensável para sua própria sobrevivência. Assim, como o celular, outros equipamentos eletrônicos, tais como tablet, smartphone, videogames, notebooks e principalmente a internet se tornaram indispensáveis para acompanhar os acontecimentos e informações.

Este avanço tecnológico é de extrema importância para todos, pois, além da possibilidade de comunicação com todo o mundo, mudam a rotina, porque acabamos dependendo desta tecnologia, já que temos necessidades que anteriormente não existiam.

As mudanças do sistema de produção e dos serviços, as mudanças tecnológicas e sociais exigem um sujeito que saiba pensar, que seja crítico e que seja capaz de se adaptar às mudanças da sociedade e, principalmente, que esteja apto a trabalhar com as novas tecnologias, ou seja, temos um contexto de tecnologia que muda continuamente.

Falando um pouco mais sobre as tecnologias de informação e comunicação (conhecidas como TICs) [14] dizem que,

> As TICs não são apenas ferramentas auxiliares de trabalho. São um elemento tecnológico fundamental que dá forma ao ambiente social, incluindo o ensino da matemática. Como tal, influenciam a evolução do conhecimento e da identidade profissional do professor de matemática. Os futuros professores precisam desenvolver confiança no uso dessas tecnologias e uma atitude critica em relação a elas. Precisam ser capazes de integrá-las nas finalidades e nos objetivos do ensino da matemática. A tarefa dos programas de formação não é ajudar os futuros professores a aprender a usar essas tecnologias de um modo instrumental, mas considerar como é que elas se inserem no desenvolvimento de seu conhecimento e de sua identidade profissional. O currículo dessa disciplina proporciona aos futuros professores experiências aprofundadas de trabalho em projetos envolvendo as TICs, mas outros contextos de trabalho precisam ser criados, levando em consideração outros aspectos dessas tecnologias em rápida expansão, especialmente seu potencial para interações e trabalho colaborativo a distância. (p. 190)

As tecnologias, portanto, introduzem uma revolução fundamental na mentalidade contemporânea, não apenas pela possibilidade de acumular uma grande quantidade de informações e processá-las rapidamente, de utilizar como comunicador, transmissão de arquivos, dados, mensagens, mas também por proporcionar a simbolização e simulação de situações de grande complexidade, a construção de modelos, a experimentação virtual e, sobretudo, a oportunidade para pensar/modificar o processo de pensamento.

Nesse sentido, a tecnologia tem provocado uma revolução em todos os lugares, principalmente na educação, pela capacidade de "ensinar". As tecnologias devem ser utilizadas como um instrumento capaz de auxiliar na mudança do ensino aprendizagem, estando no sistema educacional para alimentar o processo de aprendizagem e para enriquecer ambientes de aprendizagem, onde o estudante, interagindo com os objetos desse ambiente, tem chance de construir o seu conhecimento. Nesse sentido, a escola deve preparar o estudante para a vida, e as tecnologias fazem parte da vida de todos nós atualmente.

De acordo com [25] (p. 58) "...aos poucos, o raciocínio lógico vai-se impondo sobre a intuição e a percepção, a criança organiza as informações em sistemas, relacionando-as no interior dos mesmos".

Assim sendo, as tecnologias devem ser utilizadas como instrumento de aprendizagem, onde o estudante atua e participa do seu processo de construção de conhecimentos de forma ativa. A informática deve ser posta a serviço da educação e não o contrário. Com relação à entrada da tecnologia na escola, [2] acredita que:

> (...) um dos maiores males que a escola pratica é tomar a atitude de que computadores, calculadoras e coisas do gênero não são para as escolas dos pobres. Ao contrário: uma escola de classe alta pode dar-se ao luxo de não possuir um computador. Uma escola de classe pobre necessita expor seus alunos a esses equipamentos que estarão presentes em todo mercado de trabalho do futuro imediato. Se uma criança de classe pobre não vê na escola um computador, como jamais terá oportunidade de manejá-lo em sua casa, estará condenada a aceitar os piores empregos que lhe ofereçam. [...] Ignorar a presença de computadores e calculadoras na educação matemática é condenar os estudantes a uma subordinação total a subempregos. (p.17).

Precisamos modificar os pensamentos das pessoas, para que o computador possa auxiliar no desenvolvimento humano e, conforme relato de [9],

> O re-encantamento [da educação, da arte de ensinar], enfim, não reside principalmente nas tecnologias [computadores] cada vez mais sedutoras, mas em nós mesmos, na capacidade em tornar-nos pessoas plenas, num mundo em grandes mudanças [tecnológicas e comportamentais] e que nos solicita a um consumismo devorador e pernicioso. É maravilhoso crescer, evoluir, comunicar-se plenamente com tantas tecnologias de apoio. É frustrante, por outro lado, constatar que muitos só utilizam essas tecnologias nas suas dimensões mais superficiais, alienantes ou autoritárias. O re-encantamento, em grande parte, vai depender de nós. [Grifo meu] (MORAN, 1995, p.26)

O computador tem diversos objetivos na educação, mas não é sempre fácil alcançá-los, e de acordo com [24],

> Desenvolver o raciocínio ou possibilitar situações de resolução de problemas. Essa certamente é a razão mais nobre e irrefutável do uso do computador na educação. Quem não quer promover o desenvolvimento do poder de pensamento do aluno? No entanto, isso é fácil de ser falado e difícil de ser conseguido. (p. 31)

Seguem alguns dos objetivos que podemos alcançar a partir do uso da informática na educação:

- ✓ Promover e desenvolver a autoestima, a interatividade, a criatividade, a autonomia e o trabalho cooperativo;

- ✓ Levar o estudante a experimentar o sucesso e aprender a lidar com o insucesso, refazendo até acertar, valorizando o erro como etapa necessária para o desenvolvimento humano;

- ✓ Permitir que o estudante construa seu próprio projeto refletindo suas vivências;

- ✓ Apoiar o desenvolvimento cognitivo;

- ✓ Promover o pensar sobre o próprio pensar;

- ✓ Ampliar a capacidade de aprendizagem;

- ✓ Facilitar a integração interdisciplinar;

- ✓ Desenvolver diversas e distintas linguagens;

- ✓ Fazer simulações;

- ✓ Realizar induções de conceitos abstratos, a partir de exemplos visuais e dinamicamente alteráveis;

- ✓ Apresenta maior motivação dos estudantes, pois representam desafios grandes e motivadores;

- ✓ Permitir melhor representação e manipulação de alguns objetos do que outras mídias;

- ✓ Permitir diferentes análises, tanto macroscópicas como microscópicas de todos os objetos e fatos;

- ✓ Permitir que o estudante desenvolva seu trabalho conforme seu ritmo;

✓ Permitir que o estudante se comunique e troque ideias com pessoas de toda parte do mundo, de diferentes línguas e costumes, inclusive instantaneamente;

✓ Tornar a aula mais agradável, divertida, dinâmica e produtiva;

✓ Fazer provas de teoremas e comprovação de resultados por meio do uso do computador, assim como testar conjeturas;

✓ Modernizar o ambiente de ensino-aprendizagem, desde a característica física com a presença dos computadores, como a mental;

Mas, temos de levar em conta, nada adianta possuirmos tecnologia de última geração e programas moderníssimos se não soubermos como utilizá-los. O professor precisa ser capacitado para que possa utilizá-la como um instrumento de ensino-aprendizagem. Dessa forma, as tecnologias poderão ajudar o professor a atender os estudantes de forma diversificada, de acordo com suas necessidades, pois as tecnologias se tornam uma ferramenta de aprendizagem importante na educação, porque oferece um suporte, uma infraestrutura para que se possam realizar coisas que somente com outros instrumentos não seriam possíveis, já que a sua utilização na educação significa uma possibilidade de estruturar, potencializar, fortalecer novas ideias que podem transformar a escola num espaço vivo de produção, recepção e socialização de conhecimentos, possibilitando o fazer, o executar e criar coisas, encurtando distâncias e facilitando a comunicação.

As novas tecnologias que surgem todos os dias facilitam a motivação dos estudantes pela novidade e pelas possibilidades inesgotáveis de pesquisa que oferece. Essa motivação aumenta se o professor a faz em clima de confiança, de abertura, de cordialidade com os estudantes. Mais que a tecnologia o que facilita o processo de ensino–aprendizagem é a capacidade de comunicação autêntica do professor, de estabelecer relações de confiança com seus estudantes pelo equilíbrio, competência e simpatia com que ele atua. De acordo com [1],

> As novas tecnologias vão, aos poucos, incorporando-se ao dia-a-dia da sala de aula e por isso devem ser tratadas, testadas e estudadas nos cursos de licenciatura em matemática. Tal prática faz com que professores e alunos se sintam preparados e motivados para o seu uso, o que permitirá, aos

> futuros licenciados, uma melhor preparação para suas atividades no ensino fundamental e médio. (p. 169).

Essa disseminação causada pelo computador, e por toda tecnologia assessória, provocou uma grande mudança social: noções de tempo e espaço se alteraram com a possibilidade de rápido acesso a banco de dados em qualquer lugar do planeta.

Conforme [9] "...cada inovação tecnológica bem sucedida modifica os padrões de lidar com a realidade anterior, muda o patamar de exigências do uso"(p. 25). Novas modalidades de comunicação e trabalho emergiram e ainda emergem e, nesse aspecto, concordo com [15],

> Inúmeras transformações aconteceram motivadas pelo desenvolvimento dos computadores. A tecnologia tem influenciado na maneira de viver, de se divertir, de informar, de trabalhar, de pensar, de aprender e de aprender a aprender. Nesse particular, ela tem afetado as pessoas envolvidas no processo de ensino e aprendizagem, mesmo que, algumas vezes não se tenha consciência disso. (p. 84).

Podemos assim perceber que o computador é uma das mais fascinantes ferramentas que a humanidade inventou, pois permite a criação de aplicações que auxiliam nas mais variadas atividades humanas. De acordo com [9],

> Com o aperfeiçoamento da realidade virtual, simularemos todas as situações possíveis, exacerbaremos a nossa relação com os sentidos, com a intuição. Vamos ter motivos de fascinação e de alienação. Podemos comunicar-nos mais ou alienar-nos muito mais facilmente que antes. Se queremos fugir, encontraremos muitas realidades virtuais para fugir, para viver sozinhos. Nossa mente é a melhor tecnologia, infinitamente superior em complexidade ao melhor computador, porque pensa, relaciona, sente, intui e pode surpreender. Por isso o grande re-encantamento temos que fazê-lo conosco, com a nossa mente e corpo, integrando nossos sentidos, emoções e razão. Valorizando o sensorial, o emocional e o lógico. Desenvolvendo atitudes positivas, modos de perceber, sentir e comunicar-nos mais livres, ricos, profundos. Essa atitude re-encantada de viver potencializará ainda mais nossa vida pessoal e comunitária, ao fazer um uso libertador dessas tecnologias maravilhosas e não um uso consumista, de fuga. (p. 25)

Quanto à utilização do computador na educação, concordo com [1],

> O perigo existente não é o de se usar as novas tecnologias computacionais no ensino e sim o de serem, elas, deixadas de lado, pois um ensino nelas apoiado tende a aumentar o poder de concentração e o estímulo dos estudantes, permitindo uma maior abrangência no universo de funções estudadas, valendo-se de recursos como sons, cores, etc., que facilitam e, muitas vezes, propiciam o entendimento dos conceitos. (p. 172)

Para que tudo isso aconteça, é preciso o professor estar preparado tanto para utilizar o computador, quanto para ensinar o conteúdo que pretende se passar com o uso das tecnologias e, nesse aspecto, é preocupante o que [24] afirma,

> Observando professores desenvolvendo atividades de uso do computador com alunos tem mostrado que os professores não têm uma compreensão mais profunda do conteúdo que ministram e essa dificuldade impede o desenvolvimento de atividades que integram o computador. Assim, as novas possibilidades tecnológicas que se apresentam hoje têm causado um certo desequilíbrio no processo de formação do professor. Os avanços tecnológicos têm desequilibrado e atropelado o processo de formação fazendo com que o professor sinta-se eternamente no estado de "principiante" em relação ao uso do computador na educação. (p.7).

Pois, conforme Valente, não adianta utilizar os recursos tecnológicos se o professor não tem domínio do conteúdo que ministra, logo as tecnologias têm que serem utilizadas pelo estudante para construir o conhecimento, sendo utilizado como um recurso com o qual o estudante possa criar, pensar e manipular informações. De acordo com [24],

> O mundo atualmente exige um profissional crítico, criativo, com capacidade de pensar, de aprender a aprender, de trabalhar em grupo e de conhecer o seu potencial intelectual, com capacidade de constante aprimoramento e depuração de ideias e ações. Certamente, essa nova atitude não é passível de ser transmitida, mas deve ser construída e desenvolvida por cada indivíduo, ou seja, deve ser fruto de um processo educacional em que o aluno vivencie situações que lhe permitam construir e desenvolver essas competências. E o computador pode ser um importante aliado nesse processo. (p. 19-21)

O ciclo descrever-executar-refletir-depurar-descrever faz parte do uso do computador na educação e está diretamente ligado ao sucesso de aprendizagem. Conforme [13],

> Evidentemente, há um grande passo entre existência, em princípio, de uma base para diálogo e seu estabelecimento numa forma fértil. [...] Minha

> posição é simplesmente que existe uma oportunidade muito nova para mobilizar um público maior na busca de mudança educacional. [...] Outra forma através da qual a tecnologia contribuirá para proporcionar um ambiente mais favorável para as diversas iniciativas em direção a novos contextos para a aprendizagem é através de comunicações eletrônicas. (1994, p. 193)

Toda lógica dos computadores, como programação, criptografia e autenticação, entre todos outros recursos está baseada no sistema binário, que é a base da matemática, muito simples, mas que faz toda diferença e possibilita todos os recursos computacionais. Vale lembrar que nos dias atuais existem muitos recursos disponíveis, muito foi, e muito mais está sendo desenvolvido em softwares educativos como recursos para aulas, e a tecnologia está mais acessível e atingindo cada dia mais pessoas.

Tendo todo este contexto sobre tecnologia em mente é que decidimos criar um software educativo para o ensino e aprendizagem da Análise Combinatória, onde todos os estudantes e professores tenham disponível uma ferramenta para consulta, aprofundamento e teste deste conteúdo conforme veremos a seguir.

5.2 Tecnologia em Análise Combinatória

As calculadoras científicas resolvem os problemas de Análise Combinatória, através das teclas nCr e nPr.

Para calcular a combinação de x elementos y a y, basta apertamos x seguido da tecla nCr seguido do y e por fim a tecla de igual que obtemos a resposta.

Para calcular o arranjo de x elementos y a y, basta apertamos x seguido da tecla nPr seguido do y e por fim a tecla de igual que obtemos a resposta.

5.3 Linguagem de Programação

Para desenvolvermos este software utilizamos o curso "Elaboração de material didático virtual interativo com flash para o ensino de matemática na educação básica", curso este realizado totalmente virtual e gratuito, coordenado pela professora Tânia Michel Pereira da UNIJUÍ (Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul), disponível em [5].

O software está desenvolvido na linguagem de programação Action Script (construção de aplicações para internet no geral) em plataforma Flash, plataforma esta que permite a criação de aplicações virtuais contendo animações, áudios e vídeos que ocupam pouco espaço e podem apresentar uma interface atrativa e que desperte a curiosidade em aprender do educando, além de funcionar e ser executado rapidamente em smarthpones, tablets e computadores que tenham instalado o plugin "MacromediaFlashPlayer", disponível gratuitamente em [4].

5.4 Objeto de Aprendizagem

O desenvolvimento deste objeto de aprendizagem, que foi criado por nós, tem como objetivo facilitar o ensino e aprendizagem da Análise Combinatória, possibilitando um novo recurso tecnológico interativo com o estudante para ser utilizado no início e meio do processo de ensino deste conteúdo, estimulando-o a pensar e entender este conteúdo de forma simples, prática e atraente. Para isso, vamos visualizar as imagens do Software Interativo para o Ensino de Análise Combinatória desenvolvido para este fim, onde a figura 15 ilustra a tela inicial do software, a primeira interface que contêm um vídeo de boas-vindas e explica que o botão azul serve para avançar as telas e o botão laranja para retroceder, sendo que estes botões estão disponíveis em todas as telas, podendo retroceder ou avançar a qualquer momento as telas para um melhor entendimento e aprendizado.

Figura 15: Tela Inicial do Software

Na figura 16 a seguir está a tela de apresentação do software onde contêm os dados do mestrando, da orientadora e da universidade.

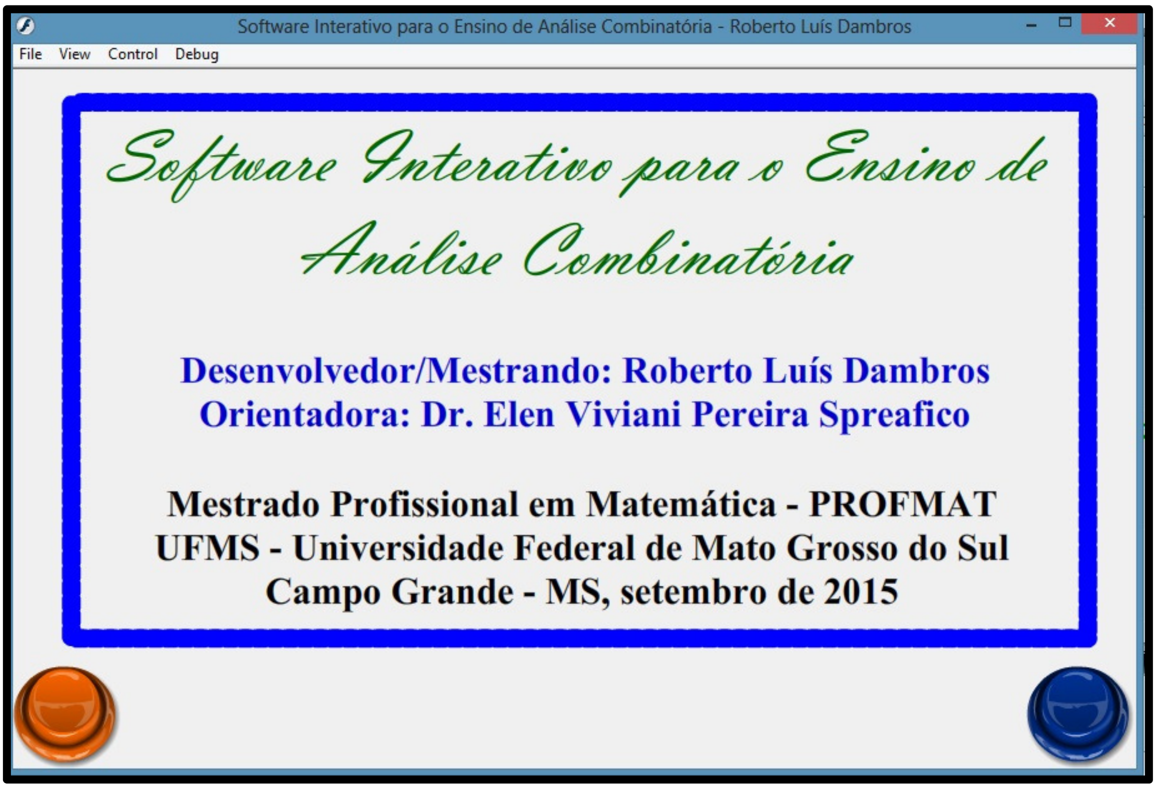

Figura 16: Tela de apresentação do Software

As figuras 17 e 18 representam algumas das telas de explicação que contém o software, telas estas que apresentam os conteúdos de Análise Combinatória, tais como princípios fundamental da contagem, arranjos, permutações, princípio da casa dos pombos, combinações, entre outros, e além da teoria trazem exemplos resolvidos de exercícios para facilitar o entendimento e compreensão para auxiliar o aluno.

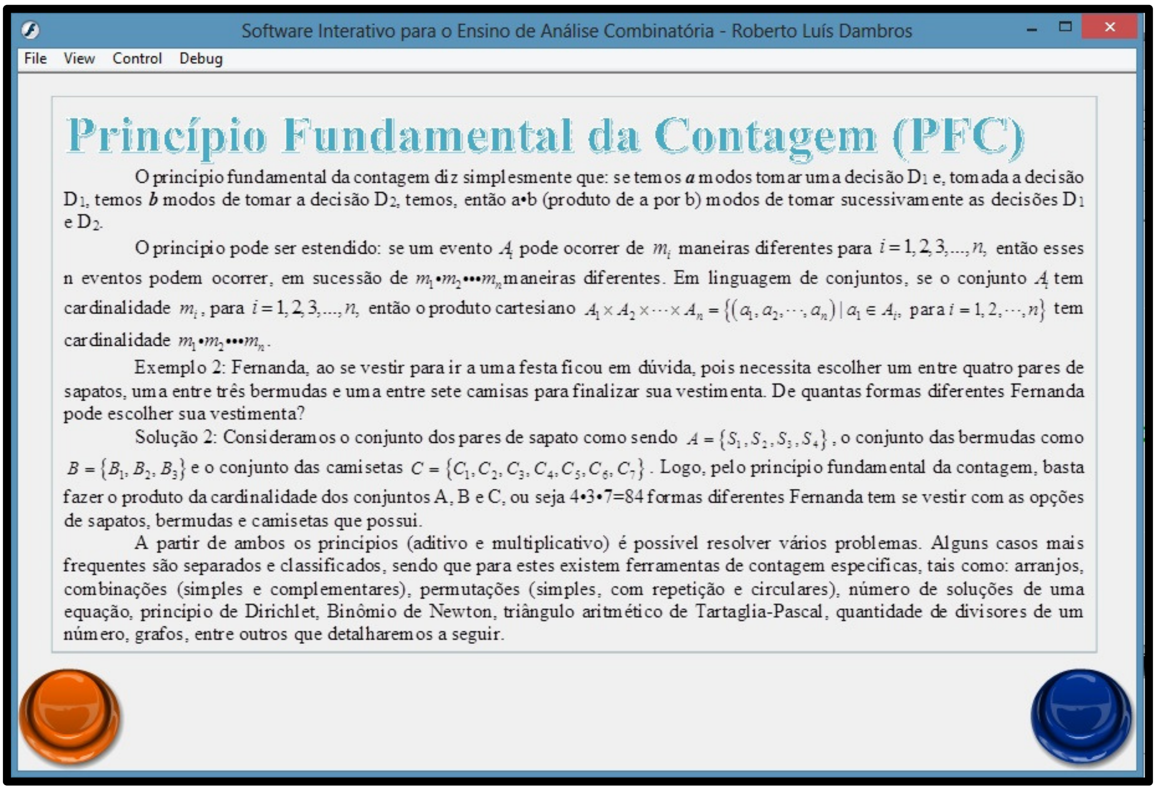

Figura 17: Tela de explicação do Software

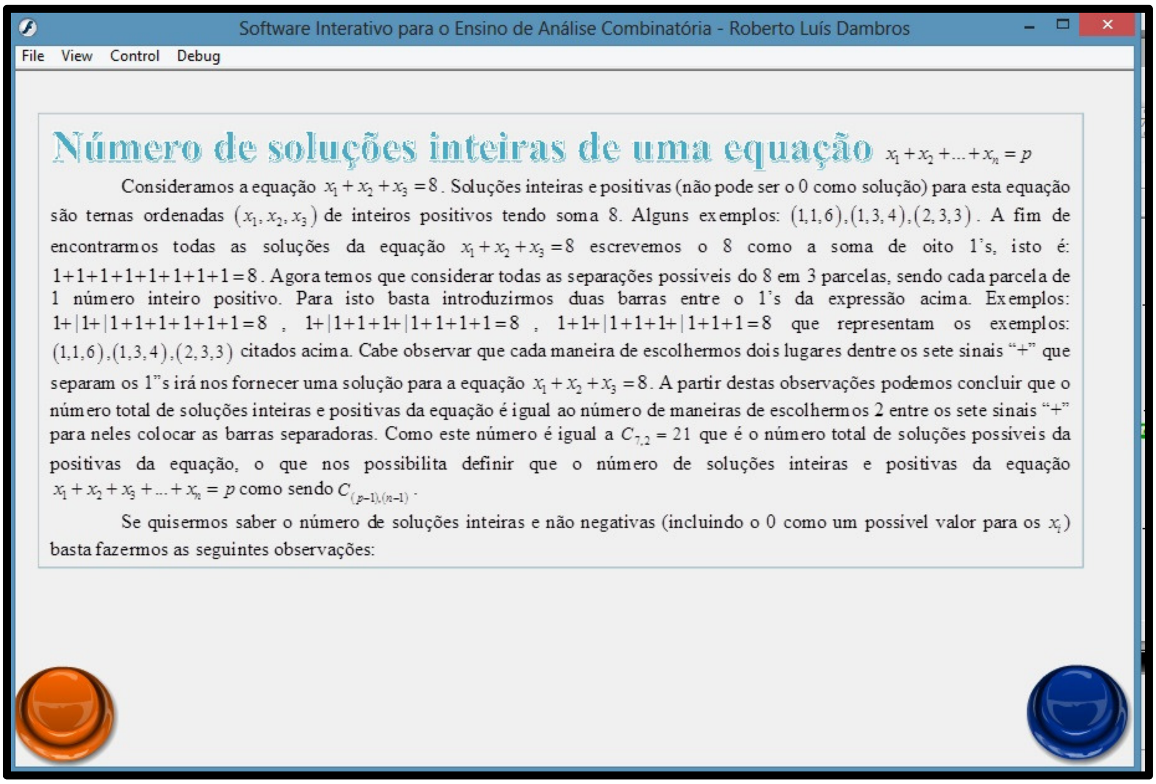

Figura 18: Tela de explicação do Software

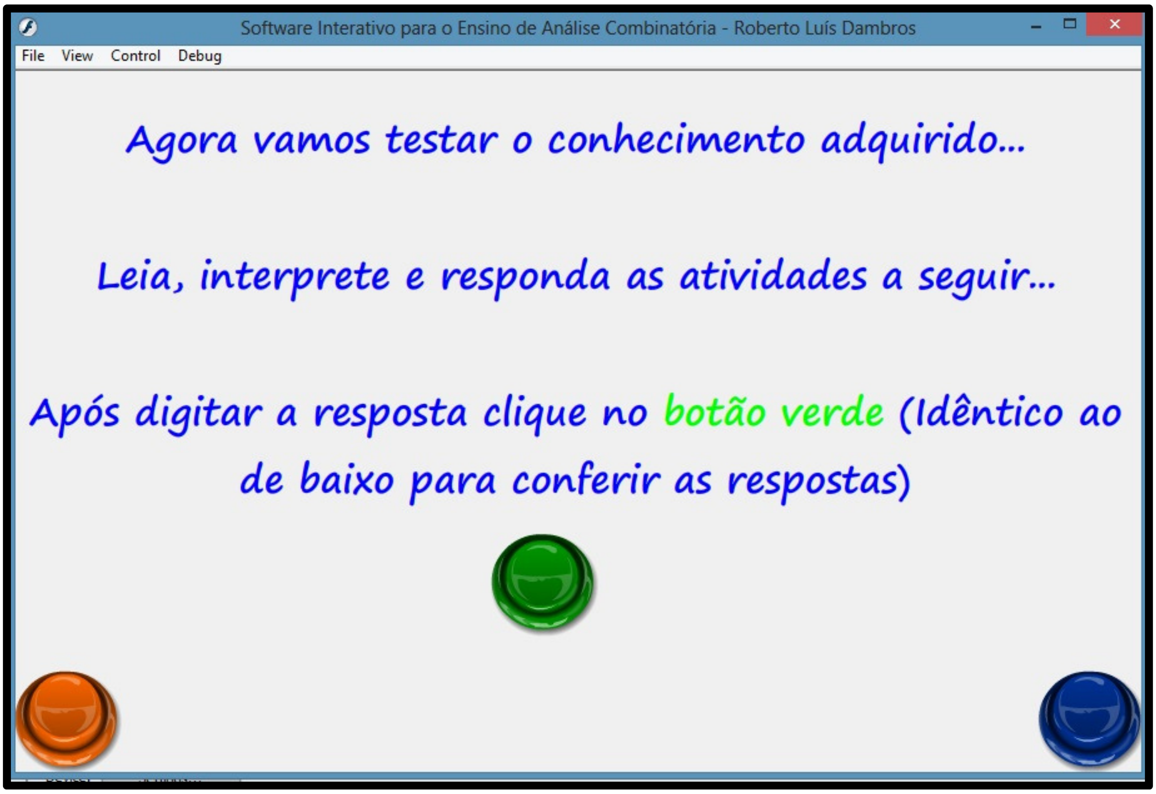

Figura 19: Tela introdutória às questões do Software

A figura 19, conforme visualizamos acima é a tela de introdução aos exercícios, onde explica que após ler e interpretar os problemas deve-se resolver e digitar a resposta que considera correta, e após preencher as respostas deve-se clicar no botão verde, que serve para conferir as respostas, onde ao clicar no botão, irá aparecer uma mensagem: caso a resposta esteja correta como acontece na Figura 20 aparecerá a mensagem de parabéns e uma forma de resolver o exercício para que o aluno possa confrontar com a sua resolução e caso a resposta não esteja correta, como acontece na figura 21, aparecerá uma mensagem para tentar novamente até que chegue na resposta correta, sendo que os botões laranja e azuis estão disponíveis para retroceder e avançar as telas caso seja necessário rever as explicações do conteúdo.

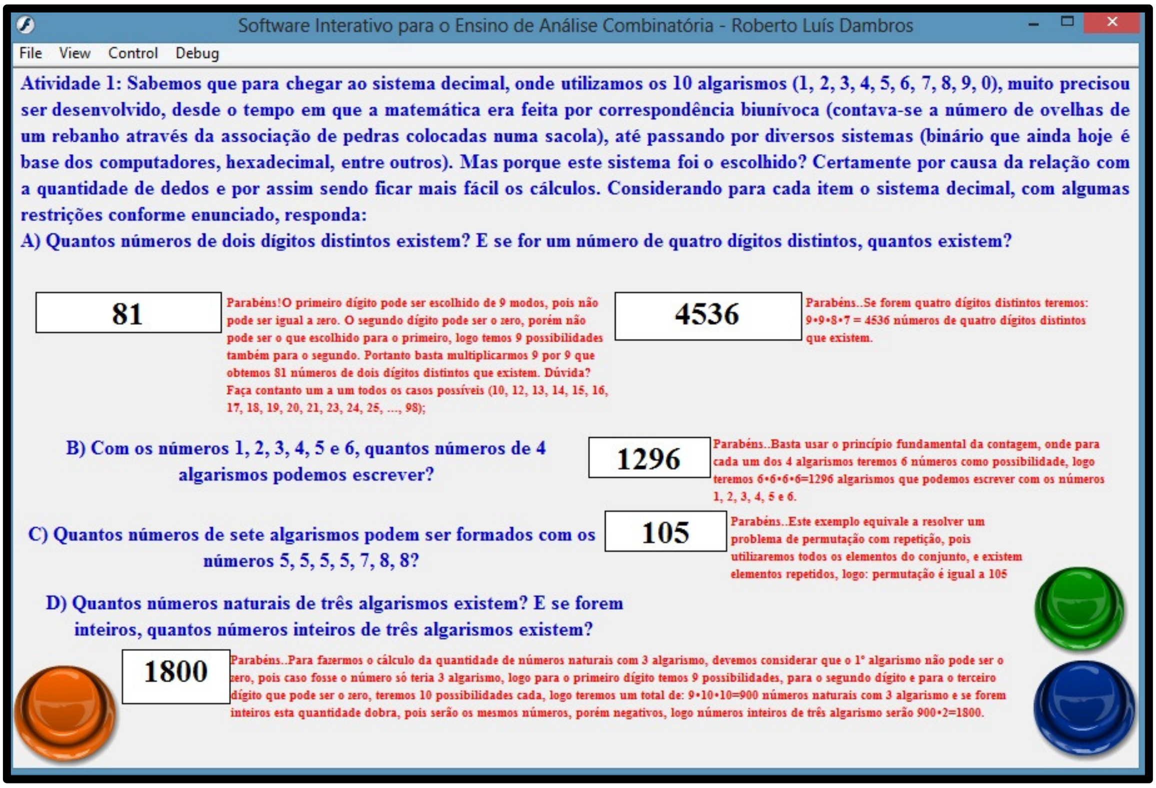

Figura 20: Atividade respondida corretamente do Software

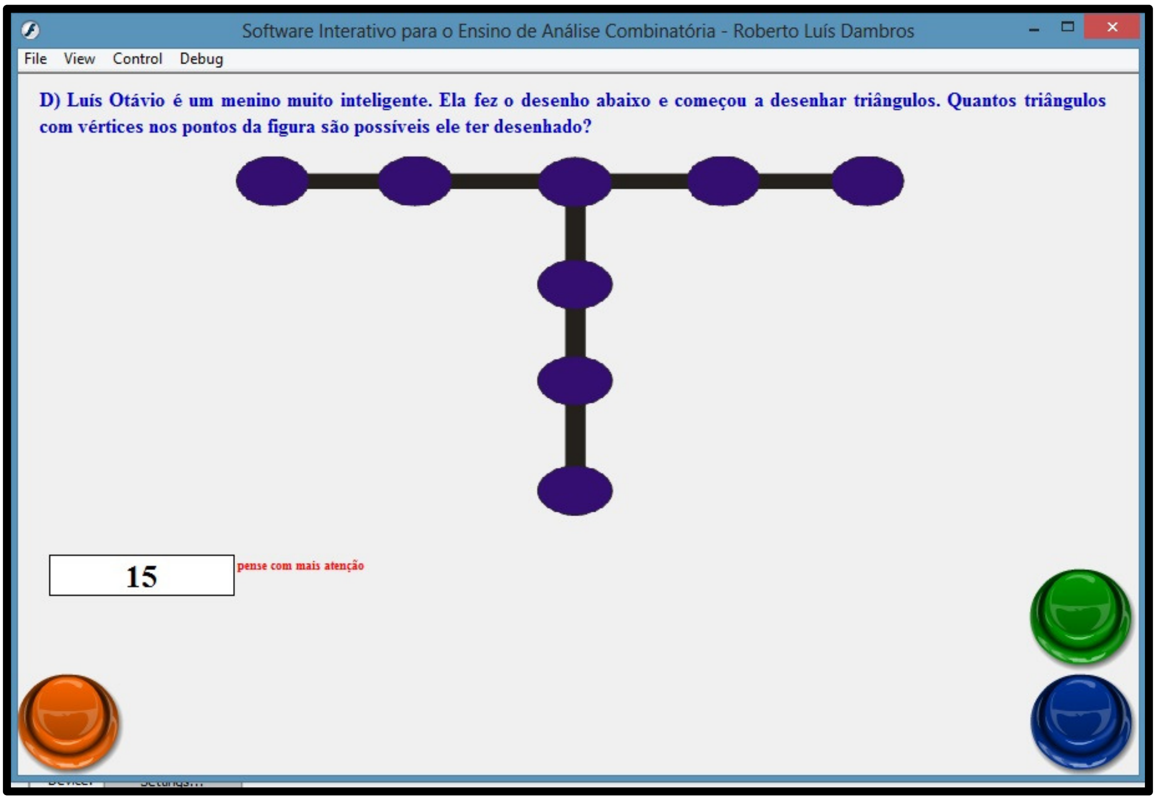

Figura 21: Atividade respondida incorretamente do Software

As figuras 22, 23 e 24 a seguir ilustram uma parte do software que trabalha com o conteúdo de grafos.

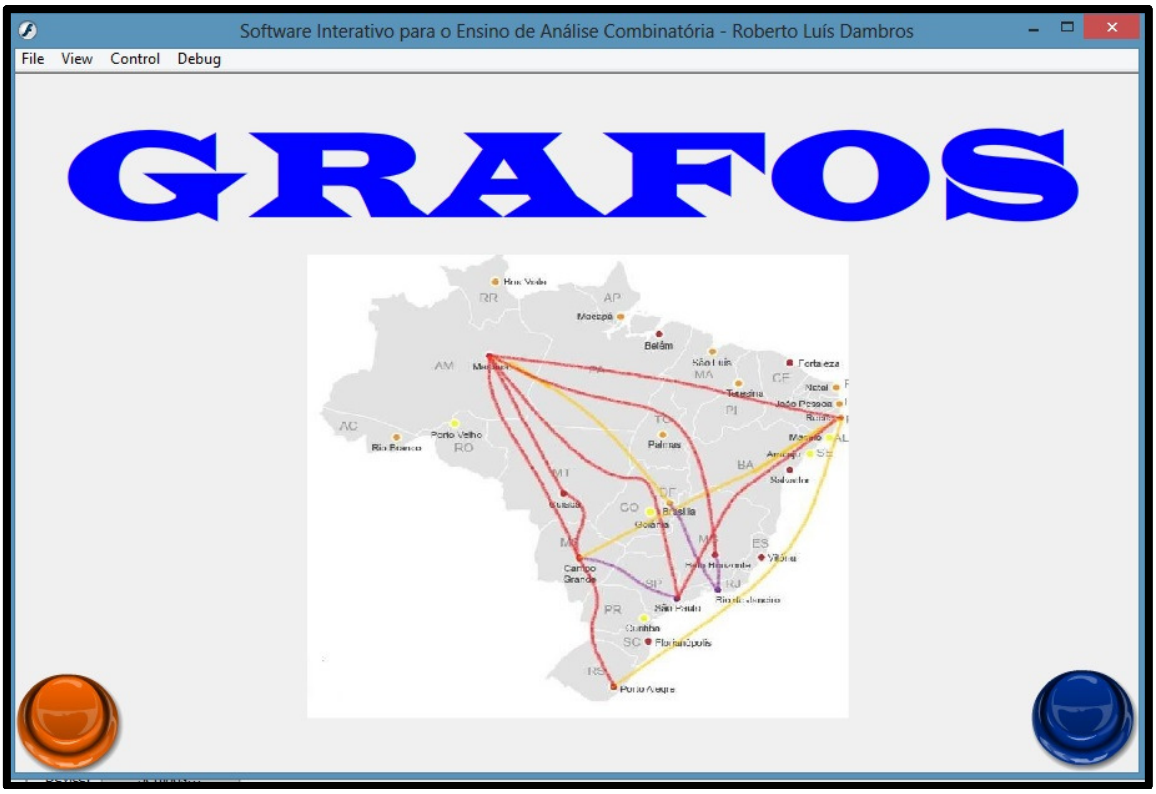

Figura 22: Tela introdutória à Grafos do Software

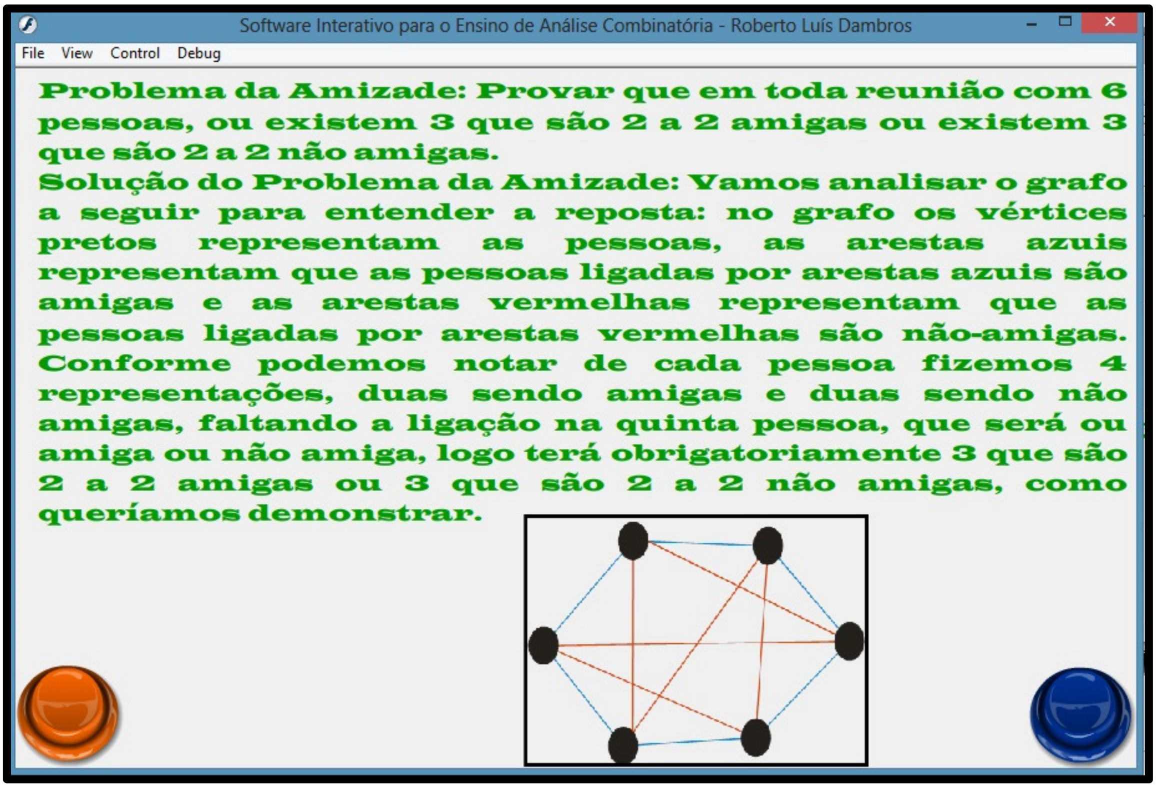

Figura 23: Exemplo de questões de Grafos do Software

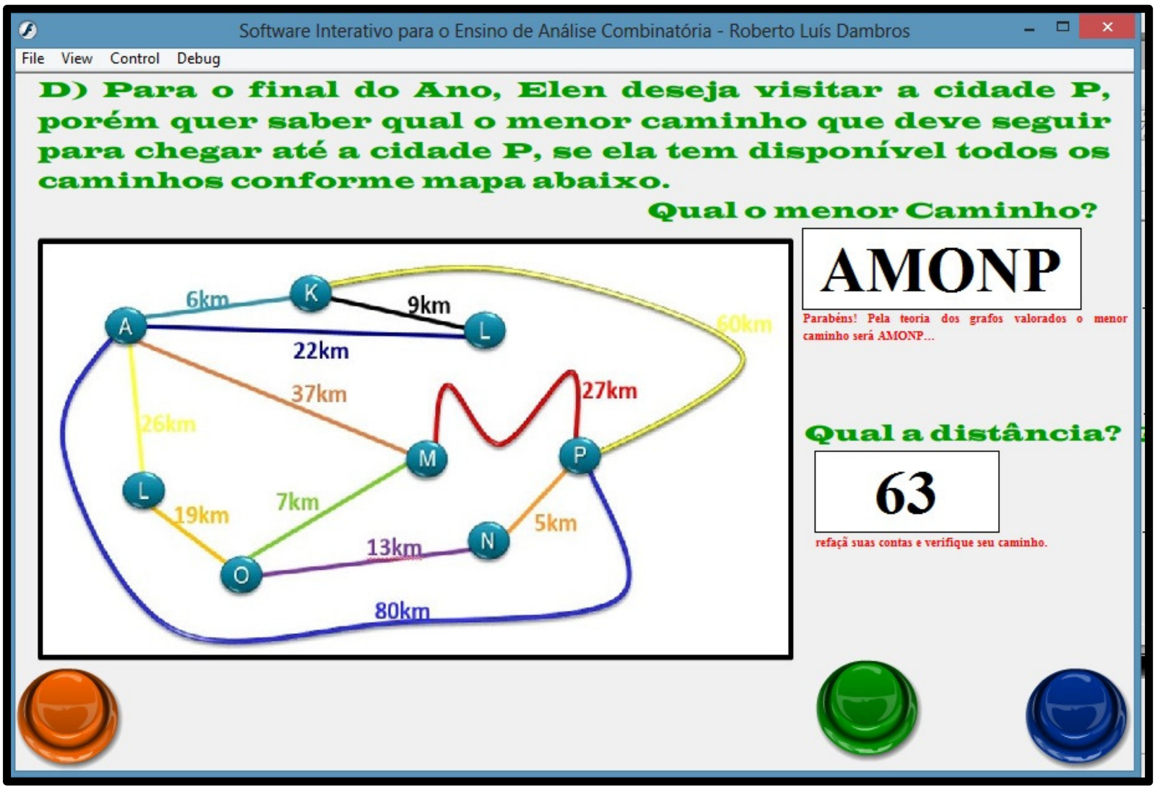

Figura 24: Exemplo de atividade de Grafos do Software

A figura 25 é a figura de encerramento do software, onde ao clicar no botão verde aparece a mensagem com dados para contato.

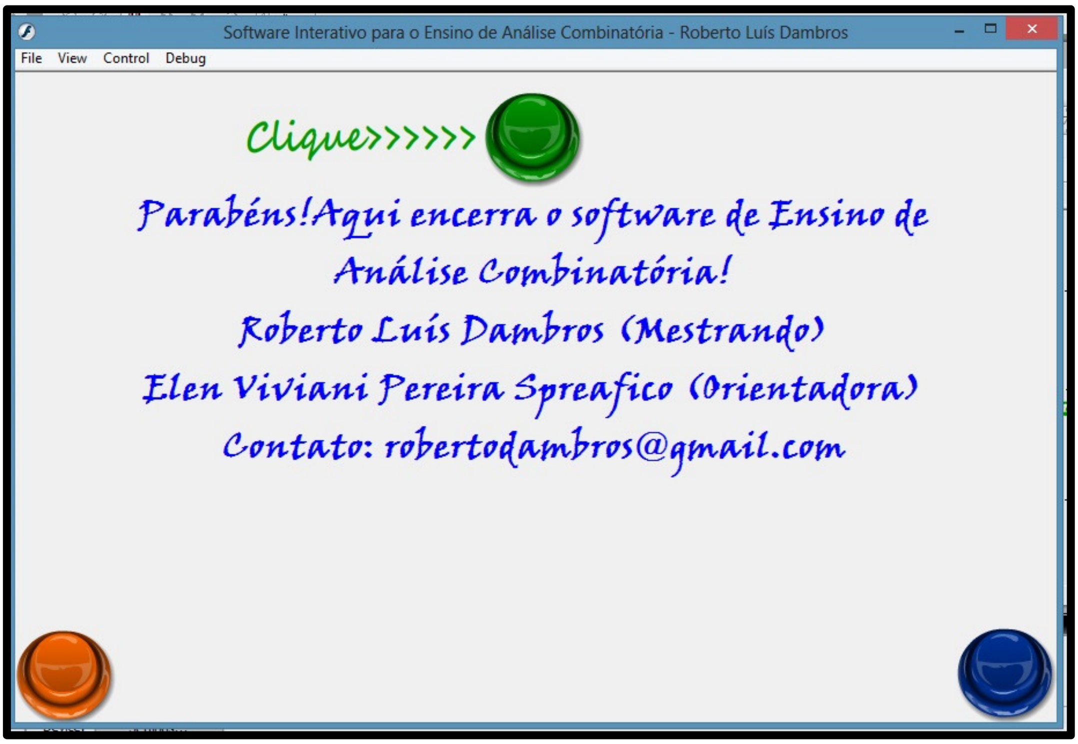

Figura 25: Tela de encerramento do Software

Este software educativo está disponível on-line, como podemos observar na figura 26, num site de hospedagem gratuita, onde pode ser manipulado livremente sem necessidade de pagar em http://robertodambros.wix.com/softwaredambros, e também tem disponível no site, abaixo do software um campo para enviar uma mensagem com sugestões, críticas ou elogios para o autor, sendo que a mensagem vai diretamente para o e-mail do autor.

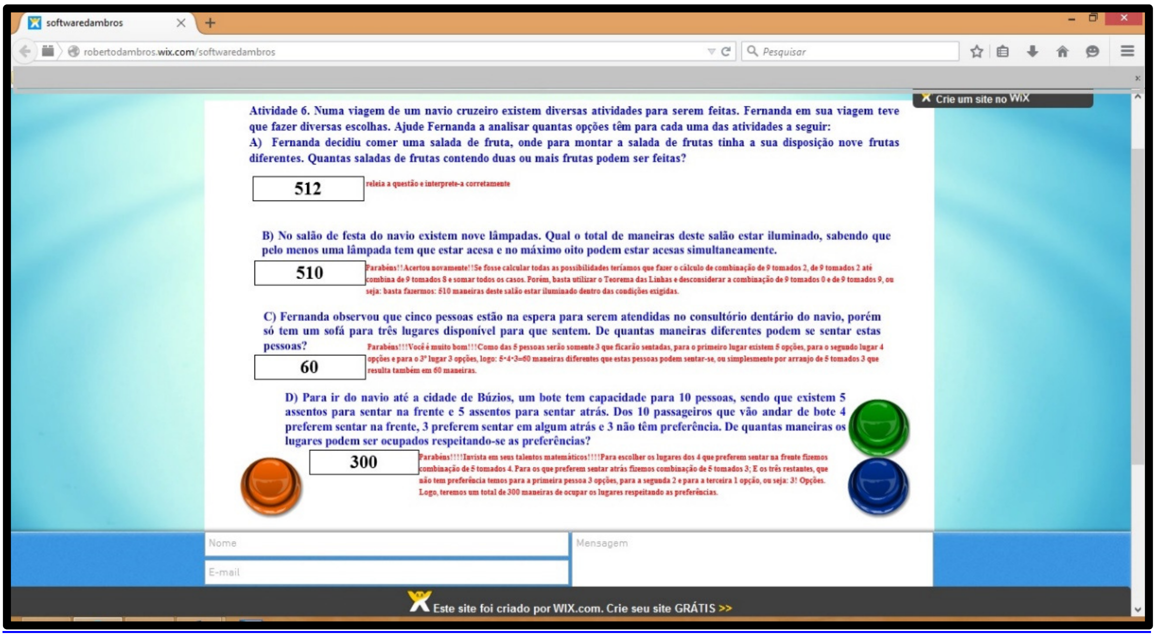

Figura 26: Imagem do site onde está hospedado o Software

Considerações Finais

O ensino, inclusive o da Matemática, passa constantemente por profundas transformações e alguns professores acabam por não se atualizar, algumas vezes por se sentirem confiantes e acomodados e outras vezes por desilusão com o sistema educacional.

Porém, devido à transformação do contexto tecnológico e também dos contextos emocional e de valores que presenciamos atualmente é necessário repensar na forma de ensinar e aprender, onde têm-se que haver uma mescla de dois tempos.

O primeiro tempo é o tempo onde a Matemática precisa ser ensinada e aprendida com propriedade; sua teoria e suas demonstrações, ou seja, aprender a matemática por ela mesmo, para então aprender a aplicação matemática, a contextualização, mas isso acontece naturalmente se a matemática por ela mesma tiver sido ensinada e aprendida efetivamente, pois assim resolvem-se situações de contexto matemático e não somente questões contextualizadas.

O segundo, que além de fazer este resgate do ensino da matemática, entendendo-a e não somente exemplificando-a, deve-se aliar as novas tecnologias disponíveis para o ensino e aprendizagem de forma a interagir com o mundo em que vivemos. É impossível pensar em vivermos sem os recursos tecnológicos, e a utilização destes pode dinamizar, facilitar e agilizar o processo de ensino e aprendizagem, e caso não existam objetos virtuais de aprendizagem o professor deve buscar ferramentas e criar estes objetos, pois assim não somente estará contribuindo com o estudante, mas também com sua constante formação que hoje é uma necessidade que todos nós professores precisamos e alguns ainda percebem.

Dentro deste contexto, a Análise Combinatória precisa começar a ser ensinada pelos professores, que assim já não o fazem, explicando as fórmulas, raciocínios simples e aprimorados e principalmente a razão e demonstração das expressões das fórmulas e, após isto, apresentar exemplos e exercícios para verificar o conhecimento adquirido, sendo que nestes o enunciado não deve deixar dúvida do que se quer calcular, pois isso acaba por vezes confundindo o raciocínio se a questão não foi bem formulada e explicada. Deve-se ficar claro o que se deseja calcular, já que, se quem lê não consegue entender o que se deseja contar, acaba fazendo a contagem de uma situação que não é a inicialmente pensada por quem formulou, o que acontece na maioria das vezes, faltando a interpretação correta do problema, pois os cálculos normalmente são feitos corretos, apenas a distinção do que se deseja calcular que acontece erroneamente.

Logo, o uso da tecnologia nas aulas é algo imprescindível, e todos devem utilizar como uma ferramenta, em certas horas como sendo o começo, outras como sendo o meio e outras o fim, ou seja, na avaliação e no processo de ensino-aprendizagem dos conteúdos, pois, com o auxílio de ferramentas informatizadas os estudantes tem uma naturalidade maior em aprender e com a utilização de softwares educativos e interativos acabam por conseguir uma maior concentração e um maior rendimento na aprendizagem.

Por fim, como perspectivas para o futuro pretendemos utilizar este software nas aulas do Ensino Médio e verificar o resultado de sua utilização, para saber se acontece uma aprendizagem significativa e se os alunos se interessam pelo conteúdo através do software, para assim termos uma mostra de seus benefícios e conseguir aprimorar o software para que ele venha a ser disponibilizado para uma maior quantidade de estudantes, fazendo com que a Análise Combinatória passe a ser um conteúdo divertido e que todos a compreendam.

Referências

[1] CLAUDIO, Dalcídio Moraes. CUNHA, Márcia Loureiro da. As novas Tecnologias na formação de Professores de matemática.In:Formação de professores de matemática – Uma visão Multifacetada/ Organizado por Helena Noronha Cury. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2001. 190 p.

[2] D'AMBRÓSIO, Ubiratan. Etnomatemática. São Paulo: Ática, 1993.

[3] DANTE, Luiz Roberto. matemática: contexto e aplicações/ Luiz Roberto Dante. São Paulo: Ática, 2010.

[4] http://www.macromedia.com, acesso em 26 de fevereiro de 2015.

[5] http://www.projetos.unijui.edu.br/matematica/oferta4.html, acesso em 14 de janeiro de 2015.

[6] JURKIEWICZ, Samuel. Grafos – Uma Introdução. PIC Obmep 2007. 112p.

[7] LIMA, Elon Lages. Temas e problemas elementares/Elon Lages Lima, Eduardo Wagner, Paulo Cezar Pinto Carvalho e Augusto César Morgado. 5.Ed. – Rio de Janeiro: SBM, 2013

[8] LUCCHESI, Cláudio Leonardo. Introdução à teoria dos Grafos. IMPA. 152 p. 1979.

[9] MORAN, José Manuel. Novas tecnologias e o re-encantamento do mundo. Especialista em projetos inovadores na educação presencial e a distância. Publicado na revista Tecnologia Educacional. Rio de Janeiro, vol. 23, n.126, setembro-outubro 1995, p. 24-26.

[10] MORGADO, Augusto César. CARVALHO, João B. P. de C. CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. FERNANDEZ, Pedro. Análise Combinatória e probabilidade. 9ªEd. Rio de Janeiro: SBM, 1991. 343p. ISBN 978-85-85-85818-01-2

[11] MORGADO, Augusto Cezar CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. Matemática Discreta. Coleção Profmat. Editora SBM. 2014. 192p.

[12] PAIVA, Manoel. matemática Paiva/Manoel Paiva - 1ªed. São Paulo: Moderna, 2009.

[13] PAPERT, Seymor. A máquina das crianças: repensando a escola na era da informática. Trad. Sandra Costa. Porto Alegre; artes Médicas, 1994. 210 p.

[14] PONTE, João Pedro da. VARANDAS, José Manuel. OLIVEIRA, Hélia. O contributo das tecnologias de informação e comunicação para o desenvolvimento do conhecimento e da identidade profissional. In:Formação de professores de matemática –

Explorando novos caminhos com outros olhares/ Organizado por Dario Fiorentini. Campinas, SP: Mercado de letras, 2003. 248p.

[15] PORTANOVA, Ruth (org.) Clarrisa Trojack Della Nina …[et al]; Um currículo de matemática em movimento. Porto alegre: EDIPUCRS, 2005. 95 p.

[16] RIBEIRO. Jackson. matemática: Ciência, Linguagem e Tecnologia. Volume 2. Editora Scipione S.A. 1ªedição. 2011. 328p.

[17] RPM - Revista do Professor de matemática - Edição número 41.

[18] RPM - Revista do Professor de matemática - Edição número 45.

[19] SAMPAIO, João Carlos Vieira. Uma introdução à topologia geométrica: passeios de Euler, superfícies, e o teorema das quatro cores/ João Carlos Vieira Sampaio. São Carlos: EdUFSCAR, 2008. 145p.

[20] SANTOS, José Plinio de Oliveira; ESTRADA, Eduardo Luis. Problemas Resolvidos de Combinatória – 2ª Edição. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda. 204 p. 2011.

[21] SANTOS, José Plinio O. MELLO, Margarida P. MUARARI, Idami T.C. Introdução à Análise Combinatória. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda. 390 p. 2007.

[22] SMOLE, Kátia Cristina Stocco. Diniz, Maria Ignez de Souza Vieira. Matemática: Ensino Médio: volume 2. 6ªEd. São Paulo, 2010.

[23] SOUZA, Joamir Roberto de. Novo olhar matemática/ Joamir Roberto de Souza. 1ªEd. São Paulo: FTD, 2010.

[24] VALENTE, José Armando. O uso inteligente do computador na educação. In: Pátio – Revista pedagógica. Editora Artes Médicas Sul. Ano 1. Número 1. 1993.

[25] VILARDI, Raquel Marques. OLIVEIRA, Eloiza da Silva Gomes. A Infância e a Modernidade do Ciberespaço: os Desafios da Interação entre Criança e Computador. In: revista Informática na educação – Teoria e prática. V. 9. n 1. Jan/jun 2006.