Instituto de Matemática e Estatística
Universidade Federal Fluminense

Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
Coordenação do PROFMAT

ANDERSON GOULART DE ARAÚJO

UMA PROPOSTA PEDAGÓGICA PARA O ENSINO DE CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS NO ENSINO FUNDAMENTAL

Orientador: MITCHAEL ALFONSO PLAZA MARTELO

UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

NITERÓI
JULHO/2015

ANDERSON GOULART DE ARAÚJO

UMA PROPOSTA PEDAGÓGICA PARA O ENSINO DE CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS NO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação apresentada por **Anderson Goulart de Araújo** ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre.

Orientador: Mitchael Alfonso Plaza Martelo

Niterói
2015

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca de Pós-graduação em Matemática da UFF

A663 Araújo, Anderson Goulart de
Uma proposta pedagógica para o ensino de construções geométricas no ensino fundamental / Anderson Goulart de Araújo. – Niterói, RJ : [s.n.], 2015.
133f.
Orientador: Prof. Dr. Mitchael Alfonso Plaza Martelo.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT) – Universidade Federal Fluminense, 2015.

1. Construção geométrica. 2. Ensino de matemática. 3. Geometria. I. Título.

CDD: 516.007

ANDERSON GOULÁRT DE ARAÚJO

UMA PROPOSTA PEDAGÓGICA PARA O ENSINO DE CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS NO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação apresentada por **Anderson Goulart de Araújo** ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - da Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre. Linha de Pesquisa: Matemática.

Aprovada em: 09/07/2015

Banca Examinadora

Prof. Mitchael Alfonso Plaza Martelo - Orientador

Doutor – Universidade Federal Fluminense

Prof. Andrés Barragan - Membro

Doutor – Universidade Federal Fluminense

Prof. Fábio Júlio Valentin - Membro

Doutor – Universidade Federal do Espírito Santo

Prof. Freddy Rolando Hernandez - Membro

Doutor – Universidade Federal Fluminense

NITERÓI

2015

Ata dos trabalhos finais da Comissão Examinadora da monografia apresentada por Anderson Goulart de Aráujo.

Aos nove dias do mês de julho de dois mil e quinze, reuniram-se na sala de seminário do GMA – 5º andar do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal Fluminense, os membros da Comissão Examinadora constituída pelos professores Mitchael Alfonso Plaza Martelo da Universidade Federal Fluminense; Fábio Júlio da Silva Valentim da Universidade Federal do Espírito Santo, Freddy Rolando Hernandez Romero da Universidade Federal Fluminense e Andrés Mauricio López Barragan da Universidade Federal Fluminense, sob a presidência do primeiro, para prova pública de defesa da dissertação intitulada **"Uma proposta pedagógica para o ensino de construções geométricas no Ensino Fundamental"**, apresentada pelo mestrando Anderson Goulart de Araújo. A defesa da dissertação atende às exigências contidas no Regulamento Específico do Curso de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT - da Universidade Federal Fluminense. A dissertação foi elaborada sob a orientação do professor Mitchael Alfonso Plaza Martelo. O mestrando Anderson Goulart de Araújo fez a exposição de seu trabalho durante 50 minutos, iniciando às 11:30h e concluindo às 12:20h. A seguir, respondeu as questões formuladas pelos integrantes da Comissão Examinadora. Terminada a arguição, realizou-se a reunião da Comissão Examinadora, que apresentou parecer no sentido da aprovação do mestrando Anderson Goulart de Araújo, considerando-se o trabalho apresentado e a forma com que se houve na apresentação na defesa do mesmo. Para constar, foi lavrada a presente ata que vai assinada pela Secretária Administrativa do Mestrado Profissional em Matemática, pelos membros da Banca Examinadora e pelo mestrando.

Niterói, 09 de julho de 2015.

Prof. Mitchael Alfonso Plaza Martelo

Prof. Fábio Júlio da Silva Valentim

Prof. Freddy Rolando Hernandez Romero

Prof. Andrés Mauricio López Barragan

Anderson Goulart de Araújo (mestrando)

Mariana Lattanzi (secretária)

DEDICATÓRIAS

Aos meus pais, que são fontes inesgotáveis de inspiração e exemplo. Ao meu filho, que é a razão da minha existência.

Não é o conhecimento, mas o ato de aprender, não a posse mas o ato de chegar lá, que concede a maior satisfação.
Carl Friedrich Gauss

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais Tânya e José, por serem unicamente amorosos e terem me guiado a trilhar os caminhos certos da vida. Um deles de valorização da educação, que me fizeram chegar até aqui.

À todos os meus professores de Matemática do Ensino Fundamental e Médio, que me inspiraram a seguir essa profissão tão importante.

Aos queridos professores da Universidade Federal do Rio de Janeiro: Nei Rocha, Victor Giraldo, Maria Darci, Nedir do Espírito Santo e Ana Teresa, por terem sido essenciais na minha formação na graduação de matemática.

Aos queridos colegas Carlos Eduardo, Flávia Pelissari e Suellen Carvalho que foram diretamente responsáveis por todo o sucesso que obtive na minha profissão no Colégio Pensi. Sem vocês jamais teria chegado tão longe.

Aos colegas de UFRJ Jhonny Rosemberg e Eduardo Victoriano, por todo apoio durante a minha graduação.

À Kely Roberta, por todo o conforto e aconselhamentos que tive durante o difícil processo da realização desse trabalho.

À todos os meus alunos do Colégio e Curso Pensi, que foram decisivos em todas as minhas observações durante anos, que culminaram com a organização desse trabalho.

Ao professor Dr. Mitchael Alfonso, não só pelas brilhantes aulas de Geometria durante o curso, mas principalmente por toda a paciência e dedicação que teve durante o turbulento processo que enfrentei durante o período que escrevi esse trabalho. Sem a sua motivação e a paciência tenho certeza que não conseguiria êxito.

Ao meu filho Rodrigo Goulart, por ser a inspiração da minha vida e em especial à minha filha Manuela Goulart, mesmo distante, mas igualmente inspiradora.

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo trazer uma proposta pedagógica para o ensino de construções geométricas no Ensino Fundamental. Verificando sua importância histórica, podemos refletir a respeito da relevância da mesma para a matemática e para o ensino. Através de uma rápida análise da história do ensino das construções no Brasil e de algumas coleções de livros didáticos atuais, atentamos para a urgência no resgate desse ensino na formação do aluno. São propostas atividades divididas pelos quatro anos do Ensino Fundamental que possam acompanhar gradativamente o desenvolvimento matemático do aluno (proporcionando não só o aprendizado dos traçados, como também suas justificativas e propriedades). O principal objetivo das atividades é auxiliar na compreensão dos diversos tópicos da geometria de várias maneiras, seja contextualizando uma situação do cotidiano do aluno, trazendo uma aplicação direta de um tópico geométrico ou auxiliando na visualização de alguma definição teórica.

Palavras Chaves: Geometria, Construções Geométricas, Ensino, Régua e Compasso.

ABSTRACT

This work aims to bring a pedagogical proposal for teaching geometric constructions in Elementary Education. Checking its historical importance, we can reflect on the relevance of that for mathematics and for teaching. Through a quick analysis of the history of the teaching of these constructions in Brazil and some collections of current textbooks, we are able to look at the urgency in the rescue of this teaching in the education of the student. Proposed activities are divided by four years of elementary school which can gradually follow the mathematical student development (providing not only the learning of the traces but also their justifications and properties). The main purpose of the activities is to assist in the understanding of the various topics of geometry in many ways, either contextualizing the situation of the student's daily life, bringing a direct application of a geometric topic or aiding in analyzing some theoretical definition.

Key words: Geometry, Geometric Constructions, Ruler and Compass.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Geometria é uma palavra que resulta dos termos gregos "geo" (terra) e "métron" (medida). De forma bastante superficial, podemos dizer que é responsável por mostrar as propriedades relacionadas com a posição e forma de figuras e objetos.

O ensino de geometria na escola básica traz muitos desafios e questionamentos. Uma análise rápida nos mostra que cada vez mais esse ensino tem se tornado mecânico e algébrico, em detrimendo de um ensino focado na forma e nas importantes propriedades que as figuras possuem.

Antigamente essa disciplina estava destacada da matemática na grade curricular, o que muito contribuiu para o seu ensino mecânico. Muito provavelmente por esse motivo, a disciplina tenha perdido o seu prestígio ao longo dos anos. O objetivo desse trabalho é justamente o oposto. As construções geométricas não podem ter um fim em si mesmo. Ela deve sempre estar integrada ao ensino de geometria, acompanhando e auxiliando os tópicos apresentados durante o ano escolar do aluno.

A grande motivação desse trabalho é propor que o ensino da geometria seja mais direcionado para as figuras e suas propriedades. Pensando no desenvolvimento matemático do aluno ao longo dos anos do Ensino Fundamental, foram criadas atividades que buscam interagir com o aluno em situações problema que possam estar presentes no seu cotidiano (atividades contextualizadas) ou na forma de auxiliar tópicos teóricos da geometria que através das construções geométricas, possam ter uma melhor compreensão.

No segundo capítulo, buscamos mostrar o desenvolvimento do ensino das construções geométricas no Brasil ao longo dos anos, mostrando sua importância no passado até o seu "declínio" e quase desaparecimento nos dias atuais. Através da análise de três coleções atuais de livros didáticos, podemos perceber quais são as reais necessidades sobre esse ensino na escola básica. Utilizando os Parâmetros Curriculares Nacionais [1], podemos construir as atividades através das propostas dos tópicos de geometria que devem ser apresentados nos quatro anos do Ensino Fundamental.

No terceiro capítulo, fazemos uma breve análise da importância histórica das construções geométricas, através dos instrumentos régua e compasso e dos postulados de Euclides.

No quarto capítulo mostramos como as construções geométricas ajudaram a desenvolver vários conhecimentos matemáticos através dos três problemas clássicos. Apesar de serem três problemas extremamente simples, a impossibilidade de suas construções foram responsáveis por alguns avanços em vários ramos distintos da Matemática. Além disso, são propostas algumas construções aproximadas desses problemas.

No quinto capítulo destacamos duas construções: a razão áurea e a construção do pentágono regular. Essas construções são importantes por terem utilizado várias outras propriedades desenvolvidas até aquele momento, além de serem consideradas uma das mais belas construções dos livros de Euclides.

No sexto capítulo são propostas atividades para alunos do 6° ano do Ensino Fundamental. Nessa etapa o aluno ainda não possui grande maturidade matemática para compreender com clareza algumas propriedades, portanto o objetivo das atividades é mostrar ao aluno as propriedades do material utilizado e de conceitos básicos como circunferência, paralelismo e perpendicularidade.

No sétimo capítulo são propostas atividades para alunos do 7° ano do Ensino Fundamental. Durante esse ano as atividades são voltadas em um primeiro momento para solidificar os conhecimentos adquiridos no ano anterior através de problemas mais elaborados. Em um segundo momento o conceito de ângulo é apresentado, utilizando diversas atividades contextualizadas. A abordagem feita sobre o assunto trata não só de ângulo como abertura, mas também como direção.

No oitavo capítulo são propostas atividades para alunos do 8° ano do Ensino Fundamental. Neste momento o aluno já possui uma maior base matemática. Além disso, vários tópicos teóricos importantes serão apresentados ao longo do ano (como congruência, desigualdade triangular, polígonos, arco capaz e tangências). As atividades buscam não só mostrar situações contextualizadas mas também ampliar o conhecimento sobre as propriedades das figuras justificando geometricamente todas as suas construções.

No nono capítulo são propostas atividades para alunos do 9° ano do Ensino Fundamental. As atividades são voltadas principalmente para a aplicação das construções geométricas em alguns teoremas (Teorema de Pitágoras e Teorema de Tales) e de assuntos que normalmente são vistos nessa série (como lei dos cossenos, relações métricas no triângulo retângulo e relações métricas na circunferência).

No último capítulo são propostas atividades para dois grupos distintos de alunos. O objetivo é verificar o impacto que as atividades propostas durante esse trabalho podem ter no aprendizado do aluno e na resolução de questões teóricas.

Capítulo 2

O Ensino das Construções Geométricas no Brasil

Segundo [17], a disciplina de desenho geométrico foi obrigatória no currículo da escola básica durante 40 anos (de 1931 até 1971), quando o ensino dessa disciplina sofreu grandes alterações.

Durante a década de 60, sofrendo forte influência do ensino de Matemática na Europa e nos Estados Unidos, surge no Brasil o Movimento da Matemática Moderna[1]. Esse movimento fez com que o ensino da geometria deixasse de ser focado na forma e no espaço, em detrimento a um ensino mais de estruturas algébricas e Teoria dos conjuntos. Essa mudança tornou o ensino da geometria menos acessível, já que muitos professores possuíam uma dificuldade natural com o ensino tradicional da geometria. Com as mudanças essa dificuldade só aumentou, fazendo com que a geometria ficasse mais enfraquecida dentro da escola básica. Nesse período, a forma de ensinar desenho geométrico sofre transformações importantes.

Segundo [3]:

> *... a falta da geometria repercute seriamente em todo o estudo das ciências exatas, da arte e da tecnologia. Mas o desenho geométrico foi afetado na sua própria razão de ser, já que em si é uma forma gráfica de estudo de geometria e de suas aplicações. Muito antes de desaparecer, como matéria obrigatória no ensino do 1° grau, o desenho geométrico já havia sido transformado numa coleção de receitas memorizadas, onde muito mal se aproveitava o mérito da prática no manejo dos instrumentos do desenho, pois geralmente estes se reduziam à regua e compasso.*

A Lei de Diretrizes e Bases de 1971 [2] inseriu o Desenho Geométrico como uma disciplina optativa (compondo a parte diversificada do currículo), podendo ou não ser integrada ao currículo escolar em sua parte diversificada. Além disso, as escolas deveriam inserir a Educação Artística em todas as séries do 1° e do 2° grau. Alguns exames

[1] O Movimento da Matemática Moderna foi um movimento internacional do ensino de matemática que surgiu na década de 1960 e se baseava na formalidade e no rigor dos fundamentos da Teoria dos conjuntos e da álgebra para o ensino e a aprendizagem de Matemática. A introdução da Matemática Moderna é objeto de críticas e controvérsias. Morris Kline foi um dos críticos que ajudou a cunhar o termo Matemática Moderna ao publicar em 1973, o livro Why Johnny can't add: The failure of the new math, no qual apresenta a origem, o porquê e as deformações do movimento de reforma do currículo tradicional no ensino de Matemática nos Estados Unidos, que depois teve repercussão em todo o mundo.[17]

de vestibular como Engenharia e Arquitetura deixaram de exigir o desenho geométrico, fazendo com que naturalmente o prestígio da disciplina na escola básica diminuísse.

Em algumas escolas o ensino de Desenho Geométrico com régua e compasso estava contextualmente inserido na Educação Artística, porém somente como ferramenta de desenho, sem a base geométrica teórica. Lamentavelmente o ensino das construções geométricas praticamente desaparece das escolas.

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais[2] de 1998 [1] o desenho geométrico ganha certa importância não como uma disciplina isolada, mas sim com um caráter de integração com a geometria e algumas outras áreas, como destaca os trechos:

> *O trabalho com espaço e forma pressupõe que o professor de Matemática explore situações em que sejam necessárias algumas construções geométricas com régua e compasso, como visualização e aplicação de propriedades das figuras, além da construção de outras relações.* [1]

> *Outro aspecto que merece atenção neste ciclo é o ensino de procedimentos de construção com régua e compasso e o uso de outros instrumentos, como esquadro, transferidor, estabelecendo-se a relação entre tais procedimentos e as propriedades geométricas que neles estão presentes.* [1]

É importante que o desenho geométrico seja utilizado como ferramenta de aprendizado de geometria, servindo como prática e aplicação gráfica dos conceitos geométricos. É indispensável que os passos das construções sejam justificados geometricamente, caso contrário a disciplina se torna mecânica e dispensável. Segundo [15], a importância das construções geométricas para a matemática vai além:

> *Naturalmente que no ensino de Geometria, a construção das figuras com régua e compasso é fundamental para a perfeita compreensão das suas propriedades. Para o aluno que se inicia no estudo dessa matéria, um esboço das figuras traçadas à mão livre não é suficiente. Ele precisa ver as suas figuras traçadas com precisão para compreendê-las perfeitamente. Quando o professor desenha um ovo e diz que aquilo é uma circunferência, ele está fazendo uma abstração que para si é muito natural (porque conhece suas propriedades), mas para os alunos iniciantes não é. Os alunos precisam ver e construir uma circunferência perfeita para entende-la. Esse comentário vale para tudo; é preciso construir para entender de forma segura e permanente. Em resumo, o ensino da geometria não pode estar dissociado das construções. Com absoluta certeza, separar a Geometria de Desenho conduz a um aprendizado inseguro e não permanente.*

Além disso, é incontestável dizer que o manuseio dos diversos instrumentos, como régua e o compasso, favorece o desenvolvimento das habilidades motoras dos alunos. Essa necessidade se torna muito importante nos dias de hoje, pois a informatização, inclusive na educação, reduz drasticamente as atividades motoras diárias de um aluno.

[2]Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN´s) são a referência básica para a elaboração das matrizes de referência. Os PCN´s foram elaborados para difundir os princípios da reforma curricular e orientar os professores na busca de novas abordagens e metodologias. Eles traçam um novo perfil para o currículo, apoiado em competências básicas para a inserção dos jovens na vida adulta; orientam os professores quanto ao significado do conhecimento escolar quando contextualizado e quanto à interdisciplinaridade, incentivando o raciocínio e a capacidade de aprender. [1]

As construções geométricas não são somente uma representação gráfica, mas também uma importante ferramenta de resolução de problemas, raciocínio lógico, além de ajudar na demonstração e definição de conceitos.

É importante que os conceitos apresentados possam ser contextualizados em situações problema:

> *Resolução de situações-problema que envolvam a obtenção da mediatriz de um segmento, da bissetriz de um ângulo, de retas paralelas e perpendiculares e de alguns ângulos notáveis, fazendo uso de instrumentos como régua, compasso, esquadro e transferidor.* [1]

Devido ao pouco interesse na disciplina ao longo dos anos, praticamente não existem livros didáticos de construções geométricas para a escola básica. Os livros de matemática dessas séries possuem raras inserções de desenho geométrico, sem contextualizar com as outras áreas como álgebra e geometria.

A maioria dos livros específicos sobre o assunto são da década de 70 (ou anteriores), que trazem como característica uma forte base teórica (porém pouco prática e bem distante da realidade do aluno dos dias de hoje). Essa falta de material didático adequado e a quase ausência da disciplina nas escolas fez com que a formação do professor de matemática nos conhecimentos dessa disciplina fosse prejudicado. O ensino de geometria no Brasil é extremamente algébrico, onde se calculam ângulos, lados e áreas, mas pouco se exploram as propriedades das figuras geométricas. O desenho geométrico, portanto, é uma excelente ferramenta para preencher esse espaço no ensino de geometria no Brasil.

2.1 A utilização das construções geométricas no Ensino Fundamental

Nessa seção, vamos analisar os conteúdos ensinados na segunda parte do ensino fundamental, que servirão como base para a proposta de atividades desse trabalho. A divisão do Ensino Fundamental é feita por [1, p.09], sendo esse segmento dividido em dois ciclos:

3° **ciclo:** 6° e 7° anos do Ensino Fundamental

4° **ciclo:** 8° e 9° anos do Ensino Fundamental

Ainda segundo [1] o ensino da Matemática é dividido em quatro áreas:

1. Números e Operações
2. Espaço e Forma
3. Grandezas e medidas
4. Tratamento da Informação

Apesar das Construções Geométricas estarem diretamente ligadas ao estudo do espaço e forma, podemos também fazer algumas aplicações nas outras três áreas. Mesmo assim, para aplicar esses conceitos, utilizamos na maioria das vezes os conceitos teóricos definidos na Geometria aqui representados pela área Espaço e Forma.

Através da análise dos conteúdos ensinados dessa área, podemos definir de fato como inserir e aplicar o ensino das construções geométricas na geometria e nas demais áreas de ensino.

Segundo [1] estão previstos para o 3° ciclo os seguintes conteúdos:

- Interpretação, a partir de situações-problema (leitura de plantas,croquis, mapas), da posição de pontos e de seus deslocamentos no plano, pelo estudo das representações em um sistema de coordenadas cartesianas.
- Distinção, em contextos variados, de figuras bidimensionais e tridimensionais, descrevendo algumas de suas características, estabelecendo relações entre elas e utilizando nomenclatura própria.
- Classificação de figuras tridimensionais e bidimensionais, segundo critérios diversos, como: corpos redondos e poliedros; poliedros regulares e não-regulares; prismas, pirâmides e outros poliedros; círculos, polígonos e outras figuras; número de lados dos polígonos; eixos de simetria de um polígono; paralelismo de lados, medidas de ângulos e de lados.
- Composição e decomposição de figuras planas.
- Identificação de diferentes planificações de alguns poliedros.
- Transformação de uma figura no plano por meio de reflexões, translações e rotações e identificação de medidas que permanecem invariantes nessas transformações (medidas dos lados, dos ângulos, da superfície).
- Ampliação e redução de figuras planas segundo uma razão e identificação dos elementos que não se alteram (medidas de ângulos) e dos que se modificam (medidas dos lados, do perímetro e da área).
- Quantificação e estabelecimento de relações entre o número de vértices, faces e arestas de prismas e de pirâmides, da relação desse número com o polígono da base e identificação de algumas propriedades, que caracterizam cada um desses sólidos, em função desses números.
- Construção da noção de ângulo associada à idéia de mudança de direção e pelo seu reconhecimento em figuras planas.
- Verificação de que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°.

No 4° ciclo estão previstos os seguintes conteúdos:

- Representação e interpretação do deslocamento de um ponto num plano cartesiano por um segmento de reta orientado.
- Secções de figuras tridimensionais por um plano e análise das figuras obtidas.
- Análise em poliedros da posição relativa de duas arestas (paralelas, perpendiculares, reversas) e de duas faces (paralelas, perpendiculares).

- Representação de diferentes vistas (lateral, frontal e superior) de figuras tridimensionais e reconhecimento da figura representada por diferentes vistas.

- Divisão de segmentos em partes proporcionais e construção de retas paralelas e retas perpendiculares com régua e compasso.

- Identificação de ângulos congruentes, complementares e suplementares em feixes de retas paralelas cortadas por retas transversais.

- Estabelecimento da razão aproximada entre a medida do comprimento de uma circunferência e seu diâmetro.

- Determinação da soma dos ângulos internos de um polígono convexo qualquer.

- Verificação da validade da soma dos ângulos internos de um polígono convexo para os polígonos não-convexos.

- Resolução de situações-problema que envolvam a obtenção da mediatriz de um segmento, da bissetriz de um ângulo, de retas paralelas e perpendiculares e de alguns ângulos notáveis, fazendo uso de instrumentos como régua, compasso, esquadro e transferidor.

- Desenvolvimento do conceito de congruência de figuras planas a partir de transformações (reflexões em retas, translações, rotações e composições destas), identificando as medidas invariantes (dos lados, dos ângulos, da superfície).

- Verificar propriedades de triângulos e quadriláteros pelo reconhecimento dos casos de congruência de triângulos.

- Identificação e construção das alturas, bissetrizes, medianas e mediatrizes de um triângulo utilizando régua e compasso.

- Desenvolvimento da noção de semelhança de figuras planas a partir de ampliações ou reduções, identificando as medidas que não se alteram (ângulos) e as que se modificam (dos lados, da superfície e perímetro).

- Verificações experimentais e aplicações do teorema de Tales.

- Verificações experimentais, aplicações e demonstração do teorema de Pitágoras.

2.2 Análise do conteúdo de Construções Geométricas nos livros didáticos

Nessa seção, vamos analisar como a geometria é apresentada em algumas coleções de livros didáticos no Brasil, e como as construções geométricas são inseridas nesse contexto. Para tal, foram escolhidas três coleções de livros do Ensino Fundamental utilizadas no Brasil.

- Matemática: Compreensão e Prática [18]

- Projeto Araribá: Matemática [19]

- Matemática e Realidade [20]

Em cada coleção vamos analisar como as construções geométricas são utilizadas, os objetivos e o contexto em que elas foram inseridas, a clareza com que os passos das construções foram exibidos e suas respectivas justificativas teóricas, não só em conteúdos da geometria, mas em toda a matemática em si.

2.2.1 Coleção Matemática - Compreensão e Prática

Esta coleção é bastante utilizada em diversas escolas particulares em todo o Brasil, mas não faz parte do Programa Nacional do Livro Didático 2014/2015/2016[3], portanto não é utilizado nas escolas públicas.

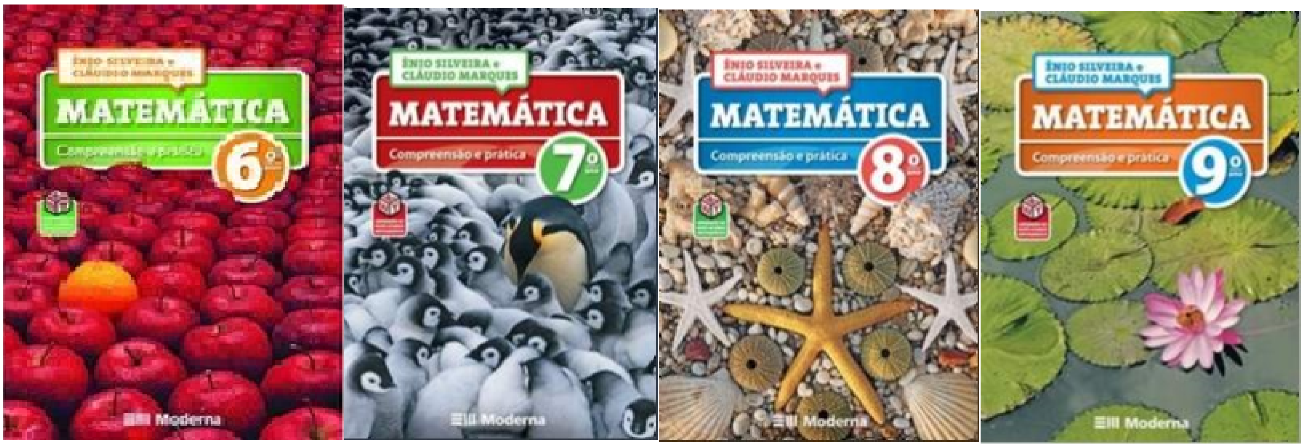


Figura 2.1: Coleção Matemática - Compreensão e Prática

A coleção tem por característica um texto com uma motivação inicial, uma boa abordagem teórica seguida de exercícios de fixação e alguns boxes que ajudam na compreensão do conteúdo, como "lendo e aprendendo" (que traz normalmente uma curiosidade do cotidiano), "trabalhando em equipe" (propões atividades para serem executadas em grupo), "curiosidades", "Um pouco de história" (traz a história do desenvolvimento do tema abordado no capítulo) e "trabalhando os conhecimentos adquiridos" (que seriam um tipo de exercícios de aprofundamento e testes de vestibular).

Durante os 4 volumes as exposições sobre construções geométricas são apresentadas junto com a abordagem de algum assunto teórico.

No livro indicado ao 6° ano são abordadas três construções: retas paralelas, perpendiculares e verificação de segmentos congruentes. Para construir uma reta paralela (ou perpendicular) a outra é utilizado uma régua (graduada ou não) e um esquadro. Porém, não são apresentadas construções com o par de esquadros, ou com o compasso. Também não são justificadas as construções, apenas são mostradas o passo a passo das mesmas. Ao tratar sobre o assunto de congruência de segmentos, é mostrado ao aluno como verificar se dois segmentos são congruentes utilizando o compasso (somente) como ferramenta. Na situação proposta, temos dois segmentos em que um é múltiplo do outro.

[3] O Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) tem como principal objetivo subsidiar o trabalho pedagógico dos professores por meio da distribuição de coleções de livros didáticos aos alunos da educação básica. Após a avaliação das obras, o Ministério da Educação (MEC) publica o Guia de Livros Didáticos com resenhas das coleções consideradas aprovadas. O guia é encaminhado às escolas, que escolhem, entre os títulos disponíveis, aqueles que melhor atendem ao seu projeto político pedagógico.

No livro indicado ao 7° ano as construções presentes nesse livro são: ângulos e a sua bissetriz. Neste livro é ensinado como construir um ângulo utilizando o transferidor. Novamente os passos das construções são apresentados, e nenhuma construção de ângulos utilizando o compasso é feita. Após a definição de bissetriz de um ângulo, é apresentado ao aluno a construção da mesma em 3 passos. Novamente, nenhuma reflexão é feita sobre as construções, nem a justificativa, somente o seu passo a passo (de forma resumida).

No livro indicado ao 8° ano são mostradas as construções de segmentos congruentes e novamente a bissetriz de um ângulo. A única diferença do livro do ano anterior é a apresentação da construção com régua e compasso e não somente a verificação de congruência de segmentos. Da mesma maneira, também é apresentado a construção de ângulos congruentes (ou transporte de ângulos), utilizando a régua e o compasso (e não somente o transferidor como no ano anterior). Novamente nenhuma justificativa é apresentada. A construção da bissetriz de um ângulo segue exatamente a mesma abordagem do 7° ano. Embora neste livro sejam tratados assuntos como polígonos e circunferência, em nenhum momento se faz alusão a construção geometrica destes.

No livro indicado ao 9° ano, após a abordagem teórica sobre Teorema de Tales, é apresentada a construção geométrica da divisão de segmentos em partes iguais e segmentos proporcionais. Diferentemente dos volumes anteriores, o autor citou no terceiro (e último passo) da construção a justificativa da mesma, fazendo referência ao Teorema de Tales. Neste volume existe um capítulo dedicado a Homotetia, apesar de não constar formalmente as justificativas das construções das figuras homotéticas, são citadas brevemente as suas propriedades. Também, é apresentado a construção geométrica da raiz quadrada de um número, através de um exemplo dado (cálculo da $\sqrt{8}$ através de duas projeções de um triângulo, com medidas 4 e 2). Não existe nenhum passo a passo ou explicação mais aprofundada sobre o tema (com alguma justificativa da construção), ou até mesmo alguma relação entre o conteúdo apresentado no capítulo e a construção, somente a exposição do exemplo sem a exibição de um valor aproximado para essa raíz.

Ao final da analise da coleção, percebemos que as construções geométricas foram inseridas de forma gradual através dos volumes, com uma concentração um pouco maior no 9° ano, o que é justificável já que a base matemática do aluno é maior. As construções possuem um passo a passo, porém sem muitos detalhes, seja com figuras ou em forma de texto. Nenhuma construção possui a sua justificativa embasada na teoria, e também não são propostos exercícios de fixação (com exceção do capítulo de projeções ortogonais) ou atividades que despertassem curiosidade para as construções. Assuntos importantes como a divisão da circunferência em partes iguais, o processo aproximado de retificação da circunferência e razão áurea não foram citados.

2.2.2 Coleção Matemática e Realidade

Essa coleção é bastante conhecida principalmente pelos autores Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce e Antônio Machado. Os dois primeiros são autores da coleção Fundamentos da Matemática Elementar[4] , muito utilizada por professores e alunos.

[4] A coleção em 11 volumes oferece conteúdo completo dos assuntos que fazem parte do currículo de Matemática no ensino médio, sendo uma opção de preparação para os vestibulares mais exigentes.

Figura 2.2: Coleção Matemática e Realidade

A coleção possui na maioria dos assuntos uma motivação inicial para a discussão do tema. Logo após essa motivação vem a abordagem teórica seguida de exercícios de fixação, "Desafio" (que pode ser com um contexto histórico ou atual, trazendo uma reflexão mais profunda sobre o tema apresentado), "Teste seu conhecimento" (que são testes de vestibular sobre o assunto) e uma seção que desperta curiosidade, chamada "Matemática em Notícia" (que traz uma notícia para ser discutida matematicamente). Na parte de geometria existe uma seção chamada "Construção", que em quase sua totalidade tem como objetivo complementar um tópico teórico da geometria.

Diferente da coleção [18], esta traz um detalhamento maior das construções, com passos ilustrados por figuras que ajudam o aluno a ter uma melhor noção de sua construção (raramente as justificativas são escritas). As propostas de construção são feitas dentro do contexto do assunto tratado, mas não trazem reflexões ao aluno acerca dos tópicos teóricos.

No livro indicado ao 6° ano são abordados as noções fundamentais de geometria (ponto, retas, planos, ângulos), polígonos e áreas. Nesse capítulo não existe nenhuma construção seja ela com compasso, régua, transferidor ou esquadros.

No livro indicado ao 7° ano, no capítulo 3, são apresentados os temas sobre ângulos e retas, e áreas. Nesse volume é mostrado uma uníca construção, de um ângulo de 60° utilizando o transferidor.

No livro indicado ao 8° ano são tratados os temas de retas e segmentos, ângulos, triângulos, quadriláteros, circunferência e círculo e quadriláteros inscrítiveis. Diferente dos dois volumes anteriores, nesse livro são propostas 15 construções aos alunos, sempre apresentadas como aplicação teórica dos temas da geometria. As construções apresentadas são as seguintes:

1. Transporte de segmentos
2. Ponto médio de um segmento
3. Retas paralelas utilizando a régua e compasso
4. Transporte de ângulos

5. Bissetriz de um ângulo utilizando régua e compasso
6. Reta perpendicular utilizando régua e compasso
7. Retas paralelas utilizando régua e compasso
8. Construção de um triângulo escaleno
9. Construção de um triângulo utilizando LAL (lado-ângulo-lado)
10. Construção de um triângulo utilizando ALA (ângulo-lado-ângulo)
11. Construção de um triângulo utilizando ALAp (ângulo-lado-ângulo oposto)
12. Construção de um triângulo retângulo
13. Construção de retas tangentes a circunferência
14. Construção de uma circunferência com um raio dado
15. Construção de um arco capaz

A construção 1 possue a mesma abordagem da coleção [18].

A construção 2 exibe como encontrar o ponto médio de um segmento, mas não faz nenhuma menção a mediatriz do mesmo e eenhuma justificativa para a construção.

A construção 6 ensina como traçar uma reta perpendicular (utilizando o compasso) passando por um ponto exterior. Nessa construção é utilizado o conceito de mediatriz, apesar de não estar presente a construção da mesma ao longo dos livros. Evidentemente é uma construção fácil, mas seria necessário que a mesma fosse construída e explorada ao longo dos livros. Nessa construção, o autor não deixa claro a propriedade que o ponto P (ponto de interseção dos arcos) possui ao traçar o arco $\widehat{AB}$ (ser equidistante das extremidades do segmento) o que acarreta que a reta que passa por P e pela interseção dos arcos é a mediatriz.

A construção 7 possui uma abordagem bastante interessante, pois utiliza o conceito dos ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal (ângulos correspondentes) para construir retas paralelas (e consequentemente utiliza o conceito sobre transporte de ângulos). As construções 8, 9, 10, 11 e 12 tratam sobre a construção de triângulos, utilizando a idéia dos casos de congruência (ao ser apresentado um caso de congruência, é proposto a construção de um triângulo utilizando esse caso). É muito importante tratar da construção de triângulos, mas seria extremamente interessante que esse assunto pudesse tratar da desigualdade triangular, além de mostrar que o caso ALL (ângulo-lado-lado) não é um caso de congruência. Apesar das construções estarem inseridas no contexto de congruência de triângulos, nenhuma relação entre as construções e os casos de congruência é feita.

As construções 14 e 15 são as mais complexas do livro, e tratam do traçado de retas tangentes a uma circunferência e do arco capaz, respectivamente. Apesar de estar inserida no capítulo de ângulos na circunferência, a construção do arco capaz não possui uma justificativa, nem faz o aluno refletir a respeito do material teórico apresentado no capítulo para executar a construção.

A construção 13 é bem simples, e mostra como construir uma circunferência com um raio dado. Obviamente por ser uma construção extremamente trivial, e bastante intuitiva se considerado o desenvolvimento matemático do aluno nessa série, perde-se um pouco o seu contexto. Seria muito mais interessante que ela fosse apresentada no 6° ano.

No livro indicado ao 9° são abordados os assuntos relacionados a segmentos proporcionais e semelhança, relações métricas e trigonométricas no triângulo retângulo, relações métricas no triângulo qualquer, polígonos inscritos e circunscritos e áreas. Nesse volume são apresentadas 12 construções:

1. Divisão de segmentos em partes congruentes
2. Divisão de segmentos em partes não congruentes
3. Construção de segmentos com medidas conhecidas I
4. Construção de segmentos com medidas conhecidas II
5. Construção de segmentos com medidas conhecidas III
6. Construção de segmentos com medidas conhecidas IV
7. Figuras com áreas equivalentes
8. Divisão da circunferência em 4 partes iguais
9. Divisão da circunferência em 3 partes iguais
10. Divisão da circunferência em 6 partes iguais
11. Retificação da circunferência
12. Construção de uma circunferência conhecendo o seu perímetro

A construção 1 seguem a mesma abordagem de [18].

As construções 3, 4, 5 e 6 propõem a construção de segmentos medindo $3\sqrt{2}$, $3\sqrt{3}$, $3\sqrt{5}$ e um segmento que seja a média geométrica de dois outros segmentos dados (no exemplo, os segmentos medem 1,25 e 4 cm, buscando encontrar o segmento $\sqrt{5}$ cm. Essas construções são interessantes pois dão ao aluno a noção de que alguns números irracionais são construtíveis.

As construções 8, 9 e 10 mostram como dividir a circunferência em 4, 3 e 6 partes iguais respectivamente. Este tema também poderia ser abordado no 8° ano do Ensino Fundamental. Apesar de ser o único livro das 3 coleções a mostrar o tema, pouco é discutido a respeito, nem mesmo uma generalização intuitiva de quais polígonos podem ser construídos com régua e compasso.

As construções 11 e 12 são interessantes, porém possuem um erro que pode confundir o aluno. Nessas construções são apresentados processos que dão a entender que são exatos, e não uma aproximação. Isso pode levar um aluno mais atento a se confundir acreditando que π seja um número racional.

Analisando os 4 volumes, percebemos que as construções ficaram extremamente concentradas no 4° ciclo do ensino fundamental, com o total de 29 construções contra apenas 1 construção no 3° ciclo. Obviamente, várias construções necessitam de uma base teórica mais sólida, que só é alcançada nos anos finais do ensino fundamental. Porém, se faz necessário que o aluno tenha o contato com o material e com as propriedades das construções geométricas desde o ínicio do 3° ciclo, justamente para que possa se habituar com o uso das construções geométricas como uma ferramenta importante.

O livro apresenta várias construções interessantes, com os passos bem ilustrados e explicados, mas assim como a coleção [18], carece de uma justificativa teórica para as construções (que não necessita de muita formalidade, mas é importante estar presente). Também não estão presentes qualquer exercício proposto utilizando construções geométricas, e nenhuma atividade que exija do aluno uma reflexão a respeito das propriedades apresentadas nos capítulos.

2.2.3 Coleção Projeto Araribá Matemática

A coleção Projeto Araribá Matemática é bastante utilizada nas escolas públicas brasileiras, pois faz parte do Projeto Nacional do Livro Didático 2014/2015/2016. Esta coleção é uma obra coletiva produzida pela Editora Moderna.

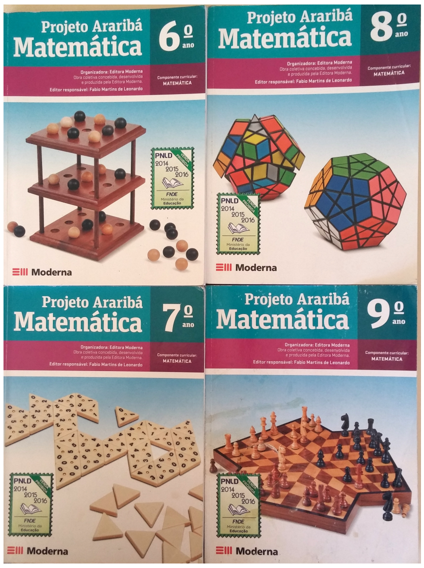


Figura 2.3: Coleção Projeto Araribá Matemática

A coleção tem como característica uma exposição téorica dos temas, e algumas seções que ajudam na compreensão dos diversos temas, como "Vamos Aplicar" (que seriam exercícios de fixação para utilizar os conhecimentos mais básicos da teoria, normalmente cálculos e aplicações de fórmulas), "Vamos Fazer" (que propõe reflexão em forma de exercícios sobre os temas apresentados, normalmente que levem o aluno a compreender os passos da teoria apresentada), "Trabalhando com a Informação" (que traz um assunto do cotidiano para ser discutido matematicamente, seja uma notícia ou uma situação do dia dia), "Atividades Integradas" (composta de exercícios de aprofundamento e alguns testes de vestibular), "Compreendendo um Texto" (apresenta um texto comum que pode ser interpretado matematicamente em situações específicas) e "Trabalho em Equipe" (que obviamente propõe uma atividade em grupo).

As construções geométricas estão presentes na seção "Vamos Fazer", servindo como uma ferramenta de reflexão em relação aos tópicos geométricos apresentados. Essa abordagem é diferente da coleção [18] onde as construções são feitas complementando a teoria, e também diferente da coleção [20] onde as construções são aplicações dos conteúdos apresentados.

No livro indicado ao 6° ano são apresentadas 2 construções. Da mesma forma que a coleção [18], é mostrado como utilizar o compasso para verificar segmentos congruentes e proporcionais (com valores inteiros), assim como a construção de retas paralelas e perpendiculares (com régua e esquadro).

O livro indicado ao 7° ano possui somente uma construção. A abordagem sobre a bissetriz é feita de uma forma extremamente inteligente e intuitiva ao aluno, utilizando primeiramente as dobraduras que mostram a divisão do ângulo em partes iguais. Em um segundo momento, o aluno é estimulado a construir a bissetriz utilizando o transferidor e finalmente são mostrados os passos para a construção da bissetriz com régua e compasso.

O livro do 8° ano possui 3 construções. É apresentado ao aluno uma reflexão sobre retas paralelas cortadas por uma transversal utilizando o transporte de ângulos, da mesma forma que [20]. Apesar de possuir uma abordagem idêntica, ela não possui um passo a passo da mesma. Também, são apresentadas em forma de exercício a construção da mediana do triângulo (utilizando mediatriz), da altura (utilizando o conceito de reta perpendicular passando por um ponto externo a uma reta) e da bissetriz. Em todos os casos o exercício traz reflexões ao aluno sobre as propriedades das cevianas. Durante o passo a passo da construção da mediana e da altura, dois conceitos importantes são utilizados (mediatriz e reta perpendicular) e não são sequer definidos ou justificados. As retas perpendiculares estão presentes no livro do 6° ano, mas somente com a utilização de régua e esquadro, mas durante a construção ela não é citada, o que faz com que o passo a passo seja decorado e não compreendido. Não cabe ao aluno fazer toda a reflexão sobre as construções por conta própria, sem o apoio do material didático.

Após a construção de algumas cevianas, são propostos exercícios interessantes que levam o aluno a fazer uma reflexão sobre os pontos notáveis (incentro e circuncentro). Novamente a reta perpendicular foi utilizada sem estar previamente definida. Isso pode de fato confundir o aluno, já que o mesmo está utilizando uma construção desconhecida, podendo até ser levado a acreditar que se trata de uma construção particular sobre cevianas.

Neste livro a mediatriz de um triângulo é definida de uma forma restrita, mesmo tendo sido utilizada nas construções das páginas anteriores. Obviamente que um dos objetivos das construções geométricas pode ser apresentar uma situação-problema que faça com que a teoria seja desenvolvida (com suas definições e propriedades), o que não foi o caso desse assunto. Utilizar essa definição pode fazer com que o aluno acredite que as mediatrizes só possam ser feitas em triângulos, e não em segmentos.

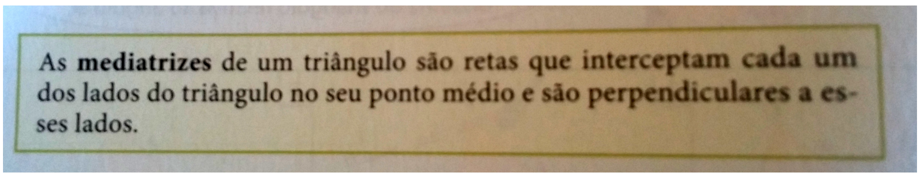

As **mediatrizes** de um triângulo são retas que interceptam cada um dos lados do triângulo no seu ponto médio e são **perpendiculares** a esses lados.

Figura 2.4: Definição de Mediatriz

Finalizando as construções do livro, novamente é feita uma reflexão em forma de exercício a respeito da medida do lado de um hexágono regular inscrito. A construção não é feita, e nem generalizada para outros polígonos.

No livro sugerido ao 9° ano nenhuma construção é apresentada. Alguns temas importantes deixaram de ser abordados, como razões entre segmentos, construção de polígonos inscritos e arco capaz.

2.2.4 Considerações sobre os conteúdos apresentados nas três coleções

Através da análise de livros anteriormente feita, podemos concluir que as coleções apresentam diferenças de abordagem dos diversos temas de construções geométricas, tanto em relação a quantidade das construções, como também ao ano escolar em que são apresentadas. Em nenhuma delas as construções geométricas são tratadas através de uma situação-problema, ou como uma ferramenta alternativa para a resolução de um problema.

Na coleção [18], as construções apenas complementam os tópicos teóricos, sem acrescentar nenhuma nova discussão a respeito dos temas. Alguns temas importantes não foram citados, como a construção de polígonos regulares, razão áurea, traçado de diferentes retas perpendiculares e paralelas utilizando o compasso, pontos notáveis de um triângulo, além do arco capaz. Com exceção do capítulo de projeções ortogonais, nenhum exercício é proposto.

Na coleção [20] as construções ganham uma maior importância, mais pelo detalhamento e pela quantidade das construções do que pela sua utilidade no contexto que elas estão inseridas. A coleção apresenta a maior quantidade de construções das 3 coleções avaliadas, porém muito concentradas nos últimos anos. Esse fato é um ponto negativo, pois a coleção não cria o hábito no aluno desde o ínicio a inserir o desenho no pensamento matemático. Ao final dos 4 volumes, o aluno foi capaz de conhecer as construções mais relevantes, com os seus passos muito bem explicados. As justificativas de cada construção não estão presentes, portanto o aluno é levado a "decorar" os passos. Também não são propostos exercícios.

A coleção [19] assim como [18], possui uma pequena quantidade de construções, porém as apresenta na maioria das vezes através de exercícios. A construção da bissetriz, por exemplo, é feita de maneira gradativa, utilizando dobraduras e posteriormente o traçado com o transferidor, finalizando com a construção com régua e compasso. A coleção não possui um detalhamento satisfatório das construções, mesmo se comparado com a coleção [18]. A coleção possui alguns equívocos em relação a sequência didática, como por exemplo a construção da mediana de um triângulo sem antes ter definido a construção da mediatriz (que auxilia nessa construção). A coleção também constrói circulos inscritos e circunscritos a um triângulo através do incentro e circuncentro, dando bastante importância ao tema.

As coleções [18] e [19] mostraram como construir retas paralelas e perpendiculares utilizando a régua e o compasso no 6° ano do ensino fundamental. É interessante que nessa série o aluno comece a conhecer os instrumentos que serão utilizados, e a construção de retas paralelas e perpendiculares sem a utilização do compasso é importante, pois o aluno ainda não possui o embasamento matemático suficiente para compreender as justificativas das construções com o compasso.

Em ambas construções é mais recomendado a utilização do par de esquadros, já que na construção das retas paralelas o par de esquadros proporciona um melhor traçado, pois o esquadro que servirá de apoio para a construção possui uma área maior do que uma simples régua. Nas construções das retas perpendiculares o traçado como foi proposto em ambos os livros não é satisfatório, pois a junção entre o esquadro e a régua é justamente o vértice, sendo necessário que o desenho seja dividido em dois (primeiro é traçada um segmento acima da reta e depois ao retirar a régua que serve de apoio, construimos o prolongamento desse segmento, traçando uma reta perpendicular).

2.3 Proposta de ensino das contruções geometricas

Nossa proposta é inserir as construções geométricas nos diversos temas da Matemática durante o ensino fundamental, podendo utiliza-las basicamente com três objetivos:

1. Como complementação de um tópico teórico da geometria, mostrando sua aplicação;
2. Como situação problema que motive a discussão teórica do tema;
3. Como uma ferramenta alternativa para a resolução de um problema.

A utilização das Construções Geométricas deve ser livre, contextualizada sempre que possível, seja em situações reais do cotidiano ou de contextualização na própria matemática. Para inseri-las no ensino da matemática, devemos criar uma sequência didática dos temas de Espaço e Forma apresentados por [1] em cada ano do ensino fundamental, a medida que os temas forem sendo apresentados, utilizando os objetivos citados acima. Os temas podem ser divididos da seguinte forma:

6° **ano do Ensino Fundamental**

- Noções fundamentais de geometria (ponto, reta, plano)
- Apresentação das figuras geométricas planas (ângulos, polígonos, triângulos, quadriláteros, circunferência e círculo) apresentando suas propriedades, perímetro e áreas e simetrias.
- Apresentação dos sólidos geométricos (poliedros e corpos redondos), suas planificações e a visão espacial

7° **ano do Ensino Fundamental**

- Ângulos (congruentes, adjacentes, reto, complemento/suplemento/replemento de um ângulo).
- Retas

8° **ano do Ensino Fundamental**

- Retas e ângulos
- Triângulos (classificação, cevianas e pontos notáveis, lei angular de Tales, propriedades, condição de existência)
- Quadriláteros (classificação, propriedades, soma das medidas dos ângulos)
- Polígonos (elementos e classificação, suas diagonais e ângulos, simetria, ângulo central), polígonos inscritos, circunscritos.
- Circunferência (posições, segmentos tangentes, arco de circunferência, ângulos na circunferência)

9° **ano do Ensino Fundamental**

- Teorema de Tales da proporcionalidade
- Semelhança de Triângulos
- Relações Métricas no Triângulo Retângulo
- Relações Trigonométricas no Triângulo Retângulo
- Relações Trigonométricas no Triângulo Qualquer
- Relações Métricas na Circunferência
- Poligonos Regulares Inscritos e Circunscritos
- Áreas das principais figuras planas

As atividades propostas nesse trabalho seguirão a divisão dos conteúdos listada acima.

Capítulo 3

A régua e o compasso

No livro "Os Elementos"[1] todas as construções são feitas utilizando uma régua não graduada e um compasso. Os Elementos são basicamente divididos em noções primitivas (definições, postulados e noções comuns) e as consequências (teoremas e problemas). Durante a maior parte do livro a geometria vem acompanhada pelas construções geométricas. Apesar de sua extrema importância, em nenhum momento da obra de Euclides[2] são citadas sequer as palavras "régua e compasso" e até mesmo que as construções devam ser feitas com tais instrumentos.

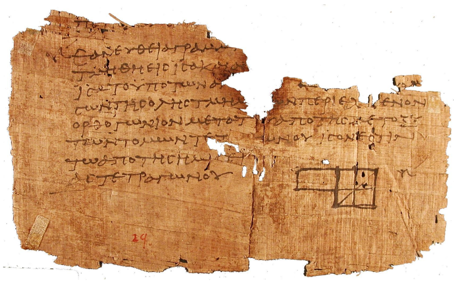


Figura 3.1: Os Elementos

Figura 3.2: Euclides de Alexandria

Durante sua obra não foram descritos os passos das construções das proposições, mas somente suas demonstrações. O objetivo de sua obra não era exatamente a execução dos traçados, mas sim o estudo da possibilidade de construir a figura com régua e compasso.

Segundo [11, p.161], uma das explicações para a exclusividade de utilização da régua e do compasso seria o fato de Platão desprezar as construções mecânicas, realizadas com ferramentas reais. Outra explicação para o uso somente desses dois instrumentos se deve a um melhor desenvolvimento pedagógico da obra. Por serem construções mais simples, a régua e o compasso eram utilizados sempre que possível, simplificando assim os problemas de construção. Portanto não podemos dizer que se trata da proibição da utilização de outros materiais, mas sim de uma otimização.

3.1 Os três postulados de Euclides

O uso desses instrumentos seguiam os três primeiros postulados:

[1]Os Elementos de Euclides é um tratado matemático e geométrico consistindo de 13 livros escrito pelo matemático grego Euclides em Alexandria por volta de 300 a.C.. [4]

[2]Euclides de Alexandria (fl. c. 300 AC) foi um matemático platónico e escritor possivelmente grego. [4]

1. Traçar uma reta de qualquer ponto a qualquer outro ponto;
2. Prolongar uma reta finita continuamente em uma linha reta;
3. Descrever um círculo com qualquer centro e qualquer raio.

Esses instrumentos são representados graficamente por uma linha reta e pelo círculo. Percebemos através desses postulados que a reta não possuía nenhuma propriedade métrica.

Segundo [5] a maneira como o terceiro postulado é utilizado nas construções leva a acreditar que Euclides utilizava um "compasso dobradiço" que voltava a sua posição inicial assim que fosse retirado do papel, ou seja, ele não conservava distâncias e consequentemente era impossível o transporte de segmentos. Analisando as três primeiras proposições do Livro I dos Elementos, verificamos que tratam justamente de como transportar segmentos utilizando esse compasso Euclidiano (que não conservava distâncias).

As três primeiras proposições do Livro I são as seguintes:

Proposição 1: Sobre um segmento determinado construir um triângulo equilátero.

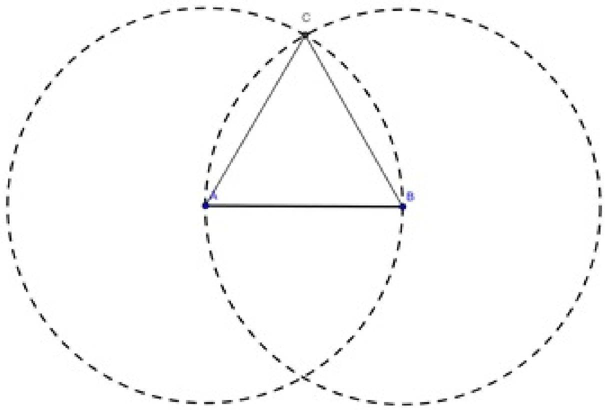


Figura 3.3: Construção do triângulo equilátero

Seja o segmento $\overline{AB}$ com um comprimento dado. Com centro em A, construímos uma circunferência de raio $\overline{AB}$. Com centro em B, construímos uma circunferência de mesmo raio $\overline{AB}$.

O segmento $\overline{AC}$ é igual a $\overline{AB}$, pois são os raios de uma mesma circunferência. O segmento $\overline{BC}$ também é igual a $\overline{AB}$ pelo mesmo motivo. Portanto $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC}$, logo o triangulo é equilátero.

Proposição 2: De um ponto dado construir um segmento congruente a um segmento dado (transporte de segmentos)

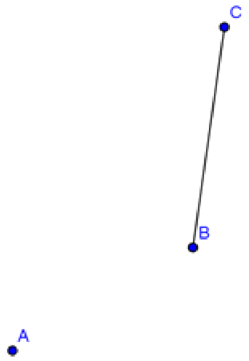


Figura 3.4: Ponto A e segmento $\overline{BC}$

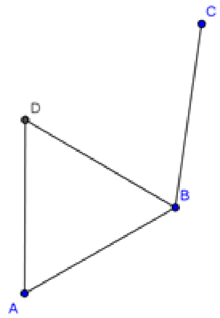


Figura 3.5: ΔABD e o segmento $\overline{BC}$

Queremos construir um segmento de tamanho $\overline{BC}$ a partir do ponto A. Podemos construir o segmento $\overline{AB}$ e em seguida construir o triangulo equilátero ΔABD (Proposição I).

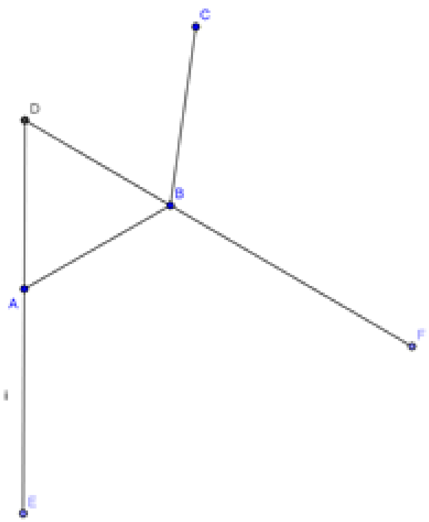


Figura 3.6: Prolongamento $\overline{DA}$ e $\overline{DB}$.

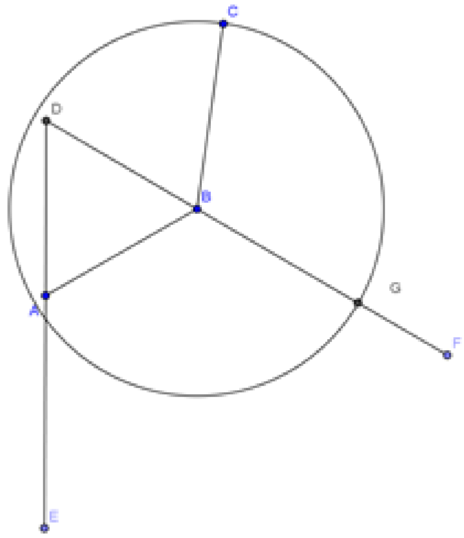


Figura 3.7: Circunferência $C(B, \overline{BC})$.

Podemos prolongar $\overline{DA}$ e $\overline{DB}$ até os pontos E e F respectivamente.

Traçamos uma circunferência com centro em B e raio $\overline{BC}$. Logo, marcamos com G o ponto de intereseção entre essa circunferência e o segmento $\overline{DF}$.

Agora, traçamos uma circunferência com centro em D e raio DG. Imediatamente, marcamos com H o ponto de intereseção entre essa circunferência e o segmento $\overline{DE}$.

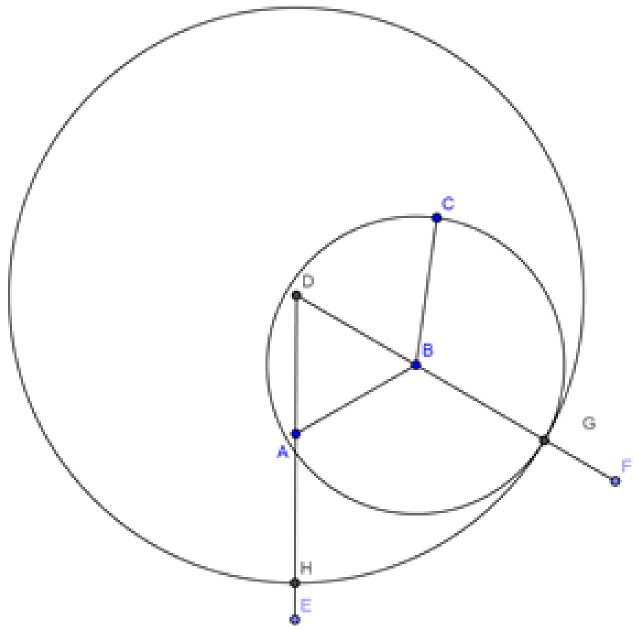


Figura 3.8: Circunferência $C(D, \overline{DG})$.

Assim $\overline{BC} = \overline{BG}$, pois é o raio da circunferência com centro em B, analogamente $\overline{DH} = \overline{DG}$ pois são raios da circunferência com centro em D. Por outro lado, o triangulo ΔABD é equilátero, logo $\overline{DA} = \overline{DB}$. Então, $\overline{AH} = \overline{BG} = \overline{BC}$. Portanto, o circulo com centro em A e raio $\overline{AH}$ nos fornecerá o segmento de medida $\overline{BC}$, em qualquer direção.

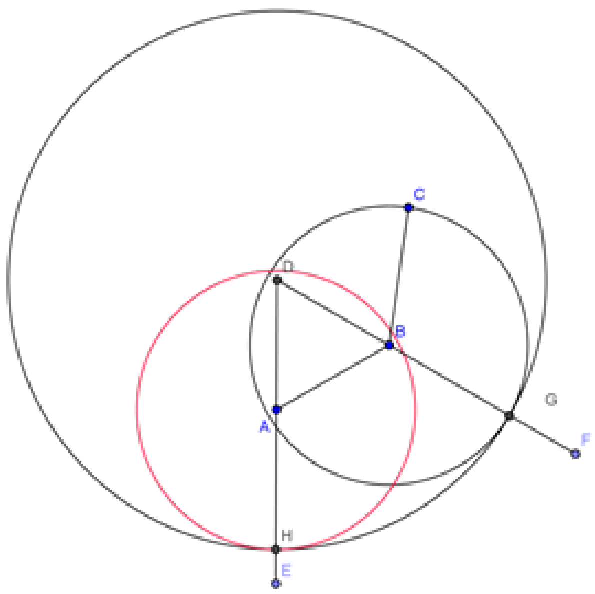


Figura 3.9: Segmento $\overline{BC}$.

Proposição 3: Dadas dois segmentos de tamanhos diferentes, subtrair do maior uma parte igual ao segmento menor. (subtração de segmentos)

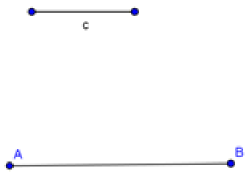


Figura 3.10: Segmento $\overline{AB}$ e c

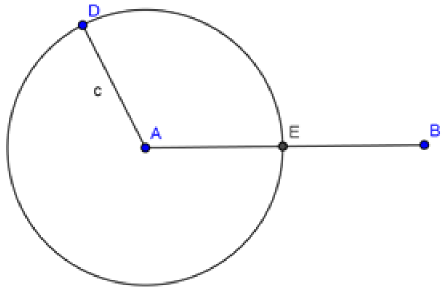


Figura 3.11: Subtração dos segmentos

Devemos subtrair de $\overline{AB}$ o segmento c.

Construímos a circunferência com centro em A e raio $\overline{AD}$, onde $\overline{AD} = c$. Como $\overline{AD} = \overline{AE} = c$, tiramos de $\overline{AB}$ o segmento c.

Segundo [7, p.365] toda a obra de Euclides é um conjunto de operações restritas a (e suas interseções).

1. Traçados de retas e circunferências
2. Interseção de retas com retas
3. Interseção de circunferência e circunferência
4. Interseção de retas e circunferências.

Nesse trabalho iremos utilizar somente os três postulados propostos por Euclides, e vamos considerar o uso do compasso atual, que transporta distancias, uma vez que através da Proposição II esse fato foi demonstrado.

Através das operações citadas por [7], podemos definir alguns lugares geométricos que utilizaremos posteriormente em nossas construções.

Capítulo 4

Os três problemas clássicos

A maioria das construções geométricas que os gregos antigos tinham conhecimento estão nos Elementos. Nessa época três problemas foram propostos, alguns deles sem solução para época. Esses três famosos problemas com enunciados extremamente simples provocaram uma enorme frustração durante muito tempo, justamente pela impossibilidade de sua construção somente utilizando uma régua não graduada e um compasso.

Segundo [4], a importância desses problemas se deve as tentativas de resolução, que levaram a outras descobertas, como as seções cônicas, curvas cúbicas e quádricas e transcendentes. Posteriormente houve o desenvolvimento de parte das teorias das equações ligadas a domínios de racionalidade, números algébricos e teoria dos grupos.

Somente dois mil anos depois da criação dos problemas (no século XIX) foi descoberta a impossibilidade de construção dos mesmos utilizando somente régua não graduada e compasso. Os três problemas são os seguintes:

1. Trissecção de um ângulo: dividir um ângulo arbitrário dado em três partes iguais;
2. Quadratura do circulo: construir um quadrado com área igual a de um circulo dado;
3. Duplicação do cubo, ou seja, construir o lado de um cubo com o dobro do volume de um cubo dado;

O objetivo desse trabalho não é a demonstração rigorosa da impossibilidade de construção desses problemas, mas sim trazer uma reflexão sobre os mesmos, desenvolvendo formas aproximadas de resolução, ou utilizando outros materiais como uma régua graduada

4.1 Demonstrações da impossibilidade de construção com régua e compasso dos problemas clássicos

Nas demonstrações sobre a duplicação do cubo e trissecção de um ângulo arbritário, utilizaremos dois teoremas:

Teorema 4.1.1 *Se um número racional $\frac{a}{b}$ com a e b primos entre si, é raiz de uma equação polinomial de coeficientes inteiros* $C_n x^n + C_{n-1}x^{n-1} + ... + C_2x^2 + C_1x + C_0 = 0$

então a será um divisor de C_0 e b será um divisor de C_n.

DEMONSTRAÇÃO:

Como $\frac{a}{b}$ é raíz da equação, temos que:

$C_n(\frac{a}{b})^n + C_{n-1}(\frac{a}{b})^{n-1} + ... + C_2(\frac{a}{b})^2 + C_1\frac{a}{b} + C_0 = 0$

Multiplicando a equação por b^n, temos:

$C_na^n + C_{n-1}a^{n-1}b + ... + C_2a^2b^{n-2} + C_1ab^{n-1} + C_0b^n = 0$

Utilizando essa expressão, primeiramente vamos isolar C_na^n e posteriormente C_0b^n:

(I) $C_na^n = -b(C_{n-1}a^{n-1} + ... + C_1ab^{n-2} + C_0b^{n-1})$

(II) $C_0b^n = -a(C_na^{n-1} + C_{n-1}a^{n-2}b + ... + C_1b^{n-1})$

Como todos os coeficientes são inteiros, assim como a e b também são, podemos reescrever as equações da seguinte maneira:

Sendo k e p números inteiros, temos:

(I) $C_na^n = -b.k$, ou seja $\frac{C_na^n}{b} = -k$

(II) $C_0b^n = -a.p$, ou seja $\frac{C_0b^n}{a} = -p$

Então C_na^n é divisível por b. Como a^n e b são primos entre si, C_n é divisível por b. Analogamente, C_0 e a.

Teorema 4.1.2 *A condição necessária e suficiente para que três raízes de uma equação de grau 3, de coeficientes racionais sejam construtíveis por régua e compasso é que uma delas seja racional.*

Dizer que um numero é construtível com régua e compasso significa que podemos construir com régua e compasso, em um numero finito de passos, um segmento cuja medida é o numero dado, a partir de um segmento que tomamos como unidade. Os números construtíveis com régua e compasso são aqueles obtidos de números construtíveis aplicando neles as quatro operações fundamentais $(+, -, \cdot, \div)$ e a extração de raiz quadrada.

DEMONSTRAÇÃO:

Ver [12, p. 14].

A Trissecção de um ângulo

Se um ângulo arbitrário θ é construtível utilizando régua e compasso, então seu cosseno (e seu seno) também serão reciprocamente (ver [16, p. 102]). Podemos então traduzir esse problema para a construção de $cos(\frac{\theta}{3})$ ou $sen(\frac{\theta}{3})$. Através de uma fórmula trigonométrica, podemos relacionar θ e $\frac{\theta}{3}$ da seguinte maneira:

$cos(\theta) = 4cos^3(\frac{\theta}{3}) - 3cos(\frac{\theta}{3})$

Em outras palavras, para resolver o problema, bastaríamos encontrar a solução cúbica $4x^3 - 3x - b = 0$, onde $b = cos(\theta)$ e $x = cos(\frac{\theta}{3})$.

O que devemos demonstrar é que a trissecção não pode ser efetuada por um procedimento válido para todos os ângulos. Tomemos então, $\theta = 60°$. Sendo $b = cos(60°) = \frac{1}{2}$.

Portanto a equação a ser resolvida seria:

$8x^3 - 6x - 1 = 0$

Utilizando o Teorema 4.1.2, precisamos mostrar que a equação não possui raiz racional para que o ângulo não seja construtível.

Através do Teorema 4.1.1, sabemos que se a equação possui uma raíz racional $\frac{a}{b}$, os possíveis valores de a são ±1 e os de b são $\pm1, \pm2, \pm4$ e ±8. Logo, as possíveis raízes seriam: $\pm1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{8}$. Verificando essas possíveis raízes, descobrimos que nenhuma delas é raiz de fato da equação, portanto o ângulo de $20°$ não pode ser construído.

A Duplicação de um cubo

Vamos supor um cubo com aresta unitária, e portanto com volume também unitário. Queremos encontrar um cubo de aresta x e volume igual ao dobro do cubo dado. Portanto:

$$x^3 = 2$$

Através do Teorema 4.1.2, para que x seja construtível, deve existir pelo menos um valor racional. Ou seja, a equação $x^3 - 2 = 0$ deve ter uma raíz racional. Utilizando o Teorema 4.1.1 sabemos que as possíveis raízes racionais seriam ±1 ou ±2, mas ambas não satisfazem a equação. Como a equação não possui raízes racionais, a aresta x não pode ser contruida utilizando somente régua e compasso.

A quadratura do círculo

Para demonstrar a quadratura do círculo são utilizadas algumas técnicas de Matemática mais avançadas do que as propostas por esse trabalho. Basicamente, o problema consiste em encontrar um quadrado que possua a mesma área de um círculo dado.

Ou seja, dado um círculo de raio unitário, devemos encontrar o lado l de um quadrado, tal que:

$$l^2 = \pi l = \sqrt{\pi}$$

Portanto, devemos construir um segmento de tamanho $\sqrt{\pi}$. Para tal vamos considerar duas definições:

Definição 4.1.1 *Um número real é chamado de número algébrico quando satisfaz alguma equação algébrica da forma* $C_nx^n + C_{n-1}x^{n-1} + ... + C_2x^2 + Cx + C_0 = 0$*, na qual os coeficientes* $C_n, C_{(n-1)}, ..., C_1, C_0$ *são números inteiros. Quando um número real não satisfaz essa equação, dizemos que ele é um número trancedente.*

Proposição 4.1.1 *Todos os segmentos que podem ser construídos com régua e compasso tem medida igual a um número algébrico.*

O número π é transcendente, tendo sido provado em 1881 por Ferdinand Von Lindemann[1]. Como π é transcendente, $\sqrt{\pi}$ também será, logo não poderá ser construtível. Essa demonstração está presente em [10].

4.2 Algumas aproximações e construções dos três problemas clássicos

Durante vários anos surgiram algumas tentativas de resolução desses três problemas e essas tentativas foram responsáveis pelo desenvolvimento de outros ramos da matemática. Durante essas tentativas surgiram algumas aproximações, que são extremamente eficazes, pois o erro produzido é muito pequeno. Da mesma maneira, algumas soluções podem ser possíveis com algumas pequenas adaptações como réguas graduadas, por exemplo. A seguir mostraremos algumas maneiras de "resolver" os três problemas clássicos, que podem ser mostradas em sala de aula.

A aproximação egípcia da quadratura do círculo

A dedução da aproximação egípcia era feita através de um círculo inscrito em um quadrado. Essa explicação foi encontrada no Papiro Rhind.[2]

A aproximação egípcia divide cada lado (l) do quadrado em 9 partes e conclui que a área do quadrado de lado $\frac{8l}{9}$ é aproximadamente igual a área do círculo de diâmetro l.

$\pi.r^2 = \pi.(\frac{l}{2})^2 = \pi.\frac{l^2}{4}$

Ou seja, $\pi.\frac{l^2}{4} \approx (\frac{8l}{9})^2$

$\pi \approx 4.(\frac{8}{9})^2 \approx 3,1604.$

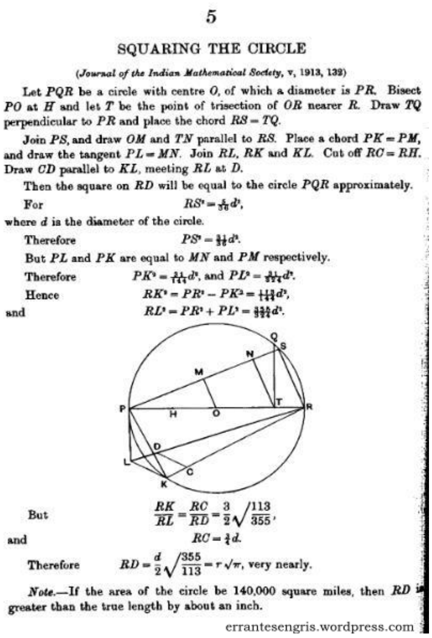
Essa aproximação possui erro na segunda casa decimal.

[1] Carl Lois Ferdinand von Lindemann (Hanôver, 12 de Abril de 1852 - Munique, 6 de Março de 1939) foi um matemático alemão, notável por sua prova, publicada en 1882, que π é um número transcendente, isto é, não é um raiz de nenhum polinômio com coeficientes racionais. [4]

[2] Papiro Rhind é provavelmente um dos mais conhecidos e antigos papiros da Matemática Antiga, a considerar que o manuscrito foi copiado por Ahmes por volta de 1650 a.C. de uma fonte ainda mais antiga. [4]

A Aproximação de Srinivasa Ramanujan para a quadratura do círculo

A aproximação feita por Ramanujan[3] possui muitos passos, porém traz uma precisão extremamente alta. Este procedimento foi publicado no Journal of Mathematical Society indiano em 1913, utilizando apenas régua não graduada e compasso.



5

SQUARING THE CIRCLE

(*Journal of the Indian Mathematical Society*, v, 1913, 132)

Let PQR be a circle with centre O, of which a diameter is PR. Bisect PO at H and let T be the point of trisection of OR nearer R. Draw TQ perpendicular to PR and place the chord $RS = TQ$.

Join PS, and draw OM and TN parallel to RS. Place a chord $PK = PM$, and draw the tangent $PL = MN$. Join RL, RK and KL. Cut off $RC = RH$. Draw CD parallel to KL, meeting RL at D.

Then the square on RD will be equal to the circle PQR approximately.

For $\quad RS^2 = \frac{5}{36}d^2,$

where d is the diameter of the circle.

Therefore $\quad PS^2 = \frac{31}{36}d^2.$

But PL and PK are equal to MN and PM respectively.

Therefore $\quad PK^2 = \frac{31}{144}d^2$, and $PL^2 = \frac{31}{324}d^2.$

Hence $\quad RK^2 = PR^2 - PK^2 = \frac{113}{144}d^2,$

and $\quad RL^2 = PR^2 + PL^2 = \frac{355}{324}d^2.$

But $\quad \frac{RK}{RL} = \frac{RC}{RD} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{113}{355}},$

and $\quad RC = \frac{3}{4}d.$

Therefore $\quad RD = \frac{d}{2}\sqrt{\frac{355}{113}} = r\sqrt{\pi}$, very nearly.

Note.—If the area of the circle be 140,000 square miles, then RD is greater than the true length by about an inch.

errantesengris.wordpress.com

Figura 4.1: Publicação de Ramanujan no Journal of Mathematical Society

Construção:

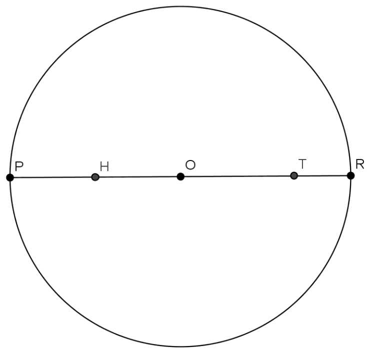


Figura 4.2: H ponto médio de $\overline{PO}$ e $\overline{RT} = \frac{1}{3}\overline{OR}$

Seja um círculo de centro O e diâmetro $\overline{PR}$. Chamamos de H o ponto médio do raio $\overline{PO}$. Dividimos o raio $\overline{OR}$ em 3 partes iguais, e chamamos de T o ponto mais próximo de R.

[3]Srinivasa Ramanujan foi um matemático indiano. Sem formação acadêmica, realizou contribuições substanciais nas áreas da análise matemática, teoria dos números, séries infinitas, frações continuadas, etc. [4]

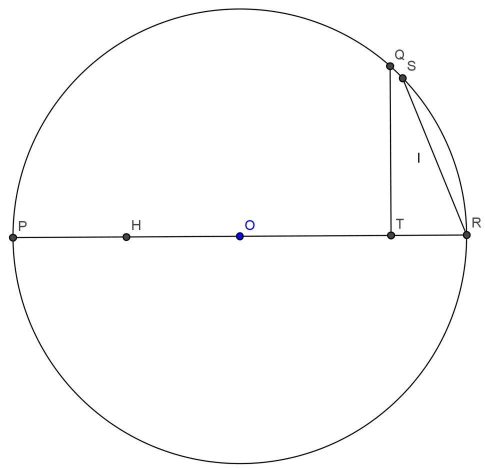


Figura 4.3: $\overline{TQ} \perp \overline{PR}$ e $\overline{RS} = \overline{TQ}$

Traçamos $\overline{TQ}$ perpendicular a $\overline{TR}$ e construimos $\overline{RS}$ tal que $\overline{RS} = \overline{TQ}$.

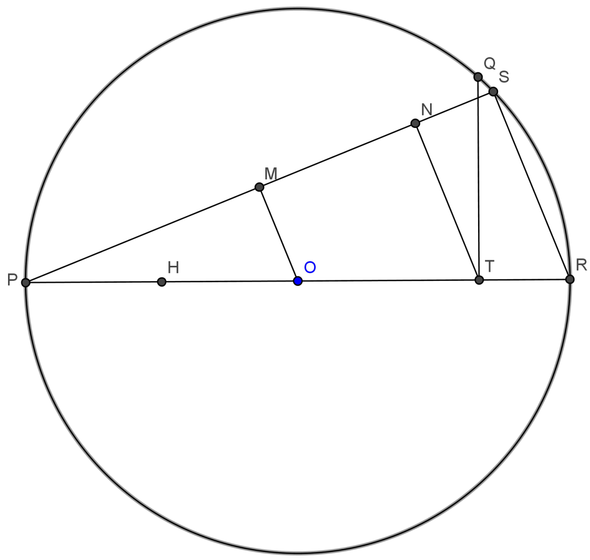


Figura 4.4: $\overline{OM} \parallel \overline{RS}$ e $\overline{TN} \parallel \overline{RS}$

Traçamos $\overline{PS}$ e construimos $\overline{OM}$ e $\overline{TN}$ paralelas a $\overline{RS}$. Esses segmentos são perpendiculares a $\overline{PS}$ pois o ângulo $\angle PSR$ é oposto ao diâmetro.

Construímos a corda $\overline{PK}$ igual ao segmento $\overline{PM}$ e a tangente $\overline{PL}$ igual ao segmento $\overline{MN}$.

Traçamos os segmentos $\overline{RL}$, $\overline{RK}$ e $\overline{KL}$.

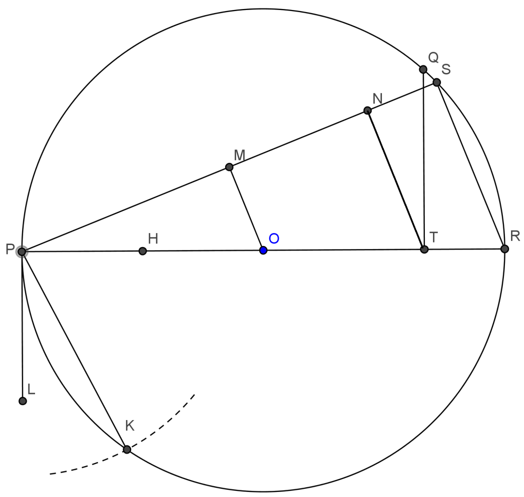


Figura 4.5: $\overline{PK} = \overline{PM}$ e $\overline{PL} = \overline{MN}$

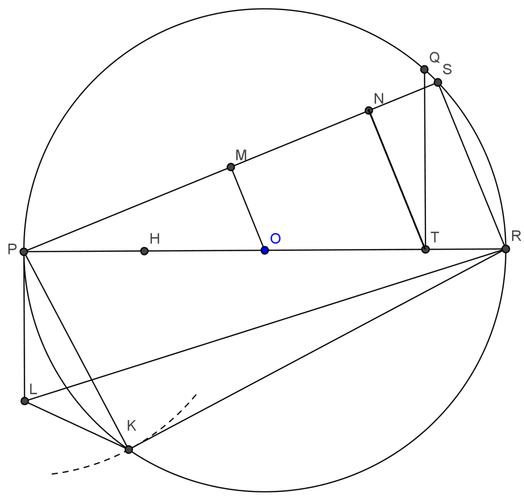


Figura 4.6: Construção $\overline{RL}$, $\overline{RK}$ e $\overline{KL}$

Marcamos o ponto C sobre o segmento $\overline{RK}$ tal que $\overline{RC} = \overline{RH}$ e traçamos por este ponto uma paralela a $\overline{KL}$, até o ponto D de interseção com $\overline{RL}$.

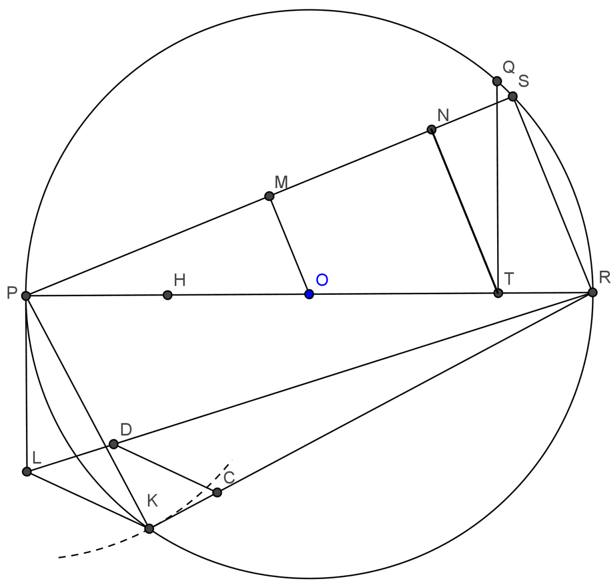


Figura 4.7: $\overline{RC} = \overline{RH}$ e $\overline{CD} \parallel \overline{KL}$

O segmento $\overline{RD}$ é o lado do quadrado com a área aproximada a área do círculo PQR.

Demonstração:

Chamamos de r o raio da circunferência $\overline{OP}$ e d o diâmetro $\overline{PR}$.

Como $\overline{TQ}$ é perpendicular ao diâmetro, temos:

$\overline{TQ}^2 = \frac{r}{3}.\frac{5r}{3}$, logo:

$\overline{TQ}^2 = \frac{5r^2}{9} = \frac{5d^2}{36}$. Como $\overline{TQ} = \overline{RS}$, temos $\overline{RS}^2 = \frac{5d^2}{36}$.

Aplicando o Teorema de Pitágoras no Triângulo ΔPRS:

$$\begin{aligned} \overline{PR}^2 &= \overline{RS}^2 + \overline{PS}^2 \\ d^2 &= \frac{5d^2}{36} + \overline{PS}^2 \\ \overline{PS}^2 &= \frac{31d^2}{36}. \end{aligned}$$

Como os segmentos $\overline{MO}$, $\overline{TN}$ e $\overline{RS}$ são paralelos, sabemos que:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{PM}}{\overline{PO}} &= \frac{\overline{PS}}{\overline{PR}} \\ \overline{PM} &= \frac{\overline{PS}}{2} \\ \overline{PM}^2 &= \frac{\overline{PS}^2}{4} \\ \overline{PM}^2 &= \frac{31d^2}{144}. \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} \overline{MN} &= \frac{\overline{PS}}{3} \\ \overline{MN}^2 &= \frac{\overline{PS}^2}{9} \\ \overline{MN}^2 &= \frac{31d^2}{324}. \end{aligned}$$

Aplicando novamente o Teorema de Pitágoras, agora nos ΔPRK e ΔPRL:

$\overline{PR}^2 = \overline{PK}^2 + \overline{RK}^2$, onde $\overline{PR} = 2d$ e $\overline{PK} = \overline{PM}$, temos

$$\overline{RK}^2 = \frac{113d^2}{144}.$$

Analogamente como $\overline{RL}^2 = \overline{PR}^2 + \overline{PL}^2$, onde $\overline{PL} = \overline{MN}$, temos

$$\overline{RL}^2 = \frac{355d^2}{324}.$$

Como $\overline{CD}$ e $\overline{KL}$ são paralelas, temos:

$$
\begin{aligned}
\frac{\overline{RC}}{\overline{RD}} &= \frac{\overline{RK}}{\overline{RL}} = \sqrt{\frac{\overline{RK}^2}{\overline{RL}^2}} \\
&= \sqrt{\frac{\frac{113d^2}{144}}{\frac{355d^2}{324}}} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{113}{355}}
\end{aligned}
$$

Como $\overline{RC} = \overline{RH}$, e $\overline{RC} = \frac{3d}{4}$, temos:

$$
\begin{aligned}
\frac{\frac{3d}{4}}{\overline{RD}} &= \frac{3}{2}\sqrt{\frac{113}{355}} \\
\overline{RD} &= \frac{d}{2}\sqrt{\frac{355}{113}} \approx r.\sqrt{\pi}
\end{aligned}
$$

Ou seja, o quadrado de lado $\overline{RD}$ é aproximadamente igual a $\pi.r^2$, já que a razão $\frac{355}{113} = 3,141592920353982300...$ é igual a π até a sétima casa decimal, o que é uma excelente aproximação.

A trisecção exata de um ângulo utilizando uma régua graduada

Como vimos anteriormente, é impossível trisseccionar um ângulo qualquer utilizando um compasso e uma régua não graduada. Utilizando uma régua graduada, ou com alguma marcação, podemos construir a trissecção do ângulo.

Construção:

Tomemos um ângulo construido através da interseção das retas r_1 e r_2. Através do vértice O, vamos contruir uma circunferência de raio r. Essa circuferência intersecta as retas r_1 e r_2 em B e A respectivamente. O ângulo $\angle AOB$ será trisseccionado.

Utilizando a régua graduada, devemos construir um segmento $\overline{PQ}$ tal que $\overline{PQ} = r$, o ponto Q pertence a circunferência e o ponto P pertence a reta r_2. Os pontos P, Q e B são colineares. O ângulo $\angle BPA$ é o ângulo procurado.

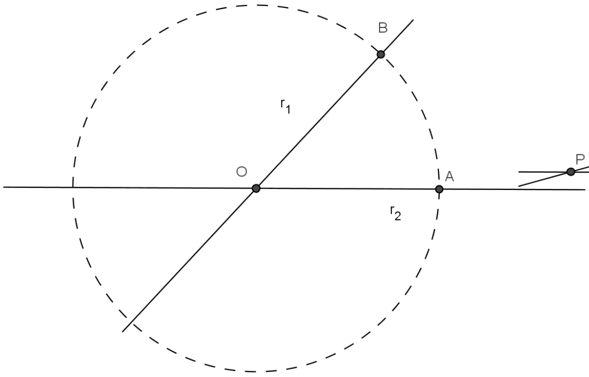


Figura 4.8: $A, B \in C(O, r)$.

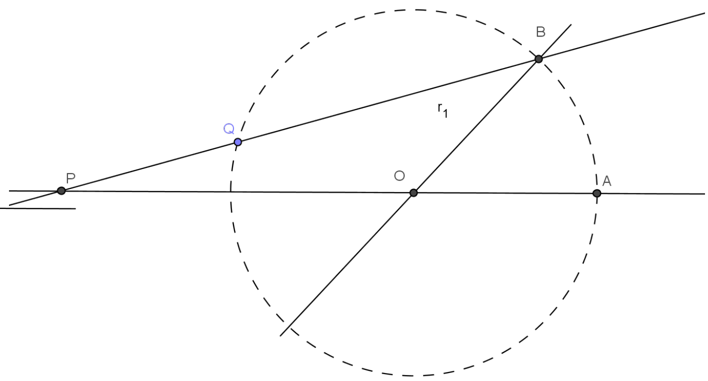


Figura 4.9: Construção $\overline{PQ} = \overline{AB} = r$

Demonstração:

Chamando o ângulo $\angle QPO$ de α, sabemos que o ângulo $\angle QOP$ também será α pois o ΔPQO é isósceles com $\overline{PQ} = \overline{QO}$.

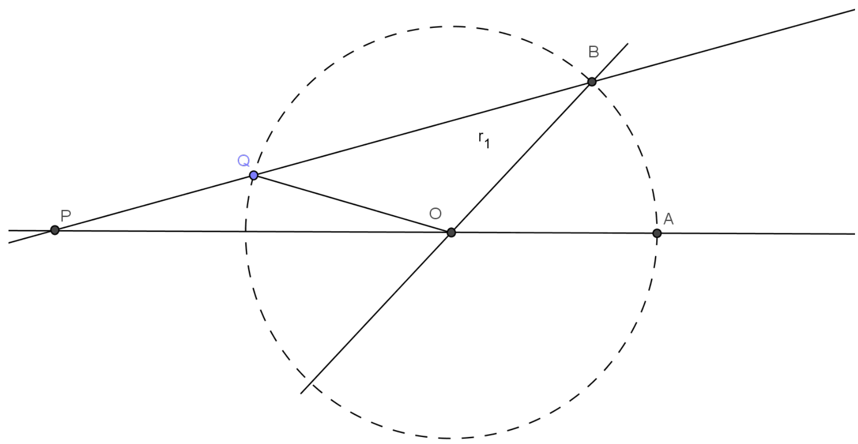


Figura 4.10: Construção do ângulo $\overline{QPO} = \frac{1}{3}\overline{AOB}$

O ângulo $\angle BQO$ é externo ao triângulo ΔPQO logo vale 2α.

O triângulo ΔQOB também é isósceles, e portanto o ângulo $\angle OBQ$ também mede 2α.

Percebemos que o ângulo $\angle AOB$, que queremos trisseccionar, é externo ao triângulo ΔPOB, logo:

$\angle AOB = \angle QPO + \angle PBO = 3\alpha$. Portanto:

$\angle QPO = \frac{1}{3}\angle AOB$

Portanto através de uma régua graduada (ou com duas marcações) conseguimos trisseccionar o ângulo.

A duplicação exata de um cubo utilizando uma régua graduada

Da mesma maneira que o problema da trissecção do ângulo, mostramos que resolver este problema equivale a resolver algebricamente uma equação de grau 3. E de maneira análoga, podemos também construir exatamente um cubo com o dobro do volume de um cubo dado, utilizando uma régua com marcações. Essa demonstração foi extraída de [8]:

Construção:

Vamos supor que o segmento $\overline{AO}$ seja a aresta do cubo que desejamos duplicar. Chamaremos seu comprimento de 1. Construimos $\overline{OB}$ perpendicular a $\overline{AO}$ e um ângulo $\overline{BOC} = 30°$ como mostra a 4.11.

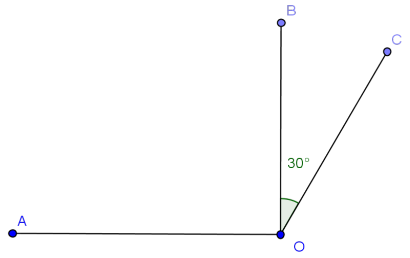


Figura 4.11: $\overline{OB} \perp \overline{AO}$ e $\angle BOC = 30°$

Utilizando uma régua graduada, construimos $\overline{DE} = \overline{AO}$ com o prolongamento passando pelo ponto A, como mostra a figura.

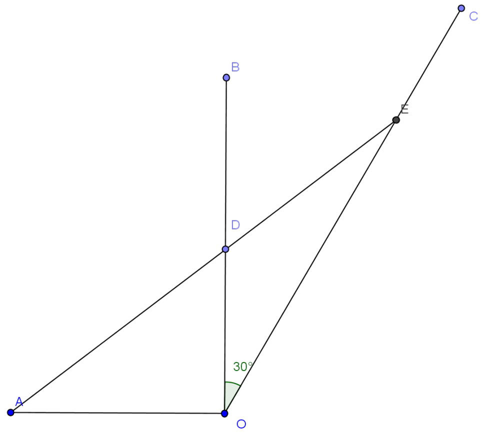


Figura 4.12: $\overline{DE} = \overline{AO}$

A medida de $\overline{AD}$ será a medida do cubo com o dobro do volume que buscamos.

DEMONSTRAÇÃO:

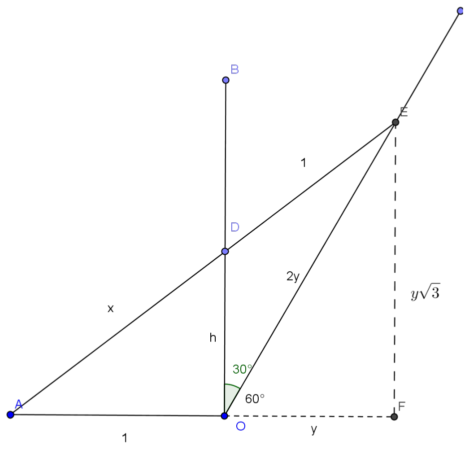


Figura 4.13: Demonstração da duplicação do cubo

Pelo caso AAA, percebemos que os triângulos ΔAFE e ΔAOD são semelhantes. Logo,

$$\frac{x}{1} = \frac{x+1}{y+1}.$$

Assim, $xy = 1$. Além disso, $\frac{h}{1} = \frac{y\sqrt{3}}{y+1}$. Substituindo $y = \frac{1}{x}$, temos:

$$h = \frac{\sqrt{3}.\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+1} = \frac{\sqrt{3}}{1+x}.$$

Pelo Teorema de Pitágoras no triângulo ΔAOD, temos $x^2 = h^2 + 1^2$. Então:

$$\begin{array}{rcl}
x^2 & = & 1 + (\dfrac{\sqrt{3}}{x+1})^2 \\
x^2 & = & 1 + \dfrac{3}{(x+1)^2} \\
x^2.(x+1)^2 & = & (x+1)^2 + 3 \\
x^2 + 2x^3 + x^4 & = & x^2 + 2x + 1 + 3 \\
x^4 + 2x^3 & = & 2x + 4 \\
x^3.(x+2) & = & 2.(x+2).
\end{array}$$

Como $(x+2)$ é diferente de zero, podemos simplificar de ambos os lados por (x+2), concluindo que:

$$x^3 = 2$$

Assim $x = \sqrt[3]{2}$. Portanto, o segmento $\overline{AD}$ será a aresta do cubo com o dobro do volume do cubo de aresta 1.

Capítulo 5

A construção dos polígonos regulares e a razão áurea

O livro IV dos Elementos trata da construção de polígonos regulares, entre eles o pentágono regular. Posteriomente, essa construção teve sua importância relacionada com as construções de tabelas trigonométricas. Durante muito tempo não houve avanços nesse tema, somente no século XVIII com Euler[1] desenvolvendo a teoria das equações algébricas, que mostrou que a raíz n-ésima de número complexo possui exatamente n raízes.

Gauss[2] relacionou o problema da construção Euclidiana de polígonos regulares com as raízes da equação $x^n - 1 = 0$, que seriam justamente os vértices desse polígono regular inscrito em uma circunferência.

Após construir o polígono de 17 lados, Gauss demonstrou o seguinte teorema, que mostra quais polígonos regulares podem ser construtíveis utilizando régua não graduada e compasso.

Teorema 5.0.1 *Um polígono regular de n lados pode ser construído com régua e compasso, se e somente se,* $n = 2^\alpha$*, ou* $n = 2^\alpha.p_0.p_1.p_2...p_r$*, com* $p_0, p_1.p_2...p_r$ *primos distintos da forma* $p_\beta = 2^{2^\beta} + 1$*, com* α *e* β *inteiros não negativos.*

Analisando os primeiros valores dos números da forma $p_\beta = 2^{2^\beta} + 1$ que são primos, temos:

$$\beta = 0, p_0 = 2^{2^0} + 1 = 3$$

$$\beta = 1, p_1 = 2^{2^1} + 1 = 5$$

$$\beta = 2, p_2 = 2^{2^2} + 1 = 17$$

Portanto, podemos concluir que até o icoságono, são construtíveis com régua e compasso os polígonos regulares com 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17 e 20 lados. É muito comum que durante o ensino fundamental sejam ensinados a construção do triângulo equilátero,

[1] Leonhard Paul Euler (Basileia, 15 de abril de 1707 - São Petersburgo, 18 de setembro de 1783) foi um grande matemático e físico suíço de língua alemã que passou a maior parte de sua vida na Rússia e na Alemanha. Euler fez importantes descobertas em campos variados em cálculo e grafos. Também fez muitas contribuições para a Matemática Moderna no campo da terminologia e notação, em especial para a análise matemática, como a noção de uma função matemática. [4]

[2] Johann Carl Friedrich Gauss (Braunschweig, 30 de Abril de 1777 - Gottingen, 23 de Fevereiro de 1855), foi um matemático, astrônomo e físico alemão que contribuiu muito em diversas áreas da ciência, dentre elas a teoria dos números, estatística, análise matemática, geometria diferencial, geofísica, eletroestática, astronomia e óptica. [4]

do quadrado e do hexágono, o que leva o aluno a crer que somente seria possivel construir polígonos da forma 2^α e 3.2^α. É importante que outros polígonos sejam construídos, em especial o pentágono regular, já que possui uma construção mais simples que os demais.

5.1 A Razão Áurea

A razão áurea, também conhecida como número de ouro (ou áureo), proporção divina, é uma constante conhecida pelo número Φ. Essa razão pode ser encontrada em várias situações diferentes:

1. Em pinturas, esculturas e na arquitetura.
2. No corpo humano, como na altura do corpo humano e na distância do umbigo até o chão ou na medida do ombro a ponta do dedo e a medida do cotovelo até a ponta do dedo.
3. Na população de abelhas, onde a proporção entre abelhas machos e fêmeas é a razão áurea.

As propriedades estéticas da razão áurea são mostradas através do retângulo áureo (um retângulo que dividido em um quadrado e um outro retângulo, obtem-se um retângulo semelhante ao primeiro). Muitos trabalhos famosos de arquitetura e arte foram utilizados o retângulo áureo.

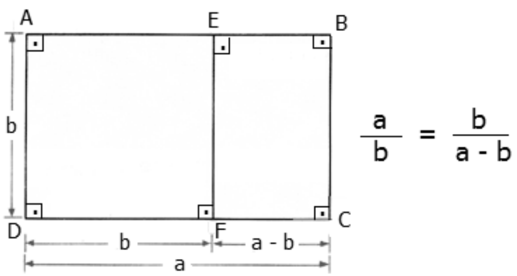


Figura 5.1: Retângulo Áureo

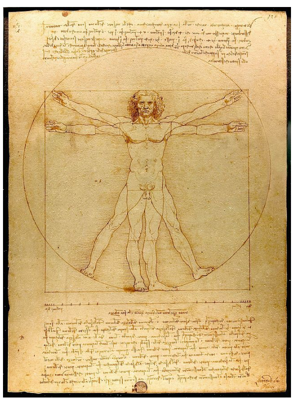


Figura 5.2: O homem Vitruviano

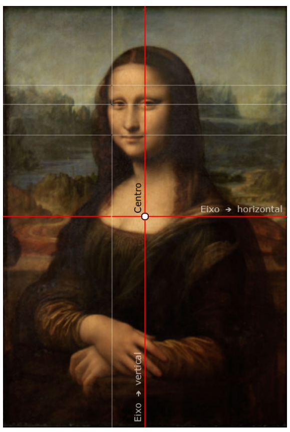


Figura 5.3: Monalisa

Figura 5.4: Parthenon

Não é o objetivo desse trabalho expressar detalhadamente todas as propriedades e aplicações da razão áurea, mas sim mostrar a importância que pode ter quando aplicada em algumas construções geométricas, como o pentágono. Esse assunto pode despertar muita curiosidade nos alunos o que torna o assunto muito importante, e não deve deixar de ser utilizado em sala de aula.

Uma das aplicações da razão áurea é o pentagrama (ou pentágono estrelado), que possui uma propriedade interessante: o ponto de interseção de suas diagonais divide a mesma em seção áurea, ou seja, cada ponto divide a diagonal em dois segmentos diferentes, tais que a razão entre o maior e o menor é igual a razão entre a diagonal e o maior deles.

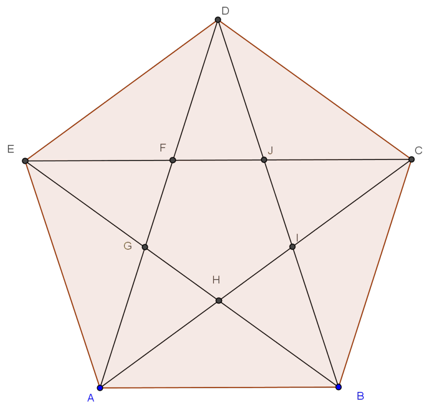


Figura 5.5: Pentagrama ou Pentágono Estrelado

Os pontos F,G,H,I e J dividem as diagonais em razão áurea.

5.1.1 A Razão Áurea nos Elementos

A Razão Áurea está presente em Elementos em vários momentos. A primeira definição de razão áurea aparece de uma forma indireta no Livro 2 (Proposição 11) e será mostrada nesse capítulo. Uma segunda demonstração está presente no Livro 6 (Proposição 30). Durante sua obra, Euclides utiliza esta importante razão na construção que serve como base da construção do pentágono regular (Livro IV, Proposição X) e na construção do icosaedro e do dodecaedro (no Livro 13).

Proposição 5.1.1 *(Proposição 11 do Livro 2 dos Elementos). Dividir uma linha reta de sorte que o retângulo da tôda e de uma parte seja igual ao quadrado da outra parte*

Figura 5.6: O ponto H divide $\overline{AB}$ em razão áurea

Demonstração: Dado um segmento $\overline{AB}$, devemos descobrir um ponto H, tal que:

$$\frac{\overline{AH}}{\overline{HB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AH}}$$

Construimos um quadrado ABCD sobre o lado AB, e dividimos o lado $\overline{AC}$ em dois pedaços iguais no ponto E (ou seja, $\overline{AE} = \overline{EC}$). Traçamos o segmento $\overline{BE}$.

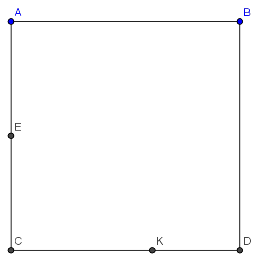


Figura 5.7:

Seja $\overline{AE} = x$. Prolongamos o lado $\overline{CA}$ até F, de modo que $\overline{EF} = \overline{BE}$. Construimos o quadrado AFGH. O ponto H divide o segmento em razão áurea.

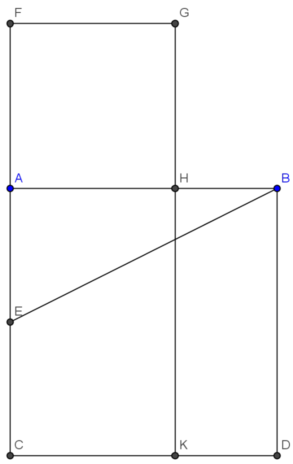


Figura 5.8:

Usando o teorema de pitagoras no triângulo ΔABE, temos que $\overline{EB} = \sqrt{5}.x$, então

$$\begin{aligned}\overline{EF} &= \overline{EB} = \sqrt{5}.x \\ \overline{CF} &= \overline{CE} + \overline{EF} = x(\sqrt{5}+1) \\ \overline{FG} &= \overline{FA} = \overline{EF} - \overline{EA} = \sqrt{5}(x-1)\end{aligned}$$

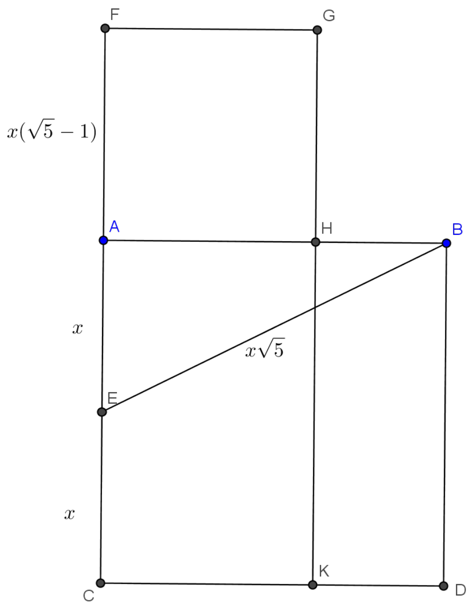


Figura 5.9:

Assim,

$\overline{CF}.\overline{FG} = x(\sqrt{5}+1).x(\sqrt{5}-1) = 4x^2$, $\overline{AE}^2 = x^2$, $\overline{EF}^2 = (x\sqrt{5})^2 = 5x^2$.

Então,

$$\overline{CF}.\overline{FA} + \overline{AE}^2 = \overline{EF}^2$$

Como $\overline{EF} = \overline{EB}$, temos que:

$$\overline{CF}.\overline{FA} + \overline{AE}^2 = \overline{EB}^2$$

Por outro lado, $\overline{BE}^2 = \overline{BA}^2 + \overline{AE}^2$, assim:

$$\begin{aligned}\overline{CF}.\overline{FA} + \overline{AE}^2 &= \overline{BA}^2 + \overline{AE}^2 \\ \overline{CF}.\overline{FA} &= \overline{BA}^2\end{aligned}$$

Através das construções, percebemos que o retângulo CFGK é equivalente ao quadrado ABCD, pois:

$$CFGK = x(\sqrt{5}+1).x(\sqrt{5}-1) = 4x^2 = (2x)^2 = ABCD$$

Se retirarmos o retângulo AHCK (que é comum a ambos), podemos dizer que o quadrado AFGH e o retângulo HBDK são equivalentes. Logo, $\overline{AH}^2 = \overline{HB}.\overline{HK}$. Como $\overline{HK} = \overline{AC} = \overline{AB}$. Então

$$\overline{AH}^2 = \overline{HB}.\overline{AB}$$

5.1.2 A definição algébrica da razão áurea

Considere o segmento $\overline{AB}$ e suponha que C divide o mesmo em razão áurea, isto é, $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}$. Agora, tome $\overline{AC} = x$ e $\overline{CB} = y$. Então,

$$\begin{aligned} \frac{x+y}{x} &= \frac{x}{y} \\ x^2 &= xy + y^2 \\ x^2 - yx - y^2 &= 0 \end{aligned}$$

Podemos encontrar o valor de x em função de y, ou seja:

$$\begin{aligned} x &= \frac{y \pm \sqrt{y^2 - 4.(-y^2)(1)}}{2} \\ x &= \frac{y \pm \sqrt{5y^2}}{2} \\ x &= \frac{y \pm y\sqrt{5}}{2} \\ x &= y(\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}) \end{aligned}$$

Como x é a medida de um segmento de reta, não poderá assumir um valor negativo. Logo:

$$x = y(\frac{1+\sqrt{5}}{2})$$

Calculando a razão, temos

$$\Phi = \frac{x}{y} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1,61803398...$$

5.2 A Construção do Pentágono Regular por Euclides

Uma das mais belas construções de Euclides é o pentágono regular, pois utiliza quase todo o conhecimento da geometria desenvolvida até aquele momento. Para construir o pentágono regular, Euclides utilizou um triângulo isósceles que possui os ângulos da base o dobro do ângulo diferente (conhecido como triângulo áureo). Esse triângulo é importante já que possui ângulos de 36° e 72°, e o pentágono regular divide a circunferência em 5 arcos iguais de 72°.

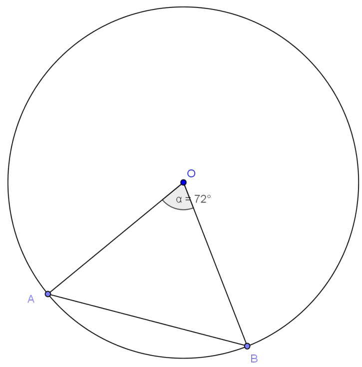


Figura 5.10: Arco de 72° determinado por um pentágono

Teorema 5.2.1 *(Proposição 10 do Livro 4 dos Elementos) Construir um triângulo isósceles de maneira que cada um dos ângulos, que estão sôbre a base, seja o dôbro do ângulo do vértice;*

DEMONSTRAÇÃO:

Dado um segmento $\overline{AB}$, tome um ponto C tal que $\overline{AB}.\overline{BC} = \overline{CA}^2$. Ou seja, para iniciar a construção desse importante triângulo, Euclides utilizou um ponto C que divide o segmento em razão áurea. Agora, vamos construir um círculo com centro em A e raio $\overline{AB}$. Na extremidade do ponto B, construimos uma corda $\overline{BD} = \overline{AC}$.

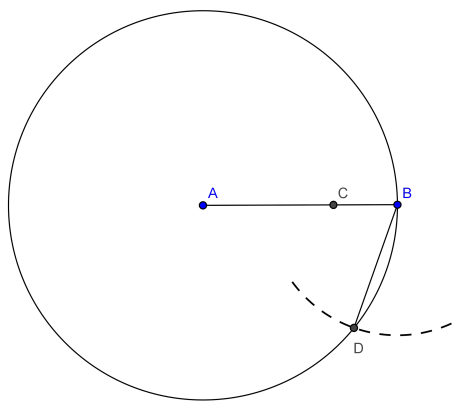


Figura 5.11: Contrução do triângulo áureo

Traçamos os segmentos $\overline{DA}$, $\overline{DC}$ e circunscrevemos um círculo ao triângulo ΔACD[3].

[3]Essa é a proposição IV do Livro I de Euclides. Para circunscrever um círculo basta construir duas mediatrizes dos lados desse triângulo. Seu ponto de interseção será o centro do círculo

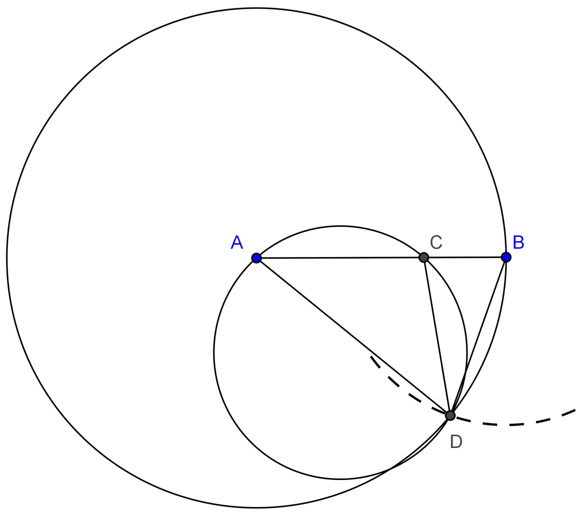


Figura 5.12: Contrução do triângulo áureo

Afirmamos que o triângulo procurado é ΔBCD, isto é, possui os ângulos da base ($\overline{BC}$) o dobro do ângulo do vértice. De fato, como $\overline{AB}.\overline{BC} = \overline{CA}^2$ e $\overline{CA} = \overline{BD}$, temos que $\overline{AB}.\overline{BC} = \overline{BD}^2$. Então, $\overline{BD}$ é tangente ao círculo $(C(A, D, C))$ no ponto D. Logo,

$$\angle BDC = \angle DAC$$

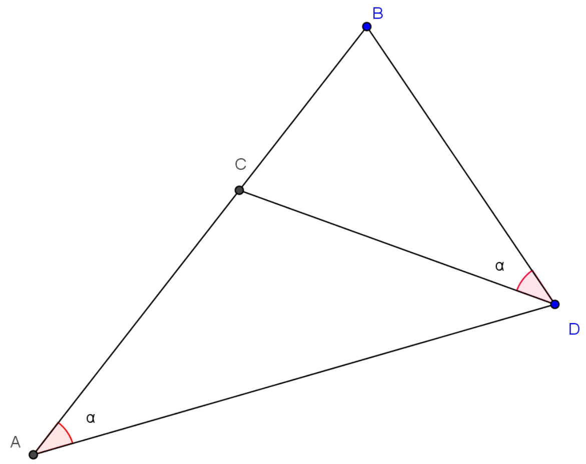


Figura 5.13: Contrução do triângulo áureo

$\angle BDA = \angle CDA + \angle BDC$. Mas como $\angle DAC = \angle BDC$, temos: $\angle BDA = \angle CDA + \angle DAC$.

$\angle BCD$ é externo ao triângulo ΔACD, então: $\angle BCD = \angle CDA + \angle DAC$. Como $\angle DAC = \angle BDC$, temos: $\angle BCD = \angle CDA + \angle BDC$.

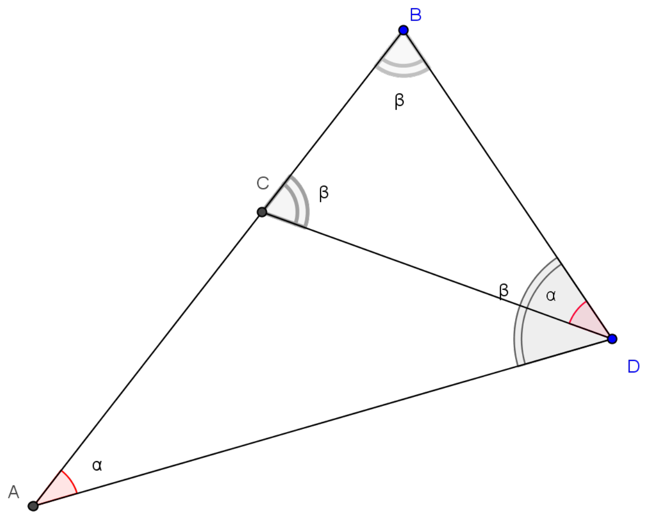


Figura 5.14: Contrução do triângulo áureo

Portanto, podemos dizer que $\angle BCD = \angle BDA = \beta$. Além disso, $\angle BDA = \angle DBA$ já que $\overline{AB} = \overline{AD}$ (por construção) então, consequentemente $\overline{BD} = \overline{DC}$.

Mas $\overline{BD} = \overline{AC}$ (por construção), então $\overline{DC} = \overline{AC}$ e $\angle CAD = \angle CDA$.

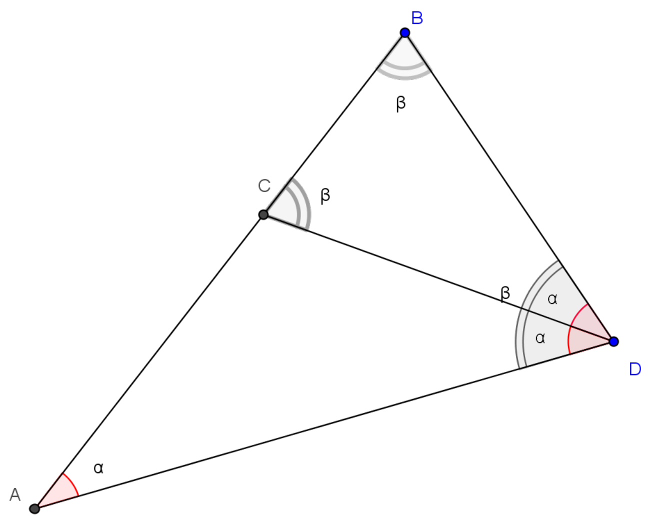


Figura 5.15: Contrução do triângulo áureo

Através da figura, percebemos que $\beta = 2\alpha$, logo, temos um triângulo ΔABD onde $\angle ABD = \angle ADB = 2.\angle DAB$.

Para construir o pentágono, basta utilizar o triângulo áureo. Como o ângulo $\angle BAD = 36°$, basta construir uma circunferência de centro A e um ângulo central de $2.\overline{BAD} = 72°$

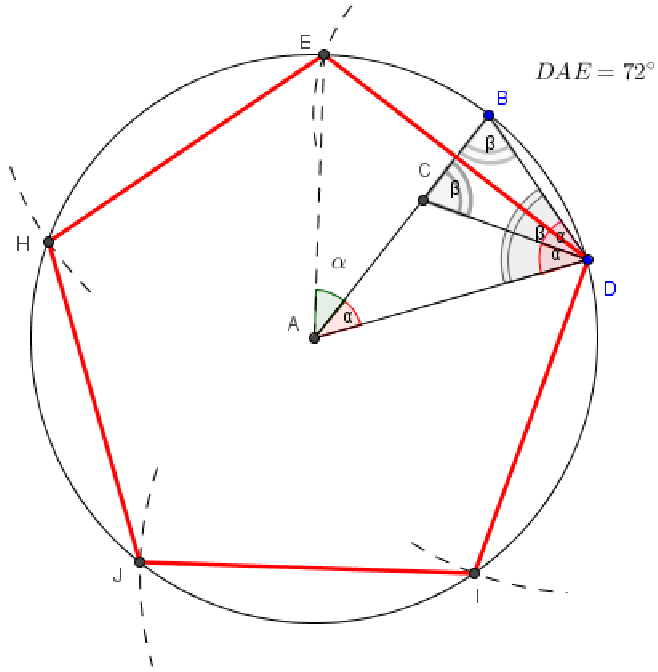


Figura 5.16: Contrução do pentágono regular

5.3 Outras Construções do Pentágono Regular

Existem outras formas de construir um pentágono regular. Nesse trabalho serão propostas duas formas distintas que podem ser aplicadas em sala de aula (por serem mais simples que a forma mostrada anteriormente):

1. Um pentágono inscrito em uma circunferência dada
2. Um pentágono com um lado dado

Vamos mostrar formas alternativas de construção, mas cabe resaltar que em ambos os casos, pode-se utilizar a construção feita por Euclides. No primeiro caso, para construir um pentágono inscrito na circunferência, basta construir um ângulo central de 72° (obtido através do triângulo áureo). No segundo caso, basta considerar que o lado dado é $\overline{AB}$ utilizado na construção de Euclides, já que é oposto ao ângulo de 72°.

5.3.1 Pentágono Inscrito na Circunferência

Dada uma circunferência, trace dois diâmetros perpendiculares.

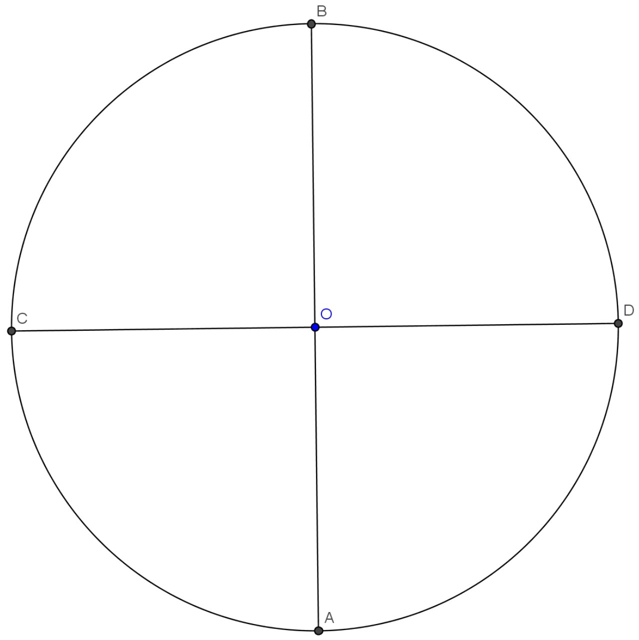


Figura 5.17:

Trace a mediatriz do raio $\overline{OD}$.

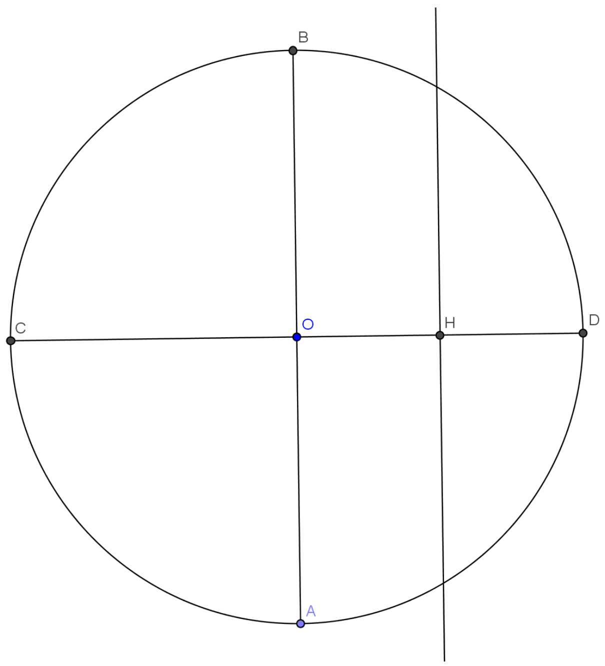


Figura 5.18:

Trace uma circunferência de centro em H e raio $\overline{HB}$. O ponto de interseção dessa circunferência com o diâmetro $\overline{CD}$ será o ponto I.

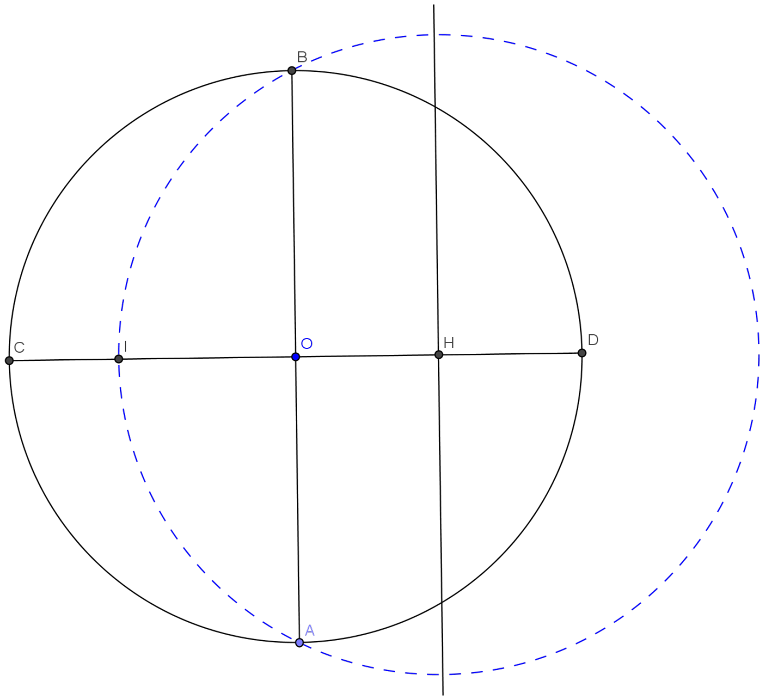


Figura 5.19:

O segmento $\overline{BI}$ será o comprimento do lado do pentágono.

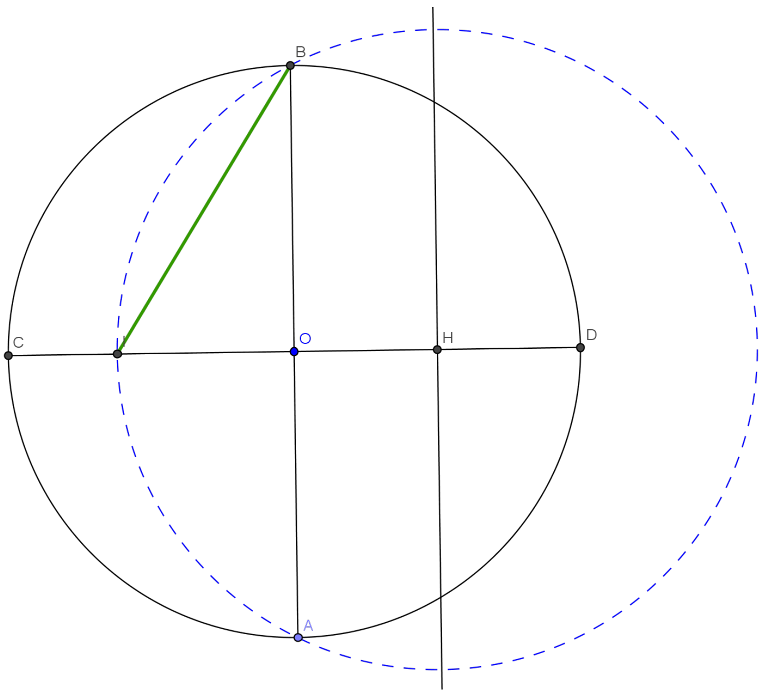


Figura 5.20:

Para construir o pentágono, basta construir os lados. A partir do ponto B, construímos dois lados ao traçar uma circunferência com centro em B e raio $\overline{BI}$.

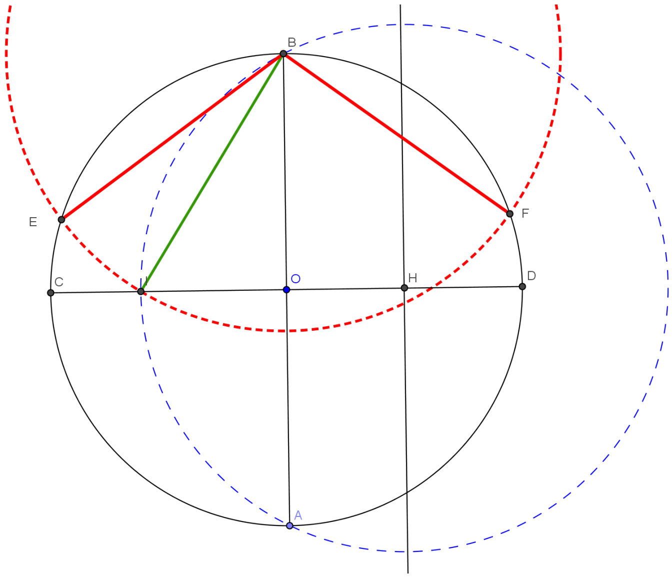


Figura 5.21:

Para os demais lados, basta repetir o processo nos pontos E e F.

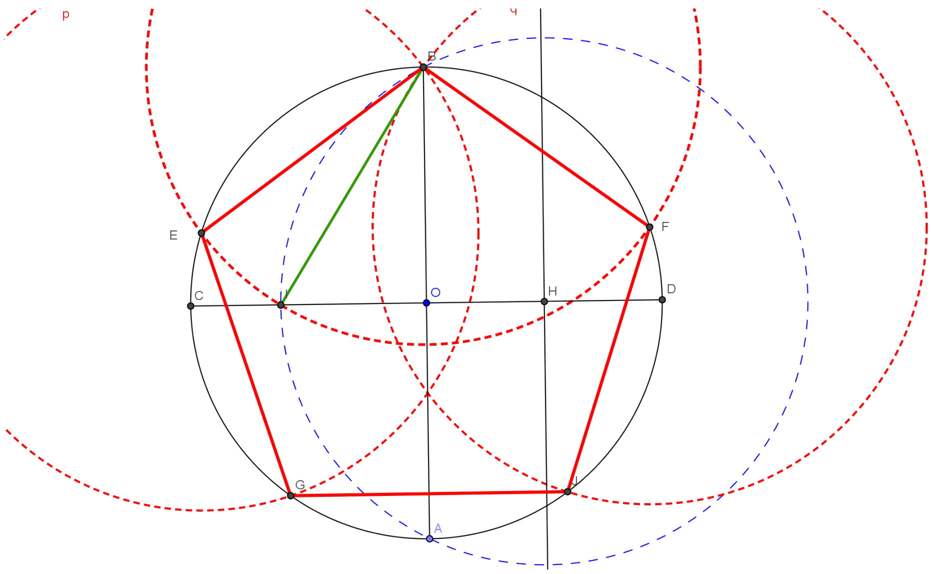


Figura 5.22:

5.3.2 Um pentágono com um lado dado

Seja dado um lado $\overline{AB}$, construir um pentágono ABHIJ.

Figura 5.23: Construção de um pentágono regular com um lado dado

Com centro em A, construimos uma circunferência de raio $\overline{AB}$. Com centro em B, construimos uma circunferência de raio $\overline{BA}$. Os pontos de interseção entre as circunferências serão os pontos C e D.

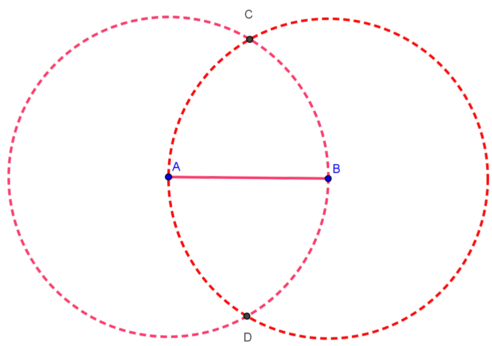


Figura 5.24: Construção de um pentágono regular com um lado dado

Com centro em D, construimos uma circunferência de raio $\overline{AB}$. Os pontos de interseção com as circunferências anteriores serão os pontos E e F

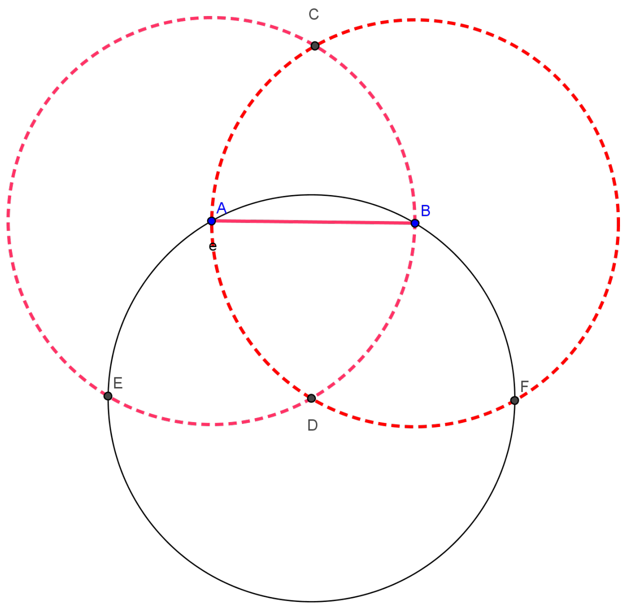


Figura 5.25: Construção de um pentágono regular com um lado dado

Ao traçar a mediatriz do lado $\overline{AB}$ do pentágono, marcamos o ponto G, interseção entre a mediatriz e o círculo.

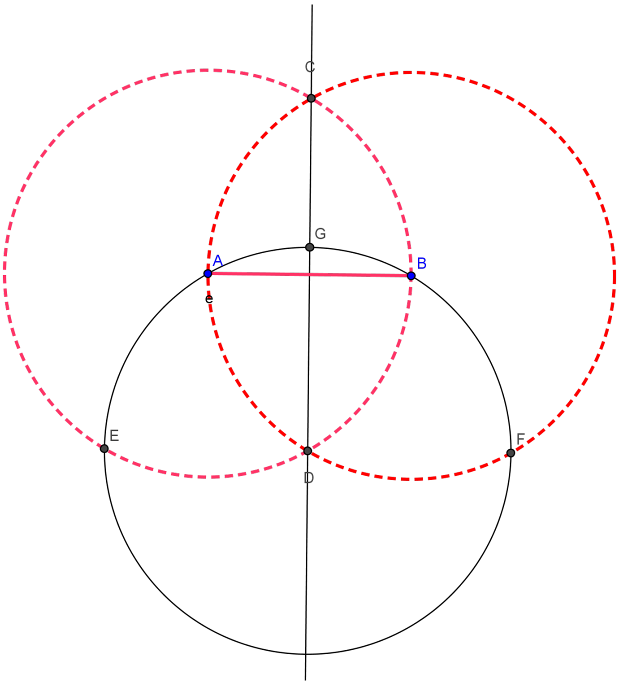


Figura 5.26: Construção de um pentágono regular com um lado dado

Devemos traçar duas retas. A primeira, passando pelos pontos E e G. A segunda, pelos pontos F e G. Assim, definimos os pontos H e I.

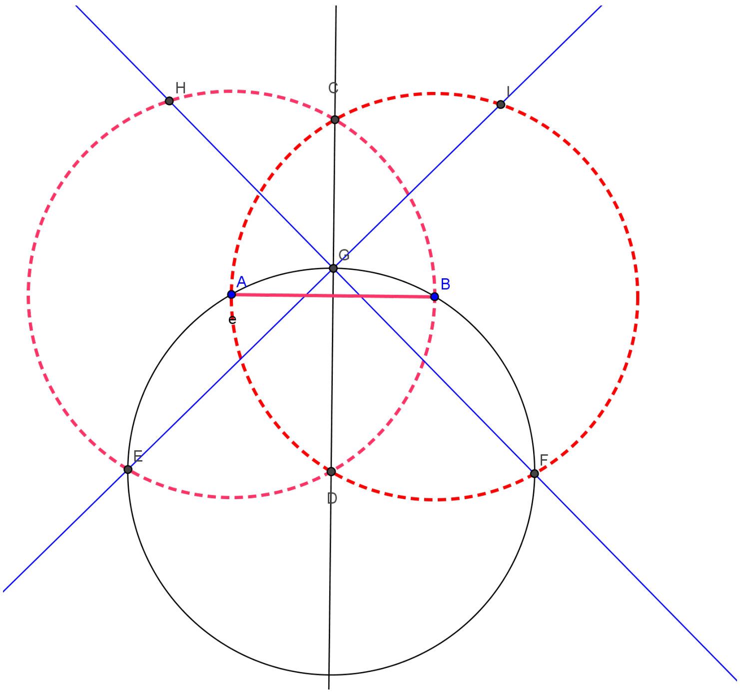


Figura 5.27: Construção de um pentágono regular com um lado dado

Com centros em H e I, traçamos duas circunferências de raio $\overline{AB}$. Na interseção dessas duas circunferências com a mediatriz, definimos o ponto J.

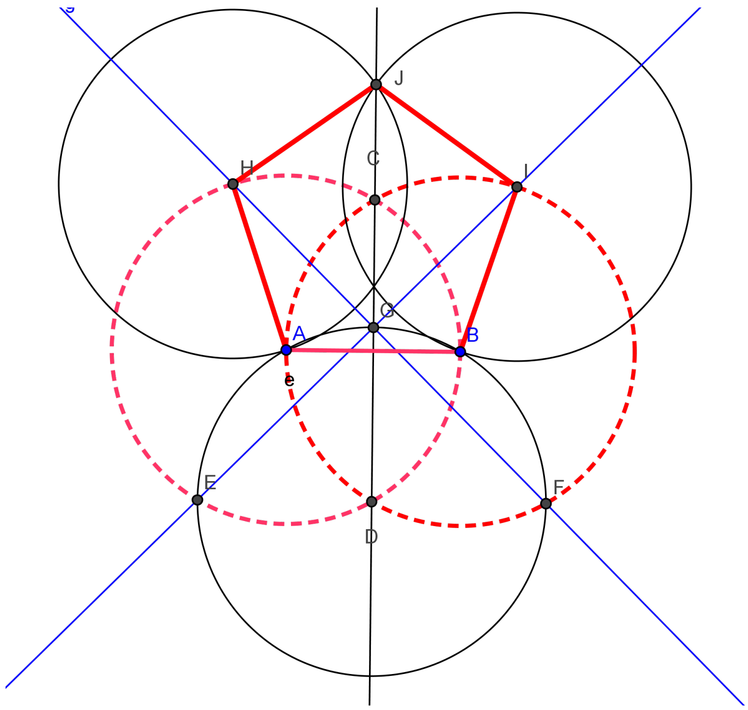


Figura 5.28: Construção de um pentágono regular com um lado dado

O pentágono ABHIJ é o pentágono procurado.

Capítulo 6

Construções Geométricas para o 6° ano do Ensino Fundamental

Nesse capítulo vamos propor atividades para auxiliar o ensino das contruções geometricas no 6º ano. As construções serão feitas utilizando régua graduada, compasso e o par de esquadros. Esse último material é importante principalmente para o aluno deste ciclo ter um primeiro contato com as propriedades das retas paralelas e perpendiculares, para posteriormente utilizar régua e compasso nestas construções.

Neste momento o aluno tem o seu primeiro contato com as construções geométricas, portanto é importante que ele possa dominar bem o material e ter a noção das propriedades de alguns traçados básicos. As atividades propostas nesse capítulo possuem o objetivo de fazer o aluno compreender tais propriedades.

6.1 Conteúdo Geométrico

Nesta seção apresentamos os conteudos a ser tratado neste ciclo do ensino. Durante o 6° ano o aluno deve desenvolver algumas noções primitivas da geometria:

1. Compreensão da circunferência como lugar geométrico dos pontos equidistantes a um ponto dado.
2. Compreensão do conceito de congruência de segmentos, retas paralelas e perpendiculares.
3. Construção da mediatriz de um segmento.
4. Noção sobre simetria de um ponto em relação a uma reta.

A seguir mostramos como esses conceitos podem ser ensinados com o auxílio das construções geométricas:

6.2 O Conceito de Circunferência

Definição 6.2.1 *(Circunferência) é um conjunto dos pontos de um plano cuja distância a um ponto dado desse plano é igual a uma distância (não nula) dada. O ponto dado é o centro e a distância dada é o raio da circunferência*

Para entender o conceito de circunferência, ver atividades 6.6.1, 6.6.2.

6.3 Congruência de segmentos, retas paralelas e perpendiculares

Transporte de segmentos

Dado um segmento $\overline{AB}$, queremos construir um segmento $\overline{CD}$ congruente a $\overline{AB}$

1. Construimos uma reta suporte qualquer r.
2. Marcamos um ponto C qualquer em r.
3. Com abertura de compasso igual a medida do segmento $\overline{AB}$, transportamos essa medida para a reta r, a partir do ponto C qualquer, obtendo assim o ponto D e o segmento $\overline{CD}$

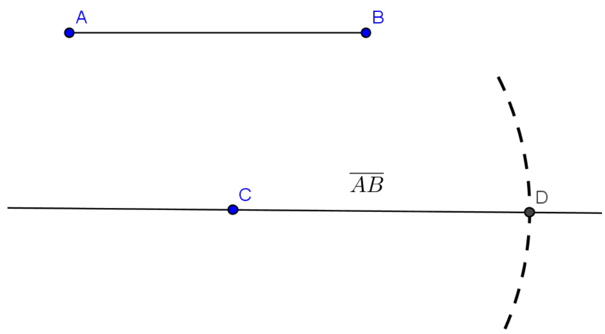


Figura 6.1: Transporte de segmentos

Definição 6.3.1 *(Retas Paralelas) duas retas são paralelas se, e somente se, são coincidentes (iguais) ou são coplanares e não têm nenhum ponto em comum*
Ver [9, p.61]

Definição 6.3.2 *(Retas Perpendiculares) duas retas são perpendiculares se, e somente se, são concorrentes e formam ângulos adjacentes suplementares e congruentes*
Ver [9, p.80]

Traçando retas paralelas utilizando o par de esquadros

Construção:

1. Coloque a hipotenusa do esquadro isósceles, sobre a reta conhecida.
2. Apóie a hipotenusa do esquadro escaleno sobre um dos catetos do compasso isósceles.
3. Deslize o cateto do esquadro isósceles sobre a hipotenusa do esquadro escaleno, traçando a reta paralela.

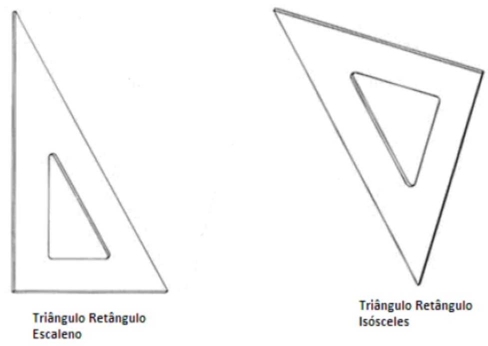


Figura 6.2: Par de esquadros

Traçando retas perpendiculares utilizando o par de esquadros

Construção:

1. Coloque a hipotenusa do triângulo isósceles sobre a reta conhecida.
2. Apóie a hipotenusa do esquadro escaleno sobre um dos catetos do triângulo isósceles.
3. Gire o esquadro isósceles 90° no sentido horário, apoiando seu outro cateto sobre a hipotenusa do esquadro escaleno.
4. Deslize o cateto do esquadro isósceles sobre a hipotenusa do esquadro escaleno para traçar a reta perpendicular.

Para entender esse conceitos, ver a atividade 6.6.3

6.4 A Mediatriz de um segmento

Definição 6.4.1 *(Mediatriz) A mediatriz de um segmento é o conjunto de pontos que equidistam das extremidades deste.*

Construção:

1. Com abertura de compasso maior que a metade do segmento, centro no ponto A traça-se um arco.
2. Com a mesma abertura de compasso, traça-se outro arco, que intercepta o anterior nos pontos C e D.
3. Traça-se a mediatriz do segmento $\overline{AB}$ unindo-se os pontos C e D, determinando assim o ponto M.

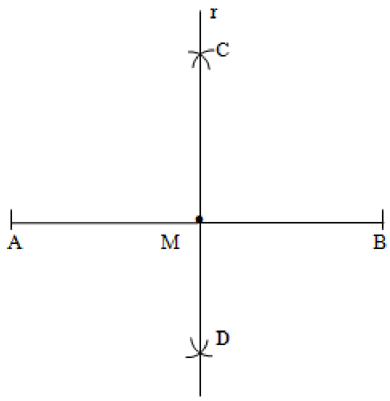


Figura 6.3: Mediatriz de um segmento

JUSTIFICATIVA:

A mediatriz é o lugar geométrico dos pontos que equidistam das extremidades de um segmento, portanto ao utilizar o compasso para traçar arcos de ambas as extremidades, estamos buscando um conjunto de pontos que possuam uma distância fixa (o raio, que é o tamanho da abertura do compasso). Para que as distâncias não se modifiquem, devemos utilizar a mesma abertura nas duas extremidades. A abertura deve ser maior do que a metade justamente para que haja a interseção entre os arcos, determinando os dois pontos que vão originar a reta mediatriz.

A mediatriz de um segmento é o primeiro lugar geométrico conhecido pelo aluno. Na figura acima, apenas foram traçados pequenos arcos de circunferência. Eles devem indicar ao aluno que não se devem modificar o tamanho dos arcos pois a mesma distância das extremidades dos segmentos deve ser preservada, ou seja, estamos garantindo a construção correta da definição do lugar geometrico.

Muitos alunos acreditam que ao mudar a abertura do compasso, poderíamos encontrar outro resultado. Nesse momento é importante mostrar que o tamanho da abertura somente modifica o tamanho da distância das extremidades, mas o lugar geométrico permanece o mesmo.

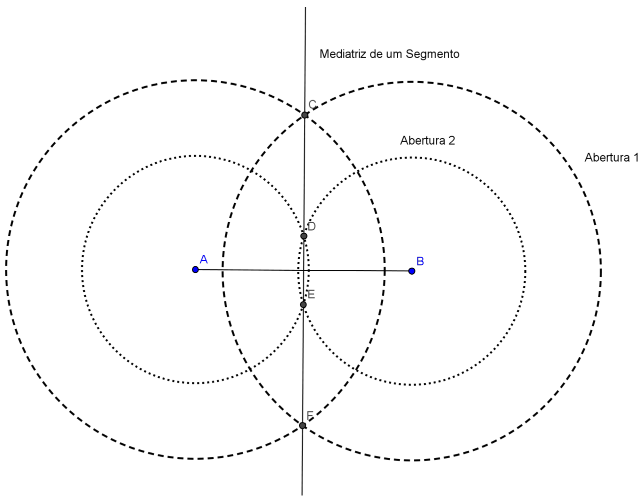


Figura 6.4: Mediatriz de um segmento utilizando diferentes aberturas do compasso

Para entender o conceito de mediatriz, ver a atividade 6.6.4.

6.5 Simetria de um ponto em relação a uma reta

Definição 6.5.1 *(Simetria de um ponto em relação a uma reta:) Dado um ponto A situado em um semi-plano determinado pela reta r. O ponto B situado no semi-plano oposto a A, sobre a perpendicular a r passando pelo ponto A, tal que, os pontos A e B são equidistantes em relação a r, é chamado de simetrico de A em relação a r.*

CONSTRUÇÃO:

1. Com a ponta seca do compasso em A, traçamos um arco qualquer que corte a reta e marque um ponto C nesta.
2. Com centro no ponto C em r, traçamos uma circunferencia de raio $\overline{AC}$, marque um dos pontos de interseção com r por D.
3. Com abertura $\overline{DA}$ e centro em D, traçamos uma circunferencia.
4. Marque $B \in C(C, \overline{AC}) \cap C(D, \overline{DA})$ o simétrico de A em relação a reta r.

JUSTIFICATIVA:

1. D equidista de A e B, pois $A, B \in C(D, \overline{DA})$
2. C equidista de A e B, pois $A, B \in C(C, \overline{AC})$
3. r é a mediatriz do segmento $\overline{AB}$

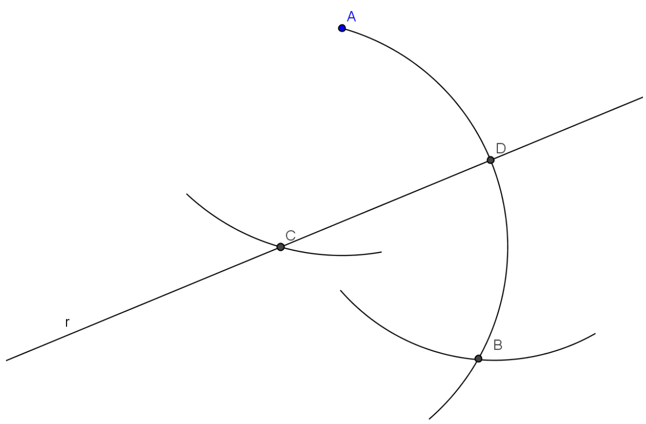


Figura 6.5: Construção de um ponto simétrico a uma reta

Para entender esse conceito, ver a atividade 6.6.5.

6.6 Atividades

Atividade 6.6.1 *: (***Reunião entre amigos)**

Objetivo: *Situação problema que motive a discussão teórica do tema*

Anderson resolveu convidar seus amigos para uma reunião. Na figura abaixo estão indicadas a posição de Anderson e de seus amigos. Responda:
a) Quais amigos estão a uma distância menor do que 5 cm de Anderson?
b) A distância entre Anderson e Daniel é a mesma entre Anderson e Heitor?
c) Qual o amigo mais distante de Anderson?

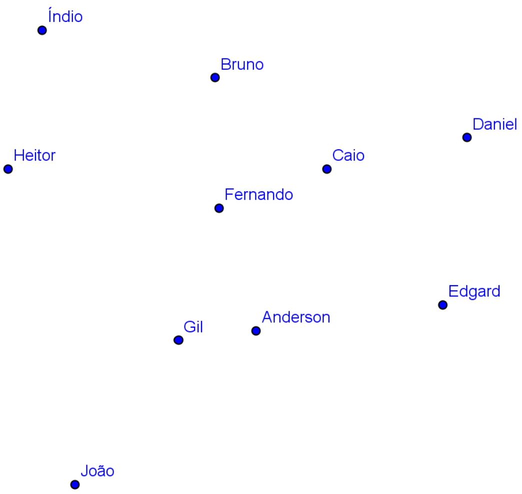


Figura 6.6: Atividade: Reunião de amigos

Resolução e Comentários:

O objetivo dessa atividade era que o aluno utilizasse o conceito de circunferência. No primeiro ítem o aluno deveria traçar uma circunferência de 5 cm e analisar quais amigos tinham uma distância menor ou igual a 5 cm.

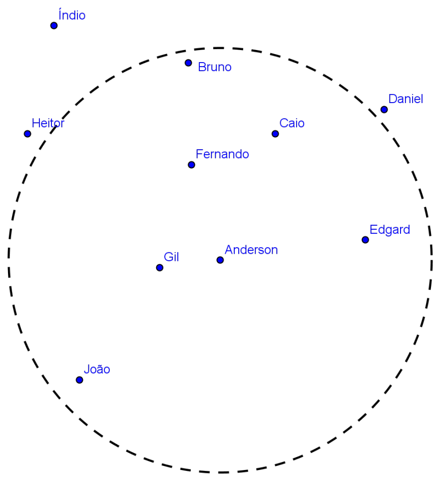


Figura 6.7: Atividade: Reunião de amigos (resolução)

Nos ítem b) o aluno deveria perceber se Heitor e Daniel pertenciam a mesma circunferência. Já no ítem c), o aluno deveria perceber qual era o amigo mais distante através da circunferência de maior raio.

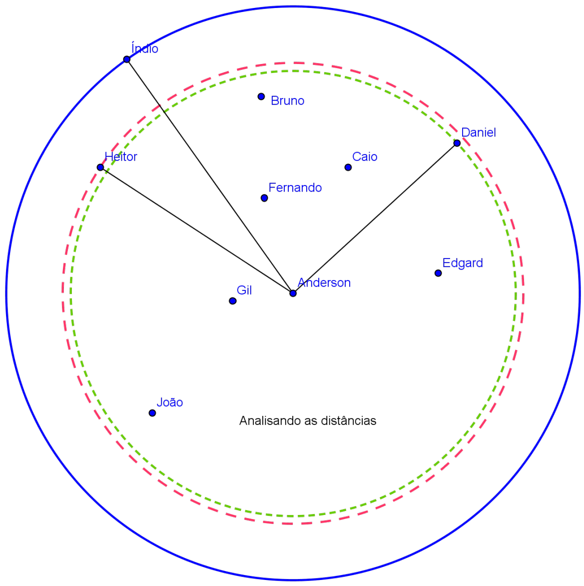


Figura 6.8: Atividade: Reunião de amigos (resolução)

Atividade 6.6.2 *:* (**O campo de futebol**)
OBJETIVO: *Situação problema que motive a discussão teórica do tema*

O campo de futebol é um retângulo. Suas linhas mais longas são chamadas laterais e as mais curtas de linha de fundo. O centro do campo é marcado com um ponto, em torno do qual existe uma circunferência, justamente para que no momento da saída de bola, todos os jogadores estejam com a mesma distância mínima regulamentar. O mesmo ocorre na cobrança de pênaltis. Desse ponto existem no exterior de cada área arcos de circunferência (um "pedacinho" da circunferência). Na figura abaixo, temos o desenho de um campo de futebol.

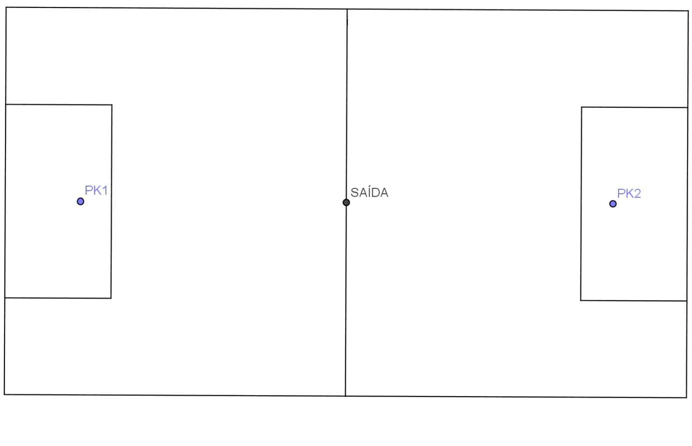


Figura 6.9: Atividade Campo de Futebol

a) Trace a circunferência do meio de campo, com 2,5 cm.

b) Trace os arcos da linha do penalti, com 1,0 cm.

Resolução e Comentários:

Nessa atividade o aluno irá contextualizar o conceito de circunferência. Através de sua definição, o aluno pode entender melhor a forma de um campo de futebol e suas propriedades. É interessante discutir que no caso da marca do pênalti não é necessário construir a circunferência inteira, já que a mesma possui uma grande parte dentro da grande área, onde os jogadores não podem entrar no momento da cobrança. Para resolver o problema, o aluno irá construir uma circunferência com o centro e raios dados.

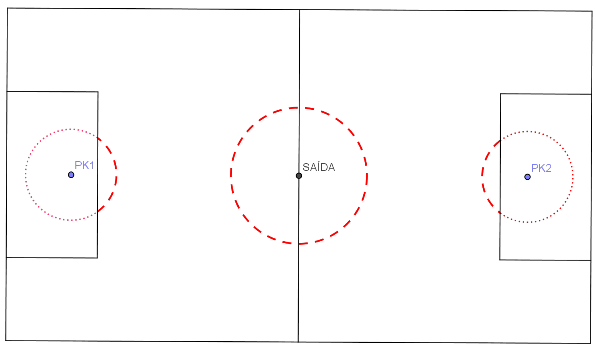


Figura 6.10: Atividade: Campo de Futebol (resolução)

Atividade 6.6.3 : (**Ruas Paralelas e Perpendiculares)**

Objetivo: *Situação problema que motive a discussão teórica do tema*

Rodrigo mora na Rua UFF, e possui dois amigos que moram na sua vizinhança: Manuela e Anderson. Anderson mora na rua UFRJ, paralela a rua de Rodrigo. Já Manuela mora na rua UERJ, perpendicular a rua de Rodrigo.
a) Trace as ruas onde Anderson e Manuela moram, utilizando um par de esquadros.
b) A rua de Manuela também é perpendicular a rua de Anderson?
c) Quais são os pares de ruas concorrentes?
d) As ruas de Anderson e Rodrigo se encontram?

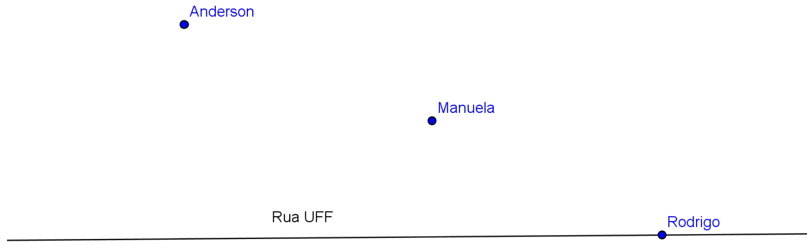


Figura 6.11: Atividade: Ruas paralelas e perpendiculares

Resolução e Comentários:

Nessa atividade o aluno irá construir retas paralelas e retas perpendiculares (passando por um ponto externo a reta). Através dessa atividade, o aluno irá relacionar as posições das retas com as ruas, construindo as mesmas. As posições relativas de uma reta no plano estão contextualizadas com o dia-dia do aluno, já que ruas paralelas e perpendiculares são formas usuais de se identificar ruas.

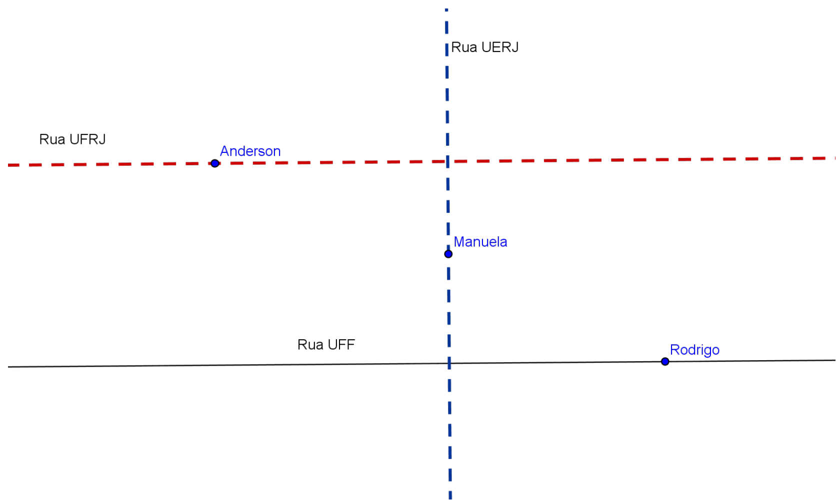


Figura 6.12: Atividade: Ruas paralelas e perpendiculares (resolução)

Atividade 6.6.4 *: (***Um novo amigo na vizinhança?)**

Objetivo: *Situação problema que motive a discussão teórica do tema*

João Victor acaba de chegar na vizinhança de Rodrigo! Sua mãe informou que eles irão morar na rua UFRJ (a mesma de Anderson), e que sua casa possui a mesma distância entre as casas de Manuela e Rodrigo. Descubra o local da casa de João Victor.

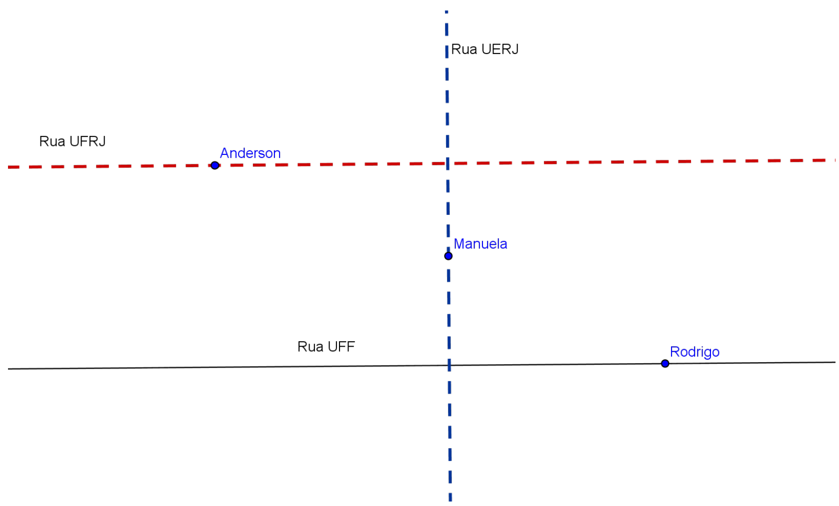


Figura 6.13: Atividade: Um novo amigo na vizinhança!

Resolução e Comentários:

Através dessa situação problema, é trabalhado o conceito de Mediatriz. A casa de João Victor possui a mesma distância de Manuela e Rodrigo, portanto, pertence a reta mediatriz do segmento que une ambas as casas. Como João Victor mora na rua UFRJ, só pode ser a interseção das duas retas.

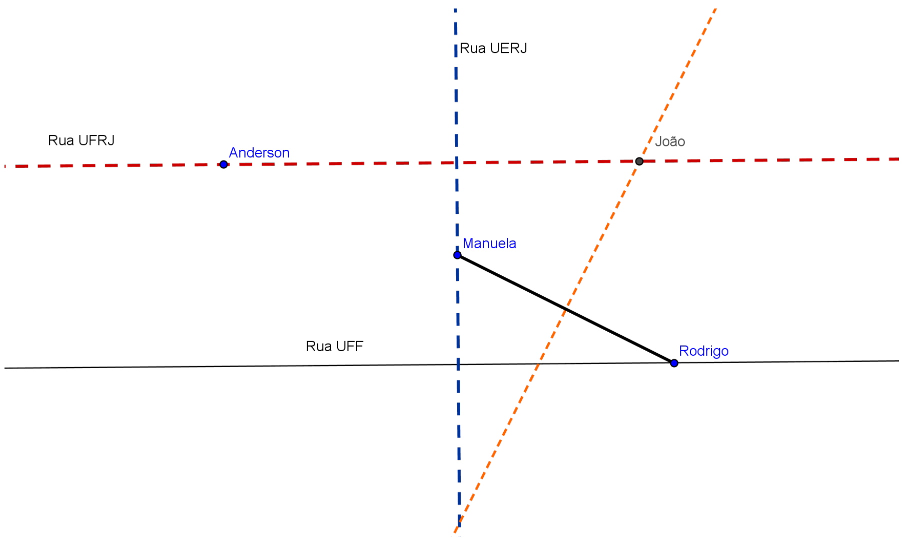


Figura 6.14: Atividade: Um novo amigo na vizinhança! (resolução)

Atividade 6.6.5 *: (***Ajude os Bombeiros**[1])

Objetivo: *Situação problema que motive a discussão teórica do tema*

Um carro de bombeiros está no ponto A e parte para apagar um incêndio no ponto B; como está vazio, deve abastecer-se de água no rio representado pela reta r. Desenhe o caminho mais curto que o veículo deve percorrer.

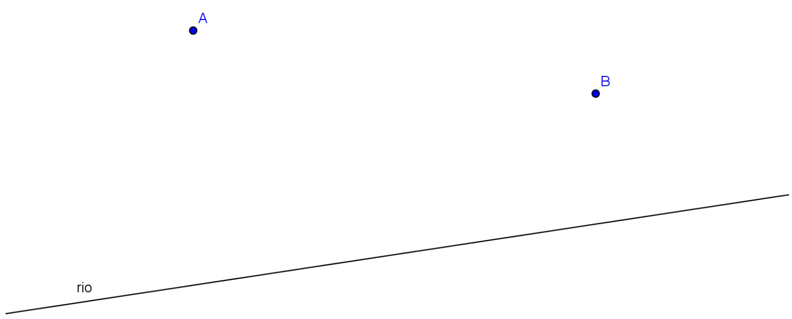


Figura 6.15: Atividade 5: Ajude os bombeiros

[1] Disponível em: http://www.org.br/export/sites/default/semana_olimpica/docs/2003/Contru_1.doc.

RESOLUÇÃO E COMENTÁRIOS:

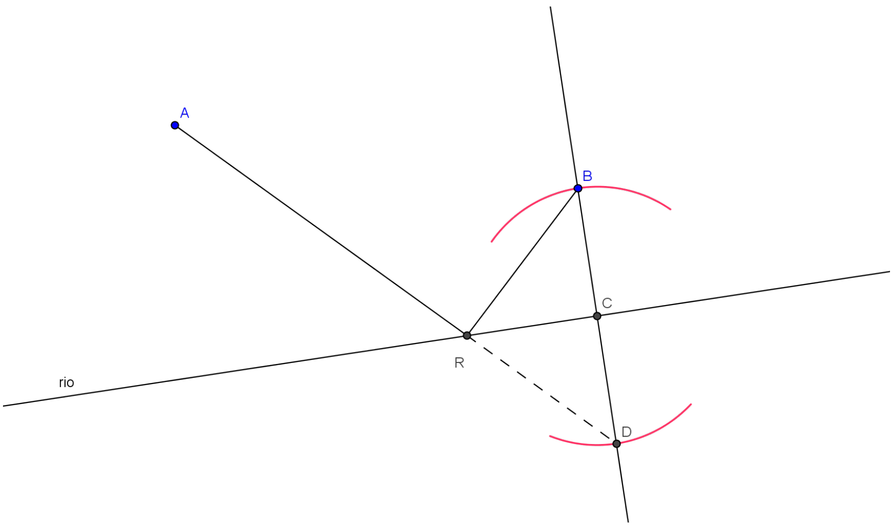


Figura 6.16: Atividade 5: Ajude os bombeiros (resolução)

Podemos observar que os triângulos ΔBRC e ΔCRD são congruentes pelo caso LAL, pois $\overline{CB} = \overline{CD}$, o lado $\overline{RC}$ é comum a ambos os triângulos e $\angle DCR = \angle RCB = 90°$. Então $\overline{RD} = \overline{RB}$. Como a menor distância possível entre os pontos A e D é o segmento de reta $\overline{AD}$, o caminho ARB é o mais curto possível.
Nessa atividade o aluno utiliza o conceito de simetria de um ponto em relação a uma reta de maneira contextualizada. Através da situação problema, o aluno deve refletir que a menor distância entre dois pontos é uma reta, e portanto utilizando o ponto simétrico de B, podemos achar o ponto R que nos dá a solução do problema.

Capítulo 7

Construções Geométricas para o 7° ano do Ensino Fundamental

Durante o 7° ano o aluno deve aprofundar alguns conceitos que foram fixados no ano anterior (como retas paralelas, perpendiculares e mediatriz). Além disso, o conceito de ângulo será introduzido. Segundo [1], é importante que o durante o ensino desse conteúdo seja explorado também a noção de ângulos como direção.

Normalmente os polígonos inscritos são ensinados durante o 8° ano do Ensino Fundamental. Optamos por apresentar esse conceito no 7° ano justamente para explorar o conceito da divisão da circunferência em partes iguais (e consequentemente a construção de ângulos centrais notáveis em uma circunferência).

7.1 Conteúdo Geométrico

Neste capítulo serão tratados os seguintes conceitos:

1. Introdução aos ângulos (bissetriz, transporte de ângulos e construção de ângulos notáveis).
2. Utilização do conceito de ângulos como direção.
3. Construção de polígonos regulares inscritos.

7.2 Retas Paralelas, Perpendiculares e Mediatriz

As definições são as mesmas apresentadas no 6° ano. Neste ano o aluno vai explorar de uma forma mais elaborada as diversas interseções desses lugares geométricos, como podemos ver nas atividades 7.5.1 e 7.5.2.

7.3 Introdução aos ângulos

Definição 7.3.1 *(Ângulo) chama-se de ângulo à reunião de duas semi-retas de mesma origem, não contidas numa mesma reta (não colineares)*

Ver [9, p.20].

Transporte de Ângulos

Construção:

1. Trace uma semi-reta ($\overrightarrow{DE}$) suporte para um dos lados do ângulo que desejamos criar. A origem (D) dessa semi-reta será o vértice do ângulo.
2. No ângulo ($\angle ABC$) que desejamos transportar, traçamos um arco de circunferência com centro em B e raio r.
3. Marque $M \in \overline{AB} \cap C(B, r)$ e $P \in \overline{BC} \cap C(B, r)$
4. Com centro em D construa uma circunferência de raio r. Marque $N \in \overline{DE} \cap C(D, r)$.
5. Com centro em N construa uma circunferência de raio $\overline{MP}$.
6. Marque no semiplano superior a reta r, o ponto $Q \in C(D, r) \cap C(N, \overline{MP})$
7. O angulo $\angle NDQ$ é o requerido.

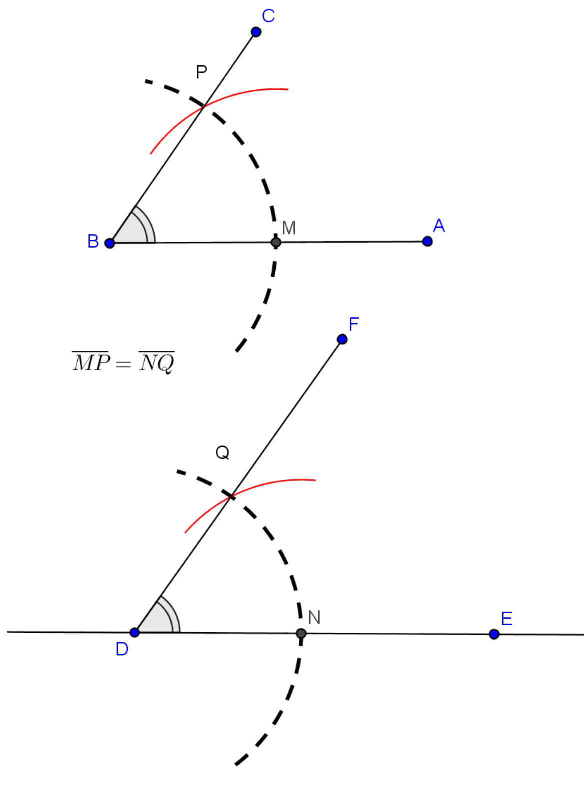


Figura 7.1: Transporte de ângulos

Justificativa:
Por construção, temos que $\overline{BM} = \overline{DN} = \overline{BP} = \overline{DQ}$ e $\overline{MP} = \overline{NQ}$. Logo os triângulos ΔBMP e ΔDNQ são congruentes pelo caso LLL. Portanto, o ângulo $\angle CBA = \angle FDE$.

Para compreender melhor esse conceito, foram criadas as atividades 7.5.3 e 7.5.4.

Definição 7.3.2 *(Bissetriz) A bissetriz de um angulo é a semi-reta de origem no vértice do ângulo, sendo assim equidistante de seus lados.*

Construção:

1. Com abertura de compasso qualquer, centro de compasso no vértice V determinamos dois pontos A e B, em seus respectivos lados.
2. Abertura de compasso qualquer, com centro em A e em B traçamos arcos no interior do ângulo.
3. A intersecção desses arcos determina o ponto C.
4. Traça-se a semi-reta de origem V e que passa pelo ponto C é a bissetriz do ângulo pedida.

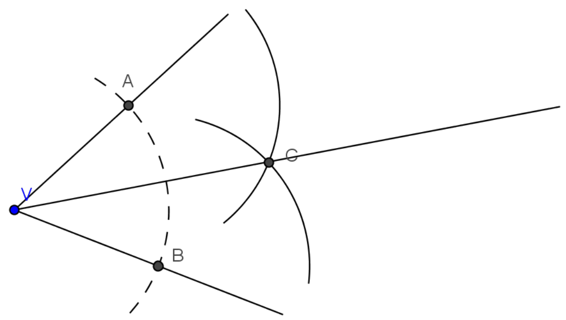


Figura 7.2: Bissetriz de um ângulo

Justificativa:

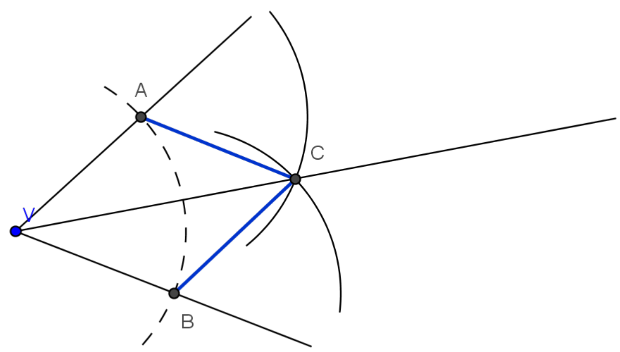


Figura 7.3: Construção da bissetriz de um ângulo

O ponto V é equidistante dos pontos A e B, ou seja, $\overline{VA} = \overline{VB}$. Por construção, o ponto C também é equidistante dos pontos A e B, já que os arcos possuem a mesma abertura. Portanto, $\overline{CA} = \overline{CB}$. Podemos concluir que os triângulos ΔVAC e ΔVBC são congruentes pelo caso LLL, pois:
$\overline{VA} = \overline{VB}$
$\overline{CA} = \overline{CB}$
$\overline{VC}$ é um lado comum.

Consequentemente, $\angle AVC = \angle BVC$ e a semi-reta VC é a bissetriz do ângulo dado.

Construindo um ângulo de $60°$

CONSTRUÇÃO:

1. Trace uma semi-reta qualquer de origem V
2. Centro do compasso em V abertura qualquer trace um arco que determine o ponto A na semi-reta dada
3. Centro de compasso em A, com a mesma abertura, determine o ponto B sobre o arco.
4. Trace o segmento $\overline{VB}$. O ângulo $\angle BAV = 60°$

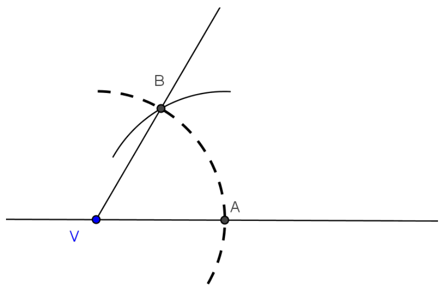


Figura 7.4: Construção do ângulo de 60°

JUSTIFICATIVA:

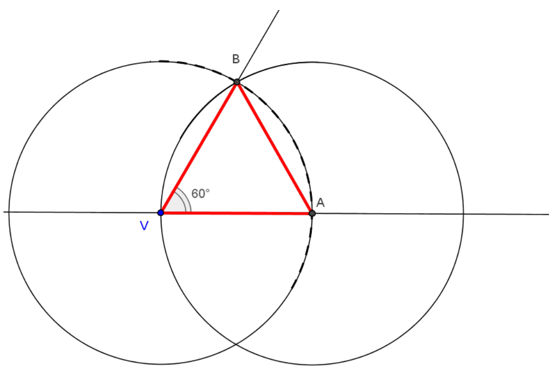


Figura 7.5: Construção do ângulo de 60°

Por construção, o triângulo ΔBVA é equilátero pois $\overline{VA} = \overline{VB} = \overline{AB}$ (já que o círculo com centro em A possui raio $\overline{AB} = \overline{VA}$. Como o triângulo equilátero é equiângulo, $\angle BVA = 60°$.

Construindo um ângulo de $45°$

Construção:

1. Trace uma reta e nela marque um ponto qualquer
2. Construa uma reta perpendicular a essa reta, formando assim um ângulo de $90°$
3. Trace a bissetriz

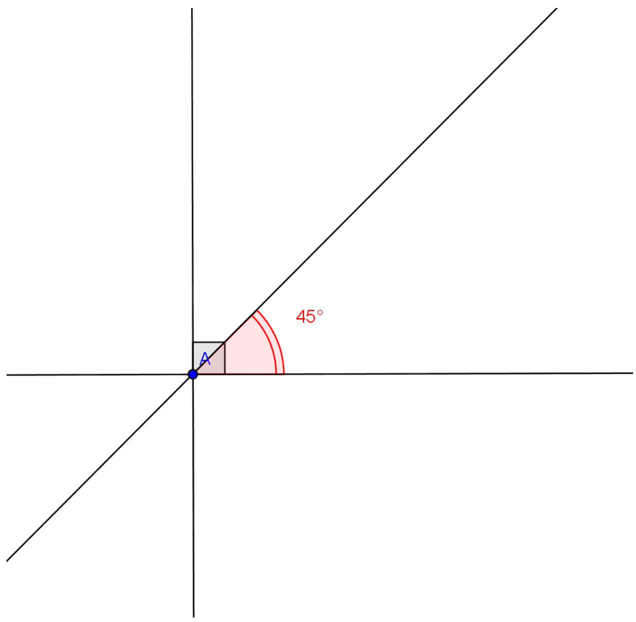


Figura 7.6: Construção do ângulo de $45°$

A atividade 7.5.5 é uma aplicação desses conceitos.

7.4 Polígonos regulares inscritos

Definição 7.4.1 *(Polígono Regular Inscrito) Todo polígono regular é inscritível numa circunferência ou dado um polígono regular, existe uma única circunferência que passa pelos seus vértices.*

Ver [9, p.270]

7.5 Atividades

Atividade 7.5.1 *:* **(Caça ao Tesouro)**

OBJETIVO: *Situação problema que motive a discussão teórica do tema*

No mapa abaixo estão localizadas 3 árvores. João e Carlos resolveram brincar de caça ao tesouro.

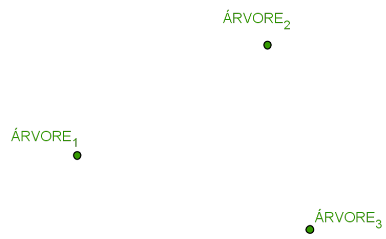


Figura 7.7: Atividade: Caça ao Tesouro

Carlos escondeu o tesouro em um ponto que possui a mesma distância para as três árvores. Construa esse ponto.

RESOLUÇÃO E COMENTÁRIOS:

Nesse exercício o aluno deve utilizar o conceito de mediatriz, ensinado no ano anterior. Como o tesouro está na mesma distância das três árvores, ele deve estar na mesma distância das árvores duas a duas.

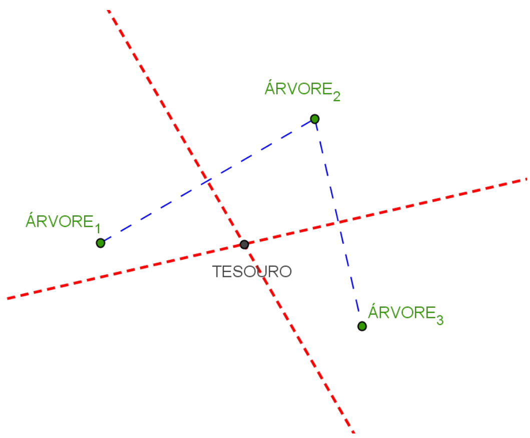


Figura 7.8: Atividade: Caça ao tesouro

Além disso, é interessante que o professor promova uma discussão sobre o ponto onde o tesouro está situado, já que se trata do centro da circunferência que passa pelos pontos A_1, A_2 e A_3.

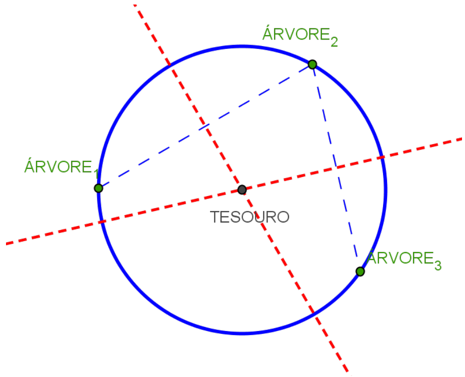


Figura 7.9: Atividade: Caça ao tesouro

Atividade 7.5.2 *:* **(O Quadrado Mágico)**

OBJETIVO: *Situação problema que motive a discussão teórica do tema*

Muitos times de futebol utilizam um esquema chamado "quadrado mágico", onde os 4 jogadores do meio campo ficam dispostos como um quadrado. Na posição normal, 2 jogadores (J_1 e J_2) ficam nos pontos sobre a circunferência e a linha de meio campo. Os outros dois (J_3 e J_4) ficam com a mesma distância de J_1 e J_2, também sobre a circunferência.

a) Construa esse esquema tático na figura abaixo.

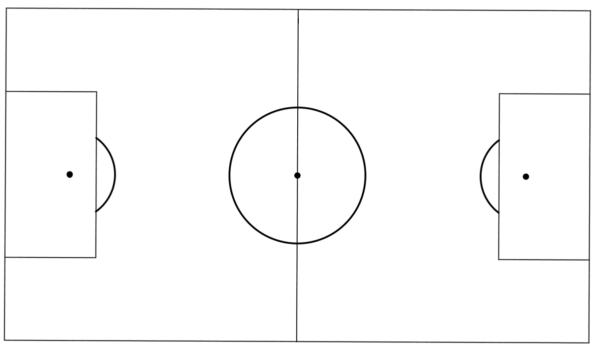


Figura 7.10: Atividade: Quadrado Mágico

b) Na posição de ataque, os jogadores mantém a distância entre eles e a estrutura do esquema, mas o jogador mais defensivo está sobre o ponto de saída da bola. Utilizando a construção anterior, faça o esquema ofensivo do "quadrado mágico".

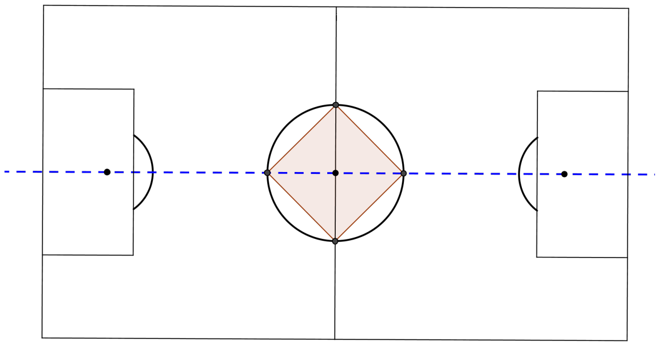


Figura 7.11: Solução do ítem a) que será utilizada neste ítem

Resolução e Comentários:

Essa atividade serve como uma introdução a idéia da construção de polígonos inscritos em uma circunferência. No ítem a) o aluno deveria marcar dois pontos (J_1 e J_2), e encontrar outros dois que possuísem a mesma distância. Para solucionar o problema, o aluno deveria marcar os pontos de interseção entre a mediatriz de $\overline{J_1J_2}$ e a circunferência, como mostrado na figura anterior.

No ítem b) o aluno deveria deslocar todos os pontos para a esquerda com comprimento igual ao raio do grande círculo. Para isso, basta deslocar a linha de saída do meio campo construindo uma perpendicular sobre o J_1 e construir uma nova circunferência de raio $\overline{OJ_1}$.

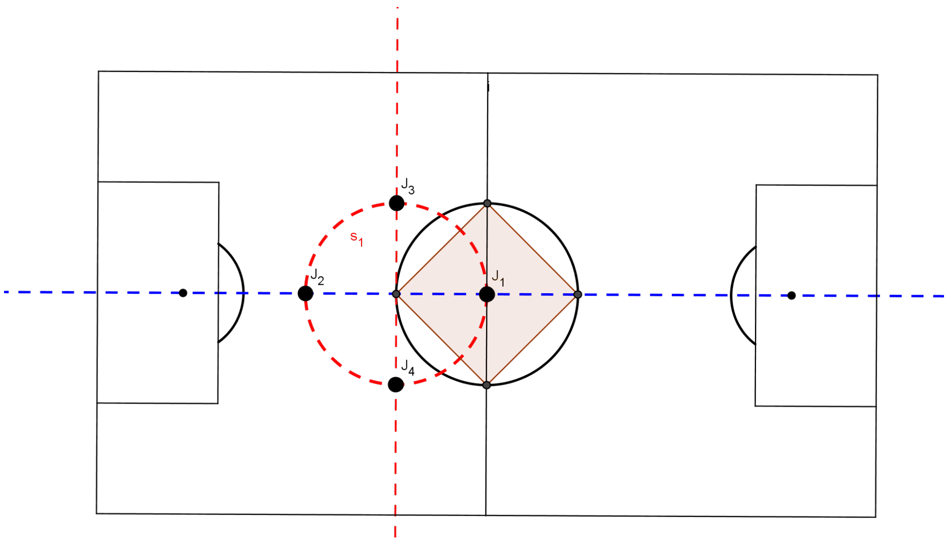


Figura 7.12: Atividade: Quadrado Mágico (resolução)

Atividade 7.5.3 *:* **(Atividade: Sem GPS!)**

Objetivo: *Situação problema que motive a discussão teórica do tema*

Marcelo gostaria de conhecer a nova loja de GAMES do seu bairro. Para isso, Henrique fez algumas instruções para que Marcelo alcançasse seu destino. Abaixo estão as instruções feitas por Henrique e o caminho que Marcelo utilizou. O mapa abaixo e as *instruções estão na escala* $\frac{1}{1000}$.

Instruções de Henrique:

- *Ande 10 cm e vire* 45° *no sentido horário*
- *Ande 5 cm e vire* 60° *no sentido anti-horário*
- *Ande mais 9 cm e vire* 90° *no sentido anti-horário*

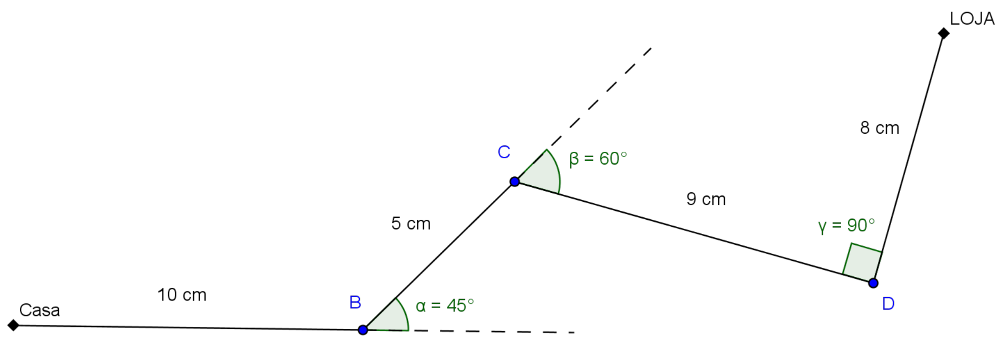


Figura 7.13: Caminho feito por Marcelo

Responda:
a) Quantos metros Marcelo andou?
b) Marcelo não seguiu as instruções corretamente. Qual foi seu erro?
c) Construa o caminho correto que deveria ser feito por Marcelo.
d) Qual a propriedade que existe entre os pontos certos e errados do caminho de Marcelo?
e) Caso Marcelo percebesse o erro ao chegar no ponto final errado, qual caminho deveria fazer para chegar diretamente ao seu destino?

Resolução e Comentários:

Nesse problema o aluno deve refletir sobre escalas, ângulos (com um enfoque de sentido e direção) e simetria. Na primeira letra do exercício, o aluno deve utilizar a escala $\frac{1}{1000}$ para calcular a distância em metros percorrida por Marcelo.

Na letra (b) o aluno deveria perceber que o caminho feito por Marcelo trazia os sentidos dos ângulos trocados (aonde deveria ser horário, estava anti-horário, e vice-versa). Finalmente na letra (c) o aluno deveria executar a construção correta do caminho. Não é necessário que o aluno saiba construir ângulos de 45° ou 60°, mas sim somente o transporte dos mesmos.

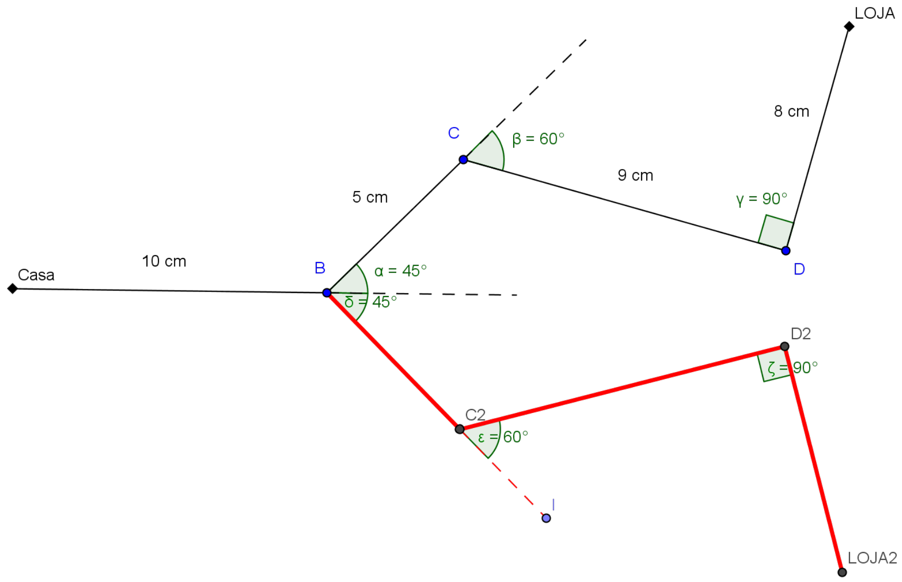


Figura 7.14: Caminho correto da loja seguindo as instruções de Henrique

Na letra (d), após executar as construções, o aluno deveria perceber que os pontos corretos são justamente os simétricos em relação a reta que passa pelos pontos A e B.

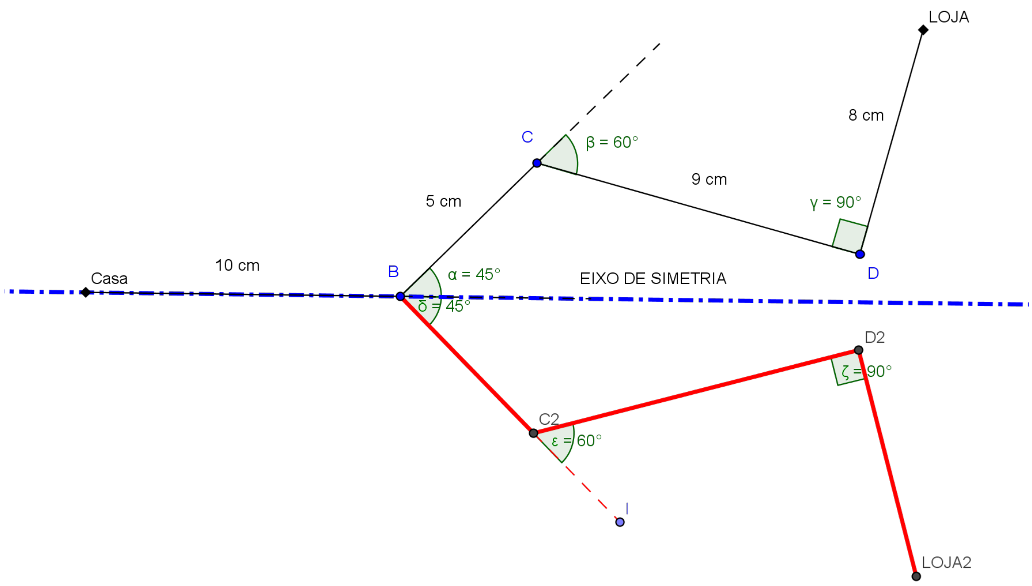


Figura 7.15: Simetria dos pontos no caminho correto das instruções

Finalmente, na letra (e) o aluno deveria perceber que basta a loja está cituada no ponto que é o simétrico da loja no caminho errado.

Atividade 7.5.4 *:* **(Jogo de sinuca)**

OBJETIVO: *Situação problema que motive a discussão teórica do tema*

Vamos jogar sinuca? Nesse jogo o objetivo é acertar a bola preta (ponto P) e vermelha (ponto V) nas caçapas utilizando a bola branca (ponto B). Sempre que a bola branca bate em uma das paredes o ângulo de entrada é igual ao ângulo de saída da bola.

a) Na primeira jogada vamos acertar a bola preta (ponto P). Não é permitido acertar a bola diretamente e só podemos acertar a parede uma única vez. Em qual das caçapas devemos tentar acertar a bola preta? Caçapa C_6 ou caçapa C_1? Justifique com as suas construções, e lembre-se: o ângulo de entrada da bola na parede é igual ao ângulo de saída.

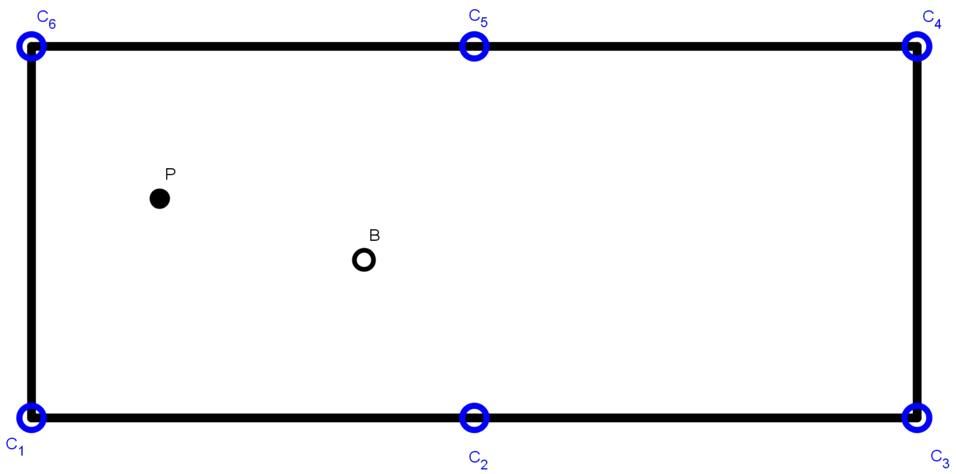


Figura 7.16: Atividade: Jogo de sinuca

b) Na segunda jogada devemos acertar a bola vermelha, passando pelas paredes $\overline{C_6C_4}$ e $\overline{C_4C_3}$. Marque os pontos Y e X respectivamente nessas paredes de forma que a bola consiga acertar a caçapa C_2.

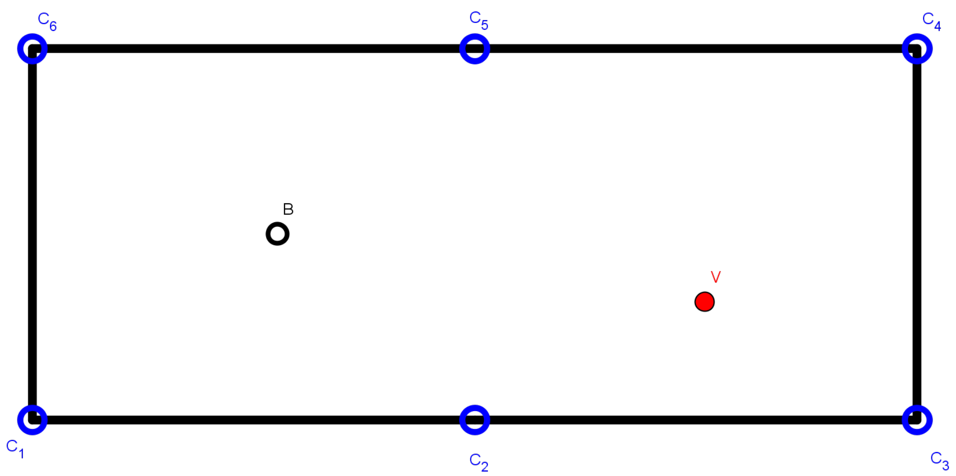


Figura 7.17: Jogo de sinuca

Resolução e Comentários:

Nessa atividade buscamos uma aplicação para o transporte de ângulos. No primeiro ítem, devemos fazer apenas uma jogada, batendo em uma das paredes. Traçamos a reta que passa pelos pontos P e C_6 e observamos o ângulo β. Como o ângulo de saída deve ser igual ao de entrada, traçamos o ângulo $\angle C_2CE = \beta$ e percebemos que essa jogada não passa pelo ponto B (bola branca). Analogamente, repetimos o processo para a caçapa C_1 e percebemos que essa jogada passa pelo ponto B, portanto a caçapa que devemos acertar é a caçapa C_1.

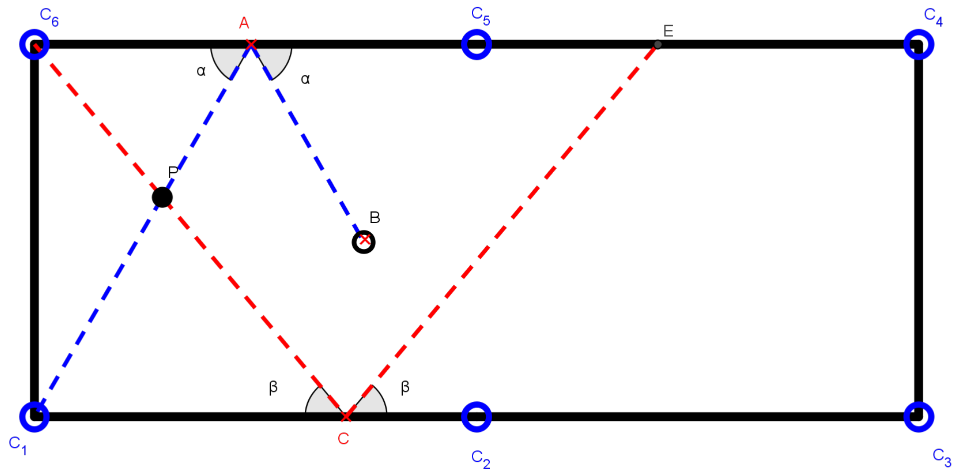


Figura 7.18: Jogo de sinuca

No segundo ítem devemos acertar as paredes duas vezes (não necessariamente com os mesmos ângulos). De forma semelhante ao ítem a), traçamos a reta que passa por $\overline{VC_2}$ e encontramos o ponto X em $\overline{C_3C_4}$. Transportamos o ângulo $\angle C_2XC_3$ e encontramos o ponto Y na parede $\overline{C_6C_4}$. A partir desse ponto Y, transportamos o ângulo $\angle XYC_4$ e verificamos que de fato, essa reta encontra a bola B e essa jogada é possível.

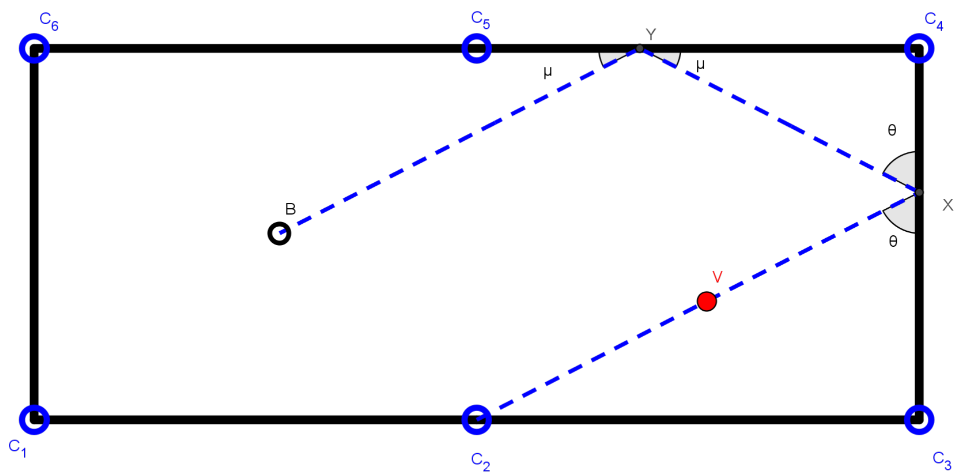


Figura 7.19: Jogo de sinuca

Atividade 7.5.5 *:* **(A Construção de Polígonos Regulares)**

Objetivo: *Complementação de um tópico da geometria, mostrando sua aplicação*

Divida uma circunferência de raio 5 cm em partes iguais e construa os seguintes polígonos regulares:

a) Quadrado
b) Triângulo
c) Hexágono
d) Octógono
e) Pentágono

Resolução e Comentários:

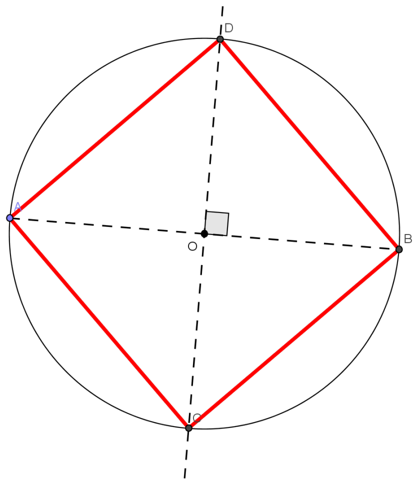


Figura 7.20: Quadrado inscrito na circunferência

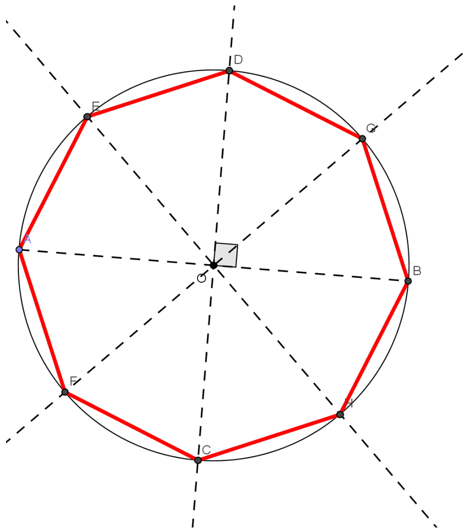


Figura 7.21: Octógono inscrito na circunferência

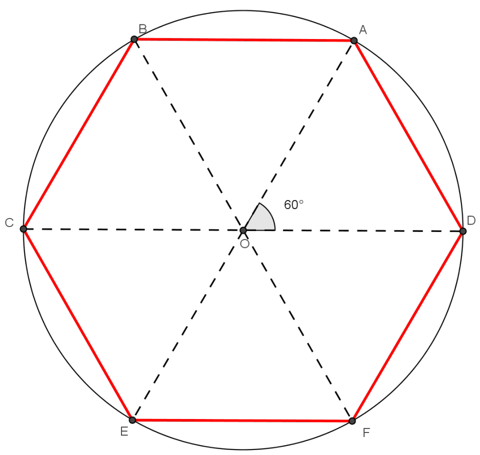


Figura 7.22: Hexágono inscrito

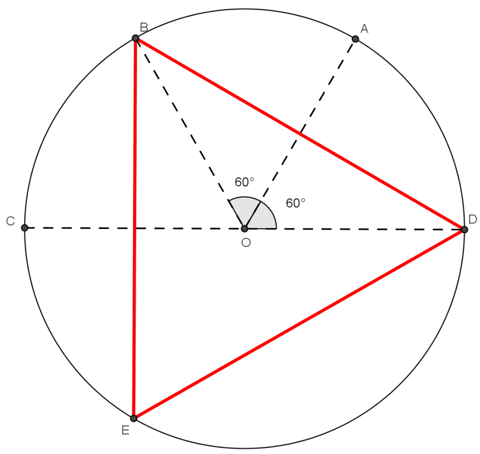


Figura 7.23: Triângulo inscrito

Para que os 4 primeiros ítens possam ser feitos, basta construir ângulos centrais de $90°$, $120° = 2.60°$, $60°$ e $45°$, que foram definidos anteriormente.

No último ítem, forçamos o alunos a refletir sobre a construção de um pentágono, já que a construção de um ângulo de $72°$ não foi apresentada anteriormente. Esse ítem foi proposto justamente para que o professor possa discutir com seus alunos a construção de um pentágono regular e de alguns polígonos que podem ser construídos através de régua e compasso.

Capítulo 8

Construções Geométricas para o 8° ano do Ensino Fundamental

Durante o 8° ano do Ensino Fundamental uma grande quantidade de conceitos geométricos são apresentados. Nessa etapa é importante que o aluno possa entender geometricamente as construções que serão feitas. Diferente dos anos anteriores, o aluno já possui maturidade matemática suficiente para compreender o traçado de retas paralelas e perpendiculares utilizando o compasso (e não somente os esquadros como anteriormente).

Além disso, podemos utilizar as construções como auxiliar na compreensão de assuntos teóricos importantes como congruência de triângulos, desigualdade triangular ou tangências. As atividades propostas buscam não só auxiliar na teoria como também aprofundar e contextualizar importantes assuntos que são apresentados durante o decorrer desse ano.

8.1 Conteúdo Geométrico

Neste capítulo vamos apresentar os seguintes conceitos:

1. Construção de retas paralelas e perpendiculares usando o compasso (aprofundando esses conceitos)
2. Pontos notáveis de um triângulo
3. Desigualdade triangular
4. Congruência de triângulos
5. Tangências entre circunferências e entre retas e circunferências
6. Arco Capaz

8.2 Construção de retas paralelas e perpendiculares usando o compasso

Definição 8.2.1 *(Retas perpendiculares) são retas que se interceptam fazendo um ângulo de* 90°

1° **caso: Perpendicular passando por um ponto pertencente à reta dada.**

Construção:

1. Com abertura de compasso qualquer, centro de compasso no ponto A dado, traçar um arco de circunferência marcando assim dois pontos (B e C) em r.
2. Aumente a abertura de compasso e com centro nos pontos (B e C), traçam-se dois arcos que se cortam em (D e F)
3. Unindo-se os pontos (D e F) obtém-se a perpendicular.

Justificativa:

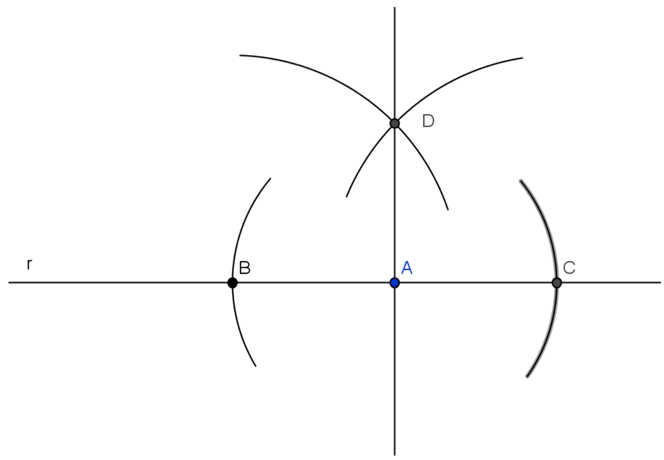


Figura 8.1: Construção de retas perpendiculares

Por construção, o ponto A é equidistante dos pontos B e C. O ponto D também é equidistante dos pontos B e C, pois $\overline{BD} = \overline{BC}$ (mesma abertura do compasso). Logo, os pontos A e D pertencem a mediatriz de $\overline{BC}$ e $\angle DAC = \angle DAB = 90^\circ$. Consequentemente as retas r e s são perpendiculares.

2° **caso: Perpendicular passando por um ponto não-pertencente à reta dada.**

Construção:

1. Com uma abertura de compasso qualquer, centro de compasso no ponto A dado (não-pertencente a reta), traçar um arco de circunferência marcando assim dois pontos (B e C) em r.
2. Com abertura de compasso qualquer, centro de compasso nos pontos (B e C), traçamos dois arcos que se encontram no ponto D.
3. Trace a reta passando pelos pontos A e D, assim obtendo a reta procurada.

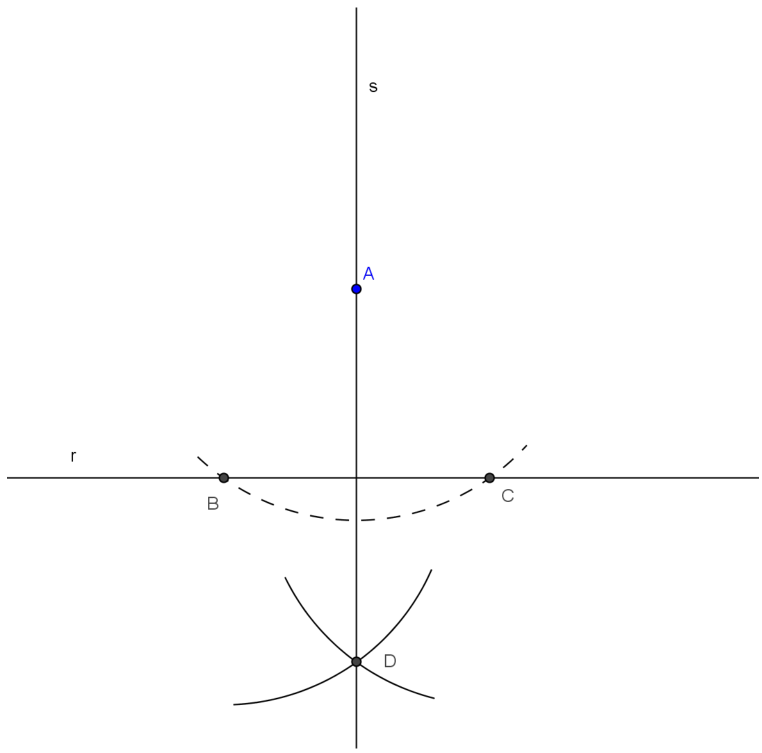


Figura 8.2: Construção de retas perpendiculares

Justificativa:

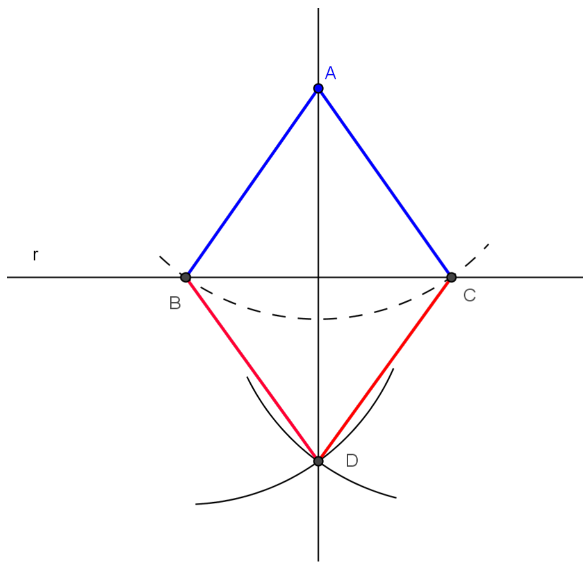


Figura 8.3: Construção de retas perpendiculares

Por construção, o ponto A é equidistante dos pontos B e C, já que $\overline{AB} = \overline{AC}$. O ponto D também é equidistante de B e C, já que $\overline{DB} = \overline{DC}$. Portanto, os pontos A e D pertencem a mediatriz do segmento $\overline{BC}$, logo as retas r e s são perpendiculares.

3° **caso: Perpendicular passando por um ponto qualquer.**
Nesse caso basta repetir os passos do 1° caso, escolhendo um ponto qualquer da reta.

Definição 8.2.2 *(Retas Paralelas) são retas que não possuem interseção e estão em um mesmo plano.*

1° **caso: Paralelas passando por um ponto qualquer.**

Construção:

1. Marca-se um ponto P qualquer sobre r. Com abertura de compasso qualquer e centro de compasso em P, traçamos um arco que determina em r os pontos A e B.

2. Com o centro do compasso nos pontos A e B, utilizando uma mesma abertura qualquer (menor que AP), marcamos sobre o arco os pontos C e D.

3. Unindo os pontos C e D obtemos a reta s paralela a r.

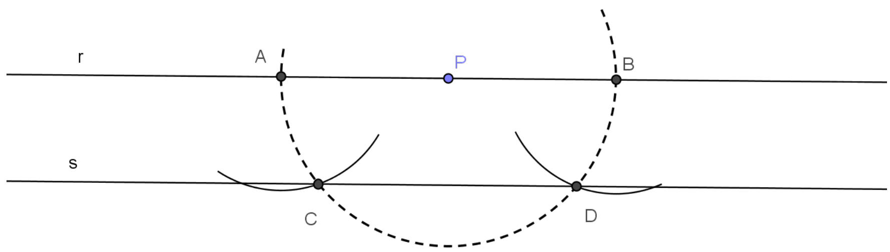


Figura 8.4: Construção de retas paralelas

Justificativa:

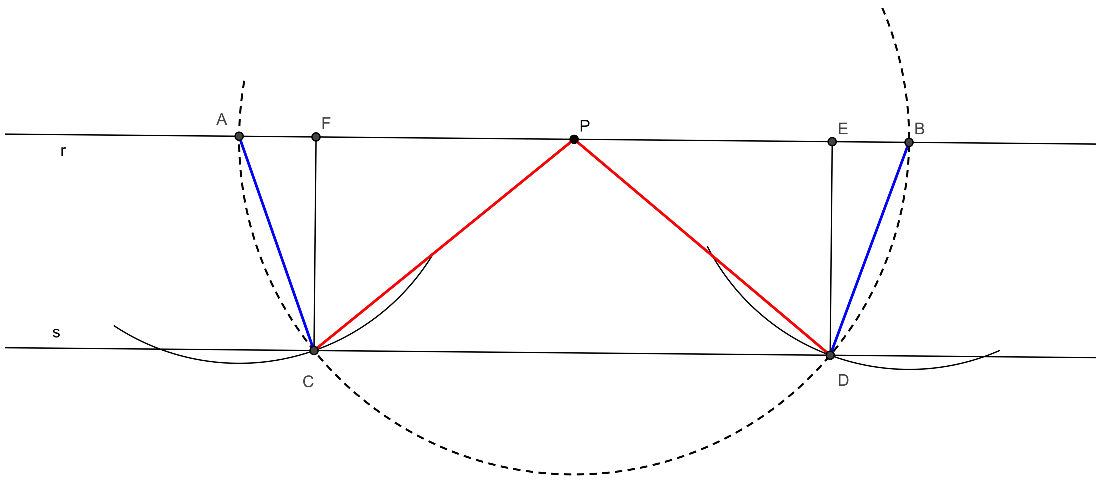


Figura 8.5: Construção de retas paralelas

Os triângulos ΔPAC e ΔPBD são congruentes pelo caso LLL, pois $\overline{PA} = \overline{PB}$, $\overline{AC} = \overline{BD}$ e $\overline{PC} = \overline{PD}$. Portanto, as alturas $\overline{CF}$ e $\overline{DE}$ de ambos os triângulos também são iguais. Logo, a reta s possui dois pontos que possuem a mesma distância para a reta r, definindo assim uma reta paralela.

2° caso: Paralela passando por um ponto P dado, não pertencente à reta r.

Construção:

1. Com o centro do compasso no ponto P (não-pertencente a reta r), traçamos um arco qualquer quer determine em r o ponto A.
2. Com a mesma abertura de compasso e centro no ponto A , traça-se um arco que passe por P e determine em r o ponto B.
3. Com o centro do compasso em A e abertura PB, transportamos essa medida para o arco assim determinando o ponto Q.
4. Unindo-se os pontos P e Q, encontramos a reta paralela pedida.

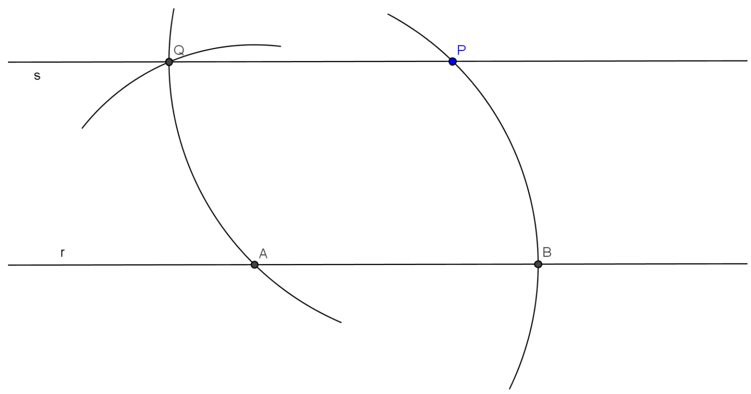


Figura 8.6: Construção de retas paralelas

Justificativa:

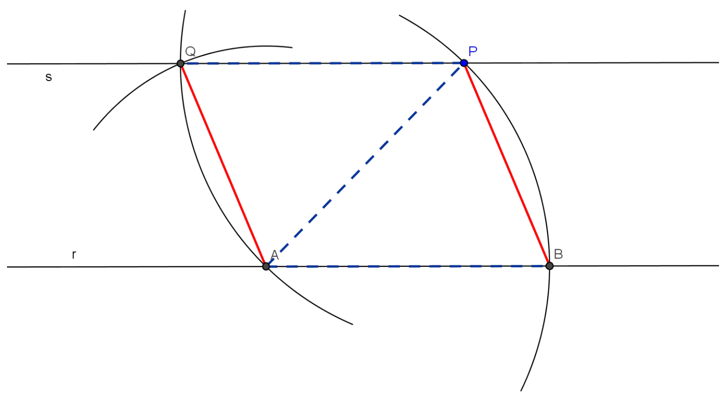


Figura 8.7: Construção de retas paralelas

O quadrilátero ABPQ é um paralelogramo, pois $\overline{AB} = \overline{PQ}$ (mesma abertura) e $\overline{AQ} = \overline{BP}$ (mesma abertura). Portanto, $\overline{PQ}$ é paralelo ao segmento $\overline{AB}$ e consequentemente a reta r é paralela a reta s.

3° caso: Paralela a uma reta r dada a uma distância determinada.
CONSTRUÇÃO:

1. Por um ponto C qualquer em r traça-se s perpendicular a reta dada.
2. Por um ponto D qualquer em r traça-se t outra reta perpendicular a reta dada.
3. Com centro de compasso em C e abertura com medida pedida, marcamos essa distância sobre r determinado o ponto P, transportamos essa medida para a reta t, determinando o ponto Q.
4. A reta que passa pelos pontos P e Q é a reta paralela pedida.

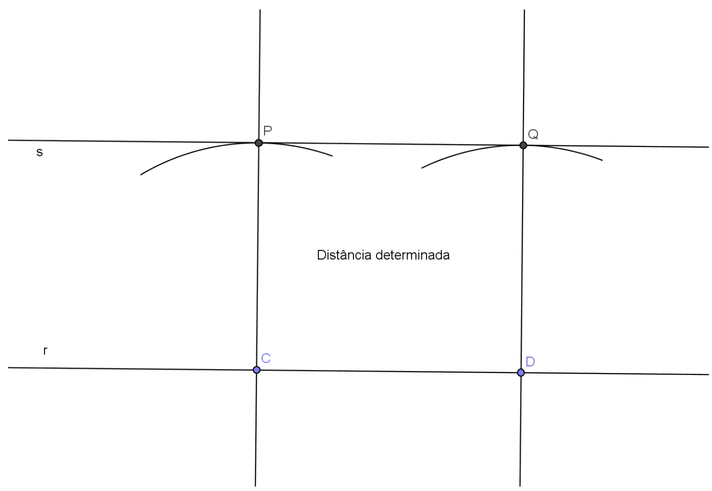


Figura 8.8: Construção de retas paralelas com uma distância determinada

JUSTIFICATIVA:

Ao determinar dois pontos (P e Q) com a mesma distância da reta r, sabemos que a reta s que passa por ambos será equidistante da reta r. Logo, as retas r e s são paralelas.

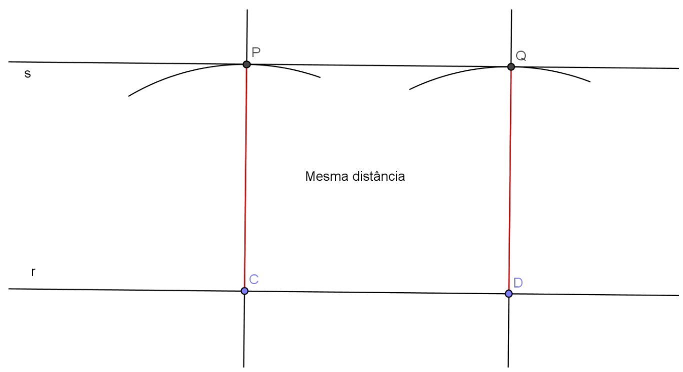


Figura 8.9: Construção de retas paralelas

8.3 Desigualde Triangular

Teorema 8.3.1 *(Desigualdade triangular) Em todo triângulo, cada lado é menor que a soma dos outros dois.*

DEMONSTRAÇÃO:

Ver [9, p. 56].

A atividade 8.8.2 auxilia a compreensão desse assunto.

8.4 Congruência de Triângulos

Definição 8.4.1 *(Congruência de Triângulos) Dizemos que dois triângulos são congruentes quando os lados e ângulos do primeiro triângulo estão em correspondência com os lados e ângulos do segundo triângulo de tal forma que os ângulos e lados em correspondência tenham a mesma medida.*

Ver [9, p.38].

A atividade 8.8.3 mostra uma aplicação das construções geométricas em relação aos casos de semelhança.

8.5 Pontos notáveis de um triângulo

Definição 8.5.1 *(Baricentro) As três medianas de um triângulo interceptam-se num mesmo ponto que divide cada mediana em duas partes tais que a parte que contêm o vértice é o dobro da outra*

(Incentro) As três bissetrizes internas de um triângulo interceptam-se num mesmo ponto que está a igual distância dos lados do triângulo.

(Circuncentro) As mediatrizes dos lados de um triângulo interceptam-se num mesmo ponto que está a igual distância dos vértices do triângulo.

(Ortocentro) As três retas suportes das alturas de um triângulo interceptam-se num mesmo ponto.

As atividades 8.8.4 e 8.8.5 contextualizam os conceitos apresentados acima.

8.6 Tangências entre circunferências e entre retas e circunferências

Definição 8.6.1 *(Reta tangente a uma circunferência:) Uma reta é tangente a uma circunferência quando a intercepta em um único ponto. A reta que contém esse raio é chamada de reta normal.*

Definição 8.6.2 *(Tangência entre Circunferências:) Duas curvas são tangentes num ponto dado T, quando as tangentes a essas curvas nesse ponto são coincidentes.*

Propriedades:

1. Toda reta tangente a uma circunferência é perpendicular ao raio no ponto de tangência.
2. Dada uma corda $\overline{AB}$ o centro da circunferência pertence a mediatriz dessa corda.
3. Quando duas circunferências são tangentes entre si, três pontos notáveis devem ser colineares: os dois centros e o ponto de tangência.
4. Se as circunferências são tangentes externas, a distância entre os seus centros é igual a soma dos raios.
5. Se as circunferências são tangentes internas, a distância entre os seus centros é igual a diferença entre os raios.

As atividade 8.8.6 e 8.8.7 tratam dos assuntos dessa seção.

8.7 Arco Capaz

Definição 8.7.1 *(Arco Capaz) é o lugar geométrico dos pontos que vêem um segmento dado sob um ângulo qualquer dado.*

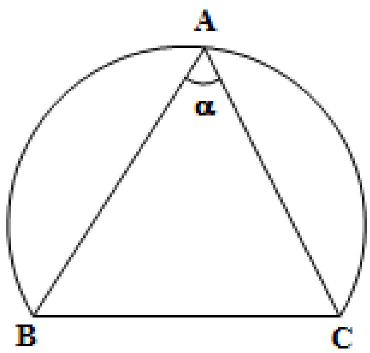


Figura 8.10: Arco Capaz

Construção:

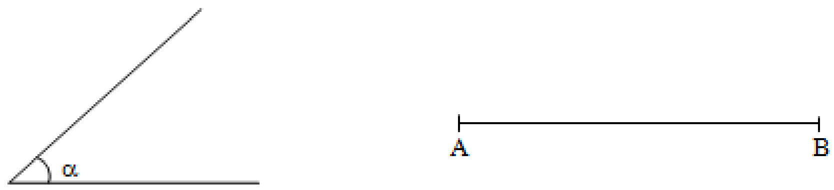


Figura 8.11: Arco Capaz

1. Transporte o ângulo de medida α para o segmento $\overline{AB}$, em uma das extremidades determinando a reta t.

2. Trace uma perpendicular ao lado do ângulo, obtendo o complemento do ângulo dado.

3. Trace a seguir a mediatriz do segmento $\overline{AB}$, determinando na intersecção com a perpendicular o ponto O.

4. Centro de compasso em O e abertura de compasso $\overline{AO}$ ou $\overline{OB}$, traçamos o primeiro arco capaz.

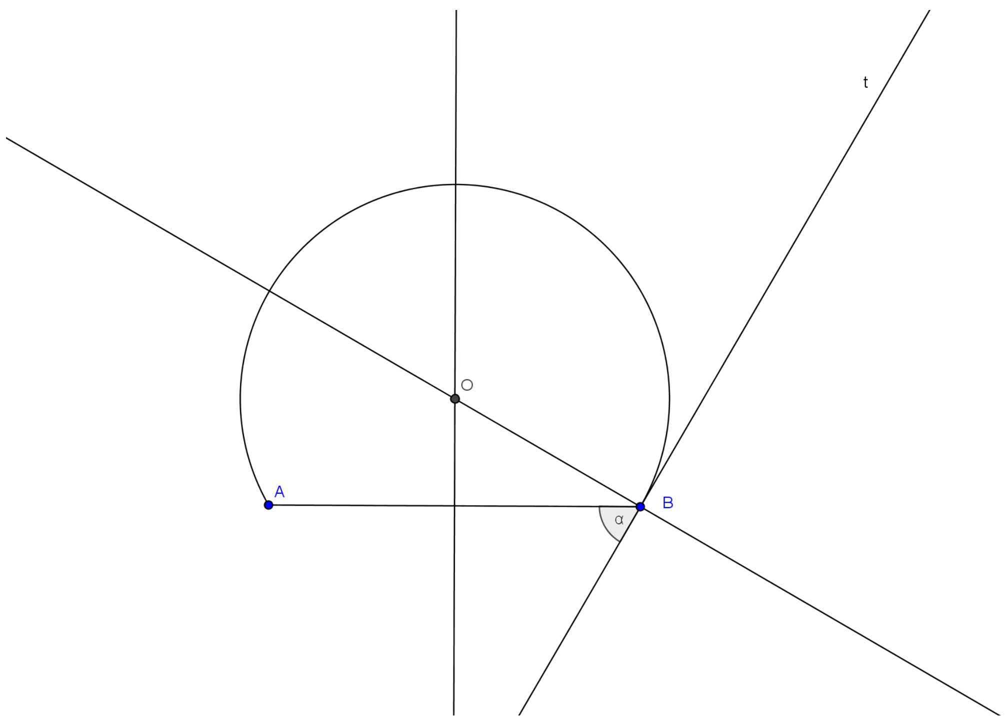


Figura 8.12: Arco Capaz

Justificativa:

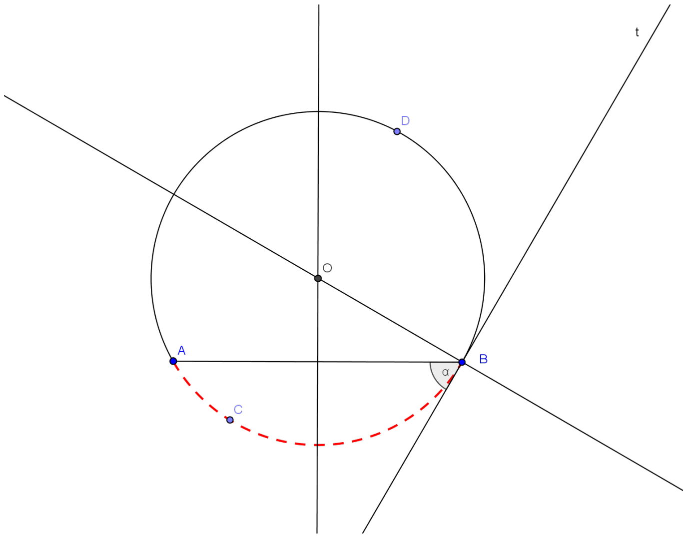


Figura 8.13: Justificativa da construção do Arco Capaz

O ângulo α é um ângulo de segmento, logo o arco $\widehat{\mathrm{ACB}} = \frac{\alpha}{2}$. Portanto, qualquer ângulo com vértice no arco $\widehat{\mathrm{ADC}}$ terá a mesma medida $\frac{\alpha}{2}$. Portanto, o arco $\widehat{\mathrm{ADC}}$ é o arco capaz de "enxergar" o segmento $\overline{AB}$ sob um ângulo α. É importante mostrar ao aluno que o traçado da mediatriz do segmento $\overline{AB}$ (corda da circunferência) nos possibilita encontrar o centro desse arco procurado, pois o mesmo é equidistante das extremidades A e B. Ao traçar o complemento do ângulo α, temos uma reta perpendicular a reta tangente a circunferência, que também passa pelo centro. O ponto de encontro dessa reta com a mediatriz será o centro do Arco Capaz.

A atividade 8.8.8 trata desse assunto.

8.8 Atividades

Atividade 8.8.1 *: (***O Desafio do Vértice Inacessível)**

Objetivo: *Complementação de um tópico da geometria, mostrando sua aplicação*

Encontre a bissetriz de um ângulo que possui o vértice inacessível

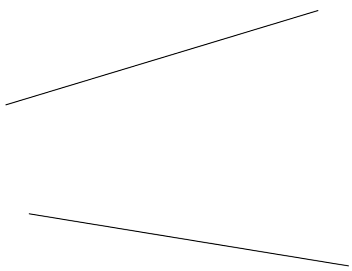


Figura 8.14: Bissetriz de um ângulo com vértice inacessível

Resolução e Comentários:

1. Traçamos uma reta transversal t as retas dadas, determinando os pontos A e B.
2. Traça-se às bissetrizes dos quatros ângulos internos formados, determinado os pontos C e D (pontos de interseção dois a dois destas).
3. Unindo-se os pontos C ao D obtemos a bissetriz pedida.

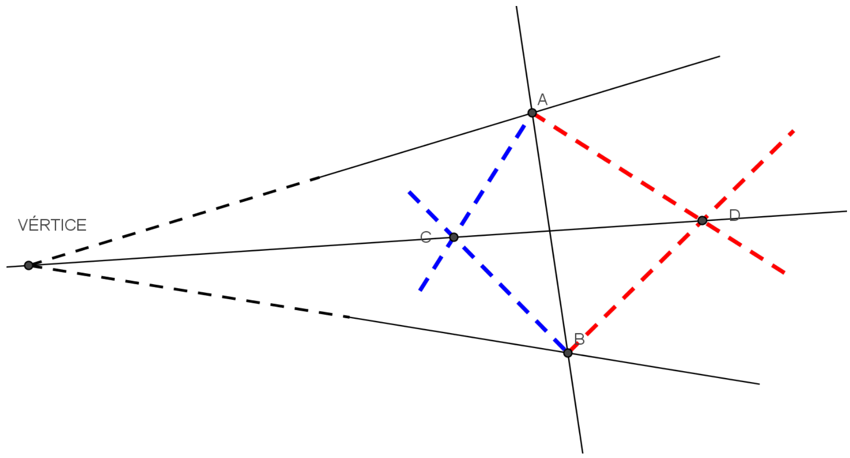


Figura 8.15: Bissetriz de um ângulo com vértice inacessível

Este exercício é extremamente desafiador e bastante difícil de ser resolvido. Porém, o grande ganho que se pode ter com esse tipo de exercício é com a justificativa da sua solução, pois envolvem vários assuntos como pontos notáveis, ângulos externos, tangência entre circunferências entre outros. É um exercício muito "rico", e que sua justificativa pode ser amplamente trabalhada.

Justificativa:

Ao traçar uma reta transversal t, obtemos um triângulo imaginário ΔABV, onde V seria o vértice inacessível. Ao traçar as bissetrizes dos ângulos $\angle VBA$ e $\angle VAB$ obtemos o incentro desse triângulo e obviamente a bissetriz do vértice inacessível passará por esse ponto. Quando traçamos as bissetrizes dos ângulos externos desse suposto triângulo, obtemos o centro do circulo exinscrito no triângulo.

Um círculo exinscrito de um triângulo é um circulo externo ao triângulo, tangente a um de seus lados e ao prolongamento dos outros dois. Como podemos ver na figura abaixo, a distância para os lados do ângulo é a mesma (raio do círculo exinscrito), logo esse ponto também pertence a bissetriz do ângulo cujo o vértice é inacessível. Portanto, concluimos que a reta que passa pelos pontos C e D é a bissetriz desse ângulo.

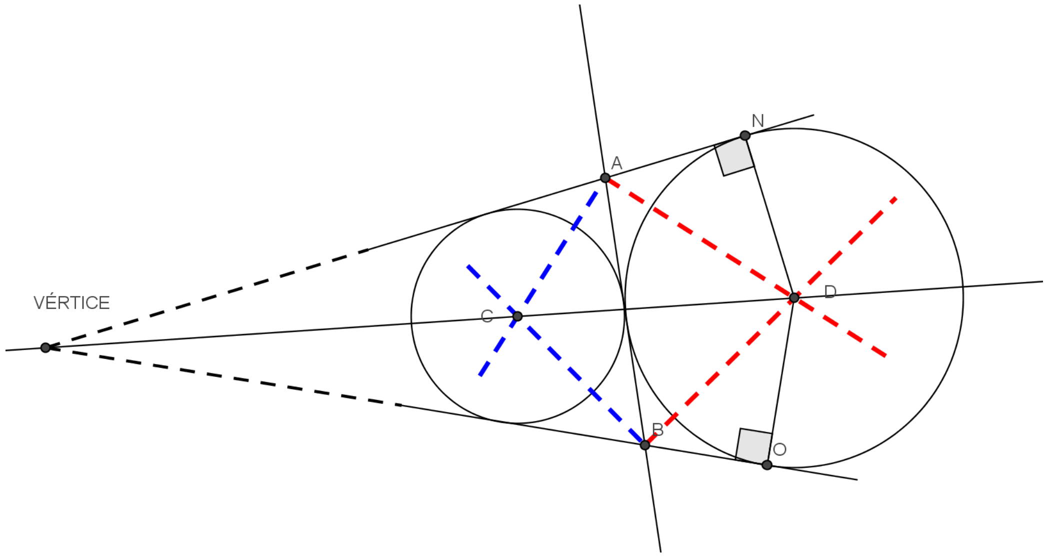


Figura 8.16: Vértice inacessível (resolução)

Atividade 8.8.2 *: (***A Desigualdade Triangular)**
OBJETIVO: *Complementação de um tópico teórico da geometria, mostrando sua aplicação*

Com auxílio da régua e um compasso, construa:

a) Um triângulo de lados 8 cm, 4 cm e 3 cm.
b) Um triângulo de lados 7 cm, 4 cm e 3 cm.
c) Um triângulo de lados 6 cm, 4 cm e 3 cm.
d) O que foi observado nos ítens anteriores?

RESOLUÇÃO E COMENTÁRIOS:
Segundo a desigualdade triangular (Proposição 20 do Livro 1 de Euclides), em um triângulo o comprimento de um dos lados é sempre inferior à soma dos comprimentos dos outros dois lados. Essa construção tem o objetivo de auxiliar geometricamente o aluno a compreender essa propriedade.

No primeiro ítem o aluno deve perceber que o triângulo não pode ser construído (já que $8 > 3 + 4$).

No segundo ítem temos a construção de um triângulo degenerado ($7 = 3 + 4$). Finalmente no terceiro ítem, onde o lado é menor do que a soma dos outros dois ($6 < 3 + 4$) , podemos formar um triângulo.

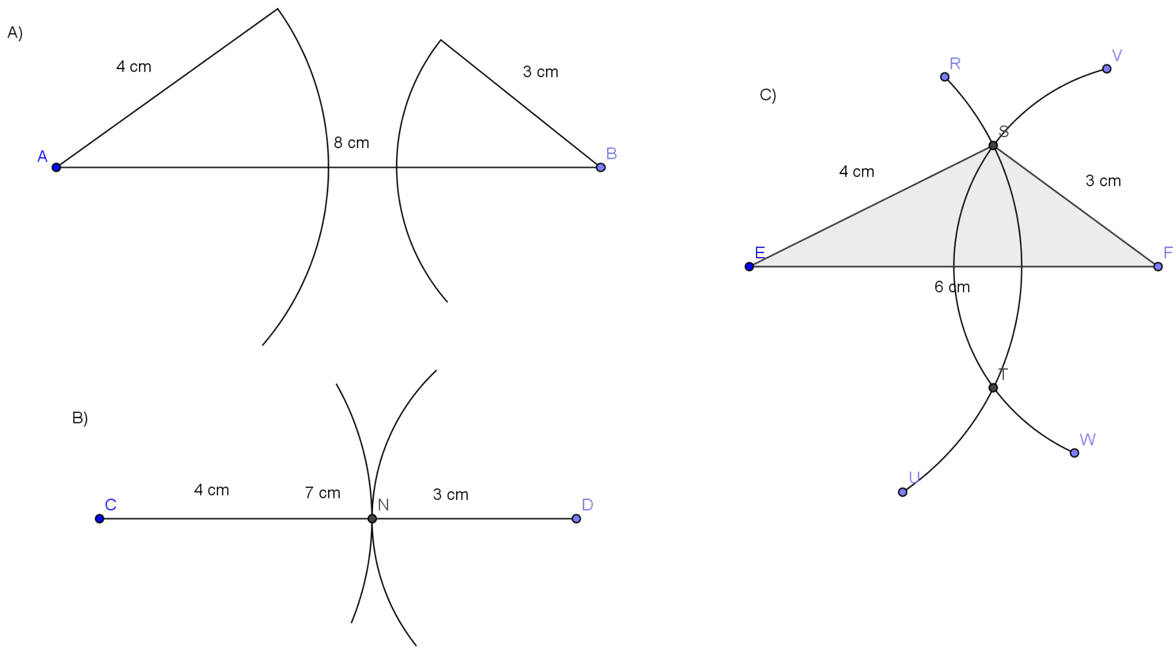


Figura 8.17: Atividade: Desigualdade Triangular

Atividade 8.8.3 *: (***Congruência de Triângulos)**

OBJETIVO: *Complementação de um tópico teórico da geometria, mostrando sua aplicação*

Em cada ítem, construa os triângulos seguindo as instruções abaixo:

a) $\overline{AB} = 3cm$, $\overline{BC} = 4cm$, $\overline{AC} = 5cm$.
Quantos triângulos com essas caracterísicas você encontrou? Qual o caso de congruência utilizado?

b) $\overline{AB} = 5cm$, $\angle BAC = 60°$ *e* $\overline{AC} = 4,5cm$.
Quantos triângulos com essas caracterísicas você encontrou? Qual o caso de congruência utilizado?

c) $\overline{AB} = 4cm$, $\angle BAC = 60°$ *e* $\angle ABC = 45°$
Quantos triângulos com essas caracterísicas você encontrou? Qual o caso de congruência utilizado?

d) $\overline{AB} = 6cm$, $\angle BAC = 45°$ *e* $\overline{BC} = 5cm$
Quantos triângulos com essas caracterísicas você encontrou? Qual o caso de congruência utilizado?

Resolução e Comentários:

Este exercício de construções geométricas tem o objetivo de auxiliar o aluno a compreender os casos de congruência de triângulos. No primeiro ítem, o caso apresentado é o LLL (lado-lado-lado). Ao encontrar somente um triângulo com essa característica, é mostrado que configura um caso de congruência. Analogamente, nos ítens b) e c) são mostrados outros dois casos de semelhança: LAL (lado-ângulo-lado) e ALA (ângulo-lado-ângulo).

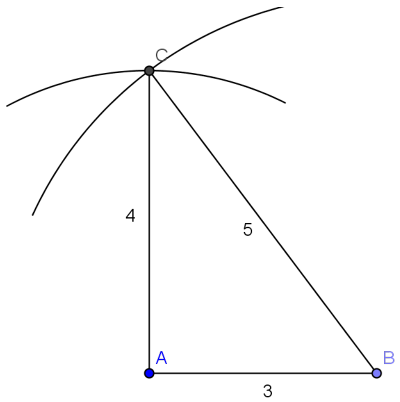


Figura 8.18: Ítem a): LLL

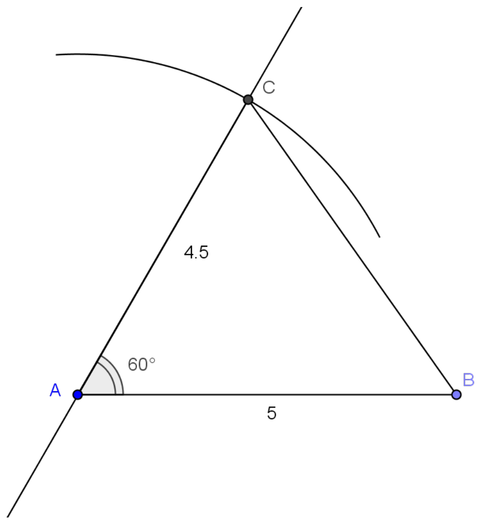


Figura 8.19: Ítem b): LAL

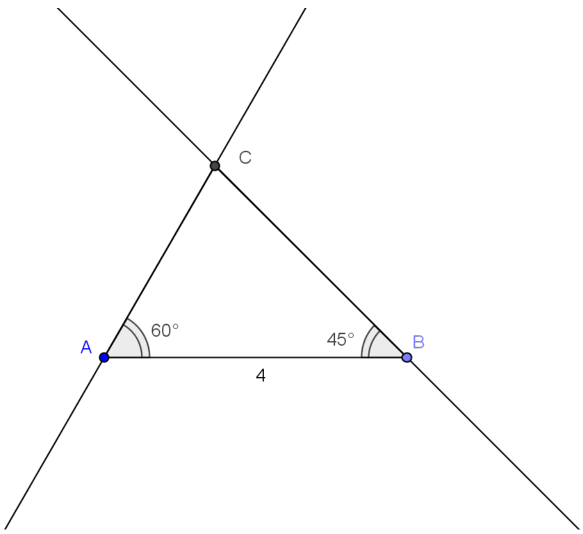


Figura 8.20: Ítem c): ALA

O ítem d) traz a discussão se o caso ALL (ângulo-lado-lado) é um caso de congruência. Através da figura, o aluno percebe que existem dois tipos distintos de triângulo, portanto essa construção é capaz de exibir ao aluno que este caso não se trata de um caso de congruência.

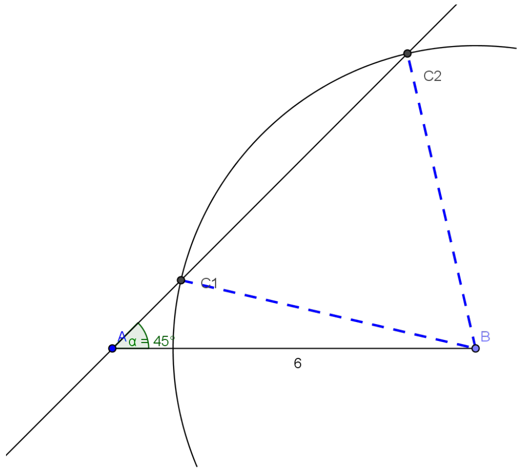


Figura 8.21: Ítem d): ALL não é caso de congruência.

Atividade 8.8.4 *: (***Cabine de Segurança)**

Objetivo: *Situação problema que motive a discussão teórica do tema*

Um conjunto de 3 casas gostaria de contratar um serviço de segurança particular. Para tal, uma cabine deve ser instalada em um local que possua a mesma distância para as três casas, para que em uma eventual emergência, possa ter a mesma eficácia nas 3 casas. Construa o ponto em que deve ser construída a cabine de segurança.

Figura 8.22: Atividade: Cabine de segurança

Resolução e Comentários:

Nesse exercício o aluno deveria perceber que o ponto que possui tal propriedade é o Circuncentro (centro do círculo circunscrito). O aluno deve ser estimulado a fazer um rascunho da situação, o que facilita sua tarefa na resolução do exercício.

Para encontrar o circuncentro, basta construir as mediatrizes dos segmentos que unem as 3 casas. Esse tipo de abordagem é muito importante, pois mostra graficamente a propriedade de um ponto notável extremamente importante.

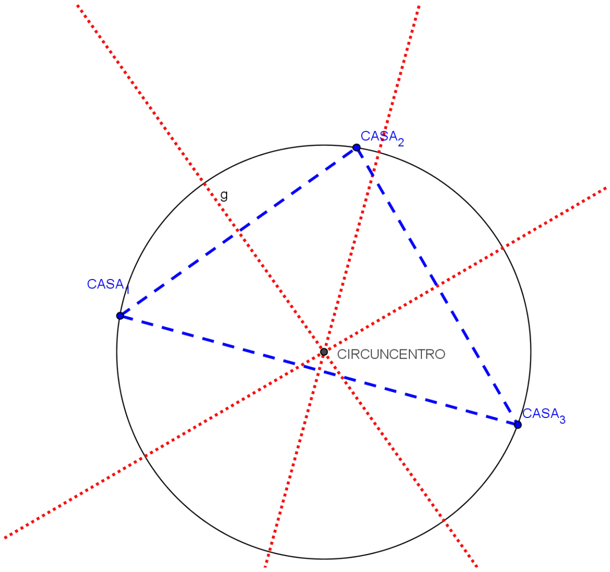


Figura 8.23: Atividade: Cabine de segurança (resolução)

Atividade 8.8.5 *:* (**Protegendo o Perímetro)**
Objetivo: *Situação problema que motive a discussão teórica do tema*

A criminalidade está muito alta no bairro de Newton. Uma das atitudes tomadas para diminuir esse índice foi a construção de uma delegacia de polícia próxima das 3 ruas de maior movimento do bairro. Essa delegacia deve ser construída em um local que possua a mesma distância para as 3 ruas. Construa esse ponto.

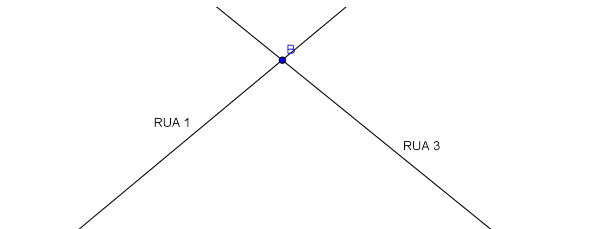


Figura 8.24: Atividade: Delegacia de polícia

Resolução e Comentários:

Nesse exercício o aluno deveria perceber que o ponto que possui tal propriedade é o Incentro (centro do círculo inscrito). O aluno deve ser estimulado a fazer um rascunho da situação, o que facilita sua tarefa de encontrar esse ponto.

Para encontrar o incentro, basta construir as bissetrizes dos ângulos do triângulo formado pelas 3 ruas. Esse tipo de abordagem é muito importante, pois mostra graficamente a propriedade de um ponto notável extremamente importante.

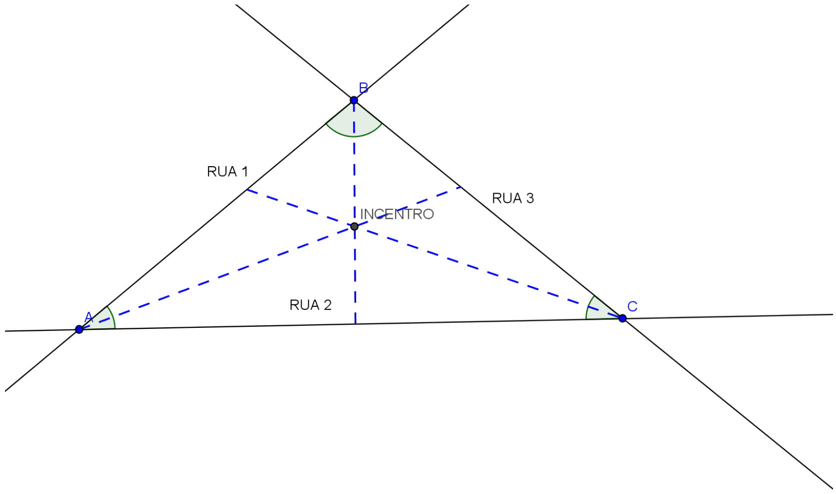


Figura 8.25: Atividade: Delegacia de polícia (resolução)

Ligando o centro até o ponto de tangência, temos as distâncias perpendiculares e iguais ao raio do círculo inscrito.

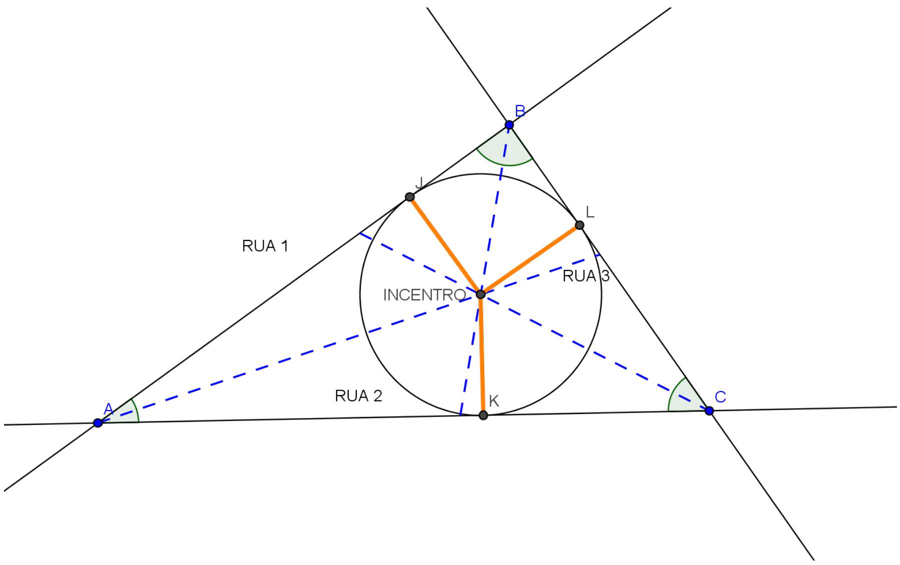


Figura 8.26: Atividade: Delegacia de polícia (resolução)

Atividade 8.8.6 *:* *(***Empilhando os Barris)**

OBJETIVO: *Situação problema que motive a discussão teórica do tema*

Existem 6 barris em um depósito, e eles devem ser empilhados da seguinte forma:

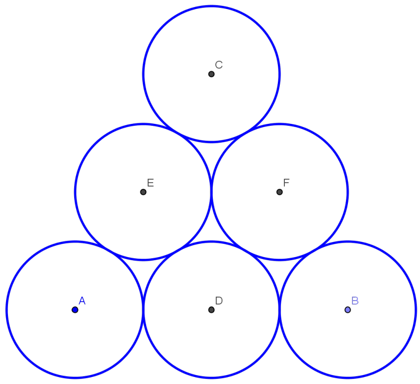


Figura 8.27: Atividade: Empilhando Barris

Para pode empilhar os barris, será utilizado um suporte que une os centros das circunferências. Os barris são tangentes uns aos outros. Faça uma construção que iluste essa situação, utilizando $r = 2cm$ como raio do barril.

Resolução e Comentários:

Nessa atividade o aluno deveria utilizar a definição de que o ponto de tangência e os centros das circunferências estão alinhados. Inicialmente o aluno deveria construir a primeira camada, com três circunferências. É recomendado que o aluno faça um esboço da situação antes de tentar fazer a construção. Observando a estrutura, o aluno percebe que na primeira camada basta construir um segmento com 8 cm.

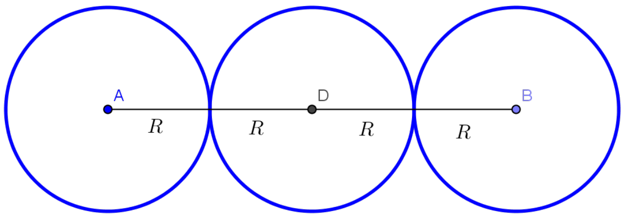


Figura 8.28: Atividade: Empilhando Barris

$\overline{AB} = 4.R = 8cm$

Da mesma forma, as laterais também devem medir 8 cm, pois possuem 3 circunferências apoiadas. Portanto, o suporte dos barris será um triângulo equilátero. A construção se resume portanto a um triângulo equilátero onde os centros das circunferências da segunda camada são os pontos E e F, médios dos lados $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$.

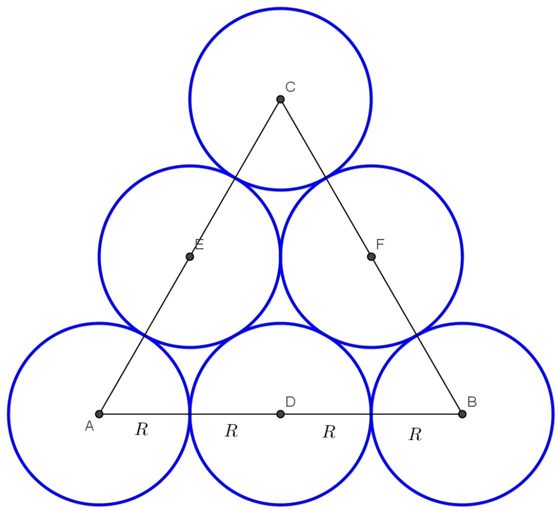


Figura 8.29: Atividade: Empilhando Barris

Atividade 8.8.7 *: (***Tangência entre reta e circunferência)**
OBJETIVO: *Complementação de um tópico da geometria, mostrando sua aplicação*

Dados a reta r e o ponto $T \in r$ e $P \notin r$, construir uma circunferência tangente a reta r no ponto T passando pelo ponto P.

RESOLUÇÃO E COMENTÁRIOS:

Nessa atividade o aluno deve utilizar as definições expostas anteriormente. É recomendado que antes de construir o aluno faça um esboço dessa situação.

O aluno deve compreender que a grande incógnita do problema é o centro da circunferência, e criar maneiras de encontra-lo. Os pontos P e T pertencem à circunferência (onde T é ponto de tangência), logo $\overline{PT}$ é uma corda, e o centro está contido em sua mediatriz.

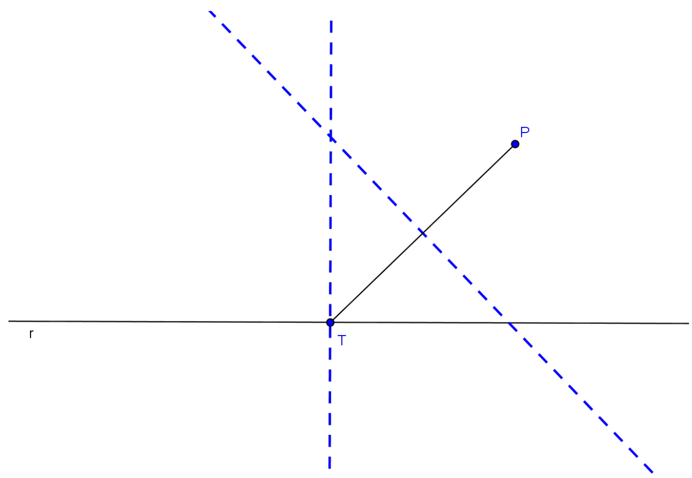


Figura 8.30: Atividade: Tangência entre reta e circunferência

Da mesma maneira, o raio é perpendicular à reta r no ponto T. Logo, traçando uma perpendicular a reta r passando pelo ponto T, sabemos que o centro está contido nessa perpendicular. Logo, o centro só pode ser o ponto O.

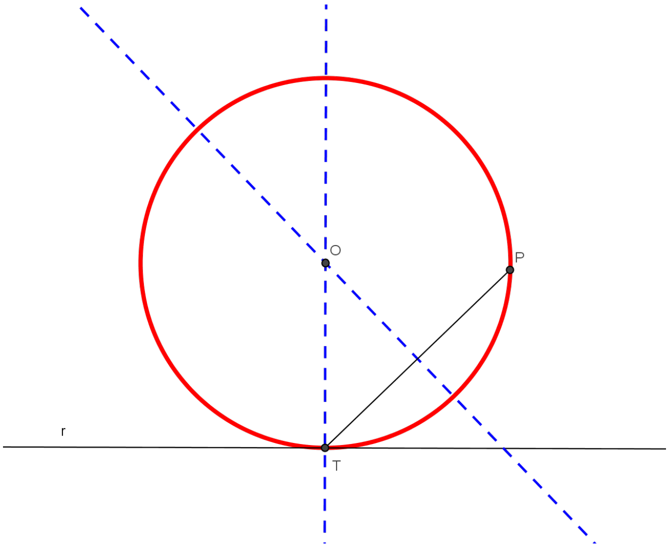


Figura 8.31: Atividade: Tangência entre reta e circunferência

Como P e T pertencem a circunferência, $\overline{OP} = \overline{OT} = R$.

Atividade 8.8.8 *:* *(***Você é capaz de encontrar o prêmio?)**
OBJETIVO: *Situação problema que motive a discussão teórica do tema*

Uma dupla de competidores deve encontrar um prêmio escondido. Em uma sala escura são fornecidas duas lanternas nas extremidades de uma parede. Ao iluminar a sala e os raios se cruzarem, os ângulos formados por eles são fornecidos. Após várias tentativas, puderam visualizar a marcação de onde o prêmio estava com um ângulo de 60°*, e que o mesmo se encontrava mais próximo da lanterna 2 do que da lanterna 1.*

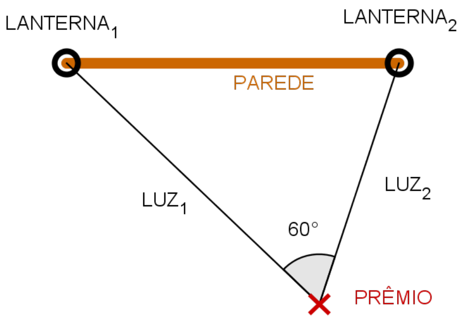


Figura 8.32: Atividade: Você é capaz de encontrar o prêmio?

As luzes são acesas e a marcação é retirada, mas os competidores ganham uma informação: a distância do prêmio para a parede é de 5 metros. Marque no desenho abaixo o local onde o prêmio está localizado. (Utilize a escala: $\frac{1}{100}$*)*

Figura 8.33:

Resolução e Comentários:

O aluno deve observar nessa questão que o ponto está localizado na interseção de dois lugares geométricos: Uma reta paralela, que mostra a distância fixa da parede, e do arco capaz em relação ao segmento que simboliza a parede, que possui a propriedade de manter sempre o ângulo de visão entre a parede (no caso do problema, um arco capaz de 60°.

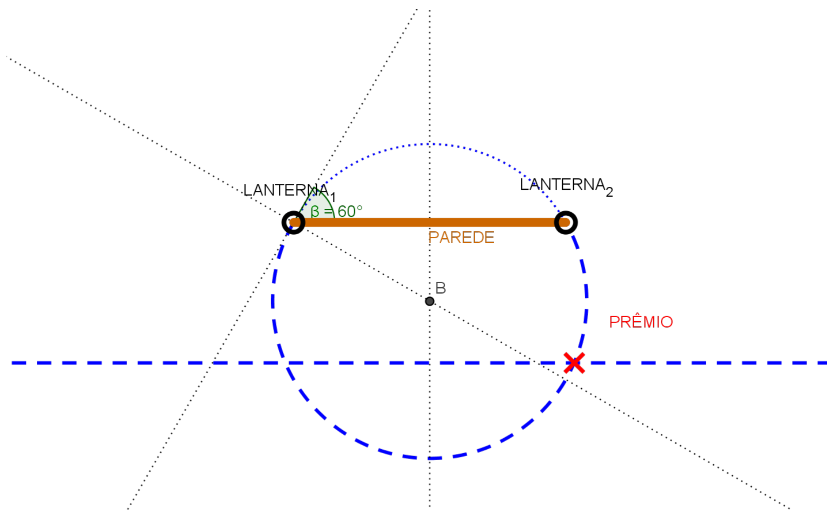


Figura 8.34: Atividade 12

Capítulo 9

Construções Geométricas para o 9° ano do Ensino Fundamental

Durante o 8° ano o aluno adquiriu bastante embasamento teórico. A partir do 9° ano vários teoremas são apresentados, porém na maioria das vezes as aplicações são meramente algébricas. As atividades propostas nesse capítulo possuem o objetivo de inserir esses teoremas e propriedades em um contexto diferente, com objetivo de fazer uma reflexão no aluno nas importantes propriedades geométricas que eles possuem.

9.1 Conteúdo Geométrico

Neste capítulo vamos apresentar os seguintes conceitos:

1. Teorema de Tales
2. Retificação de uma circunferência
3. Relações métricas no triângulo retângulo
4. Relações métricas no triângulo qualquer
5. Razão Áurea
6. Relações Métricas na Circunferência
7. Homotetia
8. Triângulos Equivalentes

9.2 Teorema de Tales (proporcionalidade)

Teorema 9.2.1 *(Teorema de Tales[1]) se duas (ou mais) retas transversais cortam um feixe de retas paralelas, as medidas dos segmentos delimitados nas paralelas serão proporcionais.*

[1] Tales de Mileto, foi um filósofo, matemático, engenheiro, homem de negócios e astrônomo da Grécia Antiga, o primeiro filósofo ocidental de que se tem notícia. De ascendência fenícia,nasceu em Mileto, antiga colônia grega, na Ásia Menor, atual Turquia, por volta de 623 a.C. ou 624 a.C. e faleceu aproximadamente em 546 a.C. ou 548 a.C.. [4]

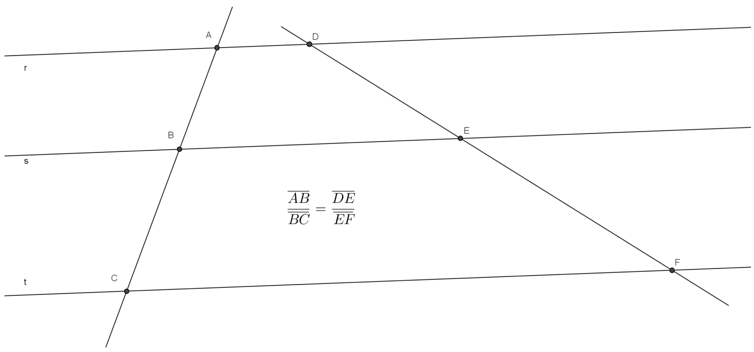


Figura 9.1: Teorema de Tales

Demonstração:

Ver [9, p. 183]

Divisão de um segmento em n partes iguais

Construção:

1. Por uma das extremidades do segmento dado traça-se uma semi-reta r qualquer oblíqua
2. Com abertura de compasso qualquer, sobre a semi-reta, a partir de sua extremidade, marca-se n pontos com medidas iguais
3. Ligamos o último ponto à outra extremidade do segmento dado
4. Trace segmentos paralelos a esse último segmento , dividindo assim o segmento $\overline{AB}$ em n partes iguais

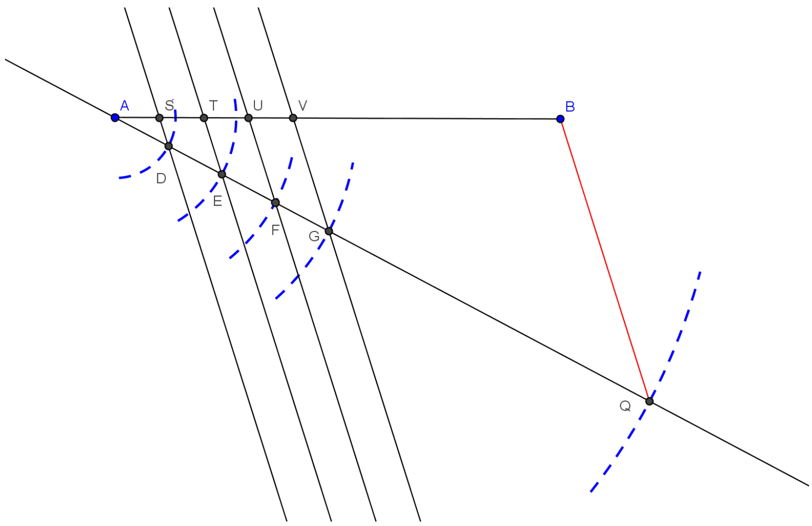


Figura 9.2: Divisão de um segmento em n partes iguais

Justificativa:

Através da construção, percebemos que os segmentos $\overline{AD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EF}$, $\overline{FG}$,...,$\overline{PQ}$, são todos iguais. Portanto, através do Teorema de Tales, temos:

$\frac{\overline{AD}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AS}}{\overline{ST}} = 1$

$\frac{\overline{DE}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{ST}}{\overline{TU}} = 1$, então:

$\overline{AS} = \overline{ST} = \overline{TU}$, e assim sucessivamente.

A quarta proporcional é o quarto segmento que forma uma proporção com os outros três segmentos dados. Ou seja, dados os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{EF}$, encontrar um segmento $\overline{GH}$ tal que:

$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{GH}}$

Construção:

1. Sobre uma reta suporte coloca-se $\overline{AB}$ e em continuidade $\overline{CD}$, com o ponto $B = C$.
2. Traçar uma semi-reta oblíqua qualquer pela extremidade A e marque sobre esta o segmento dado $\overline{EF}$
3. Unindo-se o ponto B com F e em seguida, a partir do ponto D, traça-se uma paralela a $\overline{BF}$, determinando o ponto H no prolongamento de $\overline{EF}$
4. O segmento $\overline{GH}$ é a quarta proporcional procurada, sendo o ponto $G = H$

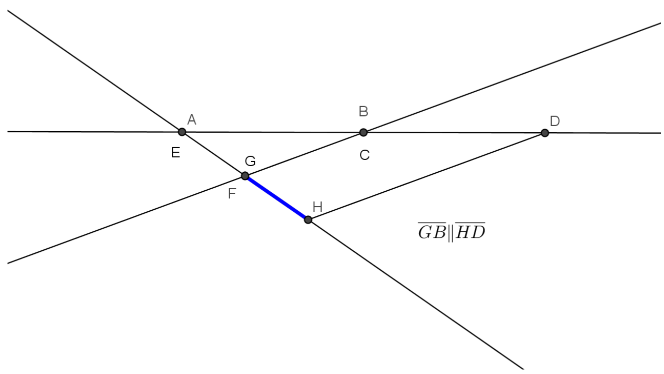


Figura 9.3: Quarta Proporcional

Justificativa:

Através do Teorema de Tales, sabemos que $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{GH}}$. Para que possamos descobrir o segmento $\overline{GH}$ basta traçar uma reta paralela ao segmento $\overline{BG}$ passando pelo ponto D, e a proporção será válida.

A terceira proporcional é definida como sendo o quarto segmento de uma proporção em que o os dos primeiros segmentos são conhecidos e sendo o segundo segmento igual ao terceiro segmento. Ou seja, dados os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, encontrar um segmento $\overline{EF}$ tal que:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{EF}}$$

CONSTRUÇÃO:
O processo de construção é análogo ao da quarta proporcional, basta utilizar $\overline{EF} = \overline{CD}$.

A atividade 9.10.1 trata de uma aplicação sobre divisão em partes iguais.

9.3 Retificação de uma circunferência

Definição 9.3.1 *(Retificação de uma circunferência: processo de Arquimedes[2]) significa transformar a linha curva da circunferência em uma reta.*

Sabemos que a razão entre o comprimento de uma circunferência e o seu diâmetro é aproximadamente o valor de 3,141592.... Esse número é conhecido como π. No processo de Arquimedes, consideraremos uma aproximação racional $\pi \approx \frac{22}{7} \approx 3,142857....$ Portanto:

$$\frac{\text{Comprimento}}{\text{Diâmetro}} = \pi$$

Assim,

$$\begin{aligned} C &\approx d.\frac{22}{7} \\ C &\approx 3d + \frac{d}{7} \end{aligned}$$

Ou seja, basta dividir o diâmetro em 7 partes iguais e medir 22 partes para obter o valor aproximado de seu comprimento.

A atividade 9.10.2 mostra uma aplicação desse assunto.

[2]Arquimedes de Siracusa (Siracusa, 287 a.C. 212 a.C.) foi um matemático, físico, engenheiro, inventor, e astrônomo grego. Embora poucos detalhes de sua vida sejam conhecidos, são suficientes para que seja considerado um dos principais cientistas da Antiguidade Clássica.

9.4 Relações Métricas no Triângulo Retângulo

Considere um triângulo retângulo ABC.

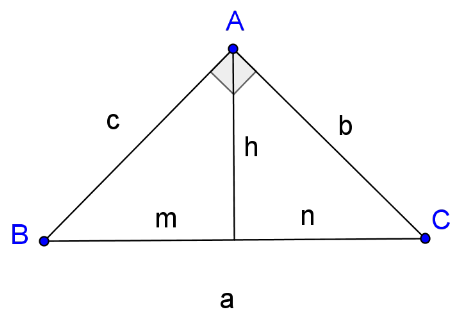


Figura 9.4: Relações Métricas no Triângulo Retângulo

Destacaremos algumas relações importantes:

I. O quadrado de um cateto é igual ao produto da hipotenusa pela sua projeção sobre ela:
$c^2 = m.a$ ou $b^2 = n.a$

II. O produto dos catetos é igual ao produto da hipotenusa pela altura:
$b.c = h.a$

III. O quadrado da altura relativa a hipotenusa é igual ao produto das projeções:
$h^2 = m.n$

IV. Teorema de Pitágoras: A soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa:
$a^2 = b^2 + c^2$

Demonstração:

Ver [9, p. 20]

A atividade 9.10.3 é uma aplicação desse assunto.

Definição 9.4.1 *(A Média proporcional) Dados dois segmentos, chamamos de média proporcional ou média geométrica entre os dois segmentos dados ao valor encontrado para os meios de uma proporção contínua.*

Ou seja, dados os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, encontrar um segmento $\overline{EF}$ tal que:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{CD}}$$

Construção:

1. Sobre uma reta suporte coloca-se $\overline{AB}$ e em continuidade $\overline{CD}$, com o ponto $B = C$.
2. Encontre o ponto médio M da soma dos segmentos $\overline{AB} + \overline{CD}$
3. Trace uma semicircunferência de centro em M e raio $\overline{AM}$
4. Pelo ponto B traça-se uma perpendicular que interceptará a semicircunferência no ponto E.
5. O segmento $\overline{BE}$ é a média proporcional procurada entre os segmentos

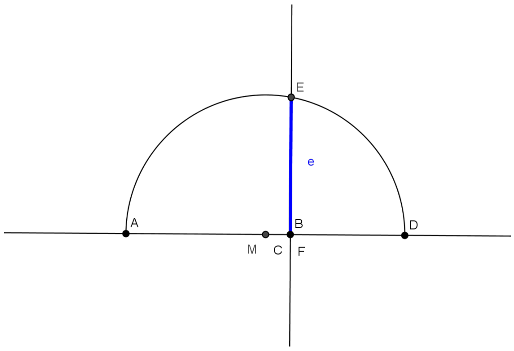


Figura 9.5: Média Proporcional

Justificativa:

Percebemos que o triângulo ΔAED é retângulo em E, logo o segmento $\overline{EF}$ por ser perpendicular em B será altura desse triângulo. Através das relações métricas no triângulo retângulo, sabemos que o quadrado da altura é igual ao produto das projeções, ou seja:

$$h^2 = m.n$$

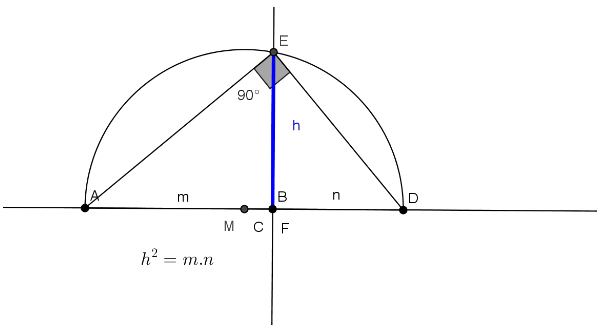


Figura 9.6: Média Proporcional

Logo, temos que a proporção $\frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{CD}}$ será válida.

A atividade 9.10.4 trata desse assunto.

9.5 Relações Métricas no Triângulo Qualquer

Lei dos Senos

Em todo triângulo, os lados são proporcionais aos senos dos ângulos opostos, na mesma razão do diâmetro do círculo circunscrito a esse triângulo.

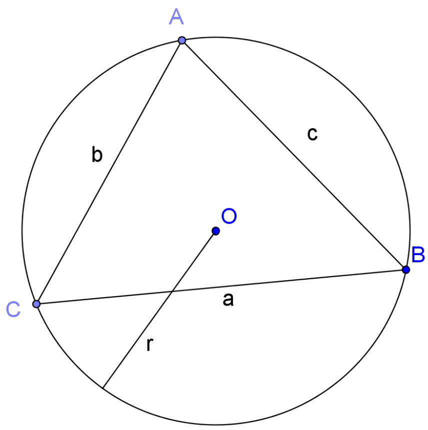


Figura 9.7: Lei dos Senos

Ou seja:

$\frac{a}{SenA} = \frac{b}{SenB} = \frac{c}{SenC} = 2r$

DEMONSTRAÇÃO:

Ver [9, p. 247]

Lei dos Cossenos

Num triângulo qualquer, o quadrado do lado oposto a um ângulo é igual a soma dos quadrados dos outros dois lados, menos o dobro do produto desses dois lados pelo cosseno do ângulo por eles formado.

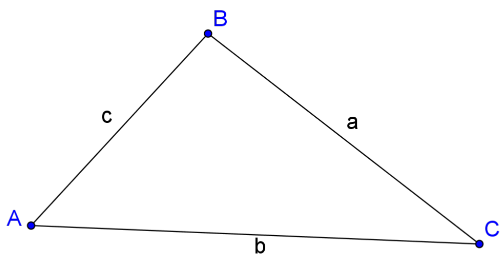


Figura 9.8: Lei dos Cossenos

$c^2 = a^2 + b^2 - 2.a.b.\cos C$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2.a.c. \cos B$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c. \cos A$

DEMONSTRAÇÃO:

Ver [9, p. 251].

A atividade 9.10.6 trata desse assunto.

9.6 Razão Áurea

Ver Capítulo 5 e atividade 9.10.5

9.7 Relações Métricas na Circunferência

Relação entre Cordas

Se duas cordas se cortam num ponto interior de uma circunferência, o produto das medidas dos dois segmentos da primeira corda é igual ao produto das medidas de dois segmentos da outra corda.

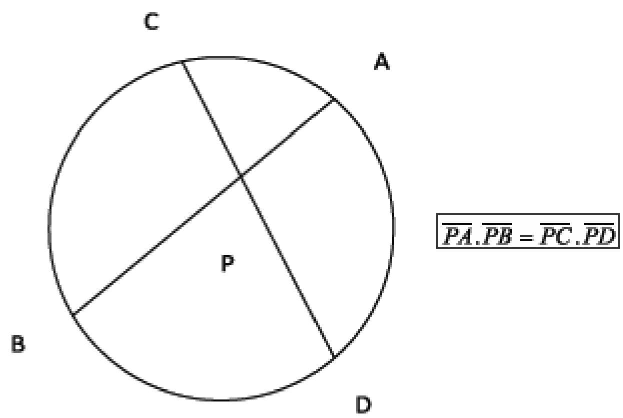


Figura 9.9: Relação entre Cordas

Relação entre Secantes

Se traçarmos duas secantes de um mesmo ponto exterior a um círculo, o produto das distâncias desse ponto aos pontos de contato é constante.

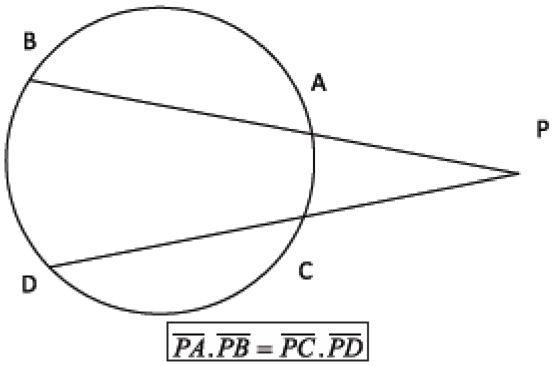


Figura 9.10: Relação entre Secantes

Relação entre Tangente e uma Secante

Se de um ponto exterior a um círculo traçarmos uma secante e uma tangente, então o quadrado da tangente é igual ao produto do segmento pela sua parte externa.

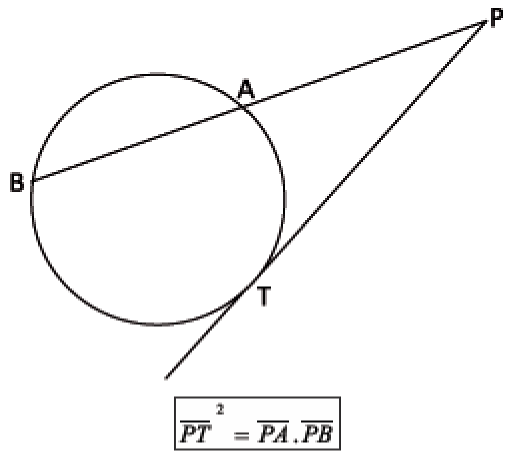


Figura 9.11: Relação entre Tangente e uma Secante

Demonstração:

Ver [9, p. 213].

A atividade 9.10.7 trata desse assunto.

9.8 Homotetia

Definição 9.8.1 *(Homotetia:) Duas figuras são ditas homotéticas quando são semelhantes e possuem lados homólogos paralelos dois a dois. Chamamos de centro de homotetia o ponto de encontro das retas que passam pelos vértices homólogos.*

Homotetia direta

Os vértices homólogos dos polígonos pertencem a mesma semi-reta cuja a origem e o centro de homotetia. A razão k de homotetia possui valor positivo ($k > 0$).

EXEMPLO:

Observe os triângulos ΔDEF e ΔGHI. Estes triângulos são homotéticos ao triângulo ΔABC de razão respectivamente $k = 2$ e $k = 3$.

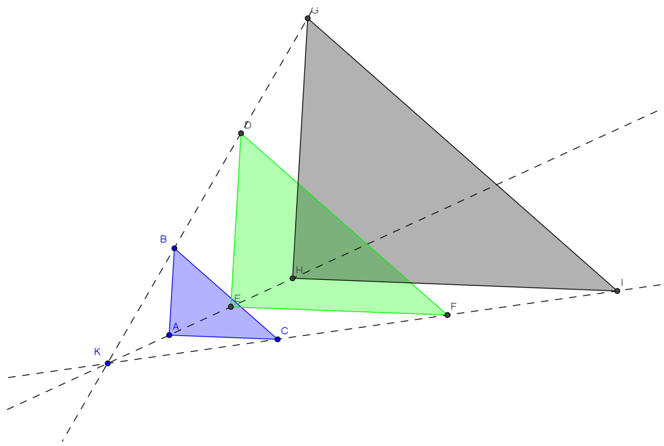


Figura 9.12: Homotetia Direta

Homotetia Inversa

Os vértices homólogos dos polígonos pertencem a mesma semi-reta cuja a origem e o centro de homotetia. A razão k de homotetia possui valor negativo ($k < 0$).

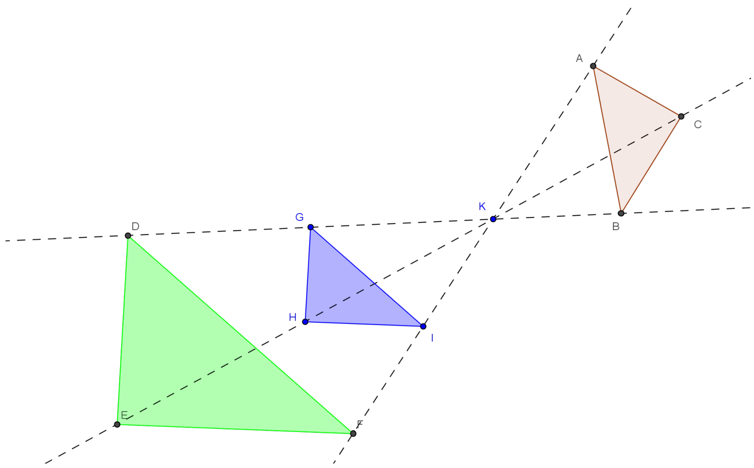


Figura 9.13: Homotetia Inversa

A atividade 9.10.8 mostra uma aplicação do assunto.

9.9 Triângulos Equivalentes

Definição 9.9.1 *(Figuras Equivalentes) Duas ou mais figuras geométricas planas são ditas equivalentes quando possuírem a mesma área. No caso dos triângulos, podemos afirmar que dadas duas retas r e s paralelas entre si, e os pontos A e B pertencentes a reta r e os pontos C, D e E pertencentes a reta s, os triângulos ΔABD, ΔABC e ΔABE são equivalentes.*

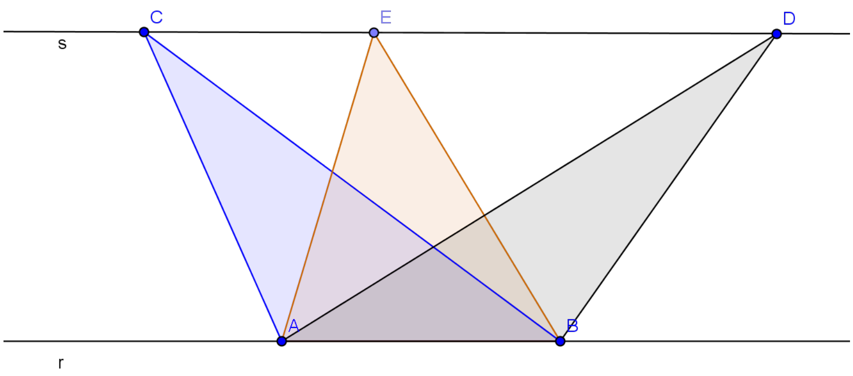


Figura 9.14: Triângulos Equivalentes

Ver a atividade 9.10.9

9.10 Atividades

Atividade 9.10.1 : (**A importância da hidratação em uma maratona**)
OBJETIVO: *Situação problema que motive a discussão teórica do tema*

Durante uma maratona, os atletas deveriam correr por um percurso que disponibilizava 5 pontos de hidratação (sendo um deles na chegada, no ponto B). Esses pontos possuem a mesma distância um do outro. Marque no desenho abaixo esses pontos de hidratação.

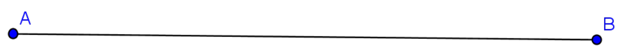


Figura 9.15: Atividade: Hidratação na Maratona

Resolução e Comentários:

Nessa questão, devemos fazer com que o aluno divida o segmento $\overline{AB}$ em 5 partes iguais, utilizando portanto o conceito de divisão de segmentos.

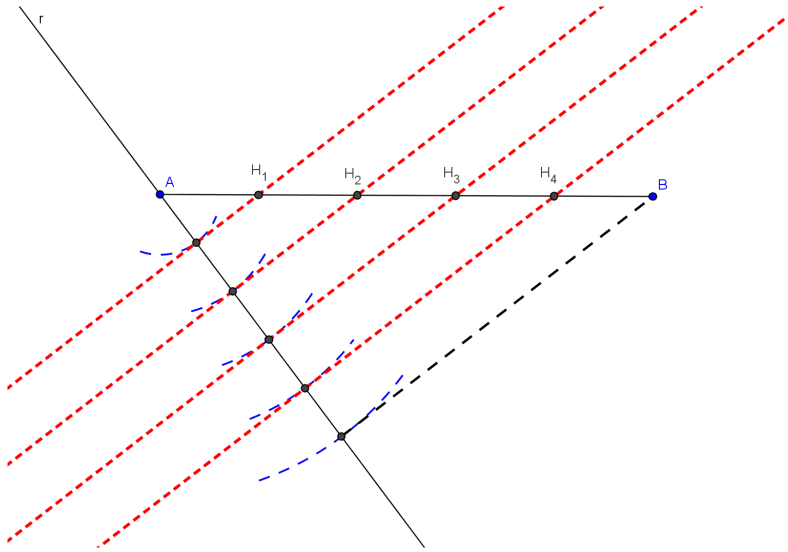


Figura 9.16: Atividade: Hidratação na Maratona (resolução)

Traçamos uma reta suporte r, e nela marcamos 5 pontos com a mesma abertura de compasso. Ligamos o último ponto até o ponto B, e traçamos retas paralelas a esse segmento, passando pelos outros pontos dados.

Atividade 9.10.2 *:* (**O caminhão de Arquimedes**)

Objetivo: *Situação problema que motive a discussão teórica do tema*

Arquimedes tinha um caminhão, e sua roda está ilustrada no desenho abaixo. Sendo a reta r a estrada que a roda gira (sabendo que ela não desliza), marque o ponto onde o ponto P estará após a roda dar uma volta completa.

Resolução e Comentários:

Este exercício traz uma contextualização para a retificação da circunferência. Através dele, o aluno deveria perceber que uma volta da roda significa o ponto P andar o comprimento da circunferência.

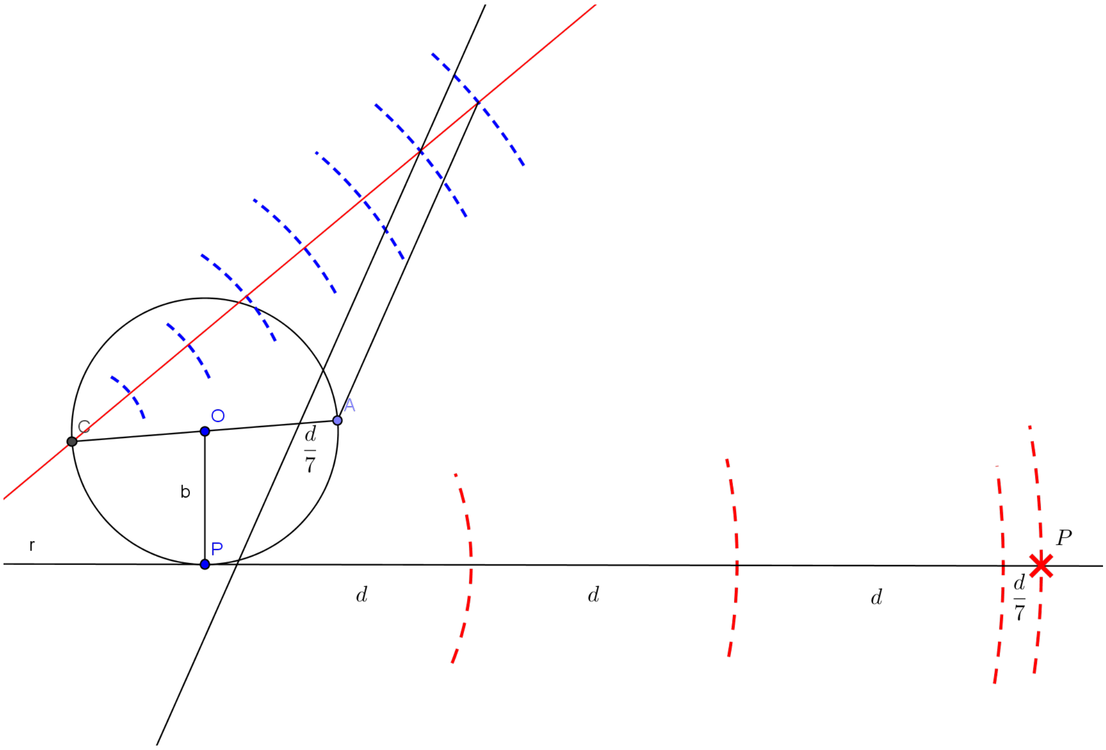


Figura 9.17: Atividade: O caminhão de Arquimedes

Devemos dividir o diâmetro em 7 partes iguais. O local do ponto P será igual a $3d + \frac{d}{7}$.

Atividade 9.10.3 : (**Os Pratos de Pitágoras**)
OBJETIVO: *Situação problema que motive a discussão teórica do tema*

Pitágoras é um cozinheiro muito famoso. Ao preparar uma de suas melhores refeições, utilizou dois pratos quadrados de tamanhos distintos.

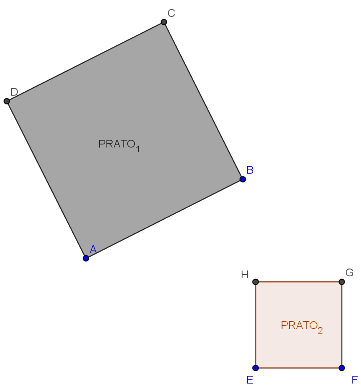


Figura 9.18: Atividade: Os Pratos de Pitágoras

Pitágoras deseja utilizar somente um prato, mas com o mesmo espaço (área) que os outros dois pratos juntos. Construa esse prato.

Resolução e Comentários:

Nessa atividade o aluno deveria utilizar o Teorema de Pitágoras para construir o $Prato_3$. Em várias escolas e livros didáticos são explorados somente a parte algébrica do teorema, ou seja, sua fórmula: $a^2 = b^2 + c^2$, muitas vezes sem sequer mencionar que o "a" é a hipotenusa. Através desse exercício o aluno pode compreender que o quadrado construído sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual (possui a mesma área) que os quadrados construídos nos catetos.

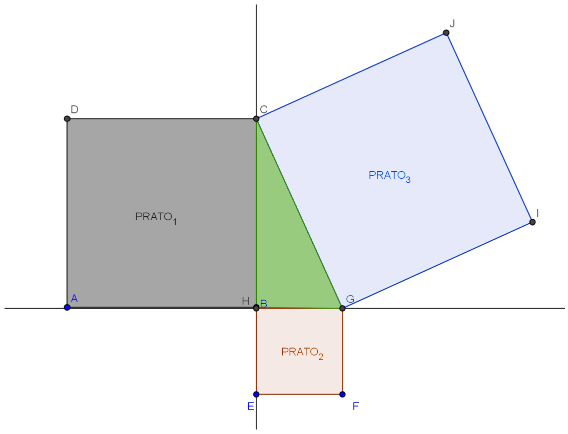


Figura 9.19: Atividade: Os Pratos de Pitágoras

O professor também pode explorar mais o teorema e a atividade, propondo algumas modificações, por exemplo: Se o prato fosse redondo, também poderíamos utilizar essa construção?

O teorema não vale somente para quadrados, mas para quaisquer figuras semelhantes construídas sobre os catetos e a hipotenusa.

Basta construir sobre os catetos semi-circulos com o mesmo diâmetro dos pratos. Sobre a hipotenusa temos um semi-circulo cuja a área é a soma dos outros dois.

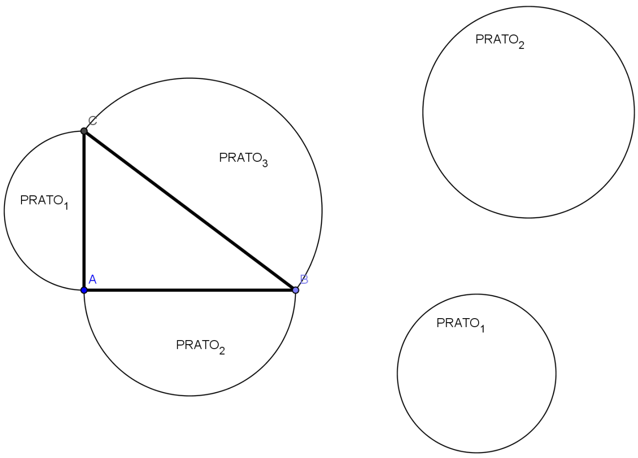


Figura 9.20: Atividade: Prato de Pitágoras (redondos)

Atividade 9.10.4 *: (***Desigualdade das Médias)**
Objetivo: *Ferramenta alternativa para a resolução de um problema*

Chamamos de Média Aritmética de dois números a e b a razão $M.A. = \frac{a+b}{2}$ *e a Média Geométrica (ou média proporcional) de* $M.G. = \sqrt{ab}$*.*

a) Calcule a Média Aritmética e a Média Geométrica de 4 e 9.
b) Construa Média Aritmética e a Média Geométrica (ou média proporcional) de 4 e 9.
c) Mostre geometricamente que $MA \geq MG$*.*

Resolução e Comentários:
O objetivo desse exercício é mostrar através das construções geométricas as desigualdades das médias. O aluno deve construir ambas, e perceber que o maior valor que a média geométrica pode atingir é a média aritmética. Na figura abaixo, percebemos que $\overline{BD} \leq \overline{EM} = raio$. Não se trata de uma demonstração rigorosa, apenas uma forma de mostrar ao aluno uma propriedade importante.

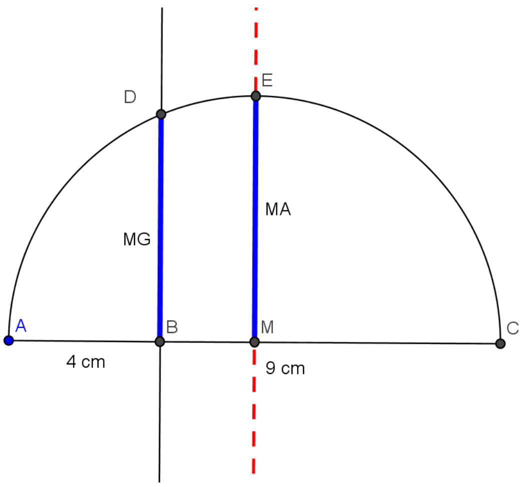


Figura 9.21: Atividade: Desigualdade das Médias

Atividade 9.10.5 *: (***Conhecendo a Razão Áurea e o Número de Ouro)**
Objetivo: *Ferramenta alternativa para a resolução de um problema*

Chamamos de média e extrema razão ou seção áurea a divisão de um segmento em duas partes, sendo a maior parte média geométrica entre o segmento menor e o segmento dado. Ou seja, dado o segmento $\overline{AB}$*, temos:*

$$\frac{\overline{AH}}{\overline{HB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AH}}$$

Figura 9.22: O ponto H divide $\overline{AB}$ em razão áurea

Para encontrar o ponto H (ver a seção 5.1.1), seguimos os passos abaixo:

1. *Determine o ponto médio M de $\overline{AB}$*
2. *Pelo ponto B trace uma perpendicular*
3. *Abertura de compasso $\overline{BM}$, ponta seca em B, trace um arco determinado o ponto C na perpendicular*
4. *Unir o ponto A ao ponto C, determinando o segmento $\overline{AC}$*
5. *Abertura de compasso $\overline{BC}$, ponta seca em C, trace um arco determinando o ponto D em $\overline{AC}$*
6. *Abertura de compasso $\overline{AD}$, ponta seca em A, trace um arco dividindo $\overline{AB}$ nos segmentos $\overline{AH}$ e $\overline{HB}$*
7. *O ponto H é o ponto procurado*

a) Divida o segmento $\overline{AB}$ em razão áurea.

b) Chamamos de número de ouro (ϕ) justamente o valor dessa razão $\phi = \frac{\overline{AH}}{\overline{HB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AH}}$. Calcule o valor de ϕ.

RESOLUÇÃO E COMENTÁRIOS:

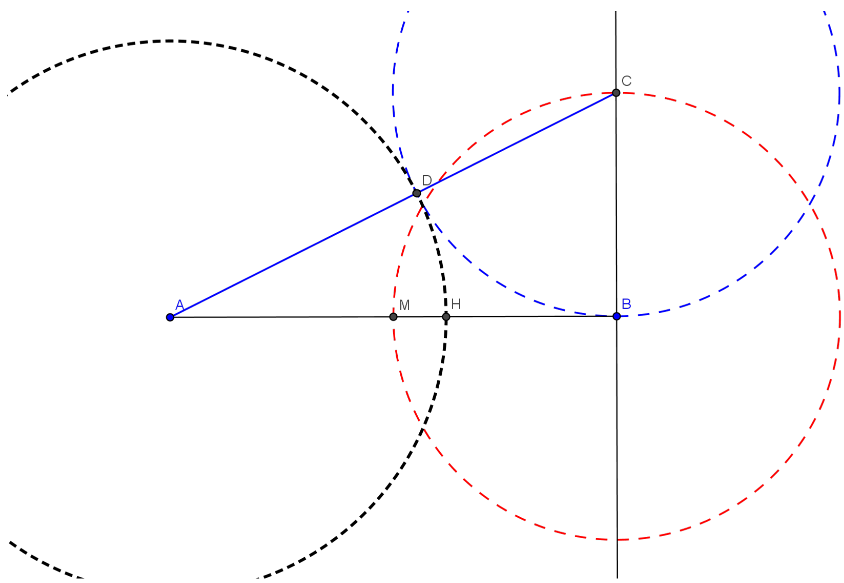


Figura 9.23: Atividade: Conhecendo a Razão Áurea (resolução)

No ítem a) basta seguir os passos indicados no enunciado.

No ítem b) o aluno deveria utilizar a construção para calcular o número de ouro.

Sendo $\overline{AB} = 2x$, temos que $\overline{MB} = \overline{BC} = \overline{CD} = x$. Podemos calcular $\overline{AC}$ através do Teorema de Pitágoras:

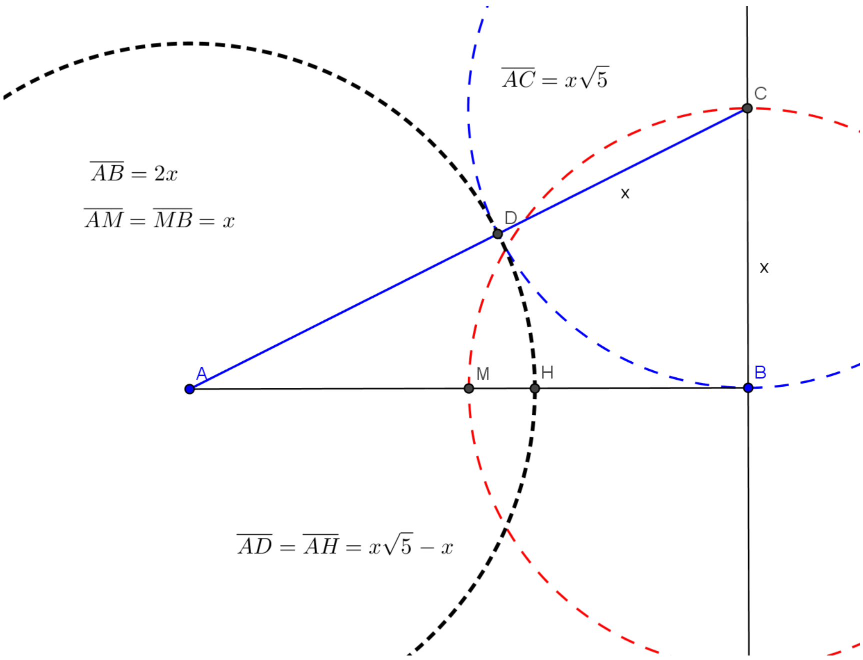


Figura 9.24: Atividade: Conhecendo a Razão Áurea (resolução)

Pelo Teorema de Pitagoras temos:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$$

assim

$$\begin{aligned} \overline{AC}^2 &= (2x)^2 + x^2 \\ \overline{AC}^2 &= 5x^2 \\ \overline{AC} &= x.\sqrt{5} \end{aligned}$$

Como $\overline{AD} = \overline{AH} = \overline{AC} - \overline{CD}$, temos:

$$\overline{AH} = x\sqrt{5} - x = x.(\sqrt{5} - 1)$$

Como $\phi = \frac{\overline{AB}}{\overline{AH}} = \frac{2x}{x.(\sqrt{5}-1)}$, temos:

$$\phi = \frac{2}{\sqrt{5} - 1} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \approx 1,61803398...$$

Atividade 9.10.6 *: (***Quase um Heptágono!)**

Objetivo: *Complementação de um tópico teórico da geometria, mostrando sua aplicação*

Observe o processo de construção **aproximado** *de um Heptágono Regular:*

1. *Construa uma circunferência e trace a mediatriz do raio*
2. *Trace o segmento $\overline{AB}$ com extremidades no ponto médio do raio e no ponto em que a mediatriz intercepta a circunferência*
3. *O segmento $\overline{AB}$ é o lado aproximado do heptágono regular*

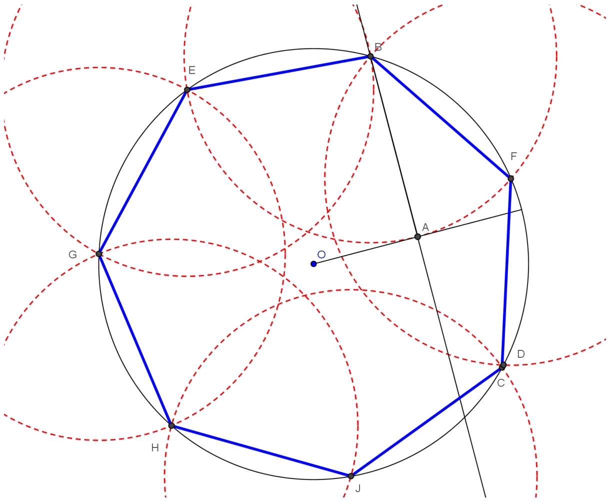


Figura 9.25: Atividade: Quase um Heptágono!

Observe que os pontos C e D não são coincidentes. Logo, não podemos considerar que se trata de um processo exato, mas sim de uma aproximação. Unido os pontos F e J até o ponto C, teremos o Heptágono aproximado BEGHJCF.

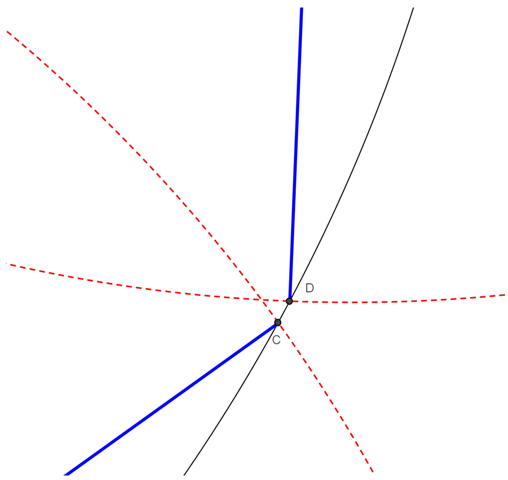


Figura 9.26: Atividade: Quase um Heptágono!

Utilizando a construção anterior, calcule um valor aproximado para o $\cos 51°$ *e compare com o valor fornecido na tabela trigonométrica*

RESOLUÇÃO E COMENTÁRIOS:
Observando o ínicio da construção, temos um triângulo retângulo ΔAOB:

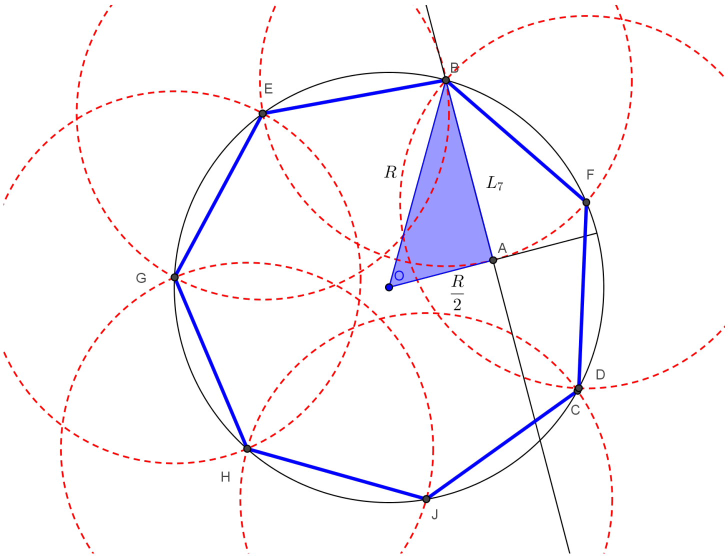


Figura 9.27: Atividade: Quase um Heptágono!

$$\begin{aligned} R^2 &= (\frac{R}{2})^2 + {L_7}^2 \\ L_7 &\approx R\sqrt{32} \end{aligned}$$

Observe que o ângulo $\angle HOJ = \frac{360°}{7} \approx 51°$. Utilizando a Lei dos Cossenos no triângulo ΔHOJ, temos:

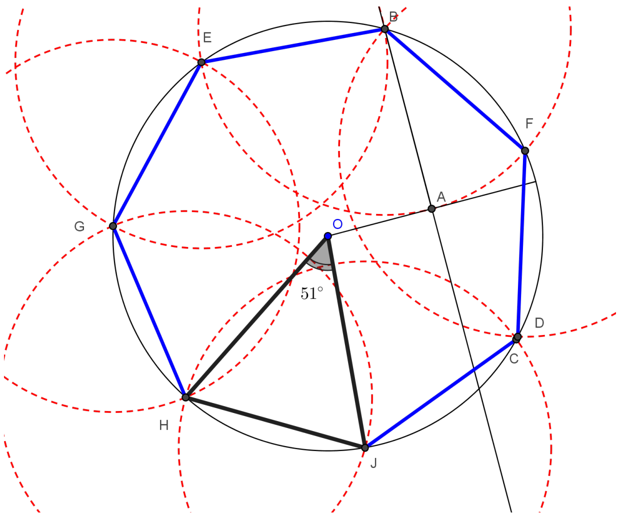


Figura 9.28: Atividade: Quase um Heptágono!

$$
\begin{aligned}
\overline{HJ}^2 &= \overline{HO}^2 + \overline{OJ}^2 - 2.\overline{HO}.\overline{OJ}.\cos(51^\circ) \\
(R\frac{\sqrt{3}}{2})^2 &= R^2 + R^2 - 2.R^2.\cos(51^\circ) \\
2.R^2.\cos(51^\circ) &= 2R^2 - \frac{3R^2}{4} \\
\cos(51^\circ) &= \frac{5R^2}{8R^2} = \frac{5}{8} = 0,625
\end{aligned}
$$

Observando o valor fornecido na tabela trigonométrica, temos um erro muito pequeno (terceira casa decimal), pois $\cos 51^\circ = 0,6239$. Por isso a construção é bem precisa.

Atividade 9.10.7 *: (***Aplicando as Relações Métricas na Circunferência)**

OBJETIVO: *Complementação de um tópico teórico da geometria, mostrando sua aplicação*

Resolva os seguintes ítens:

I. Demonstre que em um triângulo retângulo, a mediana relativa a hipotenusa é igual a metade da mesma.

II. Dado o ponto A, construa uma tangente a circunferência. Após isso, construa o triângulo ΔAOH onde H é ponto de tangência.

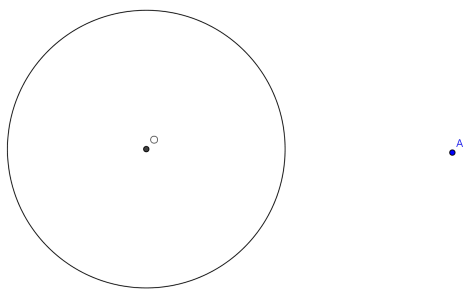


Figura 9.29: Atividade: Relações Métricas na Circunferência

III. Demonstre o Teorema de Pitágoras utilizando as relações métricas na circunferência

RESOLUÇÃO E COMENTÁRIOS:

Esse exercício foi proposto com o objetivo de cada ítem auxiliar na resolução do próximo ítem. O ítem I pode ser demonstrado de duas formas:

i) Através de um triângulo retângulo inscrito na circunferência, pois possui a hipotenusa igual ao diâmetro.

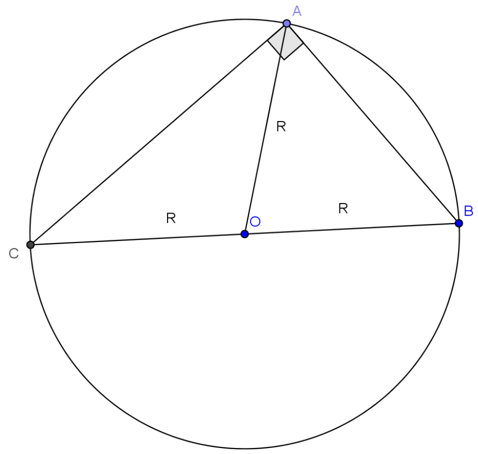


Figura 9.30:

Logo a mediana será igual ao raio, que é metade do diâmetro.

ii) Através da Lei dos Cossenos

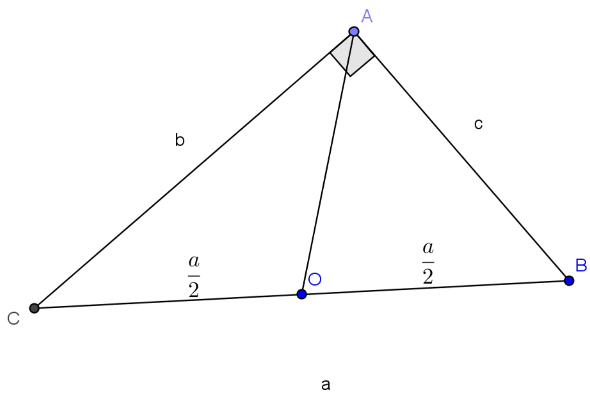


Figura 9.31:

Sabemos que $\cos C = \frac{b}{a}$. Portanto, fazendo lei dos cossenos no triângulo ΔACO, temos:

$\overline{AO}^2 = b^2 + (\frac{a}{2})^2 - 2.(b).(\frac{a}{2}).\cos C$

$\overline{AO}^2 = b^2 + (\frac{a^2}{4}) - (b).(a).(\frac{b}{a})$

$\overline{AO}^2 = b^2 + (\frac{a^2}{4}) - b^2$

$\overline{AO}^2 = \frac{a^2}{4}$

$\overline{AO} = \frac{a}{2}$

No ítem II, utilizamos a definição do ítem I para construir uma reta tangente à circunferência.

CONSTRUÇÃO:

1. Traçamos o segmento $\overline{AO}$
2. Encontramos o ponto médio M de $\overline{AO}$
3. Com centro e A e raio $\overline{AO}$, determinamos dois pontos na circunferência H_1 e H_2
4. Traçando AH_1 e AH_2 temos as retas tangentes a circunferência

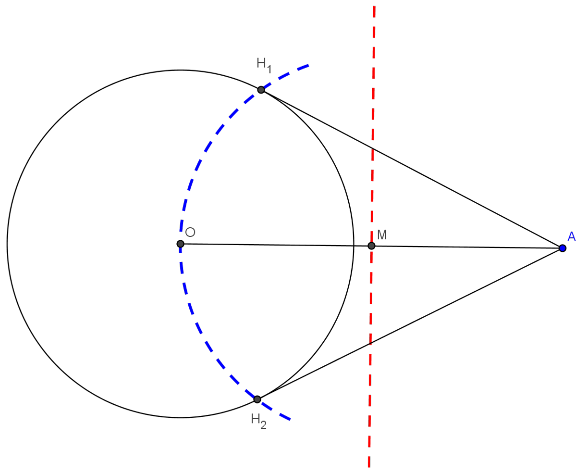


Figura 9.32:

O ítem III mostra como podemos utilizar as relações métricas na circunferência para demonstrar o Teorema de Pitágoras. Dado a tangente $\overline{AH}$ e a secante $\overline{AB}$, podemos utilizar a seguinte relação:

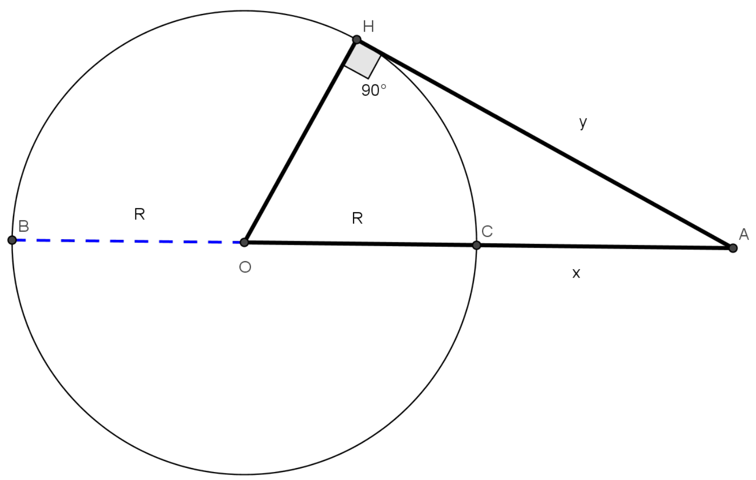


Figura 9.33:

$\overline{AH}^2 = \overline{AC}.\overline{AB}$, ou seja:

$y^2 = x.(x + 2R)$

$y^2 = x^2 + 2xR$

$y^2 + R^2 = x^2 + 2xR + R^2$

$y^2 + R^2 = (x + R)^2$, ou seja: $\overline{AH}^2 + \overline{HA}^2 = \overline{AO}^2$.

Nesse ítem, podemos mostrar uma aplicação interessante das relações métricas na circunferência através de uma interessante demonstração do Teorema de Pitágoras.

Atividade 9.10.8 : (**Triângulo Homotético)**
Objetivo: *Complementação de um tópico teórico da geometria*

Construa um triângulo ΔDEF, homotético ao triângulo ΔABC dado, na razão $k = 2$. Justifique a construção.

Resolução e Comentários:

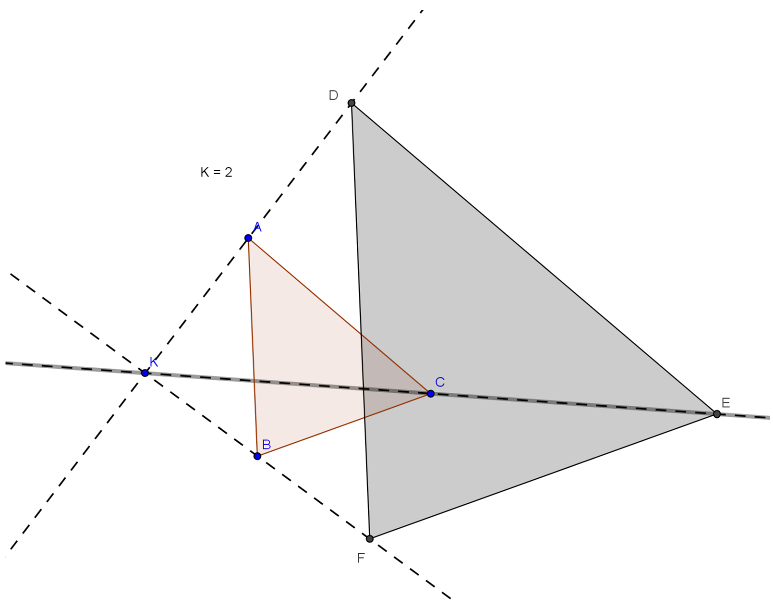


Figura 9.34: Atividade: Triângulo Homotético

Para construir o triângulo ΔDEF basta seguir os seguintes passos:

1. Trace as retas que passam pelo ponto K e pelos vértices A, B e C do triângulo dado.
2. Determine D, com $\overline{KD} = 2.\overline{KA}$.
3. Obtenha os pontos E e F utilizando o mesmo procedimento anterior

Para justificar essa construção, o aluno deve observar que os lados homólogos devem ser paralelos e ter a razão de semelhança igual a 2. Para tal, bastar observar o triângulo

ΔKDF. Os pontos A e B são pontos médios de $\overline{KD}$ e $\overline{KF}$ respectivamente. Logo, $\overline{AB}$ é base média desse triângulo, sendo paralelo a $\overline{DF}$. Além disso, $\overline{DF} = 2.\overline{AB}$. Analogamente para os lados $\overline{EF}$ e $\overline{DE}$.

Atividade 9.10.9 *: (***Triângulos Equivalentes e o Baricentro)**
OBJETIVO: *Ferramenta alternativa para a resolução de um problema*

Dado um triângulo ΔABC, construa um triângulo ΔDEF equivalente. A seguir, trace as 3 medianas do triângulo ΔDEF.

Este triângulo ficou dividido em 6 triângulos menores. Mostre que todos esses triângulos possuem a mesma área, ou seja, $\frac{ÁREA\Delta DEF}{6}$.

RESOLUÇÃO E COMENTÁRIOS:

Essa atividade tem como objetivo mostrar ao aluno a aplicação das construções de triângulos equivalentes para resolver um problema. A primeira construção traz somente um triângulo ΔDEF qualquer que deve ser construído. Para isso, basta que o aluno utilize o conceito de que uma maneira de ter dois triângulos equivalentes é de ambos terem a mesma base e altura.

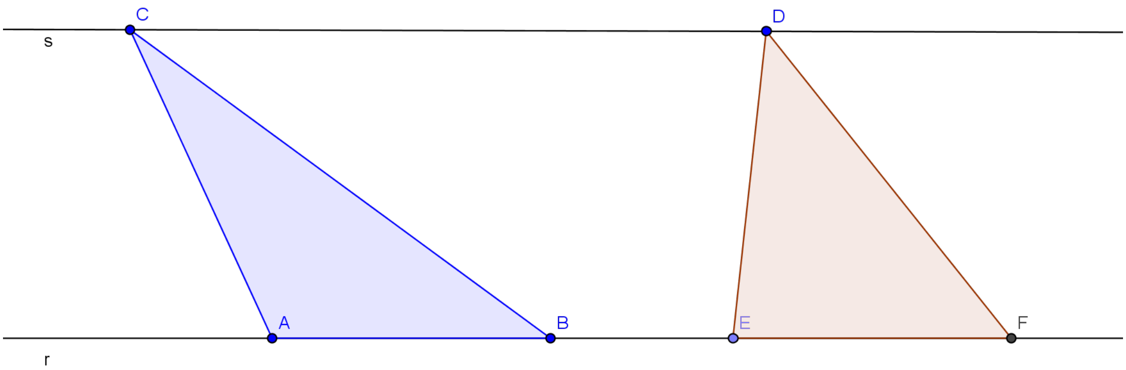


Figura 9.35: Atividade: Triângulos Equivalentes

Na figura, temos $\overline{AB} = \overline{EF}$. Além disso, as alturas são iguais, pois $r \parallel s$.

Na segunda parte, o aluno deve utilizar justamente esse conceito, além da propriedade do baricentro.

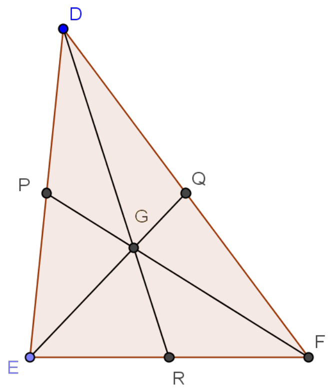


Figura 9.36: Atividade: Triângulos Equivalentes

Observe que por G ser o baricentro, temos:

$\overline{DG} = 2.\overline{GR}$

$\overline{EG} = 2.\overline{GQ}$

$\overline{FG} = 2.\overline{GP}$

Portanto, podemos dizer que a área do triângulo ΔDGE é o dobro da área do triângulo ΔDGQ, já que possuem a mesma altura, e $\overline{EG} = 2.\overline{GQ}$. Mas por P ser ponto médio, os triângulos ΔDPG e ΔEPG possuem a mesma área. Logo, os triângulos ΔDGQ, ΔDPG e ΔEPG são equivalentes.

Analogamente para os triângulos ΔRGF, ΔFGQ e ΔQGD.

Capítulo 10

Considerações Finais

O objetivo desse trabalho foi propor atividades que pudessem ser utilizadas ao longo do Ensino Fundamental. Ao todo, as 27 atividades foram divididas ao longo dos anos sempre acompanhando a maturidade matemática do aluno, e caminhando ao lado do desenvolvimento teórico geométrico do aluno, fazendo com que todas as construções possam ser justificadas.

Durante o 6° ano foram propostas 5 atividades e apresentados cinco importantes conceitos (circunferência e arcos, paralelas e perpendiculares utilizando os esquadros, reta mediatriz, transporte de segmentos e simetria de um ponto em relação a uma reta). Como alunos nessa faixa etária ainda não tem muita maturidade, é recomendado que os traçados de paralelas e perpendiculares sejam feitos com o esquadro, já que inicialmente o mais importante é que o aluno domine as propriedades dessas retas.

No 7° ano também foram propostas 5 atividades e apresentados três novos conceitos (transporte de ângulos, bissetriz e construção de ângulos 30°, 45° e 60°). Normalmente na maioria dos livros didáticos a construção de polígonos regulares é feita somente no 8° ano. Nesse trabalho, optamos por apresentar neste ano justamente como uma aplicação da construção de ângulos centrais de 30°, 45° e 60°.

Na maioria das escolas durante o 8° ano o aluno possui um maior contato com a geometria, com teoremas e proposições. Portanto, é natural que a partir dessa série se intensifiquem algumas justificativas e demonstrações. Para esse ano foram propostas oito atividades e três conceitos (construção de paralelas e perpendiculares com o compasso, tangências e arco capaz).

Finalmente ao chegar no 9° ano o aluno já possui uma maior maturidade matemática, e portanto está apto para desenvolver mais atividades e conceitos. Foram propostas 9 atividades e quarto conceitos (Teorema de Tales e divisão de segmentos, retificação de uma circunferência, Homotetia e Triângulos Equivalentes).

10.1 Testando as atividades

Para que possamos perceber o impacto desse trabalho, foram propostas 4 questões que abordam alguns temas apresentados durante as atividades desse trabalho. Foram escolhidos os 8 alunos do 1° ano do Ensino Médio do Colégio Pensi que obtiveram os melhores desempenhos durante o Ensino Fundamental . Eles foram divididos em dois grupos com a mesma quantidade de alunos (A e B). No grupo A, todos os 4 alunos tiveram algum tipo de contato com as construções geométricas durante o ensino fundamental. No grupo B, apenas 2 alunos tiveram algum tipo de contato anteriormente. As atividades aconteceram em três momentos.

No primeiro momento foram propostas quatro atividades presentes nesse trabalho, acompanhadas de suas resoluções feitas pelo professor somente para o Grupo A. O objetivo dessa divisão era perceber o impacto que as propostas teriam no desempenho desse grupo perante o outro. As atividades escolhidas foram:

1. Atividade 6.6.5: Ajude os Bombeiros
2. Atividade 8.8.3: Congruência de triângulos
3. Atividade 8.8.7: Tangência entre reta e circunferência
4. Atividade 9.10.3: Os pratos de Pitágoras

No segundo momento (na semana seguinte) foram propostas 4 questões de geometria plana para ambos os grupos, que de alguma forma possuem alguma relação com os conteúdos apresentados nas atividades anteriores.

Questão 01

CEFET/RJ 2011/2012 Gustavo está no ponto A de uma floresta e precisa ir para o ponto B. Porém, ele está com muita sede, antes, precisa ir até o rio para beber água. O rio está representado pela reta r na figura abaixo. Sabe-se que os pontos A e B estão respectivamente a 300 m e 600 m do rio. A distância entre os pontos A e B é de 500 m. Calcule a menor distância que Gustavo pode percorrer.

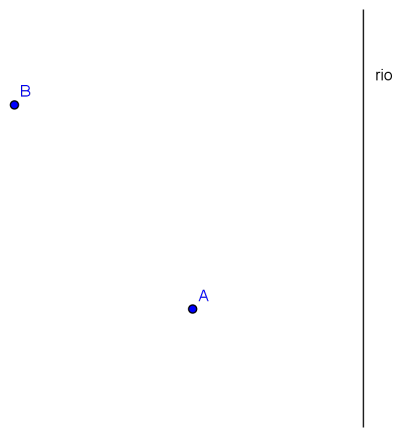


Figura 10.1: Questão 01: Simetria

Questão 02

Em um triângulo ABC, temos $\angle BAC = 30°$, $\overline{BC} = 1cm$ e $\overline{BA} = \sqrt{3}cm$. Responda:
a) Quais são os possíveis valores de $\overline{AC}$?
b) Por que o lado $\overline{AC}$ pode assumir mais de um valor?

Questão 03

A parábola é o lugar geométrico de todos os pontos equidistantes de um ponto (o foco) e de uma reta diretriz. Observe a parábola abaixo, e sua reta diretriz.

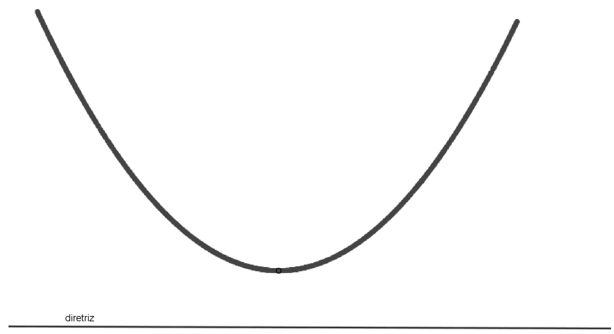


Figura 10.2: Questão 03: Parábola

Utilizando régua e compasso, encontre o foco da parábola.

Questão 04

O problema de Hipócrates. A figura a seguir mostra um triângulo retângulo e três semicircunferências tendo os lados como diâmetros. Mostre que a soma das áreas das duas "lúnulas" sombreadas é igual à área do triângulo.

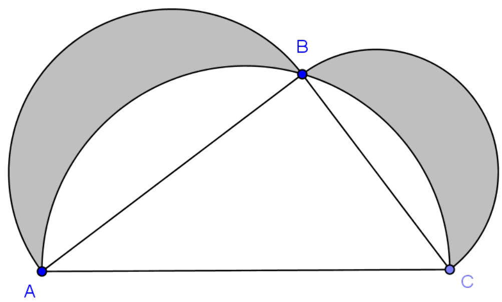


Figura 10.3: Questão 04: Lúnulas

Resoluções e Comentários:

Fazendo uma relação entre as atividades exibidas para os alunos do Grupo A e as questões propostas, consideraremos as seguintes soluções como resolução padrão:

Questão 01

Nessa questão é esperado que o aluno utilize os simétricos dos pontos A e B para encontrar a solução do problema.

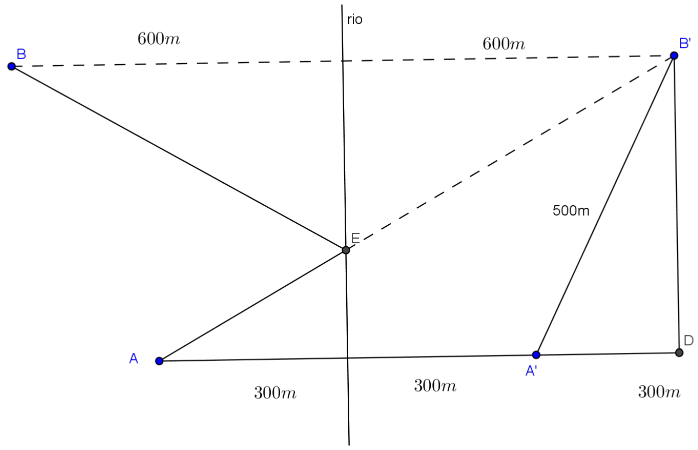


Figura 10.4: Questão 01: Resolução esperada

Os pontos A' e B' são os simétricos de A e B respectivamente. O triângulo $A'B'D$ possui cateto $B'D = 400m$, por ser um triângulo semelhante a 3, 4 e 5. Portanto, no triângulo $AB'D$ temos:

$\overline{AD} = 900m$

$\overline{B'D} = 400m$

Logo:

$\overline{AB'}^2 = 900^2 + 400^2$

$\overline{AB'}^2 = 970000$

$\overline{AB'} = 100\sqrt{97}$

Questão 02

Utilizando Lei dos Cossenos nesse triângulo, temos:

$1^2 = \sqrt{3}^2 + \overline{BC}^2 - 2.\overline{BC}.\sqrt{3}.\cos 30°$

$1 = 3 + \overline{BC}^2 - 2.\sqrt{3}.\overline{BC}.\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\overline{BC}^2 - 3.\overline{BC} + 2 = 0$

$\overline{BC} = 2$ ou $\overline{BC} = 1$.

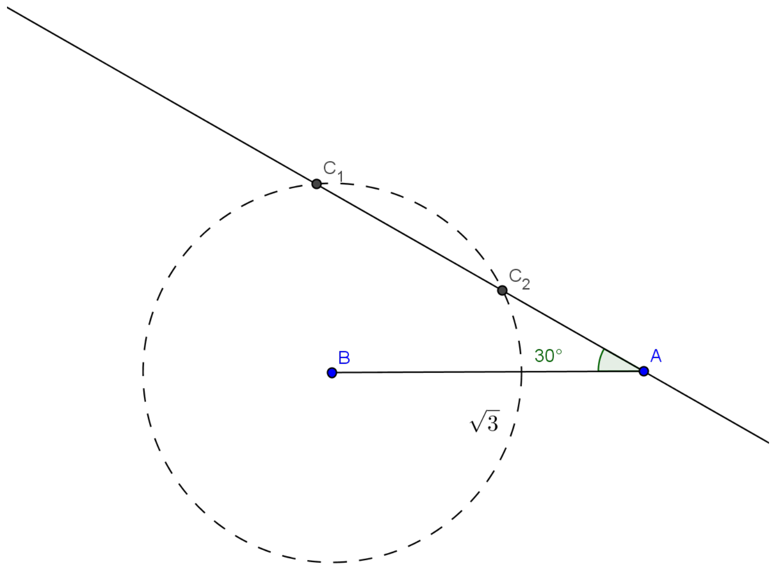


Figura 10.5: Questão 02: Resolução esperada

O aluno deveria observar que o caso LLA não é um caso de semelhança, portanto, é possível que o problema possua dois triângulos diferentes e consequentemente dois valores de $\overline{BC}$.

Questão 03

Nessa questão o aluno deveria escolher 3 pontos aleatórios da parábola, construir as distâncias até a diretriz, e com essa distância, construir circunferências com centro nos pontos escolhidos.

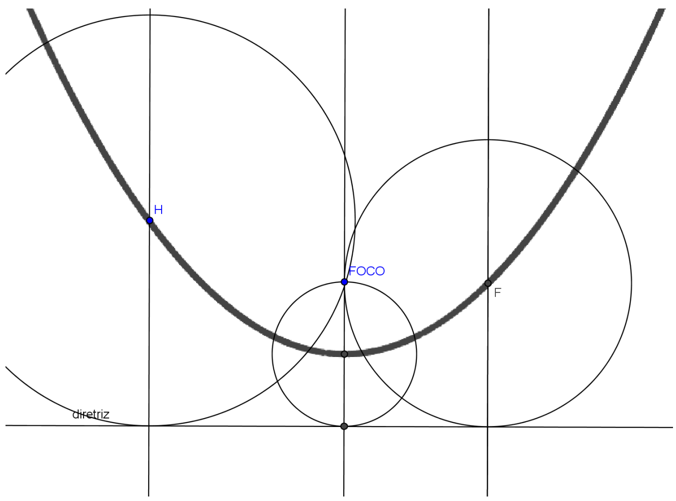


Figura 10.6: Questão 03: Resolução esperada

Questão 04

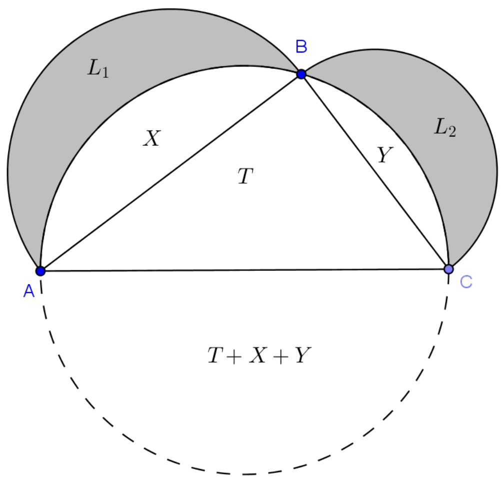


Figura 10.7: Questão 04: Resolução esperada

Como as figuras são semelhantes (semicírculos com diamêtros iguais aos lados do triângulo), sabemos através do Teorema de Pitágoras, que:

$T + X + Y = (L_1 + X) + (L_2 + Y)$

$T = L_1 + L_2$

Uma segunda solução seria fazendo os cálculos das Lúnulas através da subtração de áreas, o que é bem mais trabalhoso.

10.2 Análise dos resultados

O tempo de resolução das questões foi de 1 hora, e apresentou o seguinte resultado:

GRUPO A

	QUESTÃO 01	QUESTÃO 02	QUESTÃO 03	QUESTÃO 04
ALUNO 1	√	√	√	√
ALUNO 2	X	X	√	X
ALUNO 3	√	√	X	√
ALUNO 4	√	√	√	√

Figura 10.8: Resultado do Grupo A

GRUPO B

	QUESTÃO 01	QUESTÃO 02	QUESTÃO 03	QUESTÃO 04
ALUNO 1	X	X	X	√
ALUNO 2	X	Parcialmente	X	√
ALUNO 3	X	Parcialmente	X	X
ALUNO 4	X	√	Parcialmente	√

Figura 10.9: Resultado do Grupo B

O Grupo A teve uma média de 3 acertos, e o Grupo B de apenas 1 acerto por aluno. Podemos dizer que as atividades propostas na semana anterior foram úteis para o primeiro grupo, pois em diversas resoluções foram utilizados os conceitos ensinados durante as atividades desse trabalho.

Na Questão 01, os 3 alunos do Grupo A que acertaram a questão utilizaram a simetria do ponto B para resolver a questão, respondendo como a resolução padrão. No Grupo B, todos os alunos erraram a questão, e nenhum tentou utilizar a simetria para resolver a questão.

Na Questão 02, os 3 alunos do Grupo A responderam satisfatoriamente ambos os ítens, inclusive citando os casos de congruência para justificar o segundo ítem. No Grupo B, 2 alunos responderam corretamente somente o ítem a), e um dos alunos respondeu ambos os ítens corretamente, também citando os casos de congruência de triângulos.

Na Questão 03, novamente 3 alunos do Grupo A conseguiram acertar a questão, utilizando os conceitos de distância entre ponto e reta (reta perpendicular) e circunferência (distância fixa de um ponto dado), fazendo bons traçados e também utilizando a resolução padrão.

A Questão 04 foi a questão com o maior número de acertos (6 acertos), e talvez seja a mais interessante de ser analisada. No Grupo A, dos 3 alunos que acertaram a questão, 2 deles utilizaram a resolução geométrica padrão esperada, e apenas 1 deles utilizou cálculos. Já no Grupo B, todos os alunos que acertaram a questão utilizaram os cálculos algébricos para encontrar a solulção.

Através desses resultados, podemos perceber que as atividades propostas foram bastante eficazes para um melhor desempenho de um grupo perante o outro.

Em um terceiro momento, foram apresentadas aos alunos do Grupo B as mesmas atividades do Grupo A, e foram propostas 4 novas questões bem semelhantes as anteriores.

Questão 01

Em um jogo de bocha, uma bola situada no ponto C deve tocar na outra no ponto D fazendo a menor trajetória possível após encostar na parede. Construa o ponto na parede que mostra esse trajetória.

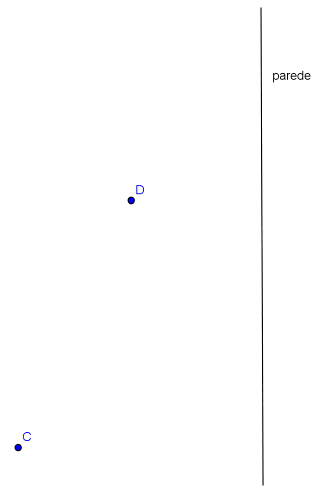


Figura 10.10: Questão 01

Questão 02

Em um triângulo ABC, temos $\angle BAC = 60°$, $\overline{BC} = \sqrt{7}cm$ e $\overline{BA} = 3cm$. Responda:
a) Quais são os possíveis valores de $\overline{AC}$?
b) Por que o lado $\overline{AC}$ pode assumir mais de um valor?

Questão 03

A parábola é o lugar geométrico de todos os pontos equidistantes de um ponto (o foco) e de uma reta diretriz. Observe a parábola abaixo, e seu foco.

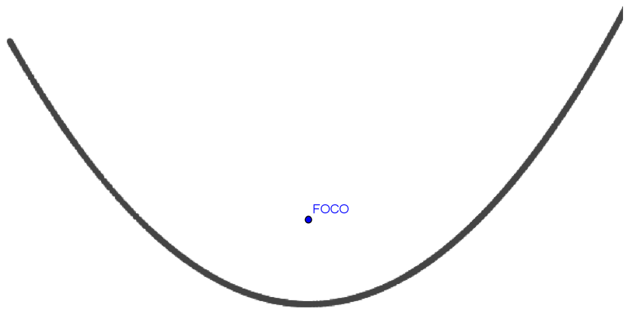


Figura 10.11: Questão 03: Parábola

Utilizando régua e compasso, encontre o foco da parábola.

Questão 04

Calcule a área da região sombreada, sabendo que os catetos do triângulo medem 4 cm e 3 cm, e os semi-circulos possuem os diâmetros iguais aos lados do triângulo.

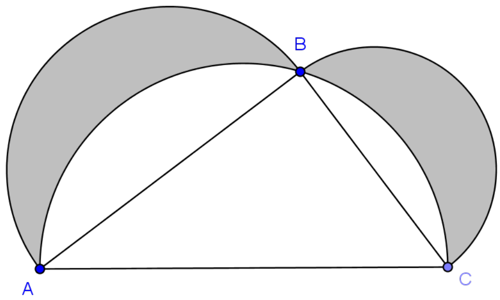


Figura 10.12: Questão 04: Lúnulas

O novo resultado do Grupo B foi o seguinte:

GRUPO B – NOVO RESULTADO

	QUESTÃO 01	QUESTÃO 02	QUESTÃO 03	QUESTÃO 04
ALUNO 1	√	X	X	√
ALUNO 2	√	√	X	√
ALUNO 3	X	√	√	X
ALUNO 4	√	√	√	√

Figura 10.13: Novo Resultado do Grupo B

Fazendo uma análise rápida desse resultado, percebemos um impacto importante na resolução de algumas questões.

Na Questão 01, três alunos utilizaram a simetria e resolveram a questão. Anteriormente nenhum aluno havia acertado a mesma.

Na Questão 02, os Alunos 02 e 03 agora acertaram integralmente a questão, justificando corretamente o ítem b).

Na Questão 03, os Alunos 03 e 04 acertaram a questão integralmente.

Na Questão 04, os Alunos 01 e 02 mudaram sua resolução, e resolveram a questão do modo da resolução padrão ao invés da resolução algébrica.

Através desse resultado, podemos perceber que após a apresentação das atividades desse trabalho o Grupo B passou a ter um desempenho melhor e bem semelhante ao Grupo A, mostrando uma importância significativa no processo de aprendizagem do aluno.

O objetivo dessas atividades é trazer para o aluno uma ampliação de sua visão geométrica nos diversos temas e problemas de geometria plana propostos durante sua vida escolar, ora auxiliando na compreensão de um tópico específico, ou aplicando conceitos geométricos em situações cotidianas. O ensino das construções geométricas não pode ser tratado como uma "coleção" de conceitos que devam ser decorados, mas sim como uma importante ferramenta no aprendizado da geometria.

Esse ensino torna-se cada vez mais urgente, pois o que se vê na maioria das escolas é uma algebrização da geometria, onde conceitos importantes, propriedades e teoremas ficam em segundo plano. Apenas utilizando uma régua e o compasso, o aluno é capaz de aplicar, desenvolver e contextualizar vários conceitos geométricos importantes, contribuindo de maneira importante para o seu aprendizado.

Referências Bibliográficas

[1] BRASIL; *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática.* Secretaria de Educação Fundamental, Brasília: MEC/SEF, 1998.

[2] BRASIL; *Lei n° 5692, de 11 de agosto de 1971.* Brasília, 150° da Independência e 83° da República, 1971.

[3] COSTA, Mario Duarte da; *O desenho básico na era tecnológica.* Anais... Florianópolis: UFSC,1982.

[4] EVES, Howard; *Introdução à História da Matemática.* Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas: Editora Unicamp, 2004.

[5] EVES, Howard; *Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula.* Tradução: Hygino H. Domingues. São Paulo:Atual, 1992.

[6] EUCLIDES; *Os Elementos.* Tradução de Irineu Bicudo. Versão em protuguês, Editora Unesp, 2009.

[7] GARBI, Gilberto G.; *A Rainha das Ciências: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática.* São Paulo: Editora Livraria da Física, 2010.

[8] HARTSHORNE, Robin; *Geometry: Euclid and Beyond.* SPRINGER: Undergraduate texts in mathematics, 2000.

[9] IEZZI, Gelson; *Fundamentos da Matemática Elementar - Volume 9.* Obra em 11v. para alunos do Ensino Médio. 8ed. São Paulo: Atual, 2005

[10] OLIVEIRA, João Milton de *A Irracionalidade e a Transcendência do número* π Dissertação de Mestrado. 43f. Universidade Estadual Paulista - Instituto de Geociências e Ciências Exatas.

[11] ROQUE, Tatiana; *História da Matemática:Uma visão crítica,desfazendo mitos e lendas.* Rio de Janeiro:Zahar, 2012.

[12] SILVA JÚNIOR, Luis Pereira da *Construções Geométricas por Régua e Compasso e Números Construtíveis* Dissertação de Mestrado. 40f. Universidade Federal de Campina Grande. Centro de Ciências e Tecnologia Disponível em: http://www.mat.ufcg.edu.br/PROFmat/TCC/Luis.pdf Acesso em: 07/09/2015

[13] SOUZA, Claudio Santos de; *Construções Geométricas v.1.* Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2010.

[14] SOUZA, Claudio Santos de; *Construções Geométricas v.2.* Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2009.

[15] WAGNER, Eduardo; *Uma Introdução às Construções Geométricas.* Brasil, OBMEP, 2012.

[16] WAGNER, Eduardo; *Construções Geométricas.* Rio de Janeiro: SBM, 1993

[17] ZUIN, Elenice de Souza Lodron; *Da régua e do compasso:as construções geométricas como um saber escolar no Brasil.* Dissertação de Pós-Graduação Belo Horizonte, 2001.

[18] SILVEIRA, Ênio; *Matemática: Compreensão e Prática.* Obra em 4v. para alunos do 6° ao 9° ano. 1ed. São Paulo: Moderna, 2008

[19] EDITORA MODERNA: OBRA COLETIVA; *Projeto Araribá.* Obra em 4v. para alunos do 6° ao 9° ano. 3ed. São Paulo: Moderna, 2010

[20] IEZZI, Gelson; *Matemática e Realidade.* Obra em 4v. para alunos do 6° ao 9° ano. 8ed. São Paulo: Atual, 2013