Instituto de Matemática e Estatística
Universidade Federal Fluminense

Programa de Mestrado Profissional em Matemática

em Rede Nacional

DAVI PEREIRA FORTES ARAUJO

VOLUMES DE SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO NO ENSINO MÉDIO: UMA ABORDAGEM DINÂMICA E INTUITIVA A PARTIR DAS IDEIAS DO CÁLCULO

Orientador: Prof.Dr. Wanderley Moura Rezende

UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

NITERÓI
OUTUBRO/2015

DAVI PEREIRA FORTES ARAUJO

VOLUMES DE SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO NO ENSINO MÉDIO: UMA ABORDAGEM DINÂMICA E INTUITIVA A PARTIR DAS IDEIAS DO CÁLCULO

Dissertação apresentada por Davi Pereira Fortes Araujo ao programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para obtenção do grau de mestre em Matemática.

Orientador: Prof.Dr. Wanderley Moura Rezende

Niterói

2015

DAVI PEREIRA FORTES ARAUJO

VOLUMES DE SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO NO ENSINO MÉDIO: UMA ABORDAGEM DINÂMICA E INTUITIVA A PARTIR DAS IDEIAS DO CÁLCULO

Dissertação apresentada por Davi Pereira Fortes Araujo ao programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para obtenção do grau de mestre em Matemática.

Aprovada em..22...de...outubro...de 2015.

Prof.Dr. WANDERLEY MOURA REZENDE - UFF

Orientador

Prof.Dr. HUMBERTO JOSÉ BORTOLOSSI – UFF

Prof.Dr. BRUNO ALVES DASSIE – UFF

Prof.Dr. GLADSON OCTAVIANO ANTUNES – UNIRIO

Niterói

2015

Dedico primeiramente ao meu Deus,

A minha esposa Wanessa e

A minha família pelo apoio e carinho.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente ao meu Senhor e meu Deus que me deu forças e capacidade para a realização deste sonho;

Agradeço a minha esposa Wanessa, pela paciência, compreensão, auxílio, carinho e incentivo durante todo período de realização deste curso;

Aos meus pais, José (in memoriam) e Dalva pelo apoio e carinho;

Aos meus irmãos Marta e Isaías pelo incentivo e auxílio;

Aos meus alunos do Colégio Estadual Visconde de Itaboraí (turma 2001- Ano 2014) por sua importante participação nesse trabalho;

Aos professores da UFF e aos meus colegas do mestrado que participaram na construção do meu conhecimento e por seu apoio e auxílio nesses dois anos;

Agradeço ao meu orientador, o Professor Wanderley, pela sua paciência, dedicação, humildade e conhecimento que contribuíram significativamente para a produção deste trabalho;

À CAPES, pelo apoio financeiro;

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

RESUMO

Esta dissertação se insere no âmbito das pesquisas relacionadas à possibilidade de emersão das ideias do Cálculo no ensino médio. Nesse sentido realiza-se aqui um levantamento sobre o ensino do Cálculo no Brasil, analisando a sua inserção e exclusão do ensino médio, discutindo-se ainda sobre algumas razões que nos fazem crer que as noções básicas do Cálculo podem e devem ser inseridas na matemática escolar. Este trabalho, mais especificamente, tem como objetivo apresentar uma proposta e, realizar uma avaliação de uma sequência de atividades didáticas para o ensino da área do círculo e do volume dos sólidos de revolução (cilindro, cone e esfera) em uma turma de 2º ano do ensino médio de uma escola da rede pública estadual, que considere uma participação das ideias do Cálculo. Para a concepção e elaboração das atividades, foi utilizado como raiz cognitiva o método de exaustão associado à noção intuitiva de limite. As atividades tiveram como suporte o uso de aplicativos construídos com os recursos interativos e dinâmicos disponibilizados pelo software *GeoGebra 3D*. Com base nos resultados obtidos com a experiência didática pode-se concluir que os objetivos das atividades foram atingidos. Grande parte dos alunos conseguiu compreender a origem das expressões utilizadas para o cálculo da área do círculo, do volume do cilindro, do volume do cone e do volume da esfera, a partir da noção intuitiva de limite e do processo de exaustão. A prática da pesquisa revelou, entretanto, algumas dificuldades apresentadas por alguns alunos com a escrita matemática e com a realização de alguns cálculos simples no decorrer da aplicação das atividades. Fazem parte ainda do corpo desta dissertação um breve relato histórico das ideias associadas à resolução dos problemas de cálculos da área do círculo e dos volumes dos sólidos de revolução, além de uma análise de como os livros didáticos do Ensino Médio aprovados no Programa Nacional do Livro Didático (PNLD 2015) abordam os temas citados.

Palavras-chave: Ensino de Cálculo; Ensino Médio; Volumes de sólido de revolução, GeoGebra; Método de exaustão.

ABSTRACT

This dissertation argues the possibility of integrating calculus ideas in high school. A research study was conducted to examine the teaching of calculus in Brazil, analyzing its insertion and suppression in high school. This work discusses the reasons which make us conclude that basic notions of calculus should be inserted in mathematics school. The general objective of this study is to present a proposal, and realize an avaliation of sequential didactics activities for the teaching of circle area and solid of revolution volume (cylinder, cone and sphere) in a second year state public high school class, which consider a participation of calculus ideas. It was used as cognitive root the method of exhaustion associated with intuitive notion of limit to the conception and development of the activities. They had as foundation the use of applications built with interactive and dynamic resources available for *GeoGebra 3D* software. Based on the results obtained with the didactic experience, it can be concluded that the objective of activities were achieved. Many of the students was able to understand the origin of the expressions used to calculate the circle area, the cylinder volume, the volume of a cone and the sphere of volume, from the intuitive notion of limit and exhaust process. The practice of research has revealed, however, some difficulties presented by some students with the mathematical writing and performing some simple calculations in the course of implementation of activities. Besides, it was included in this study a brief historical report of the ideas connected with the resolution of the problems of Circle area calculations and volumes of revolution solids, as well as an analysis of how high school didactic books accepted in the Programa Nacional do Livro Didático (PNLD 2015) broach the issues above.

Keywords: Teaching of Calculus; High school; Solid of revolution volume, GeoGebra; Method of exhaustion.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O interesse pelo tema proposto surgiu quando ainda cursava a Licenciatura em Matemática na UFF. Enquanto estudante do curso de graduação eu me questionei se a disciplina de Cálculo não teria sido mais fácil de entender, se durante o Ensino Médio eu tivesse tido contato com suas noções elementares (limite, derivada e integral). Além disso, pensei na razão pela qual o Cálculo não era lecionado no Ensino Médio, e esses foram os motivos pelos quais quis realizar esse trabalho.

Essa problemática é apontada por diversos especialistas em ensino de matemática. Como por exemplo, Rezende (2003, p.32) que, em sua tese de doutorado, afirma que "... o que se sente falta no ensino de matemática em geral é de uma "preparação" para o ensino de Cálculo. Alguns problemas clássicos do Cálculo são evitados, ou simplesmente ignorados, ou ainda tratados de forma superficial pelos professores no ensino médio e fundamental." Outro autor que faz referência a esse problema é Ávila (1991, p.7) quando menciona o fato de que não incluir o Cálculo no Ensino Médio é algo grave, pois "... deixa de lado uma componente significativa e certamente a mais relevante da matemática para a formação do aluno num contexto de ensino moderno e atual."

Dessa forma, por meio desse trabalho de pesquisa pretendemos mostrar que é possível apresentar aos alunos do Ensino Médio, de um modo elementar e intuitivo as noções básicas do Cálculo e utilizá-las para a compreensão dos conteúdos por eles estudados. No presente trabalho nos deteremos basicamente ao estudo da área do círculo e do volume dos sólidos de revolução. Na verdade, o foco principal deste trabalho está no ensino do volume dos sólidos de revolução. O estudo da área do círculo foi considerado apenas por se tratar de tema recorrente imediato[1].

Em geral, a abordagem desses tópicos é feita por meio de fórmulas apresentadas à maioria dos estudantes que são levados a memorizá-las pela prática exaustiva de exercícios, sem, contudo, compreender a essência e o significado de tais fórmulas. Entendemos que é importante que os estudantes saibam manipular

---

[1] Não obstante, evitamos abordar explicitamente o comprimento de uma circunferência (tema recorrente à área do círculo). Precisávamos demarcar um início. Entretanto, tal assunto poderia ser abordado por meio de procedimentos análogos ao realizado para a abordagem da área.

tais fórmulas para a resolução de exercícios, mas que é de igual importância que os mesmos tenham conhecimento de sua origem.

Outro ponto que deve ser observado no tratamento dispensado ao tema diz respeito à maneira como tal assunto é apresentado nos livros didáticos nacionais do ensino médio. Conforme veremos no final do capítulo 2 desta dissertação, a abordagem didática adotada acaba primando pelo uso do Princípio de Cavalieri como um axioma. Não obstante o próprio *Princípio de Cavalieri* ser um teorema cuja demonstração faz utilização de ferramentas do Cálculo, as ideias do Cálculo inerentes a esses problemas não são apresentadas aos estudantes. Assim, para o desenvolvimento deste trabalho propomos uma sequência didática de atividades que procure devolver ao Cálculo o seu papel histórico e epistemológico. Portanto, para elaboração das atividades nos utilizaremos do método de exaustão associado à noção intuitiva de limite, lançando mão de um recurso dinâmico, no caso o software *GeoGebra 3D*[2], que auxiliará nesse processo. Escolhemos o *GeoGebra* por ser um software gratuito, acessível a qualquer pessoa que possua um computador, por oferecer aos alunos a oportunidade de fazer conjecturas sobre um determinado resultado e também por oferecer todos os recursos necessários para levar a efeito a nossa proposta. As atividades, compostas de fichas de controle e aplicativos produzidos com o software supracitado, são apresentadas no capítulo 3 desta dissertação.

Para não ficar apenas numa argumentação teórica e no nível de proposta de atividades, aplicamos as atividades elaboradas em uma turma regular de estudantes do 2º ano do ensino médio de uma escola estadual do Rio de Janeiro situada no município de Itaboraí. Entendemos por turma regular, uma turma constituída pela instituição escolar, sem a intervenção ou seleção prévia do pesquisador, em horário escolar e ambiente da própria aula de matemática. Adotamos esse procedimento para verificar qual o impacto dessa experiência em uma sala de aula usual, onde há estudantes que gostam e outros que não gostam de matemática. O relato e a análise dos resultados dessa pesquisa de campo são apresentados no quarto capítulo desta dissertação. Além da metodologia de trabalho, são apresentados no final do capítulo dois pontos de vistas da avaliação da experiência didática realizada: o primeiro, do aluno; e, o segundo, do professor.

[2] Disponível para download em http://www.geogebra.org/

Assim, pode-se afirmar de forma sintética que o principal objetivo deste trabalho é elaborar, aplicar e avaliar uma sequência didática para o ensino e aprendizagem de volumes de sólidos de revolução em uma turma regular da rede estadual do ensino médio do Rio de Janeiro.

Antes de tratarmos da pesquisa e de seus resultados, apresentamos dois capítulos iniciais que foram de fundamental importância para o desenvolvimento do projeto de pesquisa.

No primeiro capítulo apresenta-se de forma breve a contribuição da geometria no contexto histórico para o surgimento e desenvolvimento do Cálculo, os principais matemáticos envolvidos nesse processo e como o Cálculo contribuiu de maneira significativa para resolver os problemas relacionados a áreas de figuras planas e volume de sólidos de revolução. Foi a partir dessa análise histórica que elegemos o método de exaustão e a noção intuitiva de limite como nossas ferramentas didáticas.

No segundo capítulo apresentamos uma síntese histórica da participação efetiva ou não das ideias do Cálculo no ensino secundário no Brasil. Além disso, discutimos sobre as razões pelas quais acreditamos que as noções elementares do Cálculo podem e devem ser ensinadas no ensino médio, tomando como referência o par preparação/antecipação. O que se defende aqui é uma preparação para as ideias do Cálculo e não sua antecipação para o ensino médio. Finalizamos este capítulo com uma análise, ainda que sucinta, sobre como os assuntos relativos a área do círculo e volume dos sólidos de revolução são discutidos nos livros de matemática utilizados no ensino médio brasileiro que foram aprovados no último Programa Nacional do Livro Didático (PNLD 2015).

1. CÁLCULO DE ÁREAS E VOLUMES: DA GEOMETRIA AO CÁLCULO

1.1 A SOLUÇÃO GREGA

A preocupação com questões matemáticas é muita antiga e remonta aos primórdios da história da humanidade. Muitos povos da antiguidade se destacaram no que se refere à matemática, dentre os quais se destacam os babilônios, os egípcios, os chineses e os gregos. No entanto, os gregos foram os primeiros a dar uma contribuição mais significativa para a matemática no que diz respeito à formalização do conhecimento matemático.

No que tange à geometria, e mais especificamente ao cálculo de áreas e volumes, muitos desses povos desenvolveram técnicas bastante eficientes para as suas épocas, tendo em vista o fato de que ainda não existia o aparato matemático necessário para a realização dos cálculos de uma maneira mais precisa. Contudo, até onde se conhece da história, o povo que mais realizou avanços nesse sentido foram também os gregos.

Na contribuição grega destaca-se Demócrito, um dos principais representantes da escola atomista, o qual defendia que a toda realidade consistia no vazio e em átomos infinitamente pequenos e imperceptíveis. Demócrito foi um dos primeiros matemáticos gregos a calcular volumes e a tratar tal assunto com a utilização dos infinitesimais. De acordo com Brolezzi (1999):

> Demócrito, no século quinto a.C., foi o primeiro matemático grego a determinar o volume da pirâmide e do cone. Apesar de os egípcios já saberem encontrar o volume da pirâmide de base quadrada, o mérito de Demócrito está em ter generalizado, bem ao estilo grego, a maneira de determinar o volume para pirâmides de base poligonal qualquer. Para obter o volume do cone, bastava uma inferência natural obtida pelo aumento, repetido indefinidamente, do número de lados do polígono regular formando a base da pirâmide. Foi, assim, o primeiro a falar de infinitesimais, pensando em utilizar lâminas circulares infinitamente finas para calcular o volume de cilindros e cones, antecipando-se assim ao teorema de Cavalieri, nesses casos. (BROLEZZI, 1999, p.38)

No entanto, as ideias de Demócrito não tiveram uma ampla aceitação e foram fortemente combatidas principalmente pela escola eleática que mostrava os paradoxos existentes nas teorias sustentadas pelo mesmo. Nesse contexto, destaca-se a figura de Zenão de Eléia com os seus famosos paradoxos, que através de suas ideias contribuiu no sentido de conduzir os gregos ao denominado *Horror ao Infinito.*

É nesse contexto, onde os matemáticos gregos queriam evitar a todo custo o uso do infinito na matemática por eles estava sendo desenvolvida, que surge a figura do matemático grego Eudoxo com o seu *Método de Exaustão*, método muito utilizado em demonstrações e sendo por isso considerado como uma ferramenta grega análoga ao Cálculo Integral como se conhece atualmente. Em seu texto Boyer (2012) atribui a Arquimedes a revelação de que foi o próprio Eudoxo que forneceu o lema que hoje tem seu nome:

> Segundo Arquimedes, foi Eudoxo quem forneceu o lema que hoje tem o nome de Arquimedes, às vezes chamado de axioma da continuidade e que serviu de base para o método de exaustão, o equivalente grego do cálculo integral. O lema, ou axioma, diz que, dadas duas grandezas que têm uma razão (isto é, nenhuma delas sendo zero), pode-se achar um múltiplo de qualquer delas que seja maior que a outra. Esse enunciado eliminava um nebuloso argumento sobre segmentos de reta indivisíveis, ou infinitésimos fixos, que às vezes apareciam no pensamento grego. (BOYER, 2012, p.81)

Cabe ressaltar que dessa forma o conceito de infinito não era levado em consideração e, consequentemente, houve uma satisfação por parte dos matemáticos gregos que queriam evitar a todo custo a utilização do infinito em seus trabalhos devido ao seu *Horror ao Infinito*. Segundo Boyer (2012), mediante o axioma de Eudoxo, pode-se demonstrar por uma redução ao absurdo uma proposição que formava a base do método de exaustão grego. A proposição diz que: "*Se, de uma grandeza qualquer, subtrairmos uma parte não menor que sua metade e, se do resto novamente subtrai-se não menos que a sua metade e se esse processo de subtração for continuado, finalmente restará uma grandeza menor do que qualquer grandeza de mesma espécie pré-fixada*."

Tal proposição foi utilizada posteriormente pelos matemáticos gregos dentre eles Euclides e Arquimedes para mostrar resultados sobre áreas e volumes. Segundo Boyer (2012) essa proposição era equivalente a que pode ser encontrada nos Elementos de Euclides X.1 e seu enunciado no contexto matemático atual é que dada uma grandeza M e uma grandeza ε prefixada de mesma espécie, e sendo r uma razão tal que $\frac{1}{2} \leq r < 1$, então é possível encontrar um inteiro positivo N tal que

$M(1-r)^n < \varepsilon$ para todo inteiro $n > N$, em outras palavras, $\lim_{n\to\infty} M(1-r)^n = 0$. O mesmo autor chama a atenção para o fato de que:

> (...), os gregos usaram essa propriedade para demonstrar teoremas sobre áreas e volumes de figuras curvilíneas. Em particular, Arquimedes atribuiu a Eudoxo a primeira demonstração satisfatória de que o volume do cone é um terço do volume do cilindro de mesma base e de mesma altura, o que parece indicar que o método de exaustão foi deduzido por Eudoxo. Se é assim, então é a Eudoxo que devemos provavelmente as demonstrações encontradas em Euclides dos teoremas sobre áreas de círculos e volumes de esferas. Tinham já sido feitas, antes, simples sugestões de que a área do círculo podia ser esgotada inscrevendo nele um polígono regular e aumentando indefinidamente o número de lados, mas foi o método de exaustão de Eudoxo que primeiro tornou esse processo rigoroso. (BOYER, 2012, p.81)

Apesar do conceito de infinito ter sido evitado no trabalho de Eudoxo e de outros matemáticos gregos, ainda assim houve um avanço significativo com respeito a muitos resultados da geometria plana e espacial, principalmente no que se refere ao cálculo de áreas e volumes. Na realidade, tal avanço se deu, pois de certa forma o conceito de infinito, por mais que fosse evitado, ainda assim permanecia oculto no método de exaustão.

Euclides, em sua obra *Os Elementos*, utilizou o método de exaustão de Eudoxo, onde o mesmo aparece como um axioma que diz que: “dadas duas grandezas diferentes (ambas não nulas), se da maior subtrairmos uma grandeza maior que a metade, e do que restou subtrairmos uma grandeza maior que a sua metade, repetindo esse processo continuamente, restará uma grandeza que será menor que a menor grandeza dada”. (*apud* Brolezzi, 1999)

A obra de Euclides teve um papel fundamental no desenvolvimento da matemática de modo geral, em particular na geometria espacial. Segundo Boyer (2012) no livro XI existe trinta e nove proposições sobre geometria em três dimensões, já no livro XII as proposições se referem a medidas de figuras e todas utilizam o método de exaustão, além disso, várias aplicações similares do método de redução ao absurdo foram utilizadas para medidas de volume em pirâmides, cones, cilindros e esferas. Além disso, vários matemáticos se inspiraram em seus escritos e, através deles, deram os primeiros passos rumo ao surgimento do Cálculo. De acordo com Brolezzi (1999, p.39): “*Não é por acaso que Arquimedes, bem como* *todos os criadores do Cálculo no século dezessete, irão se voltar para Euclides e tentar buscar aí as ideias do Cálculo*". Certamente ao se tratar de questões relativas a áreas e volumes e com anseio por resolver problemas dessa natureza na Grécia antiga, houve um preparo de um ambiente propício que proporcionou o surgimento e o desenvolvimento do Cálculo. Sem dúvida, Euclides contribuiu de forma significativa para que isso acontecesse. Não menos importante, foi Arquimedes de Siracusa.

Mediante o método de exaustão, Arquimedes chegou a muitos resultados corretos, que hoje podem ser confirmados facilmente mediante técnicas do Cálculo, e isso vários séculos antes do surgimento do mesmo. Tais fatos podem ser considerados notáveis, dadas as circunstâncias da época em que foram obtidos. Arquimedes escreveu diversos tratados, muitos dos quais versando sobre geometria, no entanto, um de seus trabalhos que merece um destaque especial é um conhecido como *o Método*, trabalho este que foi descoberto somente no início do século XX. Segundo Boyer (2012), este texto contém quinze proposições que foram enviadas, na forma de carta, para Eratóstenes que era matemático e chefe da universidade de Alexandria. Nesse trabalho, Arquimedes determinou a área de um segmento parabólico, o volume da esfera, os volumes do elipsoide, paraboloide e hiperboloide de revolução e da cunha cortada de um cilindro reto por dois planos, um paralelo a base do cilindro e o outro que corta obliquamente o eixo do cilindro. Ainda segundo Boyer (2012, p.108), Arquimedes através de investigações mecânicas fez muitas das principais descobertas matemáticas e "... julgava que seu "método" nesses casos não tinha rigor, pois considerava uma área, por exemplo, como a soma de segmentos de reta." Esse fato é bastante interessante mediante a semelhança desse pensamento com o método dos indivisíveis do século XVII.

Muitas das ideias utilizadas por Arquimedes foram inegavelmente, verdadeiras inspirações para o nascimento do Cálculo moderno, no entanto, ainda deixavam a desejar em vários aspectos quando se pensa no Cálculo atualmente, pois não havia o conceito de função, que como se sabe é fundamental para o desenvolvimento sólido e consistente do Cálculo. Segundo, Rezende (2003): "*O contexto fornecido pelo Cálculo de Arquimedes não nos possibilita realizar uma reflexão mais profunda. Faltam, no seu Cálculo, dois ingredientes fundamentais: um bom conceito de número e o conceito de variável (e, conseqüentemente, o conceito de função).*" Mediante isso, é possível perceber que com os gregos houve um avanço bastante significativo para que o Cálculo fosse desenvolvido, todavia, ainda era necessário algo mais consistente para que tal objetivo fosse atingido eficientemente, o que será alcançado apenas alguns séculos mais tarde com outros matemáticos.

1.2 O PRENÚNCIO DO CÁLCULO

Após um período de avanços significativos com os matemáticos gregos, houve um período na história da humanidade de estagnação na evolução do conhecimento científico, de maneira geral. Esse período se estendeu de meados do século VI até o início do século XIII, quando surgiram as primeiras universidades cristãs. É nesse período que muitos pensadores, conhecidos como filósofos escolásticos voltaram seus olhos para a matemática grega desenvolvida. E, desse modo, muito do pensamento grego foi retomado. Resurge então no palco do conhecimento científico os conceitos de infinitesimais e de indivisíveis que, mediante suas aplicações na geometria, principalmente com relação ao cálculo de áreas e volumes, prepararam o caminho para o nascimento do Cálculo Integral.

A partir do século XIII, até o início do século XVII, muitos matemáticos tiveram grande importância para o desenvolvimento inicial das ideias do Cálculo. Dentre esses matemáticos podemos citar primeiramente o cardeal Nicolau de Cusa (1401-1464) e posteriormente nomes como o de M. Stifel (1486-1567), François Viète (1540-1603), Simon Stevin (1548-1620) e Kepler (1571-1630). Todos esses matemáticos tiveram um ponto de convergência em seus trabalhos com relação a um conceito específico da matemática conhecida até então, esse conceito era o conceito de infinito. A idéia de infinito que havia sido abandonada pelos matemáticos gregos, agora reaparece e é utilizada por esses matemáticos sem nenhuma reserva.

Nicolau de Cusa, M. Stifel e Fraçois Viète, por exemplo, consideravam, conforme assegura Rezende (2003, p.138), que o círculo como um polígono de “um número infinito” de lados. Kepler também utilizou a mesma ideia para determinar a área do círculo.

De fato, segundo Boyer (2012), Kepler utilizava uma ideia primitiva de cálculo integral para determinar a área do círculo, pois considerava o círculo dividido em setores circulares que poderiam ser pensados como triângulos infinitamente finos e de bases infinitamente pequenas que estão ao longo da circunferência. Dessa forma, a área do círculo seria dada por $A = \frac{1}{2} r \cdot C$, uma vez que a soma das bases dos triângulos era igual ao comprimento da circunferência e por um raciocínio análogo ele sabia a área da elipse. Além disso, utilizou a ideia de infinitésimos também para calcular o volume de determinados sólidos, considerando os mesmos como sendo compostos por uma infinidade de elementos infinitesimais, de maneira similar ao que foi feito com a área do círculo e da elipse, e dessa maneira seus métodos dispensavam a dupla redução ao absurdo que era utilizada por Arquimedes.

De acordo com Boyer (2012), matemáticos como Simon Stevin e Kepler eram muito práticos e, em virtude disso, evitavam os rigores do método de exaustão. Essa modificação na maneira de se pensar com relação aos métodos infinitesimais é que conduziram ao desenvolvimento das ideias fundamentais do Cálculo.

1.2.1 Os Indivisíveis

Um dos temas que não pode ser ignorado na resolução de problemas geométricos de cálculo de áreas e volumes é uso dos indivisíveis. Embora tenha sido utilizado por vários filósofos escolásticos, o uso deste conceito ganhou notoriedade apenas no século XVII, com o trabalho *Geometria Indivisibilibus,* desenvolvido por Bonaventura Cavalieri (1578-1647). É importante ressaltar de que não foi somente Cavalieri que usou o conceito de indivisíveis em seus trabalhos. Como veremos mais adiante, matemáticos importantes como os franceses Gilles Persone de Roberval (1602-1675) e Blaise Pascal (1623-1662) também utilizaram tal conceito em seus trabalhos.

Cavalieri foi discípulo de Galileu Galilei (1564-1642) e dedicou parte de sua vida ao estudo da geometria, principalmente no que se refere ao cálculo de áreas e volumes. São de dois teoremas seus que surge o procedimento didático conhecido como *Princípio de Cavalieri*. Para Cavalieri, uma figura plana era formada por infinitas cordas paralelas entre si e uma figura sólida por infinitas secções planas também paralelas entre si. Essas cordas e essas secções eram por ele denominadas de indivisíveis. Cavalieri não definiu o que na realidade viriam a ser esses indivisíveis. Suas ideias tiveram certa aceitação e foram utilizadas por muitos matemáticos. Entretanto, também tiveram muitos opositores, os quais não viam muita consistência em sua teoria dos indivisíveis. Conforme assegura Rezende (2003):

> O Geometria indivisibilibus de Cavalieri alcançou popularidade quase que imediatamente, e se tornou, exceto para os trabalhos de Arquimedes, a mais cotada fonte para os matemáticos que desenvolviam trabalhos em geometria por meio de considerações infinitesimais. No entanto, as reações contrárias ao seu método infinitesimal não tardariam a aparecer. Paul Guldin, um jesuíta, foi um dos maiores críticos do método infinitesimal de Cavalieri. Guldin não fazia distinção entre o método de Cavalieri e o de Kepler; para ele ambos conduziam a falácias e situações paradoxais. (REZENDE, 2003, p.150)

Um dos argumentos que era muito utilizado para combater a geometria de Cavalieri residia no fato de que não fazia sentido que uma figura geométrica de extensão finita pudesse ser formada por uma infinidade de indivisíveis. Além disso, a teoria desenvolvida por Cavalieri não conseguia explicar o fato de como um conjunto de elementos sem espessura poderiam formar uma área ou um volume.

Não obstante as contradições encontradas e as controvérsias de seu trabalho, é inegável a importância da teoria dos indivisíveis para o desenvolvimento da geometria e do Cálculo, visto que até hoje o teorema que leva seu nome é utilizado como princípio (axioma) no ensino de matemática elementar. Muito embora o próprio Cavalieri não os tenha provado, seus princípios na realidade são teoremas e podem ser provados mediante as técnicas do Cálculo Integral, com veremos mais adiante.

Antes, porém, apresentamos a versão original do Teorema de Cavalieri:

> Se construirmos duas figuras planas quaisquer entre as mesmas paralelas e se ao traçarmos retas eqüidistantes às paralelas os segmentos que interceptam a figura forem iguais, então as figuras planas serão também iguais e se construirmos duas figuras sólidas entre os mesmos planos paralelos e ao traçarmos planos equidistantes dos planos paralelos as seções que interceptam as figuras forem iguais, então as figuras sólidas também serão iguais. (BARON e BOS, 1985, v.2, p.14)

A seguir apresentamos duas versões dos “Princípios” de Cavalieri, para áreas e volumes, enunciadas por Paterlini (2013) em seu trabalho. São elas:

> *Princípio de Cavalieri para Áreas* – Sejam R e S regiões limitadas de um plano, e seja r uma reta desse plano. Suponha que, para toda reta s paralela a r, as intersecções de R e S sejam vazias ou segmentos tais que a razão entre seus comprimentos é constante. Então a razão entre as áreas R e S é essa constante.
> *Princípio de Cavalieri para volumes* - Sejam P e Q sólidos limitados, e seja α um plano. Suponha que, para todo plano β paralelo a α, as

> interseções de P e Q com β sejam vazias ou regiões tais que a razão entre suas áreas é constante. Então a razão entre os volumes de P e Q é essa mesma constante (PATERLINI, 2013, p. 237)

Cabe ressaltar o fato de que os Princípios de Cavalieri ainda hoje são utilizados, principalmente, no que se refere a volumes. Tal princípio é usado para demonstrar no ensino médio as fórmulas que permitem calcular o volume dos principais sólidos geométricos como o prisma, a pirâmide, o cilindro, o cone e a esfera.

Conforme observado anteriormente, apesar de que quando se fala em indivisíveis quase sempre se faz referência ao nome de Cavalieri, outros matemáticos também utilizaram o conceito de indivisíveis em seus trabalhos. Nesse sentido destacaram-se os trabalhos dos matemáticos franceses Roberval e Pascal.

Segundo Boyer (2012), Roberval, designado para a cátedra de Ramus no Collège Royal, ganhou, no ano de 1634, um concurso onde desenvolveu um método de indivisíveis muito semelhante ao de Cavalieri. Usando o seu método, o matemático foi capaz de mostrar que $\int_a^b sen\ x dx = \cos a - \cos b$, que como se sabe é resultado que equivale à aplicação do Teorema Fundamental do Cálculo e que, em particular, pode ser aplicado para calcular a área delimitada pela curva $y = sen\ x$ e o eixo x quando $a = 0$ e $b = \pi$.

Contudo, o método de Roberval diferia tecnicamente do método de Cavalieri. Para Roberval os seus indivisíveis tinham um caráter muito mais voltado para o aspecto aritmético e infinitesimal, contrapondo-se ao método de Cavalieri que possuía uma abordagem baseada em argumentações de fundo geométrico.

Com efeito, Rezende (2003) observa que Roberval não considerava:

> uma superfície como sendo realmente composta de linhas ou um sólido como feito de superfícies, mas na realidade como sendo construídos de pequenos pedaços de superfícies e sólidos, respectivamente, sendo essas “infinitas coisas” consideradas “apenas como se elas fossem indivisíveis”. (REZENDE, 2003, p.157 -158)

Roberval via os indivisíveis sob uma perspectiva muito diferente da concepção de Cavalieri. A maneira como Roberval concebia a noção de indivisíveis influenciou outro matemático francês de vital importância no processo de desenvolvimento do Cálculo: Blaise Pascal, filho de Etienne Pascal, que era amigo de Roberval.

A concepção que Pascal possuía dos indivisíveis era similar a de Roberval. O trecho a seguir é de uma carta de Pascal, com o pseudônimo de *Denttonville*, a *Carcavi*, e sintetiza a forma como Pascal concebia e utilizava o método de indivisíveis.

> Queria fazer esta advertência para mostrar que tudo isto que é demonstrado pelas reais regras dos indivisíveis se demonstrará também com o rigor e à maneira dos antigos; e que assim um desses métodos não difere do outro senão na maneira de falar: isso não pode ofender as pessoas que raciocinam quando se lhes advertiu uma vez do que se intenciona por aquilo. E é porque não tenho nenhuma dificuldade no que segue em usar dessa linguagem dos indivisíveis, a soma de linhas, ou a soma de planos, e assim quando considerar por exemplo o diâmetro de um semicírculo dividido em um número indefinido de partes iguais aos pontos Z, de onde sejam conduzidas as ordenadas ZM, não encontrarei nenhuma dificuldade em usar dessa expressão, a soma de ordenadas, que parece não ser geométrica àqueles que não entendem a doutrina dos indivisíveis, e que se imaginam que é pecar contra a geometria exprimir um plano por um número indefinido de linhas, o que não resulta senão de lhe faltar compreensão, pois que se não entende outra coisa por aquilo a não ser a soma de um número indefinido de retângulos feitos de cada ordenada com cada uma das pequenas porções iguais do diâmetro, do qual a soma é certamente um plano, que não difere do espaço do semicírculo a não ser por uma quantidade menor que qualquer uma dada. (PASCAL, 1963, *apud* VENTURIN, 2007, p.135)

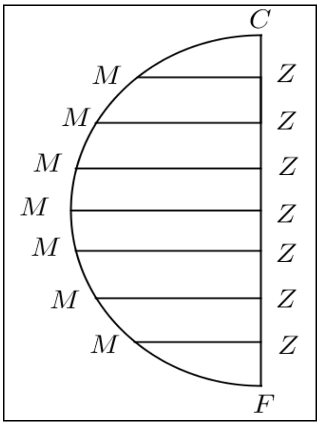


Figura 1: Semicírculo dividido em um número indefinido de partes iguais aos pontos Z

Dessa forma, percebe-se que os indivisíveis de Pascal estavam estritamente relacionados com a idéia de infinitésimos, visto que os segmentos ZM, na figura acima, são imaginados como pequenos retângulos cuja soma das bases é igual ao diâmetro do círculo e cuja soma das áreas é a área do semicírculo. Essa é sem dúvida uma boa preparação para o cálculo integral.

1.2.2 Adaptações no Método de Exaustão

Como já foi visto anteriormente, o método de exaustão foi criado pelo matemático grego Eudoxo e, posteriormente, muito utilizado por Euclides e Arquimedes em seus trabalhos. No entanto, durante a Idade Média e Renascimento, o método de exaustão teve algumas variações como veremos a seguir. Destacamos aqui alguns matemáticos que fizeram tal adaptação, são eles: Nicolau de Cusa, Simon Stevin e Fermat.

Nicolau de Cusa (1401-1464) era um filósofo escolástico e também utilizava o método de exaustão em muitos dos seus trabalhos, contudo não como Euclides e Arquimedes. Por exemplo, no caso da quadratura do círculo ele empregava os métodos infinitesimais pensando o círculo como um polígono de infinitos lados e utilizava o método de exaustão apenas como um complemento para a realização de seus cálculos. Rezende (2003) ressalta esse fato, pois segundo o autor:

> Nicolau de Cusa introduziu em seus cálculos matemáticos tanto as “quantidades infinitamente pequenas” como as “infinitamente grandes”. Definiu quantidade infinitamente pequena como “aquela que não pode ser feita menor”, e a infinitamente grande como “aquela que não pode ser feita maior”. Para demonstrar o resultado de Arquimedes para a quadratura do círculo usou explicitamente a idéia de infinitesimais. Esta idéia de descrever o círculo como um polígono de “número infinito” de lados, presente de forma marcante na demonstração de Nicolau de Cusa, aparece também nos trabalhos de M. Stifel (1486-1567) e de François Viète (1540-1603). Nicolau usou também o método de exaustão para “complementar”a sua demonstração.(REZENDE, 2003, p.165-166)

Segundo Boyer (2012), Nicolau possuía melhores habilidades eclesiásticas do que matemáticas. Além disso, pela maneira como abordou o problema da quadratura do círculo, considerando-o como sendo um polígono de infinitos lados, Nicolau ficou conhecido como um *equivocado quadrador de círculo*. Não obstante as críticas recebidas, ainda assim, ele possui o mérito de ser um dos primeiros europeus da Idade Média a tentar resolver um problema muito discutido por matemáticos da antiguidade. No entanto, quem vai dar um passo adiante e mais decisivo na adaptação do método de exaustão é o matemático Simon Stevin.

Simon Stevin (1548-1620) era conhecedor do trabalho de Nicolau. Contudo não lhe agradava o procedimento indireto utilizado na versão antiga do método de exaustão e, em consequência disso, foi eliminando gradativamente de seu trabalho o processo de redução ao absurdo optando pela passagem ao limite. Boyer (2012) assegura esse fato quando destaca o fato que:

> Como homens práticos que eram, Stevin, Kepler e Galileu necessitavam dos métodos de Arquimedes, mas desejavam evitar os rigores do método de exaustão. Em grande parte foram as modificações introduzidas por este motivo nos antigos métodos infinitesimais que finalmente conduziram ao Cálculo, e Stevin foi um dos primeiros a sugerir modificações. (BOYER, 2012, p.228)

Pode-se dizer que, na verdade, a adaptação do método de exaustão feita por Stevin consistiu basicamente na utilização do conceito de limite de forma intuitiva, que lhe permitia demonstrar certos resultados de uma maneira mais prática e eficiente.

Pierre de Fermat (1601-1665) também utilizou o conceito de indivisíveis em seus trabalhos. Segundo Roque (2012):

> Além de Roberval, Fermat e Pascal utilizaram o método dos indivisíveis para encontrar áreas delimitadas por diferentes curvas. No entanto, foram propostas modificações importantes, constituindo-se um novo método dos indivisíveis no qual a área não era decomposta em um número infinito de linhas, mas concebida como a soma de um número indefinido de retângulos. Essa soma difere da área original por uma quantidade que pode ser tornada menor que qualquer quantidade dada. Surgiu, assim, uma nova maneira de calcular áreas por meio da aproximação de uma área por retângulos infinitamente finos, e essa ferramenta podia ser aplicada a qualquer figura curvilínea. (ROQUE, 2012, p.348)

A utilização de tal conceito e a técnica desenvolvida permitiu que Fermat apresentasse o método de exaustão dos gregos sob um novo ponto de vista, um ponto de vista mais algébrico e que muito se aproxima dos métodos utilizados pelo Cálculo. De acordo com Roque (2012):

> Há uma diferença fundamental entre essa técnica e o método de exaustão usado pelos gregos, entre eles Arquimedes, pois aqui não se usa nenhuma prova indireta para se chegar ao resultado final. ... , Arquimedes mostrava que duas áreas são iguais usando um raciocínio por absurdo, concluindo que a suposição de que uma é maior que a outra leva à contradição. Já no exemplo dado[3], o número de retângulos aumenta indefinidamente e considera-se uma aproximação da soma quando *n* se torna muito grande. Além disso, no caso dos gregos, o “cálculo” de uma área consistia em uma comparação entre áreas. Aqui, o objetivo é calcular uma área qualquer por meio de uma aproximação obtendo-se uma expressão

[3] Esse exemplo a que a autora se refere é dado pela mesma em seu livro na página 348 ao fazer uma adaptação para a linguagem matemática atual do raciocínio empregado por Fermat para o cálculo da área abaixo da parábola $y = x^2$.

> analítica. Substituindo valores numéricos nessa expressão, tem-se o valor da área para cada caso particular. O procedimento de dupla redução ao absurdo, usado pelos antigos geômetras, era indireto, ao passo que o novo método permite obter a área diretamente. (ROQUE, 2012, p.348 - 349)

A maneira como Fermat abordava problemas de áreas fez com que o método de exaustão pudesse ser visto de outra forma, uma forma que desempenhará um papel fundamental não somente relativo ao cálculo de áreas, mas também com respeito ao desenvolvimento do próprio cálculo integral.

1.2.3 Newton e Leibniz

Não é possível se falar em Cálculo e no seu surgimento e desenvolvimento, sem mencionar os nomes de dois célebres matemáticos: o inglês Isaac Newton (1642-1727) e o alemão Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). Seus trabalhos tiveram uma importância fundamental no desenvolvimento do Cálculo sendo por essa razão, considerados como “inventores” do Cálculo por muitos historiadores da matemática. Apesar de a história mostrar que o Cálculo foi desenvolvido ao longo dos anos através do trabalho de vários matemáticos, é possível justificar tal título em decorrência da importância que esses matemáticos tiveram para organização sistêmica do próprio Cálculo como área do conhecimento. Conforme assegura Baron e Bos (1985, v.3 p.5) “Ainda que o Cálculo não tenha nem começado e nem terminado com estes dois homens, cabe a eles um grande mérito. Newton estendeu e unificou os vários processos de cálculo e Leibniz ligou-os através de uma notação eficaz e de um novo cálculo operacional.”

Segundo Baron e Bos (1985, v.3, p.69), esse título lhes é conferido, principalmente por três fatores: Primeiro, porque seus métodos infinitesimais foram muito mais gerais do que o dos matemáticos que os antecederam, uma vez que se aplicavam, no caso das curvas, a qualquer tipo de curva e não a um caso particular de curvas como no caso de seus antecessores. Segundo, porque em seus trabalhos havia um reconhecimento do Teorema Fundamental do Cálculo: a relação entre diferenciação e integração, o que anteriormente era visto como problemas distintos. E, terceiro, por causa da notação matemática utilizada em seus trabalhos, pois a mesma permitia que seus métodos fossem explicitados de maneira mais clara e precisa.

Newton estudou os trabalhos de vários matemáticos como Euclides, Kepler, Viète e muitos outros. Esses trabalhos certamente contribuíram para o seu trabalho e, além disso, devem ter influenciado significativamente a sua formação matemática. De acordo com Boyer (2012, p.276), Newton não foi o primeiro matemático a derivar ou integrar, e muito menos o primeiro a perceber a relação que havia entre derivação e integração no teorema fundamental do cálculo, contudo "Sua descoberta consistiu na consolidação desses elementos em um algoritmo geral aplicável a todas as funções, sejam algébricas sejam transcendentes." Ainda, segundo Boyer (2012), esse fato pode ser claramente percebido em uma nota publicada pelo próprio Newton em seu famoso livro *Principia*:

> Em uma carta que escrevi a Mr. J. Collins, datada de 10 de dezembro de 1672, tendo descrito um método de tangentes, que eu suspeitava ser o mesmo que o de Sluse, não foi publicado então, eu acrescentei essas palavras: isso é um particular, ou antes um Corolário, de um método geral, que se estende, sem qualquer complicação de cálculo, não só ao traçado de tangentes de quaisquer linhas curvas, sejam geométricas sejam mecânicas ... mas também à resolução de outros tipos mais obscuros de problemas sobre a curvatura, áreas, comprimentos, centros de gravidade de curvas etc., Nem se limita (como o método de máximos e mínimos de Hudden) a equações que são livres de quantidades em radicais. (BOYER, 2012, p.276)

Newton realizou diversos trabalhos em matemática sobre as séries infinitas, teoremas sobre cônicas e no próprio Cálculo. Utilizou o método das séries infinitas e sua versão do teorema fundamental do Cálculo para o cálculo de antiderivadas (também conhecida no Cálculo Moderno como a integral de Newton). Todavia não será tratado aqui pelo fato de não estar adequado ao escopo desse trabalho.

Leibniz, à semelhança de Newton, também leu vários trabalhos de outros matemáticos que o influenciaram significativamente. Trabalhos como o de Cavalieri, Roberval, Pascal e vários outros, fizeram parte de seus estudos. À semelhança de Newton, Leibniz contribuiu de diversas formas para o avanço do Cálculo e do conhecimento matemático de forma geral. De acordo com Baron e Bos:

> Depois da invenção do cálculo, Leibniz contribuiu com seu posterior desenvolvimento através da publicação de muitas técnicas, tais como: o uso de coeficientes indeterminados, a determinação de contornos, a integração de funções mediante as frações parciais e a chamada "regra de Leibniz". Ele foi também ativo em outros campos da matemática: projetou e construiu uma máquina calculadora que executava a adição, a subtração, a multiplicação e a divisão; investigou o sistema dos números binários e explorou a teoria dos

> determinantes na qual o moderno uso dos índices duplos tornou-se muito útil. Também dedicou muito tempo aos estudos algébricos. (BARON e BOS, 1985, v.3, p.41)

O matemático ainda realizou importantes trabalhos sobre sequências e séries numéricas. Encontrou, por meio de um método, o qual ele chamava de “a quadratura aritmética do círculo”, a famosa série infinita [4]:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots$$

Percebendo uma analogia com o cálculo de diferenças finitas e de somas, Leibniz desenvolve sua versão do teorema fundamental do Cálculo. Segundo Baron e Bos (1985):

> (...) Leibniz viu uma analogia entre o cálculo de diferenças finitas e de somas, por um lado, e a determinação de áreas e de tangentes pelo outro: a adição das sequências corresponderia à quadratura das curvas; tomar as diferenças corresponderia à determinação das tangentes. A relação inversa entre tomar somas e diferenças sugeriu a Leibniz que as determinações de áreas e de tangentes também são operações inversas. Assim surgiu, apesar de estar indefinida nesse período, a idéia de um cálculo de diferenças infinitamente pequenas e de somas de sequências de ordenadas que servissem para resolver os problemas das quadraturas e de tangentes, problemas cuja reciprocidade foi reconhecida. (BARON e BOS, 1985, v.3, p.41)

Outros dois pontos importantes devem ser considerados na contribuição de Leibniz para o Cálculo. O primeiro ponto está vinculado à questão da notação matemática. Foi o primeiro matemático a inserir notações em seu trabalho, (d, $\int$); notações que são utilizadas, inclusive, no Cálculo moderno. Já o segundo ponto, se refere ao triângulo característico (assunto ao qual não nos deteremos, visto não ser a proposta de nosso trabalho) e sua utilização na dedução de transformações gerais de áreas (integrais).

Haveria muito mais a ser tratado sobre a importante contribuição desses matemáticos relativo aos fundamentos do Cálculo. No entanto, não nos detemos a esses fatos em virtude de o presente trabalho ter como enfoque principal, ainda que de maneira breve, o papel do Cálculo na resolução do problema geométrico da medida. Para a solução desses problemas, a introdução dos conceitos de função e

---

[4] Esta série já era conhecida, segundo Baron e Bos (1985), no ano de 1671 (antes do trabalho de Leibniz) pelo matemático J. Gregory.

de limite no cenário do Cálculo foi fundamental. Mas isso, já é o Cálculo Moderno. Acelerando o passo, iremos direto para esse ambiente intelectual.

1.3 A SOLUÇÃO DO CÁLCULO MODERNO

Com o surgimento do Cálculo Integral atual as questões relativas a áreas e volumes foram em grande parte solucionadas. Através das técnicas do Cálculo pode-se calcular a área delimitada por uma curva qualquer e o volume de sólidos geométricos. Vejamos primeiramente como a área abaixo de uma curva é calculada por meio de uma integral. A maneira relatada abaixo é segundo Guidorizzi (2003):

Cálculo de Áreas - Seja f contínua em $[a,b]$, com $f(x) \geq 0$ em $[a,b]$. Estamos interessados em definir a área de um conjunto A do plano limitado pelas retas $x=a$, $x=b$, $y=0$ e pelo gráfico de $y=f(x)$.

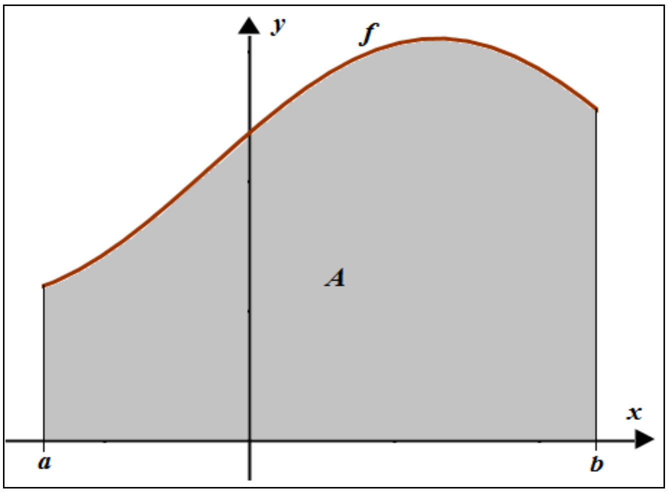


Figura 2: Área delimitada pelo gráfico de f e pelas retas $x=a$, $x=b$ e $y=0$

Seja, então, $P: a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ uma partição de $[a,b]$ e sejam $\bar{c}_i$ e $\bar{\bar{c}}_i$ em $[x_{i-1}, x_i]$ tais que $f(\bar{c}_i)$ é o valor mínimo e $f(\bar{\bar{c}}_i)$ o valor máximo de f em $[x_{i-1}, x_i]$. Uma boa definição para a área de A deverá implicar que a soma de Riemann $\sum_{i=1}^{n} f(\bar{c}_i)\Delta x_i$ seja uma boa aproximação por falta da área de A e que $\sum_{i=1}^{n} f(\bar{\bar{c}}_i)\Delta x_i$ seja uma boa aproximação por excesso, isto é

$$\sum_{i=1}^{n} f(\bar{c}_i)\Delta x_i \leq \text{ área de } A \leq \sum_{i=1}^{n} f(\bar{\bar{c}}_i)\Delta x_i$$

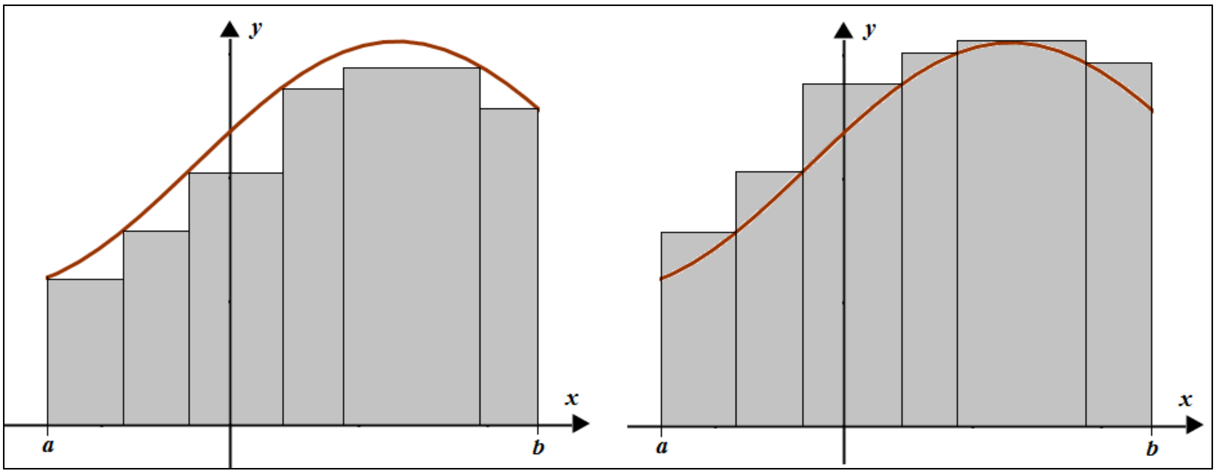


Figura 3: Soma inferior e soma superior de uma função

Como as somas de Riemann mencionadas tendem a $\int_a^b f(x)\ dx$, quando máx. $\Delta x_i \to 0$, nada mais natural do que definir a área de A por

$$\text{área de } A = \int_a^b f(x)\ dx$$

Como aplicação do resultado acima, é possível mostrar que a área de um círculo de raio r é $\pi \cdot r^2$.

De fato, a equação de uma circunferência de raio r e centro na origem é dada por $x^2 + y^2 = r^2$. Dessa forma, pode-se expressar a semicircunferência superior como uma função da seguinte maneira:

$$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2} \text{, onde } -r \leq x \leq r \text{ e } f(x) \geq 0$$

Assim, a área do círculo de raio r é dada por:

$$\text{Área do Círculo} = 2\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\,dx$$

Através da técnica de integração conhecida como substituição trigonométrica, calcula-se muito facilmente a integral $\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\,dx$ e mostra-se que seu valor é $\frac{\pi \cdot r^2}{2}$. Donde se conclui da equação anterior que a área do círculo é $\pi \cdot r^2$.

Outra aplicação do cálculo integral diz respeito ao cálculo de volumes. Primeiramente trataremos dos sólidos de revolução e após de um sólido qualquer. Toda abordagem feita a seguir para o cálculo de volumes é segundo Guidorizzi (2003), excetuando-se os exemplos de aplicação.

Volume de Sólido obtido pela Rotação, em torno do Eixo x, de um conjunto A - Seja f contínua em $[a,b]$, com $f(x) \geq 0$ em $[a,b]$; seja B o conjunto obtido pela rotação em torno do eixo x**,** do conjunto A do plano limitado pelas retas $x = a$, $x = b$, pelo eixo x e pelo gráfico de $y = f(x)$. Estamos interessados em definir o volume V de B**.**

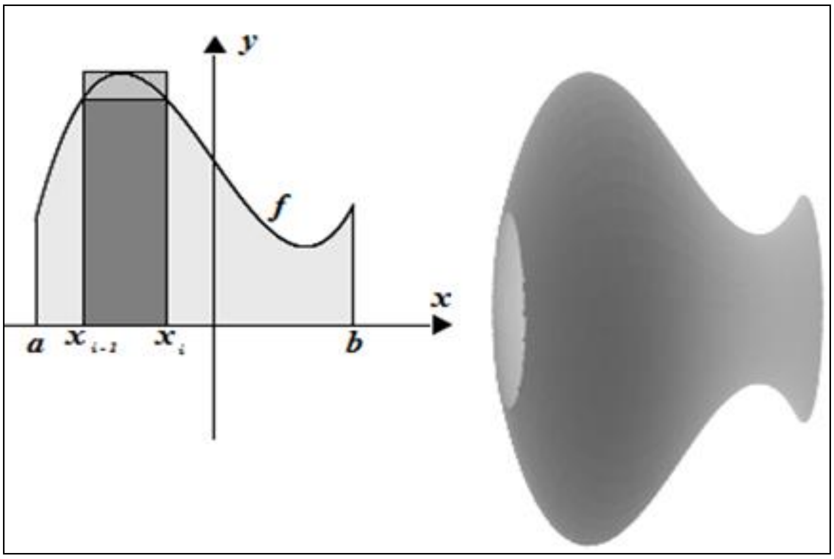


Figura 4: Rotação em torno do eixo x

Seja $P : a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ uma partição de $[a,b]$ e, respectivamente, $\bar{c}_i$ e $\bar{\bar{c}}_i$ pontos de mínimo e máximo de f em $[x_{i-1}, x_i]$. Na figura acima, $\bar{c}_i = x_i - 1$ e $\bar{\bar{c}}_i = x_i$. Temos:

$\pi \cdot [f(\bar{c}_i)]^2 \Delta x_i$ = volume do cilindro de altura Δx_i e base de raio $f(\bar{c}_i)$(cilindro de "dentro")

$\pi \cdot [f(\bar{\bar{c}}_i)]^2 \Delta x_i$ = volume do cilindro de altura Δx_i e base de raio $f(\bar{\bar{c}}_i)$ (cilindro de "fora")

Uma boa definição para o volume deverá implicar

$$\sum_{i=1}^{n} \pi \cdot [f(\bar{c}_i)]^2 \Delta x_i \leq \text{volume} \leq \sum_{i=1}^{n} \pi \cdot [f(\bar{\bar{c}}_i)]^2 \Delta x_i$$

para toda partição P de $[a,b]$.

Quando máx $\Delta x_i \to 0$, as somas de Riemann que comparecem nas desigualdades tendem a $\int_a^b \pi \cdot [f(x)]^2 \; dx$.

Nada mais natural, então, do que definir o volume V de B por

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \; dx$$

Como exemplo de aplicação do resultado acima é possível mostrar que o volume de uma esfera de raio r é $V = \dfrac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{3}$.

Com efeito. Seja V o volume do sólido obtido pela rotação, em torno do eixo x, do conjunto de todos os pares (x, y) do plano tais que $x^2 + y^2 \leq r^2$, $y \geq 0$ ($r > 0$). Este conjunto é um semicírculo de raio r e ao rotacionar esse semicírculo em torno do eixo x, obtém-se uma esfera de raio r. Além disso,

$$x^2 + y^2 \leq r^2,\; y \geq 0 \;\Leftrightarrow\; y = f(x) = \sqrt{r^2 - x^2} \text{, onde } -r \leq x \leq r \text{ e } f(x) \geq 0$$

Daí o volume V é dado por:

$$V = \pi \int_{-r}^{r} [f(x)]^2 \; dx = 2\pi \int_0^r \left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx = 2\pi \int_0^r r^2 - x^2 dx = 2\pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^r = \frac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{3}$$

Volume de Sólido obtido pela Rotação, em torno do Eixo y, de um conjunto A - Suponha $f(x) \geq 0$ e contínua em $[a, b]$, com $a > 0$. Seja A o conjunto do plano de todos os pares (x, y) tais que $a \leq x \leq b$ e $0 \leq y \leq f(x)$. Seja B o conjunto obtido pela rotação em torno do eixo y**,** do conjunto A. Pode-se mostrar através de argumentos semelhantes aos anteriores que:

$$\text{Volume de } B = 2\pi \int_a^b x \cdot f(x) \; dx$$

A título de exemplo de um resultado que pode ser obtido com a fórmula acima, vamos mostrar que o volume de um cone reto de raio r e altura h é dado por $V = \frac{1}{3} \pi \, r^2 h$. Com efeito, considere o conjunto dos pontos (x, y) do plano tais que $0 \leq x \leq r$ e $0 \leq y \leq h - \frac{h}{r} x$. Este conjunto é um triângulo retângulo de catetos

r (sobre o eixo x) e h (sobre o eixo y) e ângulo reto na origem. Dessa forma, o volume é:

$$V = 2\pi \int_0^r x\left(h - \frac{h}{r}x\right)\ dx = 2\pi \int_0^r xh - \frac{hx^2}{r}\,dx = 2\pi\left[\frac{hx^2}{2} - \frac{hx^3}{3r}\right]_0^r = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}$$

Volume de um Sólido Qualquer - Vimos anteriormente que $\pi\int_a^b [f(x)]^2\ dx$ é a fórmula que nos fornece o volume do sólido de revolução obtido pela rotação, em torno do eixo x, do conjunto $A = \{(x,y) \in IR^2 \mid a \le x \le b, 0 \le y \le f(x)\}$. Observe que $A(x) = \pi[f(x)]^2$

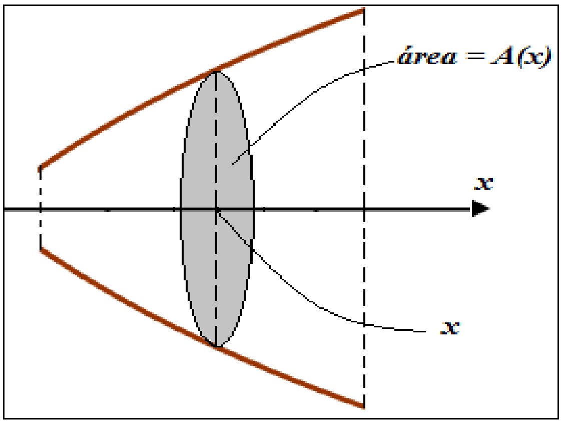


Figura 5: Secção transversal do sólido

é a área da intersecção do sólido com o plano perpendicular ao eixo x e passando pelo ponto de abscissa x.

Assim, o volume mencionado anteriormente pode ser interpretado da seguinte forma

$$\text{Volume} = \int_a^b A(x)\ dx$$

Seja, agora, B um sólido qualquer, não necessariamente de revolução e seja x um eixo escolhido arbitrariamente. Suponhamos que o sólido esteja compreendido entre dois planos perpendiculares a x, que interceptam o eixo x em $x = a$ e em $x = b$. Seja $A(x)$ a área de interseção do sólido com o plano perpendicular a x no ponto de abscissa x. Suponhamos que a função $A(x)$ seja integrável em $[a,b]$. Definimos, então, o volume do sólido por

$$\text{Volume} = \int_a^b A(x)\ dx$$

Mas isso, de certa forma, é a versão do Princípio de Cavalieri na forma de Teoremas. A seguir, apresentamos e damos uma demonstração dos Princípios de Cavalieri – quer dizer, dos teoremas de Cavalieri – e uma aplicação para obtenção do volume do Elipsóide, ambas extraídas de Paterlini (2013). Para isso, considere R uma região do plano, então $a(R)$ é a sua área e se P é um sólido, então $v(P)$ é o seu volume.

Teorema (Princípio de Cavalieri para áreas) - Consideremos em um plano um sistema de coordenadas cartesianas Oxy, e seja R a região delimitada por $y = 0$, $y = b > 0$ e pelos gráficos das funções contínuas $x = f_1(y)$ e $x = f_2(y)$, $0 \le y \le b$, com $f_1(y) \le f_2(y)$ para todo y. Seja S a região delimitada por, $y = 0$, $y = b$ e pelos gráficos das funções contínuas $x = g_1(y)$ e $x = g_2(y)$, $0 \le y \le b$, com $g_1(y) \le g_2(y)$ para todo y. Suponhamos que exista $k > 0$ tal que $f_2(y) - f_1(y) = k[g_2(y) - g_1(y)]$ para todo y. Então $a(R) = k \cdot a(S)$.

Demonstração

Da Teoria de Integração de funções reais temos:

$$a(R) = \iint_R dxdy = \int_0^b \left[\int_{f_1(y)}^{f_2(y)} dx \right] dy = \int_0^b f_2(y) - f_1(y) dy = \int_0^b k \cdot [g_2(y) - g_1(y)] dy =$$

$$= k \cdot \int_0^b g_2(y) - g_1(y) dy = k \cdot a(S)$$

o que demonstra a afirmação.

Teorema (Princípio de Cavalieri para volumes) - Consideremos um sistema de coordenadas cartesianas $Oxyz$, e seja P um sólido finito delimitado por $z = 0$, $z = c > 0$ e por uma quantidade finita de gráficos de funções contínuas do tipo $y = f(x, y)$ e $x = g(y, z)$. Para cada t tal que $0 \le t \le c$, seja P_t a interseção de P com o plano $z = t$. Seja Q outro sólido finito delimitado por $z = 0$, $z = c > 0$ e por uma quantidade finita de gráficos de funções contínuas do tipo $y = f(x, z)$ e $x = g(y, z)$. Para cada t tal que $0 \le t \le c$, seja Q_t a interseção de Q com o plano $z = t$. Suponhamos que exista $k > 0$ tal que $a(P_t) = k \cdot a(Q_t)$ para todo t. Então $v(P) = k \cdot v(Q)$.

Demonstração

Da Teoria de Integração de funções reais temos:

$$v(P)=\iiint_P dxdydz=\int_0^c\left[\iint_{P_z} dxdy\right]dz=\int_0^c a(P_z)dz=\int_0^c k\cdot a(Q_z)dz=k\cdot\int_0^c a(Q_z)dz=k\cdot v(Q)$$

o que demonstra a afirmação.

Como exemplo de aplicação, demonstraremos com o auxílio do teorema de Cavalieri para volumes uma fórmula para calcular o volume de um elipsóide.

Volume do Elipsoide – O volume do elipsoide de semieixos a, b e c é $\dfrac{4\pi abc}{3}$.

Demonstração

Suponhamos $c\geq b\geq a>0$, e consideremos o semielipsoide P definido por

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leq 1, \qquad z\geq 0$$

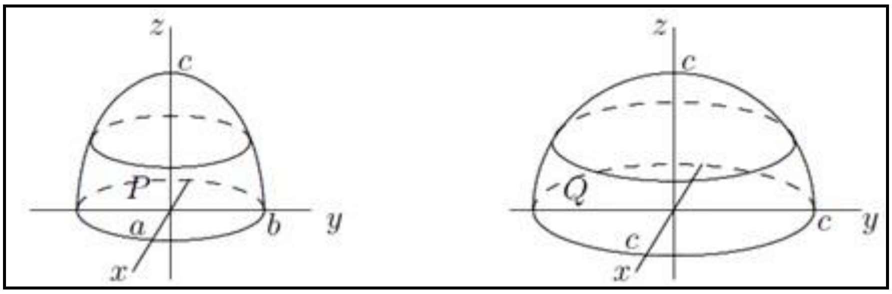


Figura 6: Semielipsoide e Semiesfera

É fácil ver que esse sólido é delimitado pelos planos $z=0$ e $z=c$ e pelos gráficos de duas funções contínuas do tipo $y=f(x,z)$ e (ou do tipo $x=g(y,z)$). Além disso, para cada t tal que $0\leq t\leq c$, a interseção P_t de P com o plano $z=t$ é dada por

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leq 1 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq 1-\frac{t^2}{c^2}=\frac{c^2-t^2}{c^2}$$

Seja $d=\sqrt{\dfrac{c^2-t^2}{c^2}}=\dfrac{1}{c}\cdot\sqrt{c^2-t^2}$. Então P_t é dado por

$$\frac{x^2}{(ad)^2}+\frac{y^2}{(bd)^2}\leq 1$$

e, em virtude do resultado anterior[5], sua área é

$$\pi(ad)(bd) = \pi abd^2 = \frac{ab}{c^2}\pi(c^2 - t^2)$$

Consideremos agora a semiesfera Q definida por

$$x^2 + y^2 + z^2 \le c^2, \quad z \ge 0$$

É fácil ver que esse sólido é delimitado pelos planos $z = 0$ e $z = c$ e pelos gráficos de duas funções contínuas do tipo $y = f(x,z)$ e (ou do tipo $x = g(y,z)$). Além disso, para cada t tal que $0 \le t \le c$, a interseção Q_t de Q com o plano $z = t$ é dada por

$$x^2 + y^2 + t^2 \le c^2 \qquad \Rightarrow \qquad x^2 + y^2 \le c^2 - t^2$$

Seja $r = \sqrt{c^2 - t^2}$. Então Q_t é dado por

$$x^2 + y^2 \le r^2$$

e sua área é $\pi \cdot r^2 = \pi \cdot (c^2 - t^2)$.

Notemos que, para cada t tal que $0 \le t \le c$,

$$a(P_t) = \frac{ab}{c^2}\pi(c^2 - t^2) = \frac{ab}{c^2}a(Q_t)$$

Estamos assim em condições de aplicar o Princípio de Cavalieri para volumes com $k = \frac{ab}{c^2}$.Temos então

$$v(P) = k \cdot v(Q) = \frac{ab}{c^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot c^3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi abc$$

Esse é o volume do semielipsoide. Duplicando, segue o resultado desejado.

---

[5] Esse resultado é fórmula $A = \pi ab$ para calcular a área de uma elipse de semieixos a e b, demonstrado pelo Teorema de Cavalieri para áreas.

2. O CÁLCULO NO ENSINO MÉDIO

Neste capítulo iremos discorrer sobre a participação do Cálculo no desenvolvimento do currículo da Matemática do ensino médio brasileiro. Além disso, serão apresentados posicionamentos de alguns autores sobre a necessidade de serem incluídas as noções básicas do Cálculo ainda no ensino médio, ao invés de deixá-las para serem abordadas apenas no ensino superior, como tem sido feito, em geral, na atual conjuntura educacional brasileira.

Pretende-se ainda, propor algumas formas de trabalhar com tais noções sem que se faça uma antecipação *ipsis litteris* dos conteúdos que são estudados no ensino superior, visando mostrar aos alunos a utilidade do Cálculo para a compreensão de vários resultados que são utilizados na matemática do ensino médio. De certo modo, esta preparação também será útil para um estudo posterior do Cálculo no nível superior, em diversos cursos de graduação.

Além disso, será feita uma breve análise da abordagem dos temas centrais desta dissertação - área do círculo e volumes de sólidos de revolução - em livros didáticos nacionais aprovados pelo PNLD 2015, procurando observar a presença ou não das noções do Cálculo no desenvolvimento dos conteúdos.

2.1 A INCLUSÃO E A EXCLUSÃO DO CÁLCULO DA GRADE CURRICULAR DO ENSINO MÉDIO NO BRASIL

Em uma conversa recente com um professor de matemática e colega de trabalho, ouvi o relato de sua experiência enquanto aluno do ensino médio do Colégio Pedro II, onde estudou Cálculo Diferencial e Integral e fez uma prova onde era pedido no enunciado de uma das questões que se calculasse a área da região delimitada pelos gráficos das funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = x^2$ e $g(x) = \sqrt{x}$, que, como se sabe, é um tipo de questão onde é necessário o conceito de integral e algumas técnicas básicas de integração para que seja resolvida corretamente.

Diante disso, fiz alguns questionamentos no que tange ao ensino de Cálculo: Porque o Cálculo ou, pelo menos, suas ideias básicas não são ensinadas atualmente no ensino médio? Será que esse tópico, tão importante para o desenvolvimento da Matemática, já foi ensinado nas escolas brasileiras em outras épocas? E, caso tenha sido, como era ensinado? E porque o retiraram da grade curricular?

Visando responder esses questionamentos, me propus a fazer um breve levantamento histórico, recorrendo a alguns autores que tratam dessas questões.

De acordo com Carvalho (1996) o ensino de Cálculo começou a ser obrigatório nas escolas brasileiras a partir da Reforma de Benjamin Constant em 1890. Além disso, o decreto 981 de 8 de novembro de 1890, reestruturou o ensino secundário que passou a ter 7 anos de duração e os programas do Ginásio Nacional (Colégio Pedro II) passaram a ser obrigatórios em todo o país. Segundo Carvalho (1996):

> O decreto que estruturou o curso secundário estabeleceu um "plano de estudos" no qual constava, no que nos diz respeito, o seguinte:
>
> Terceira Série - 1ª cadeira: Geometria Geral e o seu complemento algébrico; cálculo diferencial e integral, limitado ao conhecimento das teorias rigorosamente indispensáveis ao estudo da mecânica geral propriamente dita: 6 horas semanais.
>
> Quinta Série: Revisão - Cálculo e Geometria: 1 hora semanal.
>
> Sexta Série: Revisão - Cálculo e Geometria: 1 hora semanal.
>
> Sétima Série: Revisão - Cálculo e Geometria: 1 hora semanal. (CARVALHO, 1996, p.64)

Como é descrito acima o ensino de Cálculo era obrigatório na terceira, quinta, sexta e sétima série do ensino secundário, entretanto, ao longo dos anos o ensino do Cálculo teve avanços e retrocessos devido ao modo pelo qual este era ensinado. O excessivo rigor e a falta de conexão com os demais assuntos estudados levaram o Cálculo a ser retirado da grade curricular de matemática em 1900. Conforme assegura Carvalho (1996): "Já em 1900, a parte "Cálculo Diferencial e Integral, (...)" não consta dos programas oficiais do Colégio Pedro II. A partir de então, durante várias décadas, não há nos programas do Colégio Pedro II nenhuma menção às funções ou ao cálculo." Desde então, o ensino de Cálculo não era mais obrigatório, e não houve muitos avanços significativos concernentes ao seu ensino, até que o Cálculo reaparece no cenário da matemática escolar em 1931.

Segundo Dassie (2008, p.135), foi em 1931 com a Reforma Francisco Campos que o ensino de matemática no curso secundário foi reestruturado, sendo dividido por tal Reforma em duas etapas: o Curso Fundamental, com cinco anos de duração, e o Curso Complementar com dois anos. Além disso, foram instituídos programas que deveriam ser cumpridos a nível nacional. Com essa Reforma, as noções do Cálculo foram reintroduzidas nos programas do ensino secundário brasileiro, todavia com uma “inovação” quanto ao modo como estas deveriam ser ensinadas. Conforme relata Dassie (2008):

> Nos novos programas, embora a matemática tenha passado a ser ministrada nas cinco séries do Curso Fundamental, o que se observa de pronto é que não havia nenhuma mudança substancial nos conteúdos apresentados, os quais, em alguma época, já haviam feito parte, pelo menos oficialmente, dos programas do Colégio Pedro II, inclusive o conceito de função e as noções de cálculo diferencial e integral, que estiveram presentes nos programas instituídos pela Reforma Benjamin Constant. A novidade estava na forma com que eles deveriam ser ensinados, bem como na finalidade do ensino da matemática que se deveria ter em mente ao ministrá-los aos alunos. (DASSIE e ROCHA, 2003 *apud* DASSIE, 2008, p.135)

Outro autor que comenta sobre esta Reforma e seus desdobramentos é Pereira (2009, p.46) quando menciona o fato de que a referida reforma, além de ser a primeira tentativa de estruturar todo curso secundário nacional, ainda possuía como objetivo a introdução no ensino secundário dos princípios modernizadores da educação. Especificamente no que tange ao ensino de Cálculo na matemática, ele diz que: “As disciplinas matemáticas agora estavam unificadas sob o título de Matemática. No programa de Matemática, foi proposta a fragmentação das várias áreas da Matemática, tendo sido enfatizadas a importância de suas aplicações, a introdução do conceito de função e noções do Cálculo Infinitesimal.”

Entretanto, a realização de uma proposta com as pretensões descritas acima e onde o ensino de Cálculo fosse contemplado, ainda encontrava muita dificuldade de ser implantada, devido ao fato de muitos professores serem contrários, como também pela carência de livros que abordassem o Cálculo de uma maneira condizente com tal proposta. De acordo com Pereira (2009), tais fatores contribuíram de maneira significativa para o fracasso da inserção do Cálculo no ensino secundário durante esse período.

> Porém, esta proposta inovadora encontrou muitas resistências para ser implantada, principalmente a partir dos professores que, em geral, não se sentiam seguros para trabalhar a Matemática de uma maneira tão diferente daquela a que estavam habituados. O fato certamente foi agravado pela inexistência, quase que total, de livros didáticos que contemplassem as ideias modernizadoras. Estes fatores contribuíram fortemente para que a implementação

> da Reforma não tivesse o efeito desejado, (...). (PEREIRA, 2009, p.47)

Onze anos depois, outra importante reforma importante do sistema educacional brasileiro sucedeu a Reforma Francisco Campos. Essa Reforma que ocorreu em 1942 ficou conhecida como Reforma Capanema.

Segundo Dassie (2008), a Reforma Capanema foi importante, pois nela foram definidos, com algumas exceções, os conteúdos de matemática atualmente estudados nos ensino fundamental e médio. Além disso, o curso secundário com duração de sete anos foi dividido em Curso Ginasial com quatro anos e Curso Clássico e Curso Científico, com três anos. É importante ressaltar que nessa Reforma o ensino de algumas noções do Cálculo ainda era contemplado na terceira série do segundo ciclo, como pode ser visto no fragmento do texto do documento destacado a seguir:

> <u>Primeira série:</u> *Aritmética teórica*: operações fundamentais, divisibilidade,números fracionários. *Álgebra*: polinômios, trinômio do 2º grau. *Geometria*: o plano e a reta no espaço, poliedros.
> <u>Segunda série:</u> *Álgebra*: função exponencial, binômio de Newton. *Geometria*: corpos redondos. *Trigonometria*: Vetor, projeções, funções circulares, transformações, equações, resolução de triângulos.
> <u>Terceira série:</u> *Álgebra*: <u>séries</u>, funções, <u>derivadas</u>, números complexos, equações algébricas. *Geometria*: relações métricas, transformações de figuras, curvas usuais. *Geometria analítica*: noções fundamentais, lugares geométricos. (DASSIE, 2008, p.143 - 144, grifo nosso)

Assuntos importantes do Cálculo como o estudo das séries e das derivadas eram tratados na terceira série. É curioso observar a presença desses conteúdos em alguns dos livros didáticos atuais. Alguns desses livros apresentam no final do volume do terceiro ano do ensino médio alguns capítulos dedicados ao conceito de derivada, bem como a algumas de suas aplicações.

Ávila (1991) é outro autor que faz referência ao período após a Reforma Capanema, onde, segundo ele, vários tópicos importantes do Cálculo eram ensinados na matemática escolar. De acordo com o autor:

> (...) fazia parte do programa da 3ª série do chamado curso científico o ensino da derivada e aplicações a problemas de máximos e mínimos, além de outros tópicos como o polinômio de Taylor. Isso desde 1943, quando foi instituída uma reforma do ensino secundário que ficou conhecida pelo nome do ministro da educação na época, o sr. Gustavo Capanema. (ÁVILA, 1991, p.1-2)

Nos anos que se seguiram, no final dos anos 50, e início dos anos 60, um grande movimento surgido no meio matemático exerceu uma influência muito forte no ensino de matemática no Brasil. Esse movimento, conhecido com Movimento da Matemática Moderna, preconizava que era necessário modernizar o ensino de matemática e para isso acreditava que um bom caminho a seguir seria o da Teoria dos Conjuntos através da axiomatização e das demonstrações de teoremas com todo rigor matemático. Segundo Ávila (1991), como esse processo demandava muito tempo, foi necessário retirar dos programas escolares muitos tópicos que eram estudados, dentre eles o Cálculo, que para ser estudado com todo rigor necessitava de recursos teóricos da Análise Matemática. O autor ressalta ainda que: “Com essa excessiva preocupação com o rigor, o ensino do Cálculo exigiria agora um estudo detalhado dos números reais, coisa que tomaria no mínimo um semestre, por isto mesmo totalmente inviável...” (*Ibdem*, p.3).

Mediante isso, é possível perceber a razão pela qual o Cálculo não poderia mais ser ensinado nas escolas. Todavia, foi no ano de 1961 com a Lei de Diretrizes e Bases da Educação e a flexibilização do currículo escolar, que o Cálculo passou efetivamente a não ser mais um conteúdo obrigatório da matemática escolar brasileira. Mas seria esta atitude (a retirada do Cálculo do ensino secundário) a melhor solução para resolver os problemas do ensino de matemática no nível secundário? Podemos, de fato, prescindir das ideias básicas do Cálculo para a construção do conhecimento matemático no ensino básico?

2.2 POR QUE ENSINAR NOÇÕES DE CÁLCULO NO ENSINO MÉDIO?

Um argumento favorável à inserção das noções básicas do Cálculo é o fato de que esta seria uma forma de se estar contribuindo para a preparação do aluno para estudar o Cálculo no ensino superior, o que acarretaria uma consequente redução do índice de reprovação bastante elevado desta disciplina nas universidades brasileiras. Entretanto, este argumento não dá conta da grande maioria dos estudantes que não tem acesso ao ensino superior ou mesmo daqueles que nunca precisarão fazer uma disciplina de Cálculo em sua formação universitária. Além disso, deveríamos ter no próprio ensino médio razões que justificassem o ensino dessas noções do Cálculo.

Por outro lado, ao que parece, no contexto educacional brasileiro atual, o ensino básico de matemática tem passado por muitas dificuldades, principalmente no que diz respeito ao ensino das escolas públicas, onde grande parte dos alunos brasileiros estuda. Recentemente constatou-se segundo a avaliação do PISA 2012 (Plano Internacional de Avaliação de Alunos), que o Brasil encontra-se entre os países com piores resultados de avaliação em Matemática na educação básica, ocupando a 58ª posição no ranking das 65 economias globais que participaram da avaliação.

Sendo assim, alguém poderia questionar, e com muita propriedade, o seguinte: Por que acrescentar mais um conteúdo, e ainda mais como o Cálculo, à grade curricular da matemática do ensino médio, se com a grade atual nossos alunos já não conseguem apresentar um bom desempenho em matemática?

Entretanto, de acordo com Ávila (1991), não se pode tirar as noções de Cálculo do ensino médio, pois:

> (...) o Cálculo vem desempenhando um papel de grande relevância em todo desenvolvimento científico-tecnológico. Portanto, descartá-lo do ensino, é grave porque deixa de lado uma componente significativa e certamente a mais relevante da Matemática para a formação do aluno num contexto de ensino moderno e atual. (ÁVILA, 1991, p.3)

Ávila ainda afirma que:

> O Cálculo é moderno porque traz ideias novas, diferentes do que o aluno de 2º grau encontra nas outras coisas que aprende em Aritmética, Álgebra, Geometria, Trigonometria e Geometria Analítica. Não apenas novas, mas ideias que tem grande relevância numa

> variedade de aplicações científicas no mundo moderno. Ora, o objetivo principal do ensino não é outro senão preparar o jovem para se integrar mais adequadamente à sociedade. (ÁVILA, 1991, p.3)

Outro autor que defende um posicionamento semelhante ao de Ávila (1991) é Rezende (2003, p.37-38) quando afirma em sua tese de doutorado que: “... ensinar matemática - seja em que grau de ensino for -, sem levar em conta as ideias básicas do Cálculo, será sempre um ensino realizado “com lacunas”. Lacunas estas que só serão preenchidas à medida que forem explicitadas as ideias básicas do Cálculo.” Ressalta ainda o professor que:

> (...) o Cálculo é imprescindível para a **formação do cidadão**. Resolução de problemas de juros ou de crescimento de população (ou do aumento do custo de vida, da dívida externa etc.), cálculos de velocidades ou de taxas de variações de outras grandezas, interpretações de gráficos de funções reais, resolução de problemas de otimização (de áreas, de orçamentos domésticos etc.) são habilidades cada vez mais requisitadas para o exercício pleno da cidadania em uma sociedade de crescente complexidade. (REZENDE, 2003, p.37)

Dessa forma, fica claro que ao se ensinar as noções básicas do Cálculo aos alunos, além de mostrar conceitos que são extremamente importantes para o desenvolvimento científico e tecnológico e para o conhecimento matemático de forma geral, também haverá uma contribuição no sentido da formação dos alunos enquanto indivíduos que serão inseridos na sociedade. Destaca, entretanto, o autor, que essas noções não devem ser ensinadas como é feito no ensino superior, e, dessa forma, trazer para o ensino médio o problema crônico da aprendizagem do Cálculo no ensino superior. Não se trata de antecipar o ensino de Cálculo e acrescentar mais um tópico a tão extensa grade curricular de matemática do ensino médio, mas sim de se trabalhar as noções e as ideias básicas do Cálculo dentro dos conteúdos que já são estudados pelos alunos.

Mas com relação a esse contexto, o que dizem os documentos oficiais mais recentes? Qual o posicionamento dos intelectuais especialistas, que produziram estes documentos, sobre a inserção do Cálculo na abordagem dos conteúdos de matemática da educação básica?

Ainda que não tenhamos encontrado nada tão direto em relação a essa questão, podemos encontrar alguns indícios favoráveis a essa ideia nas entrelinhas dos documentos consultados. Segundo as Orientações curriculares para o ensino médio, por exemplo, para a escolha dos conteúdos de matemática a serem ensinados na educação básica:

> (...) é importante que se levem em consideração os diferentes propósitos da formação matemática na educação básica. Ao final do ensino médio, espera-se que os alunos saibam usar a Matemática para resolver problemas práticos do quotidiano; para modelar fenômenos em outras áreas do conhecimento; compreendam que a Matemática é uma ciência com características próprias, que se organiza via teoremas e demonstrações; percebam a Matemática como um conhecimento social e historicamente construído; saibam apreciar a importância da Matemática no desenvolvimento científico e tecnológico. (BRASIL, 2008, p.69)

Como é destacado no trecho acima, espera-se que o aluno ao sair do ensino médio possua uma visão ampla com relação à Matemática e que ainda seja capaz de utilizá-la de maneira satisfatória na resolução de problemas. Não se pode negar o fato de que o Cálculo é um dos ramos da matemática com uma capacidade enorme de contribuir para que o aluno alcance tais objetivos, mediante o fato de sua vasta aplicabilidade em problemas do dia-a-dia, como também em outros ramos do conhecimento humano. Devido à aplicabilidade do Cálculo na resolução de problemas práticos de outras ciências como a Física, Estatística, Química e Biologia, o aluno pode visualizar melhor o fato de que a Matemática também é extremamente importante para que outros campos do conhecimento humano consigam se desenvolver.

Ainda nesse contexto, é conveniente ressaltar o que diz os PCN+ sobre a importância da Matemática no que tange a uma de suas competências: a contextualização sócio-cultural. Os PCN+ (2002, p.117) afirmam com relação a essa competência na área da Ciência e Tecnologia na História que é importante para o aluno "Compreender o conhecimento científico e o tecnológico como resultados de uma construção humana, inseridos em um processo histórico e social." o que fará com que o estudante durante o aprendizado de matemática no ensino médio seja capaz de:

> Compreender a construção do conhecimento matemático como um processo histórico, em estreita relação com as condições sociais, políticas e econômicas de uma determinada época, de modo a permitir a aquisição de uma visão crítica da ciência em constante construção, sem dogmatismos ou certezas definitivas. (...) Compreender o desenvolvimento histórico da tecnologia associada a campos diversos da Matemática, reconhecendo a sua presença e implicações no mundo cotidiano, nas relações sociais de cada época, na transformação e na criação de novas necessidades,

> nas condições de vida. (...) Perceber o papel desempenhado pelo conhecimento matemático no desenvolvimento da tecnologia e a complexa relação entre ciência e tecnologia ao longo da história. A exigência de rapidez e complexidade dos cálculos fez com que a Matemática se desenvolvesse e, por outro lado, as pesquisas e avanços teóricos da Matemática e demais ciências permitiram o aperfeiçoamento de máquinas como o computador, que vêm tornando os cálculos cada vez mais rápidos. (BRASIL, 2002, p.117-118)

Os PCN+ também fazem referência à importância da Matemática na área da Ciência e Tecnologia na Atualidade, onde o estudante deverá ser capaz de "Reconhecer e avaliar o desenvolvimento tecnológico contemporâneo, suas relações com as ciências, seu papel na vida humana, sua presença no mundo cotidiano e seus impactos na vida social." (BRASIL, 2002, p.118).

Diante do que está exposto nos PCN+ é possível perceber que a introdução de noções do Cálculo no ensino médio poderia contribuir de maneira muito mais significativa para a conquista dos objetivos listados no referido documento. A própria questão da interdisciplinaridade, que é tão focada no ensino atualmente, pode ser abordada mediante a inserção de tais noções no ensino médio, visto que o Cálculo foi (e ainda é) imprescindível para o desenvolvimento da ciência e da tecnologia.

Mais uma vez, com a inserção de noções básicas do Cálculo no ensino médio, pode-se fazer com que o estudante deste nível de ensino consiga compreender eficientemente o quanto a Matemática é importante e está fortemente relacionada com a questão tecnológica. De fato, para a realização de trabalhos de engenharia, arquitetura, computação dentre muitas outras profissões o conhecimento do Cálculo é de fundamental importância.

Do ponto de vista epistemológico, a inserção das ideias do Cálculo no ensino básico de matemática é imprescindível para a compreensão efetiva de diversos conceitos ensinados neste nível de ensino. Ao se ensinar as ideias básicas do Cálculo nessa fase do ensino, também é possível fazer com que o aluno perceba que a compreensão de um determinado resultado, ou até mesmo um teorema, dentro da própria Matemática por ele estudada, são atendidas de forma plena e satisfatória no âmbito do Cálculo. Podemos tomar como exemplo, as fórmulas para o cálculo do comprimento de uma circunferência, da área de um círculo, da soma dos termos de uma progressão geométrica infinita, dentre muitos outros resultados, cujas demonstrações não são possíveis apenas com os conteúdos matemáticos desenvolvidos usualmente no ensino médio.

Assim, pode-se dizer que essa compreensão significativa desses resultados matemáticos é respaldada pelos PCN (2000, p. 46) que assegura que é importante que o estudante saiba, dentre outros aspectos, “distinguir e utilizar raciocínios dedutivos e indutivos, fazer e validar conjecturas, experimentando, recorrendo a modelos, esboços, fatos conhecidos, relações e propriedades e discutir ideias e produzir argumentos convincentes” [6]. Nesse sentido, as ideias do Cálculo podem, e devem contribuir efetivamente, para essa empreitada. Esse é o ponto que discutiremos na outra seção.

[6] Tal citação encontra-se no tópico referente às Competências e habilidades a serem desenvolvidas em matemática, na competência Investigação e compreensão.

2.3 PROPOSTA DE EMERSÃO DAS IDEIAS BÁSICAS DO CÁLCULO: PREPARAÇÃO X ANTECIPAÇÃO

Este trabalho assume como premissa fundamental que as ideias básicas do Cálculo podem, e devem ser ensinadas no ensino médio. Contudo, ao contrário de como se fez em épocas anteriores, onde os conceitos do Cálculo eram estudados como um tópico à parte e desvinculado dos demais conteúdos, o que se quer aqui é permitir ao Cálculo, por meio de suas ideias fundamentais, participar de forma efetiva da construção do conhecimento matemático na educação básica. Não se trata de fazer uma antecipação dos assuntos que os alunos deveriam estudar no ensino superior. O que se propõe é iniciar os estudantes do ensino médio, ainda que de forma intuitiva, em uma forma própria de pensar e argumentar do Cálculo Infinitesimal.

Como se sabe, existem muitos assuntos e resultados lecionados no ensino médio que são tratados de forma superficial e que nem ao menos são justificados para os alunos de uma maneira satisfatória, visto que, tais justificativas, como também suas demonstrações necessitam, muita das vezes, de conceitos e resultados do Cálculo. Então, porque não dar aos alunos a oportunidade de produzir tais argumentos, ainda que intuitivos, tomando como referência as ideias e procedimentos básicos do Cálculo? De fato, acreditamos que isso possa ser feito sem prejuízos para o aprendizado dos alunos. Rezende (2003) trata com muita propriedade desse assunto quando diz que:

> Na verdade, o que se sente falta no ensino de matemática em geral é de uma “preparação” para o ensino de Cálculo. Alguns problemas clássicos do Cálculo são evitados, ou simplesmente ignorados, ou ainda tratados de forma superficial pelos professores no ensino médio e fundamental. Fala-se, por exemplo, de funções crescentes, mas não se estuda o “quanto” estas crescem. Apresentam-se de forma “ritualística” alguns resultados do Cálculo - como a área do círculo, “transformação de dízimas periódicas em frações” etc. – sem um real enfrentamento dessas questões. (REZENDE 2003. p.32)

É claro que não é viável no ensino médio demonstrar com todo o rigor todo aquele aparato de resultados que necessitam do Cálculo para serem demonstrados, absolutamente. Procedendo dessa forma, estaria sendo feita a antecipação dos assuntos estudados no ensino superior de Cálculo, o que acreditamos, como já havíamos colocado anteriormente, não ser uma alternativa apropriada.

Na literatura observa-se a existência de alguns trabalhos com essa perspectiva de uma preparação para o Cálculo. André (2008, p.6-7), por exemplo, em sua dissertação de mestrado sobre Derivadas no Ensino Médio, apresenta uma proposta didática para o ensino de derivada pautada na ideia de “magnificação" (zoom) do gráfico de uma função diferenciável construído por meio de um software de matemática dinâmica [7]. Segundo a autora, seu trabalho tem a intenção de apresentar “uma abordagem [do conceito de derivada] que esteja fundamentada em conceitos, sem tomar a definição formal (baseada no conceito de limite) como ponto de partida, mas como objetivo pedagógico.” A pesquisadora acredita que sua abordagem do conceito de derivada tem “grande chance de funcionar como um facilitador para o entendimento da definição formal de limite e derivada de uma função num futuro curso de Cálculo”[8].

Ainda com relação à noção de derivada, Ávila (2006) mostra como é possível introduzir este conceito no primeiro ano do ensino médio de maneira muito natural, através da intuição geométrica, sem utilizar a definição formal que é dada nos livros de Cálculo. Além disso, o referido autor mostra como esse conceito possui uma aplicação muito importante na Física ao se estudar Cinemática, proporcionando dessa forma uma conexão com outras disciplinas, algo extremamente valorizado no ensino atual.

Já no 2º ano do Ensino Médio, também há uma variada quantidade de assuntos que podem ser trabalhados com as ideias básicas do Cálculo. Nessa fase do ensino é onde geralmente o aluno estuda áreas de figuras planas, progressões geométricas e volumes dos principais sólidos geométricos. O cálculo da área do círculo é uma boa oportunidade para se trabalhar com a noção de limite e a ideia do Método de Exaustão (o que será feito no capítulo 5 desta dissertação). Já no que tange ao estudo das sequências numéricas, pode-se inserir o estudo do limite de uma sequência de forma intuitiva para se determinar a soma de uma P.G. infinita. Justificar as “regras” para a determinação das dízimas periódicas, mostrando ao

---

[7] A autora usou o programa Graphmatica (2.0) (Hertzer & Malaca,2003), disponivel gratuitamente na Internet (versão shareware).

[8] Em sua dissertação a autora menciona a noção de retidão local que pode ser aplicada no estudo do conceito de derivada. Essa noção utiliza o fato de que um objeto curvo parece ser reto quando olhado de muito perto. Dessa forma é proposta a utilização de um procedimento denominado magnificação local onde, através de um computador, uma porção de uma curva é altamente ampliada na tela do mesmo e assim a derivada de uma função é apresentada como a inclinação da reta com a qual o gráfico da função se confunde quando o mesmo é submetido ao procedimento de magnificação local em diferentes janelas gráficas.

aluno o real significado do que está por trás de uma dízima periódica, e até mesmo o próprio conceito de representação decimal de um número real, configuram excelentes oportunidades para se discutir as ideias do Cálculo.

Outro ponto que acreditamos que esteja obscuro para o aluno, e que pode ser explorado com a utilização das noções de Cálculo, é o cálculo de volumes de sólidos de revolução: o cilindro, o cone e a esfera. Em geral, este tema é tratado utilizando-se o Princípio de Cavalieri como um axioma. Em nossa opinião, a abordagem que faz uso do Princípio [9] de Cavalieri não permite que o aluno compreenda as ideias e os procedimentos do Cálculo que justificam o cálculo dos volumes desses sólidos geométricos.

No entanto, não estamos dizendo que tal abordagem é incorreta e que não deva ser feita no ensino médio. Tal abordagem tem sido utilizada há muito tempo no ensino de geometria espacial, e é, inclusive, defendida por muitos professores com vasta experiência no ensino de matemática. O principal argumento a favor do uso do Princípio de Cavalieri como axioma está relacionado ao fato de que “sua demonstração envolve conceitos avançados de Teoria da Medida”, o que certamente não está disponível para o aluno do ensino médio

> “A sua demonstração envolve conceitos avançados de Teoria da Medida e, portanto, só podemos oferecer aos alunos alguns exemplos. Mas cremos que esses exemplos sejam suficientes para que possamos adotar, sem traumas, o Princípio de Cavalieri como axioma.” (LIMA 2006. p.315)

Em sua dissertação de Mestrado, Primo (2013), apesar de reconhecer que o Cálculo é o melhor “método” para o ensino de volumes, também defende a utilização do Princípio de Cavalieri no ensino médio, tomando como referência a inviabilidade da utilização das ideias do Cálculo de forma rigorosa no ensino médio.

> Ao pensarmos no Cálculo Integral para o ensino desse conteúdo, concluímos que esse é o método mais geral, o qual apresenta grande variedade de aplicações, além de ser definitivo. Mas nas escolas brasileiras de educação básica já não é ensinado esse conteúdo e, além disso, (...), esse tipo de abordagem levanta difíceis questões de natureza didática referentes ao grau de rigor nos fundamentos. (PRIMO 2013, p.26)

---

[9] Segundo o Dicionário Aurélio, a palavra Princípio significa o ato de principiar uma coisa; origem; causa primária; frase ou raciocínio que é base de uma arte, de uma ciência ou de uma teoria; regras ou conhecimentos fundamentais ou mais gerais.

Por outro lado, Primo (2013, p.26) reconhece as limitações do Princípio de Cavalieri, ao mencionar que “Sabemos da limitação em relação a superfícies curvas que esse princípio apresenta, (...)” e propõe atividades que, segundo ele, “poderão ajudar os alunos a desenvolverem o raciocínio espacial e também a adquirirem competências para que, futuramente, aprendam os métodos que utilizam o Cálculo Integral no cálculo de volumes”.

As alegações dos autores que defendem a utilização do Princípio de Cavalieri no ensino de cálculo de volumes são plausíveis, e concordamos com os mesmos em vários pontos, principalmente no que diz respeito à inviabilidade de ensinar volume utilizando o Cálculo Integral, de forma “rigorosa”. Mas, entendendo que o nível de rigor é também um conceito relativo, nos perguntamos então aqui qual seria o nível de rigor que deveríamos considerar no ensino médio com relação a essa questão? Se considerarmos a Teoria da Medida, a abordagem do Cálculo Integral utilizada nos livros didáticos de Cálculo destinados ao próprio ensino de graduação no ensino superior também não é rigorosa. Portanto, acreditamos ser possível realizar uma abordagem intuitiva que revele para o aluno as ideias essenciais do Cálculo envolvidas na determinação de volumes. Assim, entendemos que quando se pretende que o aluno tenha “uma visão mais ampla de como determinar volumes de sólidos de revolução”, é imprescindível que o mesmo perceba que existem procedimentos de aproximações infinitesimais, ferramentas que antecedem o Cálculo Integral, que resolvem efetivamente questões relacionadas à determinação de volumes, e que em nossa opinião, não é percebida pelo aluno do ensino médio apenas pela aplicação do Princípio de Cavalieri como tradicionalmente é realizada.

Contudo, na atividade referente à determinação do volume da esfera que realizamos no presente trabalho, foi utilizada uma “ideia” muito similar a que é usada para explicar o Princípio de Cavalieri no ensino médio. Na mesma o aluno é levado a considerar o volume de uma semiesfera como a soma dos volumes dos cilindros inscritos na mesma, o que pode ser visto como se a semiesfera estivesse sendo “fatiada” e cada fatia fosse representada por um “cilindro”. Entendemos que essa abordagem adotada para o cálculo do volume da esfera é mais legítima e mais significativa do que a aplicação de um princípio, interpretado apenas como um axioma.

Como já antecipado no parágrafo anterior, no presente trabalho elaboramos algumas atividades que poderiam ser inseridas nos tópicos relativos ao cálculo da área do círculo e dos volumes dos principais sólidos e revolução, utilizando como pano de fundo o método de exaustão (que se encontra nas raízes do Cálculo Integral), juntamente com o auxílio do software de geometria dinâmica *GeoGebra*. Pretende-se com o desenvolvimento dessas atividades que o aluno seja capaz de entender as "fórmulas" que aparecem no referido contexto e compreender sua origem a partir dos processos epistemológicos e históricos que a constituíram e a legitimaram. O aluno poderá ver que o "método" apresentado pode ser aprimorado e generalizado para calcular o volume de um sólido qualquer.

É importante ressaltar o fato de que em todas as atividades propostas, foi utilizada uma abordagem intuitiva de limite. Não se utilizou e não foi feita qualquer menção à definição rigorosa de limite[10]. Fazer isso, como já mencionamos, seria totalmente inviável e inapropriado; seria antecipar para o ensino médio uma abordagem mais condizente com o nível superior. Optamos então por uma abordagem intuitiva da noção de limite, utilizando o apelo à visualização geométrica e o recurso interativo de um software de matemática dinâmica que possibilite uma eficiente preparação para a construção da noção de limite.

Já apontamos aqui que um argumento que se põe contra a antecipação, ou mesmo preparação, das ideias do Cálculo no ensino médio. Tal argumento afirma não haver mais espaço para inserir mais conteúdos na grade curricular de Matemática neste nível de ensino, que já é por demais carregada de conteúdos. Todavia, acreditamos que essa situação poderia ser facilmente contornada se uma quantidade enorme de definições, simbologias e propriedades inócuas fossem suprimidas e deixadas para serem trabalhadas em outra ocasião. Em um artigo publicado na RPM 60, o professor Ávila (2006) corrobora essa ideia. Ao falar sobre o ensino de derivadas, o autor, por exemplo, afirma que:

> Antes que algum leitor pense que o ensino de derivadas logo na primeira série vai aumentar ainda mais o ensino de funções, apressamo-nos a dizer que é exatamente o contrário. O ensino de funções, como vemos em vários livros, é que está carregado de terminologia e notação, de maneira artificial e descontextualizada. O excesso de "conjuntos" continua presente em vários livros, "entulhando" o currículo. Tudo isso pode ser reduzido substancialmente e com vantagens, beneficiando o bom aprendizado

---

[10] Diz-se o número real L é o limite da sequência (a_n) ($\lim a_n = L$) *se, e somente se, para todo número real* $\varepsilon > 0$*, existir um número natural* n_0 *, tal que se n >* n_0 *para todo número natural n , então* $|a_n - L| < \varepsilon$.”

> das ideias matemáticas. São as ideias que devem ser enfatizadas, a linguagem e a notação somente quando necessárias para o objetivo de introduzir novas ideias. (ÁVILA, 2006, p.38)

O mesmo autor ainda afirma que:

> Como se vê, não é que falte espaço para o Cálculo nos programas. É preciso, isto sim, reestruturar esses programas, eliminar o que neles há de arcaico, introduzir novos tópicos e modernizar as apresentações, tudo isto feito de maneira que as diferentes partes fiquem bem articuladas entre si e o conjunto apresente organicidade. (ÁVILA, 1991, p.9)

Concordamos com o professor Ávila. Se alguns assuntos que não são tão necessários para o desenvolvimento do saber matemático do aluno no ensino médio fossem omitidos ou adiados, sobraria um tempo maior para se inserir as ideias básicas do Cálculo ou mesmo outros temas mais significativos para a formação do aluno. A presença efetiva das ideias do Cálculo no ensino básico de Matemática, além de preencher diversas lacunas na formação dos nossos alunos, poderia contribuir significativamente para que o aluno saísse do ensino básico com outro olhar sobre a Matemática, um olhar mais atencioso e criterioso com relação aos procedimentos infinitesimais, os quais estão vividamente presentes na matemática escolar, como também em diversas situações do cotidiano. O infinito realmente impressiona e instiga a mente humana. E a Matemática, através do Cálculo, se caracteriza, tal e como já disse uma vez o matemático alemão Hermann Weyl, como a ciência do infinito.

2.4 ÁREA DO CÍRCULO E VOLUMES DE SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO NOS LIVROS DIDÁTICOS APROVADOS PARA O ENSINO MÉDIO NO PNLD 2015

Nesta seção, apresentaremos, ainda que de forma breve, a maneira como os temas destacados – a área do círculo e os volumes de sólidos de revolução – são abordados nos livros didáticos nacionais aprovados pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), programa instituído pelo Ministério da Educação (MEC).

O Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), conforme divulgado pela própria página do MEC [11], tem como principal objetivo "subsidiar o trabalho pedagógico dos professores por meio da distribuição de coleções de livros didáticos aos alunos da educação básica". Após a avaliação das obras, são publicados o Guia de Livros Didáticos com resenhas das coleções consideradas aprovadas. O programa é executado em ciclos trienais alternados, por meio de editais considerando, em cada caso, os três níveis de ensino: ensino fundamental I; ensino fundamental II; e ensino médio. Assim, a cada ano o guia produzido é encaminhado às escolas, que escolhem, entre os títulos disponíveis, aqueles que melhor atendem ao seu projeto político pedagógico.

Assim, para a nossa análise iremos considerar apenas as coleções aprovadas no último PNLD [12]de Matemática do ensino médio realizado até então. O PNLD de Matemática (2014, p.13) declara que um dos requisitos obrigatórios para que uma coleção seja aprovada é que tal coleção deve "incluir todos os campos da Matemática escolar, a saber, números, funções, equações algébricas, geometria analítica, geometria, estatística e probabilidade." Embora este documento não inclua o Cálculo como conteúdo da matemática do ensino médio, em nenhum momento, se posiciona contrário à utilização de suas noções básicas nos conteúdos por ele considerados como apropriados para a matemática escolar. Em virtude disso, faremos uma breve análise dos livros aprovados pelo PNLD 2015 com o intuito de verificar se as noções intuitivas do Cálculo são trabalhadas ou, pelo menos, mencionadas na exposição dos conteúdos supracitados.

A seguir apresentamos as coleções aprovadas no referido PNLD a serem analisadas, que serão indicadas pela correspondente numeração abaixo:

---

[11] http://portal.mec.gov.br/index.php?Itemid=668id=12391option=com_contentview=article

[12] PNLD do Ensino Médio de 2014

1. Conexões com a Matemática de Fábio Martins de Leonardo. Editora: Moderna, 2013;

2. Matemática: Contexto & Aplicações de Luiz Roberto Dante. Editora: Ática, 2013;

3. Matemática: Paiva de Manoel Paiva. Editora: Moderna, 2013;

4. Matemática Ciência e Aplicações de Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, David Degenszajn, Roberto Périgo e Nilze de Almeida. Editora: Saraiva, 2013;

5. Matemática Ensino Médio de Kátia Stocco Smole e Maria Ignez Diniz. Editora: Saraiva, 2013;

6. Novo Olhar: Matemática de Joamir Roberto de Souza. Editora: FTD, 2013;

Todas as coleções analisadas possuem três volumes e os conteúdos que iremos analisar encontram-se distribuídos no volume 2 de cada coleção, exceto na coleção (3) onde o conteúdo referente a área do círculo está no volume 1 e os de sólidos de revolução no volume 2, enquanto na coleção (6) a área do círculo está no volume 2 e os sólidos de revolução no volume 3. Conforme mencionado anteriormente, na análise que faremos procuraremos observar se algumas ideias do Cálculo são trabalhadas na abordagem dos conteúdos. Além disso, será realizada uma leitura minuciosa para verificar a existência ou não de orientações específicas para o professor sobre o uso de noções do Cálculo na abordagem desses conteúdos. O relato de nossa análise é apresentada por coleção. Passemos a ela então.

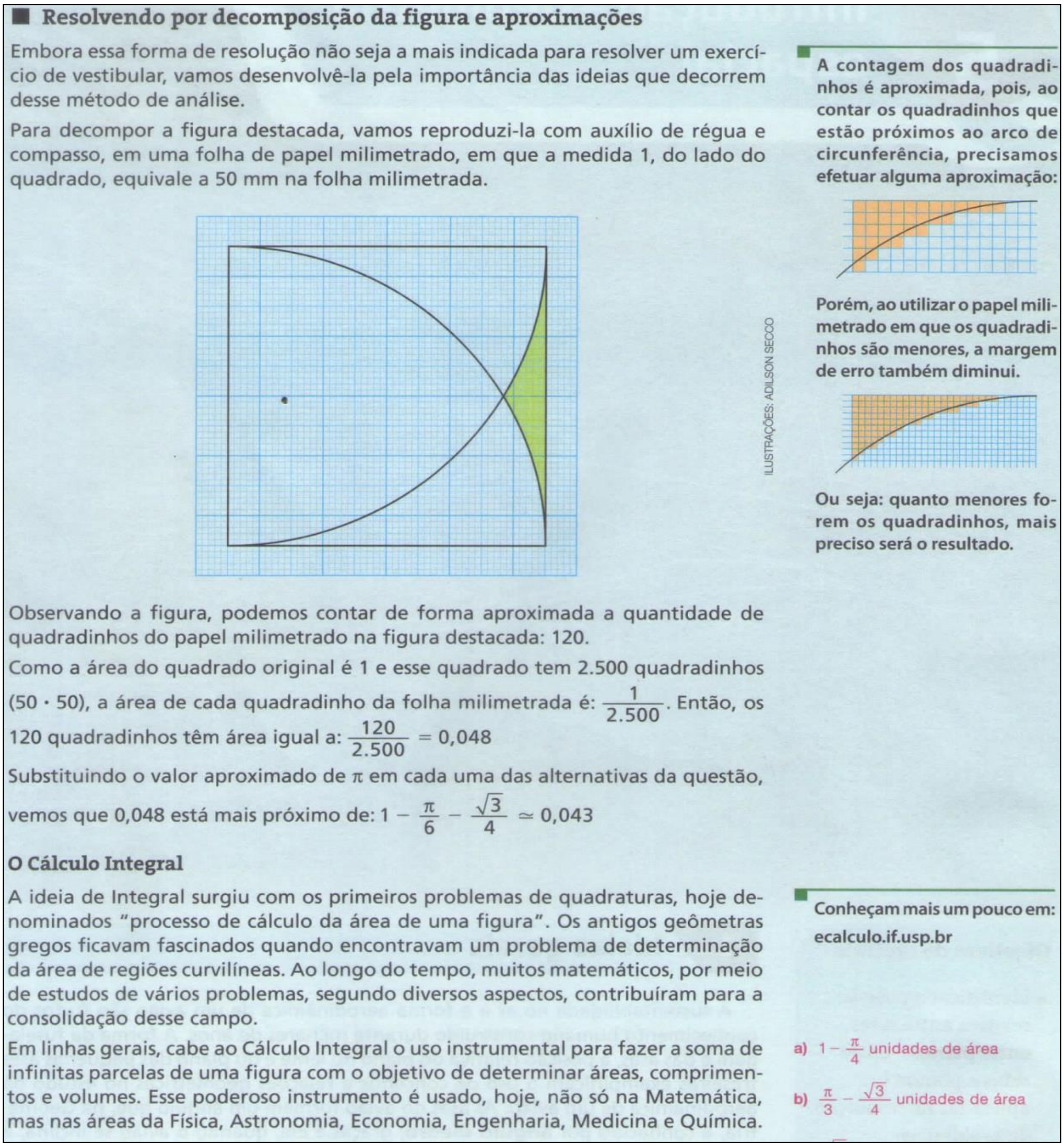
2.4.1 Análise da Coleção 1

Nessa coleção a área do círculo aparece no volume 2, na seção 3 do capítulo 4. O autor considera uma sequência de polígonos regulares inscritos no círculo e diz que à medida que o número de lados dos polígonos inscritos aumenta, mais a área desse polígono se aproxima da área do círculo, e que a medida do apótema se aproxima do raio do círculo. A partir disso, lembra que a área do polígono regular é dada pelo produto do semiperímetro pela medida do apótema e utiliza esse fato estendendo-o para a área do círculo dizendo que quando o número de lados *tende ao infinito*, o apótema do polígono tende ao raio e dessa forma conclui que a área do círculo é dada por $A_{círculo} = \pi \cdot R^2$. Observamos que o autor não diz que o perímetro do polígono tende para o comprimento da circunferência, entretanto, mesmo sem falar diretamente no conceito de limite, o mesmo é considerado quando o autor diz que o número de lados tende ao infinito.

Nas orientações para o professor não encontramos nada que se refira às noções do Cálculo nesse conteúdo. Todavia, encontramos uma referência à noção de integral em um tópico no final do capítulo 4 denominado “Resolução Comentada”, onde o autor propõe uma questão de vestibular e a resolve de duas formas distintas, sendo que em uma delas utiliza a noção de integral e ao final comenta sobre algumas de suas aplicações. Na figura 7 vemos a abordagem realizada pelo autor.

Os sólidos de revolução são estudados no capítulo 7 do volume 2. No estudo de áreas e volumes, as noções de Cálculo não são mencionadas. Os volumes do cilindro e do cone são determinados com a utilização do Princípio de Cavalieri, o qual é apresentado pelo autor como Princípio ou Postulado de Cavalieri no capítulo 6 do volume 2 na página 150. Com respeito ao estudo da esfera não é demonstrada a fórmula do volume e nem é justificada a fórmula da área.

No entanto, encontra-se algo referente ao Cálculo no guia do professor na página 126, onde o autor, fazendo referência à pergunta “qual é a área máxima que uma secção plana de uma esfera pode atingir?”, comenta que é possível refletir também sobre qual a área mínima da secção plana da mesma, e, nesse caso, sobre a conveniência da introdução de maneira informal da noção de limite nessa oportunidade.



Resolvendo por decomposição da figura e aproximações

Embora essa forma de resolução não seja a mais indicada para resolver um exercício de vestibular, vamos desenvolvê-la pela importância das ideias que decorrem desse método de análise.

Para decompor a figura destacada, vamos reproduzi-la com auxílio de régua e compasso, em uma folha de papel milimetrado, em que a medida 1, do lado do quadrado, equivale a 50 mm na folha milimetrada.

Observando a figura, podemos contar de forma aproximada a quantidade de quadradinhos do papel milimetrado na figura destacada: 120.

Como a área do quadrado original é 1 e esse quadrado tem 2.500 quadradinhos (50 · 50), a área de cada quadradinho da folha milimetrada é: $\frac{1}{2.500}$. Então, os 120 quadradinhos têm área igual a: $\frac{120}{2.500} = 0{,}048$

Substituindo o valor aproximado de π em cada uma das alternativas da questão, vemos que 0,048 está mais próximo de: $1 - \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} \simeq 0{,}043$

A contagem dos quadradinhos é aproximada, pois, ao contar os quadradinhos que estão próximos ao arco de circunferência, precisamos efetuar alguma aproximação:

Porém, ao utilizar o papel milimetrado em que os quadradinhos são menores, a margem de erro também diminui.

Ou seja: quanto menores forem os quadradinhos, mais preciso será o resultado.

O Cálculo Integral

A ideia de Integral surgiu com os primeiros problemas de quadraturas, hoje denominados "processo de cálculo da área de uma figura". Os antigos geômetras gregos ficavam fascinados quando encontravam um problema de determinação da área de regiões curvilíneas. Ao longo do tempo, muitos matemáticos, por meio de estudos de vários problemas, segundo diversos aspectos, contribuíram para a consolidação desse campo.

Em linhas gerais, cabe ao Cálculo Integral o uso instrumental para fazer a soma de infinitas parcelas de uma figura com o objetivo de determinar áreas, comprimentos e volumes. Esse poderoso instrumento é usado, hoje, não só na Matemática, mas nas áreas da Física, Astronomia, Economia, Engenharia, Medicina e Química.

Conheçam mais um pouco em: ecalculo.if.usp.br

a) $1 - \frac{\pi}{4}$ unidades de área

b) $\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}$ unidades de área

Figura 7: Fragmento da página 113 do volume 2 da coleção 1

2.4.2 Análise da Coleção 2

A área do círculo é apresentada nessa coleção no capítulo 7 do volume 2 na unidade 3. Para a determinação da área do círculo o autor procede de duas maneiras. Na primeira divide o círculo em um número par de setores circulares e forma uma espécie de paralelogramo. Em seguida utiliza a fórmula do cálculo da área do paralelogramo e conclui que a área do círculo é $A = \pi \cdot R^2$. Na segunda maneira, utiliza a ideia da sequência de polígonos regulares inscritos no círculo de forma análoga a do autor da coleção (1), fazendo uma referência indireta à noção de limite envolvida no processo, quando diz que à medida que aumentarmos suficientemente o número de lados dos polígonos a tendência é chegar ao círculo. Na figura 8, temos a primeira maneira colocada pelo autor.

Determinação da área do círculo

1ª maneira: usando círculo dividido em setores

O círculo a seguir foi dividido em um número par de setores circulares que formaram uma figura cujo contorno lembra um paralelogramo. Sua base mede a metade do comprimento da circunferência $\left(\frac{2\pi r}{2} = \pi r\right)$ e sua altura mede r.

A área dessa figura, que é também a área do círculo, é $A = (\pi r)r = \pi r^2$, isto é:

$$A = \pi r^2$$

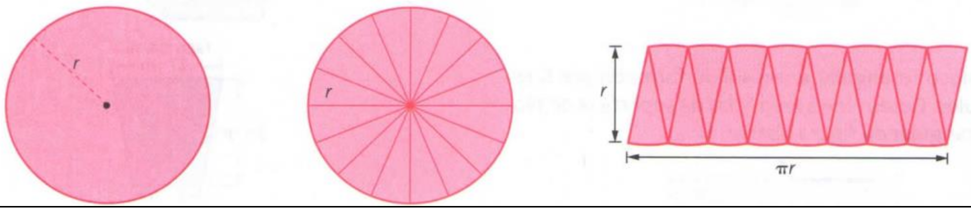


Figura 8: Fragmento da página 150 do volume 2 da coleção 2

Observamos que a primeira maneira apresentada é bastante interessante, inclusive a utilizamos no presente trabalho em uma das atividades aplicadas em uma turma de 2º ano do Ensino Médio com o objetivo de que o estudante percebesse a noção de limite. Entendemos que a noção intuitiva de limite poderia ser explicitada nessa situação, o que não é feito pelo autor. Além disso, chamamos a atenção para o fato de que no manual do professor não há indicações de se trabalhar esse conteúdo utilizando as noções do Cálculo.

Na parte relacionada aos sólidos de revolução, que se encontra no capítulo 10 da unidade 3 também do volume 2, não há menção das noções do Cálculo no estudo referente à determinação de áreas e volumes desses sólidos. No entanto, no capítulo sobre o estudo da esfera existe uma seção de leitura opcional denominada “Um pouco mais...” onde é apresentada uma justificativa, por meio da noção intuitiva de limite, para a expressão que permite calcular a área da esfera. Entretanto tal justificativa depende da expressão para o cálculo do volume da esfera. No manual do professor é fornecida uma orientação para que a idéia intuitiva de limite seja trabalhada com os alunos por meio dessa seção. Na figura 9, temos a seção mencionada, que apresenta a maneira que o autor utiliza para tratar o assunto mediante a noção intuitiva de limite.

Um pouco mais...

Área da superfície esférica

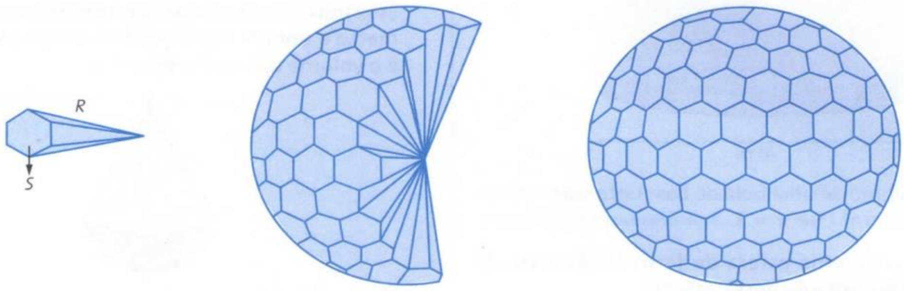
Assunto opcional

Conhecendo o volume da esfera, podemos mostrar intuitivamente por que a área da superfície esférica é:

$$A = 4\pi R^2$$

Vamos imaginar uma esfera de raio R como a reunião de sólidos que "parecem" pirâmides. De fato, esses sólidos **não são pirâmides** perfeitas, pois a base das pirâmides é plana e esses sólidos têm bases com superfície arredondada (as bases pertencem à superfície da esfera).

Contudo, tomando essas bases como sendo as menores possíveis, pode-se tratar essas superfícies arredondadas como superfícies planas, permitindo considerar os sólidos como "pirâmides". Assim, podemos admitir que o volume da esfera é equivalente à soma dos volumes de todas essas "pirâmides" de bases minúsculas.



Repare que a altura da "pirâmide" é o raio da esfera. Pensando desse modo, a superfície esférica fica dividida em um número infinitamente grande de "polígonos" (base das "pirâmides").

Digamos então que a superfície esférica tenha ficado dividida em n polígonos (n suficientemente grande), cujas áreas são $S_1, S_2, ..., S_n$.

Lembrando que o volume de cada "pirâmide" é:

$$V = \frac{Sh}{3} = \frac{SR}{3}$$

e que $S_1 + S_2 + ... + S_n = A$ é a área da superfície esférica, vem:

$$V = \frac{1}{3}S_1R + \frac{1}{3}S_2R + ... + \frac{1}{3}S_nR = \frac{1}{3}(S_1 + S_2 + ... + S_n)R = \frac{1}{3}AR$$

ou seja:

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{3}AR \Rightarrow A = 4\pi R^2$$

Logo, a área da superfície esférica de raio R é:

$$A = 4\pi R^2$$

Fique atento!
Essa demonstração é meramente intuitiva.
Ela ajuda a entender melhor a conexão entre área e volume de uma esfera.
A rigor, precisaríamos usar a noção de limite para fazer a demonstração matemática.

Figura 9: Fragmento da página 234 do volume 2 da coleção 2

Para as demonstrações das expressões do volume do cilindro, do cone e da esfera é utilizado o Princípio de Cavalieri (apresentado no capítulo 9 do volume 2 na página 200). No entanto, o autor chama a atenção do leitor para o fato de que o Princípio de Cavalieri pode ser demonstrado e que o mesmo será considerado verdadeiro, mesmo sem a demonstração.

2.4.3 Análise da Coleção 3

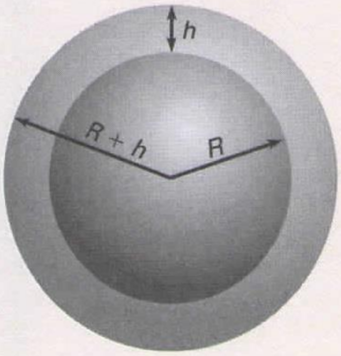
O conteúdo referente à área do círculo encontra-se no volume 1 da coleção no capítulo 4. O autor introduz o assunto, considerando um polígono regular de n lados inscrito em um círculo de raio r, a seguir menciona o fato de que as diagonais que passam pelo centro do polígono dividem-no em n triângulos isósceles, calculando assim a área do polígono a partir desses triângulos. Após isso, faz alusão a noção de limite quando diz que fazendo o número de lados n aumentar indefinidamente (n tender para o infinito), o perímetro do polígono tenderá a se igualar ao perímetro da circunferência, que a altura de cada triângulo tenderá a se igualar ao raio r da circunferência e que a área do polígono tende a se igualar a área do círculo, donde após algumas manipulações algébricas e as considerações feitas conclui que a área do círculo é $A = \pi \cdot r^2$.

No que tange aos sólidos de revolução, encontrado no capítulo 14 do volume 2, o autor determina o volume do cilindro, do cone e da esfera utilizando o Princípio de Cavalieri (apresentado no capítulo 13 na página 239), o qual é apresentado pelo autor como uma proposição.

Contudo, nas orientações para o professor encontramos algo que remete à utilização do conceito de limite e também do conceito de derivada (embora o autor não mencione o termo derivada) para a determinação da área da esfera. A área da superfície esférica é calculada então como a taxa de variação instantânea do volume em relação ao raio – $\left(\frac{V(R+h)-V(R)}{h}\right)$, quando *h* tende a 0.

Cabe observar que, tal como autor da coleção (2), o autor desta obra também utiliza a noção de limite para a dedução da área da superfície esférica. A figura 10 apresenta o procedimento adotado pelo autor.

Raciocinando de maneira análoga, consideremos duas superfícies esféricas de mesmo centro e raios R e $R + h$, com $h > 0$.



Sendo B a área da superfície esférica de raio R, o volume V limitado pelas duas superfícies esféricas é aproximadamente igual a

$$V'' = Bh \text{ (I)}$$

Podemos calcular precisamente o volume V do seguinte modo:

$$V = \frac{4\pi(R + h)^3}{3} - \frac{4\pi R^3}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \frac{4\pi(R^3 + 3R^2h + 3Rh^2 + h^3)}{3} - \frac{4\pi R^3}{3}$$

$$\therefore V = \frac{4\pi h}{3}(3R^2 + 3Rh + h^2) \text{ (II)}$$

Para h "tendendo" a zero, as expressões (I) e (II) "tendem" a se igualar, ou seja:

$$V = V'' \Rightarrow \frac{4\pi h}{3}(3R^2 + 3Rh + h^2) = Bh$$

$$\therefore \frac{4\pi}{3}(3R^2 + 3Rh + h^2) = B$$

Como h "tende" a zero, a soma $3Rh + h^2$ também "tende" a zero e, portanto, a área B "tende" a:

$$B = \frac{4\pi}{3} \cdot 3R^2\text{, ou seja: } B = 4\pi R^2$$

Desse modo, provamos que:

A área A de uma superfície esférica de raio R é $A + 4\pi R^2$.

Figura 10: Fragmento da página 49 do Suplemento com Orientações para o professor (volume 2 da coleção 3)

2.4.4 Análise da Coleção 4

Com respeito à área do círculo, cujo conteúdo é encontrado no capítulo 8 do volume 2, os autores da coleção (4) fazem o mesmo que os autores anteriormente analisados: consideram uma sequência de polígonos regulares inscritos no círculo, afirmando que quando o número de lados do polígono inscrito for extremamente grande, o perímetro do polígono será aproximadamente igual ao comprimento da circunferência do círculo, o apótema será aproximadamente igual ao raio do círculo e, por conseguinte, a área do círculo será dada então pelo produto entre o raio e o semiperímetro do círculo. Na abordagem feita, os autores utilizam a noção de limite, porém sem fazer menção direta e explícita ao seu uso. No manual para o professor não encontramos nada que estimule o professor no sentido de aproveitar a oportunidade proporcionada pelo conteúdo para discutir o conceito de limite com os alunos.

Já com relação ao estudo dos sólidos de revolução: o cilindro, o cone e a esfera, são estudados respectivamente nos capítulos 12, 13 e 14 do volume 2. Os autores recorrem ao Princípio de Cavalieri (que aparece no capítulo 10 do volume 2 na página 195) para a determinação das expressões que permitem calcular os volumes do cilindro, do cone e da esfera. Foram feitas referências às noções do Cálculo na justificativa da determinação da área da esfera, onde foram utilizados os mesmos argumentos dos autores das coleções (2) e (3), entretanto, com uma diferença muito salutar, pois esses autores colocam a justificativa dada como uma leitura obrigatória para o aluno que estudar o livro, e não na forma de leitura opcional como no caso do autor da coleção (2) e nem como uma orientação para o professor como é o caso do autor da coleção (3).

Cabe destacar que, em outra parte da obra, foi feita menção ao uso de derivadas para a determinação do valor mínimo de uma função oriunda de um problema relacionado com o custo de uma embalagem cilíndrica de um determinado produto. Mas essa menção é feita no manual do professor e é indicada pelos autores como um complemento para o professor e não para ser trabalhada com os alunos.

2.4.5 Análise da Coleção 5

Nessa coleção o conteúdo sobre a área do círculo aparece na parte 3, unidade 9 do volume 2 da coleção. A fórmula da área do círculo é apresentada como sendo um conteúdo que já foi visto e será relembrado. Nenhuma justificativa é dada para a mesma.

O conteúdo referente aos sólidos de revolução encontram-se na parte 3, unidade 9 do volume 2. As autoras não utilizam as noções do Cálculo na parte referente aos volumes do cilindro, do cone e da esfera, nem ao menos utilizam o Princípio de Cavalieri (que é citado na parte 3 da unidade 9 do volume 2 na página 194) para demonstrar as fórmulas dos volumes, como foi feito nas coleções dos autores que foram analisadas, elas apenas comentam que pode-se demonstrar com o Princípio de Cavalieri as fórmulas para os volumes do cilindro e do cone. No caso da esfera, fazem menção a um método utilizado por Arquimedes para demonstrar que o volume de uma esfera de raio R é igual a quatro vezes o volume de um cone de raio da base e altura iguais a R, e daí assumem a fórmula do volume da esfera como sendo verdadeira.

Ainda no que tange ao Princípio de Cavalieri, as autoras comentam no manual do professor na página 362 que o mesmo pode ser demonstrado. A única menção no livro de algo referente às noções do Cálculo aparece no final da parte 3 da unidade 9, que também utiliza a mesma ideia intuitiva de limite, apresentada pelos autores das coleções (2), (3) e (4) para deduzir a expressão para o cálculo da área da esfera. Todavia, é importante frisar que como na coleção (4), a leitura de tal justificativa é obrigatória, e, além disso, comenta que a ideia utilizada nessa dedução é devida ao matemático grego Arquimedes.

2.4.6 Análise da Coleção 6

Nessa coleção o assunto área do círculo está presente na unidade 4 do volume 2, o autor utiliza uma ideia semelhante a do autor da coleção (2); divide o círculo em 20 setores iguais e forma uma figura que lembra um paralelogramo, cuja altura é aproximadamente o raio do círculo e cuja base é aproximadamente metade do comprimento da circunferência, daí utiliza a fórmula para o cálculo da área do paralelogramo para concluir a fórmula da área do círculo. Esse autor não utiliza a argumentação dos polígonos regulares inscritos no círculo para a dedução da fórmula da área do mesmo. No entanto, apresenta um exercício (exercício 30 da unidade 4) onde a noção de limite é abordada de forma intuitiva. Além disso, nas orientações para o professor, na página 76, o autor refere-se a este mesmo exercício como uma oportunidade para que seja trabalhada a ideia intuitiva de limite com os alunos e orienta o professor a propor outras situações aos alunos onde essa ideia pode aparecer.

Com respeito aos conteúdos sobre os sólidos de revolução, os mesmos são apresentados no capítulo 4 da unidade 2 do volume 3 da coleção. As fórmulas dos volumes do cilindro, do cone e da esfera, são demonstradas com a utilização do Princípio de Cavalieri, o qual é apresentado no capítulo 3 da unidade 2 do volume 3, e que, pode ser demonstrado. Entretanto, com relação ao volume do cone o autor, antes de usar o Princípio de Cavalieri, não justifica o fato, como os demais autores justificam, de que as áreas das secções dos sólidos por um plano qualquer paralelo ao plano que contém as bases do cone e da pirâmide são equivalentes. As noções do Cálculo não aparecem no tocante ao volume dos sólidos, sendo que na dedução da área da superfície esférica o autor apresenta a mesma justificativa dada pelos autores das coleções (2), (3), (4) e (5). Nas orientações para o professor, não há nenhuma recomendação com relação à introdução das ideias do Cálculo na apresentação dos conteúdos.

2.4.7 Observações Sobre as Análises das Coleções

No que se refere às análises realizadas observamos, no que diz respeito à área do círculo, a atitude quase unânime entre os autores de utilizar o método de exaustão modificado, que considera uma sequência de polígonos regulares inscritos e a noção intuitiva de limite. Das seis coleções analisadas, apenas uma, a coleção 6, não utiliza este procedimento para justificar a fórmula da área do círculo, todavia em um de seus exercícios trabalha com essa ideia. Acreditamos que a abordagem realizada pelos autores proporciona ao professor uma boa oportunidade para trabalhar algumas ideias inerentes ao Cálculo com seus alunos, o método de exaustão e a ideia intuitiva de limite.

Já com relação ao assunto volume dos sólidos de revolução entendemos que todas as coleções evitaram menção direta e uso explícito das ideias do Cálculo - sequer foi ventilada a necessidade do Cálculo para se calcular os volumes desses sólidos. Contudo, destacamos o fato de que nas seis coleções analisadas o Princípio de Cavalieri é enunciado de maneira correta, e o mesmo é aplicado acertadamente na demonstração das fórmulas de volume dos sólidos de revolução, com exceção da coleção 5 que não utiliza o Princípio em nenhuma demonstração e da coleção 6 que utiliza o Princípio no volume do cone sem justificar que as áreas das secções da pirâmide e do cone por um plano qualquer paralelo ao plano que contém as bases do cone e da pirâmide são equivalentes. É importante também ressaltar a justificativa dada para a área da superfície esférica, através da noção intuitiva de limite presente nas coleções 2, 3, 4, 5 e 6. Destaque-se as coleções 4 e 5 onde tal justificativa é apresentada diretamente no corpo da obra destinada aos alunos como leitura obrigatória.

Concluímos que nos conteúdos analisados nos livros didáticos aprovados no PNLD 2015 a noção de limite encontra-se muito presente no que se refere ao cálculo de áreas. Quanto ao conteúdo de volumes, observa-se uma prevalência do uso axiomático do Princípio de Cavalieri em detrimento de sua contextualização no âmbito do Cálculo ou mesmo do uso de outras ideias do Cálculo. Ainda assim, vemos que existe, de certa forma, um suporte para se trabalhar pelo menos com a ideia de limite.

Como foi visto no capítulo 1 do presente trabalho o Princípio de Cavalieri é um teorema que pode ser demonstrado com recursos oriundos do Cálculo. Nesse ínterim é oportuno questionar: Ao utilizarmos a abordagem axiomática do Princípio de Cavalieri como o único ponto de partida no estudo dos volumes, será que não estamos privando os alunos de uma compreensão efetiva do processo que dá origem e significado às fórmulas que permitem calcular os volumes dos sólidos de revolução estudados? Nesse sentido, os livros didáticos aprovados pelo PNLD 2015 não fornecem o suporte necessário para uma abordagem de volumes de sólidos de revolução no âmbito das ideias do Cálculo, e, nesse caso, o professor, que quiser trabalhar com tais noções nesse conteúdo, terá que se valer de outras fontes para auxiliá-lo.

3. PROPOSTAS DE ATIVIDADES

Neste capítulo iremos propor algumas atividades para o estudo de volumes de sólidos de revolução (cilindro, cone e esfera) e da área do círculo, que considere duas ideias centrais e históricas do cálculo integral: a noção de limite e o método de exaustão. A área do círculo foi considerada por ser um tema recorrente quando se trata de volumes de sólidos de revolução. Não abordamos, entretanto, os tópicos comprimento da circunferência e volumes de prismas e pirâmides. Estes foram assumidos como pré-requisitos para essas atividades.

Para cada um dos tópicos selecionados – área do círculo, volume do cilindro, volume do cone e volume da esfera – foram elaboradas fichas de atividades e aplicativos construídos com software *GeoGebra* 5.0, 3D[13].

Devido à extensão do conteúdo das fichas de atividades, optou-se por colocá-las nos Anexos da dissertação. Sugerimos, no entanto, para uma melhor compreensão do que será relatado, uma leitura preliminar de cada ficha de atividade. Em seguida apresentaremos para cada tópico, organizados em seções à parte, uma descrição sintética das atividades elaboradas, seus objetivos, bem como o ano de escolaridade adequado, tempo previsto, pré-requisitos e os recursos necessários para a realização das mesmas. Observamos desde já que todas as atividades propostas foram aplicadas em uma turma de 2º ano do Ensino Médio de uma escola pública estadual.

3.1 ÁREA DO CÍRCULO (ver ANEXO I)

3.1.1 Objetivos

O objetivo dessa atividade é fazer com que o aluno seja capaz de concluir mediante a noção intuitiva de limite e o método de exaustão que a área de um círculo de raio R é dada por $A = \pi \cdot R^2$.

[13] Disponível em http://www.geogebra.org/

3.1.2 Descrição da Atividade

A atividade é composta por seis exercícios onde em cada exercício é utilizado um arquivo do *GeoGebra* e pode ser realizada individualmente ou em dupla. Na atividade o conceito de limite é explorado intuitivamente com o auxílio de recurso dinâmico do software *GeoGebra*.

No **Exercício 1** é utilizado o arquivo **Lados_dos_Poligonos_Inscritos.ggb** para apresentar, de forma intuitiva o conceito de limite. Por meio da manipulação do arquivo o aluno perceberá que à medida que o número de lados n tender ao infinito, a medida do ângulo central e do lado do polígono tenderão para zero. Além disso, é nesse exercício que é introduzida a notação de limite que será utilizada no decorrer da atividade. A figura 11 mostra a janela gráfica do arquivo relativo ao **Exercício 1**, em três situações distintas.

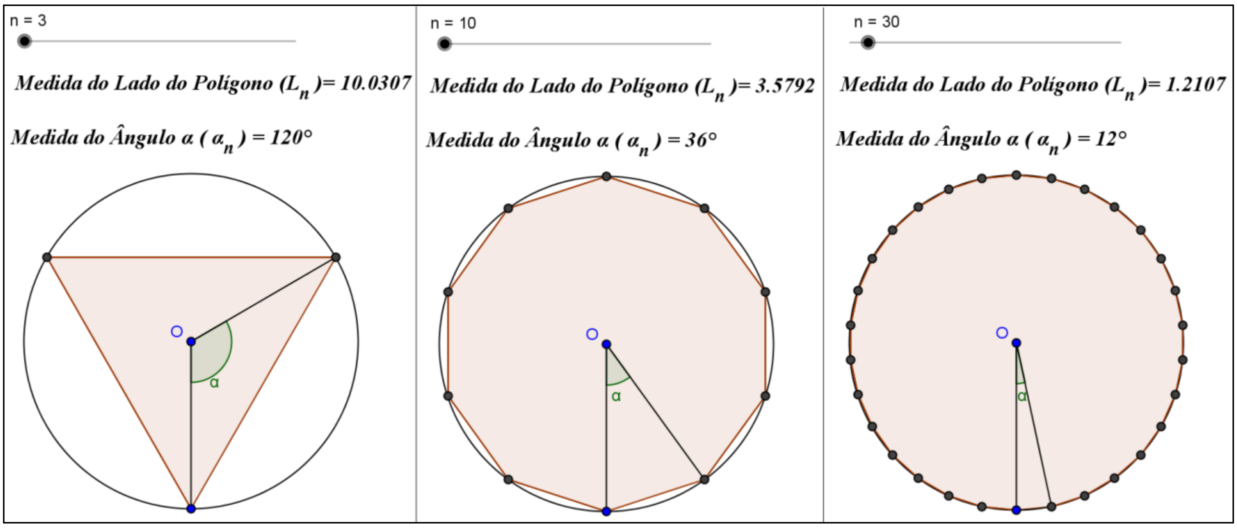


Figura 11: Ilustração de três situações da janela gráfica do arquivo Lados_dos_Poligonos_Inscritos.ggb

No **Exercício 2** o aluno será levado a concluir mediante a visualização do arquivo **Apotemas_dos_Poligonos_Inscritos.ggb** e do conceito de limite, que a medida do apótema do polígono regular inscrito tenderá para a medida do raio do círculo quando o número de lados do polígono tender ao infinito. A figura 12 mostra a janela gráfica do arquivo relativo ao **Exercício 2**, em três situações distintas.

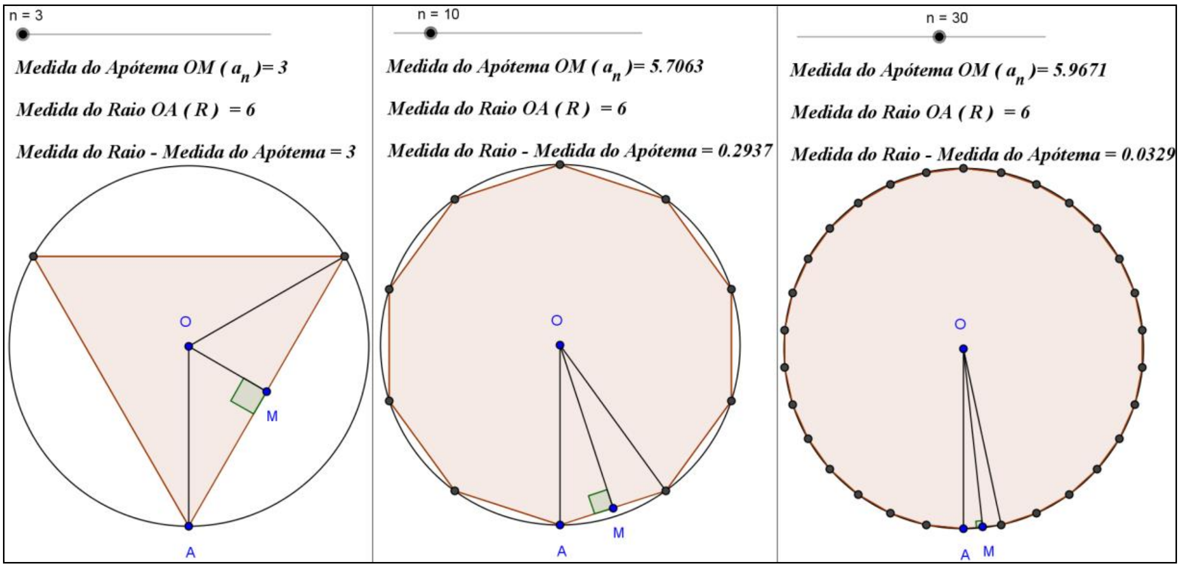


Figura 12: Ilustração de três situações da janela gráfica do arquivo Apotemas_dos_Poligonos_Inscritos.ggb

No **Exercício 3** mediante o conceito de limite e a visualização do arquivo **Comprimento_da_Circunferencia.ggb**, o aluno concluirá que o perímetro do polígono regular inscrito tenderá para o comprimento da circunferência quando o número de lados tender ao infinito. A figura 13 mostra a janela gráfica relativa ao **Exercício 3**, em três situações distintas.

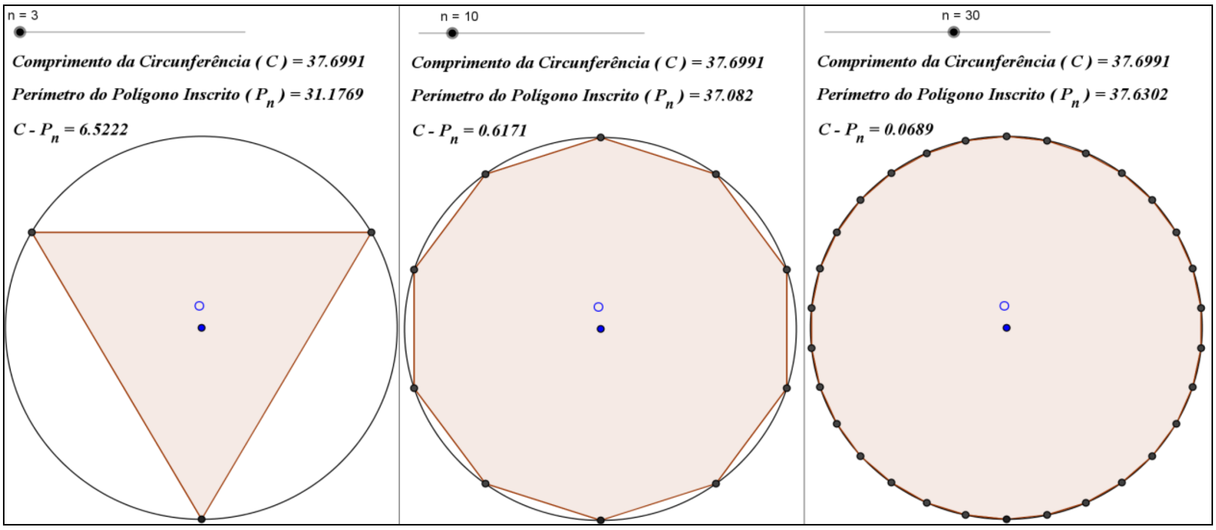


Figura 13: Ilustração de três situações da janela gráfica do arquivo Comprimento_da_circunferencia.ggb

No **Exercício 4** o aluno perceberá através do arquivo **Area_do_circulo.ggb** e pelo conceito de limite, que a área do polígono regular inscrito tenderá para a área do círculo. A figura 14 mostra a janela gráfica do arquivo relativo ao **Exercício 4**, em três situações distintas.

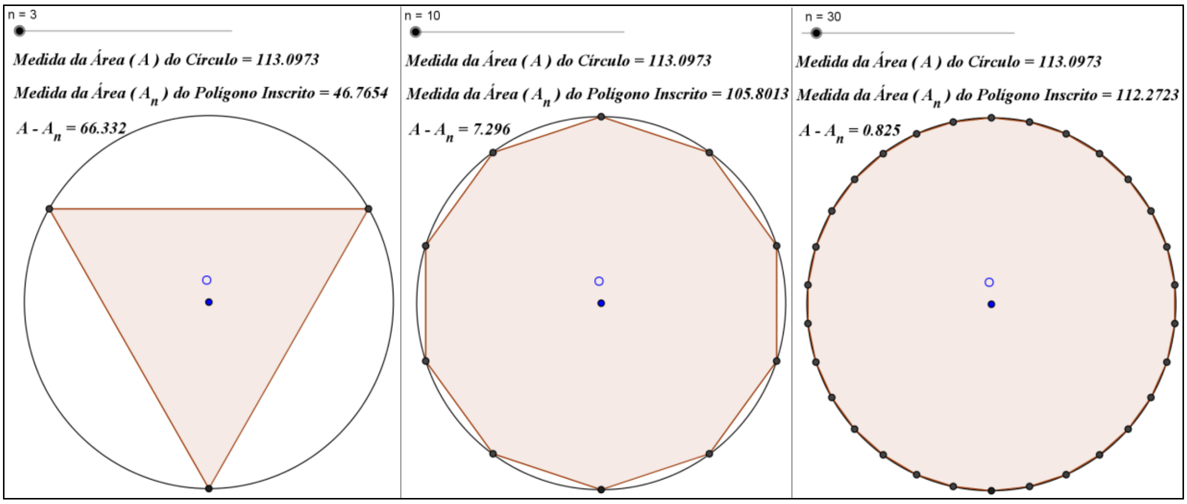


Figura 14: Ilustração de três situações da janela gráfica do arquivo Area_do_circulo.ggb

No **Exercício 5**, com o a auxílio do arquivo **Arquimedes_1. ggb**, o aluno será levado a expressar a área do polígono regular de n lados, em função do seu perímetro e do seu apótema. A figura 15 mostra a janela do arquivo relativo ao **Exercício 5**, em duas situações distintas.

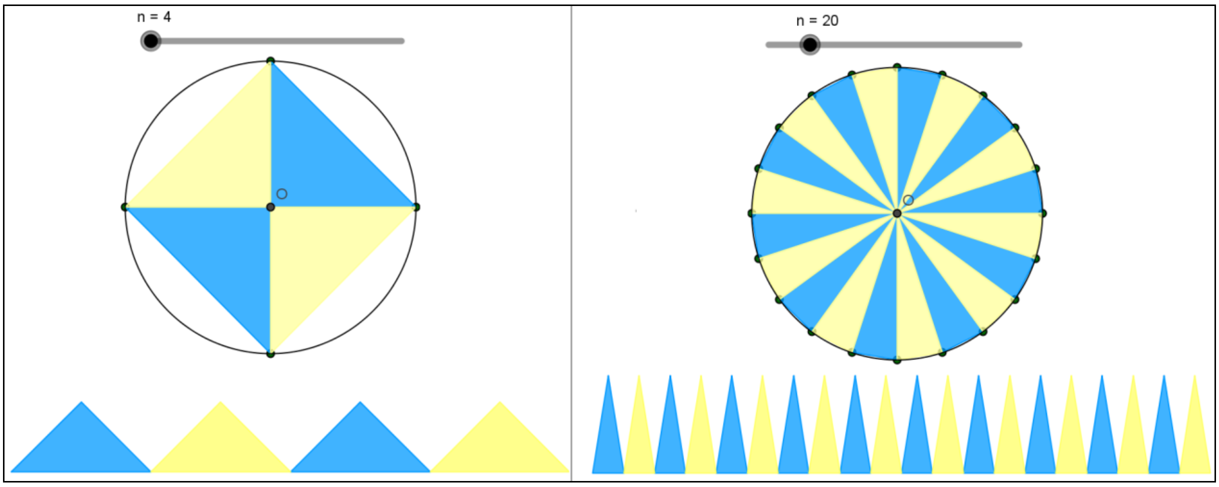


Figura 15: Ilustração de duas situações da janela gráfica do arquivo Arquimedes_1.ggb

Já o **Exercício 6** foi dividido em duas etapas. Na verdade as duas etapas consistem em duas formas distintas de se concluir que a expressão da área do círculo de raio R é dada por $A = \pi \cdot R^2$. Na primeira forma (**Exercício 6.1**), o estudante é levado inicialmente a atentar para o **Exercício 4**, onde concluiu que a área do polígono inscrito tende para a área do círculo quando o número de lados do polígono tender ao infinito. A partir daí, pela utilização da expressão da área do polígono regular em função do perímetro e do apótema, obtida no **Exercício 5**, e pela passagem ao limite nessa expressão, o estudante irá observar que os perímetros dos polígonos inscritos tendem para o comprimento da circunferência (**Exercício 3**) e que o apótema tende para o raio do círculo (**Exercício 2**) para então concluir que a expressão da área do círculo é $A = \pi \cdot R^2$, onde R é a medida do raio do círculo. A figura 16 mostra um fragmento do **Exercício 6.1** que resume o que foi dito acima. Na figura 16, A_n, P_n e a_n, são respectivamente, a área, o perímetro e o apótema do n-ésimo polígono regular da sequência inscrito no círculo e A é a área do círculo.

$$A = \lim A_n = \lim \frac{P_n \cdot a_n}{2} = \frac{\lim P_n \cdot \lim a_n}{2} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

Figura 16: Fragmento do Exercício 6.1 da Atividade Área do círculo

Na segunda forma (**Exercício 6.2**), é utilizado o arquivo **Arquimedes_2.ggb** por intermédio do qual o aluno expressará a base do “retângulo” que aparece no arquivo em função do perímetro do polígono regular inscrito, para então concluir com o auxílio deste arquivo, do **Exercício 2**, do **Exercício 3** e do conceito de limite que a área do círculo de raio R é $A = \pi \cdot R^2$. A figura 17 mostra a janela do arquivo relativo ao **Exercício 6.2**, em três situações distintas.

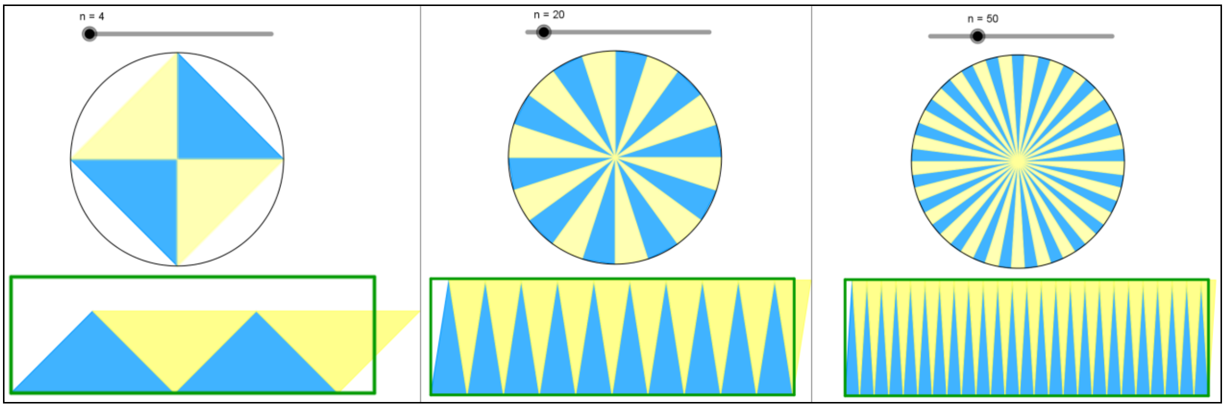


Figura 17: Ilustração de três situações da janela gráfica do arquivo Arquimedes_2.ggb

3.1.3 Ano de Escolaridade Indicado

Essa atividade pode ser aplicada para estudantes do 9º ano do ensino fundamental e do 2º ano do Ensino Médio.

3.1.4 Tempo Previsto

O tempo previsto para a realização dessa atividade é de duas aulas de 45 minutos cada (90 minutos).

3.1.5 Pré-Requisitos

Para a realização dessa atividade é importante que os alunos saibam que o comprimento de uma circunferência de raio R é dado por $C = 2 \cdot \pi \cdot R$. Além disso, é importante que saibam calcular a área de um triângulo quando se conhece a medida de sua base e de sua altura, calcular a área de um retângulo dada sua base e sua altura e que conheçam a definição de polígono regular.

3.1.6 Recursos Necessários

A fim de que a atividade seja realizada são necessários os seguintes recursos:

- Ficha de atividade contendo o enunciado dos exercícios da atividade;
- Lápis ou caneta;
- Computadores com o software *GeoGebra 3D* instalado;
- Projetor multimídia;
- Arquivo eletrônico **Lados_dos_Poligonos_Inscritos.ggb**;
- Arquivo eletrônico **Apotemas_dos_Poligonos_Inscritos.ggb**;
- Arquivo eletrônico **Comprimento_da_circunferencia.ggb**;
- Arquivo eletrônico **Area_do_circulo.ggb**;
- Arquivo eletrônico **Arquimedes_1.ggb**;
- Arquivo eletrônico **Arquimedes_2.ggb**;

3.2 VOLUME DO CILINDRO (Ver ANEXO II)

3.2.1 Objetivos

Essa atividade tem por objetivo fazer com que o aluno seja capaz de entender por meio da noção intuitiva de limite e do método de exaustão que o volume de um cilindro circular de raio da base R e altura H é dado por $V = \pi \cdot R^2 \cdot H$.

3.2.2 Descrição da Atividade

A atividade é composta por três exercícios e um arquivo do *GeoGebra 3D*, podendo ser realizada individualmente ou em dupla. Nessa atividade o conceito de limite é explorado intuitivamente com o auxílio do software de geometria dinâmica *GeoGebra 3D*.

No **Exercício 1,** considera-se uma tabela em que, para alguns valores de n, $n > 3$, o aluno deverá determinar, e generalizar, a expressão do volume V_n de um prisma regular de altura H cuja base é um polígono regular de n lados, em função apenas da área A_n de sua base e de sua altura H.

Auxiliado pelo arquivo **Prismas_Regulares_Inscritos_no_Cilindro.ggb**, no **Exercício 2,** o aluno, a partir do controle de uma sequência de prismas regulares inscritos em um cilindro de raio da base R e altura H, é levado a concluir que a sequência de volumes dos prismas regulares inscritos no cilindro vai tender para o volume do cilindro quando o número de lados dos polígonos da base dos prismas tender ao infinito. A figura 18 mostra três situações distintas da janela gráfica do arquivo utilizado no exercício.

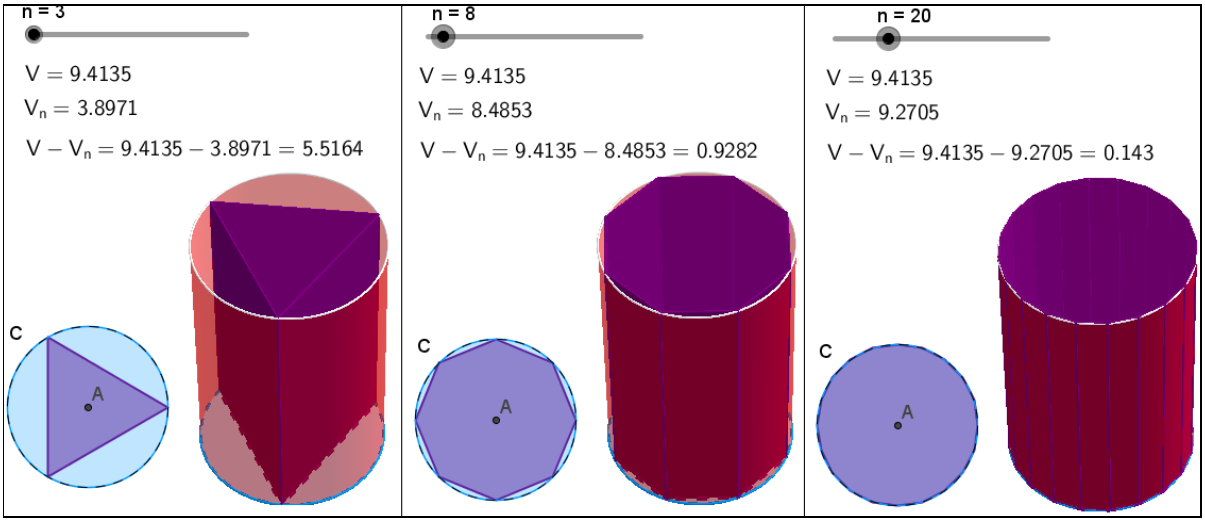


Figura 18: Ilustração de três situações distintas da janela gráfica do arquivo Prismas_Regulares_Inscritos_no_Cilindro.ggb

Já no **Exercício 3** o estudante é levado a articular e sistematizar os resultados obtidos nos Exercícios 1 e 2 para obter a fórmula do volume do cilindro. Assim, do **Exercício 2**, onde concluiu que a sequência de volumes dos prismas inscritos tende para o volume do cilindro quando o número de lados dos polígonos das bases dos prismas tende para o infinito, da expressão do volume do prisma regular em função da sua área da base e da sua altura, obtida no **Exercício 1**, do processo de aproximação realizado na Atividade do Círculo e, por fim, pela passagem ao limite o estudante concluirá que o volume do cilindro é dado por $V = \pi \cdot R^2 \cdot H$. A figura 18 mostra um fragmento do **Exercício 3** que procura sistematizar o raciocínio descrito acima. Na figura 19, V_n, A_n e H, são respectivamente, o volume, a área do polígono da base e a altura do n-ésimo prisma regular inscrito no cilindro de volume V.

$$V \;=\; \lim V_n \;=\; \lim A_n \cdot H \;=\; \lim A_n \cdot \lim H \;=\; H \cdot \lim A_n \;=\; \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

Figura 19: Fragmento do Exercício 3 da Atividade Volume do cilindro

3.2.3 Ano de Escolaridade Indicado

Essa atividade é indicada para estudantes do 2º ano do Ensino Médio. Dependendo da maturidade da turma, e com devidas adaptações, pode ser aplicada também em uma turma do 9º ano do Ensino Fundamental.

3.2.4 Tempo Previsto

O tempo de duração da atividade é de aproximadamente uma aula (45 minutos).

3.2.5 Pré-Requisitos

Para a realização da atividade é necessário que o aluno tenha realizado a atividade **Área do Círculo**, saiba a definição de prisma regular e calcular o seu volume quando se conhece a sua base e sua altura.

3.2.6 Recursos Necessários

A fim de que a atividade seja realizada são necessários os seguintes recursos:

- Ficha de atividade contendo o enunciado dos exercícios da atividade;
- Lápis ou caneta;
- Computadores com o software *GeoGebra 3D* instalado;
- Projetor multimídia;
- Arquivo eletrônico **Prismas_Regulares_Inscritos_no_Cilindro.ggb**.

3.3 VOLUME DO CONE (Ver ANEXO III)

3.3.1 Objetivos

O objetivo dessa atividade é fazer com que o estudante seja capaz de entender por meio da ideia intuitiva de limite e do método de exaustão que o volume de um cone circular de raio da base R e altura H é dado por $V = \frac{1}{3}\pi \cdot R^2 \cdot H$.

3.3.2 Descrição da Atividade

A atividade é composta por três exercícios e um arquivo do *GeoGebra 3D*, podendo ser realizada individualmente ou em dupla. Nessa atividade o conceito de limite é explorado intuitivamente com o auxílio do software de geometria dinâmica *GeoGebra 3D*.

No **Exercício 1,** considera-se uma tabela em que, para alguns valores de n, $n > 3$, o aluno deverá determinar, e generalizar, a expressão do volume V_n de uma pirâmide regular de altura H cuja base é um polígono regular de n lados, em função apenas da área A_n de sua base e de sua altura H. No **Exercício 2**, auxiliado pelo arquivo **Piramides_Regulares_Inscritas_no_Cone.ggb**, o aluno, a partir do controle de uma sequência de pirâmides regulares inscritas em um cilindro de raio da base R e altura H, é levado a concluir que a sequência de volumes das pirâmides regulares inscritas no cone vai tender para o volume do cone quando o número de lados dos polígonos da base das pirâmides tender ao infinito. A figura 20 mostra três situações distintas da janela gráfica do arquivo utilizado no exercício.

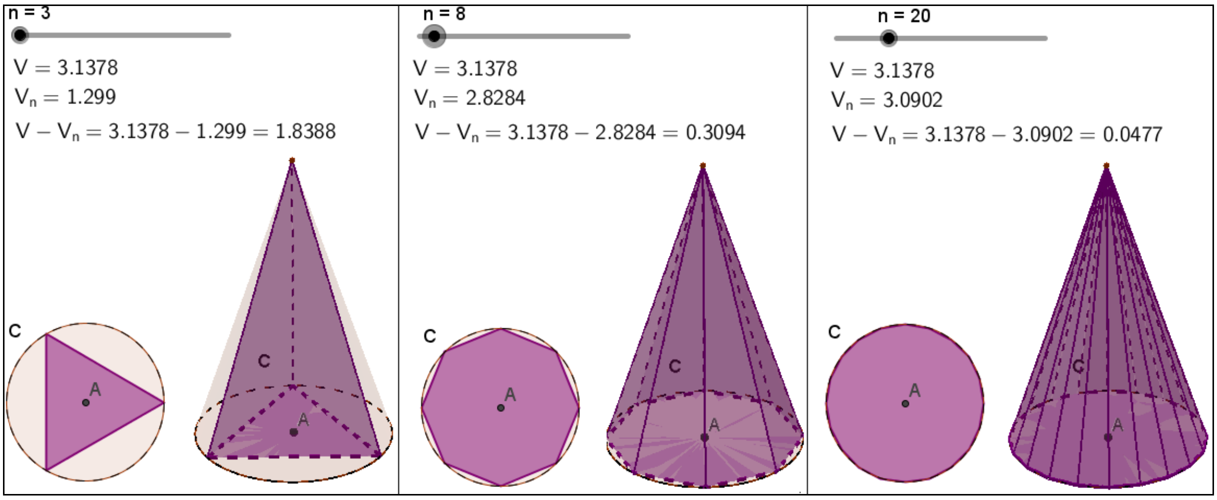


Figura 20: Ilustração de três situações distintas da janela gráfica do arquivo Piramides_Regulares_Inscritas_no_Cone.ggb

Já no Exercício 3 o estudante é levado a articular e sistematizar os resultados obtidos nos Exercícios 1 e 2 para obter a fórmula do volume do cone. Assim, do Exercício 2, onde concluiu que o a sequência de volumes das pirâmides inscritas tende para o volume do cone quando o número de lados dos polígonos das bases dos prismas tende para o infinito, da expressão do volume da pirâmide regular em função da sua área da base e da sua altura, obtida no Exercício 1, do processo de aproximação realizado na Atividade do Círculo e, por fim, pela passagem ao limite, o estudante concluirá que o volume do cone é dado por $V = \frac{1}{3}\pi \cdot R^2 \cdot H$. A figura 21 mostra um fragmento do Exercício 3 que procura sistematizar o raciocínio escrito acima. Na figura 21, V_n, A_n e H, são respectivamente, o volume, a área do polígono da base e a altura da n-ésima pirâmide regular inscrita no cone de volume V.

$$V = \lim V_n = \lim \frac{1}{3} \cdot A_n \cdot H = \frac{1}{3} \cdot H . \lim A_n = \underline{\hspace{5cm}} = \underline{\hspace{3cm}}$$

Figura 21: Fragmento do Exercício 3 da Atividade Volume do cone

3.3.3 Ano de Escolaridade Indicado

Essa atividade é indicada para estudantes do Ensino Médio. Dependendo da maturidade da turma, e com devidas adaptações, pode ser aplicada também em uma turma do 9º ano do Ensino Fundamental.

3.3.4 Tempo Previsto

O tempo de duração da atividade é de aproximadamente uma aula (45 minutos).

3.3.5 Pré-Requisitos

Para a realização dessa atividade é necessário que o aluno tenha realizado a atividade **Área do círculo**, saiba a definição de pirâmide regular e calcular o seu volume quando se conhece a sua base e sua altura.

3.3.6 Recursos Necessários

A fim de que a atividade seja realizada são necessários os seguintes recursos:

- Ficha de atividade contendo o enunciado dos exercícios da atividade;
- Lápis ou caneta;
- Computadores com o software *GeoGebra 3D* instalado;
- Projetor multimídia;
- Arquivo eletrônico **Piramides_Regulares_Inscritas_no_Cone.ggb**;

3.4 ATIVIDADE PRELIMINAR PARA O ESTUDO DO VOLUME DA ESFERA (Ver ANEXO IV)

3.4.1 Objetivos

O objetivo dessa atividade é fazer com que o aluno entenda um resultado preliminar que será utilizado na atividade **Volume da esfera**, a saber: $\lim\left[\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{2}{n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{n}\left(\frac{n}{n}\right)^2\right]=\frac{1}{3}$.

3.4.2 Descrição da Atividade

Essa atividade consiste de dois exercícios que utilizam dois arquivos do GeoGebra, e que podem ser resolvidos individualmente ou em dupla.

No **Exercício 1** pretende-se com a manipulação do arquivo **Escada_no_Quadrado.ggb** que o aluno conclua que $\lim\left[\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n}\left(\frac{n}{n}\right)\right]=\frac{1}{2}$. A janela gráfica do arquivo **Escada_no_Quadrado.ggb** apresenta um quadrado de lado unitário, dividido por uma de suas diagonais em dois triângulos retângulos, onde em um deles é observado um polígono verde em forma de “escada” cuja área, é dada pela expressão $\left[\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n}\left(\frac{n}{n}\right)\right]$, onde $\frac{1}{n}$ é a medida do lado dos “quadradinhos” que compõem o polígono. A área deste polígono é uma aproximação por excesso da área do triângulo retângulo que é igual a $\frac{1}{2}$. A figura 22 mostra a janela gráfica do arquivo para três situações distintas.

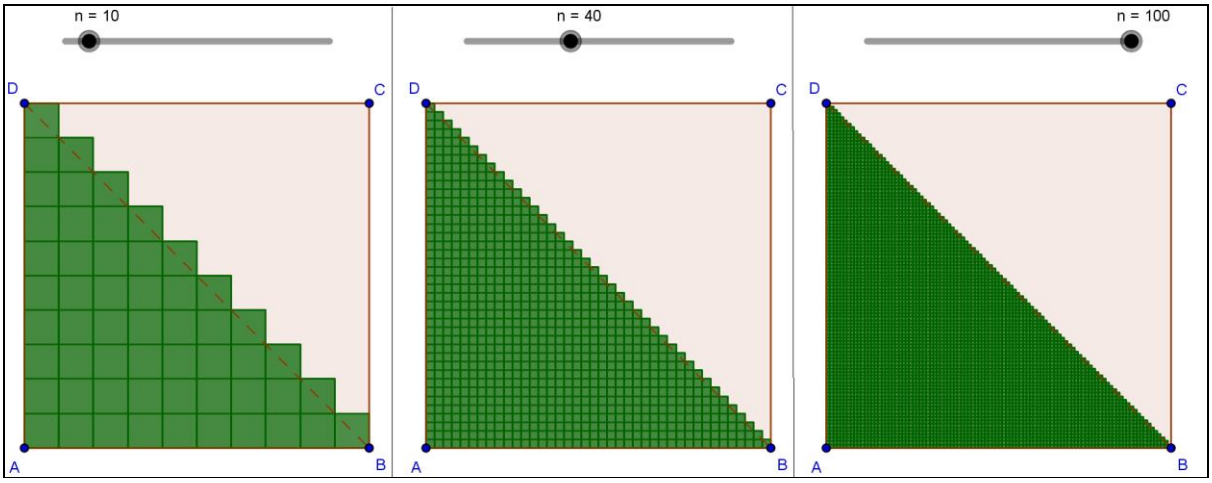


Figura 22: Ilustração de três situações da janela gráfica do arquivo Escada_no_Quadrado.ggb

Manipulando o arquivo o estudante será levado a concluir, por meio do conceito intuitivo de limite, que a área da "escada" tenderá para $\frac{1}{2}$ (medida da área do triângulo) quando n tender ao infinito. Além disso, deverá reconhecer a expressão $\left[\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n}\left(\frac{n}{n}\right)\right]$ como sendo a área da "escada" em função de n. A partir daí, deverá concluir que $\lim\left[\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n}\left(\frac{n}{n}\right)\right]=\frac{1}{2}$.

Esse exercício foi concebido com a intenção de preparar o aluno para o para a realização do **Exercício 2**, no qual o estudante deverá verificar que $\lim\left[\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{2}{n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{n}\left(\frac{n}{n}\right)^2\right] = \frac{1}{3}$, objetivo dessa atividade preliminar.

O **Exercício 2** é análogo ao **Exercício 1**. Trata-se de uma generalização do resultado anterior. No arquivo **Escada_no_Cubo.ggb** visualiza-se um cubo de aresta unitária e um poliedro em forma de escada determinado pela justaposição de n pequenos paralelepípedos quadrangulares de alturas medindo $\frac{1}{n}$, cujas áreas da base medem $\left(\frac{k}{n}\right)^2$, $1\le k\le n$. O volume do poliedro em forma de escada, dado pela expressão $\left[\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{2}{n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{n}\left(\frac{n}{n}\right)^2\right]$, é uma aproximação por excesso da pirâmide cuja base é uma das faces do cubo e a altura é a altura do cubo (figura 23). A figura 23 mostra a janela gráfica do arquivo para três situações distintas.

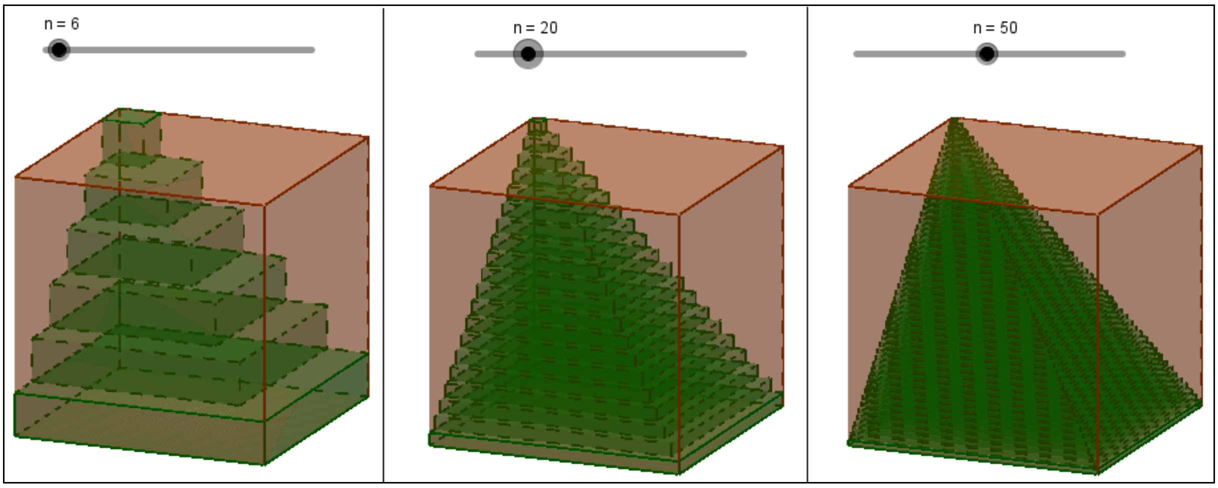


Figura 23: Ilustração de três situações da janela gráfica do arquivo Escada_no_Cubo.ggb

Ao manipular o arquivo, o aluno será levado a concluir, por meio do conceito intuitivo de limite, que o volume da "escada" tenderá para $\frac{1}{3}$ (medida do volume da pirâmide cuja base é uma face do cubo e cuja altura é a mesma do cubo) quando n tender ao infinito. Além disso, deverá reconhecer a expressão $\left[\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{2}{n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{n}\left(\frac{n}{n}\right)^2\right]$ como sendo o volume do poliedro "escada" em função de n. A partir daí, deverá concluir que $\lim\left[\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{2}{n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{n}\left(\frac{n}{n}\right)^2\right]=\frac{1}{3}$.

3.4.3 Ano de Escolaridade Indicado

Essa atividade é indicada para estudantes do 2º ano do Ensino Médio.

3.4.4 Tempo Previsto

O tempo de duração da atividade é de aproximadamente uma aula (45 minutos).

3.4.5 Pré-Requisitos

Para a realização da atividade é necessário que o aluno saiba calcular as áreas de um triângulo e do retângulo quando se conhecem suas bases e suas alturas, calcular os volumes de um paralelepípedo e de uma pirâmide conhecidas as medidas de suas bases e de suas alturas, além do conceito intuitivo de limite.

3.4.6 Recursos Necessários

A fim de que a atividade seja realizada são necessários os seguintes recursos:

- Ficha de atividade contendo o enunciado dos exercícios da atividade;
- Lápis ou caneta;
- Computadores com o software *GeoGebra 3D* instalado;
- Projetor multimídia;
- Arquivo eletrônico **Escada_no_Quadrado.ggb**;
- Arquivo eletrônico **Escada_no_Cubo.ggb**;

3.5 VOLUME DA ESFERA (Ver ANEXO V)

3.5.1 Objetivos

O objetivo dessa atividade é fazer com que o aluno seja capaz de entender por meio da ideia intuitiva de limite e do método de exaustão que o volume de uma esfera de raio R é dado por $V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi \cdot R^3$.

3.5.2 Descrição da Atividade

A atividade é composta por três exercícios onde é utilizado um arquivo do *GeoGebra 3D*, podendo ser realizada individualmente ou em dupla. Na atividade o conceito de limite é explorado intuitivamente com o auxílio do software de geometria dinâmica *GeoGebra 3D*.

No **Exercício 1**, mediante a manipulação do arquivo **cilindros_inscritos_na_semiesfera.ggb**, o aluno será levado a considerar cilindros de altura $\frac{R}{n}$ inscritos numa semiesfera, onde R é o raio da semiesfera, formando uma "escada" constituída por pequenos cilindros de alturas medindo $\frac{R}{n}$. A figura 24 mostra três situações distintas da janela gráfica do arquivo utilizado no exercício.

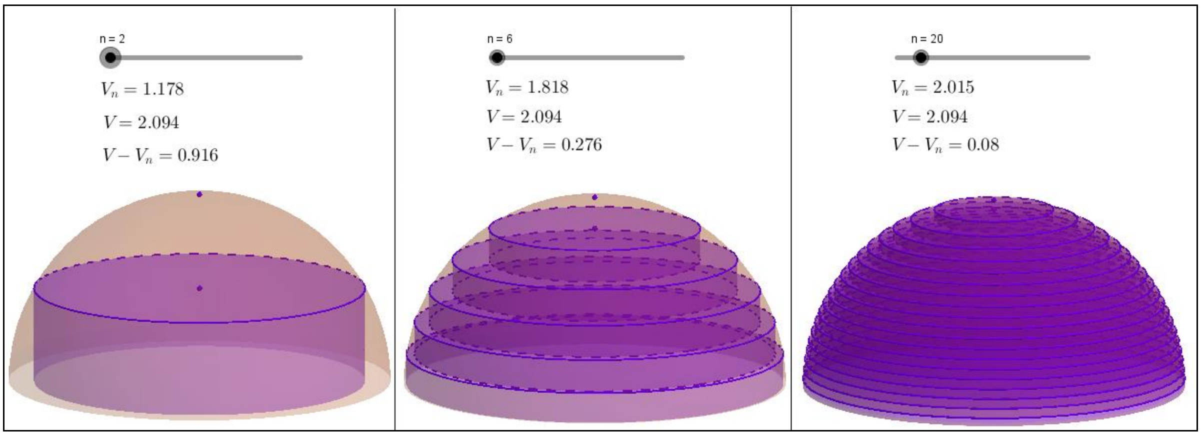


Figura 24: Ilustração de três situações distintas da janela gráfica do arquivo cilindros_inscritos_na_semiesfera.ggb

Manipulando o arquivo, o aluno será levado a concluir por meio do conceito intuitivo de limite que o volume da “escada” tenderá para o volume da semiesfera à medida que n tender ao infinito.

No **Exercício 2**, o estudante será levado a determinar o volume da “escada” constituída por pequenos cilindros pela expressão $V_n = R^3 \cdot \left\{ \pi - \pi \left[\frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{n} \right)^2 + \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{2}{n} \right)^2 + \cdots + \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{n}{n} \right)^2 \right] \right\}$. Para isso deverá, usando o teorema de Pitágoras, relacionar r_k, R e $\frac{k}{n}$, r_k onde é o raio da base do k-ésimo cilindro, R é o raio da esfera, e $\frac{k}{n}$ é a medida da distância entre o centro da base do k-ésimo cilindro e o centro da semiesfera.

No **Exercício 3**, o estudante será conduzido a utilizar o **Exercício 1**, o **Exercício 2** e a **Atividade preliminar para o estudo do volume da esfera** para chegar a conclusão que o volume da semiesfera $V = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot R^3$ e, em consequência disso, que o volume da esfera é $V_{esfera} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3$.

3.5.3 Ano de Escolaridade Indicado

Essa atividade é indicada para estudantes do 2º ano do Ensino Médio.

3.5.4 Tempo Previsto

O tempo de duração da atividade é de aproximadamente uma aula (45 minutos).

3.5.5 Pré-Requisitos

Para a realização da atividade é importante que o estudante tenha realizado a **atividade preliminar para o estudo do volume da esfera**, conheça o Teorema de Pitágoras e saiba calcular o volume de um cilindro quando se conhece a medida do raio da base e a altura.

3.5.6 Recursos Necessários

A fim de que a atividade seja realizada são necessários os seguintes recursos:

- Ficha de atividade contendo o enunciado dos exercícios da atividade;
- Lápis ou caneta;
- Computadores com o software *GeoGebra 3D* instalado;
- Projetor multimídia;
- Arquivo eletrônico **cilindros_inscritos_na_semiesfera.ggb**;

4. A PESQUISA

No capítulo anterior, desenvolvemos algumas atividades relativas ao conteúdo de geometria plana – área do círculo – e geometria espacial – volume do cilindro, do cone e da esfera – tomando como base o método de exaustão e a noção intuitiva de limite, ideias básicas do Cálculo. Isto posto, imaginamos fazer uma avaliação qualitativa do material didático produzido tendo como referência a própria sala de aula. Acreditamos ser esta etapa da pesquisa a mais importante, pois só a sala de aula pode validar efetivamente ou apontar possíveis equívocos no material construído. Assim, o material foi aplicado em aulas regulares de matemática de uma turma de segundo ano do ensino médio do Colégio Estadual Visconde de Itaboraí. Neste capítulo faremos uma descrição e uma avaliação dessa experiência didática, bem como apresentaremos a metodologia da pesquisa utilizada, as etapas, os instrumentos utilizados e os resultados obtidos com a realização dessa pesquisa.

4.1 METODOLOGIA

Para a realização de nossa pesquisa optamos por uma abordagem de caráter qualitativo. O fator que nos motivou a optar por uma pesquisa dessa natureza está relacionado com a nossa prática enquanto professor da educação básica, a qual nos impulsionou a levantar um questionamento sobre a viabilidade da inserção das noções intuitivas do Cálculo no Ensino Médio. Como professor, consideramos que toda pesquisa em ensino de matemática precisa passar, pelo crivo da sala de aula. Por isso o nosso laboratório foi uma sala de aula usual de matemática. Usual, porque o grupo de alunos não foi criado para atender a demanda da pesquisa. Trata-se de uma turma real, uma turma do segundo ano do ensino médio do Colégio Estadual Visconde de Itaboraí, já constituída no próprio universo escolar.

No relato da nossa experiência, não objetivamos quantificar os eventos de nossa pesquisa recorrendo aos mecanismos da Estatística (exceto no momento da avaliação dos alunos em 4.2) para análise dos dados obtidos, mas intencionamos adquirir dados descritivos mediante a realização de atividades pelos estudantes envolvidos no processo, que em nosso caso constituem o objeto de nosso estudo, para que dessa forma pudéssemos analisá-los. Entendemos que a obtenção desses dados descritivos é primordial para o que pretendemos realizar, pois segundo

Fazenda (2010, p.56) “A descrição constitui, portanto, importância significativa no desenvolvimento da pesquisa qualitativa.”.

As atividades a que fazemos alusão foram elaboradas com o intuito de verificar o desempenho dos estudantes na compreensão do método de exaustão e da noção intuitiva de limite para a sua utilização como um instrumento na dedução das expressões matemáticas que permitem determinar a área do círculo, o volume do cilindro, o volume do cone e o volume da esfera. Além disso, salientamos o fato de que todas as atividades foram desenvolvidas primando pelo aspecto intuitivo da noção de limite, uma vez que no Ensino Médio conforme mencionado no capítulo 2 do presente trabalho, não é conveniente uma abordagem do ponto de vista formal, quiçá no nível superior.

O aspecto intuitivo constitui-se num elemento muito importante no desenvolvimento do conhecimento matemático, e como vimos no capítulo 1 muito do que foi produzido dentro do Cálculo, foi proporcionado inicialmente por ideias intuitivas. Frota e Nasser (2009, p.13) faz referência a Fischbein que destaca três componentes da atividade matemática: o aspecto formal, o componente algorítmico e a intuição (composta da intuição cognitiva, compreensão intuitiva e solução intuitiva). Para Fischbein essas três componentes são de fundamental importância, e com respeito à intuição declara que:

> Uma intuição cognitiva é um tipo de cognição que é aceita diretamente sem a sensação de que algum tipo de justificativa é requerido. Uma intuição cognitiva é então caracterizada, como evidente por si. Nós aceitamos, como evidentes por si, afirmações, como: “O todo é maior que as partes”. “Por um ponto fora de uma reta passa uma única reta paralela”. “A menor distância entre dois pontos é um segmento de reta”. (FISCHBEIN, 1994, *apud* FROTA, 2009, p.232)

Para a realização desse estudo foi selecionada uma turma do 2º ano do Ensino Médio do Colégio Estadual Visconde de Itaboraí, do qual sou professor do fato que o conteúdo previsto pelo currículo mínimo da rede estadual coincidia com o conteúdo das atividades do presente trabalho.

Os tópicos trabalhados foram, conforme já anunciados, a área do círculo, o volume do cilindro, o volume do cone e o volume da esfera. Para isso, utilizamos a versão 3D do software de matemática dinâmica *GeoGebra*. Nesse contexto, cabe destacar que a ideia que perpassa as atividades propostas está associada a um processo embrionário do Cálculo Integral pautado - na versão adaptada do método de exaustão - o "método dos antigos" gregos - pelos precursores do cálculo infinitesimal com base na noção intuitiva de limite.

As atividades, planejadas com o intuito de serem aplicadas integralmente em uma ou duas aulas de 45 minutos, foram divididas em exercícios; e cada exercício em itens, para que a mesma não ficasse muito extensa para os alunos. Tomando como referência o material didático elaborado (e apresentado no capítulo 3 desta dissertação), realizamos a sequência didática em seis aulas, como descrito na tabela a seguir.

Tabela 1 – Cronograma da Execução das Aulas

Aula nº	Conteúdo abordado
1 2	Área do círculo: Exercício 1, Exercício 2, Exercício 3, Exercício 4, Exercício 5, Exercício 6 (Exercício 6.1 e Exercício 6.2).
3	Volume do Cilindro: Exercício 1, Exercício 2 e Exercício 3.
4	Volume do Cone: Exercício 1, Exercício 2 e Exercício 3.
5	Atividade Preliminar Para o Estudo do Volume da Esfera (Limites): Exercício 1 e Exercício 2.
6	Volume da Esfera: Exercício 1, Exercício 2 e Exercício 3.

Após a realização da sequência didática com os alunos, aplicou-se um questionário (ver ANEXO VI) para que eles, os próprios alunos, avaliassem seu grau de satisfação em relação às atividades, aos exercícios propostos e ao uso do software *GeoGebra*. Foram avaliados ainda, segundo os próprios alunos, os níveis de compreensão do conteúdo abordado e da importância do uso do *GeoGebra* para esta finalidade. As respostas dos alunos para o questionário foram tabuladas e analisadas considerando uma escala Likert de cinco pontos.

É importante frisar que a pesquisa foi realizada com autorização mediante assinatura termo de consentimento (ver ANEXO VIII).

4.2 O RELATO DA EXPERIÊNCIA

O Colégio Estadual Visconde de Itaboraí, é um colégio muito conhecido e bastante antigo no município de Itaboraí. Seu IDEB em 2013 era 2,9 (resultado abaixo da média estadual do Rio de Janeiro que é 3,6 e bem abaixo do nível de referência que é 6,0), mas apesar disso, atende uma clientela de quase três mil estudantes do próprio município e de municípios vizinhos.

A turma de 2º Ano selecionada para a realização dessa experiência didática era composta por 32 alunos na faixa etária de 16 a 18 anos de idade e faz parte do turno da manhã. Os alunos apresentam muitas dificuldades em matemática, a maioria possui baixo poder aquisitivo o que faz com que alguns estudantes trabalhem no turno da tarde.

Para realização das atividades os alunos da turma foram divididos em duplas que foram denominadas como D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6, D_7, D_8, D_9, D_{10}, D_{11}, D_{12}, D_{13} e D_{14}. Observamos ainda o fato de que não houve qualquer tipo de resistência inicial dos alunos a participar da realização das atividades, permitindo prontamente que fossem feitos os devidos registros para a pesquisa. Passemos então ao relato da experiência. Faremos isso de forma organizada em subseções e por atividade. Isto é, em cada uma das subseções seguintes apresentaremos os resultados obtidos com a experiência realizada na execução da atividade destacada no seu título.

4.2.1 Área do Círculo

Essa atividade tinha como objetivo que os alunos pudessem se familiarizar com a noção intuitiva de limite e que mediante a mesma concluíssem que a fórmula que permite calcular a área de um círculo de raio R é dada por $A = \pi \cdot R^2$. Assim, a atividade foi dividida em seis exercícios. Onde, em cada um deles utiliza-se um arquivo do GeoGebra, baseado nos quais os alunos responderiam as questões propostas. Ressaltamos o fato que as duplas D_{15} e D_{16} não participaram dessa atividade por motivos não relatados.

A atividade foi aplicada no dia 11/08/2014 na sala de aula. Para que os alunos pudessem visualizar os arquivos do *GeoGebra* foi utilizado um data show. Na realidade, a intenção inicial era que os alunos interagissem com o software, contudo tal opção tornou-se inviável diante da impossibilidade da escola em disponibilizar computadores para todos os alunos. Assim, realizamos uma aula dialogada, onde os arquivos eram abertos juntos e de maneira que todos os alunos conseguissem visualizar os arquivos para realização da atividade.

Inicialmente, foi perguntado aos alunos se eles conheciam a fórmula utilizada para calcular a área de um círculo. A maioria respondeu que não lembrava ou que desconhecia. Além disso, observou-se que aqueles que conheciam a fórmula nunca haviam visto uma justificativa razoável para a mesma. Em seguida, foi indagado aos alunos se eles conheciam o *GeoGebra*, e estes afirmaram que não. Dessa forma, fez-se uma breve apresentação do programa para que eles pudessem se familiarizar com o mesmo e, após isso, apresentou-se o objetivo da atividade que era explicar o porquê da área do círculo ser dada por $A = \pi \cdot R^2$. A seguir apresentaremos o relato da experiência, tomando como referência cada exercício da ficha da atividade.

4.2.1.1 – Relato e Comentários sobre o Exercício 1

<u>Exercício 1</u>

Abra o arquivo **Lados_dos_Poligonos_Inscritos.ggb**, onde tem-se um círculo de centro em O e um triângulo equilátero inscrito. Arrastando o controle deslizante "n" de 3 até 400, visualizam-se, para cada valor de n, polígonos regulares de n lados inscritos no círculo. Sejam L_n o lado do polígono regular de n lados e α_n o ângulo central correspondente ao mesmo polígono regular. Baseado no arquivo resolva os itens abaixo:

a) Complete a tabela para os respectivos valores n dados a seguir:

Número de Lados do Polígono (n)	**Medida do ângulo central (α_n)**	**Medida do Lado (L_n) do Polígono Regular**
$n = 10$	$\alpha_{10} =$	$L_{10} =$
$n = 20$	$\alpha_{20} =$	$L_{20} =$
$n = 30$	$\alpha_{30} =$	$L_{30} =$
$n = 40$	$\alpha_{40} =$	$L_{40} =$
$n = 50$	$\alpha_{50} =$	$L_{50} =$
$n = 100$	$\alpha_{100} =$	$L_{100} =$
$n = 150$	$\alpha_{150} =$	$L_{150} =$
$n = 200$	$\alpha_{200} =$	$L_{200} =$
$n = 250$	$\alpha_{250} =$	$L_{250} =$
$n = 300$	$\alpha_{300} =$	$L_{300} =$
$n = 400$	$\alpha_{400} =$	$L_{400} =$

Figura 25: Enunciado do Exercício 1 da Atividade Área do Círculo

Exercício 1 (continuação)

b) Observando a tabela preenchida, é possível perceber que, quando o número n de lados do polígono aumenta, a medida de L_n ficará muito próxima de certo número. Qual é esse número?

Resposta:____

c) Pela mesma tabela observa-se que, quando o número n de lados do polígono aumenta, a medida do ângulo central α_n também se aproxima de certo número. Qual é esse número?

Resposta:____

Em um ramo da matemática conhecido como Cálculo Diferencial e Integral, utilizamos com muita frequência esse processo de "aproximação infinita". Quando aumentamos muito, o valor de uma variável, no nosso caso representado pela letra n (o número de lados do polígono), dizemos que n tende ao infinito e indicamos por $n \to \infty$. Já o número encontrado para a variável L_n, quando $n \to \infty$, é indicado por $\lim L_n$(lê-se: limite de L_n quando $n \to \infty$ ou simplesmente limite de L_n). Da mesma forma o número encontrado para a variável α_n é indicado por $\lim \alpha_n$ (lê-se: limite de α_n quando $n \to \infty$ ou limite de α_n).

d) Utilizando a notação acima e os valores encontrados nos itens **b)** e **c)**, podemos expressar então, $\lim L_n$ e $\lim \alpha_n$. Para isso, preencha as lacunas os abaixo com os números encontrados nos itens anteriores:

Resposta: $\lim L_n =$ __________ e $\lim \alpha_n =$ __________

Figura 26: Continuação do enunciado do Exercício 1 da Atividade Área do Círculo

Com a realização desse exercício pretendia-se que os alunos conseguissem se apropriar da noção intuitiva de limite de uma sequência de números reais e que se familiarizassem com a sua notação. Os alunos preencheram a tabela corretamente e responderam os itens sem dificuldades, contudo foi necessária a intervenção (que eles aceitaram bem) do professor para explicar a noção e a notação de limite que foi introduzida no exercício, visto que era o primeiro contato deles com esse tipo de operação e notação. Esse cuidado inicial do professor justifica-se pelo fato de que este conceito e sua notação seriam utilizados de modo exaustivo na realização dos demais exercícios da atividade.

Na nossa avaliação, os resultados obtidos com os alunos no exercício foram satisfatórios, pois todas as duplas resolveram as questões propostas corretamente, demonstrando não terem dificuldades com a noção e a notação de limite.

4.2.1.2 – Relato e Comentários sobre o Exercício 2

Exercício 2

Abra o arquivo **Apotemas_dos_Poligonos_Inscritos.ggb**. Arrastando o controle deslizante "n" de 3 até 400, visualizam-se polígonos regulares de n lados inscritos no círculo. Sejam R o raio do círculo e a_n o apótema do polígono regular inscrito no círculo. Usando o arquivo resolva os itens abaixo:

a) O que acontece com a medida do apótema a_n do polígono inscrito com respeito à medida do raio R do círculo quando o valor de n aumenta muito ($n \to \infty$)? ***Resposta:***____

b) Quando n aumentar muito ($n \to \infty$), a diferença entre a medida do raio R e a medida do apótema a_n se aproximará de certo número L. Determine o número L. ***Resposta:*** $L =$ ___________

c) Utilizando a notação do Cálculo, o número L encontrado no item anterior pode ser expresso como $L = \lim R - a_n$. Sendo assim, complete o espaço abaixo com o valor desse limite. ***Resposta:*** $L = \lim R - a_n =$ ___________

d) Determine o $\lim a_n$. ***Resposta:***____.

Figura 27: Enunciado do Exercício 2 da atividade Área do Círculo

O exercício tinha por objetivo que os alunos chegassem a conclusão de que a medida do apótema dos polígonos inscritos tende para a medida do raio quando o número de lados dos polígonos inscritos tender ao infinito, ou seja, que $\lim a_n = R$. Durante a realização do exercício, quando os alunos visualizaram o arquivo do GeoGebra para que o itens fossem respondidos, os alunos fizeram algumas colocações. Por exemplo, uma aluna da dupla D_{11} disse que o apótema estava se aproximando do raio, mostrando assim que a aluna já tinha se apropriado do objetivo do exercício.

Com respeito ao item **(b)** um aluno da dupla D_8 disse que a diferença entre o raio e o apótema se aproxima de 6 (raio do círculo), e quase, concomitantemente, um aluno da dupla D_{10} concluiu que a diferença entre a medida do raio e do apótema se aproximava de zero. Todavia, observando-se apenas os registros dos alunos, apenas a dupla D_6 respondeu o item **(a)** de modo insatisfatório, como pode ser visto abaixo:

a) O que acontece com a medida do apótema a_n do polígono inscrito com respeito à medida do raio R do círculo quando o valor de n aumenta muito ($n \to \infty$)?

Resposta:

Os apótemas não si aproximando mais.

Figura 28: Resposta da dupla D_6 para o item (a) do Exercício 2

A resposta dada pelos alunos no quadro acima não deixa claro que a medida do apótema se aproxima da medida do raio. Pode ser que a dupla tenha tentado responder isso, no entanto, isso não fica explícito na resposta dada.

Assim, com relação a realização deste exercício, destaca-se como um aspecto positivo a fala da aluna da dupla D_{11}, mencionada anteriormente, que fornece a resposta esperada para o item **(a)** assim que o arquivo é aberto e manipulado.

O itens **(b)** e **(c)** foram respondidos corretamente por todos os alunos, porém o item mais discutido foi o **(d)** onde era esperado que o aluno respondesse que $\lim a_n = R$. No arquivo do *GeoGebra* o raio do círculo era igual a 6, e vários alunos disseram que $\lim a_n = 6$, que é a medida do raio do círculo. No entanto, nenhum aluno escreveu R como resposta. Observa-se desse modo que o fato da sequência numérica convergir para seis tornou-se mais evidente que sequência dos apótemas convergir para o raio do círculo, que era a resposta esperada. Afinal o que se pretende concluir não está associado ao número 6 em particular, mas sim à medida do raio(que neste caso é 6), independente de qual seja o valor dessa medida. Essa experiência nos mostrou que o contexto numérico da convergência se sobrepôs ao processo geométrico. Assumimos aqui que grande parte desse erro é nossa, pela excessivamente cuidadosa e formal de querer concluir que $\lim a_n = R$, a partir das evidências numéricas de que $\lim R - a_n = 0$. Entretanto, cabe destacar que esse ruído de natureza metodológica foi contornado com um diálogo realizado com o grupo a partir das respostas apresentadas. Em verdade, o que se queria como resposta já tinha sido obtido com a resposta do item (a), representada aqui pela resposta imediata da aluna da dupla D_{11}: $\lim a_n = R$. Assim, pode-se concluir que os alunos concluir que os alunos conseguiram alcançar os objetivos esperados, pois todos responderam de maneira correta todos os itens excetuando-se a dupla D_6, conforme já foi visto anteriormente.

O relato e os comentários referentes aos exercícios 3 e 4 faremos de forma simultânea. A seguir, para comodidade do leitor, reproduzimos seus enunciados.

4.2.1.3 – Relato e Comentários sobre o Exercício 3 e o Exercício 4

Exercício 3

Abra o arquivo **Comprimento_da_circunferencia.ggb**. Arrastando o controle deslizante "n" de 3 até 400, visualiza-se polígonos regulares de n lados inscritos no círculo. Sejam C o comprimento da circunferência e P_n o perímetro do polígono regular inscrito no círculo. Baseado no arquivo resolva os itens abaixo:

a) O que acontece com a medida do perímetro P_n do polígono inscrito com respeito à medida do comprimento C da circunferência quando o valor de n aumenta muito, $(n \to \infty)$? ***Resposta:***___________________________________

b) Quando n aumentar muito $(n \to \infty)$, a diferença entre a medida do comprimento da circunferência C e a medida do perímetro P_n do polígono inscrito se aproximará de certo número M. Determine o número M.

c) Utilizando a notação do Cálculo, o número M encontrado no item anterior pode ser expresso como $M = \lim C - P_n$. Sendo assim, complete o espaço abaixo com o valor desse limite. ***Resposta:*** $M = \lim C - P_n =$ __________

d) Determine o $\lim P_n$. ***Resposta:*** __________________________

e) Lembrando que o comprimento da circunferência é dado por $C = 2 \cdot \pi \cdot R$. Pode-se afirmar, então que: $\lim P_n =$ ___________

Figura 29: Enunciado do Exercício 3 da atividade Área do Círculo

Exercício 4

Abra o arquivo **Area_do_circulo.ggb**. Arrastando o controle deslizante "n" de 3 até 400, visualiza-se polígonos regulares de n lados inscritos no círculo. Sejam A a área do círculo e A_n a área do polígono regular inscrito no círculo. Baseado no arquivo resolva os itens abaixo:

a) O que acontece com a medida da área A_n do polígono inscrito com respeito à medida da área do círculo A conforme o valor de n aumenta muito ($n \to \infty$)?

Resposta:____

b) Quando n aumentar muito ($n \to \infty$), a diferença entre a medida da área do círculo A e o valor da área A_n do polígono inscrito se aproximará de certo número N. Determine o número N. ***Resposta:*** $N =$ __________

c) Utilizando a notação do Cálculo, o número N encontrado no item anterior pode ser expresso como $N = \lim A - A_n$. Sendo assim, complete o espaço abaixo com o valor desse limite. ***Resposta:*** $M = \lim A - A_n =$ __________

d) Determine o $\lim A_n$. ***Resposta:***____________________

Figura 30: Enunciado do Exercício 4 da atividade Área do Círculo

No **Exercício 3**, o objetivo era que o aluno concluísse que $\lim P_n = 2 \cdot \pi \cdot R$ e, no **Exercício 4**, era que eles chegassem à conclusão de que $\lim A_n = A$, ou seja, que a área dos polígonos inscritos tende para a área do círculo quando o número de lados do polígono aumenta indefinidamente. Nesses exercícios os alunos não encontraram dificuldades e responderam corretamente todos os itens. Atribuímos esse fato à, similaridade desses exercícios com o **Exercício 2**. Isso também é uma evidência de que todas as duplas conseguiram assimilar bem o que era proposto no **Exercício 2**. Não surgiram mais questionamentos como os que foram relatados que aconteceram na discussão final do item **(d)** do **Exercício 2**.

4.2.1.4 – Relato e Comentários sobre o Exercício 5

Exercício 5

Abra o arquivo **Arquimedes_1. ggb**. Arrastando o controle deslizante "n" de 4 até 100, visualizam-se polígonos regulares inscritos na janela 1 e os triângulos que formam o polígono inscrito na janela 2. Baseado no arquivo resolva os itens a seguir:

a) Observe que cada vez que aumentamos o número n, o número de triângulos com vértice no centro do círculo e que formam o polígono também aumenta.

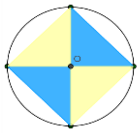
a.1) Quantos triângulos formam o polígono de **4** lados?_______________

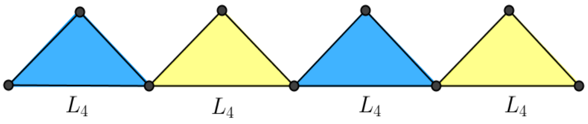
a.2) Quantos triângulos formam o polígono de **6** lados?_______________

a.3) Quantos triângulos formam o polígono de **8** lados?_______________

a.4) Quantos triângulos formam o polígono de **n** lados?_______________

b) Observe as figuras a seguir:





Assim, o perímetro P_4 do polígono regular inscrito de 4 lados (quadrado), pode ser expresso em função do seu lado L_4, do seguinte modo:

$$P_4 = L_4 + L_4 + L_4 + L_4 = 4 \cdot L_4$$

Lembrando que P_n é o perímetro do polígono regular de n lados inscrito no círculo, utilize o raciocínio acima e preencha as lacunas abaixo:

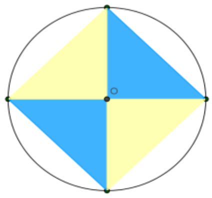
b.1) $P_6 =$ ____ $=$ ________

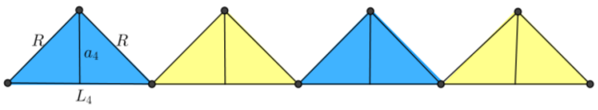
b.2) $P_8 =$ ____ $=$ ________

b.3) $P_n =$ ____ $=$ ________

Figura 31: Parte inicial do enunciado do Exercício 5 da atividade Área do Círculo

c) Observe as figuras abaixo:





As figuras acima dão a ideia de como expressar a área do polígono inscrito. A área A_4 do polígono de 4 lados inscrito (quadrado), pode ser expressa da seguinte forma:

$$A_4 = \frac{L_4 \cdot a_4}{2} + \frac{L_4 \cdot a_4}{2} + \frac{L_4 \cdot a_4}{2} + \frac{L_4 \cdot a_4}{2} = \frac{4 \cdot L_4 \cdot a_4}{2}$$

De fato, a área A_4 do polígono de quatro lados inscrito (o quadrado) é composta pela soma das áreas dos quatro triângulos isósceles de base L_4 e altura igual ao apótema a_4. Lembrando que A_n é área do polígono inscrito, utilize o raciocínio acima e complete as lacunas abaixo:

c.1) $A_6 =$ ____ $=$ ____________

c.2) $A_8 =$ ____ $=$ ____________

c.3) $A_n =$ ____ $=$ ____________

d) No item **(a)** você encontrou uma expressão para o perímetro P_n e no item **(b)** uma expressão para a área A_n do polígono regular inscrito, em função de n, L_n e a_n. Utilizando essas expressões, expresse A_n e em função apenas de P_n e de a_n.

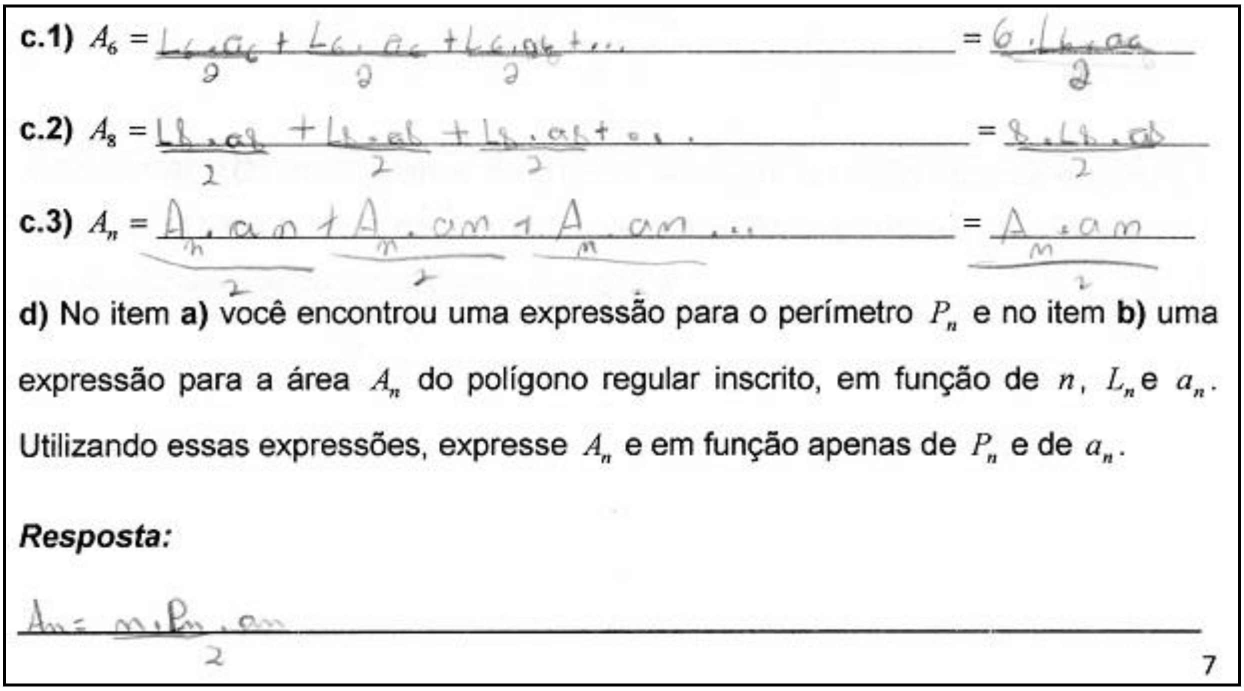
Resposta:____

Figura 32: Continuação do enunciado do Exercício 5 da atividade Área do Círculo

Esse exercício foi um exercício elaborado com o intuito de que os alunos conseguissem expressar a área A_n de um polígono regular inscrito em função do perímetro P_n e do apótema a_n, ou seja, que $A_n = \frac{P_n \cdot a_n}{2}$.

Nesse exercício os itens **(a)** e **(b)** foram respondidos corretamente por todas as duplas, no item **(c)** apenas a dupla D_{14} errou, colocando como resposta $\frac{A_n \cdot a_n}{2}$ para o subitem **(c.3)**, ao invés da resposta correta $\frac{n \cdot L_n \cdot a_n}{2}$, isso pode ter ocorrido mediante falta de atenção no enunciado.

Já no que se refere ao item **(d)**, apenas as duplas D_1 e D_2, D_3 e D_4 deram a resposta correta. AS duplas D_6 e D_7 responderam este item de maneira confusa, no entanto, chegaram ao resultado correto. Além disso, destaco o fato de que tais erros ocorreram mesmo depois de eu os ter auxiliado no referido item. Na figura 33, apresentamos uma das respostas incorretas para os itens **(c)** e **(d)** (a resposta da dupla D_{14}) e na figura 34 - uma das respostas corretas - para os mesmos itens (resposta da dupla D_2).



c.1) $A_6 = \frac{L_6 . a_6}{2} + \frac{L_6 . a_6}{2} + \frac{L_6 . a_6}{2} + \ldots = \frac{6 . L_6 . a_6}{2}$

c.2) $A_8 = \frac{L_8 . a_8}{2} + \frac{L_8 . a_8}{2} + \frac{L_8 . a_8}{2} + \ldots = \frac{8 . L_8 . a_8}{2}$

c.3) $A_n = \frac{A_n . a_n}{2} + \frac{A_n . a_n}{2} + \frac{A_n . a_n}{2} \ldots = \frac{A_n . a_n}{2}$

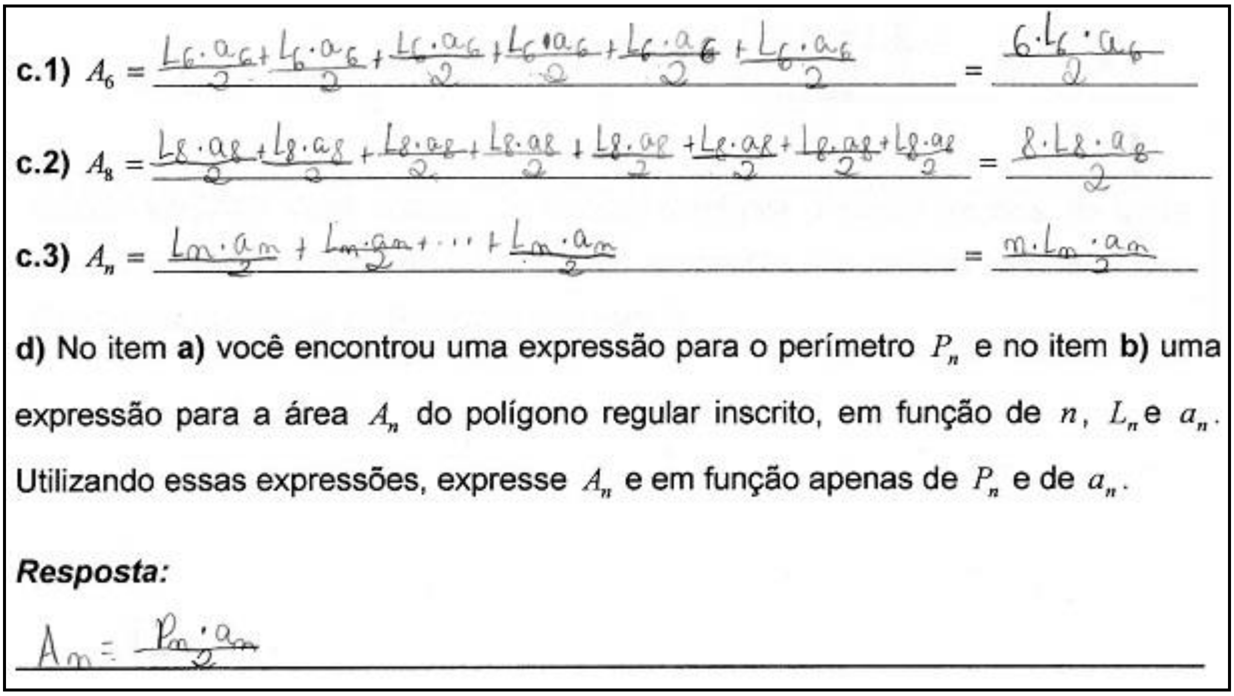
d) No item **a)** você encontrou uma expressão para o perímetro P_n e no item **b)** uma expressão para a área A_n do polígono regular inscrito, em função de n, L_n e a_n. Utilizando essas expressões, expresse A_n e em função apenas de P_n e de a_n.

Resposta:

$A_n = \frac{n . P_n . a_n}{2}$

7

Figura 33: Resposta da dupla D_{14} para os itens (c) e (d) do Exercício 5



c.1) $A_6 = \frac{L_6 \cdot a_6}{2} + \frac{L_6 \cdot a_6}{2} + \frac{L_6 \cdot a_6}{2} + \frac{L_6 \cdot a_6}{2} + \frac{L_6 \cdot a_6}{2} + \frac{L_6 \cdot a_6}{2} = \frac{6 \cdot L_6 \cdot a_6}{2}$

c.2) $A_8 = \frac{L_8 \cdot a_8}{2} + \frac{L_8 \cdot a_8}{2} + \frac{L_8 \cdot a_8}{2} + \frac{L_8 \cdot a_8}{2} + \frac{L_8 \cdot a_8}{2} + \frac{L_8 \cdot a_8}{2} + \frac{L_8 \cdot a_8}{2} + \frac{L_8 \cdot a_8}{2} = \frac{8 \cdot L_8 \cdot a_8}{2}$

c.3) $A_n = \frac{L_n \cdot a_n}{2} + \frac{L_n \cdot a_n}{2} + \cdots + \frac{L_n \cdot a_n}{2} = \frac{n \cdot L_n \cdot a_n}{2}$

d) No item **a)** você encontrou uma expressão para o perímetro P_n e no item **b)** uma expressão para a área A_n do polígono regular inscrito, em função de n, L_n e a_n. Utilizando essas expressões, expresse A_n e em função apenas de P_n e de a_n.

Resposta:

$A_n = \frac{P_n \cdot a_n}{2}$

Figura 34: Resposta da dupla D_2 para os itens (c) e (d) do Exercício 5

O item **(d)** foi respondido incorretamente por 9 das 14 duplas. Nesse item era pedido que o termo $n \cdot L_n$ fosse substituído por P_n na expressão $A_n = \frac{n \cdot L_n \cdot a_n}{2}$ a qual fora obtida em **(c)**, o que consistia de uma manipulação algébrica simples e que levaria a resposta correta para o item que é $A_n = \frac{P_n \cdot a_n}{2}$.

Fica nítida com esse exercício, a falta de habilidade algébrica dos estudantes: não conseguem fazer generalizações e possuem muita dificuldade com manipulações algébricas. Entretanto, como veremos no **Exercício 6**, mais especificamente no **Exercício 6.1**, esse fato não se constituiu num entrave para que os alunos conseguissem chegar na fórmula para calcular a área do círculo.

4.2.1.5 – Relato e Comentários sobre o Exercício 6

O **Exercício 6** foi elaborado com o intuito de que os alunos utilizassem os exercícios anteriores para concluir de duas formas distintas que área do círculo é dada por $A = \pi \cdot R^2$. Para isso, o exercício foi dividido em duas partes sendo o **Exercício 6.1**, a 1ª forma, e o **Exercício 6.2**, a 2ª forma. Na figura 35, temos o enunciado do **Exercício 6.1**, e nas figuras 39 e 40, o enunciado do **Exercício 6.2**.

Exercício 6.1 (1ª forma)

No **Exercício 2** você concluiu que $\lim a_n = R$, no **Exercício 3** que $\lim P_n = 2 \cdot \pi \cdot R$ e

no **Exercício 4** que $\lim A_n = A$, onde A é a área do círculo de raio R. Utilizando a expressão encontrada no item **(d)** do **Exercício 5**, é possível escrever as seguintes igualdades:

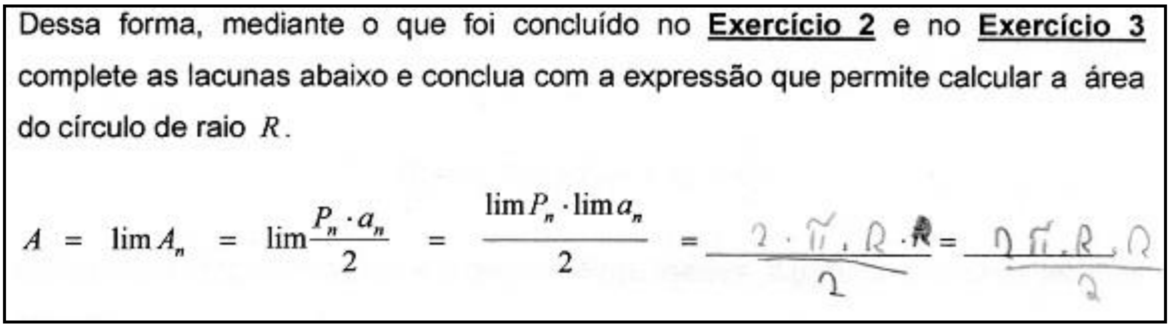
$$A = \lim A_n = \lim \frac{P_n \cdot a_n}{2} = \frac{\lim P_n \cdot \lim a_n}{2}$$

Dessa forma, mediante o que foi concluído no **Exercício 2** e no **Exercício 3** complete as lacunas abaixo e conclua com a expressão que permite calcular a área do círculo de raio R.

$$A = \lim A_n = \lim \frac{P_n \cdot a_n}{2} = \frac{\lim P_n \cdot \lim a_n}{2} = \underline{\hspace{3cm}} = \underline{\hspace{3cm}}$$

Figura 35: Enunciado do Exercício 6.1 da atividade Área do Círculo

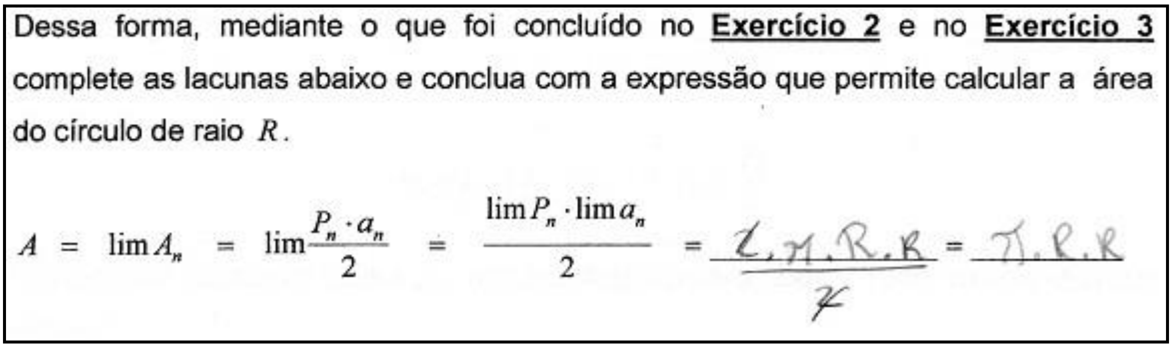
O **Exercício 6.1** foi realizado corretamente por 13 das 14 duplas presentes. Apenas a dupla D_8 errou respondendo que a área era $A = \pi^2$. As duplas D_{10} e D_{12} apresentaram respostas corretas, mas que, no entanto, não foram apresentadas em seu formato simplificado (figuras 36 e 37).



Dessa forma, mediante o que foi concluído no **Exercício 2** e no **Exercício 3** complete as lacunas abaixo e conclua com a expressão que permite calcular a área do círculo de raio R.

$$A = \lim A_n = \lim \frac{P_n \cdot a_n}{2} = \frac{\lim P_n \cdot \lim a_n}{2} = \frac{2 \cdot \pi \cdot R \cdot R}{2} = \frac{2\pi . R . R}{2}$$

Figura 36: Resposta da dupla D_{10} para o Exercício 6.1



Dessa forma, mediante o que foi concluído no **Exercício 2** e no **Exercício 3** complete as lacunas abaixo e conclua com a expressão que permite calcular a área do círculo de raio R.

$$A = \lim A_n = \lim \frac{P_n \cdot a_n}{2} = \frac{\lim P_n \cdot \lim a_n}{2} = \frac{\cancel{2} . \pi . R . R}{\cancel{2}} = \pi . R . R$$

Figura 37: Resposta da dupla D_{12} para o Exercício 6.1

Dessa forma, pode-se concluir que o **Exercício 6.1** alcançou o objetivo. Todos os alunos conseguiram chegar à fórmula que permite calcular a área do círculo.

Passemos agora ao relato da experiência com a realização do **Exercício 6.2**. Para realização desse exercício utilizou-se outro aplicativo, similar ao anterior. A diferença encontra-se apenas na composição final, em forma de paralelogramo, dos triângulos que compõe o polígono inscrito (figura 38).

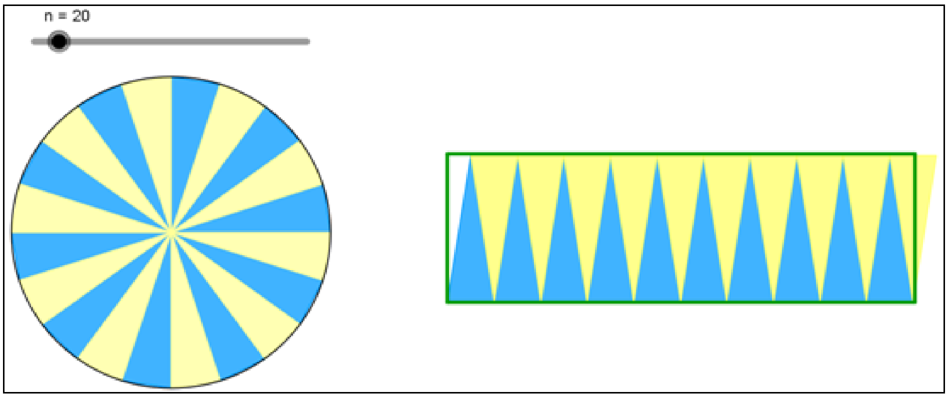


Figura 38: Ilustração para uma situação da janela gráfica do arquivo Arquimedes_2.ggb utilizado no Exercício 6.2 da Atividade Área do Círculo

Nas figuras 39 e 40 a seguir apresentamos, para comodidade do leitor, o enunciado do Exercício 6.2.

Exercício 6.2 (2ª forma)

Abra o arquivo **Arquimedes_2.ggb.** no qual visualiza-se um círculo com polígonos regulares inscritos divididos em triângulos isósceles azuis e amarelos e um retângulo com contorno verde de base B e altura H sobre o qual estão dispostos os triângulos que formam o polígono inscrito. Arraste o controle deslizante "n" de 4 até 180 e responda os itens abaixo:

a) Observe as bases dos triângulos azuis e amarelos (lados do polígono inscrito). Repare que a soma das bases de todos os triângulos azuis é igual a soma das bases de todos os triângulos amarelos. Observe ainda que a soma de todas as bases dos triângulos (azuis e amarelos) é igual ao perímetro P_n do polígono inscrito. Seja B_n a medida da soma das bases dos triângulos azuis para o polígono de n lados inscrito no círculo. Assim, para o polígono de 4 lados (quadrado) e de 6 lados (hexágono), é possível escrever:

$$B_4 = L_4 + L_4 = 2 \cdot L_4 = \frac{P_4}{2}$$

e

$$B_6 = L_6 + L_6 + L_6 = 3 \cdot L_6 = \frac{P_6}{2}$$

Utilizando o raciocínio acima e o arquivo **Arquimedes_2.ggb**, preencha as lacunas abaixo:

a.1) $B_8 =$ ______________________ = __________ = __________

a.2) $B_{10} =$ ______________________ = __________ = __________

a.3) $B_n =$ ______________________ = __________ = __________

Figura 39: Enunciado do Exercício 6.2 da atividade Área do Círculo

Exercício 6.2 (continuação)

b) No arquivo **Arquimedes_2.ggb** observa-se que quando $n \to \infty$, B_n se aproximará da base do retângulo. Sendo assim, do ponto de vista do Cálculo pode-se dizer que a base do retângulo B é igual ao $\lim B_n$. Dessa forma, utilizando a expressão anterior é possível escrever as igualdades abaixo:

$$B = \lim B_n = \frac{\lim P_n}{2}$$

Sendo assim, utilize o resultado do **<u>Exercício 3</u>** e complete a lacuna abaixo com a medida da base B do retângulo :

$$B = \lim B_n = \frac{\lim P_n}{2} = \underline{\qquad\qquad}$$

c) No mesmo arquivo é possível perceber que as alturas (apótema do polígono) dos triângulos (azuis e amarelos) se aproximam da altura H do retângulo quando $n \to \infty$. Utilizando o resultado da **<u>Exercício 2</u>**, complete a lacuna abaixo com a medida da altura do retângulo:

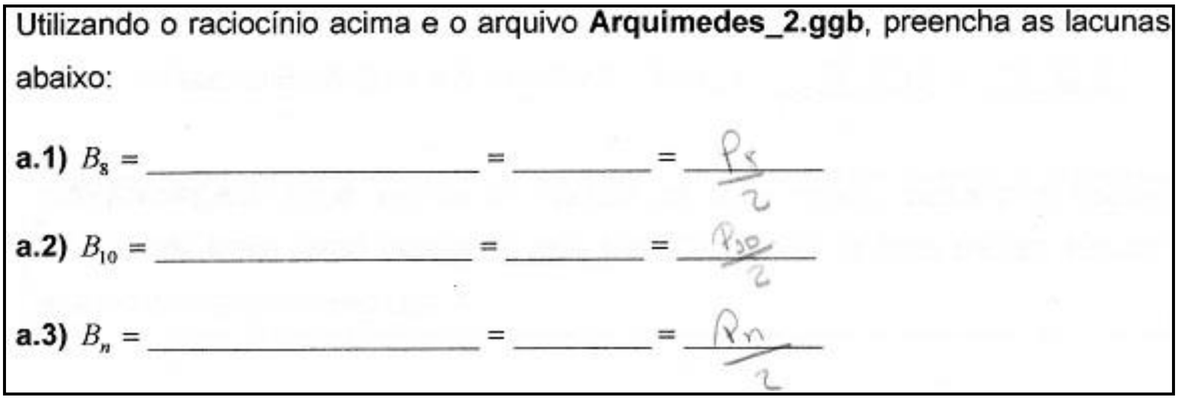
$$H = \lim a_n = \underline{\qquad\qquad}$$

d) Observando o arquivo é fácil ver que a área do círculo A e do retângulo são iguais, quando n aumentar muito ($n \to \infty$). Dessa forma, tem-se que:

$$A = \text{Área do Retângulo} = B \cdot H = \lim B_n \cdot \lim a_n = \underline{\qquad\qquad\qquad} = \underline{\qquad\qquad}$$

Figura 40: Continuação do enunciado do Exercício 6.2 da atividade Área do Círculo

Nesse exercício, o item **(a)** foi realizado corretamente por 13 das 14 duplas. Contudo, no subitem **(a.3)**, as 13 duplas que acertaram a resposta final $\frac{P_n}{2}$ negligenciaram a expressão intermediária $\frac{n \cdot L_n}{2}$, apresentando como reposta a expressão $B_n = L_n + L_n + \cdots + L_n = n \cdot L_n = \frac{P_n}{2}$. Mais uma vez percebe-se a dificuldade dos estudantes com a linguagem algébrica. Por outro lado, ao que parece, a resposta correta , $\frac{P_n}{2}$, é, muito provavelmente, consequência da generalização da sequência $\frac{P_4}{2},\frac{P_6}{2},\frac{P_8}{2},\frac{P_{10}}{2},\cdots,\frac{P_n}{2}$ que possui uma estrutura algébrica muito mais simples. Tal fato fica mais evidente nas respostas corretas dadas por algumas duplas que deixaram os espaços intermediários em branco (figura 41).


Utilizando o raciocínio acima e o arquivo **Arquimedes_2.ggb**, preencha as lacunas abaixo:

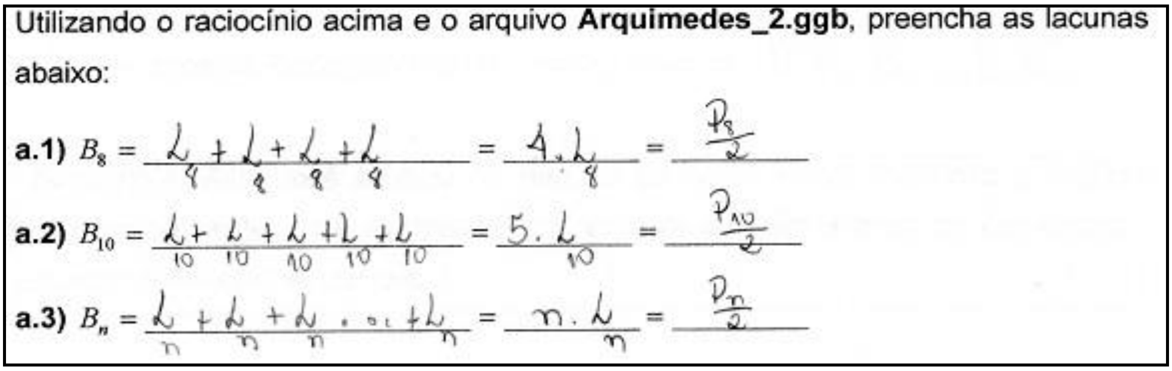
a.1) $B_8 =$ ______ = ______ = $\frac{P_8}{2}$

a.2) $B_{10} =$ ______ = ______ = $\frac{P_{10}}{2}$

a.3) $B_n =$ ______ = ______ = $\frac{P_n}{2}$

Figura 41: Resposta da dupla D_{12} para o Exercício 6.2 item (a)

Na figura 42 temos uma das respostas dadas corretamente (resposta da dupla D_1). Apenas a dupla D_{13} errou o item **(a)** completamente.


Utilizando o raciocínio acima e o arquivo **Arquimedes_2.ggb**, preencha as lacunas abaixo:

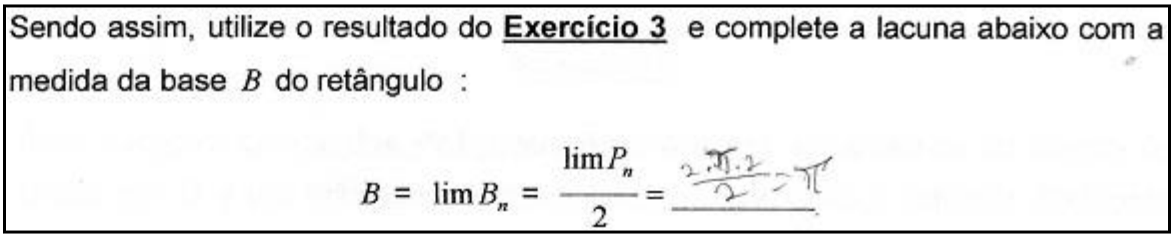
a.1) $B_8 = \frac{L}{8}+\frac{L}{8}+\frac{L}{8}+\frac{L}{8} = 4\cdot\frac{L}{8} = \frac{P_8}{2}$

a.2) $B_{10} = \frac{L}{10}+\frac{L}{10}+\frac{L}{10}+\frac{L}{10}+\frac{L}{10} = 5\cdot\frac{L}{10} = \frac{P_{10}}{2}$

a.3) $B_n = \frac{L}{n}+\frac{L}{n}+\frac{L}{n}\ldots+\frac{L}{n} = n\cdot\frac{L}{n} = \frac{P_n}{2}$

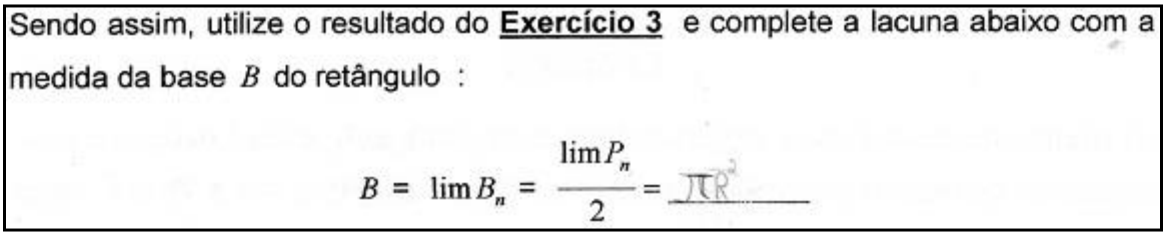
Figura 42: Resposta da dupla D_1 para o Exercício 6.2 item (a)

Com relação ao item **(b)**, 12 das 14 duplas responderam adequadamente. A resposta correta era $\pi\cdot R$. As respostas dadas pelas duplas D_8 e D_{13}, que erraram a questão estão ilustradas nas figuras 43 e 44.


Sendo assim, utilize o resultado do **Exercício 3** e complete a lacuna abaixo com a medida da base B do retângulo :

$$B = \lim B_n = \frac{\lim P_n}{2} = \frac{2.\pi.2}{2} = \pi$$

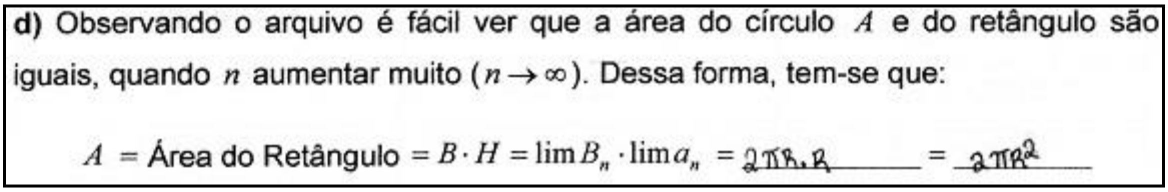
Figura 43: Resposta da dupla D_8 para o Exercício 6.2 item (b)


Sendo assim, utilize o resultado do **Exercício 3** e complete a lacuna abaixo com a medida da base B do retângulo :

$$B = \lim B_n = \frac{\lim P_n}{2} = \pi R^2$$

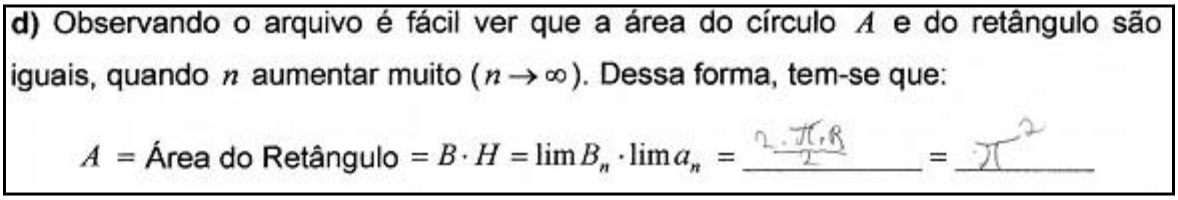
Figura 44: Resposta da dupla D_{13} para o Exercício 6.2 item (b)

O item **(c)**,(que pedia para determinar a medida H da altura do retângulo) foi respondido corretamente por todas as duplas. Contudo, no item **(d)**, onde era esperado que os alunos concluíssem o exercício com a expressão da área da círculo, $A = \pi \cdot R^2$, apareceram algumas respostas incoerentes, como pode ser observado nas respostas dadas pelas duplas D_3 eD_8 (figuras 45 e 46 a seguir).


d) Observando o arquivo é fácil ver que a área do círculo A e do retângulo são iguais, quando n aumentar muito ($n \to \infty$). Dessa forma, tem-se que:

A = Área do Retângulo $= B \cdot H = \lim B_n \cdot \lim a_n = 2\pi R.R = 2\pi R^2$

Figura 45: Resposta da dupla D_3 para o Exercício 6.2 item (d)


d) Observando o arquivo é fácil ver que a área do círculo A e do retângulo são iguais, quando n aumentar muito ($n \to \infty$). Dessa forma, tem-se que:

A = Área do Retângulo $= B \cdot H = \lim B_n \cdot \lim a_n = \frac{2.\pi.R}{2} = \pi^2$

Figura 46: Resposta da dupla D_8 para o Exercício 6.2 item (d)

Os alunos tiveram um pouco mais de dificuldade em resolver o **Exercício 6.2** pelo fato deste conter entre seus itens algumas generalizações de expressões algébricas, habilidade ainda pouco explorada no ensino de matemática. Entretanto, cabe destacar que 12 das 14 duplas avaliadas conseguiram atingir o objetivo da questão, chegando a conclusão de que a área de um círculo de raio R é $A=\pi \cdot R^2$.

Antes de passar ao relato da próxima atividade (volume do cilindro) gostaríamos de destacar que de forma geral a atividade foi bem sucedida, pois os alunos puderam ver como a expressão da área do círculo pode ser obtida mediante uma argumentação simples através da noção intuitiva de limite e do método de exaustão. Contudo, é importante frisar que vários resultados utilizados, como por exemplo, algumas propriedades de limites de sequência, não foram justificados e muito menos demonstrados para os alunos. Acreditamos que esta atitude seria tanto desnecessária como inapropriada para esse nível de ensino. Instruir nesse procedimento mais formal poderia desfocar o objetivo central da atividade: a compreensão das ideias envolvidas na atividade. Todavia, fizemos um apêndice (disponível no ANEXO VI) para a atividade com o objetivo de dar uma justificativa para alguns dos limites obtidos. Talvez seja mais útil para os nossos colegas professores da educação básica do que propriamente para os seus (nossos) alunos do ensino médio.

4.2.2 Volume do Cilindro de Revolução

Essa atividade tinha como objetivo que os alunos concluíssem a partir do método de exaustão e da noção intuitiva de limite que a expressão que permite calcular o volume V de um cilindro de raio R e altura H é dada por $V = \pi \cdot R^2 \cdot H$. A atividade foi dividida em três exercícios onde para a realização do **Exercício 2** foi utilizado um aplicativo construído com o *GeoGebra 3D*. Destacamos o fato de que as duplas D_3 e D_{15} não participaram dessa atividade, onde apenas a dupla D_3 justificou a ausência.

A atividade foi aplicada no dia 08/09/2014, teve duração de 45 minutos (1 aula) e utilizamos o data show para que os alunos pudessem visualizar o arquivo do GeoGebra. Inicialmente foi destacado para os alunos que a atividade da área do círculo que eles haviam realizado anteriormente, era fundamental para a realização dessa atividade. Tanto a expressão da área do círculo, como o procedimento adotado (o método de exaustão) na realização da atividade, iriam ser utilizados para a determinação da expressão do volume do cilindro.

Cabe observar, ainda que, antes mesmo de dar início à atividade, foi feita a leitura de todos os exercícios com os alunos para que não ficassem dúvidas com relação aos enunciados. Acreditamos que esta atitude foi bem aceita pelos estudantes sendo muito propícia para o bom andamento da atividade.

A seguir apresentaremos o relato da experiência, tomando como referência cada exercício da ficha de atividade.

4.2.2.1 – Relato e Comentários sobre o Exercício 1

Exercício 1

Sejam A_n e V_n respectivamente a área da base e o volume do prisma regular (cuja base é um polígono regular de n lados) inscrito num cilindro de raio R e altura H. Observe que a altura do prisma também é H uma vez que o prisma está inscrito no cilindro. Dessa forma, complete os espaços em branco da tabela abaixo seguindo o mesmo raciocínio utilizado para preencher as duas primeiras linhas:

Número de Lados do Polígono da Base	Área da Base do Prisma Regular	Altura do Prisma Regular Inscrito no Cilindro	Volume do Prisma Regular Inscrito no Cilindro
3	A_3	H	$V_3 = A_3 \cdot H$
4	A_4	H	$V_4 = A_4 \cdot H$
5			
6			
7			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n			

Da tabela acima é possível concluir que o volume do prisma inscrito em função de A_n e H é $V_n =$ ____________.

Figura 47: Enunciado do Exercício 1 da atividade do Volume do Cilindro

Esse exercício tinha como objetivo principal que os alunos pudessem explicitar o volume de um prisma regular de base A_n e altura H em função apenas desses dois dados. O referido exercício foi realizado sem dificuldades por todas as duplas, sendo que a dupla D_8 deixou em branco (talvez por falta de atenção) o espaço reservado para determinação da expressão de V_n em função de A_n e H.

4.2.2.2 – Relato e Comentários sobre o Exercício 2

Exercício 2

Abra o arquivo **Prismas_Regulares_Inscritos_no_Cilindro.ggb**, onde observa -se um prisma regular de base triangular inscrito em um cilindro. Arrastando o controle deslizante "**n**" de 3 até 70, visualiza-se uma sequência de prismas regulares inscritos em um cilindro. Seja V_n o volume de um prisma regular inscrito no cilindro ($3 \leq n \leq 70$) e V o volume do cilindro. Baseado no arquivo resolva os itens a seguir:

a) O que acontece com a medida do volume V_n do prisma inscrito com relação à medida do volume V do cilindro quando o valor de n (o número de lados n do polígono da base) aumenta muito ($n \to \infty$)?

Resposta:____

b) Quando n aumentar muito ($n \to \infty$), a diferença entre a medida do volume V do cilindro e a medida do volume V_n do prisma regular inscrito no cilindro se aproximará de certo número L. Determine o número L.

Resposta: $L =$ ___________

c) Utilizando a notação de limite, o número L encontrado no item anterior pode ser expresso como $L = \lim V - V_n$. Sendo assim, complete o espaço abaixo com o valor desse limite.

Resposta: $L = \lim V - V_n =$ ___________

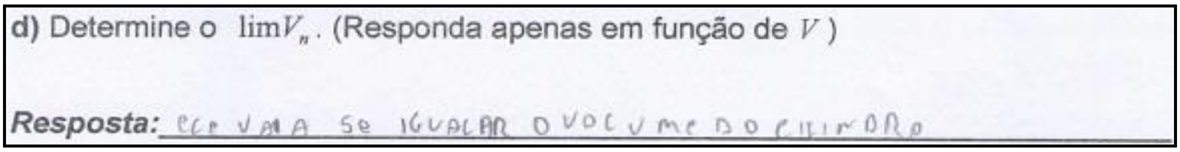
d) Determine o $\lim V_n$. (Responda apenas em função de V)

Figura 48: Enunciado do Exercício 2 da atividade do Volume do Cilindro

Nesse exercício foi utilizado um arquivo do *GeoGebra 3D*, baseado no qual os alunos responderiam os itens do exercício. Para a realização desse exercício, alguns alunos foram convidados a manusear o software, os quais aceitaram de imediato. Com base na manipulação do arquivo por estes colegas os outros estudantes iam respondendo as questões propostas.

Figura 49: Aluno manuseando o aplicativo do GeoGebra na Atividade Volume do Cilindro

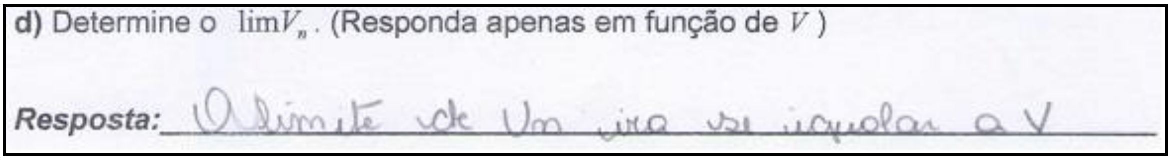
Todas as 14 duplas presentes responderam de maneira correta o exercício. Tal fato deve-se provavelmente, à similaridade do exercício com exercícios realizados durante a atividade sobre a área do círculo. Das 14 duplas presentes, 11 responderam o item (d) exatamente como era esperado: $\lim V_n = V$. As outras três responderam de modo informal como pode ser visto nas figuras 50, 51 e 52,a seguir:



d) Determine o $\lim V_n$. (Responda apenas em função de V)

Resposta: ELE VAI A SE IGUALAR O VOLUME DO CILINDRO

Figura 50: Resposta da dupla D_8 para o Exercício 2 item (d)



d) Determine o $\lim V_n$. (Responda apenas em função de V)

Resposta: O limite de Vn ira se igualar a V

Figura 51: Resposta da dupla D_9 para o Exercício 2 item (d)

d) Determine o $\lim V_n$. (Responda apenas em função de V)

Resposta: O lim Vn vai se igualar ao V.

Figura 52: Resposta da dupla D_{11} para o Exercício 2 item (d)

Destaco ainda nesse exercício um aspecto muito positivo e bastante significativo na resposta dada pela dupla D_{16} para o item (a) (figura 33). A resposta dada pela aluna denota uma boa apropriação da linguagem do Cálculo pelos alunos.

a) O que acontece com a medida do volume V_n do prisma inscrito com respeito à medida do volume V do cilindro quando o valor de n (o número de lados n do polígono da base) aumenta muito ($n \to \infty$)?

Resposta:

O volume do Vn se aproxima do volume V, quando n tende ao infinito.

Figura 53: Resposta da dupla D_{16} para o Exercício 2 item (a)

Figura 54: Alunos realizando a Atividade Volume do Cilindro

4.2.2.3 – Relato e Comentários sobre o Exercício 3

Exercício 3

No **Exercício 1** você concluiu que $V_n = A_n \cdot H$, onde V_n é o volume do prisma regular inscrito no cilindro e no **Exercício 2** que $\lim V_n = V$, onde V é o volume do cilindro de raio R e altura H. Assim, é possível escrever as seguintes igualdades:

$$V \;=\; \lim V_n \;=\; \lim H \cdot A_n \;=\; H \cdot \lim A_n$$

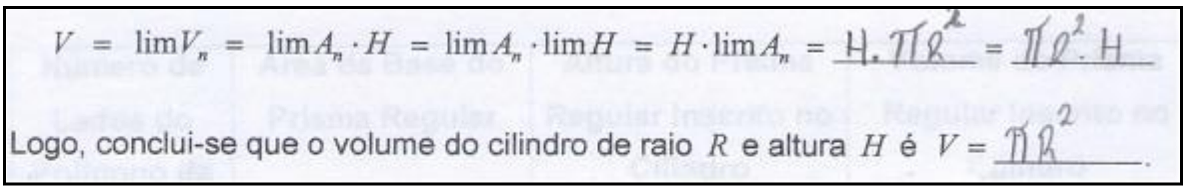
Utilizando o fato que a área do círculo é dada por $A = \lim A_n = \pi \cdot R^2$ (fato concluído na **Atividade - Área do círculo de raio** R), complete as lacunas abaixo e determine a expressão para calcular o volume de um cilindro cujo raio da base é R e cuja altura é H.

$$V \;=\; \lim V_n \;=\; \lim A_n \cdot H \;=\; \lim A_n \cdot \lim H \;=\; H \cdot \lim A_n \;= \_\_\_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

Logo, conclui-se que o volume do cilindro de raio R e altura H é $V =$ _________.

Figura 55: Enunciado do Exercício 3 da atividade do Volume do Cilindro

Esse exercício tinha como objetivo que os alunos concluíssem com o auxílio das atividades anteriores a fórmula para o cálculo do volume do cilindro de raio R e altura H. Das 14 duplas presentes na atividade, 12 duplas responderam corretamente a todos os itens do início ao fim. Apenas as duplas D_6 e D_{11} fizeram o registro da fórmula do volume do cilindro de forma equivocada, ainda que na resolução tenha encontrado a expressão correta. Nas figuras 56 e 57 temos as respostas dadas pelas duplas D_6 e D_{11}, respectivamente:



$$V = \lim V_n = \lim A_n \cdot H = \lim A_n \cdot \lim H = H \cdot \lim A_n = H.\pi R^2 = \pi R^2 . H$$

Logo, conclui-se que o volume do cilindro de raio R e altura H é $V = \pi R^2$.

Figura 56: Resposta da dupla D_6 para o Exercício 3

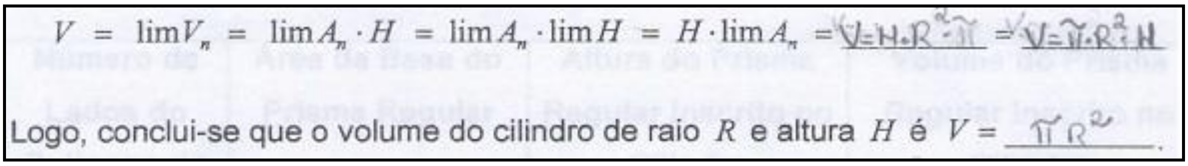


Figura 57: Resposta da dupla D_{11} para o Exercício 3

Tal fato pode ser resultado da falta de atenção dos estudantes no que estava sendo pedido ou até mesmo uma distração deles no momento de responder.

No geral temos razões suficientes para considerar que atividade foi bem sucedida e que os alunos conseguiram compreender, mesmo que intuitivamente, que o volume de um cilindro de raio R e altura H é dado pela expressão $V = \pi \cdot R^2 \cdot H$.

4.2.3 Volume do Cone de Revolução

O objetivo dessa atividade era fazer com que os alunos concluíssem a partir do método de exaustão e da noção intuitiva de limite que a expressão que permite calcular o volume de um cone de raio R e altura H é dada por $V = \frac{1}{3}\pi \cdot R^2 \cdot H$. A atividade foi dividida em três exercícios, onde, no **Exercício 2** foi utilizado um aplicativo construído com o *GeoGebra 3D*. Ressaltamos o fato de que as duplas D_3 e D_{15} não participaram dessa atividade. Apenas a dupla D_3 justificou a ausência.

A atividade foi aplicada no dia 08/09/2014, teve duração de 45 minutos (1 aula). Para que os alunos pudessem visualizar o arquivo do *GeoGebra* foi utilizado um data show. Ao iniciar a atividade foi observado para os estudantes que, assim como na atividade volume do cilindro, a atividade da área do círculo seria, essencial para a realização dessa atividade. Tanto a expressão da área do círculo, como o procedimento adotado (o método de exaustão) na realização da atividade, iriam ser utilizados para a determinação da expressão do volume do cone. Cabe observar ainda que, antes mesmo de se dar início à atividade, foi feita a leitura de todos os exercícios com os alunos para que não ficassem dúvidas com relação aos enunciados. Acreditamos que esta atitude, que foi bem aceita pelos estudantes, foi apropriada para o bom andamento da atividade.

A seguir apresentaremos o relato da experiência, tomando como referência cada exercício da ficha de atividade.

4.2.3.1 – Relato e Comentários sobre o Exercício 1

Exercício 1

Sejam A_n e V_n respectivamente a área da base e o volume da pirâmide regular (cuja base é um polígono regular de n lados) inscrita num cone de raio R e altura H. Observe que a altura da pirâmide também é H uma vez que a pirâmide está inscrita no cone. Dessa forma, complete os espaços em branco da tabela abaixo seguindo o mesmo raciocínio utilizado para preencher as duas primeiras linhas:

Número de Lados do Polígono da Base	Área da Base da Pirâmide Regular	Altura da Pirâmide Regular Inscrita no Cone	Volume da Pirâmide Regular Inscrita no Cone
3	A_3	H	$V_3 = \frac{1}{3} \cdot A_3 \cdot H$
4	A_4	H	$V_4 = \frac{1}{3} \cdot A_4 \cdot H$
5			
6			
7			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n			

Da tabela acima podemos concluir que o volume da pirâmide inscrita em função de A_n e H é dado por $V_n =$ ____________.

Figura 58: Enunciado do Exercício 1 da atividade do Volume do Cone

Esse exercício tinha como objetivo principal que os alunos pudessem expressar o volume de uma pirâmide regular inscrita num cone em função de sua base A_n e de sua altura H. Todas as duplas conseguiram realizar e concluir a tarefa de forma correta, com exceção da dupla D_{10} que concluiu que o volume da pirâmide inscrita era $V_n = A_n \cdot H$ ao invés de $V_n = \frac{1}{3} A_n \cdot H$. Talvez esse fato se deva à falta de atenção por parte da dupla, visto que os demais itens da tabela estavam preenchidos corretamente.

4.2.3.2 – Relato e Comentários sobre o Exercício 2

Exercício 2

Abra o arquivo **Pirâmides_Regulares_Inscritas_no_Cone.ggb.**, onde observa-se uma pirâmide regular de base triangular inscrita em um cone. Arrastando o controle deslizante “**n**” de 3 até 70, visualiza-se uma sequência de pirâmides regulares inscritas em um cone. Seja V_n o volume da pirâmide regular inscrita no cone ($3 \le n \le 70$) e V o volume do cone. Baseado no arquivo resolva os itens a seguir:

a) O que acontece com a medida do volume V_n da pirâmide inscrita com relação à medida do volume V do cone quando o valor de n (o número de lados n do polígono da base) aumenta muito ($n \to \infty$)? ***Resposta:***_____________________

b) Quando n aumentar muito ($n \to \infty$), a diferença entre a medida do volume V do cone e a medida do volume V_n da pirâmide regular inscrita no cone se aproximará de certo número M. Determine o número M.

Resposta: $M =$ ______

c) Utilizando a notação de limite, o número M encontrado no item anterior pode ser expresso como $M = \lim V - V_n$. Sendo assim, complete o espaço abaixo com o valor desse limite. ***Resposta:*** $M = \lim V - V_n =$ ___________

d) Determine o $\lim V_n$. (Responda apenas em função de V) ***Resp:*** __________

Figura 59: Enunciado do Exercício 2 da atividade do Volume do Cone

Para realização desse exercício, também foi utilizado um arquivo do *GeoGebra 3D*. Durante o exercício alguns alunos manusearam o software para que os outros colegas pudessem responder as questões propostas.

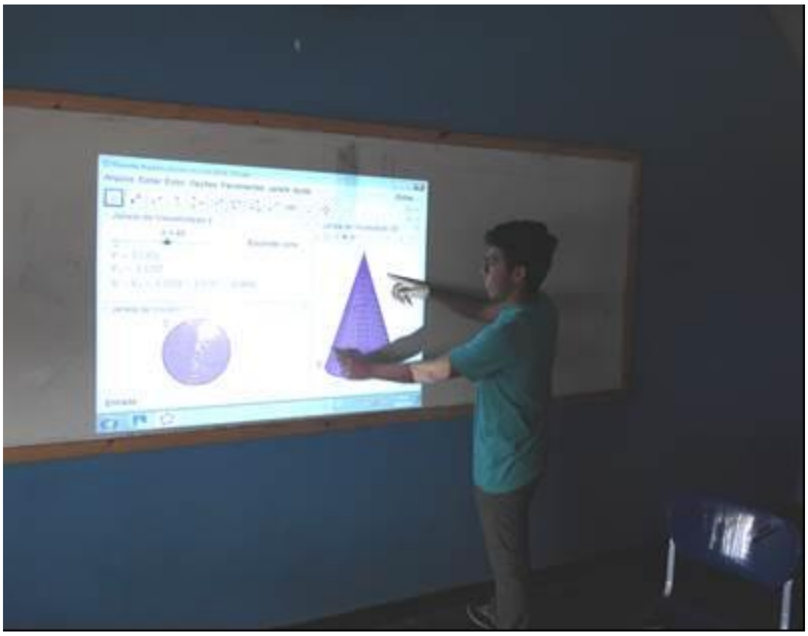


Figura 60: Aluno realizando a Atividade Volume do Cone

Figura 61: Aluno manuseando o aplicativo do GeoGebra na Atividade Volume do Cone

Todas as 14 duplas presentes resolveram de maneira correta o exercício. Das 14 duplas presentes, 12 responderam o item (d) exatamente como era esperado: $\lim V_n = V$. As outras duas, D_9 e D_{11}, responderam de modo informal como pode ser visto na figura 62.

d) Determine o $\lim V_n$. (Responda apenas em função de V)

Resposta: Vn vai iguala a V

Figura 62: Resposta da dupla D_9 (que é idêntica a da dupla D_{11}) para o Exercício 2 item (d)

É importante destacar aqui as respostas dadas pela dupla D_{12} (Figura 63) para o exercício, pois tais respostas demonstram que esses alunos conseguiram se apropriar eficazmente da linguagem do Cálculo.

a) O que acontece com a medida do volume V_n da pirâmide inscrita com respeito à medida do volume V do cone quando o valor de n (o número de lados n do polígono da base) aumenta muito ($n \to \infty$)?

Resposta:

O volume Vn se aproxima do volume V quando n tender ao infinito.

b) Quando n aumentar muito ($n \to \infty$), a diferença entre a medida do volume V do cone e a medida do volume V_n da pirâmide regular inscrita no cone do prisma se aproximará de certo número M . Determine o número M .

Resposta: $M =$ 0

c) Utilizando a notação do Cálculo, o número M encontrado no item anterior pode ser expresso como $M = \lim V - V_n$. Sendo assim, complete o espaço abaixo com o valor desse limite.

Resposta: $M = \lim V - V_n =$ 0

d) Determine o $\lim V_n$. (Responda apenas em função de V)

Resposta: limVn = V

Figura 63: Respostas dadas pela dupla D_{12} para os itens do Exercício 2.

4.2.3.3 – Relato e Comentários sobre o Exercício 3

Exercício 3

No **Exercício 1** você concluiu que $V_n = \frac{1}{3} \cdot A_n \cdot H$, onde V_n é o volume da pirâmide regular inscrita no cone e no **Exercício 2** que $\lim V_n = V$, onde V é o volume do cone de raio R e altura H. Assim, é possível escrever as seguintes igualdades:

$$V \quad = \quad \lim V_n \quad = \quad \lim \frac{1}{3} \cdot A_n \cdot H \quad = \quad \frac{1}{3} \cdot H . \lim A_n$$

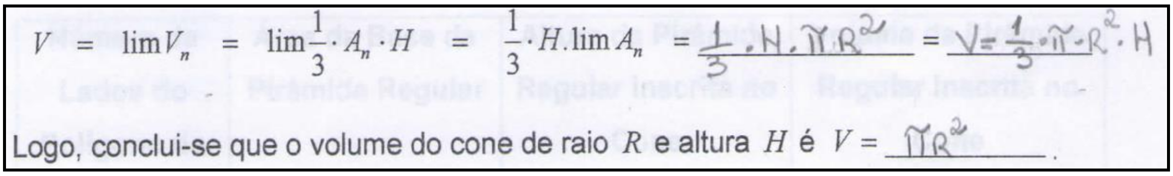
Utilizando o fato que a área do círculo é dada por $A = \lim A_n = \pi \cdot R^2$ (fato concluído na **Atividade - Área do círculo de raio** R), complete as lacunas abaixo e conclua com a expressão para calcular o volume de um cone cujo raio da base é R e cuja altura é H.

$$V \quad = \quad \lim V_n \quad = \quad \lim \frac{1}{3} \cdot A_n \cdot H \quad = \quad \frac{1}{3} \cdot H . \lim A_n \quad = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

Logo, conclui-se que o volume do cone de raio R e altura H é $V =$ ___________

Figura 64: Enunciado do Exercício 3 da atividade do Volume do Cone

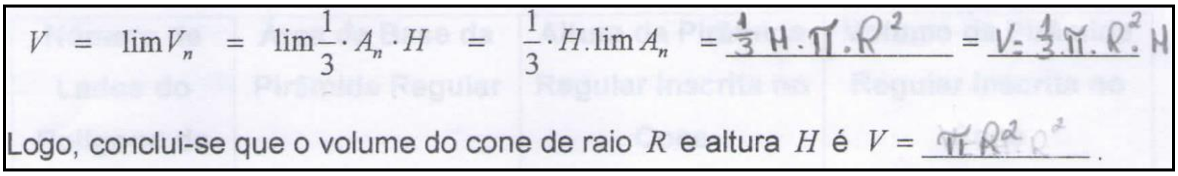
Esse exercício tinha como objetivo que os alunos concluíssem com o auxílio das atividades anteriores a expressão para o cálculo do volume do cone de raio R e altura H. Das 14 duplas presentes na atividade, 11 duplas responderam corretamente a todos os itens do início ao fim. Apenas, duas duplas (as duplas D_9 e D_{11}) fizeram o registro da fórmula do volume do cilindro de forma equivocada, ainda que na resolução tenham encontrado a expressão correta. A dupla D_{13}, apesar de resolver corretamente todos os itens, deixou o espaço de conclusão em branco. Nas figuras 65 e 66 temos as respostas dadas pelas duplas D_9 e D_{11}, respectivamente.



$V = \lim V_n = \lim \frac{1}{3} \cdot A_n \cdot H = \frac{1}{3} \cdot H . \lim A_n = \frac{1}{3} . H . \pi R^2 = V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot H$

Logo, conclui-se que o volume do cone de raio R e altura H é $V =$ πR^2.

Figura 65: Resposta da dupla D_9 para o Exercício 3



$V = \lim V_n = \lim \frac{1}{3} \cdot A_n \cdot H = \frac{1}{3} \cdot H . \lim A_n = \frac{1}{3} H . \pi . R^2 = V = \frac{1}{3} . \pi . R^2 . H$

Logo, conclui-se que o volume do cone de raio R e altura H é $V =$ πR^2.

Figura 66: Resposta da dupla D_{11} para o Exercício 3

Tal fato pode ser resultado da falta de atenção dos estudantes no que estava sendo pedido ou até mesmo uma distração deles no momento de responder.

No geral, temos razões suficientes para considerar que a atividade foi bem sucedida e que os alunos conseguiram compreender, mesmo que intuitivamente, que o volume de um cone de raio R e altura H é dado pela expressão $V = \frac{1}{3}\pi \cdot R^2 \cdot H$.

4.2.4 Atividade Preliminar Para o Estudo do Volume da Esfera

Essa atividade tinha como objetivo possibilitar que os alunos concluissem concluir que o limite da sequência $\left[\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{2}{n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{n}\left(\frac{n}{n}\right)^2\right]$ é igual a $\frac{1}{3}$. Esse resultado será utilizado em outra atividade, para a obtenção de uma expressão que permita calcular o volume de uma esfera de raio R.

A atividade foi dividida em dois exercícios. Em cada exercício foi utilizado um arquivo do *GeoGebra 3D* que auxiliou os alunos no momento de responder os itens a eles referentes. Destacamos, inicialmente, que as duplas se mantiveram as mesmas das atividades anteriores, com exceção das duplas D_6, D_7 e D_8 que foram modificadas devido ao fato de alguns alunos da turma passarem a estudar no 3º turno, à noite (alguns desses alunos tiveram que trabalhar durante o dia). Assim, ao invés de 16 duplas passamos a ter 15 duplas. Além disso, não participaram dessa atividade as duplas D_{14} e D_{15}. Esses alunos não justificaram a ausência. Assim, dessa atividade participaram ao todo 13 duplas.

A atividade foi aplicada no dia 20/10/2014, teve duração de 45 minutos (1 aula). Para sua realização foi utilizado um data show para que os alunos pudessem visualizar e manusear os arquivos do *GeoGebra.*

Cabe ressaltar que, inicialmente foi realizada, a leitura dos exercícios da atividade juntamente com os alunos, a fim de dinamizar o processo e também para que não ficassem dúvidas com relação aos enunciados. Tal atitude foi bem aceita pela turma e acreditamos ter sido propícia para o bom andamento da atividade. A seguir apresentaremos o relato da experiência, tomando como referência cada exercício da ficha de atividade.

4.2.4.1 – Relato e Comentários sobre o Exercício 1

Exercício 1

Abra o arquivo **Escada_no_Quadrado.ggb**, onde tem-se um quadrado ABCD de lado igual a 1. Arrastando o controle deslizante "n" de 1 até 100, visualiza-se quadradinhos verdes de lado $\frac{1}{n}$ que formam uma "escada". Seja E_n a área dessa "escada". Baseado no arquivo resolva os itens a seguir:

a) Quando $n \to \infty$, essa "escada" ficará muito parecida com uma figura geométrica. Qual o nome dessa figura geométrica?

Resposta:

____

b) Determine a medida da área dessa figura geométrica?

Resposta:

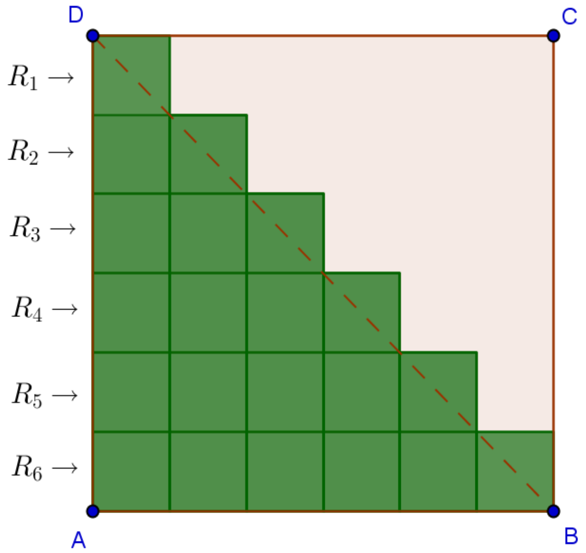
c) Determine o $\lim E_n$ (complete o espaço abaixo com o valor desse limite).

Resposta: $\lim E_n =$ ____________ .

Figura 67: Enunciado do Exercício 1 da Atividade Preliminar para o estudo do Volume da Esfera

Exercício 1 (Continuação)

d) Considere o quadrado de lado 1 da figura abaixo onde os quadradinhos são congruentes e possuem o lado medindo $\frac{1}{6}$.



Sejam A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 e A_6 as áreas, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 e b_6 as bases e h_1, h_2, h_3, h_4, h_5 e h_6 as alturas dos retângulos R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 e R_6 respectivamente. Observe a tabela abaixo onde foram preenchidas a primeira coluna e as três primeiras linhas. Utilize o mesmo raciocínio e preencha os espaços em branco:

Retângulo (R_n)	Altura (h_n)	Base (b_n)	Área (A_n)
R_1	$h_1 = \frac{1}{6}$	$b_1 = \frac{1}{6}$	$A_1 = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)$
R_2	$h_2 = \frac{1}{6}$	$b_2 = \frac{2}{6}$	$A_2 = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{2}{6}\right)$
R_3	$h_3 = \frac{1}{6}$	$b_3 = \frac{3}{6}$	$A_3 = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{3}{6}\right)$
R_4			
R_5			
R_6			

Figura 68: Continuação do enunciado do Exercício 1 da Atividade Preliminar para o estudo do Volume da Esfera

Exercício 1 (Continuação)

e) Usando a tabela do item **d)** e o fato que E_6 é a soma das áreas A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 e A_6, complete o espaço abaixo, mas não calcule.

$E_6 = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6 =$ ____.

OBSERVAÇÃO: Perceba que E_6 é a área da "escada" quando o lado dos quadradinhos que formam a "escada" mede $\frac{1}{6}$.

f) Nesse item, ao invés de considerar o quadrado de lado 1 com quadradinhos de lado $\frac{1}{6}$, considere o quadrado de lado 1 com quadradinhos de lado $\frac{1}{n}$. Sabendo que E_n é a soma das áreas $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n$ complete o espaço abaixo, seguindo um raciocínio análogo ao do item **e)**.

$E_n = A_1 + A_2 + A_3 + \cdots + A_n =$ ____.

OBSERVAÇÃO: Perceba que E_n é a área da "escada" quando o lado dos quadradinhos que formam a escada mede $\frac{1}{n}$.

g) A expressão encontrada para E_n no item **f)** nos possibilita escrever a seguinte igualdade:

$$\lim E_n = \lim \left(A_1 + A_2 + A_3 + \cdots + A_n\right)$$

Utilizando o item **c)**, o item **f)** e a igualdade acima, complete os espaços a seguir.

$\lim E_n = \lim \left(A_1 + A_2 + A_3 + \cdots + A_n\right) =$ __________________________________ = ____

OBSERVAÇÃO: Esse exercício foi importante, pois as ideias nele utilizadas são parecidas com as do próximo exercício, cujo resultado será essencial para a realização da **Atividade - Volume da esfera de raio** R.

Figura 69: Continuação do enunciado do Exercício 1 da Atividade Preliminar para o estudo do Volume da Esfera

Nesse exercício foi utilizado um arquivo do *GeoGebra 3D*, baseado no qual os alunos responderam os itens do exercício. Durante o exercício os alunos interagiram com o software manipulando o arquivo para que os outros colegas pudessem responder as questões propostas.

Figura 70: Aluna manuseando o aplicativo do GeoGebra na Atividade Preliminar para o estudo do Volume da Esfera

Os itens (a), (b), (c), (d) e (e) foram respondidos corretamente por todas as treze duplas participantes da atividade. Além disso, oito das treze duplas responderam corretamente todos os itens do exercício. Na figura 71 apresenta-se uma das respostas corretas (dada pela dupla D_1).

f) Nesse item, ao invés de considerar o quadrado de lado 1 com quadradinhos de lado $\frac{1}{6}$, considere o quadrado de lado 1 com quadradinhos de lado $\frac{1}{n}$. Sabendo que E_n é a soma das áreas $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n$ complete o espaço abaixo, seguindo um raciocínio análogo ao do item **e)**.

$$E_n = A_1 + A_2 + A_3 + \cdots + A_n = \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{2}{n}\right)+\frac{1}{n}\left(\frac{3}{n}\right)+\ldots+\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{n}{n}\right).$$

OBSERVAÇÃO: Perceba que E_n é a área da “escada” quando o lado dos quadradinhos que formam a escada mede $\frac{1}{n}$.

g) A expressão encontrada para E_n no item **f)** nos possibilita escrever a seguinte igualdade:

$$\lim E_n = \lim(A_1 + A_2 + A_3 + \cdots + A_n)$$

Utilizando o item **c)**, o item **f)** e a igualdade acima, complete os espaços a seguir.

$$\lim E_n = \lim(A_1 + A_2 + A_3 + \cdots + A_n) = \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{2}{n}\right)+\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{3}{n}\right)+\ldots+\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{n}{n}\right) = \frac{1}{2}$$

Figura 71: Resposta da dupla D_1 para os itens (f) e (g) do Exercício 1 considerada correta

É verdade que na resposta apresentada acima pela dupla D_1 (figura 71), os alunos esqueceram de colocar o símbolo de limite na frente da expressão no item (g). Cabe destacar que este “esquecimento” se verifica na maioria das respostas corretas. Consideramos que a ausência da notação pode ter ocorrido devido à falta de atenção ou ao fato de os alunos ainda não estarem habituados com tal simbologia. De fato, tendo como referência minha experiência como tutor presencial, observo com muita frequência o mesmo tipo de “esquecimento” da notação de limite nos cálculos de limites de funções realizados por estudantes da disciplina de Cálculo I do Curso de Licenciatura em Matemática da UFF/UNIRIO – CEDERJ. Por isso foi relevado o esquecimento dos alunos, pois esse tipo de situação, além de ser muito comum no ensino superior, onde os alunos já estão familiarizados com a noção de limite, é muito nova para alunos que nunca haviam mantido contato com essa simbologia.

Contudo, cinco das treze duplas (D_4, D_7, D_8, D_{10} e D_{14}) não responderam adequadamente o item (f) e, consequentemente, uma parte do item (g). Na figura a seguir apresenta-se uma das respostas inadequadas dadas.

f) Nesse item, ao invés de considerar o quadrado de lado 1 com quadradinhos de lado $\frac{1}{6}$, considere o quadrado de lado 1 com quadradinhos de lado $\frac{1}{n}$. Sabendo que E_n é a soma das áreas $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n$ complete o espaço abaixo, seguindo um raciocínio análogo ao do item **e)**.

$$E_n = A_1 + A_2 + A_3 + \cdots + A_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n} \cdot \frac{n}{n}$$

OBSERVAÇÃO: Perceba que E_n é a área da "escada" quando o lado dos quadradinhos que formam a escada mede $\frac{1}{n}$.

g) A expressão encontrada para E_n no item **f)** nos possibilita escrever a seguinte igualdade:

$$\lim E_n = \lim(A_1 + A_2 + A_3 + \cdots + A_n)$$

Utilizando o item **c)**, o item **f)** e a igualdade acima, complete os espaços a seguir.

$$\lim E_n = \lim(A_1 + A_2 + A_3 + \cdots + A_n) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n} \cdot \frac{n}{n} = \frac{1}{2}$$

Figura 72: Resposta incorreta da dupla D_4 para os itens (f) e (g) do Exercício 1

Nas demais respostas incorretas ocorreram erros bem parecidos. Como já havia sido relatado em outras atividades, os alunos possuem muita dificuldade em realizar processos de generalizações. Um tipo de resposta como a da figura 72 reforça tal fato e, também indica uma falta de atenção e um descuido com a escrita matemática. Por terem cometido essas incongruências não podemos considerar que com essas cinco duplas atingiram o objetivo do exercício. Contudo cabe destacar que 8 das 13 duplas responderam corretamente todos os itens deste exercício.

4.2.4.2 – Relato e Comentários sobre o Exercício 2

Exercício 2

Abra o arquivo **Escada_no_Cubo.ggb**, onde tem-se um cubo de aresta igual a 1. Arrastando o controle deslizante "n" de 1 até 100, visualiza-se paralelepípedos verdes de altura $\frac{1}{n}$ que formam uma "escada" dentro do cubo, cada paralelepípedo constitui um degrau da "escada" e, além disso, é formado por cubinhos de aresta igual a $\frac{1}{n}$. Seja F_n o volume da "escada" formada pelos paralelepípedos. Baseado no arquivo resolva os itens a seguir:

a) Quando $n \to \infty$, essa "escada" ficará muito parecida com um sólido geométrico. Qual o nome desse sólido geométrico?

Resposta:____

b) Determine a medida do volume desse sólido geométrico.

Resposta

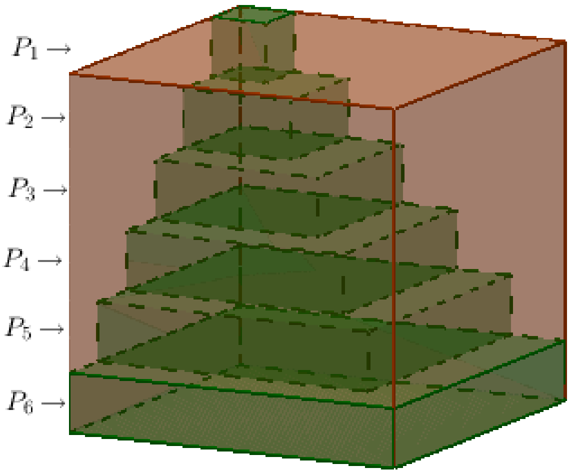
c) Determine o $\lim F_n$ (complete o espaço abaixo com o valor desse limite).

Resp: $\lim F_n =$ ___________ .

Figura 73: Enunciado do Exercício 2 da Atividade Preliminar para o estudo do Volume da Esfera

Exercício 2 (Continuação)

d) Considere o cubo de aresta igual a 1 da figura abaixo onde a altura de cada paralelepípedo é igual a $\frac{1}{6}$ e cada paralelepípedo é constituído de cubinhos de aresta igual a $\frac{1}{6}$.



Sejam V_1, V_2, V_3, V_4, V_5 e V_6 os volumes, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 e A_6 as áreas das bases e h_1, h_2, h_3, h_4, h_5 e h_6 as alturas dos paralelepípedos P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 e P_6, respectivamente. Observe a tabela abaixo onde foram preenchidas as três primeiras linhas. Utilize o mesmo raciocínio e preencha os espaços em branco:

Paralelepípedo (P_n)	Altura (h_n)	Área da Base (A_n)	Volume (V_n)
P_1	$h_1 = \frac{1}{6}$	$A_1 = \left(\frac{1}{6}\right)^2$	$V_1 = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2$
P_2	$h_2 = \frac{1}{6}$	$A_2 = \left(\frac{2}{6}\right)^2$	$V_2 = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^2$
P_3	$h_3 = \frac{1}{6}$	$A_3 = \left(\frac{3}{6}\right)^2$	$V_3 = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{3}{6}\right)^2$
P_4			
P_5			
P_6			

Figura 74: Continuação do enunciado do Exercício 2 da Atividade Preliminar para o estudo do Volume da Esfera

Exercício 2 (Continuação)

e) Utilizando a tabela do item **d)** e o fato que F_6 é a soma dos volumes V_1, V_2, V_3, V_4, V_5 e V_6, complete o espaço abaixo, mas não calcule.

$F_6 = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5 + V_6 =$ _____________________________________.

OBSERVAÇÃO: Observe que F_6 é o volume da "escada" quando a altura dos paralelepípedos que compõem a escada é igual a $\frac{1}{6}$.

f) Agora ao invés de considerar o cubo de aresta igual a 1 com paralelepípedos de altura $\frac{1}{6}$ formados por cubinhos de aresta igual a $\frac{1}{6}$, considere o cubo de aresta 1 com paralelepípedos de altura $\frac{1}{n}$, formados por cubinhos de aresta $\frac{1}{n}$. Sabendo que F_n é a soma dos volumes V_1, V_2, $V_3, \cdots, V_n$ complete o espaço abaixo, seguindo um raciocínio análogo ao do item **e)**.

$F_n = V_1 + V_2 + V_3 + \cdots + V_n =$ ____.

OBSERVAÇÃO: Observe que F_n é o volume da "escada" quando a altura dos paralelepípedos que compõem a escada é igual a $\frac{1}{n}$.

g) Através da expressão encontrada para F_n no item **f)** obtemos a seguinte igualdade:

$$\lim F_n = \lim\left(V_1 + V_2 + V_3 + \cdots + V_n\right)$$

Utilizando o item **c)**, o item **f)** e a igualdade acima, complete os espaços a seguir.

$\lim F_n = \lim\left(V_1 + V_2 + V_3 + \cdots + V_n\right) =$ ________________________________ = ____

OBSERVAÇÃO: O resultado encontrado no item **g)** desse exercício é muito importante e será utilizado na atividade que visa encontrar uma expressão algébrica que permita calcular o volume de uma esfera de raio R.

Figura 75: Continuação do Enunciado do Exercício 2 da Atividade Preliminar para o estudo do Volume da Esfera

Como no Exercício 1, nesse exercício também foi utilizado um arquivo do *GeoGebra 3D*, baseado no qual os alunos responderam os itens do exercício. Durante o exercício os alunos foram convidados a interagir com o software manipulando o arquivo para que os outros colegas pudessem responder as questões do exercício.

Figura 76: Aluna interagindo com o aplicativo construído com o GeoGebra para realizar a Atividade Preliminar para o estudo do Volume da Esfera

Os itens (a), (b), (c), (d) e (e) foram respondidos satisfatoriamente por todas as 13 duplas participantes, com exceção da dupla D_{14} que errou o item (e). Além disso, 7 das 13 duplas resolveram todo o exercício de modo satisfatório. Na figura 77 apresenta-se um fragmento de uma das respostas consideradas satisfatórias (resposta dada pela dupla D_2).

f) Agora ao invés de considerar o cubo de aresta igual a 1 com paralelepípedos de altura $\frac{1}{6}$ formados por cubinhos de aresta igual a $\frac{1}{6}$, considere o cubo de aresta 1 com paralelepípedos de altura $\frac{1}{n}$, formados por cubinhos de aresta $\frac{1}{n}$. Sabendo que F_n é a soma dos volumes $V_1, V_2, V_3, \cdots, V_n$ complete o espaço abaixo, seguindo um raciocínio análogo ao do item **e)**.

$$F_n = V_1 + V_2 + V_3 + \cdots + V_n = \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{3}{n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{n}{n}\right)^2.$$

OBSERVAÇÃO: Perceba que F_n é o volume da "escada" quando a altura dos paralelepípedos é igual a $\frac{1}{n}$.

g) Através da expressão encontrada para F_n no item **f)** obtemos a seguinte igualdade:

$$\lim F_n = \lim\left(V_1 + V_2 + V_3 + \cdots + V_n\right)$$

Utilizando o item **c)**, o item **f)** e a igualdade acima, complete os espaços a seguir.

$$\lim F_n = \lim\left(V_1 + V_2 + V_3 + \cdots + V_n\right) = \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{3}{n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{n}{n}\right)^2 = \frac{1}{3}$$

Figura 77: Resposta dada pela dupla D_2 para os itens (f) e (g) do Exercício 2

Novamente, percebe-se na resposta apresentada pela dupla o esquecimento do símbolo de limite. Tal fato, como no exercício anterior, se repetiu em todas as duplas que responderam corretamente os itens (f) e (g) deste exercício.

Contudo, 6 das 13 duplas (D_4, D_7, D_8, D_{10}, D_{12} e D_{14}) responderam incorretamente o item (f) e, consequentemente, uma parte do item (g), uma vez que este item dependia do item (f). Na figura 78 apresenta-se uma das respostas incorretas (dada pela dupla D_8).

f) Agora ao invés de considerar o cubo de aresta igual a 1 com paralelepípedos de altura $\frac{1}{6}$ formados por cubinhos de aresta igual a $\frac{1}{6}$, considere o cubo de aresta 1 com paralelepípedos de altura $\frac{1}{n}$, formados por cubinhos de aresta $\frac{1}{n}$. Sabendo que F_n é a soma dos volumes V_1, V_2, $V_3, \cdots, V_n$ complete o espaço abaixo, seguindo um raciocínio análogo ao do item **e)**.

$$F_n = V_1 + V_2 + V_3 + \cdots + V_n = \frac{1.1^2}{n\,n} + \frac{1.2^2}{n\,n} + \frac{1.3^2}{n\,n} + \frac{1.4^2}{n\,n} + \frac{1.5^2}{n\,n} + \frac{1.n^2}{n\,n}.$$

OBSERVAÇÃO: Perceba que F_n é o volume da "escada" quando a altura dos paralelepípedos é igual a $\frac{1}{n}$.

g) Através da expressão encontrada para F_n no item **f)** obtemos a seguinte igualdade:

$$\lim F_n = \lim(V_1 + V_2 + V_3 + \cdots + V_n)$$

Utilizando o item **c)**, o item **f)** e a igualdade acima, complete os espaços a seguir.

$$\lim F_n = \lim(V_1 + V_2 + V_3 + \cdots + V_n) = \frac{1^2}{n} + \frac{2^2}{n} + \frac{3^2}{n} + \frac{4^2}{n} + \frac{5^2}{n} + \frac{n^2}{n} = \frac{1}{3}$$

Figura 78: Resposta dada pela dupla D_8 para os itens (f) e (g) do Exercício 2

É possível perceber na resposta da dupla, a dificuldade na escrita matemática e o fato de não conseguir obter uma expressão para o volume da "escada" quando a altura dos paralelepípedos passa de $\frac{1}{6}$ para $\frac{1}{n}$. Nas demais respostas incorretas, algo semelhante acontece.

Além disso, é conveniente também destacar um fato curioso ocorrido: das seis duplas que responderam de forma insatisfatória, quatro (as duplas D_4, D_{10}, D_{12} e D_{14}) deram para os itens (f) e (g) deste exercício, as mesmas respostas que haviam dado nos itens (f) e (g) do exercício 1, com exceção da parte final onde responderam corretamente com $\frac{1}{3}$. Acreditamos que as duplas podem ter se confundido e pensado que as respostas dos itens (f) e (g) do exercício 2 eram as mesmas dos itens (f) e (g) do exercício 1. Isso pode ser decorrente da semelhança entre os itens dos exercícios ou de uma falta de atenção no que estava sendo solicitado.

No entanto, é importante frisar que apesar de terem mostrado mais uma vez dificuldades com a representação algébrica, essas duplas responderam corretamente a parte final do item (g).

Dessa forma, não podemos considerar que essas duplas conseguiram alcançar plenamente o objetivo da atividade que era entender que $\lim \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{3}{n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{n}{n}\right)^2 = \frac{1}{3}$. Contudo, como ocorreu no item (g) do exercício 1, a parte intuitiva do processo foi mais uma vez alcançada.

4.2.5 Volume da Esfera

O objetivo dessa atividade era que os alunos conseguissem concluir que o volume de uma esfera de raio R é dado por $V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi \cdot R^3$.

A atividade foi dividida em três exercícios. Para que os alunos pudessem resolver os exercícios foi utilizado um arquivo do *GeoGebra 3D* que auxiliou os alunos no momento de responder os itens a eles referentes. Antes de iniciar o relato, convém observar que algumas duplas tiveram que ser modificadas em decorrência da falta de alguns alunos e da chegada na turma de um aluno de outro estado. As duplas modificadas foram as duplas D_3, D_5, D_9 e D_{11}. As demais duplas se mantiveram as mesmas das atividades anteriores. Dessa forma, nessa atividade tivemos a participação de 13 duplas.

A atividade foi aplicada no dia 03/11/2014, teve duração de 45 minutos (1 aula) e utilizamos o data show para que os alunos pudessem visualizar o arquivo do GeoGebra.

Conforme foi feito em atividades anteriores, realizamos a leitura dos exercícios da atividade juntamente com os alunos, a fim de dinamizar o processo e também para que não ficassem dúvidas com relação aos enunciados, fato que novamente os alunos aceitaram bem. A seguir apresentaremos o relato da experiência, tomando como referência cada exercício da ficha de atividade.

4.2.5.1 – Relato e Comentários sobre o Exercício 1

<u>Exercício 1</u>

Abra o arquivo **cilindros_inscritos_na_semiesfera.ggb**, onde tem-se um cilindro circular reto inscrito em uma semiesfera de raio igual a R. Arrastando o controle deslizante "n" de 2 até 150, visualiza-se cilindros inscritos de altura $\frac{R}{n}$ formando um tipo de "escada" na semiesfera. Seja V_n o volume da "escada" formada por esses cilindros e V o volume da semiesfera de raio R. Baseado no arquivo resolva os itens a seguir:

a) O que acontece com a medida do volume V_n da escada com respeito à medida do volume V da semiesfera quando $n \to \infty$? ***Resposta:***___________________

b) Quando $n \to \infty$, a diferença entre a medida do volume V da semiesfera e a medida do volume V_n da "escada" se aproximará de certo número L. Determine o número L. ***Resposta:*** $L =$ ___________

c) Utilizando a notação do Cálculo, o número L encontrado no item anterior pode ser expresso como $L = \lim V - V_n$. Sendo assim, complete o espaço abaixo com o valor desse limite. ***Resposta:*** $L = \lim V - V_n =$ ___________

d) Determine o $\lim V_n$. (Responda apenas em função de V) ***Resposta***:________

Figura 79: Enunciado do Exercício 1 da atividade Volume da Esfera

Nesse exercício foi utilizado um arquivo do GeoGebra 3D, baseado no qual os alunos responderam os itens do exercício. Durante o exercício os alunos interagiram com o software manipulando o arquivo para que os outros colegas pudessem responder as questões propostas. Além disso, o exercício foi realizado sem dificuldades por todas as 13 duplas participantes, todas acertaram os itens do exercício, creio que pelo fato da semelhança do exercício com exercícios realizados em atividades anteriores.

Figura 80: Aluno no quadro no momento da atividade Volume da Esfera

Figura 81: Alunos manuseando o aplicativo do GeoGebra na atividade Volume da Esfera

4.2.5.2 – Relato e Comentários sobre o Exercício 2

Exercício 2

a) Na figura 1 temos cilindros inscritos em uma semiesfera de raio igual a R, cuja altura de cada um mede $\frac{R}{6}$, indicando que o raio foi dividido em seis segmentos de medida $\frac{R}{6}$. Já na figura 2 temos a seção transversal da figura 1 onde estão indicados os raios dos dois primeiros cilindros e o raio da semiesfera.

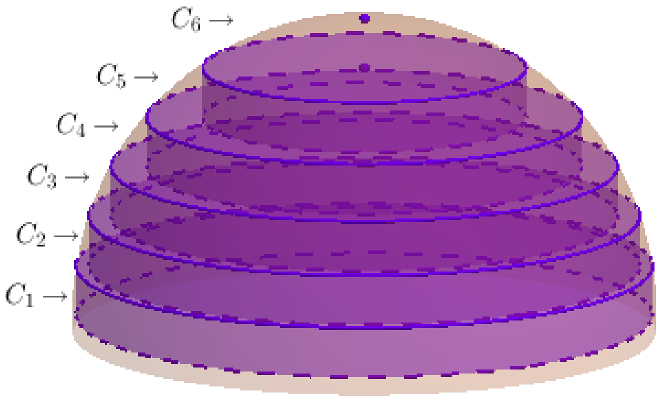


Figura 1

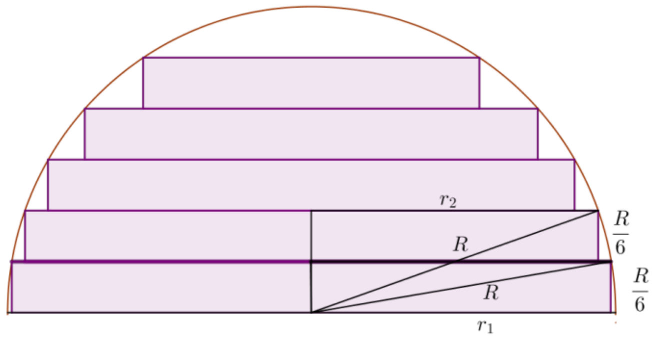


Figura 2

Sejam v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 e v_6 os volumes, r_1^2, r_2^2, r_3^2, r_4^2, r_5^2 e r_6^2 os quadrados dos raios das bases e h_1, h_2, h_3, h_4, h_5 e h_6 as alturas dos cilindros C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 e C_6, respectivamente. Observe na figura 1, que embora esteja indicado, não existe o sexto cilindro. Nesse caso, podemos pensar, sem nenhum problema, que o raio do 6º cilindro é igual a zero e, consequentemente, o seu volume é igual a zero.

Figura 82: Enunciado do Exercício 2 da atividade Volume da Esfera

Exercício 2 (Continuação)

Observando a tabela abaixo as três primeiras linhas foram preenchidas utilizando o Teorema de Pitágoras para determinar os quadrados dos raios das bases, preencha os espaços em branco seguindo o mesmo raciocínio:

Cilindro (n)	Altura (h_n)	Quadrado do raio (r_n^2)	Volume (v_n)
$n=1$	$h_1=\frac{R}{6}$	$r_1^2=R^2-\left(\frac{R}{6}\right)^2=R^2\left[1-\left(\frac{1}{6}\right)^2\right]$	$v_1=\pi\cdot r_1^2\cdot h_1=\pi\cdot\left[1-\left(\frac{1}{6}\right)^2\right]\cdot\frac{R^3}{6}$
$n=2$	$h_2=\frac{R}{6}$	$r_2^2=R^2-\left(\frac{2R}{6}\right)^2=R^2\left[1-\left(\frac{2}{6}\right)^2\right]$	$v_2=\pi\cdot r_2^2\cdot h_2=\pi\cdot\left[1-\left(\frac{2}{6}\right)^2\right]\cdot\frac{R^3}{6}$
$n=3$	$h_3=\frac{R}{6}$	$r_3^2=R^2-\left(\frac{3R}{6}\right)^2=R^2\left[1-\left(\frac{3}{6}\right)^2\right]$	$v_3=\pi\cdot r_3^2\cdot h_3=\pi\cdot\left[1-\left(\frac{3}{6}\right)^2\right]\cdot\frac{R^3}{6}$
$n=4$			
$n=5$			
$n=6$			

Figura 83: Continuação do enunciado do Exercício 2 da atividade Volume da Esfera

Exercício 2 (Continuação)

b) Utilizando a tabela do item (a) e o fato que V_6 é a soma dos volumes v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 e v_6, é possível expressar V_6 através da seguinte igualdade:

$$V_6 = v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 + v_6$$

Substitua os respectivos de v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 e v_6 na igualdade acima e complete o espaço abaixo com a expressão de V_6.

Resposta:

V_6 = ____.

c) Considerando ainda a semiesfera de raio R com n cilindros de altura $\frac{R}{n}$. Sabendo que V_n é a soma dos volumes v_1, v_2, $v_3, \cdots, v_n$, podemos de modo análogo ao item (b), expressar V_n através da seguinte igualdade:

$$V_n = v_1 + v_2 + v_3 + \cdots + v_n$$

Complete o espaço abaixo com a expressão de V_n.

V_n = ____.

OBSERVAÇÃO: A expressão encontrada no item (c) pode ser manipulada algebricamente de modo a ficar com o seguinte formato:

$$V_n = R^3 \cdot \left\{ \pi - \pi \left[\frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{n}{n}\right)^2 \right] \right\}$$

Repare que a expressão entre colchetes já apareceu em uma atividade anterior. Essa forma de escrever a expressão de V_n será importante para que o objetivo da atividade seja alcançado.

Figura 84: Continuação do enunciado do Exercício 2 da atividade Volume da Esfera

Dez das treze duplas acertaram o item **(a)** desse exercício. Apenas as duplas D_6, D_7 e D_8 erraram esse item.

As duplas D_5, D_6, D_8, D_9 e D_{10} não responderam de modo satisfatório o item **(b)**, a dupla D_9 não respondeu o item e as duplas D_5, D_6, D_8 e D_{10} deram respostas incorretas. Na figura 85 apresenta-se uma dessas respostas incorretas (dada pela dupla D_5).

b) Utilizando a tabela do item **a)** e o fato que V_6 é a soma dos volumes v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 e v_6, é possível expressar V_6 através da seguinte igualdade:

$$V_6 = v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 + v_6$$

Substitua os respectivos de v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 e v_6 na igualdade acima e complete o espaço abaixo com a expressão de V_6.

Resposta:

$V_6 = \pi + r_6^2 + h_6 = \pi \left[1 - \left(\frac{6}{6} \right)^2 + \frac{R^3}{6} \right.$

Figura 85: Resposta dada pela dupla D_5 para o Exercício 2 item (b)

A resposta incorreta dada pela dupla D_5 para o item (b) (figura 85) é incongruente com a resposta correta que, a mesma dupla apresentou para o item **(a)**. Por isso, acreditamos que esse erro foi ocasionado pelo não entendimento do que estava sendo solicitado no enunciado do item **(b)**. A resposta da dupla D_{10} para esse item foi similar. Já as duplas D_6 e D_8 responderam de forma incorreta este item, provavelmente pelo fato de terem errado também o item **(a)**. Ainda com relação ao item **(b)**, cabe observar que era esperado que a dupla D_7 também o errasse, uma vez que errou o item **(a)**. No entanto isso não aconteceu. Ainda que não possamos afirmar tal fato, suspeitamos que a dupla pode ter copiado a resposta de uma dupla que respondeu corretamente.

No que diz respeito ao item **(c)**, cinco das treze duplas (as duplas D_5, D_6, D_8, D_9 e D_{10}), não responderam de maneira correta o item. Como era esperado, as duplas que não acertaram o item **(b)**, também não conseguiram acertar o item **(c)**, Novamente a dupla D_9 não respondeu o item.

4.2.5.3 – Relato e Comentários sobre o Exercício 3

<u>Exercício 3</u>

a) No **<u>Exercício 1</u>** você deve ter concluído que $\lim V_n = V$, onde V é o volume da semiesfera de raio R. Usando esse resultado e a expressão obtida no **<u>Exercício 2</u>** é possível escrever a seguinte igualdade:

$$V = \lim V_n = \lim R^3 \cdot \left\{ \pi - \pi \left[\frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{n}{n}\right)^2 \right] \right\}$$

$$= R^3 \cdot \left\{ \pi - \pi \cdot \lim \left[\frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{n}{n}\right)^2 \right] \right\}$$

Na **Atividade preliminar para o estudo do volume da esfera**, concluímos que $\lim \left[\frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{n}\left(\frac{n}{n}\right)^2 \right] = \frac{1}{3}$. Utilizando este resultado, preencha as lacunas abaixo:

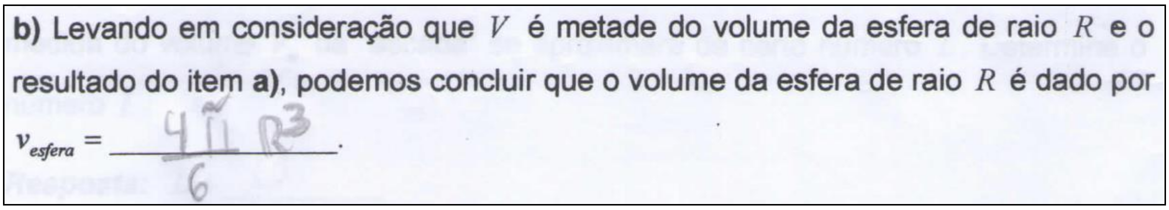
$$V = \lim V_n = R^3 \cdot \left\{ \pi - \pi \cdot \lim \left[\frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{n}{n}\right)^2 \right] \right\} = R^3 \cdot \{\pi - \pi \,\_\_\} = \_\_\, R^3$$

b) Levando em consideração que V é metade do volume da esfera de raio R e o resultado do item **a)**, podemos concluir que o volume da esfera de raio R é dado por $v_{esfera} =$ _______________.

OBSERVAÇÃO: Você acaba de deduzir uma expressão que permite calcular o volume da esfera de raio R.

Figura 86: Enunciado do Exercício 3 da atividade Volume da Esfera

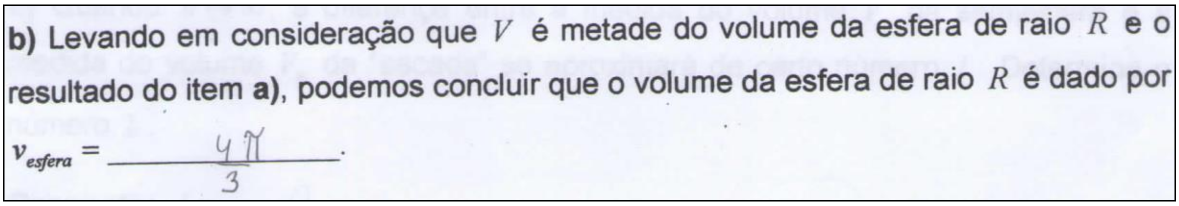
Nessa atividade apenas uma dupla (a dupla D_9) não respondeu satisfatoriamente o item **(a)**. Na realidade, como nos itens **(b)** e **(c)** do exercício 2, eles deixaram o exercício em branco. Já no item **(b)**, em que era esperado que as duplas chegassem a expressão correta para calcular o volume da esfera de raio de raio R, muitas duplas, na verdade seis das treze duplas se atrapalharam com as contas. Era apenas para multiplicar o resultado do item **(a)**, que é $\frac{2 \cdot \pi \cdot R^3}{3}$, por 2, para dessa forma obter $\frac{4 \cdot \pi \cdot R^3}{3}$. E o que aconteceu foi que algumas duplas (duplas D_2, D_3 e D_7) multiplicaram por dois o numerador e o denominador, outras se esqueceram de multiplicar por R^3 (duplas D_3, D_{11} e D_{13}) e novamente a dupla D_9 deixou o item em branco. Nas figuras 87 e 88, apresentam-se respectivamente as respostas incorretas dadas pelas duplas D_7 e D_{13} para o item **(b)** do exercício 3.



b) Levando em consideração que V é metade do volume da esfera de raio R e o resultado do item **a)**, podemos concluir que o volume da esfera de raio R é dado por

$v_{esfera} = \frac{4\pi R^3}{6}$.

Figura 87: Resposta dada pela dupla D_7 para o Exercício 3 item (b)



b) Levando em consideração que V é metade do volume da esfera de raio R e o resultado do item **a)**, podemos concluir que o volume da esfera de raio R é dado por

$v_{esfera} = \frac{4\pi}{3}$.

Figura 88: Resposta dada pela dupla D_{13} para o Exercício 3 item (b)

No caso das duplas em que não multiplicaram por R^3, o erro pode ter sido ocasionado por um esquecimento ou falta de atenção. Já o caso das duplas que multiplicaram o numerador e o denominador da fração $\frac{2 \cdot \pi \cdot R^3}{3}$ por dois, observa-se algo que infelizmente é muito comum entre alunos do ensino médio e fundamental: dificuldades com cálculos que envolvam frações.

Assim, considerando as intempéries de natureza numérica ou algébrica, acreditamos que a atividade atingiu seu objetivo. Afinal, sete das treze responderam satisfatoriamente a todos os itens dos exercícios.

4.3 AVALIAÇÃO

Para realizar a avaliação da pesquisa executada, julgamos importante dividir esse processo em dois momentos. No primeiro momento apresentaremos a avaliação realizada pelos próprios alunos participantes, sujeitos da pesquisa. No momento posterior será apresentada a avaliação do autor do presente trabalho e professor dos estudantes em questão.

4.3.1 Avaliação dos Alunos

Para implementar a avaliação dos alunos fizemos uso de uma escala Likert de cinco pontos. A escala Likert é utilizada para realizar pesquisas qualitativas, nessa escala é estabelecido o nível de concordância ou discordância relativo a uma afirmação enunciada. A escala Likert é assim denominada para homenagear o seu criador Rensis Likert que a propôs em 1932. De acordo com Malhotra (2006, p. 266-267) a escala Likert é "uma escala não comparativa, do tipo itemizada, que pode ser utilizada para avaliar produtos/serviços, onde o entrevistado assinala para cada item uma alternativa de acordo com seu grau de satisfação. Assim, para que os alunos pudessem avaliar o trabalho de pesquisa com eles desenvolvido, foi elaborado um questionário (ANEXO VII) com sete itens, onde em cada item o estudante marcaria uma "carinha" (smile) mostrando o grau de concordância com o que estava sendo afirmado em cada um deles. Na figura 89 temos as "carinhas" utilizadas no questionário.

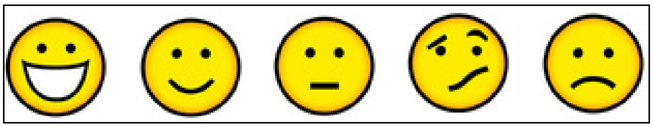


Figura 89: "Carinhas" utilizadas no questionário de avaliação dos alunos

Assim, ao marcar a quinta "carinha" (a que está toda triste), o aluno estaria afirmando que discorda totalmente do que está sendo afirmado no item. Se, por outro lado, ele marcar a primeira "carinha" (a que está toda sorridente), o aluno estaria afirmando justamente ao contrário: que ele concorda totalmente com relação ao que está sendo afirmado no item. As demais "carinhas" representam situações intermediárias: concorda parcialmente, não concorda e nem discorda, permanecendo indiferente ao que foi afirmado e discorda parcialmente.

Julgamos importante pedir aos alunos para que não colocassem o nome no questionário com o intuito de que pudessem responder sem nenhuma forma de constrangimento.

Embora no início da aplicação das atividades contássemos com a presença de 32 alunos na turma, tivemos um total de 24 questionários respondidos, em virtude de alguns alunos terem mudado de turno e de outros não frequentarem mais as aulas após o término das atividades. .

Para cada um dos itens, os resultados serão apresentados em uma tabela. Para quantificar os graus de satisfação “discordo totalmente”, “discordo parcialmente”, “indiferente”, “concordo parcialmente” e “concordo totalmente” em relação a cada um dos itens, atribuímos, respectivamente, os pesos 1, 2, 3, 4 e 5 calculando a média em cada um dos itens com o intuito de avaliar se as opiniões dos alunos ficaram na zona de concordância (média entre 3 e 5) ou na zona de discordância (média entre 1 e 3). Ao final será apresentado um gráfico das médias com respeito a cada um dos itens analisados (figura 90). Passaremos agora à análise, de um por um, dos setes itens do questionário.

Para o primeiro item que afirmava “O *GeoGebra* auxiliou você na resolução dos exercícios propostos.” obtivemos o seguinte resultado.

Tabela 2 – Primeiro item do questionário de avaliação dos alunos

Nível de Concordância	Concordo Totalmente	Concordo Parcialmente	Indiferente	Discordo Parcialmente	Discordo Totalmente
Quantidade de Alunos	7	11	2	2	2

Para este item temos a seguinte média:

$$Média = \frac{2\times 1 + 2\times 2 + 2\times 3 + 11\times 4 + 7\times 5}{24} = \frac{91}{24} \cong 3{,}8$$

Para o segundo item que cuja afirmativa era “Você gostou das atividades apresentadas.” obtivemos o seguinte resultado.

Tabela 3 – Segundo item do questionário de avaliação dos alunos

Nível de Concordância	Concordo Totalmente	Concordo Parcialmente	Indiferente	Discordo Parcialmente	Discordo Totalmente
Quantidade de Alunos	7	11	4	2	0

Para este item temos a seguinte média:

$$Média = \frac{0\times 1 + 2\times 2 + 4\times 3 + 11\times 4 + 7\times 5}{24} = \frac{95}{24} \cong 4{,}0$$

Para o terceiro item relativo a afirmação “Você gostaria que o seu professor utilizasse estas atividades em sala de aula.” obtivemos o seguinte resultado.

Tabela 4 – Terceiro item do questionário de avaliação dos alunos

Nível de Concordância	Concordo Totalmente	Concordo Parcialmente	Indiferente	Discordo Parcialmente	Discordo Totalmente
Quantidade de Alunos	9	4	6	3	2

Para este item temos a seguinte média:

$$Média = \frac{2\times 1 + 3\times 2 + 6\times 3 + 4\times 4 + 9\times 5}{24} = \frac{87}{24} \cong 3{,}6$$

Para o quarto item que cuja afirmativa era “A utilização do *GeoGebra* auxiliou para um bom entendimento da noção intuitiva de limite que foi utilizada nas atividades.” obtivemos o seguinte resultado.

Tabela 5 – Quarto item do questionário de avaliação dos alunos

Nível de Concordância	Concordo Totalmente	Concordo Parcialmente	Indiferente	Discordo Parcialmente	Discordo Totalmente
Quantidade de Alunos	6	13	2	2	1

Para este item temos a seguinte média:

$$Média = \frac{2\times 1 + 2\times 2 + 2\times 3 + 13\times 4 + 6\times 5}{24} = \frac{94}{24} \cong 3{,}9$$

Para o quinto item que cuja afirmativa era “A utilização do *GeoGebra* auxiliou para a compreensão das expressões utilizadas para calcular a área do círculo e os volumes do cilindro, do cone e da esfera.” o seguinte resultado.

Tabela 6 – Quinto item do questionário de avaliação dos alunos

Nível de Concordância	Concordo Totalmente	Concordo Parcialmente	Indiferente	Discordo Parcialmente	Discordo Totalmente
Quantidade de Alunos	7	8	8	0	1

Para este item temos a seguinte média:

$$Média = \frac{2\times 1 + 0\times 2 + 8\times 3 + 8\times 4 + 7\times 5}{24} = \frac{93}{24} \cong 3{,}9$$

Para o sexto item que cuja afirmativa era “A utilização do *GeoGebra* ajudou a encontrar as expressões que são utilizadas para calcular a área do círculo e os volumes do cilindro, do cone e da esfera.” obtivemos o seguinte resultado.

Tabela 7 – Sexto item do questionário de avaliação dos alunos

Nível de Concordância	Concordo Totalmente	Concordo Parcialmente	Indiferente	Discordo Parcialmente	Discordo Totalmente
Quantidade de Alunos	5	11	5	3	0

Para este item temos a seguinte média:

$$Média = \frac{0\times 1 + 3\times 2 + 5\times 3 + 11\times 4 + 5\times 5}{24} = \frac{90}{24} \cong 3{,}8$$

Para o sétimo item que cuja afirmativa era “A noção do Cálculo que foi utilizada nas atividades, ou seja, a noção de limite te auxiliou no entendimento das expressões da área do círculo e dos volumes do cilindro, do cone e da esfera” obtivemos o seguinte resultado.

Tabela 8 – Sétimo item do questionário de avaliação dos alunos

Nível de Concordância	Concordo Totalmente	Concordo Parcialmente	Indiferente	Discordo Parcialmente	Discordo Totalmente
Quantidade de Alunos	4	13	4	2	1

Para este item temos a seguinte média:

$$Média = \frac{1\times 1 + 2\times 2 + 4\times 3 + 13\times 4 + 4\times 5}{24} = \frac{89}{24} \cong 3{,}7$$

Dessa forma é possível verificar que a avaliação dos alunos foi positiva, visto que para cada item as médias ficaram muito próximas de 4, indicando assim que a maioria dos estudantes ficaram satisfeitos com as atividades aplicadas. A figura 90 mostra um gráfico com as médias obtidas para cada um dos sete itens analisados anteriormente

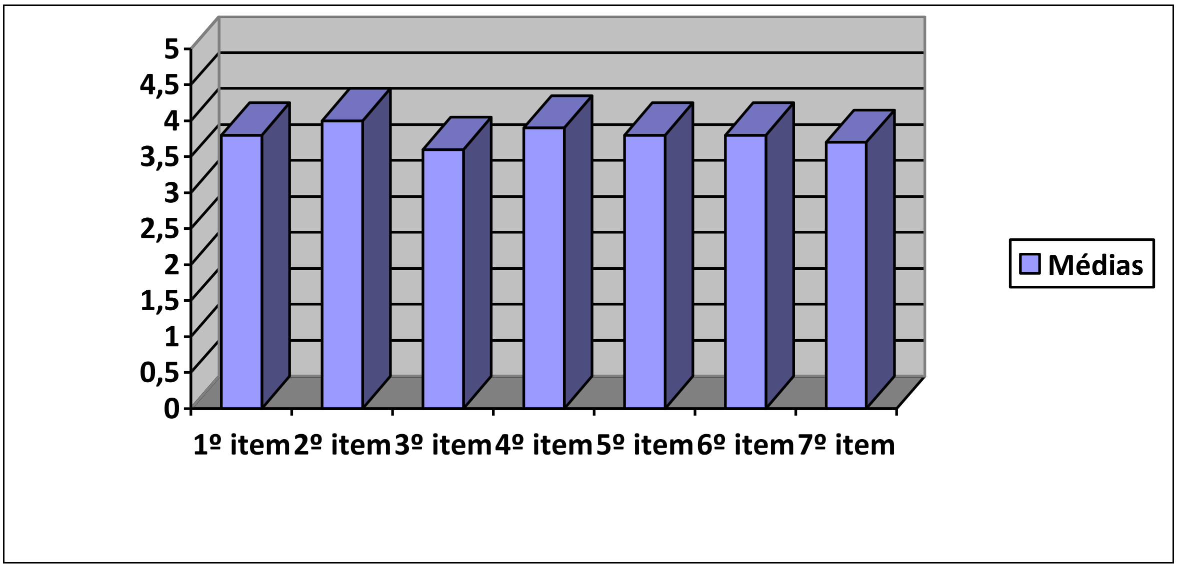


Figura 90: Gráfico com as médias obtidas em cada item do questionário de avaliação dos alunos

Por consulta direta ao gráfico da figura 69, percebe-se que as médias obtidas com os graus de satisfação em relação a todos os sete itens encontram-se na zona de concordância (entre 3,5 e 4,5), o que é um resultado muito favorável para a pesquisa realizada.

4.3.2 Avaliação do Professor

Apesar das dificuldades apresentadas pelos alunos com a escrita matemática e com a realização de alguns cálculos simples no decorrer da aplicação das atividades, acredito, enquanto professor, que essa pesquisa tenha sido bem sucedida. Pode-se perceber pelos resultados obtidos, que o objetivo das atividades foi atingido, visto que a realização das mesmas fez com que os alunos tivessem o contato com a noção intuitiva de limite e o método de exaustão, e que, mediante essas ideias, conseguissem compreender a origem das expressões utilizadas para o cálculo da área do círculo, do volume do cilindro, do volume do cone e do volume da esfera.

Sem dúvida, a falta de habilidade com operações algébricas e em processos de generalizações foram para alguns alunos os maiores obstáculos para a compreensão plena da sequência de atividades propostas. Mesmo assim, acreditamos que para esses alunos ficou marcada a origem de tais fórmulas, que geralmente são apresentadas a eles como uma informação cultural. Cabe destacar ainda que a ausência dessas habilidades também seriam obstáculos para a aprendizagem desses alunos mediante a abordagem tradicional apresentada nos livros didáticos analisados nessa dissertação que se utilizam do “Princípio de Cavalieri”. Não foram a ideia intuitiva de limite e o método de exaustão que fracassaram, mas as dificuldades de base latentes dos próprios alunos.

Ainda com relação a este fato, gostaria de fazer referência às dificuldades apresentadas pelos alunos no que tange à escrita matemática e aos cálculos algébricos. Em minha experiência, como professor de matemática do ensino fundamental e médio de colégios públicos (estaduais e municipais) e particulares, pude constatar que esse tipo de dificuldade é inerente a uma boa parte dos alunos. Contudo a dificuldade é muito maior nos alunos de colégios públicos. Em consequência disso, no momento de avaliar as atividades não levamos tanto em consideração esses fatos, uma vez que entendemos que as dificuldades na escrita matemática ou na realização de algum cálculo algébrico não quer dizer necessariamente que o aluno não compreendeu ou não atingiu o objetivo de uma atividade. Como no caso da Atividade Preliminar para o Estudo do Volume da Esfera onde as duplas esqueceram de colocar o símbolo de limite na frente da expressão da sequência, apesar de várias duplas haverem escrito a expressão da sequência e o valor do limite corretamente, como pode ser visto na figura 77 do capítulo 4.

Por outro lado, sabedor desses obstáculos e dos resultados da experiência realizada com essa pesquisa, imaginamos que, para uma aplicação desta sequência didática em turmas com o mesmo perfil cognitivo, alguns exercícios devam ser repensados. Seria o caso, por exemplo, de atenuar a ênfase dada em algumas manipulações formais e algébricas presentes em alguns exercícios e investir mais no potencial intuitivo e dinâmico dos próprios aplicativos gerados com o *GeoGebra*.

De fato, o software *GeoGebra* que deu uma contribuição significativa para a realização das atividades. Ele possibilitou que o processo dinâmico do método de exaustão e a noção intuitiva de limite fossem compreendidos pelos alunos. Na verdade, sem a utilização do *GeoGebra* ficaria praticamente inviável a realização dessa experiência, uma vez que os exercícios das atividades dependiam quase que totalmente de arquivos desenvolvidos com o software. A noção de limite pôde ser trabalhada e explorada de maneira eficaz mediante os recursos oferecidos pelo software nas cinco atividades aplicadas, o que pode ser constatado até mesmo na avaliação dos alunos que participaram das atividades. Dos vinte e quatro alunos que responderam ao questionário dezenove marcaram as opções concordo totalmente ou concordo parcialmente para a afirmativa: “A utilização do *GeoGebra* auxiliou para um bom entendimento da noção intuitiva de limite que foi utilizada nas atividades.”

Assim, levando em consideração os fatos apresentados nos parágrafos anteriores, reiteramos o fato de que as atividades atingiram os seus objetivos: dar sentido à origem das fórmulas utilizadas para o cálculo da área do círculo, do volume do cilindro, do volume do cone e do volume da esfera. Baseado na experiência vivenciada com a pesquisa que realizamos, saímos mais convictos de que algumas noções do Cálculo pode sim ter uma participação na vida escolar da educação básica.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Iniciamos o presente trabalho realizando uma breve consideração histórica sobre a resolução de problemas geométricos por meio de ferramentas que motivaram o desenvolvimento do Cálculo. Cálculos da área do círculo e dos volumes de sólidos de revolução são exemplos de problemas dessa natureza que culminaram com o desenvolvimento do Cálculo Integral. Por meio dessa revisão, constatamos que muito do que foi realizado por esses matemáticos foi feito inicialmente de maneira intuitiva. O processo de adaptação do método de exaustão dos gregos, realizado pelos filósofos escolásticos, que o tornaram um método direto pela introdução da operação de “passagem ao limite” é um ponto basal para a construção do conceito de integração séculos à frente. Acreditamos ser este processo uma boa raiz cognitiva para o aprendizado dos temas em questão (cálculos da área do círculo e dos volumes dos sólidos de revolução) no ensino médio. Desde então decidimos pautar nossa proposta de atividades didática neste estágio do desenvolvimento do cálculo integral, explorando, sobretudo, o aspecto intuitivo dessa abordagem. Assim como Fischbein (1994), também consideramos que o aspecto intuitivo constitui-se em um importante elemento no desenvolvimento do conhecimento matemático.

O nosso trabalho teve como foco a proposta de atividades para o estudo da área do Círculo e dos volumes do Cilindro, do Cone e da Esfera no ensino médio. Cabe frisar, mais uma vez, que esse trabalho não tem a intenção de dizer que o que tem sido realizado no ensino médio no tocante a esses temas esteja incorreto ou inapropriado, mas tem o intuito de mostrar que existe outra possibilidade de abordar tais assuntos, que considere uma participação mais efetiva das ideias do Cálculo. Essa nossa atitude é legítima dos pontos de vistas histórico e epistemológico. A nossa opção foi, conforme anunciado no capítulo 2 desta dissertação, a que escolhe o caminho da ***preparação*** para o Cálculo, tendo como referência os pontos de vistas de autores como Ávila (1991, 2006) e Rezende (2003). Neste capítulo apontamos também algumas razões pelas quais acreditamos na viabilidade de se introduzir noções intuitivas do Cálculo no ensino médio. Observamos o fato de que essa questão vai muito além de apenas preparar o estudante para um estudo posterior do Cálculo no nível superior, mas, sobretudo, possibilitar que o aluno seja capaz de compreender de uma maneira mais significativa alguns dos teoremas e fórmulas por eles utilizados na matemática escolar.

Assim, imbuídos das ideias apresentadas anteriormente, e tendo como suporte o uso de atividades elaboradas com o software *Geogebra 3D*, foi produzida, e apresentada no capítulo 3, uma sequência didática para o estudo da área do círculo e dos volumes de sólidos de revolução. Ao desenvolver e aplicar esta sequência didática em alunos de uma turma de 2º ano da rede pública estadual da qual sou professor, tínhamos a intenção de verificar a viabilidade da proposta elaborada. Nesse sentido, cabe destacar que o grupo de estudantes que participaram da experiência didática consistia de todos os alunos da turma de 2º ano escolhida, sem que se fizesse qualquer tipo de seleção *à priori*. A ideia é que se aplicasse a atividade em uma sala de aula *real*, sem qualquer tipo de preparação. Em consequência disso, na turma havia tanto alunos que gostavam como também alunos que não gostavam de matemática. É importante dizer que o IDEB da escola encontra-se atualmente na faixa de 2,9, sendo considerado muito baixo. Além disso, a escola não dispunha de computadores para que todos os alunos pudessem estar manipulando os arquivos do software durante as atividades.

Com base nos resultados obtidos com a experiência didática pôde-se concluir que os objetivos das atividades foram atingidos. Grande parte dos alunos conseguiu compreender a origem das expressões utilizadas para o cálculo da área do círculo, do volume do cilindro, do volume do cone e do volume da esfera, a partir da noção intuitiva de limite e do processo de exaustão.

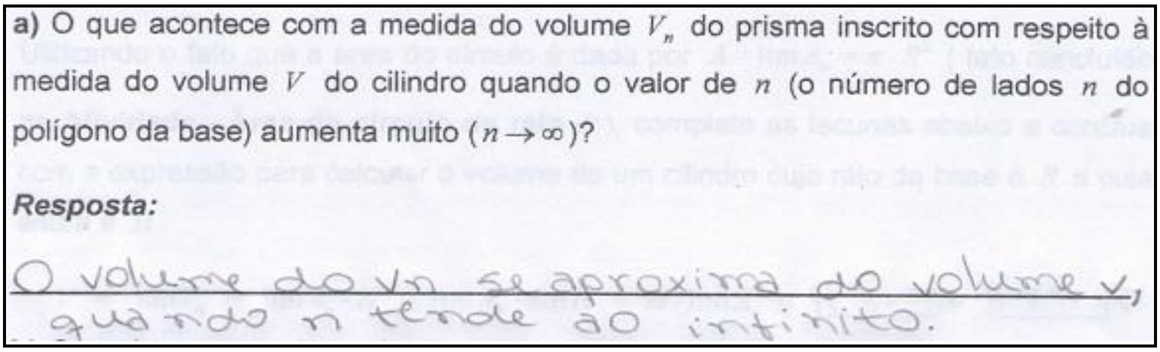
A prática da pesquisa revelou, entretanto, algumas dificuldades apresentadas por alguns alunos com a escrita matemática e com a realização de alguns cálculos simples no decorrer da aplicação das atividades. Além da falta de habilidade com operações algébricas, o que mais impressionou nas atitudes dos estudantes foi a incapacidade deles de realizarem processos de generalizações. Este sim, a nosso ver, foi o principal obstáculo para a compreensão plena da sequência de atividades propostas por parte desses alunos. Cabe destacar que as atividades aplicadas não visavam mensurar ou desenvolver o conhecimento algébrico dos alunos, mas sim verificar se estes eram capazes de entender a origem e o significado de cada uma das fórmulas apresentadas a eles, tudo isso a partir do método de exaustão e da noção intuitiva de limite. Nesse sentido, reafirmamos aqui que, mesmo para esses alunos com dificuldades evidentes, ficaram claras as origens e os significados das fórmulas apresentadas a eles. Além disso, conforme já foi mencionado em nossa avaliação das atividades, as ausências das competências e habilidades destacadas acima também seriam obstáculos para a aprendizagem desses alunos caso outras abordagens fossem utilizadas para o ensino desses tópicos. Para esses alunos, não foram as ideias intuitivas de limite e do método de exaustão que fracassaram, mas as suas próprias dificuldades de base latentes. Fica aqui registrado um sinal de alerta para o próprio ensino de álgebra.

Por outro lado, a partir dos resultados dessa pesquisa, avaliamos que, para uma aplicação desta sequência didática em turmas com mesmo perfil cognitivo, alguns exercícios devam ser repensados. Seria o caso, por exemplo, de atenuar a ênfase dada em algumas manipulações formais e algébricas presentes em alguns exercícios e investir mais no potencial intuitivo e dinâmico dos próprios aplicativos gerados com o *GeoGebra*, que, por sua vez, se mostrou bastante eficiente.

De fato. Por seu potencial interativo e dinâmico, o software, através de seus recursos, teve uma participação fundamental para a elaboração e a realização das atividades. O uso do recurso dinâmico associado ao processo de visualização 2D (no caso do círculo) ou 3D (no caso dos sólidos de revolução) possibilitou uma interpretação intuitiva da noção de limite e do método de exaustão, permitindo que as atividades atingissem seus objetivos. Os alunos, em consonância com as nossas impressões, também fizeram uma avaliação bastante positiva das atividades elaboradas com o *GeoGebra* (a média obtida no quarto item do questionário de avaliação foi de 3,91).

Conforme já foi dito, nosso trabalho teve como foco apenas a área do círculo e os volumes de sólidos de revolução. Todavia entendemos que uma abordagem que considere as ideias do Cálculo possa ser estendida a outros tópicos da matemática escolar do ensino básico. Não podemos continuar como os matemáticos da Grécia Antiga, com horror ao infinito. Já se passaram mais de vinte séculos, e a Matemática já se ocupou e venceu vários de seus obstáculos. Forem esses processos infinitos que deram origem ao Cálculo. Como disse-nos certa vez Hermann Weyl, “a Matemática é a ciência do Infinito”. Com efeito, o infinito é um dos conceitos fundamentais da Matemática. E sem o Cálculo, a presença dele [do infinito] fica bastante limitada ou escondida nas fórmulas, nas “regras” e em alguns princípios. A ideia de usar a noção intuitiva de limite e o método de exaustão para elaborar as atividades foi uma tentativa de possibilitar esta emersão dos processos infinitos na solução de problemas matemáticos.

Entendemos que nossa proposta foi um pouco ousada para as circunstâncias pedagógicas em que ocorreu a pesquisa. Entretanto, os obstáculos encontrados não nos desestimularam a realizar aquilo a que estávamos propostos a fazer. Muito pelo contrário, a experiência realizada e os resultados obtidos reforçaram nosso ponto de vista de que inserir noções do Cálculo no ensino médio pode, de fato, ser levado a efeito. Para mim foi muito gratificante poder ver um aluno do ensino médio, se apropriando da linguagem do Cálculo, escrever em sua ficha de atividade:



a) O que acontece com a medida do volume V_n do prisma inscrito com respeito à medida do volume V do cilindro quando o valor de n (o número de lados n do polígono da base) aumenta muito ($n \to \infty$)?

Resposta:

O volume do vn se aproxima do volume v, quando n tende ao infinito.

Figura 91: Resposta da dupla D_{16} para o Exercício 2 item (a) da Atividade Volume do Cilindro

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANDRÉ, S. L. da C. **Uma proposta para o ensino do conceito de derivada no ensino médio**. Dissertação de Mestrado. Rio de Janeiro: UFRJ, 2008.

ÁVILA, G. O Ensino do Cálculo no Segundo Grau. In: **Revista do Professor de Matemática**, n.18, Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 1991, p.1-9.

ÁVILA, G. Limites e Derivadas no Ensino Médio? In: **Revista do Professor de Matemática**, n.60, Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 2006, p.30-38.

BARON, M. E. E e BOS, H. J. M. **Curso de História da Matemática: origens e desenvolvimento do Cálculo**. Vol. 1, 2, 3, 4 e 5. Brasília: Universidade de Brasília, 1985.

BOYER, C.B. **História da Matemática**. Revista por Uta C. Merzbach; tradução Helena de Castro – 3.ed. São Paulo: Blucher, 2012.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio:** ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. vol. 02. Brasília: MEC, 2008.

BRASIL. Ministério da Educação. PCN+, Ensino Medio. **Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais.** Ciencias da Natureza, Matematica e suas Tecnologias, pp.117-118. 2002.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais** (PCN). Parte III: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, pp. 46. 2000.

BRASIL. **Programa Nacional do Livro Didático (PNLD)** - Guia de livros Didáticos. Ministério da Educação - Secretaria de Educação Básica, 2014.

BROLEZZI, A. C. **Raízes do Cálculo na Grécia Antiga**. Revista da Pesquisa e da Pós Graduação da UFOP, Ouro Preto, vol. 1, p. 1, 1999.

CARVALHO, J. B. P. de. **O cálculo na escola secundária - algumas considerações históricas**. Caderno CEDES. Campinas: Papirus, n. 40, p.68-81,1996.

DANTE, L.R. **Matemática: Contexto e Aplicações**, vol. 2. 2.ed. São Paulo: Ática, 2013.

DASSIE, B. A. **Euclides Roxo e a Constituição da Educação Matemática no Brasil**. Tese de Doutorado. Rio de Janeiro: Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 2008.

FAZENDA, I. (ORG.). **Metodologia da pesquisa educacional**. 12.ed. São Paulo: Cortez, 2010.

FROTA, M. C. R.; NASSER, L. (ORG.). **Educação matemática no ensino superior: Pesquisas e Debates**. Recife: SBEM, 2009

GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de cálculo**, vol.1. 5.ed. Rio de Janeiro: LTC, 2003.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; DEGENSZAJN, D.; PÉRIGO, R.; ALMEIDA, N.D.; . **Matemática: ciência e aplicações**, vol. 2. 7.ed. São Paulo: Saraiva, 2013.

LANG, S. **O volume de uma esfera**. Tradução: Yang Shufen. [Título original: 的球的體積. **翻譯：楊淑**芬]. Disponível em: <http://episte.math.ntu.edu.tw/articles/mm/mm_15_3_08/> (Acesso em 13/08/2013)

LEONARDO, F.M.D. **Conexões com a Matemática**, vol.2. 2.ed. São Paulo: Moderna, 2013.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. **A matemática do ensino médio** – vol. 2. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

MALHOTRA, N. **Pesquisa de Marketing: Uma orientação aplicada**. Tradução Laura Bocco. 4. ed. Porto Alegre: Bookman, 2006.

PAIVA, M. **Matemática: Paiva**, vol.1 e 2. 2.ed. São Paulo: Moderna, 2013.

PATERLINI**,** R. R. Os "Teoremas" de Cavalieri. In: **Revista do Professor de Matemática** n. 72, 2º quadrimestre de 2010, p. 43-47. Versão ampliada com as demonstrações dos teoremas. Disponível em: <www.dm.ufscar.br/ ptlini/> (Acesso em 13/08/2013).

PEREIRA, V. M. C. **Cálculo no Ensino Médio: Uma Proposta para o Problema da Variabilidade**. Dissertação de Mestrado. Rio de Janeiro: UFRJ, 2009.

PRIMO, M.E. **O princípio de Cavalieri para cálculo de volumes no ensino médio: algumas possibilidades**. Dissertação de Mestrado. Juiz de Fora: UFJF, 2013.

REZENDE, W. M. **O Ensino de Cálculo: Dificuldades de Natureza Epistemológica**. Tese de Doutorado. São Paulo: USP, 2003.

SMOLE, K.S.; DINIZ, M. I.; **Matemática ensino médio**, vol 1 e 2. 8.ed. São Paulo: Saraiva, 2013.

SOUZA, J. **Novo olhar matemática**, vol. 2 e 3. 2.ed. São Paulo: FTD, 2013.

VENTURIN, J. A. **O Processo de Integração em Blaise Pascal**. Dissertação de Mestrado. Rio Claro: UNESP, 2007.

ANEXOS

ANEXO I

Alunos:________________________ Data:___/___/___

Atividade – Área do Círculo

O objetivo dessa atividade é concluir que a área A de um círculo de raio R é dada por $A = \pi \cdot R^2$, para isso vamos dividir a atividade em seis exercícios. Para a realização das atividades lembre que um polígono regular é um polígono convexo que possui todos os seus lados com a mesma medida e cada ângulo interno também com a mesma medida.

Exercício 1

Abra o arquivo **Lados_dos_Poligonos_Inscritos.ggb**, onde tem-se um círculo de centro em O e um triângulo equilátero inscrito. Arrastando o controle deslizante "n" de 3 até 400, visualizam-se, para cada valor de n, polígonos regulares de n lados inscritos no círculo. Sejam L_n o lado do polígono regular de n lados e α_n o ângulo central correspondente ao mesmo polígono regular. Baseado no arquivo resolva os itens abaixo:

a) Complete a tabela para os respectivos valores n dados a seguir:

Número de Lados do Polígono (n)	**Medida do ângulo central (α_n)**	**Medida do Lado (L_n) do Polígono Regular**
$n = 10$	$\alpha_{10} =$	$L_{10} =$
$n = 20$	$\alpha_{20} =$	$L_{20} =$
$n = 30$	$\alpha_{30} =$	$L_{30} =$
$n = 40$	$\alpha_{40} =$	$L_{40} =$
$n = 50$	$\alpha_{50} =$	$L_{50} =$

$n = 100$	$\alpha_{100} =$	$L_{100} =$
$n = 150$	$\alpha_{150} =$	$L_{150} =$
$n = 200$	$\alpha_{200} =$	$L_{200} =$
$n = 250$	$\alpha_{250} =$	$L_{250} =$
$n = 300$	$\alpha_{300} =$	$L_{300} =$
$n = 400$	$\alpha_{400} =$	$L_{400} =$

b) Observando a tabela preenchida, é possível perceber que, quando o número n de lados do polígono aumenta, a medida de L_n ficará muito próxima de certo número. Qual é esse número? ***Resposta:***__________________________________

c) Pela mesma tabela observa-se que, quando o número n de lados do polígono aumenta, a medida do ângulo central α_n também se aproxima de certo número. Qual é esse número? ***Resposta:***___ ______________________________________

Em um ramo da matemática conhecido como Cálculo Diferencial e Integral, utilizamos com muita frequência esse processo de “aproximação infinita”. Quando aumentamos muito, o valor de uma variável, no nosso caso representado pela letra n (o número de lados do polígono), dizemos que n tende ao infinito e indicamos por $n \to \infty$. Já o número encontrado para a variável L_n, quando $n \to \infty$, é indicado por $\lim L_n$(lê-se: limite de L_n quando $n \to \infty$ ou simplesmente limite de L_n). Da mesma forma o número encontrado para a variável α_n é indicado por $\lim \alpha_n$ (lê-se: limite de α_n quando $n \to \infty$ ou limite de α_n).

d) Utilizando a notação acima e os valores encontrados nos itens **b)** e **c)**, podemos expressar então os limites $\lim L_n$ e $\lim \alpha_n$. Para isso, preencha as lacunas os abaixo com os números encontrados nos itens anteriores:

Resposta: $\lim L_n =$ __________ e $\lim \alpha_n =$ __________

Exercício 2

Abra o arquivo **Apotemas_dos_Poligonos_Inscritos.ggb**. Arrastando o controle deslizante "n" de 3 até 400, visualizam-se polígonos regulares de n lados inscritos no círculo. Sejam R o raio do círculo e a_n o apótema do polígono regular inscrito no círculo. Baseado no arquivo resolva os itens abaixo:

a) O que acontece com a medida do apótema a_n do polígono inscrito com respeito à medida do raio R do círculo quando o valor de n aumenta muito ($n \to \infty$)?

Resposta:

____

b) Quando n aumentar muito ($n \to \infty$), a diferença entre a medida do raio R e a medida do apótema a_n se aproximará de certo número L. Determine o número L.

Resposta: $L =$ ___________

c) Utilizando a notação do Cálculo, o número L encontrado no item anterior pode ser expresso como $L = \lim R - a_n$. Sendo assim, complete o espaço abaixo com o valor desse limite.

Resposta: $L = \lim R - a_n =$ ___________

d) Determine o $\lim a_n$.

Resposta:

____

____

OBSERVAÇÃO: Ao resolver corretamente essa atividade, você estará concluindo intuitivamente mediante argumentos do Cálculo, que o apótema do polígono regular inscrito se aproxima do raio do círculo quando $n \to \infty$.

Exercício 3

Abra o arquivo **Comprimento_da_circunferencia.ggb**. Arrastando o controle deslizante "n" de 3 até 400, visualizam-se polígonos regulares de n lados inscritos no círculo. Sejam C o comprimento da circunferência e P_n o perímetro do polígono regular inscrito no círculo. Baseado no arquivo resolva os itens abaixo:

a) O que acontece com a medida do perímetro P_n do polígono inscrito com respeito à medida do comprimento C da circunferência quando o valor de n aumenta muito, ($n \to \infty$)?

Resposta:____

b) Quando n aumentar muito ($n \to \infty$), a diferença entre a medida do comprimento da circunferência C e a medida do perímetro P_n do polígono inscrito se aproximará de certo número M. Determine o número M.

Resposta: $M =$ __________

c) Utilizando a notação do Cálculo, o número M encontrado no item anterior pode ser expresso como $M = \lim C - P_n$. Sendo assim, complete o espaço abaixo com o valor desse limite. ***Resposta:*** $M = \lim C - P_n =$ __________

d) Determine o $\lim P_n$.

Resposta:____

e) Lembrando que o comprimento da circunferência é dado por $C = 2 \cdot \pi \cdot R$. Pode-se afirmar, então que: $\lim P_n =$ ___________

OBSERVAÇÃO: Ao resolver corretamente essa atividade, você estará concluindo intuitivamente mediante argumentos do Cálculo, que o perímetro do polígono regular inscrito se aproxima do comprimento da circunferência quando $n \to \infty$.

Exercício 4

Abra o arquivo **Area_do_circulo.ggb**. Arrastando o controle deslizante "n" de 3 até 400, visualizam-se polígonos regulares de n lados inscritos no círculo. Sejam A a área do círculo e A_n a área do polígono regular inscrito no círculo. Baseado no arquivo resolva os itens abaixo:

a) O que acontece com a medida da área A_n do polígono inscrito com respeito à medida da área do círculo A conforme o valor de n aumenta muito ($n \to \infty$)?

Resposta:____

b) Quando n aumentar muito ($n \to \infty$), a diferença entre a medida da área do círculo A e o valor da área A_n do polígono inscrito se aproximará de certo número N. Determine o número N.

Resposta: $N =$ __________

c) Utilizando a notação do Cálculo, o número N encontrado no item anterior pode ser expresso como $N = \lim A - A_n$. Sendo assim, complete o espaço abaixo com o valor desse limite.

Resposta: $M = \lim A - A_n =$ __________

d) Determine o $\lim A_n$.

Resposta:

____

____

OBSERVAÇÃO: Ao resolver corretamente essa atividade, você estará concluindo intuitivamente com argumentos do Cálculo, que a área do polígono regular inscrito se aproxima da área do círculo quando $n \to \infty$.

Exercício 5

Abra o arquivo **Arquimedes_1. ggb**. Arrastando o controle deslizante "n" de 4 até 100, visualiza-se polígonos regulares inscritos na janela 1 e os triângulos que formam o polígono inscrito na janela 2. Baseado no arquivo resolva os itens a seguir:

a) Observe que cada vez que aumentamos o número o n, o número de triângulos com vértice no centro do círculo e que formam o polígono também aumenta.

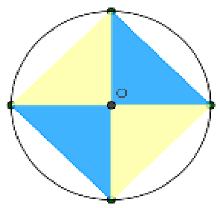
a.1) Quantos triângulos formam o polígono de **4** lados?________________________

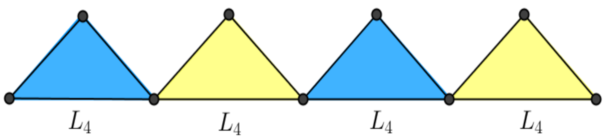
a.2) Quantos triângulos formam o polígono de **6** lados?________________________

a.3) Quantos triângulos formam o polígono de **8** lados?________________________

a.4) Quantos triângulos formam o polígono de **n** lados?________________________

b) Observe as figuras a seguir:





Assim, o perímetro P_4 do polígono regular inscrito de 4 lados (quadrado), pode ser expresso em função do seu lado L_4, do seguinte modo:

$$P_4 = L_4 + L_4 + L_4 + L_4 = 4 \cdot L_4$$

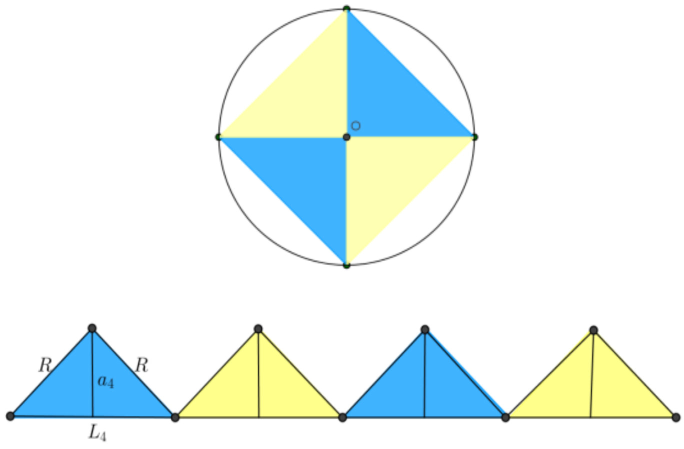
Lembrando que P_n é o perímetro do polígono regular n lados inscrito no círculo, utilize o raciocínio acima e preencha as lacunas abaixo:

b.1) $P_6 =$ ____ $=$ ________

b.2) $P_8 =$ ____ $=$ ________

b.3) $P_n =$ ____ $=$ ________

c) Observe as figuras abaixo:



As figuras acima dão a idéia de como expressar a área do polígono inscrito. A área A_4 do polígono de 4 lados inscrito (quadrado), pode ser expressa da seguinte forma:

$$A_4 = \frac{L_4 \cdot a_4}{2} + \frac{L_4 \cdot a_4}{2} + \frac{L_4 \cdot a_4}{2} + \frac{L_4 \cdot a_4}{2} = \frac{4 \cdot L_4 \cdot a_4}{2}$$

De fato, a área A_4 do polígono de quatro lados inscrito (o quadrado) é composta pela soma das áreas dos quatro triângulos isósceles de base L_4 e altura igual ao apótema a_4. Lembrando que A_n é área do polígono inscrito, utilize o raciocínio acima e complete as lacunas abaixo:

c.1) $A_6 =$ ____ = ___________

c.2) $A_8 =$ ____ = ___________

c.3) $A_n =$ ____ = ___________

d) No item **a)** você encontrou uma expressão para o perímetro P_n e no item **b)** uma expressão para a área A_n do polígono regular inscrito, em função de n, L_n e a_n. Utilizando essas expressões, expresse A_n e em função apenas de P_n e de a_n.

Resposta: ____

Exercício 6

Nesse exercício você encontrará uma expressão para calcular a área do círculo de duas formas diferentes. O **Exercício 6.1** será a primeira forma e o **Exercício 6.2** será a segunda.

Exercício 6.1 (1ª forma)

No **Exercício 2** você concluiu que $\lim a_n = R$, no **Exercício 3** que $\lim P_n = 2 \cdot \pi \cdot R$ e no **Exercício 4** que $\lim A_n = A$, onde A é a área do círculo de raio R. Utilizando a expressão encontrada no item **(d)** do **Exercício 5**, é possível escrever as seguintes igualdades:

$$A = \lim A_n = \lim \frac{P_n \cdot a_n}{2} = \frac{\lim P_n \cdot \lim a_n}{2}$$

Dessa forma, mediante o que foi concluído no **Exercício 2** e no **Exercício 3** complete as lacunas abaixo e conclua com a expressão que permite calcular a área do círculo de raio R.

$$A = \lim A_n = \lim \frac{P_n \cdot a_n}{2} = \frac{\lim P_n \cdot \lim a_n}{2} = \underline{\hspace{5cm}} = \underline{\hspace{3.5cm}}$$

OBSERVAÇÃO: Você acabou de deduzir mediante a noção intuitiva de limite, muita utilizada no estudo do Cálculo, uma expressão que permite calcular a área de um círculo quando conhecemos seu raio R.

Exercício 6.2 (2ª forma)

Abra o arquivo **Arquimedes_2.ggb.** onde visualiza-se um círculo com polígonos regulares inscritos divididos em triângulos isósceles azuis e amarelos e um retângulo com contorno verde de base B e altura H sobre o qual estão dispostos os triângulos que formam o polígono inscrito. Arraste o controle deslizante "n" de 4 até 180 e responda os itens abaixo:

a) Observe as bases dos triângulos azuis e amarelos (lados do polígono inscrito). Repare que a soma das bases de todos os triângulos azuis é igual a soma das bases de todos os triângulos amarelos. Observe ainda que a soma de todas as bases dos triângulos (azuis e amarelos) é igual ao perímetro P_n do polígono inscrito. Seja B_n a medida da soma das bases dos triângulos azuis para o polígono de n lados inscrito no círculo. Assim, para o polígono de 4 lados (quadrado) e de 6 lados (hexágono), é possível escrever:

$$B_4 = L_4 + L_4 = 2 \cdot L_4 = \frac{P_4}{2}$$

e

$$B_6 = L_6 + L_6 + L_6 = 3 \cdot L_6 = \frac{P_6}{2}$$

Utilizando o raciocínio acima e o arquivo **Arquimedes_2.ggb**, preencha as lacunas abaixo:

a.1) $B_8 =$ ______________________ = _________= _________

a.2) $B_{10} =$ _____________________ = _________= _________

a.3) $B_n =$ ______________________ = _________= _________

b) No arquivo **Arquimedes_2.ggb** observa-se que quando $n \to \infty$, B_n se aproximará da base do retângulo. Sendo assim, do ponto de vista do Cálculo pode-se dizer que a base do retângulo B é igual ao $\lim B_n$. Dessa forma, utilizando a expressão anterior é possível escrever as igualdades abaixo:

$$B = \lim B_n = \frac{\lim P_n}{2}$$

Sendo assim, utilize o resultado do **Exercício 3** e complete a lacuna abaixo com a medida da base B do retângulo :

$$B = \lim B_n = \frac{\lim P_n}{2} = \underline{\hspace{3cm}}$$

c) No mesmo arquivo é possível perceber que as alturas (apótema do polígono) dos triângulos (azuis e amarelos) se aproximam da altura H do retângulo quando $n \to \infty$. Utilizando o resultado da **Exercício 2**, complete a lacuna abaixo com a medida da altura do retângulo:

$$H = \lim a_n = \underline{\hspace{3cm}}$$

d) Observando o arquivo é fácil ver que a área do círculo A e do retângulo são iguais, quando n aumentar muito ($n \to \infty$). Dessa forma, tem-se que:

$$A = \text{Área do Retângulo} = B \cdot H = \lim B_n \cdot \lim a_n = \underline{\hspace{4cm}} = \underline{\hspace{3cm}}$$

OBSERVAÇÃO: Você acabou de deduzir de outra forma, mediante a noção intuitiva de limite, uma expressão que permite calcular a área de um círculo quando conhecemos seu raio R.

ANEXO II

Alunos:________________________ Data:___/___/___

Atividade - Volume do Cilindro

O objetivo dessa atividade é concluir que o volume V de um cilindro de raio R e altura H é dado por $V = \pi \cdot R^2 \cdot H$, para isso vamos dividir a atividade em três exercícios.

Exercício 1

Sejam A_n e V_n respectivamente a área da base e o volume do prisma regular (cuja base é um polígono regular de n lados) inscrito num cilindro de raio R e altura H. Observe que a altura do prisma também é H uma vez que o prisma está inscrito no cilindro. Dessa forma, complete os espaços em branco da tabela abaixo seguindo o mesmo raciocínio utilizado para preencher as duas primeiras linhas:

Número de Lados do Polígono da Base	Área da Base do Prisma Regular	Altura do Prisma Regular Inscrito no Cilindro	Volume do Prisma Regular Inscrito no Cilindro
3	A_3	H	$V_3 = A_3 \cdot H$
4	A_4	H	$V_4 = A_4 \cdot H$
5			
6			
7			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n			

Da tabela acima é possível concluir que o volume do prisma inscrito em função de A_n e H é $V_n =$ ____________.

Exercício 2

Abra o arquivo **Prismas_Regulares_Inscritos_no_Cilindro.ggb**, onde tem-se um prisma regular de base triangular inscrito em um cilindro. Arrastando o controle deslizante "**n**" de 3 até 70, visualiza-se uma sequência de prismas regulares inscritos em um cilindro. Seja V_n o volume do prisma regular inscrito no cilindro ($3 \leq n \leq 70$) e V o volume do cilindro. Baseado no arquivo resolva os itens a seguir:

a) O que acontece com a medida do volume V_n do prisma inscrito com respeito à medida do volume V do cilindro quando o valor de n (o número de lados n do polígono da base) aumenta muito ($n \to \infty$)?

Resposta:____

b) Quando n aumentar muito ($n \to \infty$), a diferença entre a medida do volume V do cilindro e a medida do volume V_n do prisma regular inscrito no cilindro se aproximará de certo número L. Determine o número L. ***Resposta:*** $L =$ __________

c) Utilizando a notação do Cálculo, o número L encontrado no item anterior pode ser expresso como $L = \lim V - V_n$. Sendo assim, complete o espaço abaixo com o valor desse limite.

Resposta: $L = \lim V - V_n =$ __________

d) Determine o $\lim V_n$. (Responda apenas em função de V)

Resposta:____

OBSERVAÇÃO: Ao resolver corretamente esse exercício, você estará concluindo intuitivamente através de argumentos do Cálculo, que o volume do prisma regular inscrito se aproxima do volume do cilindro que o circunscreve quando $n \to \infty$.

Exercício 3

No **Exercício 1** você concluiu que $V_n = A_n \cdot H$, onde V_n é o volume do prisma regular inscrito no cilindro e no **Exercício 2** que $\lim V_n = V$, onde V é o volume do cilindro de raio R e altura H. Assim, é possível escrever as seguintes igualdades:

$$V \quad = \quad \lim V_n \quad = \quad \lim H \cdot A_n \quad = \quad H \cdot \lim A_n$$

Utilizando o fato que a área do círculo é dada por $A = \lim A_n = \pi \cdot R^2$ (fato concluído na **Atividade - Área do círculo de raio** R), complete as lacunas abaixo e conclua com a expressão para calcular o volume de um cilindro cujo raio da base é R e cuja altura é H.

$$V \;=\; \lim V_n \;=\; \lim A_n \cdot H \;=\; \lim A_n \cdot \lim H \;=\; H \cdot \lim A_n \;=\; \_\_\_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

Logo, conclui-se que o volume do cilindro de raio R e altura H é $V =$ _________.

OBSERVAÇÃO: Você acabou de deduzir mediante a noção intuitiva de limite, muita utilizada no estudo do Cálculo, uma expressão que permite calcular o volume de um cilindro quando conhecemos o raio R da base e sua altura H.

ANEXO III

Alunos:________________________ Data:___/___/___

Atividade - Volume do Cone

O objetivo dessa atividade é concluir que o volume de um cone de raio da base R e altura H é dado por $V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot H$, para isso vamos dividir a atividade em três exercícios.

Exercício 1

Sejam A_n e V_n respectivamente a área da base e volume da pirâmide regular (cuja base é um polígono regular de n lados) inscrita num cone de raio R e altura H. Observe que a altura da pirâmide também é H uma vez que a pirâmide está inscrita no cone. Dessa forma, complete os espaços em branco da tabela abaixo seguindo o mesmo raciocínio utilizado para preencher as duas primeiras linhas:

Número de Lados do Polígono da Base	**Área da Base da Pirâmide Regular**	**Altura da Pirâmide Regular Inscrita no Cone**	**Volume da Pirâmide Regular Inscrita no Cone**
3	A_3	H	$V_3 = \frac{1}{3} \cdot A_3 \cdot H$
4	A_4	H	$V_4 = \frac{1}{3} \cdot A_4 \cdot H$
5			
6			
7			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n			

Da tabela acima podemos concluir que o volume da pirâmide inscrita em função de

A_n e H é dado por $V_n =$ ____________.

Exercício 2

Abra o arquivo **Pirâmides_Regulares_Inscritas_no_Cone.ggb.**, onde tem-se uma pirâmide regular de base triangular inscrita em um cone. Arrastando o controle deslizante "**n**" de 3 até 70, visualiza-se uma sequência de pirâmides regulares inscritas em um cone. Seja V_n o volume da pirâmide regular inscrita no cone ($3 \le n \le 70$) e V o volume do cone. Baseado no arquivo resolva os itens a seguir:

a) O que acontece com a medida do volume V_n da pirâmide inscrita com respeito à medida do volume V do cone quando o valor de n (o número de lados n do polígono da base) aumenta muito ($n \to \infty$)?

Resposta:

____

b) Quando n aumentar muito ($n \to \infty$), a diferença entre a medida do volume V do cone e a medida do volume V_n da pirâmide regular inscrita no cone se aproximará de certo número M. Determine o número M.

Resposta: $M =$ __________

c) Utilizando a notação do Cálculo, o número M encontrado no item anterior pode ser expresso como $M = \lim V - V_n$. Sendo assim, complete o espaço abaixo com o valor desse limite. ***Resposta:*** $M = \lim V - V_n =$ __________

d) Determine o $\lim V_n$. (Responda apenas em função de V)

Resposta:____

OBSERVAÇÃO: Ao resolver corretamente esse exercício, você estará concluindo intuitivamente através de argumentos do Cálculo, que o volume da pirâmide regular inscrita se aproxima do volume do cone que a circunscreve quando $n \to \infty$.

Exercício 3

No **Exercício 1** você concluiu que $V_n = \frac{1}{3} \cdot A_n \cdot H$, onde V_n é o volume da pirâmide regular inscrita no cone e no **Exercício 2** que $\lim V_n = V$, onde V é o volume do cone de raio R e altura H. Assim, é possível escrever as seguintes igualdades:

$$V \quad = \quad \lim V_n \quad = \quad \lim \frac{1}{3} \cdot A_n \cdot H \quad = \quad \frac{1}{3} \cdot H . \lim A_n$$

Utilizando o fato que a área do círculo é dada por $A = \lim A_n = \pi \cdot R^2$ (fato concluído na **Atividade - Área do círculo de raio** R), complete as lacunas abaixo e conclua com a expressão para calcular o volume de um cone cujo raio da base é R e cuja altura é H.

$$V \quad = \quad \lim V_n \quad = \quad \lim \frac{1}{3} \cdot A_n \cdot H \quad = \quad \frac{1}{3} \cdot H . \lim A_n \quad = \underline{\hspace{5cm}} = \underline{\hspace{3.5cm}}$$

Logo, conclui-se que o volume do cone de raio R e altura H é $V =$ ___________ .

OBSERVAÇÃO: Você acabou de deduzir mediante a noção intuitiva de limite, muita utilizada no estudo do Cálculo, uma expressão que permite calcular o volume de um cone quando conhecemos o raio da base R e sua altura H.

ANEXO IV

Alunos:_____________________________ Data:___/___/___

Instituto de Matemática e Estatística
Universidade Federal Fluminense
PROFMAT
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Atividade Preliminar para o Estudo do Volume da Esfera

O objetivo dessa atividade é determinar o limite da sequência $\left[\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{2}{n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{n}\left(\frac{n}{n}\right)^2\right]$, com o intuito de que o seu resultado possa ser utilizado para a obtenção de uma expressão que permita calcular o volume de uma esfera de raio R. Para isso vamos dividir a atividade em dois exercícios.

Exercício 1

Abra o arquivo **Escada_no_Quadrado.ggb**, onde tem-se um quadrado ABCD de lado igual a 1. Arrastando o controle deslizante "n" de 1 até 100, visualiza-se quadradinhos verdes de lado $\frac{1}{n}$ que formam uma "escada". Seja E_n a área dessa "escada". Baseado no arquivo resolva os itens a seguir:

a) Quando $n \to \infty$, essa "escada" ficará muito parecida com uma figura geométrica. Qual o nome dessa figura geométrica? ***Resposta:*** ______________________________

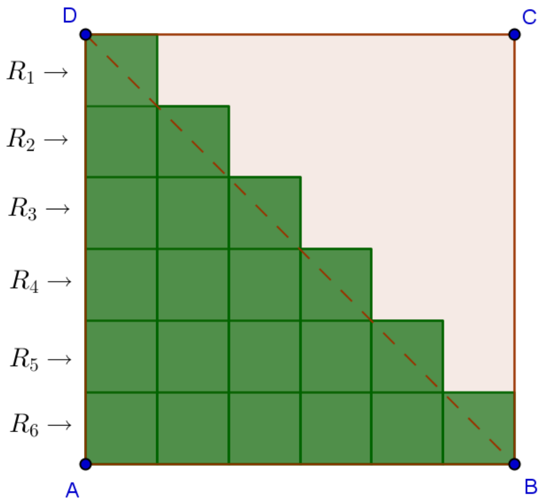
b) Determine a medida da área dessa figura geométrica?

Resposta:

c) Determine o $\lim E_n$ (complete o espaço abaixo com o valor desse limite).

Resposta: $\lim E_n =$ ____________ .

d) Considere o quadrado de lado 1 da figura abaixo onde os quadradinhos são congruentes e possuem o lado medindo $\frac{1}{6}$.



Sejam A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 e A_6 as áreas, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 e b_6 as bases e h_1, h_2, h_3, h_4, h_5 e h_6 as alturas dos retângulos R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 e R_6 respectivamente. Observe a tabela abaixo onde foram preenchidas a primeira coluna e as três primeiras linhas. Utilize o mesmo raciocínio e preencha os espaços em branco:

Retângulo (R_n)	Altura (h_n)	Base (b_n)	Área (A_n)
R_1	$h_1 = \frac{1}{6}$	$b_1 = \frac{1}{6}$	$A_1 = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)$
R_2	$h_2 = \frac{1}{6}$	$b_2 = \frac{2}{6}$	$A_2 = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{2}{6}\right)$
R_3	$h_3 = \frac{1}{6}$	$b_3 = \frac{3}{6}$	$A_3 = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{3}{6}\right)$
R_4			
R_5			
R_6			

e) Usando a tabela do item **d)** e o fato que E_6 é a soma das áreas A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 e A_6, complete o espaço abaixo, mas não calcule.

$E_6 = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6 =$ ______________________________________.

OBSERVAÇÃO: Perceba que E_6 é a área da “escada” quando o lado dos quadradinhos que formam a “escada” mede $\frac{1}{6}$.

f) Nesse item, ao invés de considerar o quadrado de lado 1 com quadradinhos de lado $\frac{1}{6}$, considere o quadrado de lado 1 com quadradinhos de lado $\frac{1}{n}$. Sabendo que E_n é a soma das áreas A_1, A_2, $A_3, \cdots, A_n$ complete o espaço abaixo, seguindo um raciocínio análogo ao do item **e)**.

$E_n = A_1 + A_2 + A_3 + \cdots + A_n =$ ____.

OBSERVAÇÃO: Perceba que E_n é a área da “escada” quando o lado dos quadradinhos que formam a escada mede $\frac{1}{n}$.

g) A expressão encontrada para E_n no item **f)** nos possibilita escrever a seguinte igualdade:

$$\lim E_n = \lim\left(A_1 + A_2 + A_3 + \cdots + A_n\right)$$

Utilizando o item **c)**, o item **f)** e a igualdade acima, complete os espaços a seguir.

$\lim E_n = \lim\left(A_1 + A_2 + A_3 + \cdots + A_n\right) =$ ____________________________________ = ____

OBSERVAÇÃO: Esse exercício foi importante, pois as ideias nele utilizadas são parecidas com as do próximo exercício, cujo resultado será essencial para a realização da **Atividade - Volume da esfera**.

Exercício 2

Abra o arquivo **Escada_no_Cubo.ggb**, onde tem-se um cubo de aresta igual a 1. Arrastando o controle deslizante "n" de 1 até 100, visualiza-se paralelepípedos verdes de altura $\frac{1}{n}$ que formam uma "escada" dentro do cubo, cada paralelepípedo constitui um degrau da "escada" e, além disso, é formado por cubinhos de aresta igual a $\frac{1}{n}$. Seja F_n o volume da "escada" formada pelos paralelepípedos. Baseado no arquivo resolva os itens a seguir:

a) Quando $n \to \infty$, essa "escada" ficará muito parecida com um sólido geométrico. Qual o nome desse sólido geométrico?

Resposta:

____

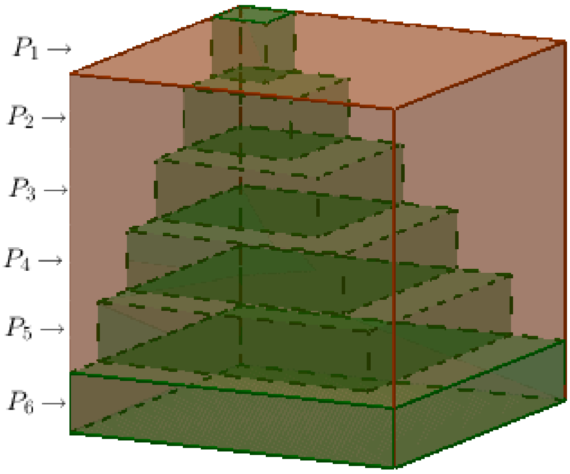
b) Determine a medida do volume desse sólido geométrico?

Resposta:

c) Determine o $\lim F_n$ (complete o espaço abaixo com o valor desse limite).

Resp: $\lim F_n =$ ___________ .

d) Considere o cubo de aresta igual a 1 da figura abaixo onde a altura de cada paralelepípedo é igual a $\frac{1}{6}$ e cada paralelepípedo é constituído de cubinhos de aresta igual a $\frac{1}{6}$.



Sejam V_1, V_2, V_3, V_4, V_5 e V_6 os volumes, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 e A_6 as áreas das bases e h_1, h_2, h_3, h_4, h_5 e h_6 as alturas dos paralelepípedos P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 e P_6, respectivamente. Observe a tabela abaixo onde foram preenchidas as três primeiras linhas. Utilize o mesmo raciocínio e preencha os espaços em branco:

Paralelepípedo (P_n)	Altura (h_n)	Área da Base (A_n)	Volume (V_n)
P_1	$h_1 = \frac{1}{6}$	$A_1 = \left(\frac{1}{6}\right)^2$	$V_1 = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2$
P_2	$h_2 = \frac{1}{6}$	$A_2 = \left(\frac{2}{6}\right)^2$	$V_2 = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^2$
P_3	$h_3 = \frac{1}{6}$	$A_3 = \left(\frac{3}{6}\right)^2$	$V_3 = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{3}{6}\right)^2$
P_4			
P_5			
P_6			

e) Utilizando a tabela do item **d)** e o fato que F_6 é a soma dos volumes V_1, V_2, V_3, V_4, V_5 e V_6, complete o espaço abaixo, mas não calcule.

$F_6 = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5 + V_6 =$ ____.

OBSERVAÇÃO: Perceba que F_6 é o volume da "escada" quando a altura dos paralelepípedos é igual a $\frac{1}{6}$.

f) Agora ao invés de considerar o cubo de aresta igual a 1 com paralelepípedos de altura $\frac{1}{6}$ formados por cubinhos de aresta igual a $\frac{1}{6}$, considere o cubo de aresta 1 com paralelepípedos de altura $\frac{1}{n}$, formados por cubinhos de aresta $\frac{1}{n}$. Sabendo que F_n é a soma dos volumes V_1, V_2, $V_3, \cdots, V_n$ complete o espaço abaixo, seguindo um raciocínio análogo ao do item **e)**.

$F_n = V_1 + V_2 + V_3 + \cdots + V_n =$ ____.

OBSERVAÇÃO: Perceba que F_n é o volume da "escada" quando a altura dos paralelepípedos é igual a $\frac{1}{n}$.

g) Através da expressão encontrada para F_n no item **f)** obtemos a seguinte igualdade:

$$\lim F_n = \lim \left(V_1 + V_2 + V_3 + \cdots + V_n\right)$$

Utilizando o item **c)**, o item **f)** e a igualdade acima, complete os espaços a seguir.

$\lim F_n = \lim \left(V_1 + V_2 + V_3 + \cdots + V_n\right) =$ ______________________________________ = ____

OBSERVAÇÃO: O resultado encontrado no item **g)** desse exercício é muito importante e será utilizado na atividade que visa encontrar uma expressão algébrica que permita calcular o volume de uma esfera de raio R.

ANEXO V

Alunos:________________________ Data:___/___/___

Atividade - Volume da Esfera

O objetivo dessa atividade é concluir que o volume de uma esfera de raio R é dado por $V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi \cdot R^3$. Para isso vamos dividir a atividade em três exercícios.

<u>Exercício 1</u>

Abra o arquivo **cilindros_inscritos_na_semiesfera.ggb**, onde tem-se um cilindro circular reto inscrito em uma semiesfera de raio igual a R. Arrastando o controle deslizante “n” de 2 até 150, visualiza-se cilindros inscritos de altura $\frac{R}{n}$ formando um tipo de “escada” na semiesfera. Seja V_n o volume da “escada” formada por esses cilindros e V o volume da semiesfera de raio R. Baseado no arquivo resolva os itens a seguir:

a) O que acontece com a medida do volume V_n da escada com respeito à medida do volume V da semiesfera quando $n \to \infty$?

Resposta:____

b) Quando $n \to \infty$, a diferença entre a medida do volume V da semiesfera e a medida do volume V_n da “escada” se aproximará de certo número L. Determine o número L. ***Resposta:*** $L =$ ___________

c) Utilizando a notação do Cálculo, o número L encontrado no item anterior pode ser expresso como $L = \lim V - V_n$. Sendo assim, complete o espaço abaixo com o valor desse limite. ***Resposta:*** $L = \lim V - V_n =$ ___________

d) Determine o $\lim V_n$. (Responda apenas em função de V)

Resposta:____

Exercício 2

a) Na figura 1 temos cilindros inscritos em uma semiesfera de raio igual a R, cuja altura de cada um mede $\frac{R}{6}$, indicando que o raio foi dividido em seis segmentos de medida $\frac{R}{6}$. Já na figura 2 temos a seção transversal da figura 1 onde estão indicados os raios dos dois primeiros cilindros e o raio da semiesfera.

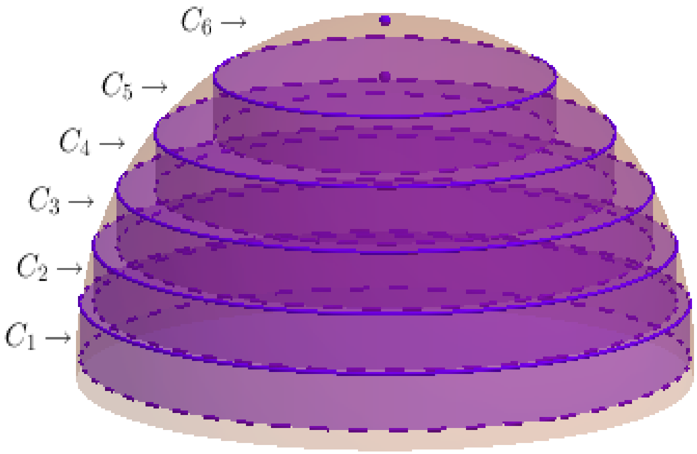


Figura 3

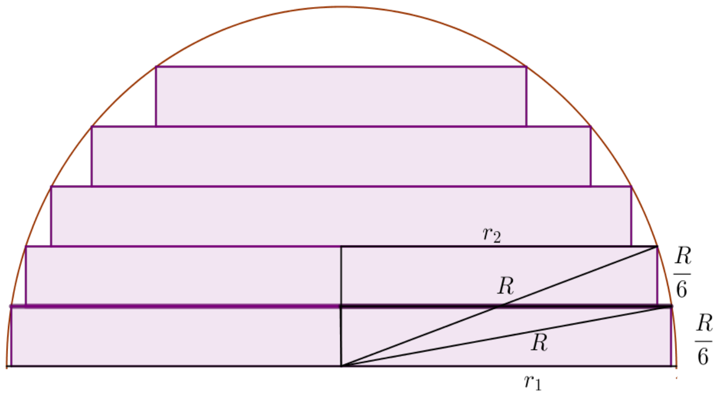


Figura 4

Sejam v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 e v_6 os volumes, r_1^2, r_2^2, r_3^2, r_4^2, r_5^2 e r_6^2 os quadrados dos raios das bases e h_1, h_2, h_3, h_4, h_5 e h_6 as alturas dos cilindros C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 e C_6, respectivamente. Observe na figura 1, que embora esteja indicado, não existe o sexto cilindro. Nesse caso, podemos pensar, sem nenhum problema, que o raio do 6º cilindro é igual a zero e, consequentemente, o seu volume é igual a zero.

Exercício 2 (Continuação)

Observando a tabela abaixo onde foram preenchidas as três primeiras linhas utilizando o Teorema de Pitágoras para determinar os quadrados dos raios das bases, preencha os espaços em branco seguindo o mesmo raciocínio:

Cilindro (n)	Altura (h_n)	Quadrado do raio (r_n^2)	Volume (v_n)
$n=1$	$h_1 = \frac{R}{6}$	$r_1^2 = R^2 - \left(\frac{R}{6}\right)^2 = R^2\left[1-\left(\frac{1}{6}\right)^2\right]$	$v_1 = \pi \cdot r_1^2 \cdot h_1 = \pi \cdot \left[1-\left(\frac{1}{6}\right)^2\right] \cdot \frac{R^3}{6}$
$n=2$	$h_2 = \frac{R}{6}$	$r_2^2 = R^2 - \left(\frac{2R}{6}\right)^2 = R^2\left[1-\left(\frac{2}{6}\right)^2\right]$	$v_2 = \pi \cdot r_2^2 \cdot h_2 = \pi \cdot \left[1-\left(\frac{2}{6}\right)^2\right] \cdot \frac{R^3}{6}$
$n=3$	$h_3 = \frac{R}{6}$	$r_3^2 = R^2 - \left(\frac{3R}{6}\right)^2 = R^2\left[1-\left(\frac{3}{6}\right)^2\right]$	$v_3 = \pi \cdot r_3^2 \cdot h_3 = \pi \cdot \left[1-\left(\frac{3}{6}\right)^2\right] \cdot \frac{R^3}{6}$
$n=4$			
$n=5$			
$n=6$			

Exercício 2 (Continuação)

b) Utilizando a tabela do item **(a)** e o fato que V_6 é a soma dos volumes v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 e v_6, é possível expressar V_6 através da seguinte igualdade:

$$V_6 = v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 + v_6$$

Substitua os respectivos de v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 e v_6 na igualdade acima e complete o espaço abaixo com a expressão de V_6.

Resposta:

V_6 = ____

c) Considerando ainda a semiesfera de raio R com n cilindros de altura $\frac{R}{n}$. Sabendo que V_n é a soma dos volumes v_1, v_2, $v_3, \cdots, v_n$, podemos de modo análogo ao item **b)**, expressar V_n através da seguinte igualdade:

$$V_n = v_1 + v_2 + v_3 + \cdots + v_n$$

Complete o espaço abaixo com a expressão de V_n.

V_n = ____.

OBSERVAÇÃO: A expressão encontrada no item **(c)** pode ser manipulada algebricamente de modo a ficar com o seguinte formato:

$$V_n = R^3 \cdot \left\{ \pi - \pi \left[\frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{n} \right)^2 + \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{2}{n} \right)^2 + \cdots + \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{n}{n} \right)^2 \right] \right\}$$

Repare que a expressão entre colchetes já apareceu em uma atividade anterior. Essa forma de escrever a expressão de V_n será importante para que o objetivo da atividade seja alcançado.

Exercício 3

a) No **Exercício 1** você deve ter concluído que $\lim V_n = V$, onde V é o volume da semiesfera de raio R. Usando esse resultado e a expressão obtida no **Exercício 2** é possível escrever a seguinte igualdade:

$$V = \lim V_n = \lim R^3 \cdot \left\{ \pi - \pi \left[\frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{n} \right)^2 + \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{2}{n} \right)^2 + \cdots + \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{n}{n} \right)^2 \right] \right\}$$

$$= R^3 \cdot \left\{ \pi - \pi \cdot \lim \left[\frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{n} \right)^2 + \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{2}{n} \right)^2 + \cdots + \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{n}{n} \right)^2 \right] \right\}$$

Na **Atividade preliminar para o estudo do volume da esfera**, concluímos que $\lim \left[\frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{n} \right)^2 + \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{2}{n} \right)^2 + \cdots + \frac{1}{n}\left(\frac{n}{n} \right)^2 \right] = \frac{1}{3}$. Utilizando este resultado, preencha as lacunas abaixo:

$$V = \lim V_n = R^3 \cdot \left\{ \pi - \pi \cdot \lim \left[\frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{n} \right)^2 + \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{2}{n} \right)^2 + \cdots + \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{n}{n} \right)^2 \right] \right\} = R^3 \cdot \{\pi - \pi \cdot \_\_\_\} = \_\_\_ R^3$$

b) Levando em consideração que V é metade do volume da esfera de raio R e o resultado do item **a)**, podemos concluir que o volume da esfera de raio R é dado por $v_{esfera} =$ ________________.

OBSERVAÇÃO: Você acaba de deduzir através de argumentos do Cálculo uma expressão que permite calcular o volume da esfera de raio R.

ANEXO VI

Alunos:________________________ Data:___/___/___

***Atividade* – Área do Círculo (Apêndice)**

Esse apêndice visa mostrar como é possível concluir matematicamente que $\lim \alpha_n = 0$, $\lim L_n = 0$ e que $\lim a_n = R$.

<u>Exercício 1 – Apêndice</u>

Nessa atividade você concluirá que realmente faz sentido que $\lim \alpha_n = 0$.

a) Seja n o número de lados do polígono regular e α_n o ângulo central. Para o polígono inscrito de 3 lados podemos escrever $\alpha_3 = 120^{\circ}$ como $\alpha_3 = \frac{360^{\circ}}{3}$ e $\alpha_4 = 90^{\circ}$ como $\alpha_4 = \frac{360^{\circ}}{4}$. Utilize o mesmo raciocínio e escreva os ângulos a seguir:

a.1) $\alpha_5 =$ _____________ **a.2)** $\alpha_6 =$ ______________ **a.3)** $\alpha_n =$ _____________

b) Observe a tabela abaixo, onde aparecem alguns valores de α_n:

n	α_n	α_n
3	$\frac{360^{\circ}}{3}$	120°
4	$\frac{360^{\circ}}{4}$	90°
5	$\frac{360^{\circ}}{5}$	72°
360	$\frac{360^{\circ}}{360}$	1°

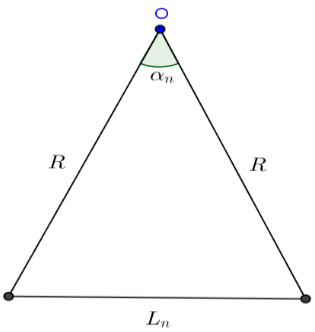
3600000	$\dfrac{360^\circ}{3600000}$	$0{,}0001^\circ$

Da tabela acima, você pode concluir que $\lim \alpha_n = \lim \dfrac{360^\circ}{n} =$ ____________________.

Exercício 2 – Apêndice

Nessa atividade você concluirá que realmente faz sentido que $\lim L_n = 0$.

a) Lembre que para qualquer valor de n, os triângulos que compõem o polígono são triângulos isósceles congruentes entre si. É fácil ver que a medida dos lados congruentes em cada um desses triângulos é igual a medida do raio do círculo. Chamando de R o raio do círculo, de L_n o lado do polígono de n lados considere um dos triângulos que formam o polígono de n lados, como na figura abaixo:



Utilize a Lei dos Cossenos e o fato de que $\alpha_n = \dfrac{360^\circ}{n}$ para mostrar que o lado L_n do polígono regular inscrito pode ser expresso por $L_n = R\sqrt{2 - 2\cos\left(\dfrac{360^\circ}{n}\right)}$.

Resposta:

b) Agora você vai calcular o $\lim L_n$ e verificar que seu resultado é realmente zero. Utilizando a expressão encontrada no item anterior é possível escrever as igualdades abaixo:

$$\lim_{n\to\infty} L_n = \lim_{n\to\infty} R\sqrt{2-2\cos\left(\frac{360^o}{n}\right)} = R\sqrt{2-2\cos\left(\lim_{n\to\infty}\frac{360^o}{n}\right)}$$

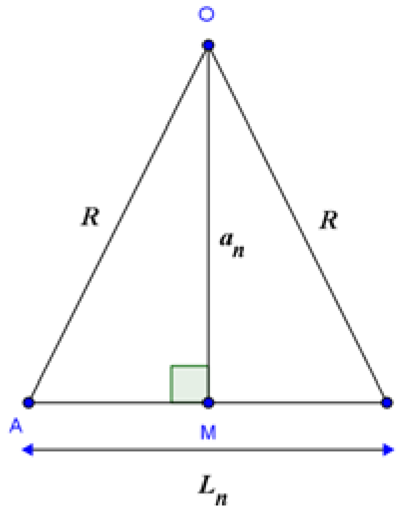
Substitua o valor do $\lim \frac{360^o}{n}$ na igualdade acima e calcule o valor da expressão correspondente. Com isso, você estará calculando $\lim L_n$.

Resposta:

Atividade 3 – Apêndice

Nessa atividade concluirá que realmente faz sentido que $\lim a_n = R$.

a) Sejam R, L_n e a_n respectivamente o raio do círculo, o lado e o apótema do polígono regular de n lados. Considere o triângulo abaixo, que conforme foi visto, é um dos triângulos que compõem o polígono regular de n lados. Aplique o Teorema de Pitágoras para mostrar que $a_n = \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - L_n{}^2}$.



Resposta:

b) Agora você vai calcular o $\lim a_n$ e verificar que seu resultado é realmente igual ao raio R do círculo. Utilizando a expressão encontrada no item anterior podemos escrever as igualdades abaixo:

$$\lim a_n \quad = \quad \lim \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - L_n{}^2} \quad = \quad \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - \left(\lim L_n\right)^2}$$

Substitua o valor do $\lim L_n$ encontrado no item anterior na igualdade acima e calcule o valor da expressão correspondente. Com isso, você estará calculando $\lim a_n$.

Resposta:

ANEXO VII

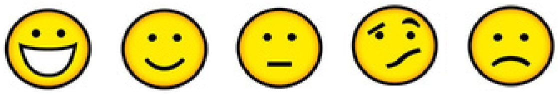
Avaliação das Atividades

Sua opinião é importante!

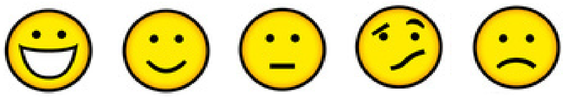
Lembre-se: você não precisa concordar!

Marque o *smile* que melhor representa seu grau de concordância com cada item.

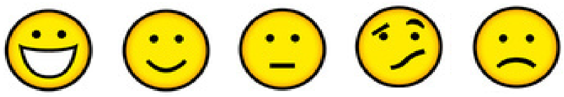
1. O *GeoGebra* auxiliou você na resolução dos exercícios propostos.



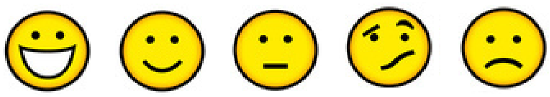
2. Você gostou das atividades apresentadas.



3. Você gostaria que o seu professor utilizasse estas atividades em sala de aula.

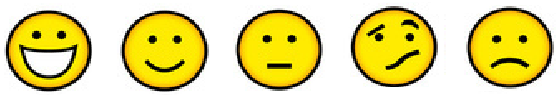


4. A utilização do *GeoGebra* auxiliou para um bom entendimento da noção intuitiva de limite que foi utilizada nas atividades.

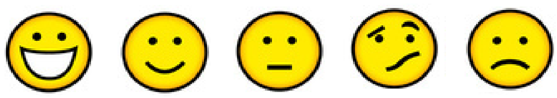


5. A utilização do *GeoGebra* auxiliou para um melhor entendimento das expressões utilizadas para calcular a área do círculo e os volumes do cilindro, do cone e da esfera.

6. A utilização do *GeoGebra* ajudou a encontrar as expressões que são utilizadas para calcular a área do círculo e os volumes do cilindro, do cone e da esfera.



7. A noção do Cálculo que foi utilizada nas atividades, ou seja, a noção de limite, te auxiliou no entendimento das expressões da área do círculo e dos volumes do cilindro, do cone e da esfera .



ANEXO VIII

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Título do Estudo: "VOLUMES DE SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO NO ENSINO MÉDIO: UMA ABORDAGEM DINÂMICA E INTUITIVA A PARTIR DAS IDEIAS DO CÁLCULO"

Responsável pelo Estudo: Davi Pereira Fortes Araujo

Este estudo tem o objetivo inserir noções de Cálculo no Ensino Médio, através do estudo da geometria elementar.

Para tanto, o procedimento realizado será a aplicação de atividades em sala de aula que visam mostrar aos estudantes tais noções. Posteriormente será feita uma análise dos resultados obtidos inserindo-os no trabalho de conclusão de curso do Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT).

Após ler e receber explicações sobre a pesquisa, e ter meus direitos de:

1. receber resposta a qualquer pergunta e esclarecimento sobre os procedimentos, riscos, benefícios e outros relacionados ao estudo;
2. retirar o consentimento a qualquer momento e deixar de participar do estudo;
3. não ser identificado e ser mantido o caráter confidencial das informações relacionadas à privacidade;
4. procurar esclarecimentos com o Comitê de Ética em Pesquisa da Universidade Federal Fluminense através do telefone (21) 2629-9189, situado na Rua Miguel de Frias, 9 – Icaraí – Niterói/RJ – 24.220-900, em caso de dúvidas ou notificação de acontecimentos não previstos.

Declaro estar ciente do exposto, consentindo em participar do estudo.

Itaboraí, _____de______________ de 2014.

Nome do participante:____

Assinatura:____

Eu, *Davi Pereira Fortes Araujo*, declaro que forneci as informações referentes ao estudo ao participante e estarei disponível para quaisquer outros esclarecimentos que se façam necessário.

____

Telefones: (21) 99778-6235 / (21) 3637-3375

____

Supervisão: Dr. Wanderley Moura Rezende

SIAPE: 0311551