Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
Coordenação do PROFMAT

EDILSON JOSÉ CURVELLO MACHADO

EXPLORANDO INVARIANTES GEOMÉTRICOS COM O GEOGEBRA: UMA SELEÇÃO PARA A SALA DE AULA

Orientador:

Humberto José Bortolossi

NITERÓI

DEZEMBRO/2015

Edilson José Curvello Machado

Explorando Invariantes Geométricos com O GeoGebra: Uma Seleção para A Sala de Aula

Niterói – RJ

Dezembro / 2015

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca de Pós-graduação em Matemática da UFF

M149 Machado, Edilson José Curvello Machado
Explorando Invariantes Geométricos com o GeoGebra: Uma Seleção para A Sala de Aula / Edilson José Curvello Machado. – Niterói: [s.n.], 2015.
63 f.

Orientador: Humberto José Bortolossi
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT) – Universidade Federal Fluminense, 2015.

1. Geometria Dinâmica. 2. Invariantes Geométricos. 3. GeoGebra. I. Título.

CDD: 510.7

Edilson José Curvello Machado

Explorando Invariantes Geométricos com O GeoGebra: Uma Seleção para A Sala de Aula

Dissertação apresentada à Coordenação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da Universidade Federal Fluminense para a obtenção do título de Mestre em Matemática

Orientador:
Humberto José Bortolossi

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

Niterói – RJ

Dezembro / 2015

Dissertação de Mestrado Profissional sob o título *“Explorando Invariantes Geométricos com o Geogebra: Uma Seleção para A Sala de Aula”*, defendida por Edilson José Curvello Machado e aprovada em 17 de dezembro de 2015, em Niterói, Rio de Janeiro, pela banca examinadora constituída pelos professores:

Humberto José Bortolossi
Doutor em Matemática pela PUC-Rio
Orientador

Brígida Alexandre Sartini
Doutora em Engenharia de Sistemas e Computação pela UFRJ

Fabio Luiz Borges Simas
Doutor em Matemática pelo IMPA

Maria Lúcia Tavares de Campos
Doutora em Educação Matemática pelo Centro Universitário Anhanguera

Mitchael Alfonso Plaza Martelo
Doutor em Matemática pela UFRJ

A todos os professores que levam a sério a missão de ensinar e que se transformam dia a dia na busca de aprimoramento.

Agradecimentos

Agradeço ao PROFMAT pela oportunidade de realizar esse sonho, aos professores da UFF que souberam conduzir o curso com sabedoria e compreensão das nossas dificuldades, em especial, ao professor Humberto Bortolossi que conduziu essa pesquisa, aos colegas de turma que compartilharam suas experiências durante as aulas, aos alunos do PROFMAT que participaram da pesquisa e a minha esposa, filhos e netos que deram aquela força nas horas difíceis.

Ninguém ignora tudo. Ninguém sabe tudo. Todos nós sabemos alguma coisa. Todos nós ignoramos alguma coisa. Por isso aprendemos sempre. (Paulo Freire)

Ninguém educa ninguém, ninguém educa a si mesmo, os homens se educam entre si, mediatizados pelo mundo. (Paulo Freire)

Resumo

Estudos apontam que, em Geometria, alunos da Escola Básica frequentemente confundem propriedades do desenho com propriedades do objeto geométrico representado. Assim, por exemplo, um quadrado girado deixa de ser um quadrado para esses alunos. Possivelmente, este tipo de comportamento seja um reflexo da natureza estática de como a Geometria é comumente trabalhada em sala de aula (figuras não podem ser movidas ou alteradas em uma página de um livro). Isto cria um ambiente vicioso propício para desenhos bem particulares do tipo "prototípicos" onde, por exemplo, quadrados e retângulos quase sempre aparecem desenhados com os lados paralelos às bordas da folha e os triângulos, na sua maioria, são acutângulos e quase sempre estão desenhados com um dos lados na "horizontal" e sua altura na "vertical". Mais ainda: os exemplos e exercícios propostos nos livros didáticos são, em geral, aqueles cujas soluções são baseadas em operações aritméticas do tipo "calcule" ou em equações "determine o valor de x", de modo que, para os alunos, a posição relativa do desenho quanto a borda da página, a operação aritmética ou a equação utilizada passam a fazer parte das características do objeto, estabelecendo então desequilíbrios na formação dos conceitos. Deste modo, a operação de multiplicação substitui o conceito de área e a soma substitui o conceito de perímetro, o Teorema de Tales e a semelhança de triângulos se "escondem" em equações complicadas e o Teorema de Pitágoras acaba se reduzindo a uma pura aplicação da equação de segundo grau. Neste trabalho, propomos atividades que procuram contrapor este cenário: apresentamos uma coleção de exercícios, classificados por nível de dificuldade, onde os alunos devem implementar a construção do enunciado usando um *software* de geometria dinâmica, arrastar os pontos livres e semilivres para estudar o problema, descobrir (por si mesmos) invariantes geométricos associados à configuração e, por fim, tentar prová-los.

Palavras-chave: Ensino e Aprendizagem de Geometria; Invariantes Geométricos; Geometria Dinâmica; GeoGebra; Sketchometry.

Abstract

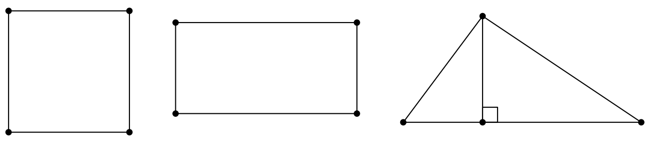
Studies show that, in Geometry, Basic School students often confuse drawing properties with properties of the geometric object being represented. So, for example, a rotated square ceases to be a square for these students. Possibly, this type of behavior is a reflection of the static nature of how Geometry is commonly worked out in the classroom (figures on a page of a book cannot be moved or changed). This creates a vicious environment that favors very particular “prototypical” constructions where, for example, squares and rectangles almost always appear drawn with their sides parallel to the edges of the sheet and the triangles, mostly, are acute and drawn with one of their sides in the “horizontal” and the respective height in the “vertical”. Moreover, the examples and exercises proposed in textbooks are, in general, those whose solutions are based on arithmetic-type operations (“calculate”) or equations (“determine the value of x”), so that, for students, the relative position of the drawing with respect to the page borders, the arithmetic operation or the equation being used become part of the object’s characteristics, then establishing imbalance in the formation of concepts. In this way, the multiplication operation replaces the concept area and the sum operation replaces the concept of perimeter, the Thales Theorem and the similarity of triangles “hide” in complicated equations and the Pythagorean Theorem has just been reduced to a pure application of the quadratic equation. In this work, we propose activities that seek to counteract this scenario: we present a collection of exercises, sorted by level of difficulty, where students must implement the given construction using a dynamic geometry *software*, drag free points to study the problem, find out (by themselves) geometric invariants associated with the construction and, finally, try to prove them.

Keywords: The teaching and learning of Geometry; Geometric Invariants; Dynamic Geometry; GeoGebra; Sketchometry.

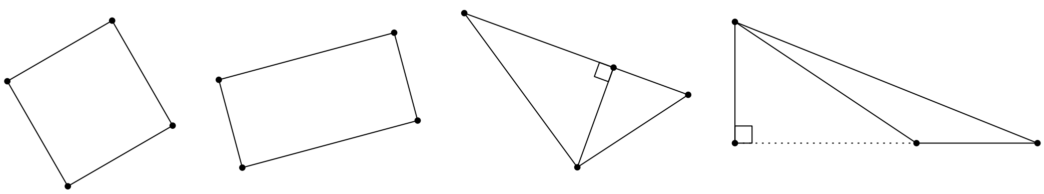
Sumário

1 Introdução

Nossa experiência em escolas confirma resultados já apontados por Gravina (1996): em geral, alunos do Ensino Fundamental e do Ensino Médio apresentam pouca compreensão dos objetos geométricos, confundem propriedades do desenho com propriedades do objeto geométrico representado, ou seja, misturam a *componente figural* associada ao desenho com a *componente conceitual*, aquela que define o objeto por meio das suas propriedades intrínsecas. Essa confusão entre as propriedades do desenho e aquelas do objeto geométrico tem origem nos livros didáticos e práticas de ensino de nossas escolas. Os livros escolares iniciam seus assuntos com definições verbais, nem sempre claras e precisas, onde determinada propriedade é enfatizada, acompanhadas de desenhos bem particulares do tipo "prototípicos" onde, por exemplo, quadrados e retângulos apresentam desenhados quase sempre com os lados paralelos às bordas da folha e os triângulos, na sua maioria, são acutângulos e quase sempre estão desenhados com um dos lados na "horizontal" e sua altura na "vertical" (figura a seguir).



Isto leva nossos alunos a não reconhecerem desenhos destes mesmos objetos em outras posições (como na figura a seguir).



Mais ainda: os exemplos e exercícios propostos são, em geral, aqueles cujas soluções são baseadas em operações aritméticas do tipo "calcule" ou em equações "determine o valor de *x*", de modo que, para os alunos, a posição relativa do desenho quanto a borda da página, o traçado particular do segmento, a operação aritmética ou a equação utilizada passam a fazer parte das características do objeto estabelecendo desequilíbrios na formação dos conceitos. Deste modo, a operação de multiplicação substitui o conceito de área e a soma substitui o conceito de perímetro, o Teorema de Tales e a semelhança de triângulos se "escondem" em equações complicadas e o Teorema de Pitágoras acaba se reduzindo a uma pura aplicação da equação de segundo grau.

Como nos aponta Gravina (1996), faltam no contexto escolar mais atividades que explorem os conceitos geométricos em si:

> *O aspecto de construção dos objetos geométricos raramente é abordado; dificilmente encontramos no livro escolar a instrução "construa", e no entanto esta é uma das atividades que leva o aluno ao domínio de conceitos geométricos. Mais difícil ainda é encontrar questões do tipo "o que podemos dizer nesta situação?" ou "que regularidades percebemos?", onde estratégias de investigação devem ser estabelecidas.*
>
> (Gravina, 1996, p. 2)

Na formação dos conceitos da Geometria, a componente figural desempenha um papel fundamental. O desenho é um suporte concreto de expressão e entendimento da componente conceitual. Se, por um lado, ele revela os conceitos e resultados que ajudam em sua compreensão, por outro, guarda características particulares que não pertencem ao conjunto das propriedades que definem o objeto geométrico problematizado. Em diversas situações de aprendizagem, os alunos devem, num mesmo problema, controlar diversas informações num mesmo desenho e deduzir aquelas propriedades importantes para sua compreensão.

> *Deduzir uma propriedade significa estabelecer uma cadeia lógica de raciocínios conectando propriedades do enunciado tomadas como pressupostos (hipóteses) às propriedades ditas decorrentes (teses). Esta cadeia de raciocínios que denominamos de argumentação lógica e dedutiva. O desenho entra aqui como materialização da configuração geométrica, guardando as relações a partir das quais decorrem as propriedades.*
>
> (Gravina, 1996, p. 3)

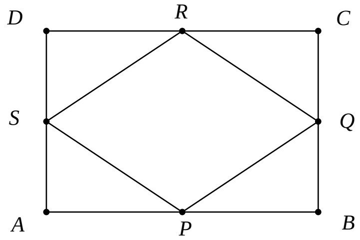
Tanto no caso da formação de conceitos, quanto no caso de dedução de propriedades, podemos concluir que grande parte das dificuldades se originam no aspecto estático do desenho: devemos explorar situações de aprendizagem que permitam "o controle do desenho para que características de contingência da representação não sejam incorporadas às propriedades matemáticas que determinam a configuração" (Gravina, 1996, p. 6). No sentido de evitar que características de representação sejam confundidas com as propriedades matemáticas dos objetos geométricos, devemos passar para um tratamento de "desenhos em movimento" onde particularidades da representação desapareçam quando impomos ao desenho movimentos de translação, rotação, entre outros.

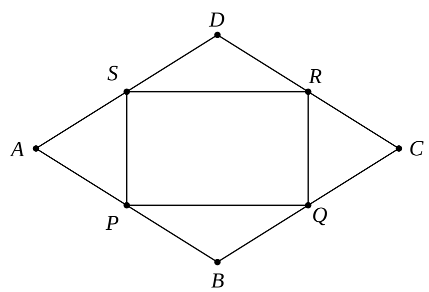
Numa sala de aula convencional, atividades com dobraduras, recortes, colagens, papel quadriculado, entre outras, até podem propiciar configurações com “desenhos em movimento” mas, a partir de um certo grau de complexidade, onde são exigidos configurações com muitos objetos, o movimento sincronizado com esses recursos se torna difícil.

Neste contexto, os *softwares* de geometria dinâmica são especialmente convenientes. De fato: uma construção geométrica feita no papel com lápis, régua e compasso ou no quadro com giz é estática e, desta maneira, uma vez feita, ela não pode ser modificada. Para gerar outros exemplos, o professor ou o aluno deverá repetir o mesmo procedimento da construção com outros dados iniciais, o que é tedioso e toma um tempo precioso de sala de aula com uma atividade repetitiva. Em um *software* de geometria dinâmica, por outro lado, a construção é feita apenas uma única vez, com mais precisão e de tal modo que os elementos geométricos da construção podem ser alterados para gerar uma quantidade grande de exemplos.

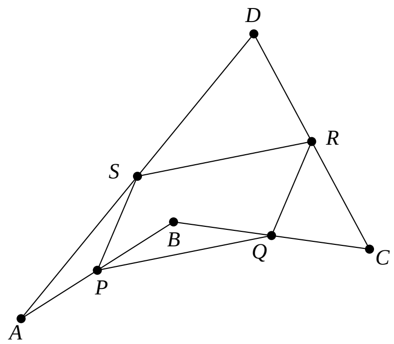
Mais ainda: ao mover os elementos geométricos da construção, as relações geométricas (pertinência, paralelismo, etc.) entre estes elementos são mantidas. Com isto, ao interagir com um *software* de geometria dinâmica, o aluno encontrará um ambiente propício à visualização, análise e dedução informal das relações geométricas da construção a partir do qual deduções formais e rigorosas podem ser construídas posteriormente.

É no dinamismo que está a chave da geometria dinâmica. Como um exemplo, considere a seguinte situação: a partir de um quadrilátero *ABCD*, marcam-se os pontos médios *P*, *Q*, *R* e *S* dos quatro lados desse quadrilátero e, então, constrói-se o quadrilátero *PQRS*. Que propriedade marcante o quadrilátero *PQRS* possui? Com lápis, papel e régua, o aluno poderia, eventualmente, fazer um desenho bem particular para o quadrilátero *ABCD* (como o retângulo e o losango indicados na figura a seguir) e, então, deduzir uma propriedade (por exemplo, que *PQRS* é um losango ou retângulo) que não é válida em geral. O aluno ainda poderia fazer um desenho em posição geral, mas com um único desenho em mãos, talvez não conseguisse visualizar e analisar o problema.





Em um *software* de geometria dinâmica, por outro lado, uma vez feita a construção, vários exemplos podem ser gerados facilmente movimentando-se os pontos iniciais A, B, C e D (os assim denominados *pontos livres*) da construção. Ao gerar vários exemplos, o aluno perceberá que nem sempre o quadrilátero $PQRS$ é um losango ou um retângulo, como na figura anterior e, mais ainda, poderá considerar situações que não consideraria normalmente, como o caso em que o quadrilátero $ABCD$ não é convexo (figura a seguir).



Usando um *software* de geometria dinâmica, o aluno experimentará mais e terá condições mais favoráveis para perceber a *propriedade invariante* do quadrilátero $PQRS$: ele é sempre um paralelogramo. Esta propriedade, ora conjecturada, pode (e deve) ser provada: como os pontos R e S são pontos médios, respectivamente, dos lados $\overline{AD}$ e $\overline{CD}$, segue-se pelo teorema da base média do triângulo que $\overline{RS}$ é paralelo a $\overline{AC}$ e que $RS=\frac{AC}{2}$. Analogamente, $\overline{PQ}$ é paralelo a $\overline{AC}$ e $PQ=\frac{AC}{2}$. Logo, $\overline{RS}$ é paralelo a $\overline{PQ}$ e $RS=PQ$. Observando agora os triângulos ABD e CBD, podemos também concluir que $\overline{PS}$ é paralelo a $\overline{QR}$ e $PS=QR$. Sendo assim, o quadrilátero $PQRS$ é, de fato, um paralelogramo[a].

Como nos aponta ainda Gravina (1996), um aspecto importante do pensamento matemático é a abstração da invariância e, para o seu reconhecimento e entendimento, nada melhor que a variação oferecida pelos *softwares* de geometria dinâmica. A transição contínua entre estados intermediários é um recurso importante desses programas sob o ponto de vista cognitivo porque permite a construção de uma infinidade de exemplos, o que favorece a construção de conceitos e destaca os invariantes geométricos presentes na configuração.

Nessa linha, nosso trabalho consiste, portanto, em uma seleção de exercícios, classificados por nível de dificuldade, onde o aluno deve (1) implementar a construção sugerida no exercício em um *software* de geometria dinâmica, (2) estudá-la movendo os elementos “livres” da construção, (3) fazer uma conjectura para o invariante geométrico da construção e (4) provar sua conjectura.

[a]Este resultado é atribuído ao matemático francês Pierre Varignon (1654-1722).

Nesse trabalho utilizamos como referência o *software* de geometria dinâmica gratuito GeoGebra (disponível em: <http://www.geogebra.org/>). Contudo, outros programas podem ser usados igualmente[b], pois as ferramentas necessárias para o estudo dos invariantes propostos são básicas e comuns a qualquer *software* de geometria dinâmica. Não é nosso objetivo aqui ensinar a usar o GeoGebra. Para o leitor iniciante, recomendamos os vídeos tutoriais disponíveis em <http://www.uff.br/geogebra/>.

No que se segue, usaremos os seguintes termos: *ponto livre*, *ponto semilivre* e *invariante geométrico*. Por *ponto livre* entendemos qualquer ponto da construção que pode ser arrastado para qualquer lugar. Por *ponto semilivre* entendemos um ponto que é construído sobre segmentos, semirretas, retas e círculos e cujo movimento fica restrito a estes objetos geométricos. Por *invariante geométrico* entendemos qualquer propriedade geométrica (concorrência, colinearidade, perpendicularismo, paralelismo, etc.) e também relações entre medidas de comprimento de segmentos, de áreas e de ângulos (segmentos congruentes, áreas equivalentes, ângulos complementares, suplementares, etc.) que permanecem invariantes com relação ao movimento dos pontos livres e semilivres.

Nosso trabalho está dividido da seguinte maneira. No Capítulo 2, apresentamos os enunciados das construções divididos em quatro níveis. Os três primeiros níveis estão organizados por grau de dificuldade e tratam apenas de invariantes que envolvem geometria de posição (congruência, colinearidade, paralelismo, perpendicularidade, etc.). Essa classificação de dificuldade leva em conta a dificuldade da construção, da percepção do invariante e da complexidade da demonstração, segundo nossa opinião. O quarto nível apresenta invariantes que envolvem somas de medidas e comparações de áreas. Como fonte de pesquisa, usamos as seguintes referências: (Alencar Filho, 1983), (Asociación Fondo de Investigadores e Editores, 2012), (Dolce & Pompeo, 1993), (Morgado, Wagner & Jorge, 1973), (Muniz Neto, 2013) e (Posamentier & Salkind, 1970). No Capítulo 3, apresentamos demonstrações para os invariantes geométricos. Finalmente, no Capítulo 4, apresentamos nossas considerações finais, incluindo dois relatos de experiência da aplicação de versões preliminares das construções propostas para os alunos da disciplina "Recursos Computacionais no Ensino da Matemática" da turma PROFMAT da Universidade Federal Fluminense em 2014 e para os participantes da oficina "Explorando Invariantes Geométricos na Escola Básica com o GeoGebra" no III Dia de GeoGebra Iberoamericano na Pontifícia Universidade Católica de São Paulo em 2015.

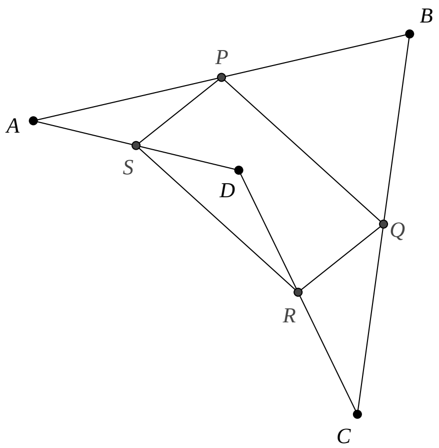
[b]Por exemplo, o Sketchometry (disponível em: <http://www.sketchometry.org/>), o Régua e Compasso (disponível em: <http://car.rene-grothmann.de/>), etc.

2 Invariantes Geométricos: Enunciados

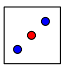
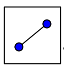
2.1 Nível 1

Invariante 1

Construa um quadrilátero $ABCD$. Em seguida, marque os pontos médios P, Q, R e S dos lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$, respectivamente. Construa então o quadrilátero $PQRS$.

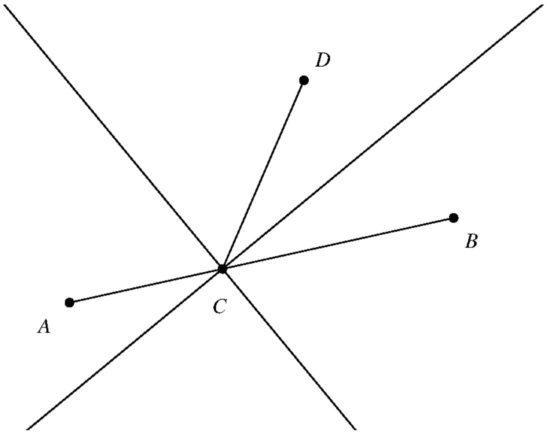


1. Quais são os pontos livres dessa construção?
2. Existem pontos semilivres nessa construção? Quais?
3. Arraste os pontos livres e semilivres (caso existam) e observe o quadrilátero $PQRS$. Você consegue identificar algum invariante geométrico?
4. Tente demonstrar o invariante geométrico que você descobriu.

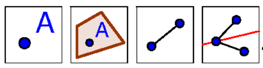
Ferramentas do GeoGebra usadas na construção:  .

Invariante 2

Trace um segmento $\overline{AB}$. Nesse segmento marque um ponto C. Marque então um ponto D diferente de C e, em seguida, trace o segmento $\overline{CD}$. Construa as bissetrizes dos ângulos $\widehat{ACD}$ e $\widehat{BCD}$.

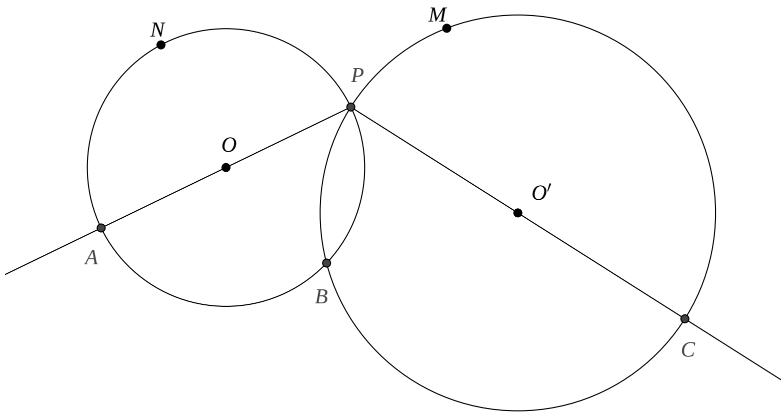


1. Quais são os pontos livres dessa construção?
2. Existem pontos semilivres nessa construção? Quais?
3. Arraste os pontos livres e os pontos semilivres (caso existam) e observe o ângulo entre as bissetrizes dos ângulos $\widehat{ACD}$ e $\widehat{BCD}$. Você consegue identificar algum invariante geométrico?
4. Tente demonstrar o invariante geométrico que você descobriu.

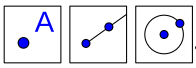
Ferramentas do GeoGebra usadas na construção: .

Invariante 3

Construa dois círculos com centros nos pontos O e O' e que passam pelos pontos N e M, respectivamente. Suponha que os dois círculos se intersectam em dois pontos distintos, digamos, P e B. Por P, trace a semirreta $\overrightarrow{PO}$ e marque o ponto A de interseção desta semirreta com o primeiro círculo. Do mesmo modo, por P, trace a semirreta $\overrightarrow{PO'}$ e marque o ponto C de interseção desta semirreta com o segundo círculo.

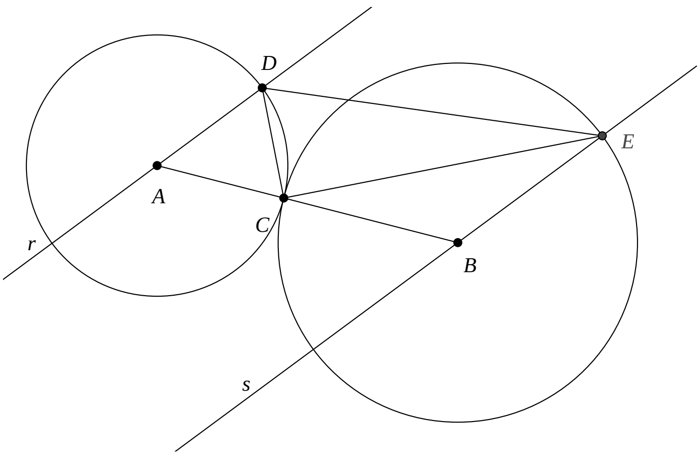


1. Quais são os pontos livres dessa construção?
2. Existem pontos semilivres nessa construção? Quais?
3. Arraste os pontos livres e semilivres (caso existam) e observe os pontos A, B e C. Você consegue identificar algum invariante geométrico?
4. Tente demonstrar o invariante geométrico que você descobriu.

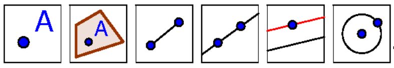
Ferramentas do GeoGebra usadas na construção: .

Invariante 4

Trace um segmento $\overline{AB}$ e, neste segmento, marque um ponto C. Com centro em A, trace o círculo passando por C e marque um ponto D neste círculo. Agora construa um segundo círculo com centro em B passando também por C. Em seguida, construa a reta r passando por A e D. Trace, então, por B, a reta s paralela a reta r. Marque o ponto E de intersecção dessa reta s com o segundo círculo (este ponto E deverá ser aquele que está no mesmo semiplano que o ponto D com relação a reta que contém o segmento $\overline{AB}$). Por fim, construa o triângulo DCE.

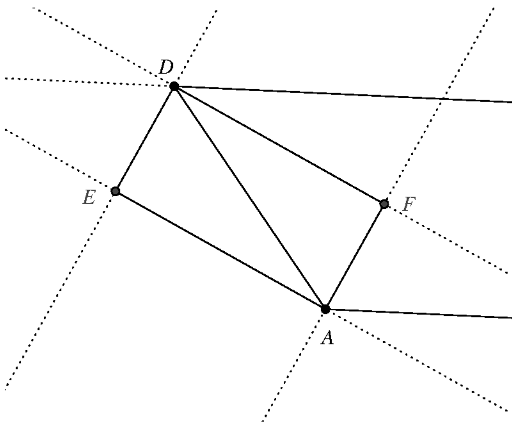


1. Quais são os pontos livres dessa construção?
2. Existem pontos semilivres nessa construção? Quais?
3. Arraste os pontos livres e os pontos semilivres (caso existam) e observe o triângulo DCE. Você consegue identificar algum invariante geométrico?
4. Tente demonstrar o invariante geométrico que você descobriu.

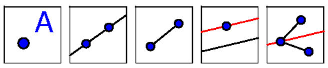
Ferramentas do GeoGebra usadas na construção: .

Invariante 5

Construa um trapézio $ABCD$ de bases $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ e lados $\overline{BC}$ e $\overline{AD}$. Trace, então, as bissetrizes interna e externa correspondentes ao ângulo $\widehat{BAD}$ e, também, as bissetrizes interna e externa correspondentes ao ângulo $\widehat{CDA}$ do trapézio $ABCD$. Seja E o ponto de interseção das bissetrizes externas e seja F o ponto de interseção das bissetrizes internas. Construa o quadrilátero $AFDE$.

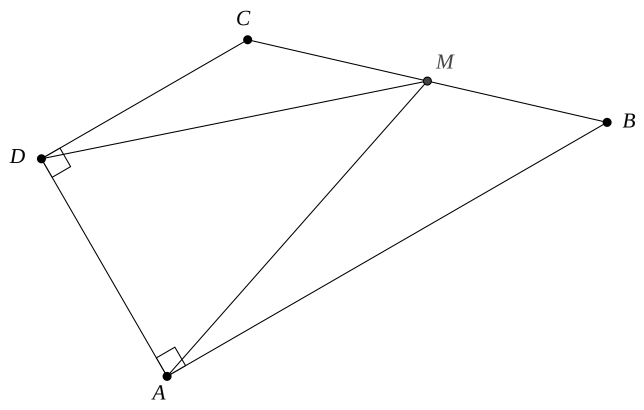


1. Quais são os pontos livres dessa construção?
2. Existem pontos semilivres nessa construção? Quais?
3. Arraste os pontos livres e os pontos semilivres (caso existam) e observe o quadrilátero $AFDE$. Você consegue identificar algum invariante geométrico?
4. Tente demonstrar o invariante geométrico que você descobriu.

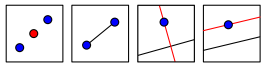
Ferramentas do GeoGebra usadas na construção: .

Invariante 6

Construa um trapézio retângulo $ABCD$ de bases $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ e lado oblíquo $\overline{BC}$. Marque, então, o ponto médio M de $\overline{BC}$. Por fim, construa o triângulo AMD.

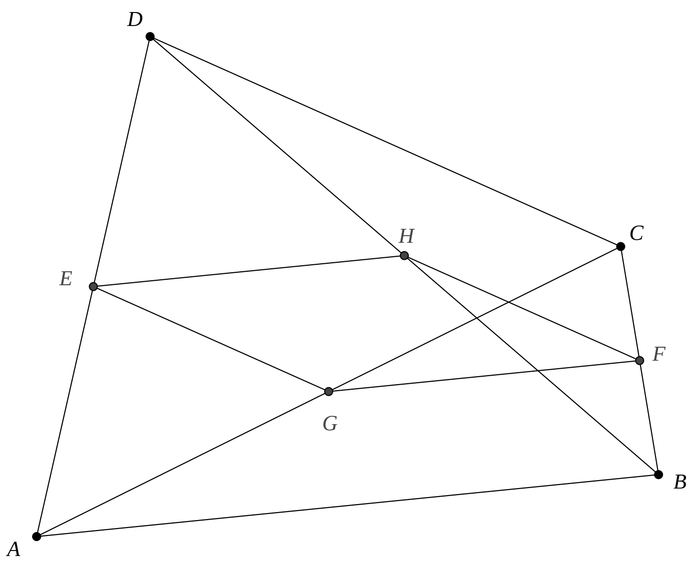


1. Quais são os pontos livres dessa construção?
2. Existem pontos semilivres nessa construção? Quais?
3. Arraste os pontos livres e os pontos semilivres (caso existam) e observe o triângulo AMD. Você consegue identificar algum invariante geométrico?
4. Tente demonstrar o invariante geométrico que você descobriu.

Ferramentas do GeoGebra usadas na construção:  .

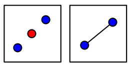
Invariante 7

Construa um quadrilátero $ABCD$ com lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$. Trace as diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$. Marque os pontos médios E e F dos lados não adjacentes $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$, respectivamente, e os pontos médios G e H das diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$, respectivamente. Construa o quadrilátero $EGFH$.



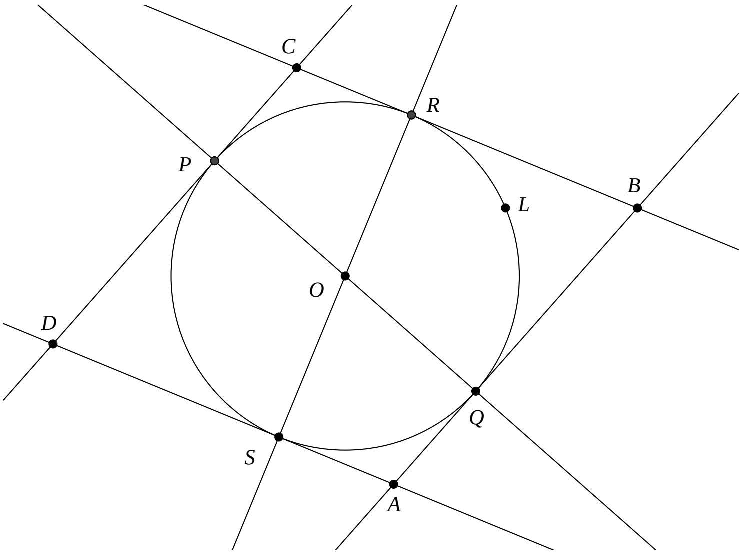
1. Quais são os pontos livres dessa construção?

2. Existem pontos semilivres nessa construção? Quais?
3. Arraste os pontos livres e os pontos semilivres (caso existam) e observe o quadrilátero $EGFH$. Você consegue identificar algum invariante geométrico?
4. Tente demonstrar o invariante geométrico que você descobriu.

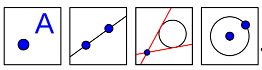
Ferramentas do GeoGebra usadas na construção:  .

Invariante 8

Construa um círculo $\mathscr{C}$ de centro O passando por um ponto L. Sobre o círculo $\mathscr{C}$, marque dois pontos P e R. Construa então as retas $\overleftrightarrow{OP}$ e $\overleftrightarrow{OR}$. Seja $Q \neq P$ o ponto de interseção entre $\mathscr{C}$ e $\overleftrightarrow{OP}$ e seja S o ponto de interseção entre $\mathscr{C}$ e $\overleftrightarrow{OR}$. Em seguida, construa as retas tangentes t_P, t_Q, t_R e t_S ao círculo nos pontos P, Q, R e S, respectivamente. Marque os pontos de interseção A entre t_S e t_Q, B entre t_Q e t_R, C entre t_R e t_P, D entre t_P e t_S. Por fim, construa o quadrilátero $ABCD$.

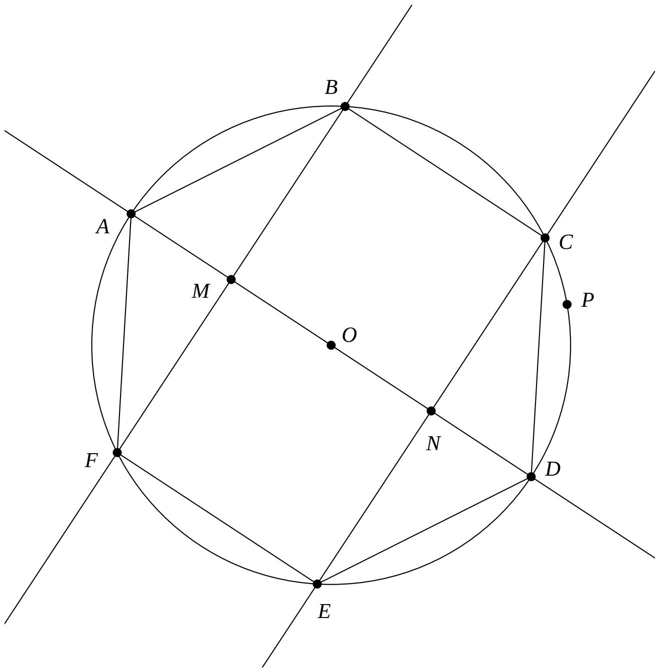


1. Quais são os pontos livres dessa construção?
2. Existem pontos semilivres nessa construção? Quais?
3. Arraste os pontos livres e os pontos semilivres (caso existam) e observe o quadrilátero $ABCD$. Você consegue identificar algum invariante geométrico?
4. Tente demonstrar o invariante geométrico que você descobriu.

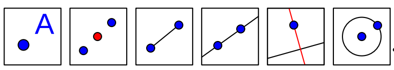
Ferramentas do GeoGebra usadas na construção: .

Invariante 9

Construa um círculo $\mathscr{C}$ de centro O passando por um ponto P. Marque um ponto A sobre $\mathscr{C}$ e, então, trace a reta $\overleftrightarrow{OA}$. Seja $D \neq A$ o ponto de interseção entre $\mathscr{C}$ e $\overleftrightarrow{OA}$. Determine os pontos médios M e N de $\overline{AO}$ e $\overline{OD}$, respectivamente. Construa, por M, uma reta perpendicular a $\overline{AD}$ e marque os pontos B e F de interseção desta reta com o círculo $\mathscr{C}$. Agora, trace, por N, uma reta perpendicular a $\overline{AD}$ e marque os pontos C e E de interseção desta reta com o círculo $\mathscr{C}$ (o ponto C deve estar no mesmo semiplano que o ponto B com relação a reta $\overleftrightarrow{OA}$). Desenhe o hexágono $ABCDEF$.



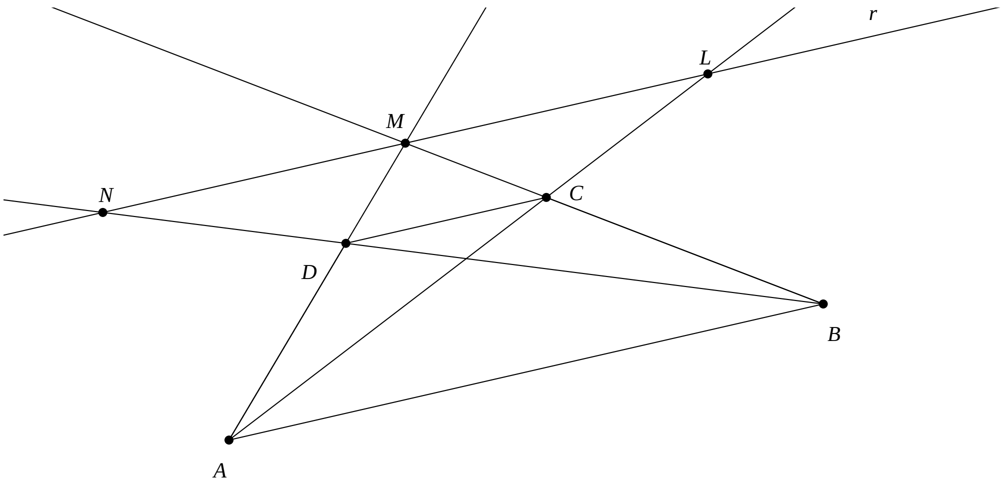
1. Quais são os pontos livres dessa construção?
2. Existem pontos semilivres nessa construção? Quais?
3. Arraste os pontos livres e os pontos semilivres (caso existam) e observe o hexágono $ABCDEF$. Você consegue identificar algum invariante geométrico?
4. Tente demonstrar o invariante geométrico que você descobriu.

Ferramentas do GeoGebra usadas na construção: .

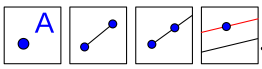
2.2 Nível 2

Invariante 1

Construa um trapézio $ABCD$ de lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$, com lados paralelos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$. Em seguida, trace as semirretas $\overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{BC}$. Marque o ponto M de interseção das semirretas $\overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{BC}$. Depois, trace, por M, a reta paralela r aos lados $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$. Construa, então, as semirretas $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{BD}$. Por fim, marque os pontos L e N de interseção dessas semirretas com a reta r.

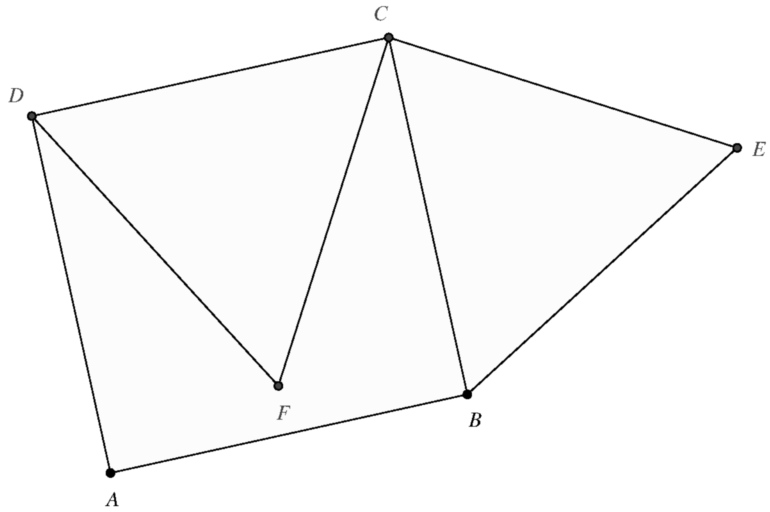


1. Quais são os pontos livres dessa construção?
2. Existem pontos semilivres nessa construção? Quais?
3. Arraste os pontos livres e os pontos semilivres (caso existam) e observe os pontos L, M e N. Você consegue identificar algum invariante geométrico?
4. Tente demonstrar o invariante geométrico que você descobriu.

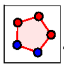
Ferramentas do GeoGebra usadas na construção: .

Invariante 2

Construa um quadrado $ABCD$ de lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$. Em seguida, construa sobre o lado $\overline{BC}$ um triângulo equilátero BCE para fora e sobre o lado $\overline{CD}$ um triângulo equilátero CDF para dentro do quadrado.

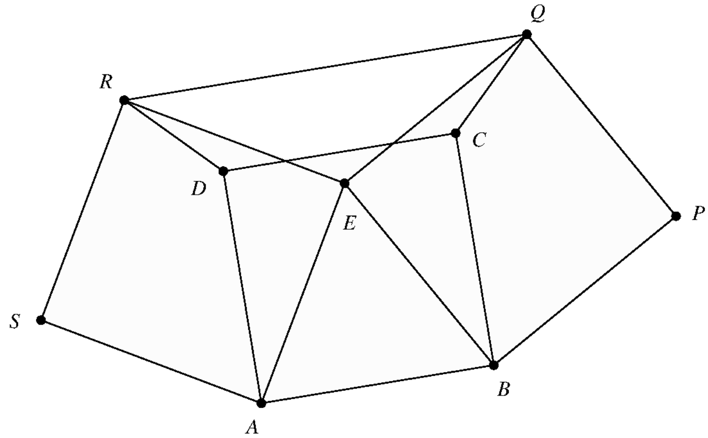


1. Quais são os pontos livres dessa construção?
2. Existem pontos semilivres nessa construção? Quais?
3. Arraste os pontos livres e os pontos semilivres (caso existam) e observe os pontos A, E e F. Você consegue identificar algum invariante geométrico?
4. Tente demonstrar o invariante geométrico que você descobriu.

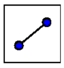
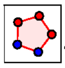
Ferramentas do GeoGebra usadas na construção: .

Invariante 3

Construa o quadrado $ABCD$ de lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$. Agora, desenhe um triângulo equilátero ABE para dentro do quadrado. Em seguida, construa, para fora do triângulo ABE, dois quadrados: o primeiro, $AERS$, de lados $\overline{AE}$, $\overline{ER}$, $\overline{RS}$ e $\overline{SA}$, e o segundo, $EBPQ$, de lados $\overline{BE}$, $\overline{EQ}$, $\overline{QP}$ e $\overline{PB}$. Por fim, trace o quadrilátero $CQRD$.

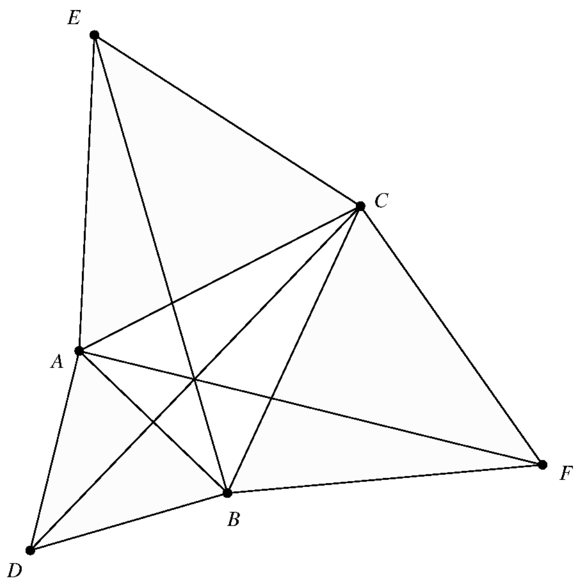


1. Quais são os pontos livres dessa construção?
2. Existem pontos semilivres nessa construção? Quais?
3. Arraste os pontos livres e os pontos semilivres (caso existam) e observe o quadrilátero $CQRD$. Você consegue identificar algum invariante geométrico?
4. Tente demonstrar o invariante geométrico que você descobriu.

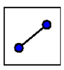
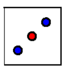
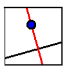
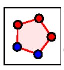
Ferramentas do GeoGebra usadas na construção:  .

Invariante 4

Construa um triângulo isósceles ABC de base $\overline{AB}$. Em seguida, construa três triângulos equiláteros BCF, ACE e ABD para fora desse triângulo. Por fim, construa os segmentos $\overline{BE}$, $\overline{AF}$ e $\overline{CD}$.



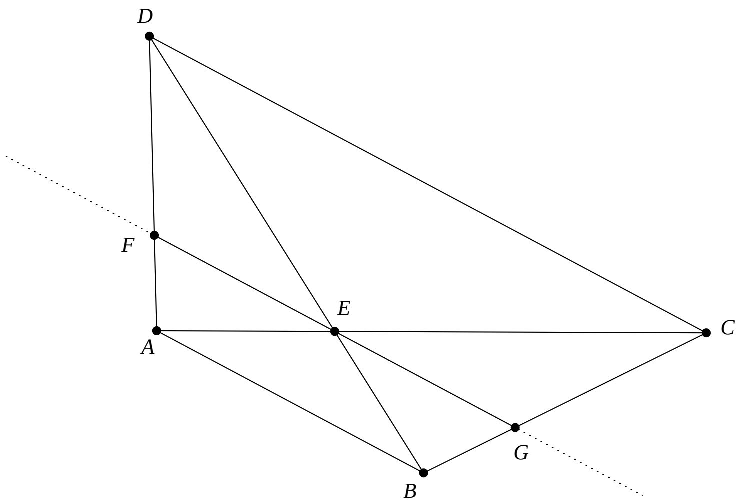
1. Quais são os pontos livres dessa construção?
2. Existem pontos semilivres nessa construção? Quais?
3. Arraste os pontos livres e os pontos semilivres (caso existam) e observe os comprimentos dos segmentos $\overline{BE}$, $\overline{AF}$ e $\overline{CD}$. Você consegue identificar algum invariante geométrico?
4. Tente demonstrar o invariante geométrico que você descobriu.

Ferramentas do GeoGebra usadas na construção:    .

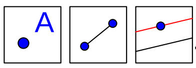
2.3 Nível 3

Invariante 1

Construa um trapézio $ABCD$ de lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$ e lados paralelos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$. Trace as diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ e marque o ponto $\overline{AC} \cap \overline{BD} = \{E\}$. Por E trace a reta paralela ao lado $\overline{AB}$. Essa reta intersectará o lado $\overline{AD}$ em F e o lado $\overline{BC}$ em G. Considere os segmentos $\overline{FE}$ e $\overline{EG}$.

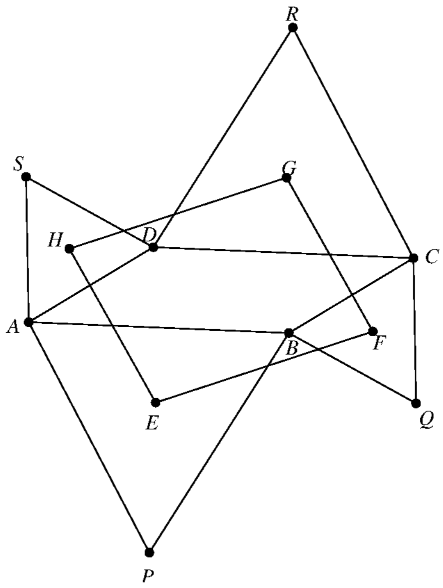


1. Quais são os pontos livres dessa construção?
2. Existem pontos semilivres nessa construção? Quais?
3. Arraste os pontos livres e os pontos semilivres (caso existam) e observe os comprimentos dos segmentos $\overline{FE}$ e $\overline{EG}$. Você consegue identificar algum invariante geométrico?
4. Tente demonstrar o invariante geométrico que você descobriu.

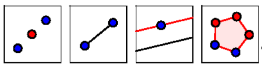
Ferramentas do GeoGebra usadas na construção: .

Invariante 2

Construa um paralelogramo $ABCD$ de lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$. Em seguida, sobre cada um de seus lados, construa para fora do paralelogramo os triângulos equiláteros ABP, BCQ, CDR e DAS. Marque então os baricentros E, F, G e H dos triângulos ABP, BCQ, CDR e DAS, respectivamente. Por fim, construa o quadrilátero $EFGH$.

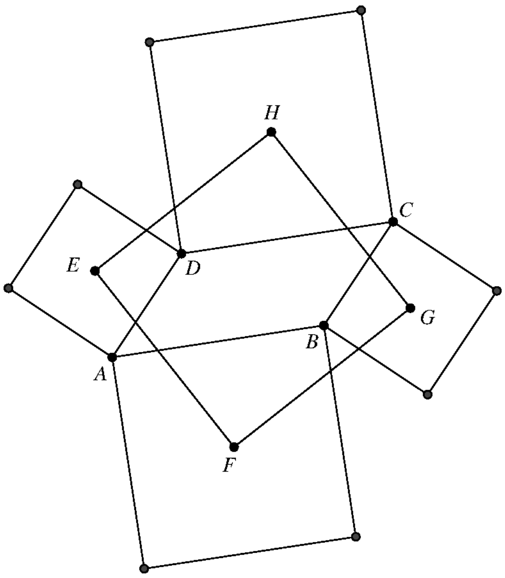


1. Quais são os pontos livres dessa construção?
2. Existem pontos semilivres nessa construção? Quais?
3. Arraste os pontos livres e os pontos semilivres (caso existam) e observe o quadrilátero $EFGH$. Você consegue identificar algum invariante geométrico?
4. Tente demonstrar o invariante geométrico que você descobriu.

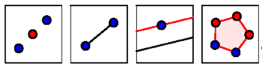
Ferramentas do GeoGebra usadas na construção: .

Invariante 3

Construa um paralelogramo $ABCD$ de lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$. Em cada um de seus lados, construa quadrados para fora do paralelogramo. Marque, então, os centros E, F, G e H desses quadrados e, por fim, desenhe o quadrilátero $EFGH$.

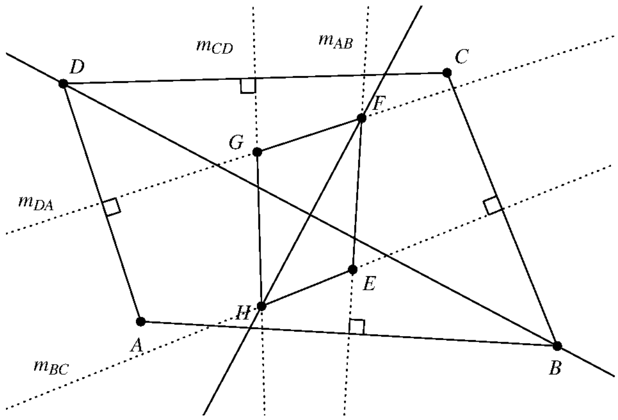


1. Quais são os pontos livres dessa construção?
2. Existem pontos semilivres nessa construção? Quais?
3. Arraste os pontos livres e os pontos semilivres (caso existam) e observe o quadrilátero $EFGH$. Você consegue identificar algum invariante geométrico?
4. Tente demonstrar o invariante geométrico que você descobriu.

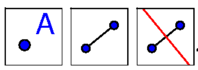
Ferramentas do GeoGebra usadas na construção: .

Invariante 4

Construa o quadrilátero $ABCD$ de lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$. Trace suas respectivas mediatrizes m_{AB}, m_{BC}, m_{CD} e m_{DA}. Suponha que: $m_{AB} \cap m_{BC} = \{E\}$; $m_{AB} \cap m_{AD} = \{F\}$; $m_{CD} \cap m_{AD} = \{G\}$ e $m_{CD} \cap m_{BC} = \{H\}$. Construa o quadrilátero $EFGH$ e trace sua diagonal $\overleftrightarrow{FH}$. Por fim, trace a diagonal $\overleftrightarrow{BD}$ do quadrilátero $ABCD$.

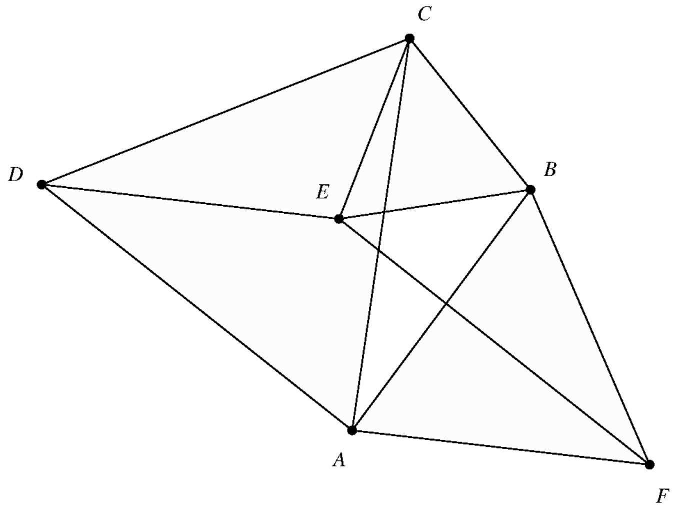


1. Quais são os pontos livres dessa construção?
2. Existem pontos semilivres nessa construção? Quais?
3. Arraste os pontos livres e os pontos semilivres (caso existam) e observe o ângulo formado pelas diagonais $\overline{FH}$ e $\overline{BD}$. Você consegue identificar algum invariante geométrico?
4. Tente demonstrar o invariante geométrico que você descobriu.

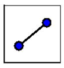
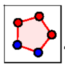
Ferramentas do GeoGebra usadas na construção: .

Invariante 5

Construa um triângulo ABC. Sobre os lado $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, respectivamente, construa triângulos equiláteros ABF e ACD para fora do triângulo ABC. Sobre o lado $\overline{BC}$, por sua vez, construa o triângulo equilátero BCE para dentro do triângulo ABC. Por fim, trace o quadrilátero $ADEF$.

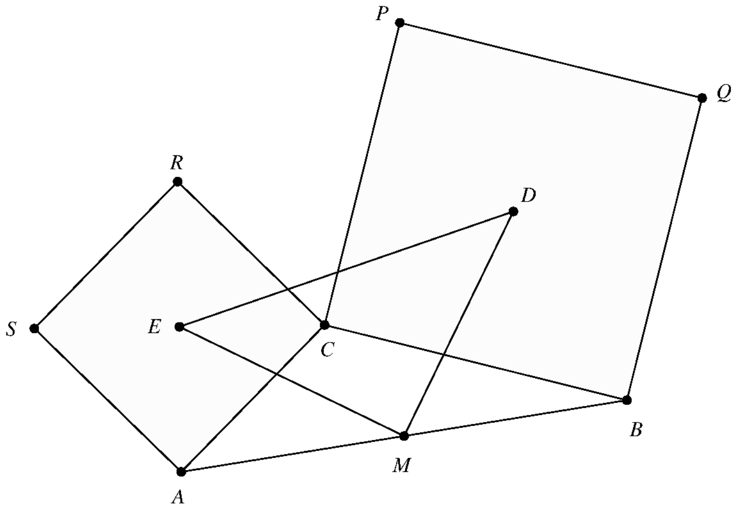


1. Quais são os pontos livres dessa construção?
2. Existem pontos semilivres nessa construção? Quais?
3. Arraste os pontos livres e os pontos semilivres (caso existam) e observe o quadrilátero $ADEF$. Você consegue identificar algum invariante geométrico?
4. Tente demonstrar o invariante geométrico que você descobriu.

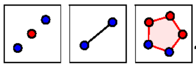
Ferramentas do GeoGebra usadas na construção:  .

Invariante 6

Construa um triângulo ABC. Sobre o lado $\overline{BC}$, construa para fora do triângulo desse triângulo o quadrado $BCPQ$ com lados $\overline{BC}$, $\overline{CP}$, $\overline{PQ}$ e $\overline{QB}$. Agora, sobre o lado $\overline{AC}$ desse triângulo, construa para fora do triângulo o quadrado $ACRS$ com lados $\overline{AC}$, $\overline{CR}$, $\overline{RS}$ e $\overline{SA}$. Determine os centros D e E dos quadrados $BCPQ$ e $ACRS$, respectivamente e, então, marque o ponto médio M do lado $\overline{AB}$. Por fim, construa o triângulo DEM.

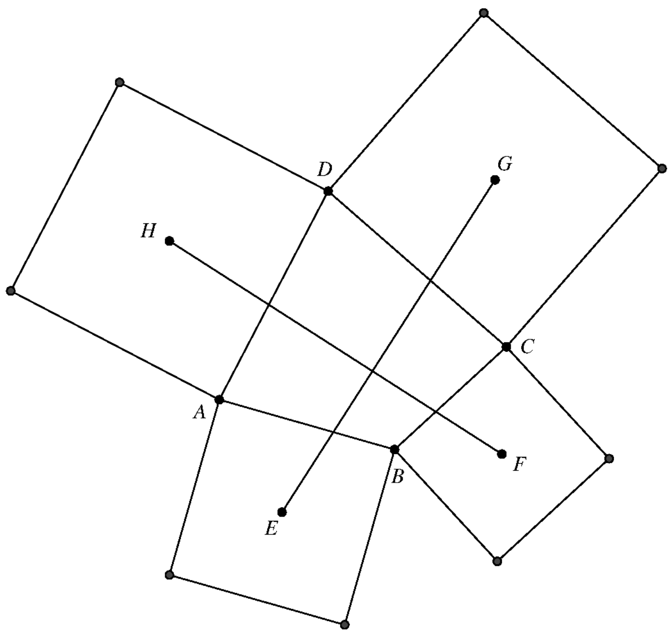


1. Quais são os pontos livres dessa construção?
2. Existem pontos semilivres nessa construção? Quais?
3. Arraste os pontos livres e os pontos semilivres (caso existam) e observe o ângulo $\widehat{DME}$ do triângulo DEM. Você consegue identificar algum invariante geométrico?
4. Tente demonstrar o invariante geométrico que você descobriu.

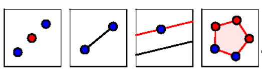
Ferramentas do GeoGebra usadas na construção: .

Invariante 7

Construa um quadrilátero $ABCD$ de lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$. Sobre seus lados construa, para fora do quadrilátero, quatro quadrados. Marque os respectivos centros E, F, G e H desses quadrados. Por fim, trace os segmentos $\overline{EG}$ e $\overline{FH}$.



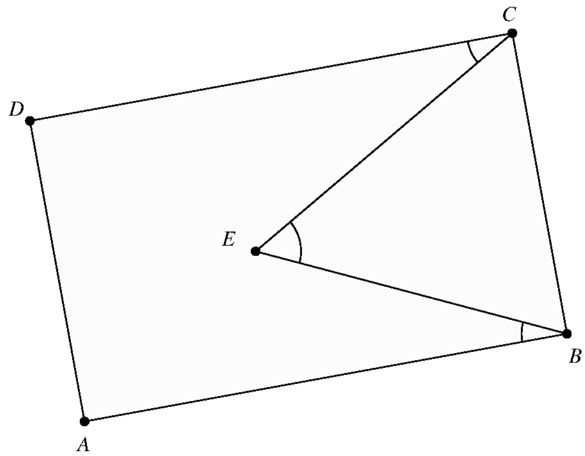
1. Quais são os pontos livres dessa construção?
2. Existem pontos semilivres nessa construção? Quais?
3. Arraste os pontos livres e os pontos semilivres (caso existam) e observe o ângulo formado pelos segmentos $\overline{EG}$ e $\overline{FH}$. Você consegue identificar algum invariante geométrico?
4. Tente demonstrar o invariante geométrico que você descobriu.

Ferramentas do GeoGebra usadas na construção: .

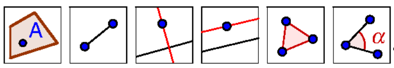
2.4 Nível 4

Invariante 1

Construa um retângulo $ABCD$ e marque um ponto E no interior do retângulo. Em seguida, trace os segmentos $\overline{BE}$ e $\overline{CE}$. Por fim, construa os ângulos $E\widehat{B}A$, $D\widehat{C}E$ e $B\widehat{E}C$.

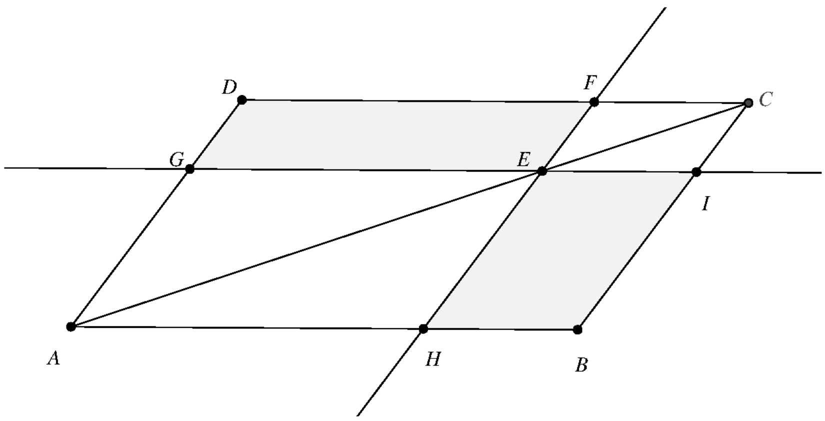


1. Quais são os pontos livres dessa construção?
2. Existem pontos semilivres nessa construção? Quais?
3. Arraste os pontos livres e os pontos semilivres (caso existam) e observe os ângulos $E\widehat{B}A$, $E\widehat{C}D$ e $B\widehat{E}C$. Você consegue identificar algum invariante geométrico?
4. Tente demonstrar o invariante geométrico que você descobriu.

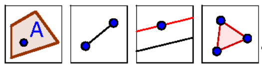
Ferramentas do GeoGebra usadas na construção: .

Invariante 2

Construa o paralelogramo $ABCD$ com lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$. Trace a diagonal $\overline{AC}$ e marque um ponto E nessa diagonal. Construa, por E, a reta paralela ao lado $\overline{AB}$ e, então, marque os pontos de interseção G e I dessa reta com os lados $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$, respectivamente. Analogamente, trace, por E, a reta paralela ao lado $\overline{AD}$ e, então, marque os pontos de interseção H e F dessa reta com os lados $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, respectivamente. Por fim, desenhe os paralelogramos $GEFD$ e $HBIE$.

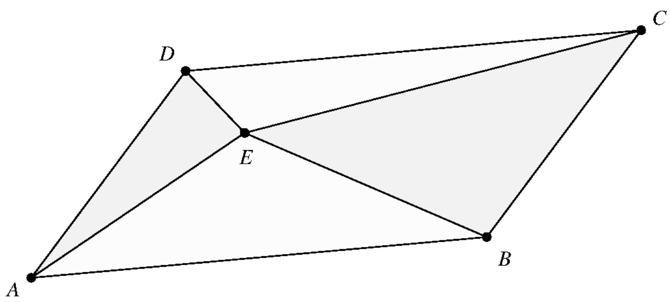


1. Quais são os pontos livres dessa construção?
2. Existem pontos semilivres nessa construção? Quais?
3. Arraste os pontos livres e os pontos semilivres (caso existam) e observe as áreas dos paralelogramos $GEFD$ e $HBIE$. Você consegue identificar algum invariante geométrico?
4. Tente demonstrar o invariante geométrico que você descobriu.

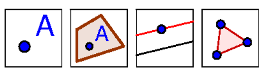
Ferramentas do GeoGebra usadas na construção: .

Invariante 3

Construa um paralelogramo $ABCD$ com lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$ com AD paralelo a BC. No seu interior marque um ponto E. Construa agora os triângulos ADE e BCE.

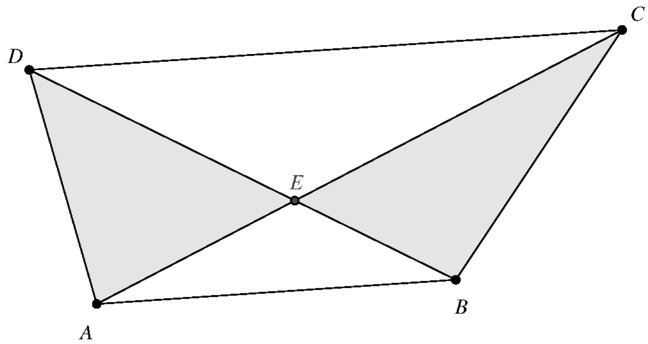


1. Quais são os pontos livres dessa construção?
2. Existem pontos semilivres nessa construção? Quais?
3. Arraste os pontos livres e os pontos semilivres (caso existam) e observe as áreas dos triângulos ADE e BCE. Você consegue identificar algum invariante geométrico?
4. Tente demonstrar o invariante geométrico que você descobriu.

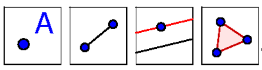
Ferramentas do GeoGebra usadas na construção: 

Invariante 4

Construa um trapézio $ABCD$ com lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$, com $\overline{AB}$ paralelo a $\overline{CD}$. Trace suas diagonais e marque o ponto E, interseção dessas diagonais. Considere agora os triângulos ADE e BCE.

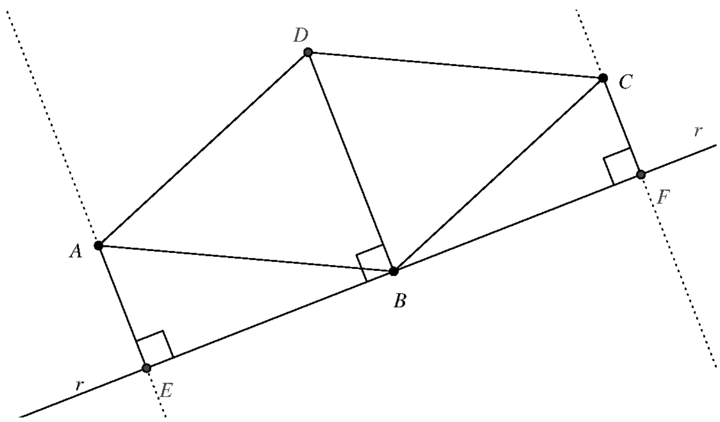


1. Quais são os pontos livres dessa construção?
2. Existem pontos semilivres nessa construção? Quais?
3. Arraste os pontos livres e os pontos semilivres (caso existam) e observe as áreas dos triângulos ADE e BCE. Você consegue identificar algum invariante geométrico?
4. Tente demonstrar o invariante geométrico que você descobriu.

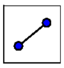
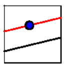
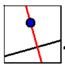
Ferramentas do GeoGebra usadas na construção: .

Invariante 5

Construa um paralelogramo $ABCD$ com lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$, com $\overline{AD}$ paralelo $\overline{BC}$. Trace a diagonal $\overline{BD}$. Pelo vértice B trace uma reta r perpendicular à diagonal $\overline{BD}$. Pelos vértices A e C trace retas perpendiculares a r que intersectarão essa reta, respectivamente, nos pontos E e F. Construa os segmentos $\overline{AE}$ e $\overline{CF}$.

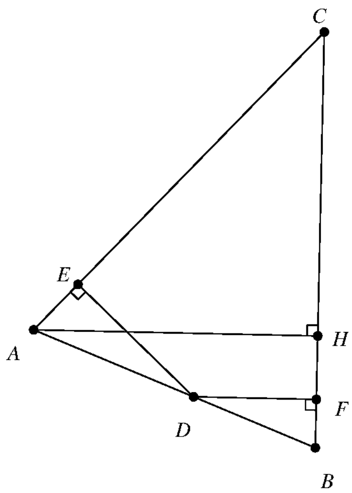


1. Quais são os pontos livres dessa construção?
2. Existem pontos semilivres nessa construção? Quais?
3. Arraste os pontos livres e os pontos semilivres (caso existam) e observe os comprimentos dos segmentos $\overline{AE}$ e $\overline{CF}$ e da diagonal $\overline{BD}$. Você consegue identificar algum invariante geométrico?
4. Tente demonstrar o invariante geométrico que você descobriu.

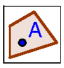
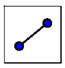
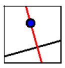
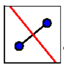
Ferramentas do GeoGebra usadas na construção:   .

Invariante 6

Construa um triângulo isósceles ABC de base $\overline{AB}$. Marque o ponto H, pé da altura relativa ao lado $\overline{BC}$. Em seguida, marque um ponto D na base $\overline{AB}$ e, por D, trace retas perpendiculares aos lados $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$. Sejam E e F os pontos de interseção destas retas perpendiculares com as retas $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{BC}$, respectivamente.

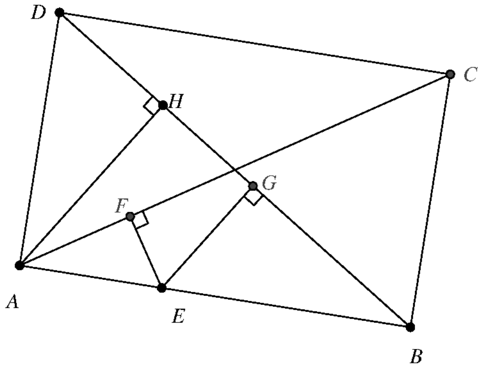


1. Quais são os pontos livres dessa construção?
2. Existem pontos semilivres nessa construção? Quais?
3. Arraste os pontos livres e os pontos semilivres (caso existam) e observe os comprimentos dos segmentos $\overline{AH}$, $\overline{DE}$ e $\overline{DF}$. Você consegue identificar algum invariante geométrico?
4. Tente demonstrar o invariante geométrico que você descobriu.

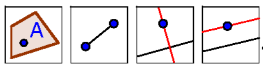
Ferramentas do GeoGebra usadas na construção:    .

Invariante 7

Construa um retângulo $ABCD$ de lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$. Em seguida, trace suas diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$. Seja H o pé da perpendicular baixada do vértice A até a diagonal $\overline{BD}$. Agora, no lado $\overline{AB}$, marque um ponto E. Sejam F e G os pés das perpendiculares baixadas do ponto E até as diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$, respectivamente. Por fim, trace os segmentos $\overline{AH}$, $\overline{EF}$ e $\overline{EG}$.

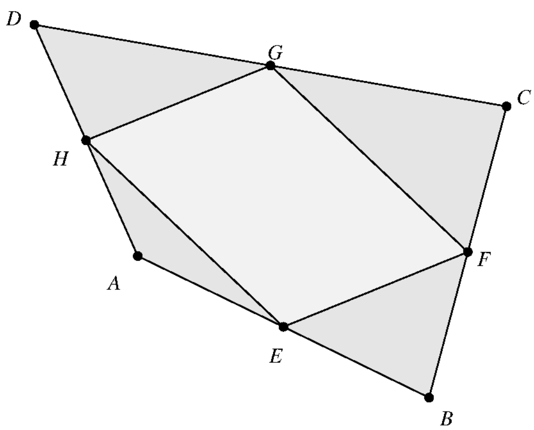


1. Quais são os pontos livres dessa construção?
2. Existem pontos semilivres nessa construção? Quais?
3. Arraste os pontos livres e os pontos semilivres (caso existam) e observe os comprimentos dos segmentos $\overline{EF}$, $\overline{EG}$ e $\overline{AH}$. Você consegue identificar algum invariante geométrico?
4. Tente demonstrar o invariante geométrico que você descobriu.

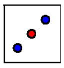
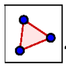
Ferramentas do GeoGebra usadas na construção: .

Invariante 8

Construa um quadrilátero $ABCD$ simples (isto é, $ABCD$ é tal que os únicos pontos que pertencem a duas arestas são os seus vértices). Em seguida, marque os pontos médios E, F, G e H dos lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$, respectivamente. Construa então o quadrilátero $EFGH$.



1. Quais são os pontos livres dessa construção?
2. Existem pontos semilivres nessa construção? Quais?
3. Arraste os pontos livres e os pontos semilivres (caso existam) e observe as áreas dos quadriláteros $ABCD$ e $EFGH$. Você consegue identificar algum invariante geométrico?
4. Tente demonstrar o invariante geométrico que você descobriu.

Ferramentas do GeoGebra usadas na construção:  .

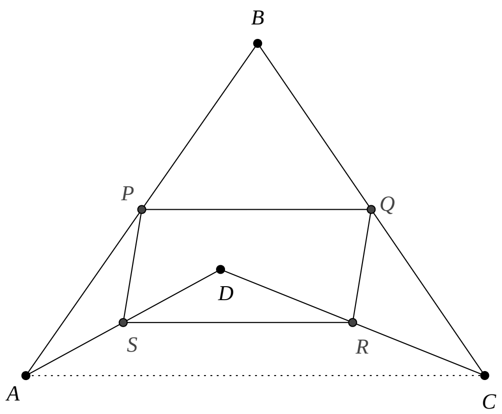
3 Invariantes Geométricos: Conjecturas e Demonstrações

3.1 Nível 1

Invariante 1

Construa um quadrilátero $ABCD$. Em seguida, marque os pontos médios P, Q, R e S dos lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$, respectivamente. Construa então o quadrilátero $PQRS$.

Pontos livres: os vértices do quadrilátero A, B, C e D. *Pontos semilivres*: não existem. *Invariante geométrico*: o quadrilátero interno $PQRS$ é um paralelogramo.

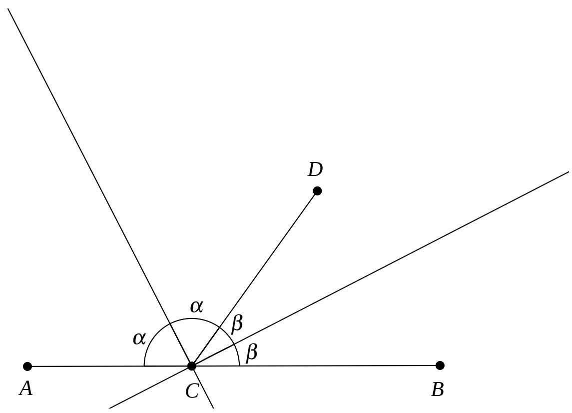


Demonstração. No triângulo ADC, como os pontos R e S são pontos médios, respectivamente, dos lados $\overline{CD}$ e $\overline{AD}$, segue-se pelo teorema da base média do triângulo que $\overline{RS}$ é paralelo a $\overline{AC}$ e $RS=\frac{AC}{2}$. Do mesmo modo, como os pontos P e Q são pontos médios, respectivamente, dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ do triângulo ABC, concluímos que $\overline{PQ}$ é paralelo a $\overline{AC}$ e $PQ=\frac{AC}{2}$. Logo $\overline{RS}$ é paralelo a $\overline{PQ}$ e $RS=PQ$. Aplicando argumentos análogos aos triângulos ABD e CBD, podemos também concluir que $\overline{PS}$ é paralelo a $\overline{QR}$ e $PS=QR$. Logo, o quadrilátero $PQRS$ é um paralelogramo. ∎

Invariante 2

Trace um segmento $\overline{AB}$. Nesse segmento marque um ponto C. Marque então um ponto D diferente de C e, em seguida, trace o segmento $\overline{CD}$. Construa as bissetrizes dos ângulos $\widehat{ACD}$ e $\widehat{BCD}$.

Pontos livres: os pontos A, B e D. *Ponto semilivre*: o ponto C. *Invariante geométrico*: as bissetrizes dos ângulos $\widehat{ACD}$ e $\widehat{BCD}$ são perpendiculares.

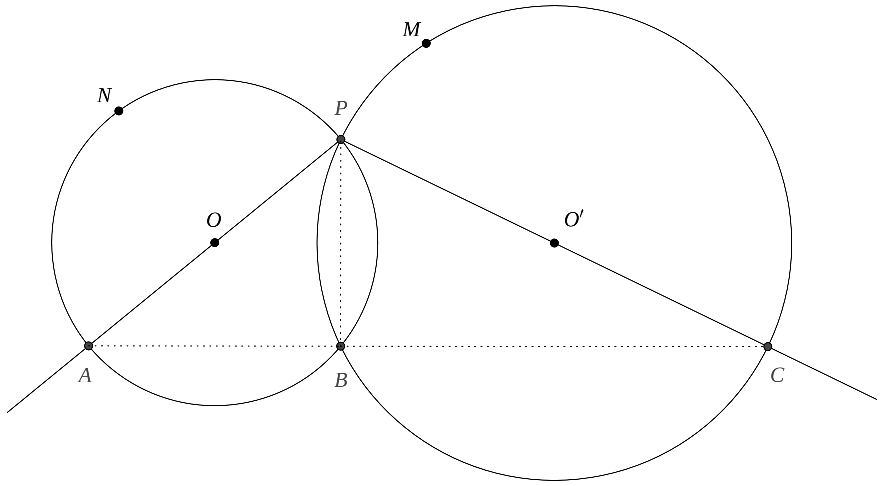


Demonstração. Sejam α o ângulo formado pela bissetriz de $\widehat{ACD}$ com o segmento $\overline{AC}$ e β o ângulo formado pela bissetriz de $\widehat{BCD}$ com o segmento $\overline{CB}$. Temos então que $2\alpha + 2\beta = 180^\circ$ e, sendo assim, a medida do ângulo entre as bissetrizes dos ângulos $\widehat{ACD}$ e $\widehat{BCD}$ é igual $\alpha + \beta = 90^\circ$, o que demonstra que elas são perpendiculares. ■

Invariante 3

Construa dois círculos com centros nos pontos O e O' e que passam pelos pontos N e M, respectivamente. Suponha que os dois círculos se intersectam em dois pontos distintos, digamos, P e B. Por P, trace a semirreta $\overrightarrow{PO}$ e marque o ponto A de interseção desta semirreta com o primeiro círculo. Do mesmo modo, por P, trace a semirreta $\overrightarrow{PO'}$ e marque o ponto C de interseção desta semirreta com o segundo círculo.

Pontos livres: O, O', M e N. *Pontos semilivres*: não existem. *Invariante geométrico*: os pontos A, B e C são colineares.



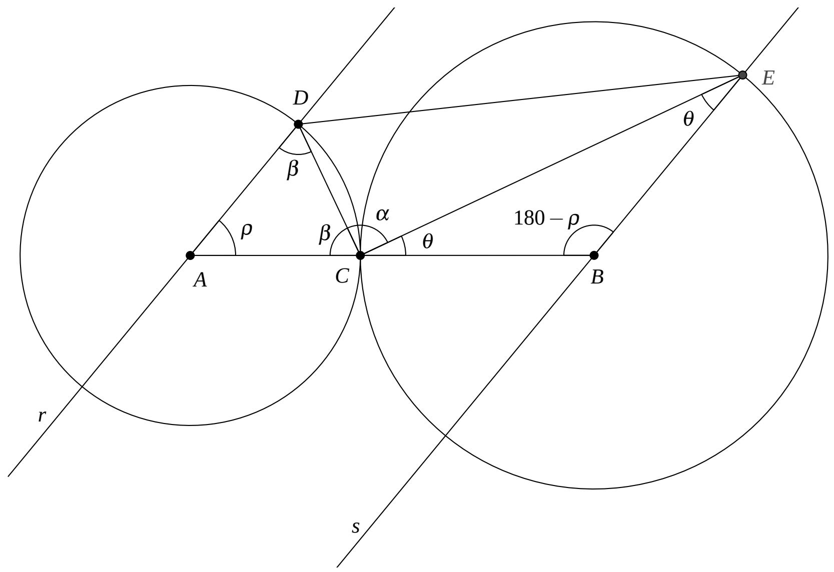
Demonstração. Os segmentos $\overline{PA}$ e $\overline{PC}$ são diâmetros dos círculos, logo, os triângulos PBA e PBC são retângulos em B. Assim, $\widehat{CBA} = \widehat{CBP} + \widehat{PBA} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$. Os pontos A, B e C são, desta maneira, colineares. ■

Invariante 4

Trace um segmento $\overline{AB}$ e, neste segmento, marque um ponto C. Com centro em A, trace o círculo passando por C e marque um ponto D neste círculo. Agora construa um segundo círculo com centro em B passando também por C. Em seguida, construa a reta r passando por A e D. Trace, então, por B, a reta s paralela a reta r. Marque o ponto E de intersecção dessa reta s com o segundo círculo (este ponto E deverá ser aquele que está no mesmo semiplano que o ponto D com relação a reta que contém o segmento $\overline{AB}$). Por fim, construa o triângulo DCE.

Pontos livres: A e B. *Pontos semilivres*: C e D. *Invariante geométrico*: DCE é um triângulo retângulo.

Demonstração. O triângulo ACD é isósceles de base $\overline{CD}$ (pois $AC = AD =$ raio do círculo de centro em A) e o triângulo BCE também é isósceles de base $\overline{CE}$ (pois $BC = BE =$ raio do círculo de centro em B). Considere, então, $\beta = \widehat{ACD} = \widehat{ADC}$; $\theta = \widehat{BCE} = \widehat{BEC}$; $\rho = \widehat{DAC}$, de modo que $\widehat{CBE} = 180^0 - \rho$ (os ângulos $\widehat{CBE}$ e $\widehat{CAD}$ são suplementares, pois as retas $\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{BE}$ são paralelas) e, por fim, $\alpha = \widehat{DCE}$. Pelo teorema do ângulo externo de um triângulo aplicado aos triângulos ADC e CBE, respectivamente, segue-se que $\theta + \alpha = \beta + \rho$ e $\beta + \alpha = \theta + 180^\circ - \rho$. Somando-se membro a membro essas duas equações, temos que $\beta + \theta + 2\alpha = \beta + \theta + \rho +$

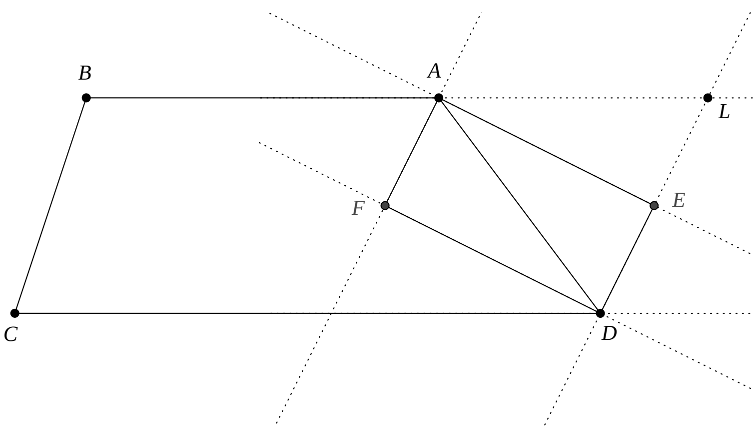


$180^\circ - \rho$, isto é, $2\alpha = 180^\circ$ e, sendo assim, $\alpha = 90^\circ$. Consequentemente, DCE é um triângulo retângulo. ∎

Invariante 5

Construa um trapézio $ABCD$ de bases $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ e lados $\overline{BC}$ e $\overline{AD}$. Trace, então, as bissetrizes interna e externa correspondentes ao ângulo $\widehat{BAD}$ e, também, as bissetrizes interna e externa correspondentes ao ângulo $\widehat{CDA}$ do trapézio $ABCD$. Seja E o ponto de interseção das bissetrizes externas e seja F o ponto de interseção das bissetrizes internas. Construa o quadrilátero $AFDE$.

Pontos livres e semilivres: três dos quatro vértices do trapézio $ABCD$ são livres, o vértice restante é semilivre. *Invariante geométrico*: o quadrilátero $AFDE$ é um retângulo.

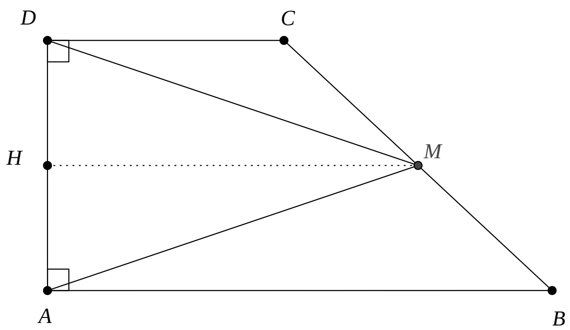


Demonstração. Pelo resultado do Invariante 2, temos que $\widehat{FAE}$ é um ângulo reto. O mesmo acontece com o ângulo $\widehat{EDF}$. Seja L o ponto de interseção das retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{DE}$. Como o quadrilátero $ABCD$ é um trapézio, segue-se que $\widehat{CDA} = \widehat{DAL}$ (pois as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$ são paralelas e os ângulos $\widehat{CDA}$ e $\widehat{DAL}$ são alternos internos). Consequentemente, $\widehat{FDA} = \widehat{CDA}/2 = \widehat{DAL}/2 = \widehat{EAD}$. Sendo assim, os segmentos $\overline{DF}$ e $\overline{EA}$ são paralelos. Como $\overline{DF}$ é perpendicular a $\overline{DE}$ e $\overline{EA}$ é paralelo a $\overline{DF}$, concluímos que $\overline{EA}$ também é perpendicular a $\overline{DE}$. Logo, o ângulo $\widehat{AED}$ também é reto. Como o quadrilátero $AFDE$ tem três angulos internos retos ($\widehat{FAE}$, $\widehat{EDF}$ e $\widehat{AED}$), segue-se que ele é um retângulo. ■

Invariante 6

Construa um trapézio retângulo $ABCD$ de bases $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ e lado oblíquo $\overline{BC}$. Marque, então, o ponto médio M de $\overline{BC}$. Por fim, construa o triângulo AMD.

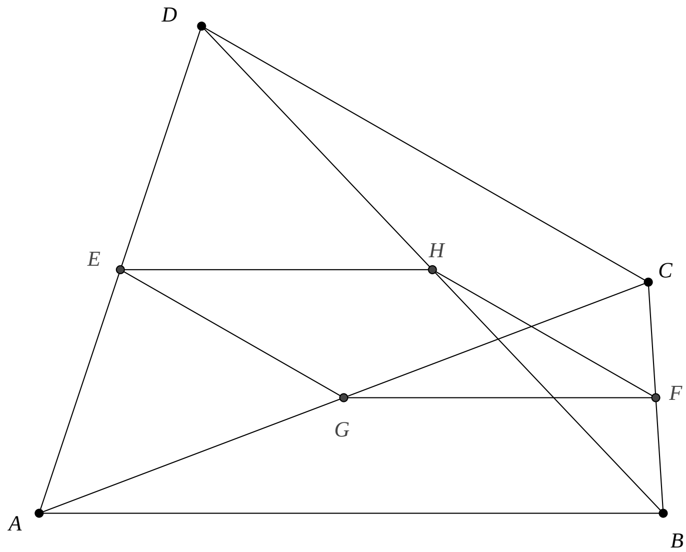
Pontos semilivres e *pontos livres*: dois vértices adjacentes do trapézio $ABCD$ são livres, os outros dois vértices são semilivres. *Invariante geométrico*: o triângulo AMD é isósceles.



Demonstração. Trace por M uma reta paralela às bases $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ do trapézio e seja H o ponto de interseção desta reta com o lado $\overline{AD}$. Como os ângulos $\widehat{BAD}$ e $\widehat{ADC}$ são retos, o segmento $\overline{HM}$ é perpendicular a $\overline{AD}$ e, portanto, ele é a altura do triângulo AMD com relação ao lado $\overline{AD}$. Por outro lado, como M é ponto médio de $\overline{BC}$ e $\overline{HM}$ é paralelo às bases $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, segue-se que H é ponto médio de $\overline{AD}$, de modo que $\overline{HM}$ é a mediana do triângulo AMD com relação ao lado $\overline{AD}$. Logo, no triângulo AMD, $\overline{MH}$ é simultaneamente altura e mediana com relação ao lado $\overline{AD}$. Sendo assim, o triângulo AMD é isósceles de base $\overline{AD}$. ■

Invariante 7

Construa um quadrilátero $ABCD$ de lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$. Trace as diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$. Marque os pontos médios E e F dos lados não adjacentes $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$, respectivamente, e os pontos médios G e H das diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$, respectivamente. Construa o quadrilátero $EGFH$.



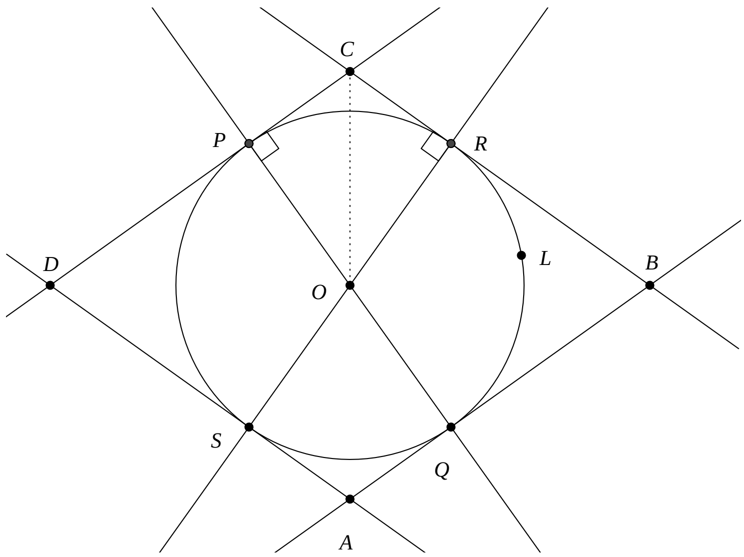
Pontos livres: A, B, C e D. *Pontos semilivres*: não existem. *Invariante geométrico*: o quadrilátero $EGFH$ é um paralelogramo.

Demonstração. No triângulo BCD, temos que os pontos H e F são pontos médios, respectivamente, dos lados $\overline{BD}$ e $\overline{BC}$. Portanto, pelo teorema da base média do triângulo, segue-se que $\overline{HF}$ é paralelo a $\overline{CD}$ e $HF=\frac{CD}{2}$. Analogamente, temos que no triângulo ACD, $\overline{EG}$ é paralelo a $\overline{CD}$ e $EG=\frac{CD}{2}$. Logo, $\overline{HF}$ é paralelo a $\overline{EG}$ e $HF=EG$. Aplicando-se argumentos análogos aos triângulos ADB e ACB podemos concluir que $\overline{EH}$ é paralelo a $\overline{FG}$ e $EH=FG$. Logo, o quadrilátero $EFGH$ é um paralelogramo. ∎

Invariante 8

Construa um círculo $\mathscr{C}$ de centro O passando por um ponto L. Sobre o círculo $\mathscr{C}$, marque dois pontos P e R. Construa então as retas $\overleftrightarrow{OP}$ e $\overleftrightarrow{OR}$. Seja $Q \neq P$ o ponto de interseção entre $\mathscr{C}$ e $\overleftrightarrow{OP}$ e seja $S \neq R$ o ponto de interseção entre $\mathscr{C}$ e $\overleftrightarrow{OR}$. Em seguida, construa as retas tangentes t_P, t_Q, t_R e t_S ao círculo nos pontos P, Q, R e S, respectivamente. Marque os pontos de interseção A entre t_S e t_Q, B entre t_Q e t_R, C entre t_R e t_P, D entre t_P e t_S. Por fim, construa o quadrilátero $ABCD$.

Pontos livres: O e L. *Pontos semilivres*: P e R. *Invariante geométrico*: o quadrilátero $ABCD$ é um losango.

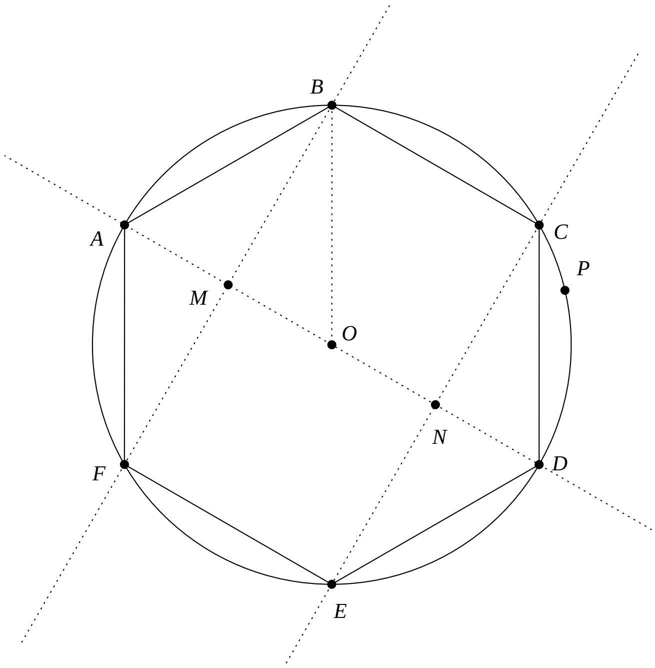


Demonstração. Vamos aplicar o caso especial de congruência de triângulos retângulos: $OR = OP$ e $\overline{OC}$ é hipotenusa comum, então, $CP = CR$. O mesmo ocorre com os outros segmentos tangentes, isto é, $DP = DS$, $AQ = AS$ e $BQ = BR$. Somando-se membro a membro as quatro últimas igualdades temos que $CP + PD + AQ + QB = CR + RB + AS + SD \Rightarrow CD + AB = CB + AD$. As retas tangentes t_P e t_Q são paralelas, pois são perpendiculares ao diâmetro $\overline{PQ}$ e, por motivo análogo, as retas tangentes t_R e t_S também são paralelas. Assim, o quadrilátero $ABCD$ é um paralelogramo. Agora, $x = CD = AB$ e $y = AD = BC \Rightarrow 2x = 2y \Rightarrow x = y$, ou seja, os lados do paralelogramo são congruentes, implicando que $ABCD$ é um losango. ■

Invariante 9

Construa um círculo $\mathscr{C}$ de centro O passando por um ponto P. Marque um ponto A sobre $\mathscr{C}$ e, então, trace a reta $\overleftrightarrow{OA}$. Seja $D \neq A$ o ponto de interseção entre $\mathscr{C}$ e $\overleftrightarrow{OA}$. Determine os pontos médios M e N de $\overline{AO}$ e $\overline{OD}$, respectivamente. Construa, por M, uma reta perpendicular a $\overline{AD}$ e marque os pontos B e F de interseção desta reta com o círculo $\mathscr{C}$. Agora, trace, por N, uma reta perpendicular a $\overline{AD}$ e marque os pontos C e E de interseção desta reta com o círculo $\mathscr{C}$ (o ponto C deve estar no mesmo semiplano que o ponto B com relação a reta $\overleftrightarrow{OA}$). Desenhe o hexágono $ABCDEF$.

Pontos livres: O e P. *Pontos semilivres*: A. *Invariante geométrico*: o hexágono é $ABCDEF$ é regular.



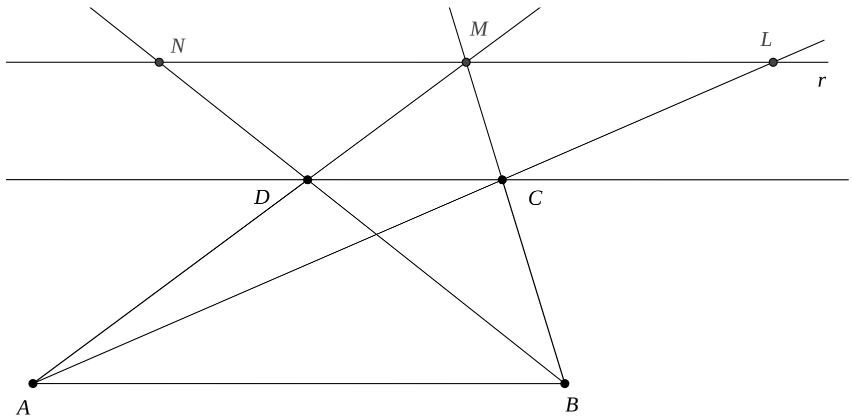
Demonstração. Considere o triângulo ABO. Como o segmento $\overline{BM}$ é mediana e altura desse triângulo, concluímos que ele é isósceles de base $\overline{AO}$. Mas $AO = OB$ ($\overline{AO}$ e $\overline{OB}$ são raios do círculo $\mathscr{C}$), logo o triângulo ABO é equilátero. De forma análoga, podemos afirmar que os triângulos AFO, DCO, DEO são também equiláteros, implicando que também serão equiláteros os triângulos BOC e EFO. Esta justaposição de seis triângulos equiláteros mostra que $ABCDEF$ é um hexágono regular. ■

3.2 Nível 2

Invariante 1

Construa um trapézio $ABCD$ de lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$, com lados paralelos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$. Em seguida, trace as semirretas $\overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{BC}$. Marque o ponto M de interseção das semirretas $\overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{BC}$. Depois, trace, por M, a reta paralela r aos lados $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$. Construa, então, as semirretas $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{BD}$. Por fim, marque os pontos L e N de interseção dessas semirretas com a reta r.

Pontos livres: três vértices do trapézio $ABCD$. *Pontos semilivres*: o quarto vértice do trapézio. *Invariante geométrico*: o ponto M é o ponto médio do segmento $\overline{LN}$.

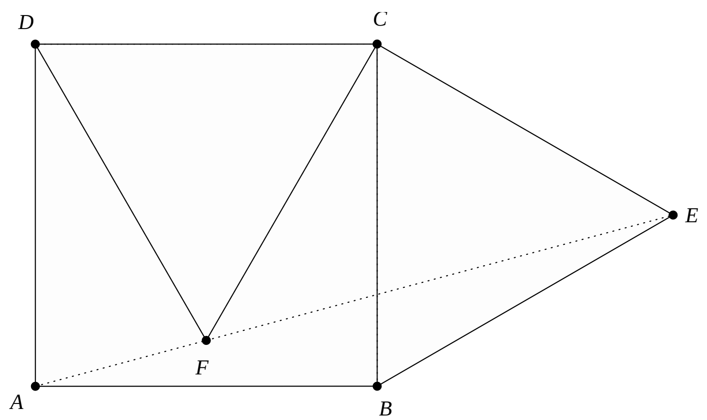


Demonstração. Pelo Teorema de Tales, temos que $BC/BM = AD/AM$. Como os triângulos ACD e ALM são semelhantes, concluímos que $AD/AM = CD/LM$. Agora, da semelhança dos triângulos BCD e BMN, podemos escrever que $BC/BM = CD/NM$. Assim, $BC/BM = AD/AM \Rightarrow CD/NM = CD/LM \Rightarrow MN = LM$, isto é, M é o ponto médio do segmento $\overline{LN}$. ∎

Invariante 2

Construa um quadrado $ABCD$ de lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$. Em seguida, construa sobre o lado $\overline{BC}$ um triângulo equilátero BCE para fora e sobre o lado $\overline{CD}$ um triângulo equilátero CDF para dentro do quadrado.

Pontos livres: dois vértices consecutivos do quadrado (os outros dois são fixos). *Pontos semilivres*: não existem. *Invariante geométrico*: os pontos A, F e E são colineares.

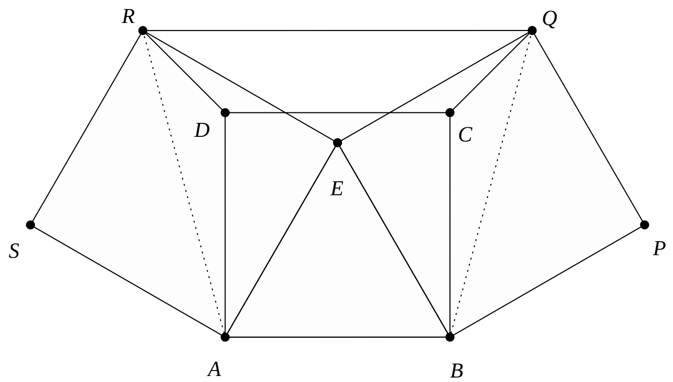


Demonstração. Temos que $\widehat{FCE} = 30° + 60° = 90°$ e $CF = CE$ e, assim, $\widehat{CFE} = 45°$. Observando o triângulo isósceles ADF, onde $DA = DF$, temos que $\widehat{ADF} = 30°$. Portanto, $\widehat{DFA} = 75°$. Desta maneira,, $\widehat{AFD} + \widehat{DFC} + \widehat{CFE} = 75° + 60° + 45° = 180°$, ou seja, os pontos A, F e E são colineares. ∎

Invariante 3

Construa o quadrado $ABCD$ de lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$. Agora, desenhe um triângulo equilátero ABE para dentro do quadrado. Em seguida, construa, para fora do triângulo ABE, dois quadrados: o primeiro, $AERS$, de lados $\overline{AE}$, $\overline{ER}$, $\overline{RS}$ e $\overline{SA}$, e o segundo, $EBPQ$, de lados $\overline{BE}$, $\overline{EQ}$, $\overline{QP}$ e $\overline{PB}$. Por fim, trace o quadrilátero $CQRD$.

Pontos livres: dois vértices consecutivos do primeiro quadrado $ABCD$ (os outros dois são fixos). *Pontos semilivres*: não existem. *Invariante geométrico*: o quadrilátero $CQRD$ é um trapézio isósceles.



Demonstração. Para demonstrar que o polígono $CQRD$ é um trapézio isósceles, devemos mostrar que os segmentos $\overline{DR}$ e $\overline{CQ}$ são congruentes e que os segmentos $\overline{RQ}$ e $\overline{DC}$ são paralelos.

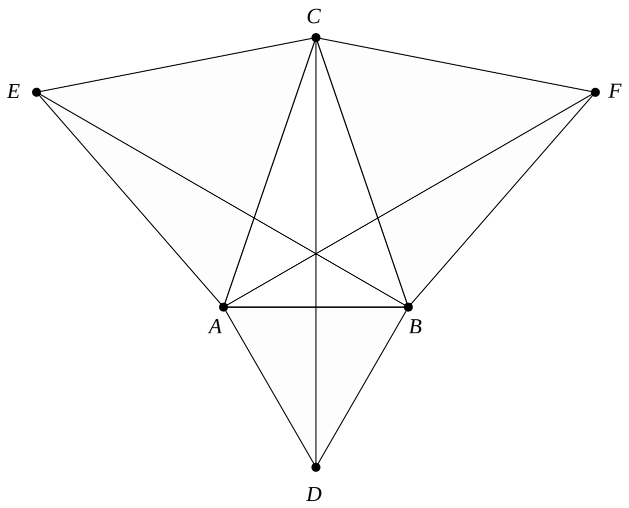
Primeiro demonstraremos que os segmentos $\overline{DR}$ e $\overline{CQ}$ são congruentes. Para isso, mostraremos que os triângulos ADR e BCQ são congruentes. De fato: temos que $AD = BC$ (lados do quadrado $ABCD$), $AR = BQ$ (diagonais dos quadrados congruentes $AERS$ e $EBPQ$) e $\widehat{RAD} = \widehat{QBC} = 15^\circ$. Assim, pelo caso LAL, os triângulos ADR e BCQ são congruentes e, em particular, $DR = CQ$.

Agora, demonstraremos que os segmentos $\overline{RQ}$ e $\overline{DC}$ são paralelos. Note, inicialmente, que $ER = EQ$ (lados dos quadrados congruentes $AERS$ e $EBPQ$). Como $\widehat{REQ} = 360^\circ - (90^\circ + 90^\circ + 60^\circ) = 120^\circ$, segue-se que $\widehat{ERQ} = 30^\circ$ (ângulo da base do triângulo isósceles ERQ) e, portanto, $\widehat{ARQ} = 45^\circ + 30^\circ = 75^\circ$. Como $\widehat{RAB} = 45^\circ + 60^\circ = 105^\circ$, temos que $\widehat{ARQ} + \widehat{RAB} = 75^\circ + 105^\circ = 180^\circ$, o que implica no paralelismo dos segmentos $\overline{RQ}$ e $\overline{AB}$. Como $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são paralelos (lados opostos do quadrado $ABCD$), segue-se que os segmentos $\overline{RQ}$ e $\overline{CD}$ são também paralelos. ∎

Invariante 4

Construa um triângulo isósceles ABC de base $\overline{AB}$. Em seguida, construa três triângulos equiláteros BCF, ACE e ABD para fora desse triângulo. Por fim, construa os segmentos $\overline{BE}$, $\overline{AF}$ e $\overline{CD}$.

Pontos livres: A e B. *Ponto semilivre*: C. *Invariante geométrico*: os segmentos $\overline{AF}$, $\overline{BE}$ e $\overline{CD}$ são congruentes.



Demonstração. Os triângulos AFB e ABE são congruentes pelo caso LAL, pois $BF = BC = AC = AE$, $\overline{AB}$ é comum e $\widehat{ABF} = \widehat{CBA} + \widehat{FBC} = \widehat{CBA} + 60^\circ = \widehat{BAC} + \widehat{CAE} = \widehat{EAB}$. Em particular, $AF = BE$. Considere agora os triângulos DBC e ABF. Temos que $DB = AB$ (lados do triângulo equilátero ABD), $BC = BF$ (lados do triângulo equilátero BCF) e $\widehat{DBC} = \widehat{DBA} + \widehat{ABC} = 60^\circ + \widehat{ABC} = \widehat{CBF} + \widehat{ABC} = \widehat{ABF}$. Portanto, pelo caso LAL, os triângulos DBC e ABF são congruentes. Em particular, $CD = AF$. Desta maneira, os segmentos $\overline{AF}$, $\overline{BE}$ e $\overline{CD}$ são congruentes. ■

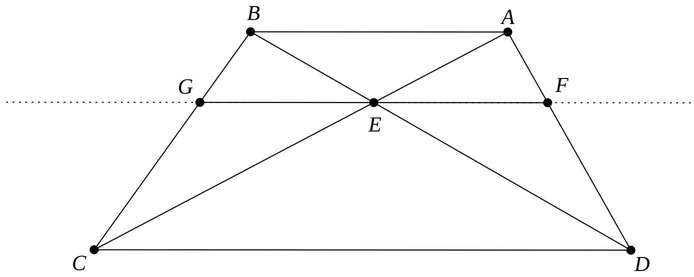
3.3 Nível 3

Invariante 1

Construa um trapézio $ABCD$ de lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$ e lados paralelos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$. Trace as diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ e marque o ponto $\overline{AC} \cap \overline{BD} = \{E\}$. Por E, trace a reta paralela ao lado $\overline{AB}$. Essa reta intersectará o lado $\overline{AD}$ em F e o lado $\overline{BC}$ em G. Considere os segmentos $\overline{FE}$ e $\overline{GE}$.

Pontos livres e semilivres: três vértices do trapézio $ABCD$, o quarto vértice é semilivre. *Invari-*

ante geométrico: $FE = GE$.

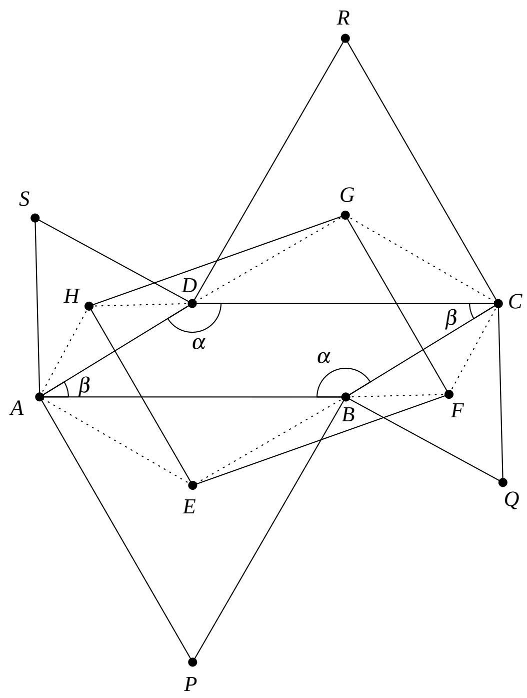


Demonstração. Pelo critério LAL, os triângulos ABD e FED são semelhantes. Desta maneira, $AB/FE = AD/FD = DB/DE = (DE+EB)/DE$. Do mesmo modo, os triângulos ABC e EGC são semelhantes e, portanto, $AB/GE = BC/CG = CA/CE = (AE+CE)/CE$. Analogamente, os triângulos ECD e EAB também são semelhantes e, sendo assim, $AB/CD = AE/CE = EB/DE$. Consequentemente, $(AE+CE)/CE = (DE+EB)/DE$. Portanto, $AB/FE = (DE+EB)/DE = (AE+CE)/CE = AB/GE$. Mas, se $AB/FE = AB/GE$, então $FE = GE$. ■

Invariante 2

Construa um paralelogramo $ABCD$ de lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$. Em seguida, sobre cada um de seus lados, construa para fora do paralelogramo os triângulos equiláteros ABP, BCQ, CDR e DAS. Marque então os baricentros E, F, G e H dos triângulos ABP, BCQ, CDR e DAS, respectivamente. Por fim, construa o quadrilátero $EFGH$.

Pontos livres: três vértices do paralelogramo $ABCD$ (o quarto vértice é fixo). *Pontos semilivres*: não existe. *Invariante geométrico*: o quadrilátero $EFGH$ é um paralelogramo.

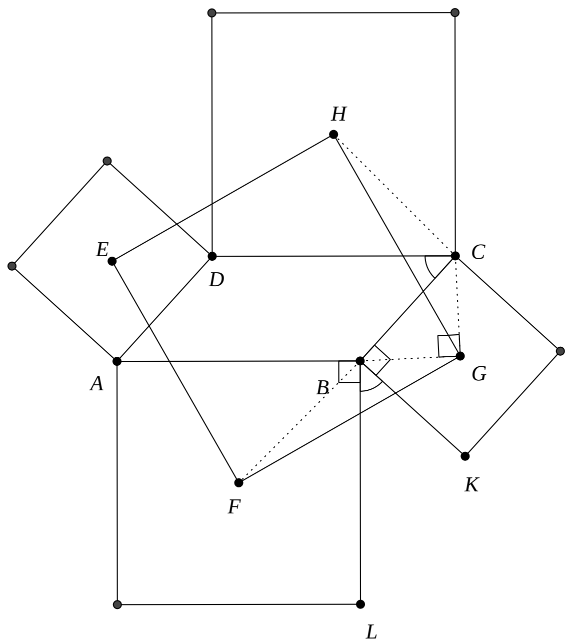


Demonstração. Como os triângulos equiláteros construídos sobre os lados opostos do paralelogramo $ABCD$ são congruentes, temos que $DH = FB$, $GD = EB$ e $\widehat{HDG} = 360^\circ - \alpha - \widehat{GDC} - \widehat{ADH} = 360^\circ - \alpha - \widehat{EBA} - \widehat{FBC} = \widehat{EBF}$; $AH = FC$, $AE = CG$ e $\widehat{HAE} = \widehat{HAD} + \beta + \widehat{BAE} = \widehat{BCF} + \beta + \widehat{DCG} = \widehat{FCG}$. Desta maneira, pelo caso LAL, HDG é congruente a EBF e EAH é congruente a FCG. Em particular, $GH = EF$ e $EH = FG$. Assim, como os lados opostos do quadrilátero $EFGH$ são congruentes, ele é um paralelogramo. ■

Invariante 3

Construa um paralelogramo $ABCD$ de lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$. Em cada um de seus lados, construa quadrados para fora do paralelogramo. Marque, então, os centros E, F, G e H desses quadrados e, por fim, desenhe o quadrilátero $EFGH$.

Pontos livres: três vértices do paralelogramo $ABCD$ (o quarto vértice é fixo). *Pontos semilivres*: não existem. *Invariante geométrico*: o quadrilátero $EFGH$ é um quadrado.



Demonstração. Sejam K e L pontos como na figura. Temos que $\widehat{KBL}+\widehat{ABC} = 360° - \widehat{LBA} - \widehat{KBC} = 360° - 90° - 90° = 180° = \widehat{BCD}+\widehat{ABC}$. Assim, $\widehat{KBL} = \widehat{BCD}$. Além disso, como $BG = CG$ e $BF = CH$, segue-se que os triângulos BFG e CGH são congruentes (caso LAL). Em particular, $FG = GH$ e $\widehat{BGF} = \widehat{CGH}$. Desta maneira,

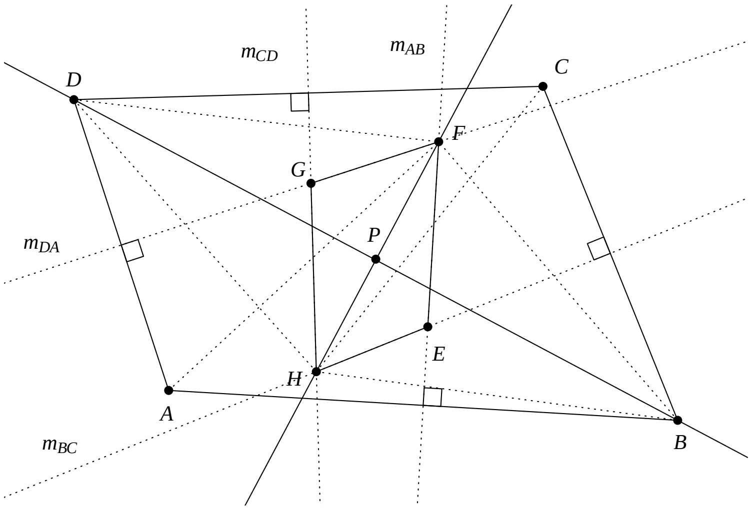
$$\widehat{HGF} = \widehat{BGF}+\widehat{HGB} = \widehat{CGH}+\widehat{HGB} = \widehat{CGB} = 90°.$$

Resumindo: $FG = GH$ e $\widehat{HGF} = 90°$. Analogamente, podemos mostrar que $GH = HE$ e $\widehat{GHE} = 90°$; $HE = EF$ e $\widehat{HEF} = 90°$ e $EF = FG$ e $\widehat{EFG} = 90°$. Sendo assim, o quadrilátero $EFGH$ é um quadrado. ∎

Invariante 4

Construa o quadrilátero $ABCD$ de lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$. Trace suas respectivas mediatrizes m_{AB}, m_{BC}, m_{CD} e m_{DA}. Suponha que: $m_{AB} \cap m_{BC} = \{E\}$; $m_{AB} \cap m_{AD} = \{F\}$; $m_{CD} \cap m_{AD} = \{G\}$ e $m_{CD} \cap m_{BC} = \{H\}$. Construa o quadrilátero $EFGH$ e trace sua diagonal $\overleftrightarrow{FH}$. Por fim, trace a diagonal $\overleftrightarrow{BD}$ do quadrilátero $ABCD$.

Pontos livres: os vértices do quadrilátero $ABCD$. *Pontos semilivres*: não existem. *Invariante geométrico*: as retas $\overleftrightarrow{FH}$ e $\overleftrightarrow{BD}$ são perpendiculares.

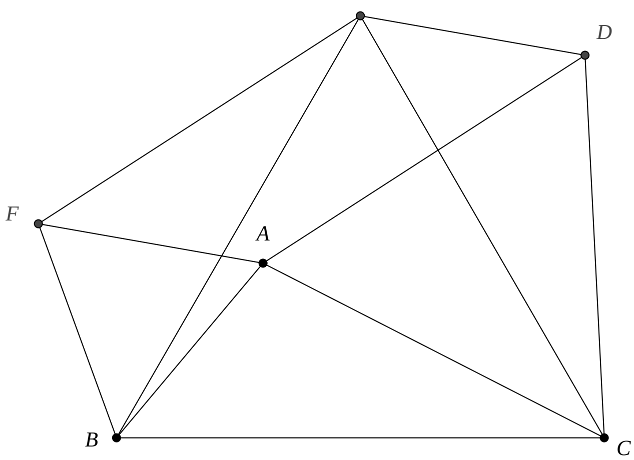


Demonstração. Seja $\overleftrightarrow{FH} \cap \overleftrightarrow{BD} = \{P\}$. Os triângulos HDF e HBF são congruentes, pois $FD = FA = FB$, $HB = HC = HD$ e $\overline{FH}$ é um lado comum. Em particular, o triângulo DFB é isósceles e $\widehat{DFP} = \widehat{PFB}$. Agora, pelo critério LAL, os triângulos PFB e PFD são congruentes. Consequentemente, $DP = BP$, isto é, $\overline{FP}$ é mediana e, portanto, também altura do triângulo isósceles DFB. Desta maneira, $\overleftrightarrow{FP}$ é perpendicular a $\overleftrightarrow{BD}$. ∎

Invariante 5

Construa um triângulo ABC. Sobre os lado $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, respectivamente, construa triângulos equiláteros ABF e ACD para fora do triângulo ABC. Sobre o lado $\overline{BC}$, por sua vez, construa o triângulo equilátero BCE para dentro do triângulo ABC. Por fim, trace o quadrilátero $ADEF$.

Pontos livres: os vértices do triângulo ABC. *Pontos semilivres*: não existem. *Invariante geométrico*: o quadrilátero $ADEF$ é um paralelogramo.



Demonstração. Os triângulos ABC e FBE são congruentes. De fato: $BC = BE$, pois o triângulo EBC é equilátero. Ocorre também que $AB = FB$, pois o triângulo FBA é equilátero. Agora

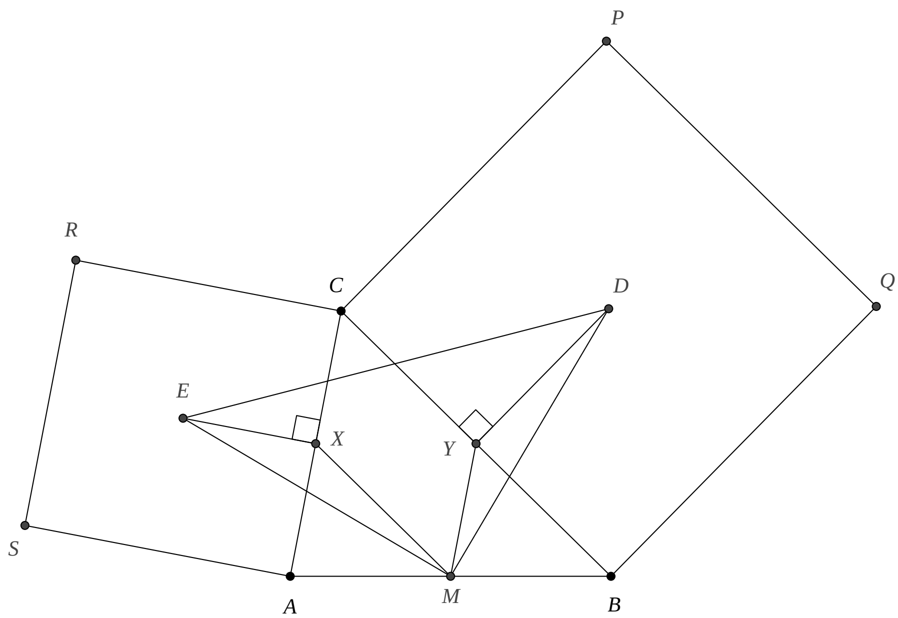
$$\widehat{EBF} = 60^\circ - \widehat{ABE} = \widehat{CBA}.$$

Pelo critério LAL, os triângulos ABC e FBE são congruentes. De maneira análoga, demonstra-se que os triângulos ABC e DEC também são congruentes. Como FBE é congruente a ABC e ABC é congruente a DEC, segue-se que FBE é congruente a DEC. Portanto, $FB = ED$ e $FE = DC$. Mas os triângulos FBA e DAC são equiláteros, logo $FA = FB$ e $AD = DC$. Concluímos assim que $FA = ED$ e $FE = AD$. Portanto, o quadrilátero $AFED$ é um paralelogramo. ■

Invariante 6

Construa um triângulo ABC. Sobre o lado $\overline{BC}$, construa para fora do triângulo desse triângulo o quadrado $BCPQ$ com lados $\overline{BC}$, $\overline{CP}$, $\overline{PQ}$ e $\overline{QB}$. Agora, sobre o lado $\overline{AC}$ desse triângulo, construa para fora do triângulo o quadrado $ACRS$ com lados $\overline{AC}$, $\overline{CR}$, $\overline{RS}$ e $\overline{SA}$. Determine os centros D e E dos quadrados $BCPQ$ e $ACRS$, respectivamente e, então, marque o ponto médio M do lado $\overline{AB}$. Por fim, construa o triângulo DEM.

Pontos livres: os vértices do triângulo ABC. *Pontos semilivres*: não existem. *Invariante geométrico*: o triângulo DEM é retângulo e isósceles, isto é, $\widehat{EMD} = 90^\circ$ e $EM = DM$.

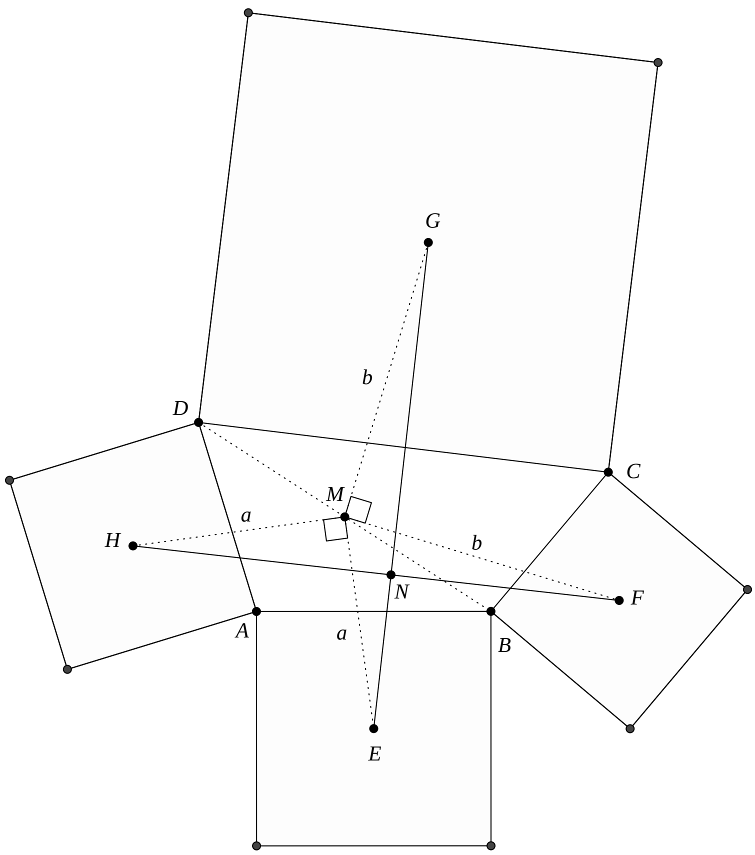


Demonstração. Sejam X o ponto médio do segmento $\overline{AC}$ e Y o ponto médio do segmento $\overline{BC}$. Note que $\overline{YM}$ e $\overline{MX}$ são bases médias do triângulo BCA com relação aos lados $\overline{CA}$ e $\overline{BC}$, respectivamente. Assim, $YM = CA/2$ e $MX = BC/2$. Como $CX = CA/2$ e $YC = BC/2$, concluímos que $CX = YM$ e $MX = YC$. Em particular, o quadrilátero $CXMY$ é um paralelogramo, $EX = YM$ e $MX = DY$. Agora, $\widehat{EXM} = \widehat{EXA} + \widehat{AXM} = 90° + \widehat{XCY} = 90° + \widehat{MYB} = \widehat{BYD} + \widehat{MYB} = \widehat{MYD}$. Desta maneira, pelo critério LAL, os triângulos XEM e YMD são congruentes. Em particular, $EM = DM$. Resta mostrar que $\widehat{DME} = 90°$. Sejam $\alpha = \widehat{XME}$, $\beta = \widehat{YMX}$ e $\gamma = \widehat{DMY}$. Observe que $\widehat{DME} = \alpha + \beta + \gamma$. Agora, $\widehat{EXM} + \widehat{MXC} + \widehat{CXE} = 360°$, $\widehat{EXM} = 180° - \widehat{MEX} - \widehat{XME} = 180° - \alpha - \gamma$, $\widehat{MXC} = 180° - \widehat{YMX} = 180° - \beta$ e $\widehat{CXE} = 90°$. Assim, $(180° - \alpha - \gamma) + (180° - \beta) + 90° = 360°$. Logo, $\widehat{DME} = \alpha + \beta + \gamma = 90°$. ■

Invariante 7

Construa um quadrilátero $ABCD$ de lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$. Sobre seus lados construa, para fora do quadrilátero, quatro quadrados. Marque os respectivos centros E, F, G e H desses quadrados. Por fim, trace os segmentos $\overline{EG}$ e $\overline{FH}$.

Pontos livres: os vértices do quadrilátero $ABCD$. *Pontos semilivres*: não existem. *Invariante geométrico*: As retas $\overleftrightarrow{EG}$ e $\overleftrightarrow{FH}$ são perpendiculares e, também, $EG = FH$.



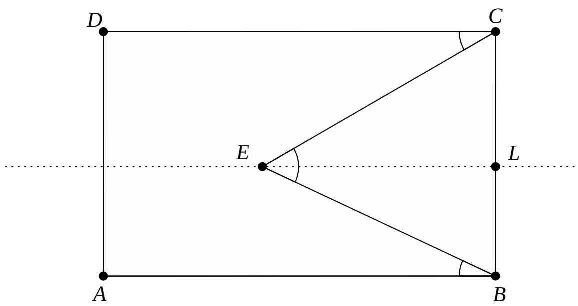
Demonstração. Seja M o ponto médio da diagonal BD do quadrilátero. Pelo Invariante Geométrico anterior, temos que $\overline{GM}$ e $\overline{FM}$ são congruentes e perpendiculares. O mesmo acontece com $\overline{HM}$ e $\overline{EM}$. Sendo assim, os triângulos FMH e EMG são congruentes e , em particular, $EG = FH$. Seja $\overleftrightarrow{FH} \cap \overleftrightarrow{EG} = \{N\}$. Para o quadrilátero $NGMH$, temos que $\widehat{HNG} + \widehat{NGM} + 90° + \widehat{FME} + 90° + \widehat{MHF} = 360°$ e, para o triângulo FMH, vale que $\widehat{NFM} + \widehat{FME} + 90° + \widehat{MHF} = 180°$. Subtraindo-se essas igualdades e levando-se em conta que $\widehat{NGM} = \widehat{NFM}$, concluímos que $\widehat{HNG} = 90°$. ∎

3.4 Nível 4

Invariante 1

Construa um retângulo $ABCD$ e marque um ponto E no interior do retângulo. Em seguida, trace os segmentos $\overline{BE}$ e $\overline{CE}$. Por fim, construa os ângulos $\widehat{EBA}$, $\widehat{DCE}$ e $\widehat{BEC}$.

Pontos semilivres e *pontos livres*: dois vértices adjacentes do retângulo $ABCD$ são livres, um vértice restante é semilivre e o outro é fixo; o ponto E é semilivre. *Invariante geométrico*: $\widehat{BEC}$=$\widehat{EBA}$+ $\widehat{ECD}$.

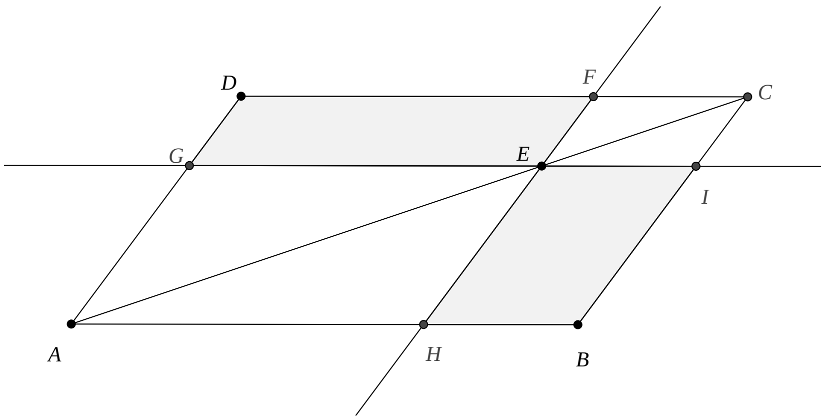


Demonstração. Trace por E uma reta paralela ao lado $\overline{AB}$. Seja L o ponto de interseção desta reta com o lado $\overline{BC}$. O ângulos $\widehat{DCE}$ e $\widehat{CEL}$ são congruentes, pois são ângulos alternos internos com relação às retas paralelas $\overleftrightarrow{EL}$ e $\overleftrightarrow{CD}$. Os ângulos $\widehat{ABE}$ e $\widehat{BEL}$, por sua vez, também são congruentes, pois são ângulos alternos internos com relação às retas paralelas $\overleftrightarrow{EL}$ e $\overleftrightarrow{AB}$. Logo: $\widehat{BEC} = \widehat{CEL} + \widehat{BEL} = \widehat{DCE} + \widehat{ABE}$. ∎

Invariante 2

Construa o paralelogramo $ABCD$ de lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$. Trace a diagonal $\overline{AC}$ e marque um ponto E nessa diagonal. Construa, por E, a reta paralela ao lado $\overline{AB}$ e, então, marque os pontos de interseção G e I dessa reta com os lados $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$, respectivamente. Analogamente, trace, por E, a reta paralela ao lado $\overline{AD}$ e, então, marque os pontos de interseção H e F dessa reta com os lados $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, respectivamente. Por fim, desenhe os paralelogramos $GEFD$ e $HBIE$.

Pontos semilivres e *pontos livres*: dois vértices adjacentes do paralelogramo $ABCD$ são livres, um é semilivre e o que restou é fixo. *Invariante geométrico*: os paralelogramos $GEFD$ e $HBIE$ possuem a mesma área.



Demonstração. Como $ABCD$ é um paralelogramo, temos que os triângulos ACD e ACB são congruentes (LLL) e, sendo assim, suas áreas são iguais: $(ACD) = (ACB)$[a]. Do mesmo modo, como $AHEG$ é um paralelogramo, segue-se que os triângulos AEG e AEH são congruentes (LLL) e, desta maneira, $(AEG) = (AEH)$. Analogamente, como $EICF$ é um paralelogramo, $(ECF) = (ECI)$. Agora,

$$(ACD) = (ACB) \Rightarrow (AEG) + (ECF) + (GEFD) = (AEH) + (ECI) + (HBIE).$$

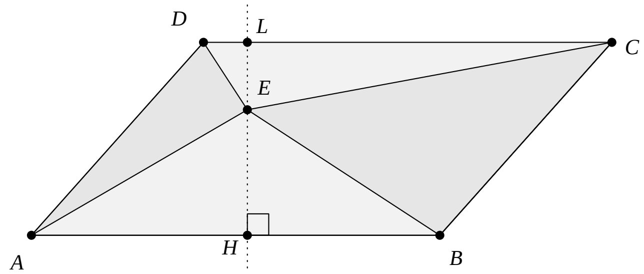
Mas $(AEG) = (AEH)$ e $(ECF) = (ECI)$. Portanto, concluímos que $(GEFD) = (HBIE)$, isto é, os paralelogramos $GEFD$ e $HBIE$ possuem a mesma área. ■

Invariante 3

Construa um paralelogramo $ABCD$ de lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$. No seu interior, marque um ponto E. Considere agora os triângulos ADE e BCE.

[a]Seguindo Coxeter & Greitzer (1967), a notação $(V_1V_2\cdots V_n)$ indicará a área do polígono $V_1V_2\cdots V_n$. Assim, por exemplo, (ABC) representará a área do triângulo ABC.

Pontos semilivres e *pontos livres*: dois vértices adjacentes do paralelogramo $ABCD$ são livres, um é semilivre e o que restou é fixo; o ponto E é semilivre. *Invariante geométrico*: a área do triângulo ADE somada com a área do triângulo BCE é igual a metade da área do paralelogramo $ABCD$.

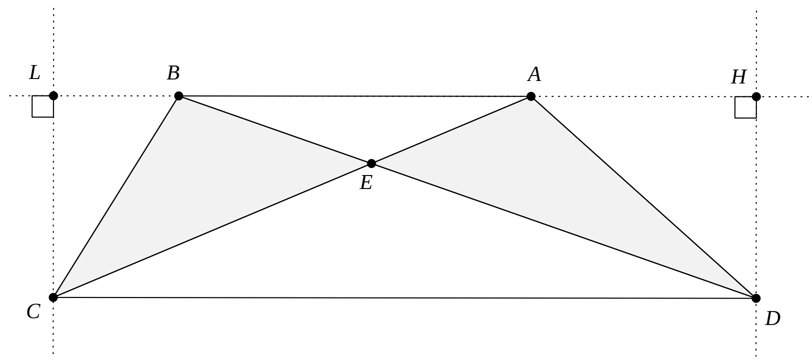


Demonstração. Trace uma reta por E perpendicular aos lados $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ do paralelogramo. Sejam H e L os pontos de interseção desta reta perpendicular com as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$. Temos então que $(ABE)+(CDE)=\frac{AB\cdot HE}{2}+\frac{CD\cdot EL}{2}=\frac{AB\cdot HE}{2}+\frac{AB\cdot EL}{2}=\frac{AB\cdot(HE+EL)}{2}=\frac{AB\cdot HL}{2}=\frac{(ABCD)}{2}$ Note também que, em particular, a área do triângulo ADE somada com a área do triângulo BCE também é igual a metade da área do paralelogramo $ABCD$. ■

Invariante 4

Construa um trapézio $ABCD$ de lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$, com $\overline{AB}$ paralelo a $\overline{CD}$. Trace as diagonais deste trapézio e marque o ponto E de interseção dessas diagonais. Construa agora os triângulos ADE e BCE.

Pontos livres e semilivres: três dos quatro vértices do trapézio $ABCD$ são livres, o vértice restante é semilivre. *Invariante geométrico*: os triângulos ADE e BCE possuem a mesma área.



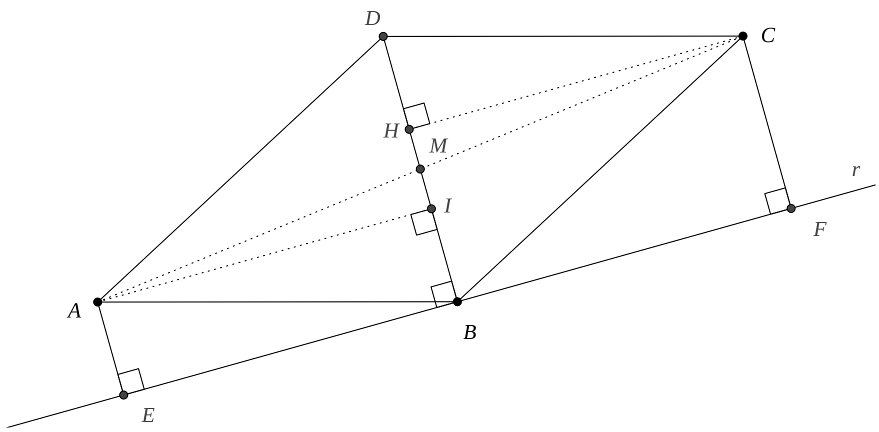
Demonstração. Temos que $(ADB)=(ADE)+(ABE)$ e, também, $(ACB)=(BCE)+(ABE)$. Mas os triângulos ADB e ACB possuem a mesma área, pois possuem uma mesma base ($\overline{AB}$)

e uma mesma altura ($LC = HD$). Assim, $(ADB) = (ACB) \Rightarrow (ADE) + (ABE) = (BCE) + (ABE) \Rightarrow (ADE) = (BCE)$. ■

Invariante 5

Construa um paralelogramo $ABCD$ de lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$, com $\overline{AD}$ paralelo a $\overline{BC}$. Trace a diagonal $\overline{BD}$. Pelo vértice B, desenhe uma reta r perpendicular à diagonal $\overline{BD}$. Pelos vértices A e C, trace retas perpendiculares a reta r que intersectarão essa reta, respectivamente, nos pontos E e F. Construa os segmentos $\overline{AE}$ e $\overline{CF}$.

Pontos semilivres e *pontos livres*: dois vértices adjacentes do paralelogramo $ABCD$ são livres, um é semilivre e o que restou é fixo; o ponto E é semilivre. *Invariante geométrico*: $AE + CF = BD$.

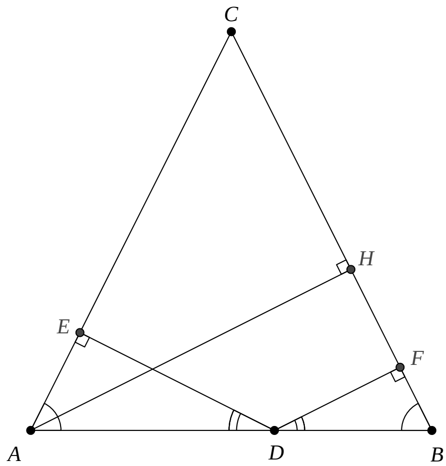


Demonstração. Considere os segmentos $\overline{CH}$ e $\overline{AI}$ perpendiculares a $\overline{BD}$. Seja M a interseção das diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$. Os triângulos EBA e IAB são congruentes. Os triângulos retângulos AMI e CMH também são congruentes, pois $AM = MC$, $\widehat{MAI} = \widehat{MCH}$ e $\widehat{AMI} = \widehat{CMH}$, logo, $EB = AI = CH$. Os triângulos retângulos AEB e DHC possuem hipotenusas e um dos catetos congruentes, logo são também congruentes portanto $HD = AE$, $CF = HB$ e $AE + CF = HD + HB = BD$. ■

Invariante 6

Construa um triângulo isósceles ABC de base $\overline{AB}$. Marque o ponto H, pé da altura relativa ao lado $\overline{BC}$. Em seguida, marque um ponto D na base $\overline{AB}$ e, por D, trace retas perpendiculares aos lados $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$. Sejam E e F os pontos de interseção destas retas perpendiculares com as retas $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{BC}$, respectivamente.

Pontos livres: A e B. *Pontos semilivres*: C e D. *Invariante geométrico*: $DF+DE=AH$.



Demonstração. Como o triângulo ABC é, por hipótese, isósceles de base $\overline{AB}$, segue-se que $\widehat{BAC}=\widehat{ABC}$. Agora, por construção, os ângulos $\widehat{AED}$, $\widehat{DFB}$ e $\widehat{AHB}$ são retos e, desta maneira, os triângulos BDF, ADE e ABH são semelhantes (AA). Sendo assim, $DF/AH=BD/BA$ e $DE/AH=AD/BA$. Portanto,

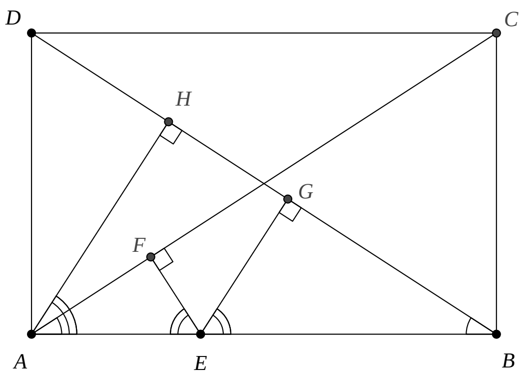
$$\frac{DF+DE}{AH}=\frac{DF}{AH}+\frac{DE}{AH}=\frac{BD}{BA}+\frac{AD}{BA}=\frac{BD+AD}{BA}=\frac{BA}{BA}=1,$$

e, consequentemente, $DF+DE=AH$. ■

Invariante 7

Construa um retângulo $ABCD$ de lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$. Em seguida, trace suas diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$. Seja H o pé da perpendicular baixada do vértice A até a diagonal $\overline{BD}$. Agora, no lado $\overline{AB}$, marque um ponto E. Sejam F e G os pés das perpendiculares baixadas do ponto E até as diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$, respectivamente. Por fim, trace os segmentos $\overline{AH}$, $\overline{EF}$ e $\overline{EG}$.

Pontos livres e semilivres: dois vértices adjacentes do retângulo $ABCD$ são livres, um vértice restante é semilivre e o outro é fixo; o ponto E é semilivre. *Invariante geométrico*: $EF+EG=AH$.



Demonstração. Como o polígono $ABCD$ é um retângulo, temos que $\widehat{EAF} = \widehat{EBG} = \widehat{HBA}$. Segue-se daí que os triângulos AEF, EBG e AHB são semelhantes, pois eles são retângulos. Desta maneira, $AE/AB = EF/AH$ e $BE/AB = EG/AH$. Portanto,

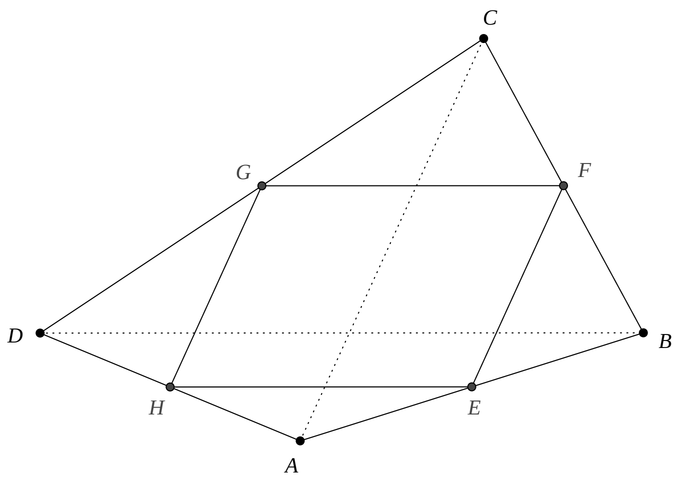
$$\frac{EF+EG}{AH} = \frac{EF}{AH} + \frac{EG}{AH} = \frac{AE}{AB} + \frac{BE}{AB} = \frac{AE+BE}{AB} = \frac{AB}{AB} = 1,$$

e, consequentemente, $EF + EG = AH$. ■

Invariante 8

Construa um quadrilátero $ABCD$ simples (isto é, $ABCD$ é tal que os únicos pontos que pertencem a duas arestas são os seus vértices). Em seguida, marque os pontos médios E, F, G e H dos lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$, respectivamente. Construa então o quadrilátero $EFGH$.

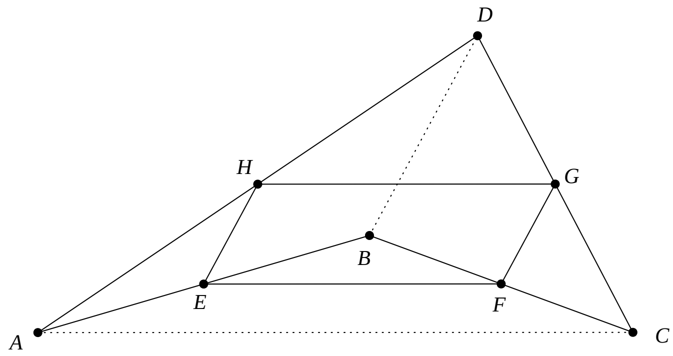
Pontos livres: os pontos A, B, C e D. *Pontos semilivres*: não existem. *Invariante geométrico*: a área do quadrilátero $EFGH$ é igual a metade das área do quadrilátero $ABCD$.



Demonstração. Já sabemos pelo Invariante 1 do Nível 1 que o quadrilátero $EFGH$ é um paralelogramo. Suponha que o quadrilátero $ABCD$ seja convexo. Quando construímos a base média de um triângulo, ele fica decomposto em um trapézio e um triângulo que possui área igual a quarta parte da área do triângulo original. Aplicando esta propriedade a nossa construção temos que

$$\begin{aligned}
(EFGH) &= (ABCD)-(AEH)-(BEF)-(CFG)-(DGH)\\
&= (ABCD)-\frac{(ABD)}{4}-\frac{(ABC)}{4}-\frac{(CBD)}{4}-\frac{(ACD)}{4}\\
&= (ABCD)-\frac{(ABD)+(CBD)}{4}-\frac{(ABC)+(ACD)}{4}\\
&= (ABCD)-\frac{(ABCD)}{4}-\frac{(ABCD)}{4} \;=\; \frac{(ABCD)}{2}.
\end{aligned}$$

Isto encerra o caso em que o quadrilátero $ABCD$ é convexo. Suponha agora que $ABCD$ seja um quadrilátero não convexo simples.



Para este caso, temos que

$$(EFGH) = (ABCD)-(AEH)-(FCG)-(DGH)+(EBF).$$

Mas $(AEH) = (ABD)/4$, $(FCG) = (BCD)/4$, $(DGH) = (ACD)/4$ e $(EBF) = (ABC)/4$. Logo,

$$\begin{aligned}
(EFGH) &= (ABCD)-\frac{(ABD)}{4}-\frac{(BCD)}{4}-\frac{(ACD)}{4}+\frac{(ABC)}{4}\\
&= (ABCD)-\frac{(ABD)+(BCD)}{4}-\left(\frac{(ACD)-(ABC)}{4}\right)\\
&= (ABCD)-\frac{(ABCD)}{4}-\frac{(ABCD)}{4} \;=\; \frac{(ABCD)}{2},
\end{aligned}$$

o que estabelece o resultado para o caso de polígonos não convexos simples. ∎

4 Considerações Finais

Durante o desenvolvimento deste trabalho foi possível aplicar versões preliminares dos enunciados dos invariantes em duas ocasiões: (1) com os alunos da disciplina “Recursos Computacionais no Ensino da Matemática” da turma PROFMAT da Universidade Federal Fluminense em 2014 e (2) com os participantes da oficina “Explorando Invariantes Geométricos na Escola Básica com o GeoGebra” no III Dia de GeoGebra Iberoamericano na Pontifícia Universidade Católica de São Paulo em 2015.

O trabalho com a turma de “Recursos Computacionais” foi conduzido pelo professor Humberto Bortolossi, então responsável pela disciplina, com os seguintes objetivos: obter uma percepção dos alunos quanto ao nível de dificuldade dos invariantes; avaliar a clareza dos enunciados e da configuração correspondente; verificar se as ferramentas indicadas eram suficientes para implementar a construção; saber se o professor usaria a atividade de investigação com seus alunos. Participaram 17 alunos que atuam como professores do Ensino Fundamental e Médio. Para isso, cada aluno ficou encarregado de quatro invariantes previamente selecionados entre os 36 invariantes considerados originalmente e, para cada um destes quatro invariantes, o aluno deveria:

1. Implementar a construção do enunciado no GeoGebra.
2. Responder às perguntas feitas no enunciado do invariante (quais são os pontos livres, qual é o invariante, etc.) e, além de indicar o invariante, tentar demonstrá-lo.
3. Indicar se achou o exercício fácil, médio ou difícil.
4. Indicar se achou o enunciado claro ou não, sugerindo modificações, caso necessário.
5. Indicar se achou a figura que acompanha o enunciado clara ou não, sugerindo modificações, caso necessário.
6. Indicar se concordava com as indicações das ferramentas do GeoGebra necessárias para implementar a construção e, caso não concordasse, indicar quais ferramentas deveriam ser incluídas ou removidas.
7. Indicar se usaria a atividade de investigação deste invariante com seus alunos (Ensino Fundamental e/ou Médio), justificando sua resposta.

Observamos que os alunos do PROFMAT já tinham estudado o conceito de invariante geométrico anteriormente na própria disciplina de Recursos Computacionais e que a análise dos quatro invariantes valia ponto para a disciplina (eles tiveram duas semanas para fazer a tarefa e registrar suas respostas na plataforma Moodle da disciplina). Todos os 17 alunos implementaram a construção no GeoGebra, indicando corretamente os pontos livres, semilivres e o invariante geométrico correspondente. Nem todos os alunos apresentaram demonstrações para os invariantes. A classificação quanto ao nível de complexidade não ficou muito diferente da catalogação que fizemos a priori. Os alunos, em sua maioria, acharam os enunciados e figuras claras e concordaram com as ferramentas sugeridas para a construção. Consideramos mais importante o Item 7 da análise e ficamos muito satisfeitos em constatar que quase todos os alunos do PROFMAT considerariam o uso dos invariantes geométricos com atividades de investigação com seus alunos em sala de aula.

Na oficina de 4 horas no III Dia de GeoGebra na PUC-SP, participiram 9 pessoas, entre professores da Escola Básica (incluindo uma professora de Pedagogia atuando no Primeiro Ciclo do Ensino Fundamental) e alunos de pós-graduação em Ensino de Matemática (Figura 4.1). Com exceção da professora de Pedagogia, todos os demais participantes já conheciam e usavam o GeoGebra.

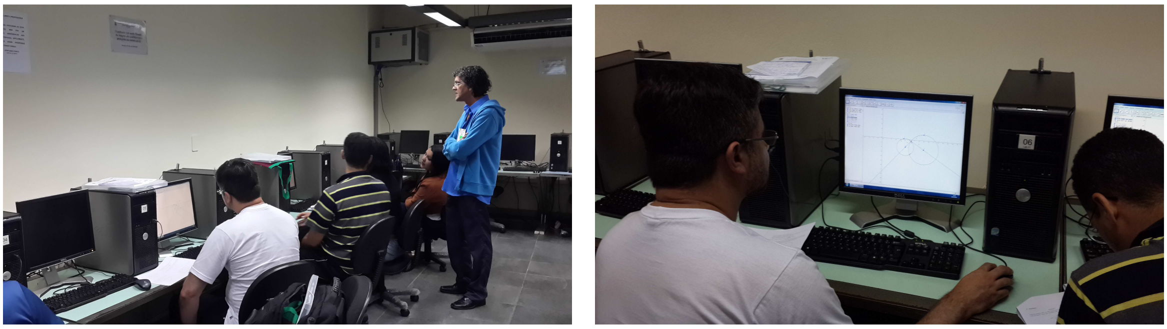
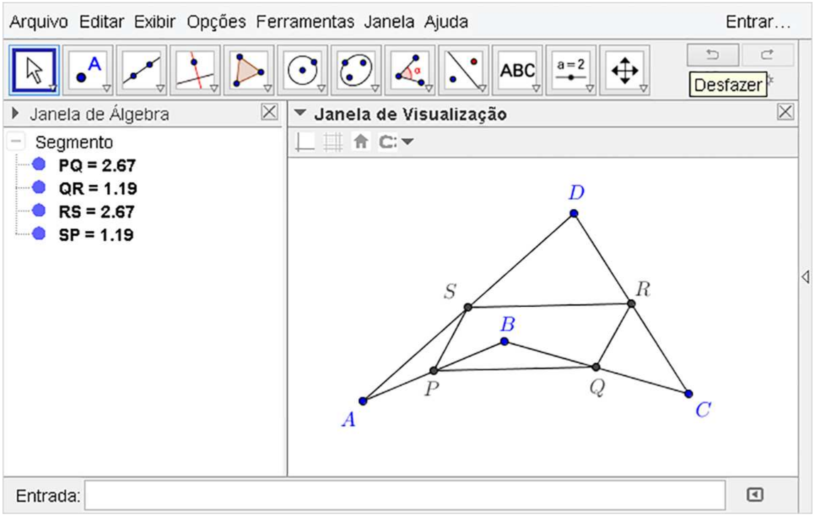


Figura 4.1: Oficina sobre Invariantes Geométricos no III Dia de GeoGebra na PUC-SP.

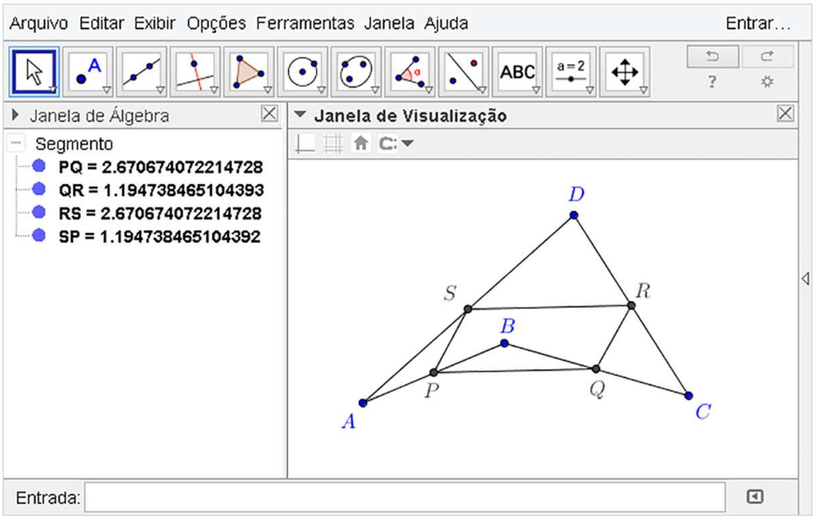
Após uma apresentação do contexto do trabalho (o início do material do Capítulo 1), os participantes conseguiram trabalhar nos três primeiros invariantes do Nível 1 (nesta oficina, os enunciados dos invariantes estavam mais próximos da versão apresentada nesta dissertação). Apesar do pouco tempo disponível, várias questões interessantes surgiram, principalmente relacionadas com a possibilidade ou não de se provar, no Invariante 1, usando o próprio GeoGebra, que o quadrilátero $PQRS$ é um paralelogramo:

(1) Vários participantes sugeriram usar a Janela de Álgebra do GeoGebra para provar que $PQRS$ é um paralelogramo: pelo GeoGebra, $PQ = 2.67 = RS$ e $QR = 1.19 = SP$ (figura a seguir), logo os lados opostos de $PQRS$ têm o mesmo comprimento e, desta maneira,

PQRS seria, de fato um paralelogramo.

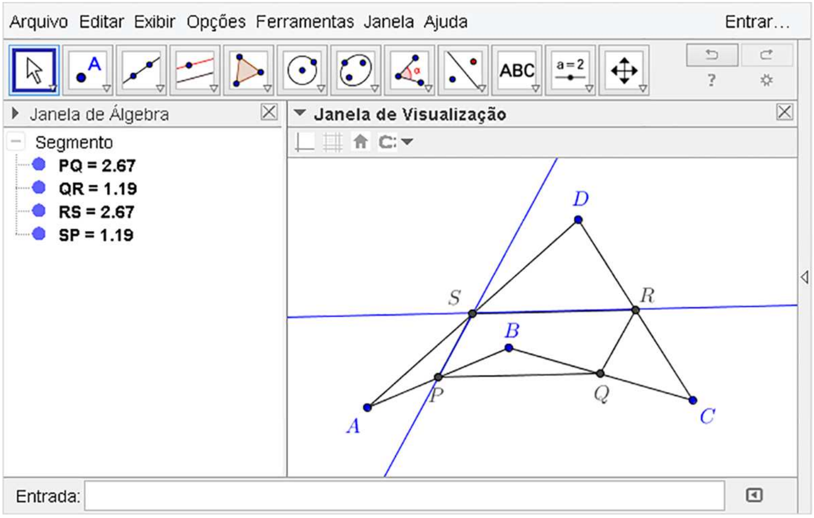


Argumentamos, neste momento, que os cálculos numéricos feitos pelo GeoGebra são aproximados e, desta maneira, eles não podem ser usados como prova de que medidas são iguais. De fato, ao mudar o número de casas decimais de 2 para 15, o GeoGebra nos dá que $QR \neq SP$.



Além disso, como o GeoGebra não consegue representar todos os diferentes quadriláteros (as coordenadas dos vértices A, B, C e D ficam restritas aos finitos números decimais que podem ser representados pelo computador), uma prova usando a Janela de Álgebra não seria geral.

(2) Alguns participantes sugeriram a seguinte estratégia: pelo ponto S, construir, usando o GeoGebra, as retas que são paralelas aos segmentos $\overline{PQ}$ e $\overline{QR}$, respectivamente. Como o segmento $\overline{RS}$ está contido na reta paralela a $\overline{PQ}$ e o segmento $\overline{SP}$ está contido na reta paralela a $\overline{QR}$, seria possível, então, concluir que *PQRS* é, de fato, um paralelogramo.



> Argumentamos, neste momento, que não é valida a justificativa usando argumentos visuais para o fato de que, por exemplo, o segmento $\overline{RS}$ está contido na reta que passa por S e é paralela ao segmento $\overline{PQ}$: nossos olhos não conseguiriam notar a diferenças muito pequenas. Além do mais, os desenhos feitos pelo GeoGebra são apenas modelos para os objetos matemáticos abstratos: pontos, retas e segmentos não possuem espessura, logo eles não são visíveis.

Este exercício com o Teorema de Varignon ajudou a esclarecer para os participantes que uma justificativa para o teorema só poderia ser realizada por uma demonstração matemática.

No final da oficina, perguntamos aos participantes se, em sala de aula, com alunos, a etapa de construção poderia ser omitida, isto é, os alunos trabalhariam com uma construção pronta, moveriam os pontos livres e semilivres, fariam uma conjectura, para depois prová-la. Todos foram unânimes em apontar para a importância da construção, justificando que a implementação ajuda muito na percepção das relações geométricas entre os objetos da construção.

Como trabalho futuro, pretendemos aplicar as atividades propostas diretamente com alunos do Ensino Básico e, também, procurar incluir mais invariantes geométricos simples.

Referências Bibliográficas

Alencar Filho, Edgard de. *Exercícios de Geometria Plana*. Décima sexta edição. São Paulo: Nobel, 1983.

Asociación Fondo de Investigadores e Editores (Perú). *Geometría: Una Visión de La Planimetría*. Segunda edición. Lima: Lumbreras, 2012.

Coxeter, Harold Scott MacDonald; Greitzer, Samuel L. *Geometry Revisted*. United States of America: The Mathematical Association of America, 1967.

Dolce, Osvaldo; Pompeo, José Nicolau. *Fundamentos de Matemática Elementar: Geometria Plana*. Sétima edição. São Paulo: Atual, 1993.

Gravina, Maria Alice. *Geometria Dinâmica: Uma Nova Abordagem para O Aprendizado da Geometria*. Anais do VII Simpósio Brasileiro de Informática na Educação, p.1-13, Belo Horizonte, 1996. Disponível em: <http://www.ufrgs.br/espmat/disciplinas/geotri/pdf/maria-alice_geometria-dinamica1996-vii_sbie.pdf>. Acessado em: 08 de maio de 2015.

Morgado, Augusto César; Wagner, Eduardo; Jorge, Miguel. *Geometria II*. Rio de Janeiro: Livraria Francisco Alves, 1973.

Muniz Neto, Antonio Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar: Geometria Euclidiana Plana*. Segunda edição. Coleção do Professor de Matemática, Rio de Janeiro: SBM, 2013.

Posamentier, Alfred S.; Salkind, Charles T. *Challenging Problems in Geometry*. New York: Dover Publications, Inc., 1970.