

Jorge

**APLICAÇÕES DAS TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS NO ENSINO
MÉDIO**

Dissertação apresentada por **Jorge Ricardo
Muniz Kwasinski** ao Programa de Mestrado
Profissional em Matemática em Rede Nacional-
Universidade Federal Fluminense, como requisito
parcial para a obtenção do Grau de Mestre.

Orientador: Mitchael Alfonso Plaza Martelo

Niterói
Outubro 2015.

K98 Kwansinski, Jorge Ricardo Muniz.

Aplicações das transformações geométricas no ensino médio / Jorge Ricardo Muniz Kwasinski. - Niterói, RJ: [s.n.], 2015.

77 f.

Orientador: Prof. Dr. Mitchael Alfonso Plaza Martelo.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT) - Universidade Federal Fluminense, 2015.

1. Ensino de matemática 2. Geometria Analítica. 3. Trigonometria I.
Título

CDD: 510.7

Jorge Ricardo Muniz Kwasinski

**APLICAÇÕES DAS TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS NO ENSINO
MÉDIO**

Dissertação apresentada por **Jorge Ricardo
Muniz Kwasinski** ao Programa de Mestrado
Profissional em Matemática em Rede Nacional-
Universidade Federal Fluminense, como requisito
parcial para a obtenção do Grau de Mestre.
Linha de Pesquisa: Geometria.

Banca Examinadora

Aprovada em:

Prof. Mitchael Alfonso Plaza Martelo - Orientador
Doutor - Universidade Federal Fluminense

Prof. Fabio Simas - Membro
Doutor - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro

Prof. Omar Javier Solano - Membro
Doutor - Universidade Federal Fluminense

Prof. Yuri Ki - Membro
Doutor - Universidade Federal Fluminense

Niterói
Outubro de 2015.

DEDICATÓRIAS

À minha esposa Jurema, meus filhos Roberta e Jorge, e aos meus netos Sofia e Victor,
minha fonte de inspiração

Aos meus alunos, meu motivo de transpiração

Às minhas duas mães, Zuleika e Marilena .

Ao professor e orientador Dr. Michael Alfonso Plaza Martelo, um exemplo de competência, sabedoria e simplicidade.

A Bahia já me deu régua e compasso.
Gilberto Gil

AGRADECIMENTOS

Ao povo brasileiro, este povo que, com o suor de seu trabalho acumula riquezas capazes de promover programas como este, contribuindo para o aprimoramento dos profissionais de educação.

À Capes, por administrar com sabedoria e competência, junto à SBM, parte do inestimável patrimônio desta grande nação.

Aos competentes professores do Profmat UFF.

Ao meu professor e orientador Dr. Mitchael Alfonso Plaza Martelo ,pela sua capacidade ímpar de transformar seus alunos em admiradores

Ao IFRJ, meu local de trabalho.

Aos meus amigos Cosme de Oliveira Leite, Rafael de Freitas Lopes e Roberto Cruz Harstenreiter, pelo estímulo e companheirismo.

Ao amigo Eduardo Wagner, por suas valiosas sugestões e pela paciência na revisão deste trabalho .

Ao amigo Delson Lima Filho, por sua preciosa colaboração.

A todos que, direta ou indiretamente, contribuíram de alguma forma para a consecução deste trabalho.

RESUMO

Este trabalho tem por objetivo ressaltar o potencial didático das Transformações Geométricas, aliadas às tecnologias disponíveis nos softwares em Geometria Dinâmica, na abordagem de tópicos do ensino médio. Tal abordagem, privilegia aspectos intuitivos presentes nas idéias de translação, rotação, reflexão e homotetia. Sugere o estudo de parte da Geometria Analítica já na primeira série do ensino médio, atendo-se ao estudo da reta no plano como uma consequência do conceito de proporção via Teorema de Tales. Trata o paralelismo de retas com a aplicação da translação. O perpendicularismo de retas faz uso de rotações, em substituição ao método tradicional realizado pelos resultados da Trigonometria. Também faz uso da rotação como elemento motivador para a definição do produto escalar de vetores no plano. Propõe uma metodologia para a caracterização e o cálculo aproximado do número irracional π , utilizando a homotetia. Constrói em detalhes, com auxílio do *Tabulae*, o gráfico da função seno de modo a chamar a atenção para aspectos dessa construção que são essenciais para sua confecção como a retificação da circunferência e o papel central do conceito de radiano neste contexto. Faz uma atividade interdisciplinar que relaciona o número π com a trajetória curvilínea dos cursos dos rios, de sua nascente à foz.

Palavras - chave: Transformações Geométricas, Geometria Dinâmica, Geometria Analítica e Trigonometria.

ABSTRACT

The objective of this work is to reinforce the didactic potential of Geometric Transformations, combined with technologies available in Dynamic Geometry softwares, for the approach of topics in high school. Such approach, favors intuitive aspects present in the ideas of translation, rotation, reflection and homothety. The teaching of basic Analytic Geometry right in the first year in high school is recommended, focusing on the study of lines on planes as consequence of the proportion concept derived from the Thales Theorem. Also handling the parallelism of lines with the use of translation. The perpendicularity of lines is shown by rotation, replacing the traditional method, which makes use of trigonometry. Rotation is also used as a motivator to define the dot product of vectors on a plane. The methodology is proposed for the characterization and the approximated calculation of the irrational number π , through the use of homothety. With the help of Tabulae, a detailed graph of the sine function is sketched in a way that enlightens the aspects that are essential to its development such as the rectification of the circumference and the major role of the concept of radian measure in this context. Leading to an interdisciplinary activity that establishes a relation between π with the curvilinear trajectory of the course of rivers, from the source to the mouth.

Key-words: Geometric Transformations, Dynamic Geometry, Analytic Geometry and Trigonometry

Sumário

1	Introdução	1
2	Considerações Históricas	6
3	Preliminares	11
3.1	Teorema de Tales	11
3.2	Transformações Pontuais	16
3.2.1	Funções	16
3.2.2	Transformações Pontuais	17
3.2.3	Transformações Geométricas	19
4	Aplicações	27
4.1	Aplicação da Reflexão	28
4.2	Aplicação da Translação	30
4.3	Aplicação da rotação	32
4.4	Aplicação das Homotetias	35
5	O número π	38
5.1	O valor de π	41
5.2	Área do círculo	43
5.3	Unidades de medida	44
6	Geometria Analítica	48
6.1	A reta no plano	50
7	Funções Trigonométricas	61
7.1	O gráfico da função seno	63
8	Atividades e Comentários	68
8.1	π na natureza	68
8.2	Considerações finais	72
8	Refêrencias	
9	Anexos	

Capítulo 1

Introdução

A escolha do tema deste trabalho vem como fruto da experiência com o Ensino da Matemática nas escolas das esferas pública e privada, tanto no Ensino Básico, quanto no Ensino Superior. Apesar de as diretrizes para o Ensino Médio nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) apontarem para um incentivo ao estudo das Transformações Geométricas, os livros didáticos atuais pouco ou nada trabalham do assunto em seus conteúdos. Para constatar esta realidade, foram destacados alguns exemplares de textos didáticos selecionados pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), que podem ser consultados em [28], [18] e [23]. A Geometria e o Desenho Geométrico, bases conceituais necessárias a um bom desenvolvimento das estratégias metodológicas que fazem uso das Transformações Geométricas, ainda enfrentam dificuldade para encontrar um espaço ao nível de sua relevância nos currículos escolares. A Geometria, embora tenha espaço nos currículos, quase sempre é abordada de forma inadequada, não mostrando todo seu potencial pedagógico (ver [19]). Já o Desenho Geométrico, este é praticamente inexistente. Este cenário pode ser creditado ao reflexo das escolhas metodológicas adotadas no passado pelos organismos de gestão das políticas educacionais especificamente nos cursos de Licenciatura em Matemática. Essas políticas educacionais têm impactado negativamente o Ensino da Matemática, na medida em que os professores formados sob esta ótica encontram certa dificuldade no manuseio da Geometria e, conseqüentemente, não estimulam seus alunos em suas práticas docentes a fazerem uso dela (ver [3]):

“É patente a perplexidade em que ainda se debate, entre nós, o ensino da geometria. Menosprezada pela universidade, - que se rendeu ao fascínio da álgebra e da análise, - e, em consequência, ignorada pelos professores que ela forma, a geometria, na escola de 1º e 2º graus, ou tem apenas um registro cartorário, inócuo, nos programas de matemática, ou então é encenada mais ou menos como a montaram os Gregos, há dois milênios. Foi isto, justamente, que lançou o ensino da geometria num processo circular de desprestígio e abandono: o não se ter reformulado, - ao contrário da álgebra e da análise, - no sentido de reconhecer prevalência às estruturas sobre os entes, o que corresponderia, no caso, a estudar a geometria, cada geometria, como caracterizada por um espaço, tomado como conjunto de base, e um grupo de transformações deste espaço.”

Ainda em [3] podemos encontrar a seguinte reflexão sobre a situação do professor de Matemática e sua relação com o Ensino da Geometria.

“O Professor de Matemática, mercê de sua formação docente, parece não aceitar a

idéia de que a figura continua sendo um dos motores fundamentais da invenção matemática e de sua comunicação.”

Essas reflexões nos indicam que, na formação do professor de Matemática, o Desenho não ocupava um lugar de destaque, não se configurando em uma disciplina de caráter formativo. Como consequência, por não aparecer nos currículos escolares como obrigatória, o licenciando entendia que não era de sua responsabilidade o estudo criterioso do Desenho Geométrico. Esta conduta dos educadores impunha ao Ensino da Geometria uma metodologia minimalista, privilegiando fórmulas mal compreendidas pelos alunos, em detrimento de uma didática que fosse verdadeiramente estimulante neste terreno. Um testemunho importante que aponta um cenário nada animador no Ensino da Matemática em razão do desprestígio das disciplinas citadas pode ser encontrado em [19], como segue:

“Intimamente ligado ao costume de privilegiar a manipulação formal no ensino da Matemática está a apresentação da Geometria segundo o que chamaremos de método peremptório. Este método consiste em declarar verdadeiras certas afirmações, sem justificá-las. Um dos maiores méritos educativos da Matemática é o de ensinar aos jovens que toda conclusão se baseia em hipóteses, as quais precisam ser aceitas, admitidas para que a afirmação final seja válida. O processo de passar, mediante argumentos logicamente convincentes, das hipóteses para a conclusão chama-se demonstração e seu uso sistemático na apresentação de uma teoria constitui o método dedutivo. Este é o método matemático por excelência e a Geometria Elementar tem sido, desde a remota antiguidade, o lugar onde melhor se pode começar a praticá-lo. Lamentavelmente, a grande maioria dos estudantes brasileiros sai da escola, depois de onze anos de estudo, sem jamais ter visto uma demonstração. O método peremptório de ensinar Geometria enfatiza as relações métricas, ignora as construções com régua e compasso e reduz todos os problemas a manipulações numéricas.”

Acreditamos que uma boa base conceitual que atente para a importância das Transformações Geométricas apoiada na utilização dos instrumentos de Desenho e o estudo sistemático da Geometria podem contribuir para uma melhora no desempenho dos estudantes de todos os níveis de ensino. Afortunadamente, pode-se perceber atualmente uma política de resgate da representação gráfica, com a inserção de metodologias que fazem uso de tecnologias aplicadas ao ensino. Esta realidade pode ser percebida no trabalho recente de grupos de pesquisa em Ensino de Matemática que fazem uso de softwares em Geometria Dinâmica em suas práticas pedagógicas a exemplo do TABULAE e do GEOGEBRA, o primeiro utilizado no CAP-UFRJ (consultar [8]) e o segundo que é ensinado em uma disciplina do mestrado do PROFMAT. Também ressaltamos o uso de novas tecnologias no ensino das transformações geométricas (ver [26]).

O presente trabalho procura mostrar as potencialidades do Ensino das Transformações Geométricas de Reflexão, Translação, Rotação e Homotetia, aliadas à Geometria e ao Desenho Geométrico. Tudo é feito procurando sempre associá-las na abordagem de tópicos de Matemática constantes na grade curricular do Ensino Médio. Há também um exemplo na Ótica Geométrica estudado na Física. Faz, com destaque especial, aplicações destes conceitos no estudo da trigonometria e também no estudo da Geometria Analítica. A perspectiva metodológica proposta neste trabalho estimula o estudo da Geometria Analítica já na primeira série do Ensino Médio, como ferramenta imprescindível na construção dos

elementos necessários para que o educando se familiarize com o plano cartesiano, que é o terreno natural para o desenvolvimento do estudo das funções reais de variável real. Esta metodologia pode ser justificada na medida em que apresenta o estudo das retas no plano cartesiano em uma abordagem apoiada no teorema de Tales, evitando o tratamento convencional que em geral é feito, na quase totalidade dos textos atuais, com uso da Trigonometria, e em alguns poucos com tratamento vetorial, o que é menos indicado ainda nesta fase. O estudo do paralelismo e do perpendicularismo de retas proposto neste trabalho, faz forte apelo às noções de Translação e Rotação respectivamente. Em grande parte dos textos didáticos utilizados nas escolas atualmente, o perpendicularismo entre retas é demonstrado com a utilização das fórmulas de adição e subtração de arcos para o cosseno, seno e tangente. Essas demonstrações podem ser encontradas em [28], [18] e [23], que são textos atuais e selecionados pelo PNLD. Essas complicadas fórmulas de adição de arcos, por si só, trazem alguma dificuldade para seu entendimento e, além disso não surtem o efeito desejado para o educando. De modo geral, a maioria dos professores não as demonstram. Dessa forma, a referida propriedade do perpendicularismo é tratada como uma espécie de axioma, pronto para ser utilizado. Essa atitude por parte do professor, de certo que compromete o correto aprendizado. A seguir, reproduzimos uma reflexão que se encontra em [16], a fim de corroborar com as ideias aqui delineadas.

“[...]Devemos esclarecer que, embora reconhecendo a indiscutível vantagem do método vetorial sobre o cartesiano no tratamento de algumas questões geométricas, conduzindo a soluções mais simples e elegantes, somos, entretanto, da opinião que aquele método encontra principalmente útil aplicação em Geometria Analítica na resolução de problemas relativos a planos e retas no espaço. A aplicação do Cálculo Vetorial à Geometria Analítica Plana é, ao nosso ver, de pouca utilidade ...”

É preciso que se deixe claro o reconhecimento da importância da Trigonometria, assim como da teoria vetorial, como ferramentas imprescindíveis na construção do arcabouço da sólida construção dos conceitos matemáticos. O que aqui se propõe é uma alternativa metodológica na abordagem dos conteúdos estudados no ensino médio, que atente para os aspectos de extrema naturalidade, que são possíveis com as Transformações Geométricas. Elas sem dúvida aguçam a criatividade e abrem caminho para uma visão dinâmica e inovadora, com a presença da tecnologia aplicada, como preconizam os PCN, ver [24] página 252,

“aprender Matemática no Ensino Médio, deve ser mais do que memorizar resultados dessa ciência mas sim, adquirir conhecimento vinculado ao domínio de um saber fazer matemático e de um saber pensar matemático.”

Convém ressaltar o papel estratégico da utilização dos softwares de Geometria Dinâmica em apoio ao uso das Transformações Geométricas. Tais tecnologias, apropriadamente exploradas pelo professor, atuam como uma espécie de catalisadores do processo Ensino-Aprendizagem. Essas ferramentas eletrônicas se configuram, pois, em uma perspectiva de cunho construtivista notável, permitindo uma manipulação das figuras atuando complementarmente às ferramentas tradicionais do Desenho. Uma matéria importante que relata uma experiência no ensino da matemática com o *Tabulae* pode ser consultada em [8]. Outros tópicos abordados no presente trabalho foram o estudo do número π e o gráfico da função seno. Tais estudos foram pautados na transformação de homotetia, que

com o auxílio do Tabulae possibilitou construções e manipulações de figuras com extrema facilidade e objetividade, ressaltando a potencialidade da didática nele apoiada. Neste trabalho, todas as figuras que exigiam construção com régua e compasso foram realizadas no Tabulae.

Este trabalho é dividido em oito capítulos. O primeiro capítulo faz uma descrição sucinta dos aspectos motivacionais que norteiam o presente trabalho; fala sobre os PCN, o uso das tecnologias no ensino e também da situação do ensino das Transformações Geométricas e das disciplinas correlatas de Geometria e Desenho Geométrico na opinião de profissionais da educação de grande relevância no cenário da educação brasileira e internacional. O segundo capítulo trata da contextualização histórica dos temas tratados. O terceiro capítulo aborda as ferramentas conceituais que desempenham papel central para o desenvolvimento do trabalho como o Teorema de Tales e as Transformações Geométricas. O quarto capítulo mostra efetivamente onde as Transformações Geométricas podem ser aplicadas na grade curricular do Ensino Médio; faz também algumas aplicações das Transformações Geométricas na resolução de alguns problemas. O quinto capítulo faz uma apresentação do número π e do radiano, com base nos resultados da Homotetia, e aborda a área do círculo. O sexto capítulo é dedicado ao estudo da Geometria Analítica à luz das Transformações Geométricas com apoio do Tabulae. O sétimo capítulo fala das funções trigonométricas, sua definição e o traçado minucioso do gráfico da função seno com utilização do Tabulae. O oitavo capítulo traz uma atividade interdisciplinar onde se investiga a relação entre o número π e a sinuosidade dos rios. Traz também referências bibliográficas e anexo contendo comentários de professores e alunos com os quais se realizou uma atividade onde o referido trabalho foi apresentado.

PCN: Geometria e Transformações Geométricas

Os PCN elaborados pela Secretaria de Educação Fundamental do MEC têm origem no ano de 1997 e trazem uma proposta de reordenação curricular. Eles são uma referência nacional para as políticas públicas na área da Educação Básica. Em conformidade com suas diretrizes em 1998, especificamente na disciplina de Matemática, para os terceiro e quarto ciclos (6º ao 9º anos) podemos observar quatro eixos de conhecimentos

- Números e Operações (Aritmética e Álgebra);
- Espaço e Forma (Geometria);
- Grandezas e Medidas (Aritmética, Álgebra e Geometria);
- Tratamento da Informação (Estatística, Matemática Combinatória e Probabilidade)

No eixo Espaço e Forma, temos: A valorização dos conceitos geométricos; O trabalho com situações-problema; as construções geométricas com régua, compasso, esquadro e transferidor; a importância das *Transformações Geométricas* (Isometrias e Homotetia); e, por fim, a congruência e semelhança de figuras. As orientações dos PCNs apontam inequivocamente para a valorização e a importância do Ensino da Geometria e do Desenho Geométrico, dando prioridade a resolução de problemas e a apropriação por parte dos educandos de princípios fundamentais como proporcionalidade e homotetia. Neste contexto destaca-se ainda o domínio da argumentação com vistas a que os alunos manifestem naturalmente atitudes reflexivas que os levem a buscar sempre as justificativas necessárias

para se chegar a uma conclusão (resultados). Essa capacidade argumentativa é o limiar de uma postura que os conduzirá ao reconhecimento da importância da demonstração em Matemática, ou seja, o método matemático por excelência, que é o método dedutivo. O presente trabalho, por focar as aplicações das Transformações Geométricas no Ensino Médio, subsequente ao Fundamental (1º ao 9º anos), destaca as possibilidades dessas aplicações em conteúdos constantes dos programas curriculares deste segmento do Ensino da 1ª à 3ª séries. Foram selecionados alguns livros texto que são indicados pelo PNLD (Programa Nacional do Livro Didático), portanto com a chancela do governo federal. Esse programa é responsável por selecionar literaturas que mais se adequam aos PCN. Cabe ressaltar que, no centro em que leciono, o IFRJ, nossos alunos recebem gratuitamente esses livros que são previamente escolhidos pela equipe de Matemática, dentre três diferentes autores, para uso em nossas aulas. Estes manuais não vêm satisfazendo às orientações dos PCNs em sua integralidade. Dessa forma, ações individuais e institucionais são quase sempre necessárias para que se crie paulatinamente uma nova mentalidade no seio dos profissionais de educação que aponte para o aperfeiçoamento e o repensar constante sobre a educação brasileira. Neste sentido, o PROFMAT tem o seu destaque. Este programa atende a uma significativa parcela dos profissionais de educação, em um projeto de dimensões nacionais de significativa expressão, não somente pela quantidade (1500 professores de Matemática a grande maioria com bolsas) mas sobretudo pelo elevado nível de comprometimento. Este programa já produziu considerável material de pesquisa em Ensino de Matemática, reunido em suas teses publicadas, bem como a preciosa colaboração dos renomados professores que nele atuam.

Capítulo 2

Considerações Históricas

Neste capítulo procuramos destacar os temas que serão abordados em nosso trabalho bem como destacar a relevância dos mesmos. Isso será feito valendo-se da perspectiva histórica com o fim de conscientizar o educando do valor do conhecimento e dos métodos científicos fazendo-os perceber seu papel na vida humana em diferentes épocas e na capacidade humana de transformar o meio em que vive. Em especial, a Matemática é uma das vertentes do conhecimento humano que tem papel relevante para o desenvolvimento das sociedades.

A Geometria e o Desenho Geométrico

Os fundamentos da Matemática remontam à época dos gregos na antiguidade. Neste contexto, a obra em que se tem conhecimento desta primeira apresentação da Matemática como tal, é conhecida como os *Elementos* de Euclides. Sobre este pensador se tem pouca informação. Ele teria vivido por volta do ano 300 a.C (ver [1]). Euclides foi responsável pela elaboração de várias obras de caráter científico, sendo a mais famosa delas conhecida com o nome de Os Elementos. Esse trabalho reúne a quase totalidade do conhecimento matemático de seu tempo. Outras publicações foram perdidas, à exceção da obra atribuída a Hipócrates de Quio, que viveu no século V a.C. Os *Elementos* de Euclides são portanto, praticamente tudo o que se tem hoje em dia a respeito da Matemática Grega que conhecemos, desde suas origens com Tales de Mileto, que viveu no século VI a.C, até os tempos de Euclides, perfazendo um tempo de 250 anos, tempo em que se organizou logicamente, evoluindo de seu estágio embrionário com Tales, até o alto grau de sofisticação que se mostra nos Elementos. Não se sabe se Euclides escreveu os *Elementos* para uso no ensino, ou apenas para reunir o conhecimento matemático da época. Naquele tempo não havia a preocupação pedagógica dos dias de hoje, de sorte que Euclides alcançou os dois objetivos; e os *Elementos* foram muito usados no aprendizado da Matemática por mais de dois milênios (ver [4]). No século XIX já havia outros livros de Geometria, didaticamente mais adequados ao ensino, notadamente o livro de Legendre, que teve muitas edições em várias línguas, inclusive o português. Esse livro foi muito utilizado nas escolas brasileiras por quase todo o século XIX consultar ([7]).

O Processo Dedutivo em Geometria

Foi no início do século VI a.C que Tales de Mileto inaugurou na Matemática a preocupação com as demonstrações. A partir de então, a Matemática grega vai tomando o aspecto de uma estrutura de proposições logicamente encadeadas, isto é, cada proposição

é demonstrada a partir de proposições que a precedem, e essas por sua vez são demonstradas das antecedentes, e assim por diante em um processo que não teria fim. Entretanto, os gregos logo perceberam que era necessário parar este processo demonstrativo em algum momento, estabelecendo certas proposições iniciais que eram tomadas como verdadeiras pelo fato de serem evidentes por si mesmas; a partir destas, todas as outras poderiam ser demonstradas. Dessa forma foi estabelecido um conjunto de proposições, o que hoje em dia se conhece com o nome de axiomas ou postulados. O grande legado dos Elementos são esta notável organização lógico-dedutiva em que um reduzido número de proposições e definições iniciais é suficiente para se demonstrar, uns após outros, todos os teoremas considerados. Historicamente, os *Elementos* de Euclides são a primeira corporificação deste que se conhece como método axiomático.

As Transformações Geométricas

Uma das características surpreendentes da Matemática do século XX tem sido seu reconhecimento do poder do método abstrato. É conveniente lembrar que o que pode ser abstrato para algumas pessoas, pode ser muito terra-a-terra para outras. Esta característica deu origem a inúmeros resultados e problemas novos o que levou a pesquisa matemática a abrir novas áreas de cuja existência nem se suspeitava. No limiar destes acontecimentos surgiu não apenas uma nova Matemática, mas uma visão nova, e junto com isto, demonstrações simples de resultados clássicos difíceis. Este fato contribuiu também para a interrelação entre áreas que se julgavam sem nenhuma relação. A Álgebra, que surgiu como produto de toda essa transformação, não é apenas uma matéria com vida independente: ela é atualmente uma das áreas de pesquisa mais importantes em Matemática. Ela também funciona como um fio unificador que entrelaça quase toda a Matemática como a Geometria, a teoria dos Números, a Análise, a Topologia e mesmo a Matemática Aplicada. Nesse sentido, as idéias de Félix Klein se corporificam no cenário do Ensino da Matemática. A obra de Klein é um clímax adequado para a idade heróica da Geometria, pois ele a ensinou durante meio século.



Félix Klein

Figura 2.1:

Uma Geometria, segundo Klein, de um espaço S , de grupo principal G , é o conjunto de propriedades de S invariantes para as transformações de G .

Ressaltamos mais uma vez a importância das Transformações Geométricas, pois estas geram a própria Geometria Euclidiana. De fato, a Geometria Euclidiana é a Geometria do plano $\Pi = S$, cujo grupo principal é contituido pelas homotetias e as semelhanças (composição de homotetias com isometrias). Este assunto deve ser tratado com nossos alunos de Ensino Médio, pois, além de mostrar o formalismo da Matemática, gera uma

discussão sobre a existência de outros tipos de Geometrias.

O Número π

O número irracional π é uma unanimidade no ensino da Matemática. Além de ser um número mais que necessário ao bom desenvolvimento de estudos elementares e avançados em Matemática, sua história está envolta em uma atmosfera de mistério e fascínio. O conhecimento que se tem do número π nem sempre é satisfatório. Apenas por curiosidade, consta que no Velho Testamento, escrito no ano 500 A.C (ver [20]), que o número π teria valor igual a 3. Em 1931, um cidadão americano de Ohio publicou um livro segundo o qual o valor exato de π seria $\frac{256}{81}$. O livro em si, apesar de todas as heresias que contém, não causa admiração pois o número π sempre provocou irresistível atração aos amadores pelos séculos afora. O curioso é que o valor de π é o mesmo que foi obtido pelo escriba egípcio Ahmes, autor do famoso papiro de Rhind, escrito 2 mil anos antes de Cristo. Desde Arquimedes, que encontrou o valor 3,1416 para o número π , matemáticos se têm ocupado em calcular o valor de π com um número de casas decimais cada vez maiores. O Inglês Willian Shanks calculou π com 707 casas decimais exatas em 1873. Em 1947 descobriu-se o erro no cálculo de Shanks, que se dava na 527ª casa decimal. Com o auxílio de uma máquina manual, π foi calculado com 808 casas decimais exatas. Em seguida vieram os computadores, e na França, em 1967 o valor de π , segundo [20], foi calculado com 500.000 algarismos decimais exatos. Em 1984, nos Estados Unidos, com mais de dez milhões de casas decimais exatas (precisamente 10.013.395 algarismos decimais exatos).

Cronologia do cálculo de π

Matemático	Ano	Casas Decimais
Egípcios (Papiro de Rhind)	1650 A.C.	1
Arquimedes	250 A.C.	3
Zu Chongzhi	480 D.C.	7
Ghiyath al-Kashi	1424	16
Ludolph van Ceulen	1596	35
Georg von Vega	1794	126
Gauss	1824	200
William Shanks	1874	527
Levi B. Smith, John W. Wrench	1949	1.120
Daniel Shanks, John W. Wrench	1961	100.265
Jean Guilloud, M. Bouyer	1973	1.000.000
Yasumasa Kanada, Sayaka Yoshino, Yoshiaki Tamura	1982	16.777.206
Yasumasa Kanada, Yoshiaki Tamura, Yoshinobu Kubo	1987	134.217.700
Chudnovskys	1989	1.011.196.691
Yasumasa Kanada, Daisuke Takahashi	1997	51.539.600.000
Yasumasa Kanada, Daisuke Takahashi	1999	206.158.430.000
Yasumasa Kanada	2002	1.241.100.000.000
Daisuke Takahashi	2009	2.576.980.370.000 ^[1]
Fabrice Bellard	2010	2.699.999.990.000 ^[2]
Shigeru Kondo & Alexander Yee	2010/08/02	5.000.000.000.000 ^[3]
Shigeru Kondo & Alexander Yee	2011	10.000.000.000.000 ^[4]
The Santa Clara University	2013	8.000.000.000.000.000 ^[5]

pt.wikipedia.org/wiki/Pi

Figura 2.2:

Hoje sabemos que π é um número irracional, isto é, ele não é o resultado da divisão de dois números inteiros. Logo, nenhuma fração decimal finita ou dízima periódica pode representá-lo. Neste trabalho procuramos levar ao aluno um método que permita um olhar crítico sobre o número π e elaborar uma estratégia para chegar a uma formulação precisa

deste misterioso e fascinante número real. Nos tempos antigos não existia notação padronizada para π , esta letra grega que é equivalente ao nosso p. Sabemos que este número representa a razão entre o comprimento de uma circunferência e seu diâmetro (ver [1]) ou simplesmente o comprimento de uma semicircunferência de diâmetro igual a 1; ou ainda a área de um círculo de raio igual a 1. A adoção do símbolo π para este famoso número é devida ao matemático Euler em 1737. Desde então, todos passaram a adotar este símbolo para o número π . É importante salientar que o número π aparece inesperadamente em várias situações. Por exemplo, Leibnitz notou que a série $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$ converge ao número $\frac{\pi}{4}$. Euler provou que a soma dos inversos dos quadrados de todos os números naturais é igual a $\frac{\pi^2}{6}$. Desde que ficou clara a idéia de número irracional, começou-se a suspeitar que π era um deles. Euler era um dos que acreditava ser π um número irracional, mas quem provou formalmente tal propriedade foi um seu contemporâneo de nome Lambert; a demonstração da irracionalidade de π pode ser encontrada em [27] capítulo 16, página 458. Em estudos mais avançados sobre teoria dos números, o número π aparece como um número transcendente, ou seja, não é raiz de nenhum polinômio com coeficientes inteiros. Mas isso já é outro capítulo sobre este número fantástico que foge aos objetivos do presente trabalho. Outra aparição notável que merece uma atenção especial é o fato de o número aparecer em problemas relacionadas a investigações acerca da sinuosidade de rios. Sobre isso, destacamos uma atividade especial que tem por objetivo fazer o aluno refletir sobre a vasta utilidade da Matemática nas ciências aplicadas. Resultados sobre a cronologia do número π podem ser encontrados na Figura 2.2.

Funções Trigonômicas

A teoria que se ocupa de soluções de problemas geométricos envolvendo ângulos é conhecida com o nome de Trigonometria; traduzindo, isto é o mesmo que medida de triângulos. Ptolomeu (Klaudios Ptolomaios viveu e trabalhou em Alexandria em torno de 150 d.C) desenvolve este assunto em sua obra conhecida como *Almagesto*. Neste trabalho, Ptolomeu elabora uma tabela de cordas que relacionava os comprimentos de um arco de circunferência e os valores respectivos dos senos. A descrição das ideias de Ptolomeu pode ser encontrada em [1], Capítulo 4 com o título A Construção, por Ptolomeu, de uma Tábua Trigonométrica. Da época de Ptolomeu aos dias de hoje, a Trigonometria tem sido largamente utilizada nas mais diversas atividades humanas; na Topografia, na Cartografia, na Agrimensura dentre muitas outras. Em teorias avançadas como as séries de Fourier, tais funções são usadas para descrever as soluções das equações diferenciais provenientes dos problemas de ondas e do calor, que fazem parte do estudo das equações diferenciais parciais. Para um maior detalhamento do valor das funções trigonométricas, um interessante material de pesquisa pode ser consultado em [14].

Geometria Analítica

A criação da Geometria Analítica é creditada a René Descartes (1596 a 1650), em sua obra intitulada *La Géométrie* (3º apêndice do *Discours de la Méthode*) publicada em 1637 em Leyden, na Holanda. Decartes era mais filósofo do que matemático, limitando-se a discorrer suas ideias fundamentais sobre a solução de problemas geométricos por via algébrica, sem sequer deduzir a equação de uma linha reta. O mérito na criação da Geometria Analítica, como a conhecemos hoje em dia é dividido com Pierre de Fermat (1601 a 1665), que, em carta a Roberval, em 1636, expunha ideias semelhantes às de Descar-

tes. Entretanto, a sua obra “*Ad locos planos et solid isagoge*” (Introdução ao Estudo dos Lugares Planos e Sólidos) só teve publicidade em data posterior à de Descartes. Fermat abordou em sua obra a teoria geral da reta e da circunferência.

É importante destacar a relação histórica do desenvolvimento da Geometria Analítica com as questões motivadoras demandadas pela Geometria e suas Construções com régua e compasso. Podemos contemplar esta perspectiva em [9], que discorre sobre o método usado por Descartes. Tendo mostrado como as operações algébricas, inclusive a resolução de quadráticas, são interpretadas geometricamente, Descartes se volta para a aplicação da Álgebra a problemas geométricos determinados, formulando, muito mais claramente que os cossistas da Renascença (referência aos amatemáticos italianos, primeiros algebristas. A palavra cossista significa coisa, em referência a incógnita) , o método geral que reproduzimos a seguir:

“[...]Se, pois, queremos resolver qualquer problema, primeiro supomos a solução efetuada e damos nomes a todos os segmentos que parecem necessários à construção aos que são desconhecidos e aos que são conhecidos. Então, sem fazer distinção entre segmentos conhecidos e desconhecidos, devemos esclarecer a dificuldade, de modo que mostre mais naturalmente as relações entre esses segmentos, até conseguirmos exprimir uma mesma quantidade de dois modos. Isso constituirá uma equação (numa única incógnita) pois os termos de uma dessas expressões juntos são iguais aos termos da outra...” Em [9], destacamos:

“[...] Se um problema pode ser resolvido por geometria ordinária, isto é, com uso das retas e círculos traçados sobre uma superfície plana, quando a última equação tiver sido completamente resolvida restará no máximo o quadrado de uma incógnita, igual ao produto de sua raiz por alguma quantidade conhecida, acrescido ou diminuído de alguma outra quantidade também conhecida...”

Por fim, o método de Descartes também se relacionava à determinação de tangentes a uma curva. Com relação a isso, o método que ele publicou em *La Géométrie* era menos eficiente de que aquele que Fermat tinha desenvolvido na mesma época (ver [9] e [10]). Vale a pena destacar que a espantosa tecnologia do *GPS* (*Sistema de Posicionamento Global*), é uma consequência da ideia de Descartes para seu *sistema de coordenadas cartesianas*, assim chamado em sua homenagem. Este sistema consiste de linhas paralelas que se cruzam em duas, três ou mais direções, permitindo-se a descrição numérica de objetos no espaço. No globo terrestre, a posição de um objeto pode ser descrita em termos de sua latitude e longitude, que são traduzidas em seguida em uma localização em um mapa. O sistema GPS funciona também em três dimensões: além da latitude e da longitude, pode também fornecer a altitude e isso o torna extremamente útil na vida moderna. Um exemplo desta maravilha da tecnologia será explorado neste trabalho onde será possível verificar uma interessante propriedade associando o número π e a sinuosidade dos rios apontada por Einstein.

Capítulo 3

Preliminares

Neste capítulo estudaremos o Teorema de Tales e as Transformações Geométricas.

3.1 Teorema de Tales

Em alguns textos da história da Matemática encontramos evidências deste teorema devido a uma exibição feita por Tales, na qual procurava medir a altura de uma pirâmide. O teorema de Tales está associado à ideia de proporcionalidade e possui notável aplicação nas ciências, em particular nas ideias de Aristarco para a determinação das distâncias astronômicas, como a distância da Terra à Lua, o cálculo do raio da Terra e muitas outras aplicações(ver um excelente artigo em [6]).

Definição 3.1.1 *Um feixe de retas paralelas é um conjunto de retas distintas do plano, paralelas entre si.*

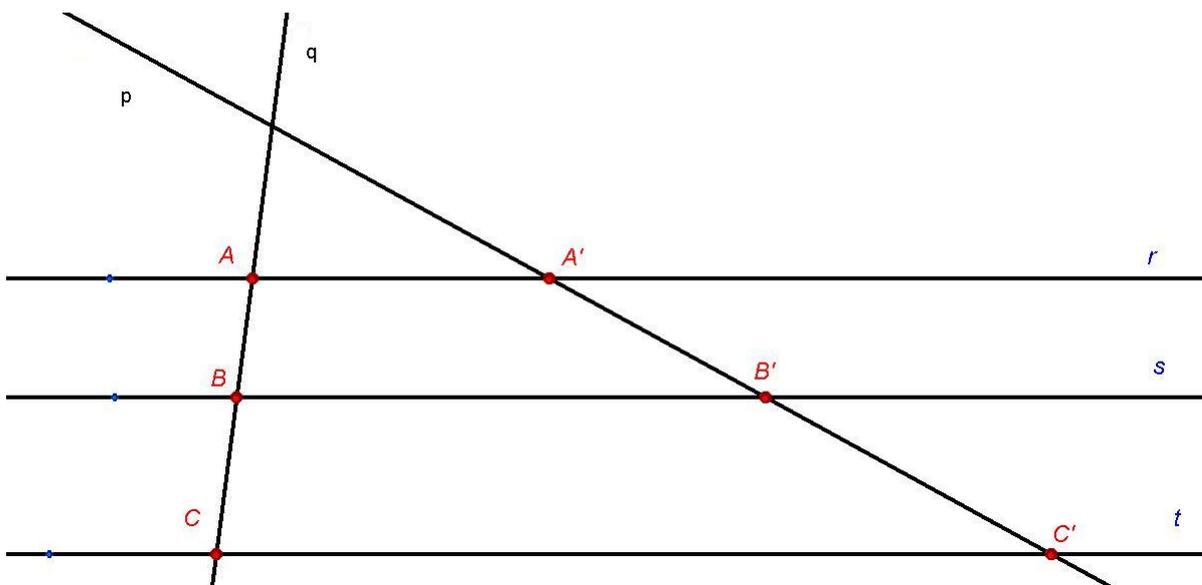


Figura 3.1: Feixe de retas paralelas

As retas paralelas r , s e t da Figura 3.1 determinam um feixe de retas paralelas; Por outro lado, as retas u e v são transversais ao feixe, pois cortam cada uma das retas do feixe.

Definição 3.1.2 *Os pontos de interseção de retas transversais com uma reta de um feixe de retas paralelas são ditos correspondentes. Os segmentos que ligam pontos correspondentes são chamados de segmentos correspondentes.*

Os pontos A e A' da Figura 3.1 são ditos correspondentes, os segmentos AB e $A'B'$ também são correspondentes.

Definição 3.1.3 *Dizemos que os segmentos \overline{AB} , \overline{CD} , \overline{EF} e \overline{GH} , na ordem em que aparecem, são proporcionais se*

$$\frac{AB}{CD} = \frac{EF}{GH}$$

Teorema 3.1.1 *(Teorema de Tales)*

Um feixe de retas paralelas determina sobre duas transversais quaisquer, segmentos correspondentes proporcionais.

No feixe de retas da Figura 3.1, o teorema de Tales nos diz que $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$. A partir desta podemos obter as seguintes proporções:

- $\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$, esta relação pode ser obtida de $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$, trocando-se os meios.
- $\frac{AC}{BC} = \frac{A'C'}{B'C'}$, esta relação pode ser obtida da anterior como segue:

$$\begin{aligned} \frac{AB}{BC} + 1 &= \frac{A'B'}{B'C'} + 1 \\ \frac{AB}{BC} + \frac{BC}{BC} &= \frac{A'B'}{B'C'} + \frac{B'C'}{B'C'} \\ \frac{AB + BC}{BC} &= \frac{A'B' + B'C'}{B'C'} \end{aligned}$$

A mecânica dessas proporções se dá de forma extremamente simples em razão de seu forte apelo visual. É preciso, em suas aplicações, estar sempre atento às razões dos segmentos correspondentes nas retas paralelas. A maneira de se escolher as proporções nas paralelas é muito importante nas aplicações e nas soluções de exercícios. Com o desenvolvimento de uma quantidade suficiente de atividades, o aluno rapidamente estará familiarizado com a mecânica necessária/

Agora se demonstrará este importante teorema. Para tanto, é conveniente demonstrar um resultado auxiliar (Lema), que será útil na demonstração desejada. Para isto, lembre que um paralelogramo é um quadrilátero que possui lados opostos paralelos. Esta propriedade acarreta, por congruência de triângulos, a igualdade entre os respectivos pares de lados paralelos.

Lema 3.1.1 *Se um feixe de retas paralelas determina sobre uma transversal segmentos de mesmo comprimento, determinará sobre outra transversal qualquer, segmentos de mesmo comprimento.*

Prova. A Figura 3.2, servirá como auxílio na demonstração. As retas paralelas r , s , t e u determinam um feixe de paralelas e são cortadas pelas transversais p e q . Suponha

que $AB = BC = CD$, queremos concluir que $A'B' = B'C' = C'D'$. De fato, traçando-se paralelas à reta q , por A' , B' e C' , encontramos os pontos M , N e P nas retas s , t e u respectivamente. Logo, ficam determinados os paralelogramos $AA'MB$, $BB'NC$ e $CC'PD$, e daí temos que

$$A'M = AB = BC = B'N = BC = CD = C'P$$

Isso acarreta a congruência dos triângulos $A'MB'$, $B'NC'$ e $C'PD'$, pois tais triângulos possuem um lado de mesmo comprimento compreendido entre ângulos respectivamente congruentes. Isso posto, é possível afirmar que $A'B' = B'C' = C'D'$. □

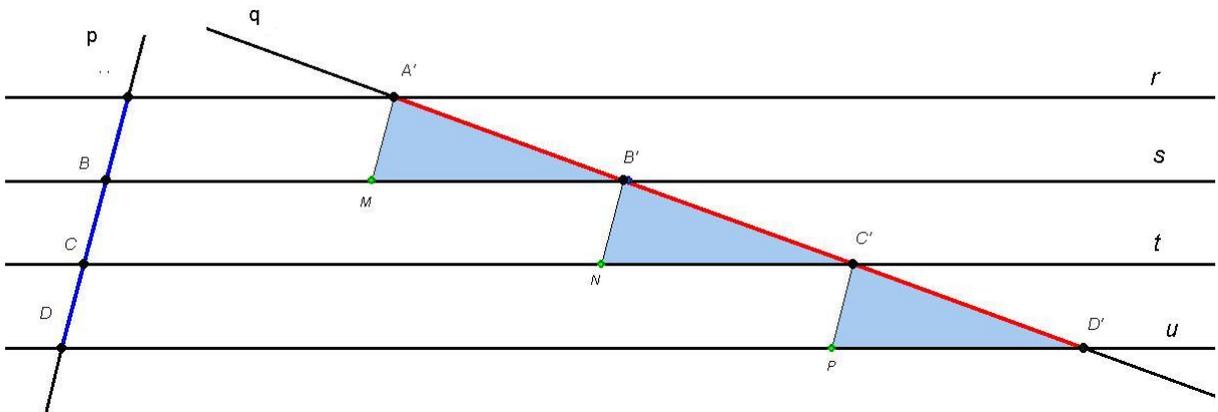


Figura 3.2: ideia da prova do Lema

Prova. (Prova do Teorema de Tales). Queremos provar que um feixe de paralelas determina sobre duas transversais quaisquer, segmentos correspondentes proporcionais. Suponhamos que existe um segmento de medida igual a u , na transversal p que cabe m vezes em \overline{AB} e n vezes em \overline{BC} (ver Figura 3.3). Marcamos sucessivamente este segmento na transversal p e traçamos paralelas às retas do feixe pelos pontos extremos destes segmentos, como mostra a figura 3.3. Pelo lema anterior, encontraremos um segmento de medida u' na transversal q , que cabe m vezes em $\overline{A'B'}$ e n vezes em $\overline{B'C'}$. Então temos que, $AB = m.u$, $BC = n.u$, $A'B' = m.u'$ e $B'C' = n.u'$. De onde obtemos:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{mu}{nu} = \frac{m}{n} = \frac{mu'}{nu'} = \frac{A'B'}{B'C'}$$

É comum, na demonstração deste importante teorema, resumi-lo ao caso comensurável, evitando discorrer sobre o caso incomensurável, deixando assim a demonstração incompleta. Agora analisemos o caso de segmentos não comensuráveis, ou seja, não existe tal segmento de medida u com a propriedade acima. Podemos verificar o teorema por aproximação. Logo, dado $m \in \mathbb{N}$, tomamos um segmento de medida igual a u_m que cabe m vezes em \overline{AB} , mas ao marcamos o mesmo sucessivamente em \overline{BC} , obtemos que o ponto C está localizado entre o $(n-1)$ -ésimo e o n -ésimo ponto da divisão, (ver Figura 3.3 a direita), onde $n \in \mathbb{N}$ e depende de m . Traçando paralelas ao feixe como acima, a mesma situação é verificada na outra transversal. Isso permite que se escreva $(n-1).u_m < BC < n.u_m$

e $(n - 1) \cdot u'_m < B'C' < n \cdot u'_m$. Assim, temos que $\frac{n-1}{m} < \frac{BC}{AB} < \frac{n}{m}$ e $\frac{n-1}{m} < \frac{B'C'}{A'B'} < \frac{n}{m}$. Multiplicando por (-1) a última desigualdade e somando esta a primeira obtemos

$$-\frac{1}{m} < \frac{BC}{AB} - \frac{B'C'}{A'B'} < \frac{1}{m}$$

Para todo $m \in \mathbb{N}$. Pela propriedade arquimediana (ou tomando m muito grande) temos que $\frac{BC}{AB} = \frac{B'C'}{A'B'}$.

□

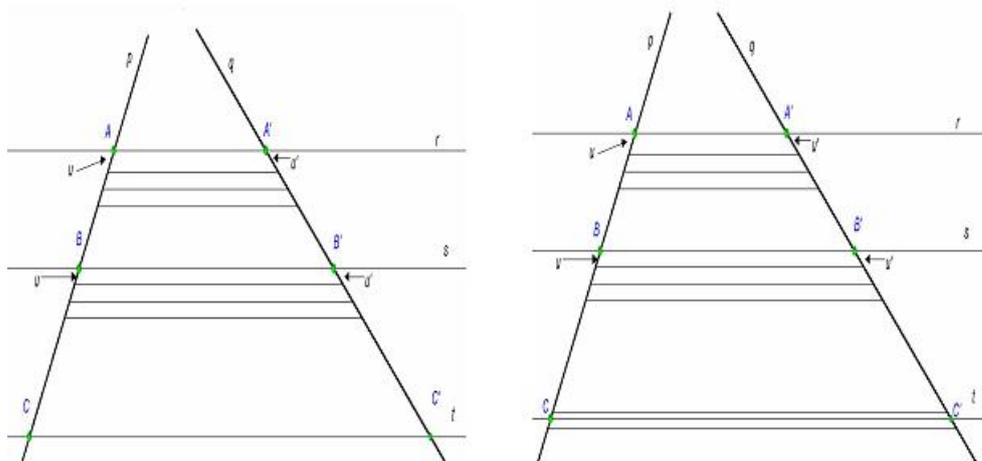


Figura 3.3: Ideia da prova

A seguir apresentamos algumas aplicações deste teorema. De fato, enunciaremos alguns resultados conhecidos em Geometria que podem ser verificados com o auxílio do teorema de Tales.

Exemplo 3.1.1 *Toda reta paralela a um dos lados de um triângulo (ou ao prolongamento dos lados), e que não contenha um de seus vértices, determina um outro triângulo de lados respectivamente proporcionais ao primeiro.*

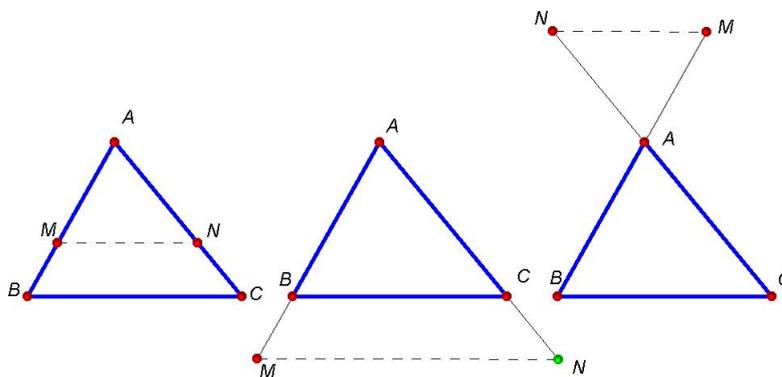


Figura 3.4:

Na Figura 3.4, temos a ideia geométrica deste enunciado. Somente vamos nos concentrar no desenho mais à esquerda. No triângulo ABC , podemos aplicar o teorema de

Tales às retas paralelas que contêm os segmentos \overline{MN} e \overline{BC} e as transversais às ditas retas (os lados do triângulo), obtendo $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$. Agora vejamos que $\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN} = \frac{BC}{MN}$. De fato, somente temos que mostrar a última igualdade. Para isto, trace por N uma reta r paralela a ao lado \overline{AB} (ver Figura 3.5); logo aplicamos o teorema de Tales às retas paralelas r e o lado \overline{AB} e aos outros lados do triângulo que são transversais às ditas retas, obtendo, assim $\frac{AC}{AN} = \frac{BC}{BP}$. Agora note que o quadrilátero $MNPB$ é um paralelogramo e portanto possui os lados opostos de mesma medida, daí $MN = BP$ e assim concluímos nosso resultado.

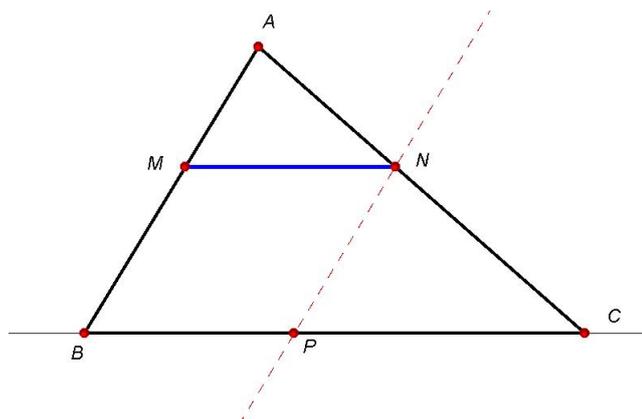


Figura 3.5:

Exemplo 3.1.2 *Triângulos que possuem os mesmos ângulos internos possuem seus lados proporcionais.*

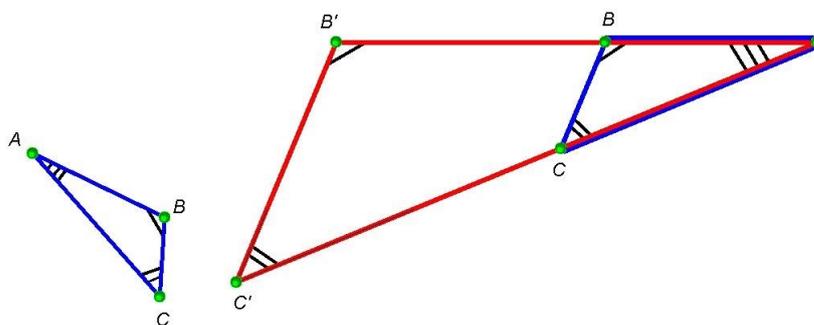


Figura 3.6:

De fato, considere os triângulos ABC e $A'B'C'$ tal que $\angle CAB = \angle C'A'B'$, $\angle ABC = \angle A'B'C'$ e $\angle ACB = \angle A'C'B'$. Transportando um triângulo de forma que dois de seus lados coincidam com os lados do outro (Ver Figura 3.6), podemos aplicar o teorema de Tales. Assim, concluímos que $\frac{B'C'}{BC} = \frac{B'A}{BA} = \frac{C'A}{CA}$.

3.2 Transformações Pontuais

3.2.1 Funções

Podemos pensar numa função como uma máquina na qual a cada matéria-prima nela inserida obtemos um único produto. Podemos agrupar tal matéria-prima num conjunto que chamaremos domínio ou conjunto de partida. Do mesmo modo agrupamos os produtos num conjunto chamado contradomínio ou conjunto de chegada. Dita máquina representará uma relação matemática entre estes dois conjuntos(ver figura):

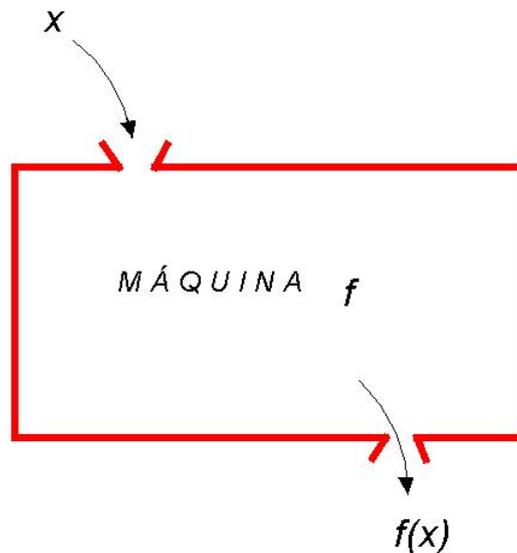


Figura 3.7: máquina

Definição 3.2.1 *Uma função $f : A \rightarrow B$ é uma relação que a cada elemento $x \in A$ faz corresponder um único elemento $y \in B$ tal que $f(x) = y$*

Neste caso, o conjunto A é o domínio de f e será denotado por D_f . O conjunto B é chamado de conjunto de chegada de f ou ainda contradomínio de f . Note que a definição não indica se todos os elementos de B são relacionados com elementos de A . De fato, isto nem sempre acontece. Logo podemos definir o subconjunto de B no qual todos seus elementos estão relacionados com elementos de A ; tal conjunto é chamado de imagem e representa-se por $f(A)$, em notação de conjuntos temos:

$$f(A) = \{y \in B | y = f(x), \text{ para algum } x \in A\}$$

De modo geral para qualquer subconjunto C de A , representa-se por $f(C)$ o conjunto formado por todas as imagens dos elementos pertencentes ao conjunto C , também chamado de imagem direta de C , a saber:

$$f(C) = \{y \in B; y = f(x), \text{ para algum } x \in C\}$$

Quando a imagem do domínio da função é igual ao contradomínio, diremos que f é *sobrejetiva*:

Definição 3.2.2 *Dada $f : A \rightarrow B$, dizemos que f é sobrejetiva se $f(A) = B$.*

Exemplo 3.2.1 A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x$, é sobrejetiva, pois $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

No exemplo anterior além da imagem ser todo \mathbb{R} , cada elemento da imagem tem associado um único elemento no domínio. Funções com esta propriedades são chamadas *injetivas*:

Definição 3.2.3 Dada $f : A \rightarrow B$, dizemos que f é *injetiva* se a cada elemento da imagem lhe corresponde um único elemento do domínio.

Quando uma função é injetiva e sobrejetiva ao mesmo tempo, diremos que esta é *Bijetiva*.

Definição 3.2.4 Dada $f : A \rightarrow B$, dizemos que f é *Bijetiva*, se f é injetiva e sobrejetiva.

Dadas duas funções $f : A \rightarrow B$ e $g : C \rightarrow D$. Podemos obter uma nova função chamada de composta de f e g e denotada por $f \circ g$, desde que $D \subseteq A$, e calculada em x por $f(g(x))$, isto é, ao ponto $x \in C$ associamos primeiro seu correspondente $g(x) \in D$ e seu correspondente valor em B pela função f será o valor de $f \circ g$.

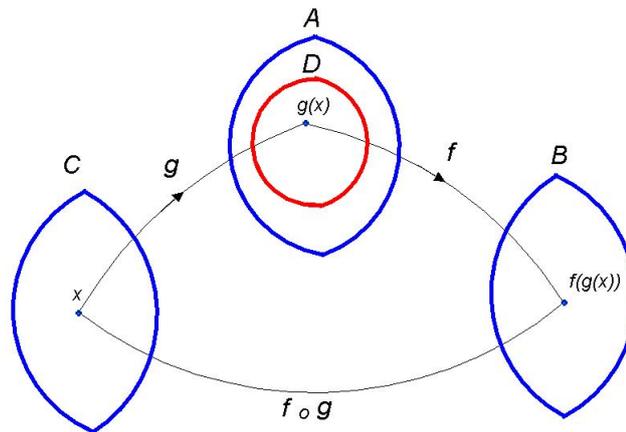


Figura 3.8:

As composições de funções se mostrarão extremamente necessárias para definir as Transformações de Semelhança, que podem ser utilizadas para o estudo métrico da semelhança de triângulos e de polígonos em geral, além de formalizarem as idéias de figuras congruentes.

3.2.2 Transformações Pontuais

Trabalharemos com funções de forte apelo visual, isto é, aquelas de natureza essencialmente geométrica. Entende-se por Transformação Pontual, uma função T do plano no plano (ou outro plano) tal que, a cada ponto A do plano, faz corresponder um outro ponto deste plano representado por $T(A)$. Na realidade, estamos interessados em funções $T : \Pi \rightarrow \Pi$, onde o domínio e contradomínio da função coincidem com o conjunto Π , de todos os pontos de um plano. É importante notar que, sendo tal transformação T uma função, isso implica que cada ponto do plano possui um, e apenas um correspondente.

Exemplo 3.2.2 Projeção paralela

Sejam r e s duas retas concorrentes do plano Π , isto é, elas têm um único ponto em comum. A reta r será chamada de alvo da projeção e a reta s é chamada de direção da projeção. Dizemos que a transformação $P : \Pi \rightarrow \Pi$ é uma projeção paralela sobre r na direção de s , se a cada ponto A pertencente a Π associamos um ponto $P(A) \in r$, tal que a reta que contém os pontos A e $P(A)$ é paralela à reta s . Por alvo da projeção se entende o lugar do plano que contém todas as imagens desta transformação. A figura a seguir ajuda a um melhor detalhamento das propriedades da transformação de projeção.

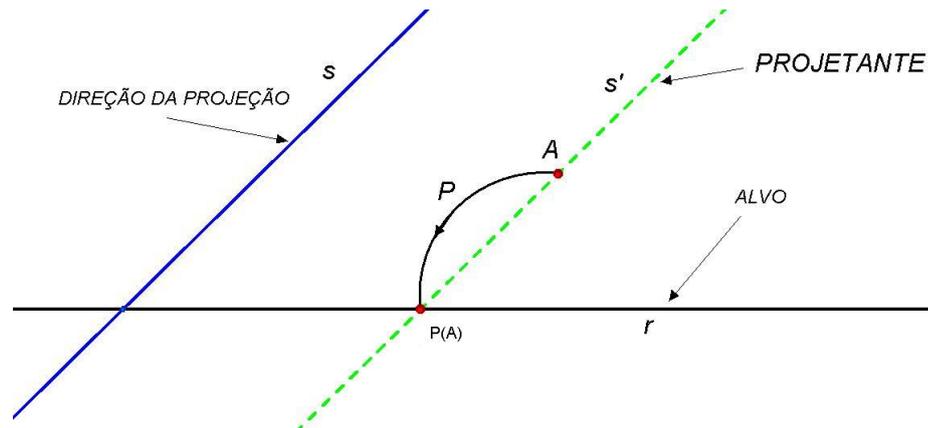


Figura 3.9: projeção paralela

Como se pode ver, esta transformação admite uma infinidade de pontos que possuem a mesma imagem e esses pontos são todos pertencentes à reta projetante s' que aparece pontilhada na figura. Ou seja, uma transformação pontual pode não ser injetiva. Para esta transformação de projeção, é interessante determinar as imagens de algumas figuras. Como exemplo, na figura 3.10 os segmentos $\overline{A'B'}$, $\overline{C'D'}$ e $\overline{E'F'}$ são as projeções paralelas de direção s e alvo r dos segmentos \overline{AB} , \overline{CD} e \overline{EF} respectivamente. Cabe observar que o segmento \overline{CD} é Paralelo à direção da projeção e dessa forma sua projeção $\overline{C'D'}$ reduz-se a um ponto.

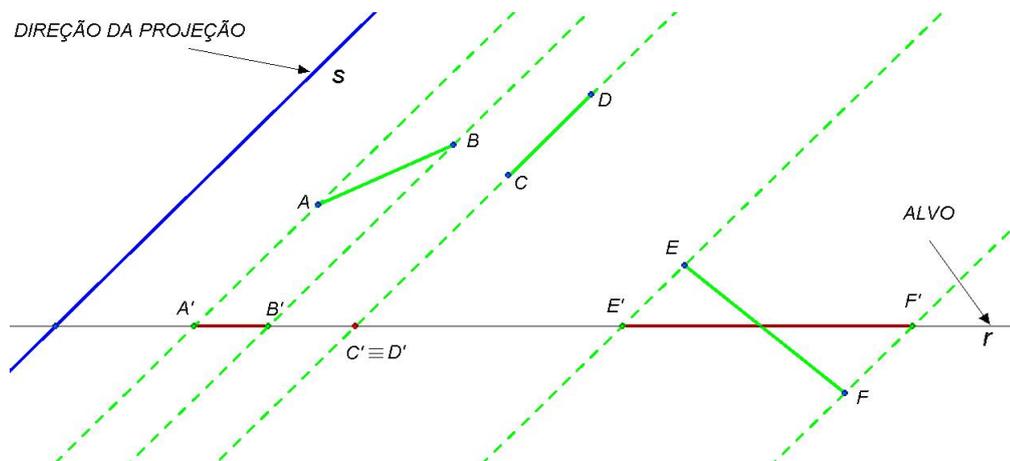


Figura 3.10:

Cabe ressaltar que a projeção paralela, além de ser de muita utilidade no estudo da Geometria, também é de muita utilidade para compreender fenômenos físicos. Por exemplo, imaginemos um dia de sol, em que podemos observar no chão as sombras de objetos

como : árvores, postes, pessoas e edifícios. Os raios solares, dadas as observações, pode-se dizer que chegam à terra incidindo paralelamente à sua superfície, configurando-se em um belo exemplo de projeção paralela (ver Figura 3.11.)

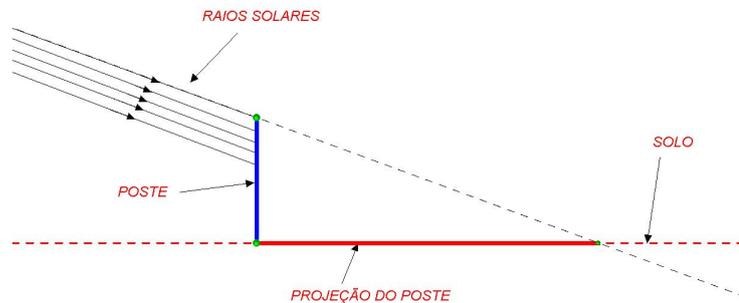


Figura 3.11:

Observe que neste caso a direção da projeção é determinada por qualquer um dos raios de luz. As Projeções Paralelas são muito importantes no estudo do plano cartesiano para definir as coordenadas cartesianas de um ponto, que são reunidas em um par ordenado.

3.2.3 Transformações Geométricas

Agora estamos interessados em estudar as Transformações Pontuais que são bijetivas:

Definição 3.2.5 Uma Transformação Geométrica é uma Transformação Pontual $P : \Pi \rightarrow \Pi$ Bijetiva.

O estudo de tais transformações é recomendado nos PCN e é comum encontrar estas transformações no decorrer do 8º e 9º anos do Ensino Básico. Para este trabalho foram selecionados, para fins de verificação desta orientação, três autores que foram adotados em uma escola da rede pública (ver em [28], [18] e [23]). Vamos focar o presente estudo, em dois tipos de Transformações Geométricas que são as Isometrias e Homotetias Ver [26].

Definição 3.2.6 Uma isometria é uma Transformação Geométrica $T : \Pi \rightarrow \Pi$ tal que, quaisquer pares de pontos, A e B , têm sua distância d mantida pelas suas imagens. Isto é, a distância $d(A, B) = d(T(A), T(B))$.

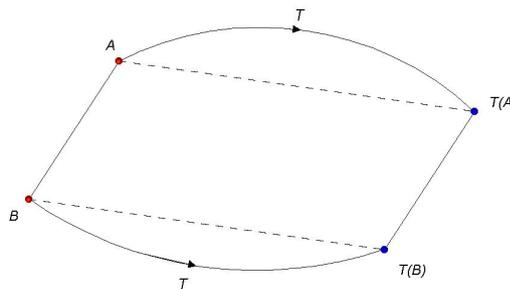


Figura 3.12:

Devido a esta característica, as isometrias também são vistas e chamadas de movimentos rígidos (não deformam a figura) no plano (ver Figura 3.12). Como exemplos de isometrias temos a Reflexão, Translação e Rotação, as quais estudaremos a seguir. Uma propriedade essencial das isometrias diz respeito ao fato de essas transformações preservarem alinhamento, isto é, a imagem de uma reta é também uma reta (a demonstração desta importante propriedade pode ser encontrada em [3]). No Ensino Médio somente estudam-se estes três tipos de isometrias. Pode-se provar que elas são as únicas existentes no plano. Para este fim, consultar [26].

Teorema 3.2.1 *Existem apenas três tipos de isometrias, não triviais, no plano: translação, reflexão e rotação.*

Uma utilidade destas Transformações Geométricas é nos proporcionar uma forma de identificar duas figuras no plano. Duas figuras planas F e F' são ditas *congruentes*, e representam-se por $F \equiv F'$ quando coincidem por superposição, isto é, movimentamos a figura original F para à figura F' , por meio de movimentos rígidos, ou seja, esses movimentos são executados pela composição de Reflexões, Translações e Rotações. Como exemplo ver os pentágonos da Figura 3.16, que foi construído com o auxílio do Tabulae.

Exemplos cotidianos das Transformações Geométricas

Quando nos colocamos diante de um espelho, observamos nossa imagem do outro lado e isso é um exemplo do que se denomina reflexão. Quando observamos o deslocamento de um carro em linha reta ou subimos por uma escada rolante de um shopping, estamos diante de exemplos de Translação. Quando brincamos num parque de diversões nos cavalinhos, estamos sob efeito de uma rotação. Ver figuras 3.13.



Figura 3.13:

REFLEXÃO

Definição 3.2.7 *A mediatriz m de um segmento \overline{AB} do plano é, o conjunto de todos os pontos do plano que equidistam das extremidades A e B do segmento. Mais especificamente, $P \in m$ se, e somente se $d(P, A) = d(P, B)$.*

Vamos definir a reflexão em torno de uma reta (chamada eixo da reflexão). Para isto, considere uma reta r no plano Π .

Definição 3.2.8 *A reflexão em torno do eixo r é uma Transformação Geométrica ${}^1S_r : \Pi \rightarrow \Pi$, que associa a cada ponto $Q \notin r$ do plano o ponto Q' tal que r é a mediatriz do*

¹Em alguns textos consagrados da literatura matemática, no símbolo S_r usado para representar uma reflexão, a letra S é a inicial da palavra latina Speculum, que significa espelho; o índice r , apostro à letra, indica o eixo da reflexão.

segmento QQ' . A cada ponto $Q \in r$, a transformação associa o mesmo ponto Q . Duas retas concorrentes são ditas perpendiculares, quando determinam quatro ângulos congruentes.

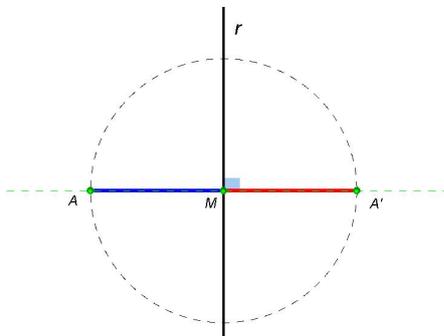


Figura 3.14:

Na Figura 3.14, M é o ponto médio do segmento de extremos A e $A' = Sr(A)$ e r é perpendicular à reta por A e A' . Para encontrar a imagem do ponto A da figura, primeiro construímos a reta s que é perpendicular à reta r e que passa por A . Marcamos com M a interseção de r e s ; finalmente, $Sr(A)$ é interseção do círculo de centro M , e raio igual a MA com a reta s .

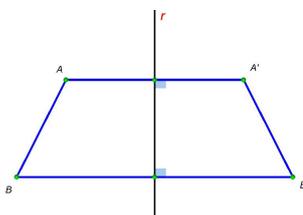


Figura 3.15:

A geometria desta transformação sugere naturalmente sua propriedade isométrica (ver Figura 3.15). Os pares de pontos $A, A' = S(A)$, $B, B' = S(B)$ formam o quadrilátero de vértices A, B, A' e B' , que é um trapézio isósceles. A figura a seguir mostra a reflexão de um pentágono efetuada no Tabulae.

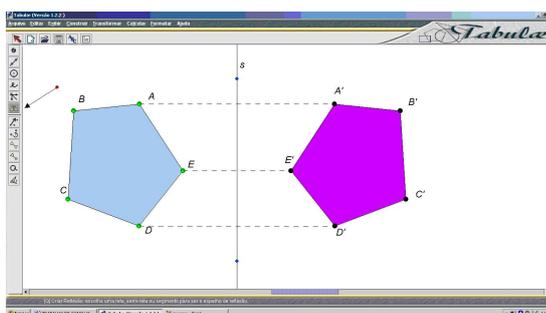


Figura 3.16:

TRANSLAÇÃO

Uma Translação corresponde a uma Transformação Geométrica em que qualquer ponto de um plano sofre um deslocamento linear paralelamente a uma direção fixada. Este deslocamento se dá segundo uma magnitude determinada (comprimento do deslocamento) e um sentido.

Definição 3.2.9 *Seja A um ponto qualquer do plano e \vec{v} um vetor desse plano. Dizemos que o ponto A' é a imagem de A pela translação de vetor \vec{v} , se o segmento orientado $\overrightarrow{AA'}$ é equipolente ao vetor \vec{v} , isto é, o segmento $\overrightarrow{AA'}$ possui mesmo módulo, mesma direção e mesmo sentido que o vetor \vec{v} .*

OBS: Por módulo entendemos o comprimento do vetor, ou, a magnitude do deslocamento; a direção diz respeito ao paralelismo.

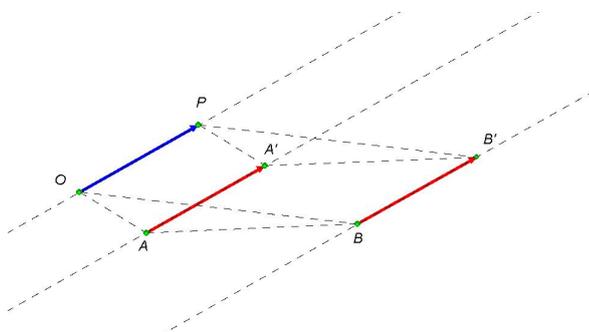


Figura 3.17:

A Figura 3.17 evidencia o fato de a translação ser uma isometria. Observe que os quadriláteros $AA'PO$, $AA'BB'$ e $OPB'B$ são paralelogramos. A notação usual para se representar matematicamente uma translação é a seguinte: $T_{\vec{v}} : \Pi \rightarrow \Pi$ tal que $A \mapsto A' = T_{\vec{v}}(A)$; $\overrightarrow{AA'}$ paralelo a \vec{v} . Simplificadamente podemos escrever $A' = T_{\vec{v}}(A)$ ou simplesmente $A' = T(A)$ em que o vetor \vec{v} está subentendido.

Pela definição a translação aplicada a uma reta, por exemplo, transforma esta reta em outra que lhe é paralela; e por ser uma isometria transforma qualquer figura em outra que lhe é congruente (coincide por superposição ver em [3]). A figura a seguir representa a imagem de uma reta r por uma translação de vetor \vec{v} .

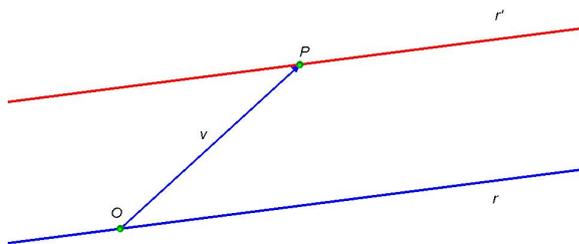


Figura 3.18:

Como exemplos cotidianos relacionados com a translação podemos citar o caminhar de uma pessoa, o movimento retilíneo de um carro, uma pedra caindo verticalmente ou uma

pessoa subindo em uma escada ou uma rampa de uma passarela ou ainda se deslocando sobre uma escada rolante. A figura a seguir mostra a translação de um triângulo efetuada no Tabulae:

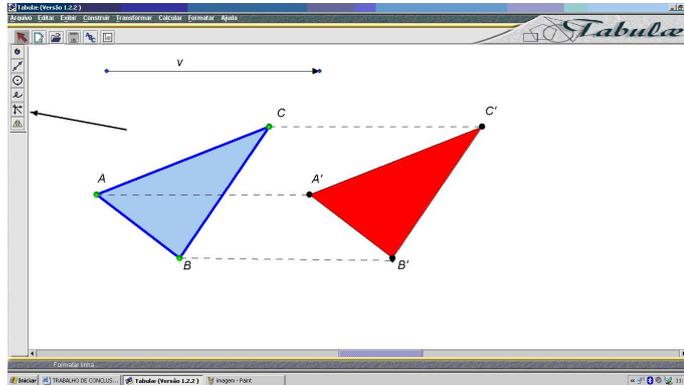


Figura 3.19:

ROTAÇÃO

A rotação é uma Transformação Geométrica que consiste em “girar” um objeto ao redor de um ponto fixo do plano chamado de centro de rotação.

Definição 3.2.10 *Sejam, O um ponto fixo de um plano e, θ um ângulo fixado. Dizemos que $R_\theta : \Pi \rightarrow \Pi$ é uma rotação de centro O e ângulo θ , se para cada $A \in \Pi$, com $A \neq O$, $A' = R_\theta(A)$ é tal que o ângulo $\widehat{AOA'} = \theta$ com $OA = OA'$. Para $A = O$, define-se $R_\theta(O) = O$, isto é, a imagem do centro O de rotação coincide com o próprio centro O de rotação.*

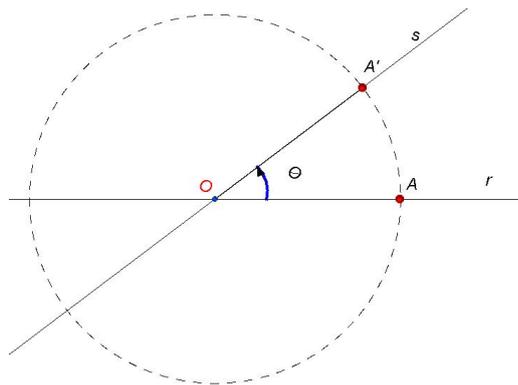


Figura 3.20:

É importante notar que em nossa definição já foi estabelecida uma orientação. Se pedimos $\widehat{A'OA} = \theta$ teríamos uma outra rotação orientada no sentido contrário, ou, dito de outro modo, teríamos uma rotação num ângulo $-\theta$. A unicidade de A' impõe que $\widehat{AOA'}$ seja um ângulo orientado, sendo OA seu lado origem e OA' o lado extremidade. Esse procedimento sugere a ideia de que o arco de origem em A e extremidade em A' deve ser orientado no sentido de A para A' .

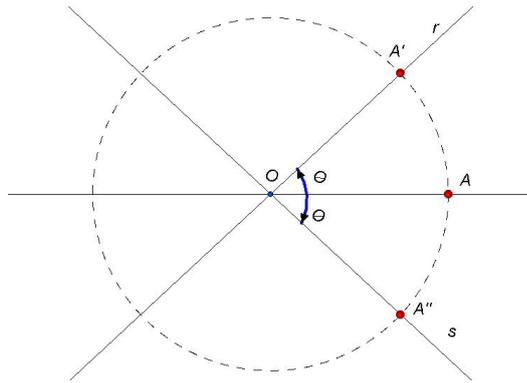


Figura 3.21:

A rotação de um ponto em um plano pode ser executada tradicionalmente com o uso de um compasso e um transferidor, assim como uma translação é efetuada por um par de esquadros. A régua e o compasso tradicionais são as ferramentas essenciais na construção das figuras planas. Como exemplo de rotação no dia a dia, temos o movimento dos ponteiros de um relógio, das hélices de um ventilador ou das hélices de um helicóptero ou de uma pessoa correndo em uma pista circular, dentre muitos outros.

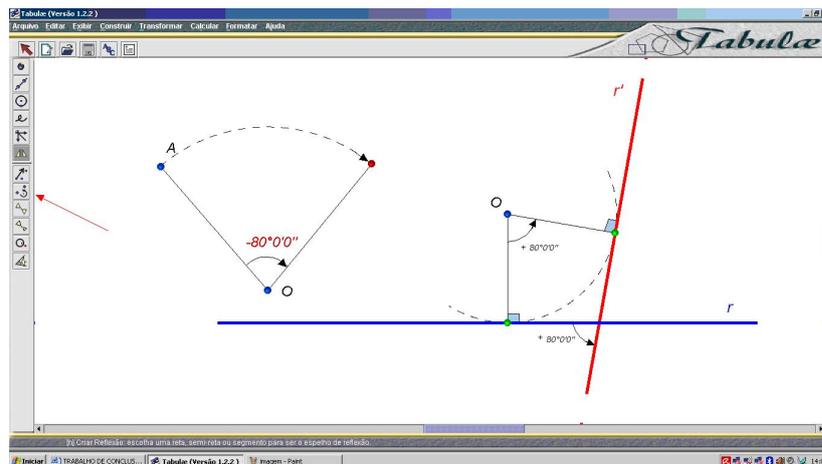


Figura 3.22:

É possível, com o uso de material concreto, simular uma rotação valendo-se de uma construção artesanal que consiste de duas folhas de papel sobrepostas; uma delas transparente, que permita a visualização de qualquer desenho efetuado sobre a outra folha abaixo dela. Contorna-se então com um lápis a figura do papel fixo, sobre a folha transparente, móvel. Em seguida, fixando-se estas folhas sobrepostas com um alfinete, permite-se a movimentação da folha transparente mantendo-se a original fixa. A ponta do alfinete determina um ponto, centro de rotação. O movimento aplicado à folha livre permite que esta execute uma rotação em torno do ponto fixado pelo alfinete. Este simples artefato auxilia para um entendimento das propriedades de uma rotação aplicada a qualquer figura plana.

HOMOTETIA

Definição 3.2.11 *Seja O um ponto pertencente ao plano Π e k um número real. Defina-se a Homotetia $H_{(O,k)} : \Pi \rightarrow \Pi$ de centro O e razão k , como sendo a transformação no plano que faz corresponder a cada ponto $A \in \Pi$, um ponto A' tal que $\overrightarrow{OA'} = k \cdot \overrightarrow{OA}$.*

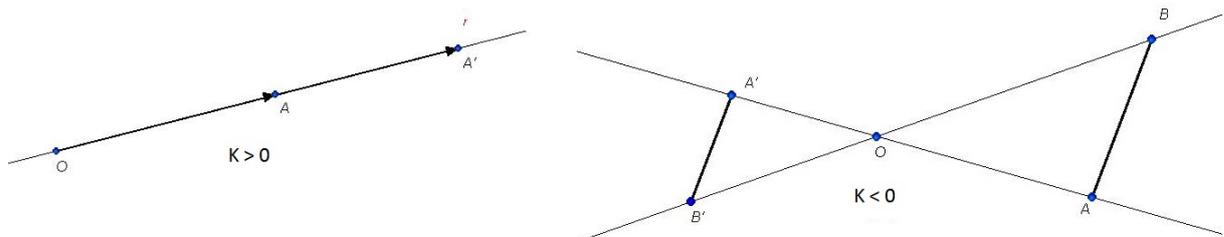


Figura 3.23:

Note que, pela definição, o ponto A' pertence à reta OA e pertencerá ao mesmo lado que o ponto A , da semirreta OA , caso o número real k seja positivo. Caso contrário, pertencerá ao lado oposto ao de A na reta OA definindo a semirreta OA' , oposta da semirreta OA . As homotetias de razões positivas são denominadas *homotetias diretas* e as de razões negativas são denominadas de *homotetias inversas*. As homotetias também recebem as denominações de *homotetias de ampliação* e de *redução*, quando as razões possuem valores respectivamente de módulos maiores do que 1 e menores do que 1.

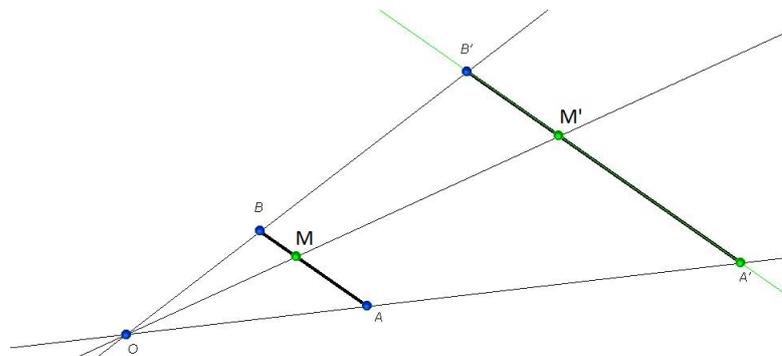


Figura 3.24:

Teorema 3.2.2 *Uma homotetia $H_{(O,k)} : \Pi \rightarrow \Pi$ transforma um segmento \overline{AB} em outro segmento $\overline{A'B'}$ que é paralelo ao segmento \overline{AB} . Além disso, temos que*

$$\frac{A'B'}{AB} = k$$

Prova. De fato, seja r a reta paralela à reta AB e que contém o ponto A' (ver Figura 3.24). A reta OB intersecta a reta r em B' . O ponto B' assim determinado é o homotético do ponto B pela referida homotetia. Este fato pode ser justificado pela aplicação do teorema de Tales ao triângulo $OB'A'$. Em seguida, tomando-se um ponto M qualquer pertencente

ao segmento AB e traçando-se a reta OM , esta reta interceptará o segmento $A'B'$ no ponto M' da reta $A'B'$. Novamente em consequência da aplicação do teorema de Tales se pode concluir que $OM' = k \cdot OM$, o que prova ser o segmento $A'B'$ a imagem do segmento AB pela homotetia considerada, isto é, $H(\overline{AB}) = A'B'$. Onde, $H\overline{AB}$ significa a imagem direta do segmento AB pela homotetia de centro O e razão k , que foram omitidos por razão de simplicidade.

□

Como consequências destes fatos, temos que:

1. A homotetia transforma uma reta em outra reta paralela à original.
2. A homotetia preserva ângulos, isto é, ângulos são transformados em ângulos de mesma medida.

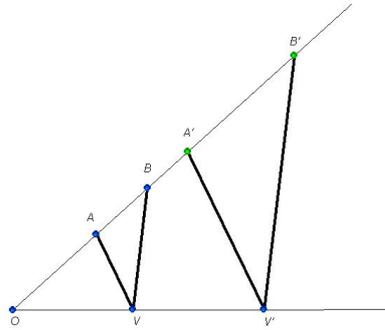


Figura 3.25:

3. A homotetia transforma triângulos em triângulos cujos lados são proporcionais aos lados do triângulo original e a constante de proporcionalidade entre os lados destes é a própria razão da homotetia.

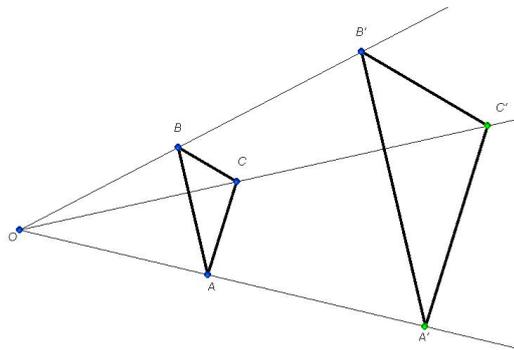


Figura 3.26:

Capítulo 4

Aplicações

Nosso objetivo é mostrar a utilidade das Transformações Geométricas para o ensino de outros temas no decorrer dos estudos de nossos alunos de Ensino Médio. Trata-se de evidenciar a eles que há um vínculo entre vários tópicos estudados, mudando assim sua mentalidade sobre a Matemática e sua forma de ser ensinada (“aprendemos uma coleção de assuntos desconexos”). Além disso, podemos ressaltar o formalismo existente na disciplina, pois a partir de um tópico estudado, mostramos como construir novos objetos e analisar suas propriedades.

Logo, neste capítulo apresentamos várias aplicações das Transformações Geométricas, com o intuito de compreendê-las melhor. Elaboramos uma lista dos temas ensinados na 1^a, 2^a e 3^a séries de Ensino Médio, que podem ser mais bem compreendidos com o uso das transformações geométricas. Como exemplo, dentre esses temas escolhemos abordar 3 (*) nos capítulos seguintes. Capítulo 5: O número π , capítulo 6: Geometria Analítica e capítulo 7: Funções trigonométricas.

A seguir apresentamos uma lista dos tópicos estudados nas 3 séries de Ensino Médio, os quais seriam melhor entendidos por nossos estudantes, se ensinados com a ajuda das Transformações Geométricas. Estes tópicos estão ordenados por séries e de acordo com os sumários de um dos textos didáticos do PNLD mais utilizados nas escolas públicas [23].

1^a Série

- Geometria Plana: Triângulos e Proporcionalidade; Circunferência, Círculo e Cálculo de Áreas;
- Funções;
- Funções Reais de Variável Real;
- Inversa;
- Função Afim;*
- Função Quadrática;
- Função Modular;

- Função Exponencial
- Função Logarítmica

2ª Série

- Trigonometria no Triângulo Retângulo;
- Circunferência Trigonométrica: Seno e Cosseno;*
- Tangente e outras razões trigonométricas;
- Adição de arcos e Arcos duplos;
- Funções Trigonométricas e Resolução de Triângulos;
- Matrizes;
- Sistemas Lineares;
- Geometria de Posição e Poliedros;
- Prismas e Pirâmides
- Corpos Redondos

3ª Série

- Geometria Analítica;*
- Formas da Equação da Reta, paralelismo e perpendicularidade;
- Complementos sobre o estudo da reta;
- Equações da Circunferência;
- As Cônicas: Elipse, Parábola e Hipérbole;
- Conjunto dos Números Complexos;

Como se pode verificar, as Transformações Geométricas possuem um espectro bem amplo em suas aplicações no Ensino Médio. Para um maior entendimento das Transformações Geométricas, a seguir apresentamos algumas aplicações destas:

4.1 Aplicação da Reflexão

A reflexão é muito utilizada na Óptica Geométrica estudada na Física. Suas aplicações são mais notáveis na formação de imagens em espelhos planos e em espelhos esféricos ou ainda nas lentes, que consistem em associações de espelhos esféricos. Como se sabe da Óptica, as imagens virtuais de um objeto real são formadas pela interseção de prolongamentos de raios luminosos refletidos. A figura seguinte mostra um espelho plano e a imagem virtual O' de um objeto real O .

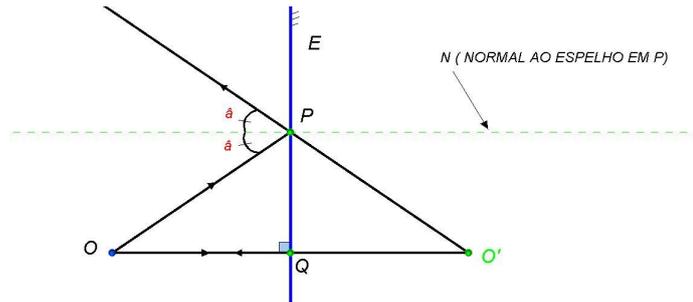


Figura 4.1:

Os raios incidentes e refletidos e a normal à superfície refletora estão contidos em um mesmo plano. O ângulo formado pelo raio luminoso e a reta normal ao espelho é dito ângulo de *Incidência*; do mesmo modo, o ângulo formado pelo raio refletor e a reta normal ao espelho é dito ângulo de *Reflexão*. Nas leis da reflexão os ângulos de incidência e de reflexão são iguais. Na Figura 4.2, apresentamos o exemplo de um espelho esférico, ou seja, aquele que possui uma superfície refletora com a forma de uma superfície esférica. Podemos classificá-los em duas categorias de acordo com sua curvatura: os espelhos côncavos e os espelhos convexos. Sua utilidade é notável na fabricação de máquinas fotográficas, holofotes, faróis de veículos automotores, dentre muitas outras.

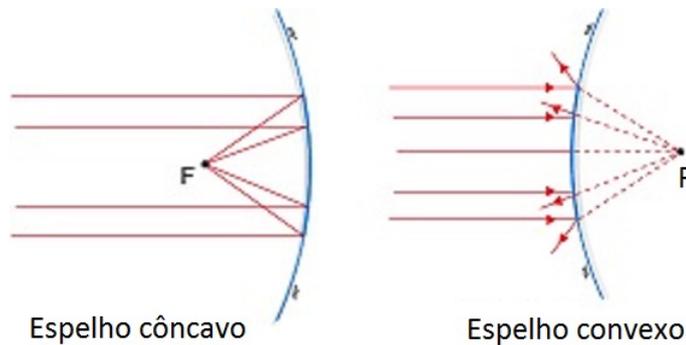


Figura 4.2:

A seguir vamos considerar um espelho côncavo e vamos representar alguns raios luminosos especiais e seus caminhos para evidenciar a importância da reflexão na construção dos mesmos.

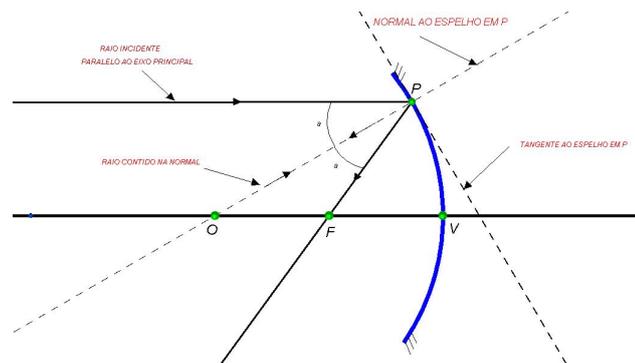


Figura 4.3:

Os raios luminosos incidentes paralelos ao eixo principal (Focal) do espelho são refletidos de tal modo que passam pelo foco do espelho. Já os raios luminosos que passam pelo centro do espelho são tais que os raios luminosos refletidos passam também pelo centro do espelho. As propriedades de um espelho esférico são devido ao fato de serem aproximações de superfícies parabólicas (consultar [2]).

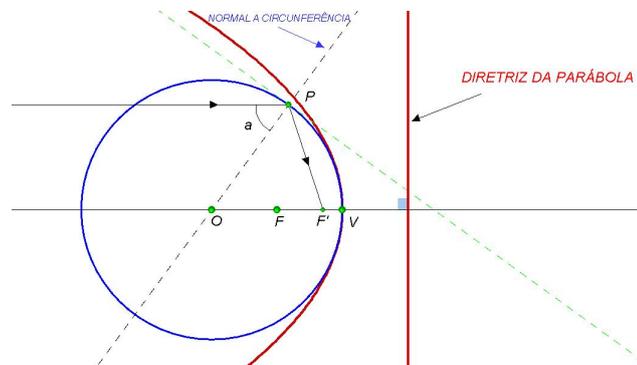


Figura 4.4:

Na Figura 4.4, a parábola e a circunferência representam o perfil de um espelho esférico e um espelho parabólico, respectivamente, ambos côncavos. O ponto O é o centro da circunferência; o ponto F , o foco da parábola; a diretriz da parábola está indicada no desenho. O ponto F' é a interseção de um raio luminoso que incide paralelamente ao eixo da parábola e que incide sobre a superfície do espelho esférico no ponto P . Repare que este ponto não foi considerado pertencente à parábola. À medida em que o ponto P se movimenta, aproximando-se do vértice V , os perfis dos espelhos vão se tornando indistinguíveis. Como consequência, o ponto F' se aproxima do ponto F (foco da parábola). Com os recursos de softwares em GD, pode-se visualizar com boa resolução, a tendência do ponto F' estabilizar-se no entorno do ponto F , e isso ocorre para valores do ângulo a próximos a 14° . Este fato não é novo, pois, para se obter imagens nítidas em espelhos esféricos, Gauss observou que os raios de luz deveriam incidir paralelos com pequena inclinação em relação ao eixo principal, assinalando que o ângulo a de incidência no espelho tem que ser inferior a 14° , para obter maior nitidez na formação das imagens (ver [2]). Espelhos que satisfazem esta condição são denominados espelhos esféricos gaussianos.

4.2 Aplicação da Translação

Vamos apresentar um exemplo da vida real no qual se pode vislumbrar uma interessante situação-problema em que se pode destacar a importância do estudo das translações.

Com o objetivo de transportar a produção de uma fábrica localizada no ponto A para uma distribuidora localizada em B , situadas em lados opostos de um rio de margens paralelas, os engenheiros de uma firma contratada para o serviço resolveram construir duas estradas que ligam a fábrica e a distribuidora às margens do rio e a uma ponte MN que é perpendicular às margens, como mostra a Figura 4.5.

Um matemático que trabalha na firma de engenharia sugeriu que a ponte poderia ser construída de tal modo que o percurso da fábrica até a distribuidora seja de comprimento mínimo. Algumas pessoas não entenderam a proposta do matemático, mas ele explicou.

É o seguinte: dentre todos os caminhos que podem ser construídos (ver Figura 4.5), existe um para o qual a soma $AM + MN + NB$ é mínima.

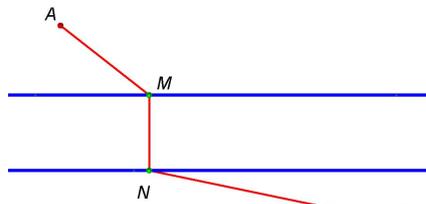


Figura 4.5:

Tudo explicado todos entenderam. Ficou então a tarefa de determinar qual a posição correta do ponto M (ver Figura 4.6) onde deve ser construída a ponte e que atenda às condições desejadas.

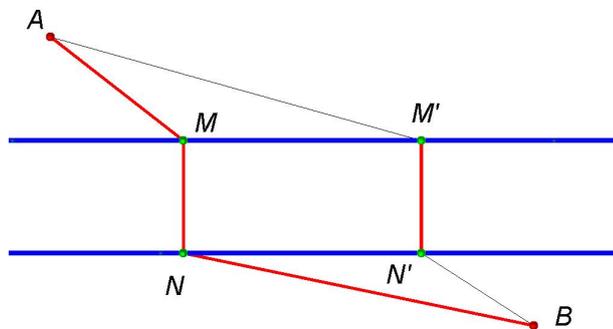


Figura 4.6:

Analisando a Figura 4.7, o ponto A sofreu uma translação de vetor \overrightarrow{MN} , transformando-se no ponto A' . Dessa forma, o quadrilátero $AA'NM$ é um paralelogramo. Daí pode-se concluir que $AM = A'N$. Como o segmento \overline{MN} é um segmento de medida fixa, para se calcular o valor mínimo para a soma $AM + MN + NB$ somente necessitamos saber o valor mínimo para a soma $AM + NB$. Por outro lado, sabemos que o valor de $A'N + NB$ é mínimo quando A', N e B são colineares. Assim, podemos concluir que esta soma será mínima quando o Ponto N (sobre a margem inferior) estiver alinhado com os pontos A' e B , isto é, quando o ponto N coincidir com o ponto R (resolvente), que é o ponto de interseção da reta por A' e B com a margem inferior do rio.

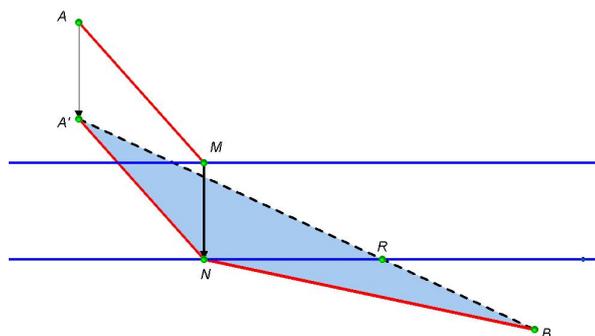


Figura 4.7:

4.3 Aplicação da rotação

Como sabemos, a rotação preserva figuras. Assim, a rotação de uma reta é uma reta. Logo vamos entender algumas propriedades ao fazer a rotação de retas. Por exemplo, por meio desta podemos reforçar conceitos como orientação. Uma rotação de $+180^\circ$ transforma uma reta em uma reta paralela, porém com orientação de sentido contrário. Ver figura a seguir:

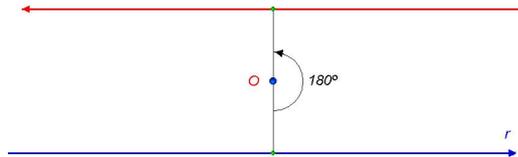


Figura 4.8:

As retas r e r' da figura 4.9 são paralelas e são de mesma orientação. Como a reta r não girou ao ser transformada na reta r' , esta transformação pode ser considerada como uma rotação de ângulo de 0° , embora represente uma translação. É importante ressaltar que neste caso não é possível determinar o centro da rotação. Caso o centro fosse determinado, a reta r coincidiria com a reta r' .



Figura 4.9:

A figura 4.10 ajuda a entender que a composição de duas rotações que geram retas paralelas e de mesma orientação, por convenção, devem ser associadas a uma rotação de ângulo de 0° para a qual não se define o centro. A reta r é girada de um ângulo igual à $+a$ em torno do ponto O , determinando a reta r' , esta por sua vez é girada de um ângulo igual à $-a$ em torno do ponto O' determinando a reta r'' estas operações podem ser representadas em termos de composições de transformações da seguinte forma $(R_{(O',-a)} \circ R_{(O,a)})(r) = R_{0^\circ}(r)$.

Definiremos em seguida o grupo das rotações.

Grupo das Rotações

Vamos estudar o conjunto das rotações, munidas da operação de composição, ou seja, dotamos este conjunto de uma estrutura algébrica. Obtendo como resultado que, a composição de rotações geram rotações, além disso, essas operações são associativas, distributivas com existência de simétricos (inversas) e neutros (identidade-rotação de ângulo igual a 0°).

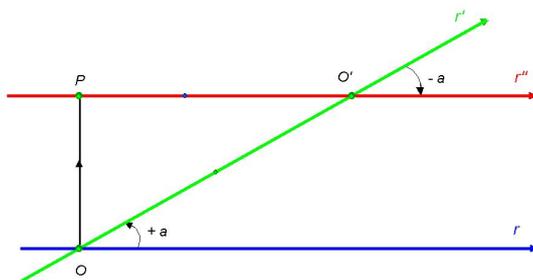


Figura 4.10:

A afirmação de que a composição de rotações é uma rotação caracteriza a propriedade de fechamento de tal operação no conjunto das rotações. De forma explícita, se os centros das rotação são coincidentes (ver Figura 4.11). Então é possível concluir que duas rotações consecutivas de ângulos respectivamente iguais a e b equivalem a uma única rotação de ângulo $a + b$ que possui o mesmo centro das rotações consideradas.

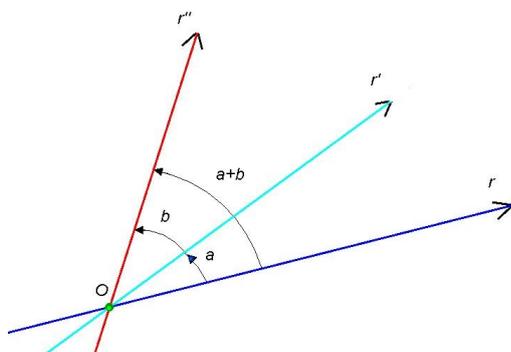


Figura 4.11:

Do mesmo modo, se consideramos duas rotações consecutivas de centros respectivamente O e O' (ver Figura 4.12). A composta destas rotações denotada por $R_{(a+b)} = R_{(a)} \circ R_{(b)}$, possui centro O'' e ângulo de rotação igual à soma dos ângulos das duas rotações anteriores, que é igual a $a + b$. O centro O'' desta composta é a interseção da reta r'' com a reta r . Esses três pontos determinam o triângulo $OO'O''$. Além disso esta figura mostra que, em qualquer triângulo, a medida do ângulo positivo externo é igual à soma das medidas dos dois ângulos positivos internos ao triângulo, que não são a ele adjacentes.

Fazendo uso da notação $R_{(b)} \circ R_{(a)} = R_{(a+b)}$, podemos entender que valem as seguintes propriedades:

- i - $(R_{(a)} \circ R_{(b)}) \circ R_{(c)} = R_{(a)} \circ (R_{(b)} \circ R_{(c)})$ (associatividade)
- ii - $R_{(0)} \circ R_{(a)} = R_{(a)}$ para todo a (existência do neutro)
- iii - Para cada $R_{(+a)}$, existe $R_{(-a)}$ tal que $R_{(+a)} \circ R_{(-a)} = R_{(0)}$ (existência do simétrico)

Com essas propriedades o conjunto de todas as rotações de um plano possui a estrutura de um grupo (ver [3], pag 13). É importante observar que o grupo das rotações com centros não coincidentes não é comutativo (ver [3], pag 138)

A seguir vamos apresentar algumas aplicações para a composição das rotações. Primeiro vamos lembrar uma propriedade conhecida como lei angular de Tales, a saber:

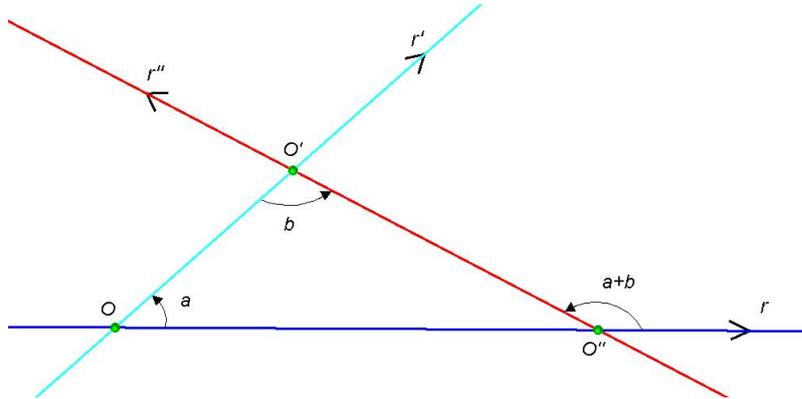


Figura 4.12:

“A soma dos ângulos internos e positivos de qualquer triângulo é igual a 180° ”.

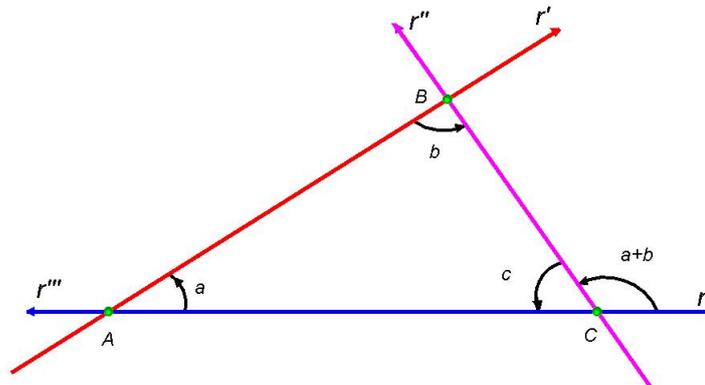


Figura 4.13:

A reta r' é a imagem da reta r por uma rotação de centro A e ângulo a positivo interno do triângulo ABC (ver Figura 4.13); r'' é a imagem de r' por uma rotação de centro B e ângulo b positivo interno do triângulo ABC ; e, por fim, a reta r'' é imagem da reta r' por uma rotação de centro em C e ângulo c positivo interno do triângulo ABC . Vê-se que r'' coincide com a reta r em direção, porém as duas possuem sentidos contrários, o que significa que ela corresponde a uma rotação da reta r de 180° e de centro em C .

A composição de rotações que geram retas paralelas e de mesma orientação pode ser utilizada para encontrar o valor de ângulos entre feixes de retas, evidenciando a importância em se associar translações a rotações de ângulo 0° destituídas de centro. Por exemplo, sejam r e s duas retas paralelas; t e u duas retas transversais que formam um ângulo a (ver Figura 4.14). Vamos usar rotações para calcular o ângulo a .

Inicialmente observemos que as retas r e s sendo paralelas, uma delas pode ser transformada na outra por uma rotação de 0° ou de 180° . Vamos então orientar as duas de modo que a reta s seja a imagem da reta r por uma translação, isto é, por uma rotação de 0° . Para tanto, ao orientarmos as retas r e s , devemos em seguida orientar as demais retas com o intuito de evidenciar as rotações que serão executadas sobre a reta r para que

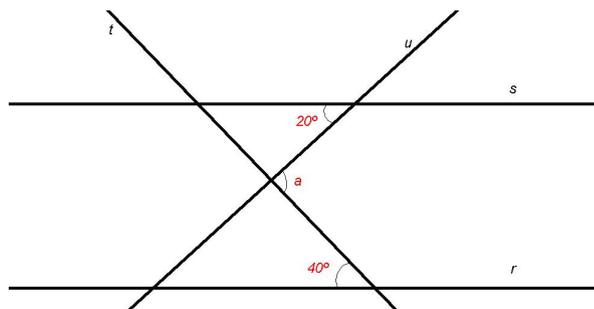


Figura 4.14:

se transforme na reta s por meio de composições de rotações, apropriadamente escolhidas.

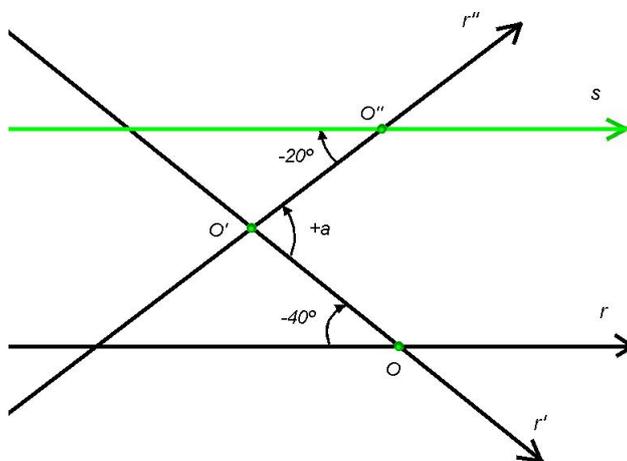


Figura 4.15:

Logo, observando a Figura 4.15, vemos que a reta r sofre uma rotação de centro em O e ângulo -40° (sentido horário), que transforma r em r' ; em seguida a reta r' sofre uma rotação de centro O' e ângulo $+a$ (sentido anti-horário), que transforma r' na reta r'' ; finalmente, r'' sofre uma rotação de centro O'' e ângulo -20° (sentido horário) que transforma a reta r'' na reta s . Como a reta s é paralela à reta r e ambas possuem a mesma orientação, a composta das três rotações executadas sobre r é equivalente a um rotação de 0° . Lembrando a lei das composições, este fato pode ser representado por

$$R_{(-40^\circ)} \circ R_{(+a)} \circ R_{(-20^\circ)} = R_{((-40^\circ)+(+a)+(-20^\circ))} = R_{0^\circ}.$$

De onde temos que $(-40^\circ) + (+a) + (-20^\circ) = 0^\circ$, ou seja, $-40^\circ + a - 20^\circ = 0^\circ$; assim,

$$a = 20^\circ + 40^\circ = 60^\circ.$$

4.4 Aplicação das Homotetias

Nesta seção estudaremos os efeitos de uma homotetia quando aplicada à uma circunferência. Adotaremos definições e notações próprias para as figuras do Círculo e da Circunferência. A circunferência C , de centro O e Raio r , representada por $C(O, r)$, será definida pelo conjunto dos pontos P de um plano, que possuem distância $r > 0$ ao centro

O ponto fixo deste plano. A qualquer segmento de reta que une este ponto fixo O a um ponto P pertencente à circunferência, chamaremos de um raio da circunferência. Portanto, uma circunferência possui uma infinidade de raios, todos eles de mesma medida r . Na figura que se segue, temos uma circunferência de centro O e um dos raios representado pelo segmento \overline{OP} .

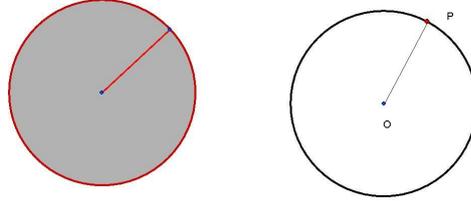


Figura 4.16:

Em linguagem de conjuntos a circunferência, denotada por $C(O, r)$ é definida como segue: Dados O , um ponto do plano Π e $r > 0$ um número real

$$C(O, r) = \{P \in \pi | d(O, P) = r, r > 0\}.$$

Já um círculo será definido como a união da circunferência com seu interior. Adotando a letra Ω para o círculo, temos a seguinte definição:

$$\Omega = \{P \in \pi | d(O, P) \leq r, r > 0\}$$

Teorema 4.4.1 *A imagem de uma circunferência por uma homotetia é também uma circunferência*

Prova. Seja $C(A, r)$ uma circunferência e $H_{(0,k)} : \Pi \rightarrow \Pi$ uma homotetia de centro O e razão k . Dado $P \in C(A, r)$, pelo Teorema 3.2.2, temos que a imagem de \overline{AP} por $H_{(0,k)}$ é um segmento de reta $\overline{A'P'}$ paralelo a \overline{AP} , isto é, $H_{(0,k)}(\overline{AP}) = \overline{A'P'}$. Além disso temos que $\frac{A'P'}{AP} = k$, de onde $A'P' = k \cdot AP = kr$, sendo r constante, $A'P'$ também é constante. Em consequência, $H_{(0,k)}(C(A, r)) = C(A', kr)$.

□

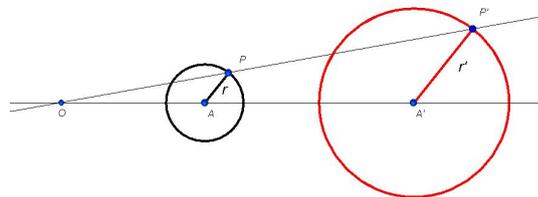


Figura 4.17:

Teorema 4.4.2 *Dadas duas circunferências, então existe uma homotetia que transforma uma delas na outra.*

Prova. Sejam $C(A, r)$ e $C(A', r')$ duas circunferências quaisquer. Inicialmente consideraremos $r' > r$. Se $A = A'$ pelo Teorema 4.4.1, podemos tomar a homotetia $H_{(A, \frac{r'}{r})} : \Pi \rightarrow \Pi$

de centro A e razão $\frac{r'}{r}$, temos então que $H_{(A, \frac{r'}{r})}(C(A, r)) = C(A', r')$. Se $A' \neq A$, marque na reta que contém os pontos A e A' e exteriormente ao segmento AA' , o ponto O tal que

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{r'}{r} = k$$

Este ponto existe, pois O é o único ponto que divide o segmento AA' exteriormente na razão k (ver Figura 4.18). Assim, temos que $OA = \frac{OA'}{k}$. Logo, a homotetia $H_{(O, \frac{r'}{r})} : \Pi \rightarrow \Pi$ transforma $C(A, r)$ em $C(A', r')$. Caso as circunferências possuam mesmo raio, a homotetia que as relaciona pode ter razão 1 (identidade), ou razão -1. OBS: Sobre divisão interior e exterior de segmentos consultar [29]

□

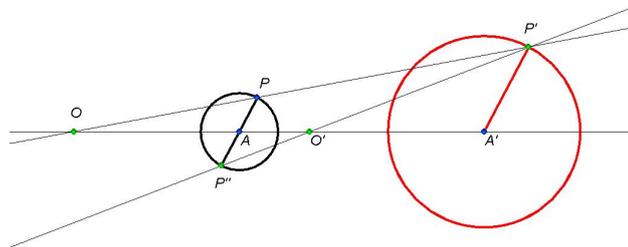


Figura 4.18:

Capítulo 5

O número π

O objetivo deste capítulo é definir formalmente o número π , fazendo uso das Transformações Geométricas. Para isto, usaremos os resultados obtidos no capítulo anterior sobre circunferências e suas imagens por homotetia. Para um melhor entendimento do significado da proporcionalidade entre elementos homotéticos, mencionada no capítulo anterior, é necessário discorrer sobre algumas questões que envolvem a noção de comprimento de arco de uma curva qualquer.

Um *caminho poligonal* é uma união de segmentos consecutivos em que o ponto final de um deles coincide com o ponto inicial do segmento seguinte. O comprimento de um caminho poligonal é a soma das medidas dos segmentos de reta que o compõem.

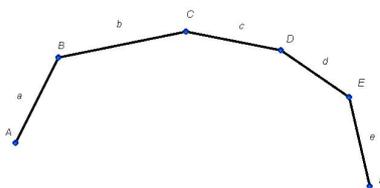


Figura 5.1: $\text{med}(ABCDEF) = a + b + c + d + e$

Já as figuras correspondentes a uma circunferência, uma parábola, uma hipérbole ou uma elipse, não nos permitem um cálculo direto de somas como no caso de uma poligonal. Por outro lado, a despeito das dificuldades intrínsecas associadas à figura da circunferência, é razoável se admitir que ela possui uma medida de comprimento bem determinada. Essa afirmação pode ser melhor compreendida na medida em que se pode aproximar tal caminho, tomando-se pontos pertencentes a esta circunferência e, em seguida unindo-os sequencialmente para que determinem uma poligonal fechada (polígono) inscrita na circunferência (ver Figura 5.2). À medida que o número de pontos sobre a circunferência aumenta, também aumenta o comprimento da poligonal inscrita. Este processo continuando indefinidamente, é razoável admitir que sua tendência é a de se parecer cada vez mais com o comprimento da circunferência. Esta ideia, uma das mais fecundas na análise matemática, é formalmente tratada no conceito de limite. Em Eudoxo, já se encontrava uma preocupação com a idéia de limites, o que pode ser verificado em [4]

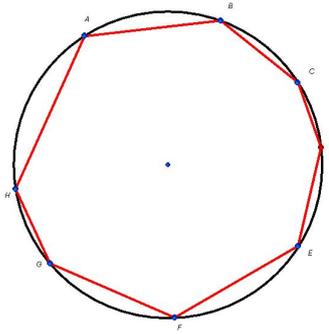


Figura 5.2:

Teorema 5.0.3 *Sejam $C(A, r)$ e $C(A', r')$ duas circunferências e $H_{(O, k)} : \Pi \rightarrow \Pi$ uma homotetia, em que $C(A', r') = H_{(O, k)}(C(A, r))$. A imagem de um arco $BP \in C(A, r)$ por $H_{(O, k)}$ é também um arco de circunferência $B'P' \in C(A', r')$ e tal que $B'P' = k \cdot BP$.*

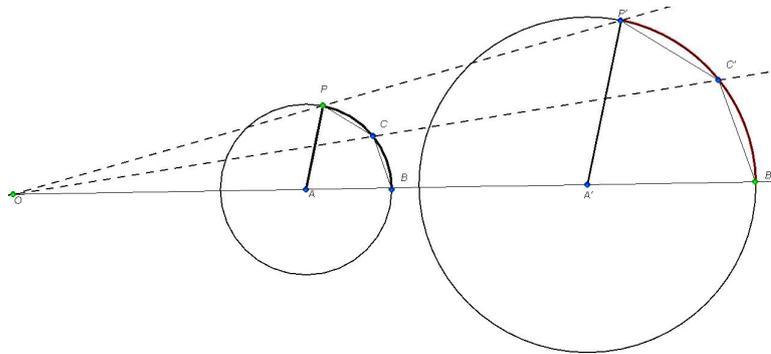


Figura 5.3:

Prova. Seja BP o arco na circunferência $C(A, r)$, pelo Teorema 3.2.2 vemos que $H_{(O, k)}(BP) = B'P' \in C(A', r')$ é em um arco de circunferência. Para verificar que a medida do arco $B'P'$ é tal que $B'P' = k \cdot BP$, devemos proceder segundo os passos a enunciados a seguir: Primeiro tomamos o ponto C no arco BP . As cordas BC e CP formam uma poligonal BCP de medida igual a $BC + CP$. A imagem desta poligonal pela homotetia determina as cordas $B'C'$ e $C'P'$ na circunferência $C(A', r')$. A soma das medidas destes segmentos corresponde à medida da poligonal $B'C'P'$, homotética de BCP , que é igual a $k \cdot (BC + CP)$. A medida da poligonal BCP dá uma aproximação grosseira da medida do arco $B'P'$, assim como a medida da poligonal $B'C'P'$ (ver Figura 5.3). À medida que se acrescentam pontos sobre o arco $B'P'$, obtêm-se poligonais com medidas cada vez mais aproximadas do comprimento do arco. Por exemplo, os pontos M e N determinam a poligonal $BNCMP$ em $C(A, r)$, cuja medida corresponde à soma $MN + NC + CM + MP$, que é maior do que a soma da poligonal $B'P'$ anteriormente calculada (ver Figura 5.4), pois, nos triângulos PMC e BNC , temos que $PC < PM + MC$ e $BC < NC + NB$. Este raciocínio nos ajuda a compreender que a imagem da poligonal que aproxima a medida do arco BP é uma poligonal que também aproxima a medida do arco $B'P'$.

□

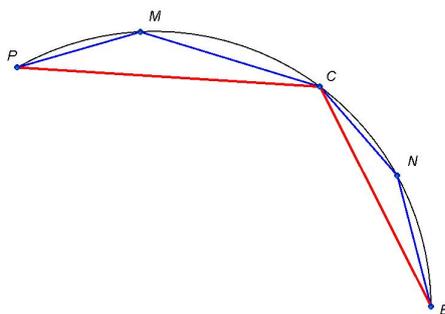


Figura 5.4:

Para se obter o comprimento da circunferência, basta fazer com que o ponto B do arco AB coincida com o ponto A descrevendo um arco de 360° . Isto é, calcular o comprimento da circunferência equivale a calcular o comprimento do arco de medida 360° .

Teorema 5.0.4 *A razão entre o comprimento de uma circunferência e seu diâmetro é o mesmo para qualquer circunferência.*

Prova. Sejam $C(A, r)$ e $C(A', r')$ duas circunferências. Pelo Teorema 4.4.2 temos que existe uma homotetia, $H_{(O,k)} : \Pi \rightarrow \Pi$ tal que $H_{(O,k)}(C(A, r)) = C(A', r')$. Logo, pelo Teorema 5.0.3 temos que, se C e C' , são os comprimentos das circunferências $C(A, r)$ e $C(A', r')$ respectivamente, então $\frac{C'}{C} = k$. Por outro lado, pelo Teorema 3.2.2 temos que $\frac{r'}{r} = k$, assim $\frac{C'}{C} = \frac{r'}{r}$, isto é,

$$\frac{C'}{2r'} = \frac{C}{2r}$$

□

Definição 5.0.1 *O valor constante obtido da razão entre o comprimento de uma circunferência e seu diâmetro é um número “irracional” chamado pi e é representado pela letra grega π .*

Logo, temos que o valor do comprimento C de uma circunferência depende apenas de seu raio r e é calculado pela fórmula $C = 2\pi r$.

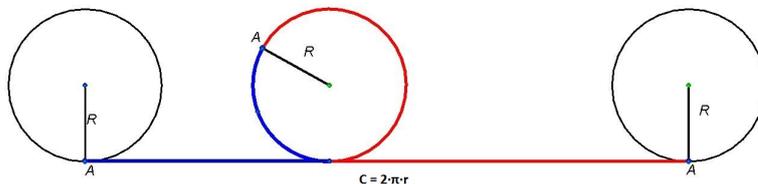


Figura 5.5:

Embora o número π seja ensinado nos níveis fundamental e médio, a justificativa de sua irracionalidade escapa à compreensão dos estudantes destes segmentos escolares. Nossa proposta é mostrar uma aproximação do valor deste número, de tal forma que nossos alunos consigam ter uma pequena ideia da dificuldade de verificar este fato e, ao mesmo tempo, ter um valor que represente dito número. Além disso, chamamos a atenção de nossos estudantes para o fato de que tal verificação envolve conteúdos avançados, aproveitando para contar um pouco da história deste número e sobre o que faz um matemático.

5.1 O valor de π

Podemos imaginar na prática, a roda de uma bicicleta movimentando-se sobre o solo: esta roda gira sem escorregar, caminhando sempre em linha reta. Podemos supor que seu contorno representa uma circunferência. Marcamos um ponto A sobre a roda. Quando esta, em seu movimento completa uma volta, o ponto A volta a tocar o solo. A medida do segmento de reta AA , determinado por duas posições sucessivas do ponto A , será exatamente o comprimento da circunferência, isto é, $AA = C$ (ver Figura 5.5). Se a circunferência tem raio 1, seu comprimento é igual a 2π . Logo, $AA = 2\pi$. Assim, o comprimento da semicircunferência de raio 1 corresponde a um segmento de reta de medida igual ao valor da constante π .

Existem construções com régua e compasso que permitem a construção de um segmento de reta que tem a medida aproximada da semicircunferência. Esses procedimentos podem ser encontrados em [15]. Usaremos o método de Arquimedes para o cálculo do número π . Partindo-se de uma circunferência de diâmetro unitário, então o seu comprimento maior que o perímetro de qualquer polígono regular inscrito e menor do que o de qualquer polígono regular circunscrito. Os cálculos dos perímetros desses polígonos não apresentam grande dificuldade. Isso posto, à medida que se aumentam os lados dos polígonos considerados, mais próximos estamos de encontrar o valor do número π . Este procedimento sugere cálculos aproximados para o valor desejado de π . Para isto, inscreve-se um polígono regular do qual seja facilmente encontrado o seu lado e calcula-se em seguida o seu semi-perímetro. Constrói-se em seguida um outro polígono com o dobro do número de lados que o anterior e calcula-se seu semi-perímetro. Continua-se sequencialmente com este processo. Obtém-se dessa forma uma seqüência de valores de semiperímetros crescentes e cujo limite, como discutido anteriormente, corresponde ao valor de π .

Observe que, na Figura 5.6, se escolheu por simplicidade um quadrado inscrito na circunferência, para ser o primeiro da seqüência. Para ter uma melhor aproximação do comprimento da circunferência, tomamos retas passando pelos pontos médios dos lados do quadrado e marcamos os pontos de interseção destas retas com o círculo. Logo, com estes pontos e os vértices do quadrado, construímos um octógono.

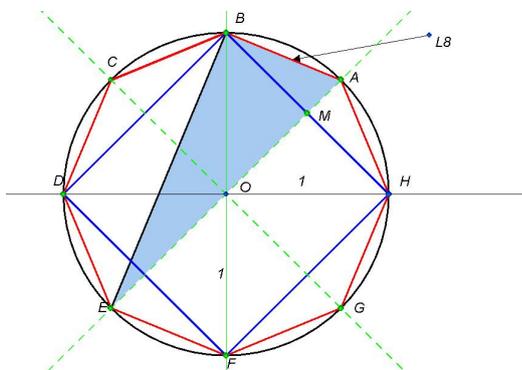


Figura 5.6:

Agora vamos calcular a medida do semiperímetro deste octógono. Para isto, destacamos um de seus lados, representado pelo segmento \overline{AB} . Como \overline{AE} é um diâmetro deste círculo, o triângulo BAE é retângulo em B . O segmento \overline{BM} tem medida igual à

metade do lado \overline{BH} do quadrado inscrito e é perpendicular ao diâmetro \overline{AE} (ver figura 5.6). Aplicando-se as fórmulas das relações métricas no triângulo retângulo (ou semelhança de triângulos), pode-se concluir que $(AB)^2 = (AM)(AE)$. Por outro lado, como $AM = OA - OM$, $AE = 2$, $AM = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $AB = L_8$ (L_8 lado do octógono). Temos que $(L_8)^2 = 2(1 - \frac{\sqrt{2}}{2})$, logo $L_8 = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$. calculando o valor do semi-perímetro do octógono regular inscrito teremos uma melhor aproximação para π que é igual a $4(\sqrt{2 - \sqrt{2}}) \cong 3,06205$.

Note que o octógono tem 8 lados, o que corresponde ao dobro do número de lados do quadrado. Logo, para uma melhor aproximação do comprimento da circunferência, temos que utilizar o processo anterior e construir polígonos inscritos na circunferência com um número de lados igual ao dobro do número de lados do anterior. Através de uma fórmula de recorrência, que permite calcular o lado do polígono de $2n$ lados em função do lado do polígono de n lados, podemos ter uma boa aproximação de π aumentando-se o número n . Logo, suponha que foi contruído o polígono inscrito com n lados e que conhecemos a medida de seu lado L_n , passando retas pelos pontos médios de cada lado e o centro do polígono, marcamos os pontos de interseção destas retas com a circunferência. Assim, construímos o polígono de $2n$ lados, cujos vértices são os pontos assim determinados e os vértices do polígono de n lados. Agora vamos escrever o lado l_{2n} em função do lado l_n .

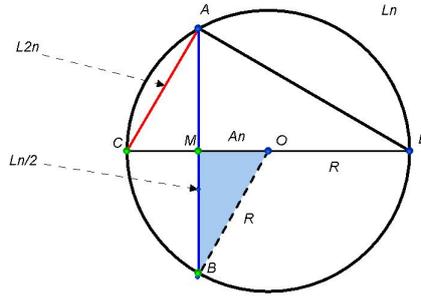


Figura 5.7:

Na figura 5.7, $AB = L_n$ (lado do polígono de n lados inscrito) e $A_n = OM$ é o apótema do polígono regular de n lados. O segmento \overline{CD} é mediatriz do segmento \overline{AB} . Logo, o ponto C divide o arco AB em dois arcos de mesma medida, AC e CB . O ponto M é médio da corda AB e o segmento \overline{AC} tem medida igual a $AC = L_{2n}$ (lado do polígono de $2n$ lados inscrito). Como \overline{CD} é um diâmetro, o triângulo ACD é retângulo em A e daí vem que $(AC)^2 = CM \cdot CD$, então,

$$(L_{2n})^2 = 2R \cdot (R - a_n).$$

Em consequência, para a circunferência de raio $R = 1$ temos que

$$L_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - (L_n)^2}}.$$

Dessa forma segue-se que $L_4 = \sqrt{2}$; $L_8 = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$; assim, $L_{16} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$, logo temos que $L_{32} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}$.

Seguindo o padrão lógico sugerido pela recorrência, teremos em geral que

$$L_{2^n} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}}$$

com $(n - 1)$ radicais. Para o polígono de 2^n lados, seu semiperímetro é dado por

$$2^{n-1} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}} \approx \pi$$

$$\pi = \lim(2^{n-1} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}}) \text{ com } n \rightarrow \infty.$$

A convergência se dá em razão da referida sequência ser limitada e estritamente crescente (ver [27]).

É importante observar que este procedimento, sendo executado com as ferramentas do desenho geométrico tradicionais, como a régua e o compasso, é bastante ilustrativo, porém possui grande limitação. Por outro lado, com o auxílio de métodos computacionais como os programas de geometria dinâmica, muito se pode avançar na qualidade das construções, dado que tais programas possuem grande capacidade de resolução na construção das figuras. Além disso, a execução dos desenhos é facilitada pela ferramenta eletrônica utilizada. Mas, mesmo assim, é também um processo que possui suas limitações intrínsecas. O desafio de se encontrar valores exatos para as casas decimais para π foi e tem sido objeto de interesse para muitos matemáticos. Os resultados mais recentes neste sentido apresentam $8 \cdot 10^{15}$ casas decimais exatas para π (ver tabela da Figura 2.2). Para efeito de cálculos envolvendo o número π na maioria dos problemas práticos, são suficientes três casas decimais. Daí o valor consagrado 3,14 em suas aplicações.

5.2 Área do círculo

O círculo, mesmo sendo uma figura de fácil traçado, requer um cálculo elaborado para a determinação do valor de sua área. A dificuldade no cálculo da área se dá em razão de seu contorno. Este fato causa grande dificuldade na definição da medida de sua área, já que as figuras escolhidas para definir unidades de áreas são retangulares e, portanto, poligonais, o que não é o caso do círculo. No caso das figuras poligonais, como, por exemplo, o triângulo, o quadrado, o paralelogramo, o retângulo, o trapézio, todas elas podem ser manipuladas de modo a associá-las a figuras que lhes são equivalentes e cujas áreas são de fácil determinação. Em geral, todas podem ter suas áreas comparadas à área de um retângulo. Já o círculo, este não pode ser decomposto em figuras de natureza poligonal e aí reside toda a dificuldade para estabelecer uma fórmula para sua área. Mais uma vez será necessário utilizar a noção de aproximações sucessivas, como no caso do comprimento da circunferência. A idéia que se desenvolveu para tal intento pode ser vislumbrada com base na figura a seguir, onde se tem um círculo de raio r , dividido em uma determinada quantidade de triângulos isósceles cujos lados são raios do círculo.

Na Figura 5.8, temos inicialmente um polígono regular inscrito no círculo com oito lados. Este polígono foi obtido através do polígono regular inscrito que possui 4 lados, traçando-se perpendiculares aos seus lados pelo centro do círculo. O polígono regular inscrito que possui 16 lados pode ser obtido por intermédio do polígono de 8 lados e

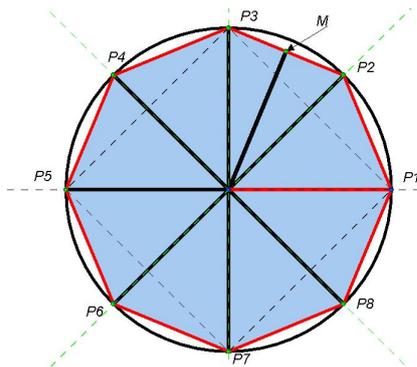


Figura 5.8:

assim sucessivamente. A área deste octógono corresponde a oito vezes a área de cada um dos triângulos isósceles congruentes nos quais ele foi dividido radialmente. Dessa forma, a área deste polígono é igual a $S_8 = 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot (P_1P_2) \cdot (OM) = 4 \cdot (P_1P_2) \cdot (OM)$. Continuando indefinidamente este procedimento aumentando-se o número de lados do polígono regular inscrito, cada vez mais nos aproximamos do valor da área do círculo. Os cálculos das áreas S_{2^n} , dos polígonos assim determinados, podem ser efetuadas da seguinte maneira:

$$S_{2^n} = 2^{n-1} \cdot (P_1P_2) \cdot (OM)$$

Quando o número de lados do polígono cresce indefinidamente, isto é, quando $n \rightarrow \infty$, o fator $2^{n-1} \cdot (P_1P_2)$ se aproxima do semiperímetro da circunferência, isto é, $2^{n-1} \cdot (P_1P_2) \rightarrow \pi \cdot R$, enquanto que o fator $(OM) \rightarrow R$, R o raio do círculo. Logo o valor do produto (área do polígono de n lados inscrito) se aproxima do valor $\pi \cdot R^2$. A figura a seguir ajuda na compreensão deste importante resultado.

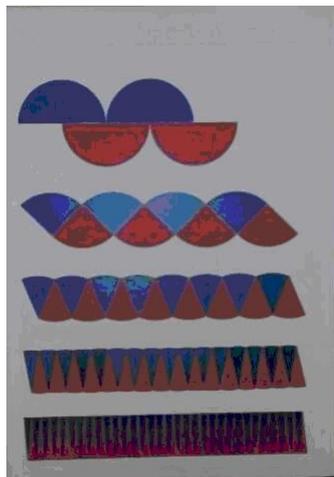


Figura 5.9:

5.3 Unidades de medida

A escolha de uma unidade de medida com vistas a viabilizar as aplicações práticas é uma questão delicada e nem sempre de fácil tratamento. O cotidiano de um profissional de mecânica ou carpintaria ou em engenharias, de modo geral, obriga este grupo a manter

em suas oficinas ferramentas graduadas em milímetros e também em polegadas, tendo em vista os sistemas métricos usuais. Porém, na teoria, qualquer grandeza pode ser escolhida para representar uma unidade de medida. Por exemplo, podemos escolher em uma régua graduada em centímetros, o segmento de medida igual a dois centímetros para representar uma nova unidade, isto é, $1U = 2 \text{ cm}$ e, assim, aquelas medidas que forem tomadas na unidade de centímetros, nesta nova unidade, terão suas medidas representadas por números que correspondem à metade das respectivas medidas originais.

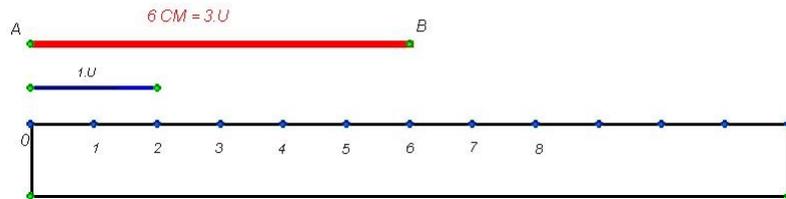


Figura 5.10:

Na Figura 5.10, admitamos que a régua esteja graduada em centímetros. Assim sendo, o segmento AB tem medida igual a 6cm. Considerando-se a nova unidade de medida $1U = 2 \text{ cm}$, a medida do segmento AB será igual a 3 U. Em geral é o que acontece quando nós utilizamos o sistema métrico usual para mudar de metros para centímetros, quilômetros para metros, quilograma para grama, litro para mililitro, etc.

A unidade de medida de ângulos que se pretende definir denominada por radiano é de certa maneira incomum no âmbito da Geometria Elementar. Esta unidade misteriosa se mostra muito importante não somente no contexto da Matemática quando se estuda a Trigonometria, como também em suas aplicações na Física e em estudos de Matemática do Ensino Superior, em especial nos estudos de Geodésica em Engenharia Cartográfica. Nos livros didáticos adotados nas escolas secundárias, encontra-se a seguinte definição:

Definição 5.3.1 Diz-se que um ângulo mede 1 radiano (1 rd) quando ele determina, numa circunferência com centro no seu vértice, um arco de comprimento igual ao raio da mesma.

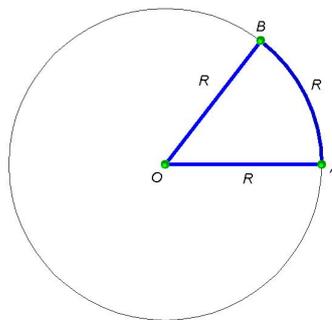


Figura 5.11:

Na Figura 5.11, o arco AB tem comprimento igual ao raio da circunferência. Agora devemos observar se esta unidade está bem definida. A incorreção desta definição se daria

na medida em que, para circunferências distintas, este ângulo de 1 radiano determinasse nas circunferências arcos de comprimentos distintos de seus respectivos raios. Mas isso certamente não aconteceria, pois, à luz da homotetia, esta afirmação é cabalmente demonstrada, bastando para tanto, analisar a Figura 5.12. Vemos que, na circunferência menor, o comprimento do arco $X = R$; então, com base no teorema 4.4.1, temos que $\frac{X'}{X} = \frac{R'}{R}$, onde $X' = R'$.

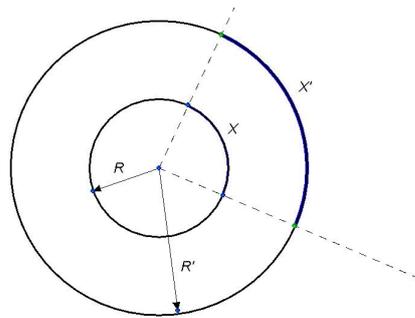


Figura 5.12:

Tomando-se a medida deste particular ângulo como unidade de medida angular, isto equivale a escolher a medida do raio da circunferência para graduar a própria circunferência. É o mesmo que conceber uma espécie de régua circular cuja unidade de medida é o raio da circunferência. Para estudo da relação entre comprimento de arco e medida de ângulo central na circunferência, bastaria limitar-se àquela em que o seu raio é unitário, isto é, possui medida igual a 1.

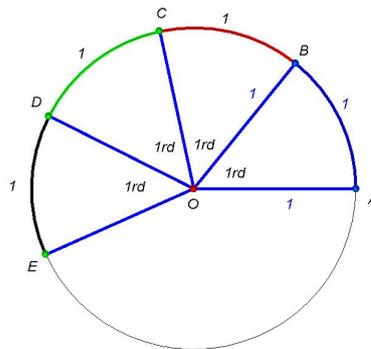


Figura 5.13:

Na Figura 5.13, a circunferência possui raio igual a 1, o $\angle AOB = 1$ rd e o comprimento do arco $AB = 1$; o $\angle AOC = 2$ rd e o comprimento do arco $ABC = 2$; o $\angle AOD = 3$ rd e o comprimento do arco $ABD = 3$; a medida do $\angle AOE = 4$ rd e o comprimento do arco $ABE = 4$. Então, pode-se concluir que, quando a medida de um ângulo central possuir um valor igual a x rd, o comprimento do arco correspondente terá medida igual a x .

A medida em radianos nos permite encontrar o valor do comprimento de um arco subtendido por um ângulo central de x rad com simplicidade. Para isto, considere a Figura 5.14, onde temos duas circunferências concêntricas, uma de raio 1 e outra de raio R . Nas respectivas circunferências marcamos um ângulo de x rad e vemos que este subtende arcos de comprimentos respectivamente iguais a x e X' em cada circunferência, ($X' > x$). O arco $A'B'$ pertencente à circunferência de raio $OP = R$ tem comprimento maior que

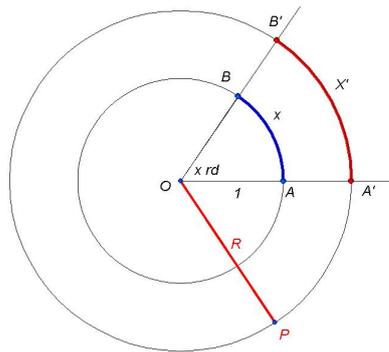


Figura 5.14:

o do arco AB pertencente à circunferência de raio igual a 1(o que era de se esperar). Utilizando o fato já mencionado anteriormente acerca da homotetia, pode-se concluir com base no teorema 4.4.1, temos que $\frac{X'}{x} = \frac{R}{1}$, donde $X' = x.R$. Com isto, obtemos a seguinte propriedade:

Para se determinar o comprimento de um arco de circunferência subtendido por um ângulo central de medida igual a x rd, basta multiplicar a medida deste ângulo pelo comprimento de seu raio.

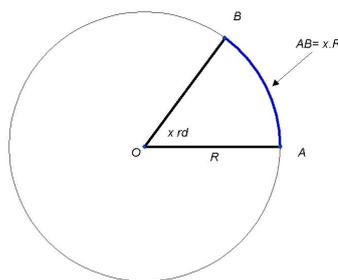


Figura 5.15:

É também notável que, para ângulos centrais medidos em radianos, o comprimento do arco correspondente calculado pela fórmula acima descrita estará sempre em compatibilidade com a unidade de medida do raio da circunferência, isto é, se o raio da circunferência estiver em metros, a medida do arco será fornecida também em metros; o mesmo para *cm*, *mm* ou *km*.

Relação entre Graus e Radianos

Antes de definir esta relação, lembremos a definição do grau.

Definição 5.3.2 . *Um ângulo reto é qualquer um dos quatro ângulos formados por duas retas perpendiculares. O ângulo de um grau (1°) é aquele que corresponde a nonagésima parte de um ângulo reto. Dessa forma um ângulo reto mede 90° e o ângulo raso 180° .*

Assim, se x é a medida de um ângulo em radianos e α sua medida correspondente em graus, pode-se concluir que $\frac{360^\circ}{\alpha} = \frac{2\pi}{x}$. Com base nesta relação é possível avaliar a medida do ângulo de 1 radiano, já que um ângulo de 1° mede $\frac{180}{\pi}$ e este valor corresponde a aproximadamente 57° .

Capítulo 6

Geometria Analítica

Neste capítulo vamos mostrar a potencialidade didática das Transformações Geométricas aliadas à Geometria e também ao *software* TABULAE, com o objetivo de desenvolver os principais conceitos no estudo desta importante disciplina. Tais conceitos iniciais dizem respeito ao estudo da reta no plano cartesiano, sua equação e a caracterização do paralelismo e perpendicularismo, conceitos que se constituem no tema central de um primeiro estudo em Geometria Analítica, cujo caráter formativo é de notável consideração. Na quase totalidade dos livros didáticos disponíveis atualmente que são adotados pela grande maioria das escolas brasileiras de Ensino Básico, como já foi mencionado em capítulos anteriores, o tratamento dado a estes assuntos percorre um caminho que passa necessariamente pelo estudo da Trigonometria, razão pela qual esta parte do programa se estuda normalmente no terceiro ano do Ensino Médio (ver em [29]). O fato de se utilizar a Trigonometria no tratamento tradicional se justifica em face da preocupação em se definir o conceito de coeficiente angular da reta e daí garantir o alinhamento com base na propriedade da tangente trigonométrica, além de ser utilizada para a demonstração da caracterização do perpendicularismo entre retas.

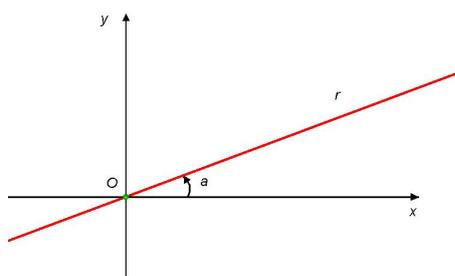


Figura 6.1:

O coeficiente angular da reta r é igual à $\text{tg}(a)$. A grande contribuição de uma abordagem não clássica, que faz uso da geometria das Transformações Geométricas e da Geometria Plana, é que ela permite um desenvolvimento da Geometria Analítica na primeira série do Ensino Médio. Além disso, revela aspectos intuitivos associados às ideias de movimentos como os de translação e rotação, presentes no cotidiano dos alunos, e que se adequam perfeitamente às perspectivas dinâmicas dos *softwares* em GD. Seu estudo baseado nesta ótica pode naturalmente anteceder ao estudo das funções reais de variável real, que é ensinado predominantemente no primeiro ano do Ensino Médio. A Geometria Analítica prepara o terreno para o estudo gráfico das funções, na medida em que

familiariza o educando com o plano de coordenadas. Faz-se necessário argumentar que, na prática, as noções de ângulo entre duas retas e distância do ponto à reta podem ser adiados a bem dos ganhos conceituais, que com certeza, são de relevante préstimo para os alunos nesta fase de seu aprendizado. Optou-se por abordar diretamente o estudo das retas, levando-se em conta um conhecimento prévio das noções de coordenadas cartesianas e também da fórmula da distância entre dois pontos. Uma outra situação interessante sobre a possibilidade da inserção da Geometria Analítica, já nesta fase do ensino, é aquela que propõe o estudo da circunferência no plano, já que este conteúdo depende somente da distância entre dois pontos no plano, o que certamente não se compara em nível de dificuldade com as noções da Trigonometria no caso do estudo das retas. Esta proposta pode ser encontrada em [19].

Pontos no plano cartesiano

A figura a seguir nos mostra um ponto P do plano cartesiano e suas coordenadas x e y univocamente determinadas através de projeções paralelas aos eixos.

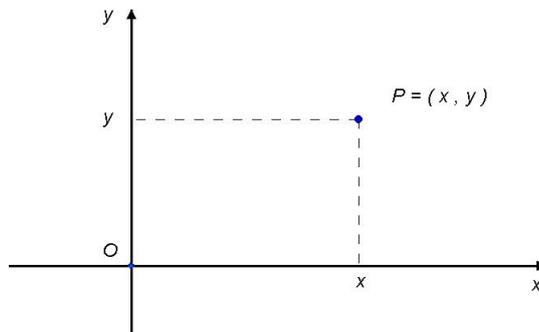


Figura 6.2:

Os *softwares* em GD (ver Figura 6.3) possuem aplicativos que permitem reproduzir o plano cartesiano destacando as coordenadas de um ponto com um simples movimento do *mouse*, o que possibilita estudar as propriedades do ponto em coordenadas, isto é, identificar o quadrante ao qual o ponto pertence pelo sinal das coordenadas.

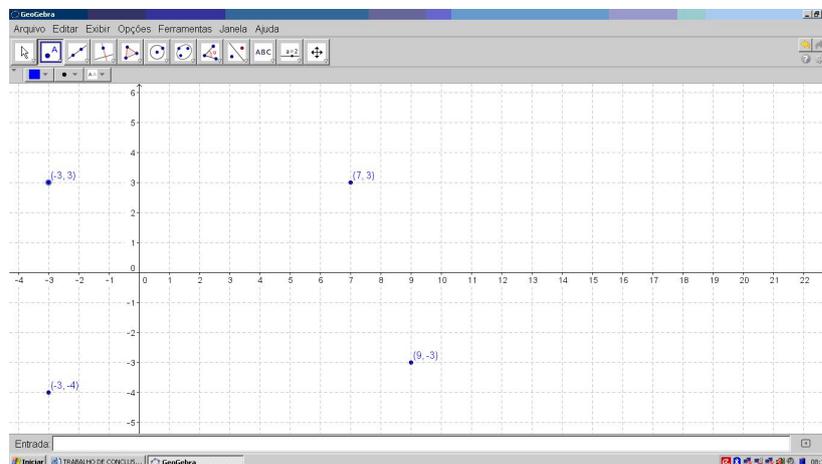


Figura 6.3:

6.1 A reta no plano

A Geometria Analítica conjuga a Álgebra e a Geometria. Em outras palavras, ela é capaz de descrever um objeto geométrico (figura), por intermédio de uma equação matemática envolvendo as variáveis x e y , variáveis essas que correspondem às coordenadas dos pontos pertencentes à figura em questão. Formalmente, em linguagem matemática, costuma-se definir uma figura caracterizando-a por um conjunto bem definido de pontos; neste contexto estuda-se a noção de *Lugar Geométrico (LG)*. É importante destacar que na Geometria Analítica no espaço a três dimensões R^3 o instrumental teórico via vetores é o mais indicado.

Definição 6.1.1 *Um Lugar Geométrico (LG), é definido como um conjunto de pontos que possuem uma propriedade P em comum e tal que somente eles a possuem.*

Assim, os pontos pertencentes a um LG possuem uma propriedade que lhes é exclusiva, isto é, se é do lugar, então possui a propriedade; se possui a propriedade, então é do lugar; se não a possui, não é do lugar. Os principais lugares geométricos que se estudam no início do estudo da Geometria Analítica são a reta, a circunferência, a parábola e a hipérbole. No contexto da Geometria Analítica, as equações matemáticas de duas variáveis passam a ter uma interpretação geométrica, permitindo que uma equação e uma figura sejam perfeitamente identificadas. Neste contexto, falar de um objeto geométrico tem o mesmo significado que falar de sua equação.

Dessa forma é possível dizer, por exemplo, que a equação $y = x$ é a equação de uma reta que contém a origem, ou ainda que a equação $y = x$ é uma reta, usando o significado geométrico e o algébrico indistintamente.

Em Geometria Euclidiana, sabemos que uma reta fica determinada quando se conhecem dois de seus pontos. Logo, conhecendo esses dois pontos temos uma única reta. Nossa tarefa é determinar que tipo de relação devem satisfazer as coordenadas x e y de um ponto $P = (x, y)$ do plano cartesiano para que o mesmo pertença à dita reta. O encaminhamento que pretendemos seguir levará em consideração dois casos especiais:

1º caso. - As retas que contêm a origem;

2º caso - As retas que não contêm a origem.

Retas que contêm a origem

Neste caso a reta passa pelo ponto $O = (0, 0)$ (origem). Como a reta fica determinada por dois pontos, primeiro suponha que esta passa por $(0, b)$. Logo, olhando para o sistema de coordenadas, temos que a reta é o próprio eixo y . A propriedade especial que satisfaz esta reta é que todos seus pontos têm primeira coordenada zero (ver Figura 6.4), logo a equação desta reta é $x = 0$. Assim, a equação da reta vertical que passa pela origem (o eixo y) é:

$$x = 0$$

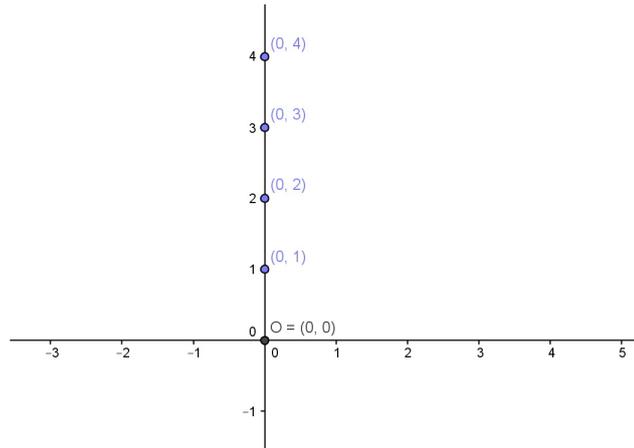


Figura 6.4:

Agora suponha que a reta passa pelo ponto $A = (a, b)$ a princípio com a e b positivos, o que impõe uma posição particular para essas retas, a saber, todas cortam o primeiro e o terceiro quadrante. Seja $P = (x, y)$ um ponto qualquer da reta. Logo, suas coordenadas não são livres, isto é, elas devem variar de modo que P pertença à reta considerada e não podem assumir valores independentemente uns dos outros. É conveniente considerar ainda que esta primeira parte da determinação da equação da reta supõe que o ponto variável P pertença ao primeiro quadrante. Dessa forma os triângulos retângulos POP' determinados pelos pontos P pertencentes à reta considerada serão todos homotéticos ao triângulo retângulo AOA' (ver Figura 6.5).

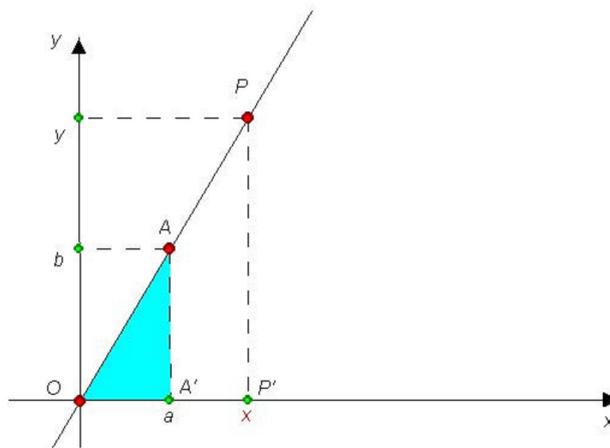


Figura 6.5:

O triângulo POP' é homotético ao triângulo AOA' , daí temos que

$$\begin{aligned} \frac{PP'}{AA'} &= \frac{OP'}{OA'} \\ \frac{y}{b} &= \frac{x}{a} \\ y &= \frac{b}{a}x \end{aligned}$$

Obtendo assim uma equação em função das coordenadas do ponto P . Note que se o ponto P pertencer ao terceiro quadrante, podemos usar uma simetria em relação à origem

ou uma homotetia de razão negativa, relacionando o triângulo formado pelo ponto P e os eixos coordenados no terceiro quadrante e seu simétrico no primeiro quadrante (ver Figura 6.6). Obtendo, do mesmo modo a relação $\frac{y}{b} = \frac{x}{a}$, tomando-se o cuidado em observar que a proporção que se obtém, em razão da homotetia, deve ser a seguinte: $\frac{-y}{b} = \frac{-x}{a}$ (lembrando que x e y são ambos negativos para este caso).

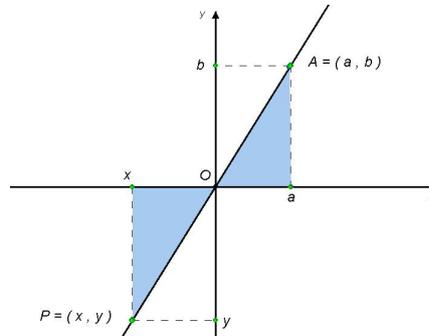


Figura 6.6:

Como a e b são valores constantes, $a \neq 0$ e x e y variáveis, podemos escrever simplificada a equação como

$$y = k.x$$

Onde $k = \frac{b}{a} > 0$.

Analogamente, suponha que a reta passa pelo ponto $B = (a, b)$ a princípio com a e b com sinais contrários, o que impõe uma posição particular para essas retas, a saber, todas cortam o segundo e o quarto quadrante. Sem perda de generalidade, digamos que B esta no segundo quadrante.

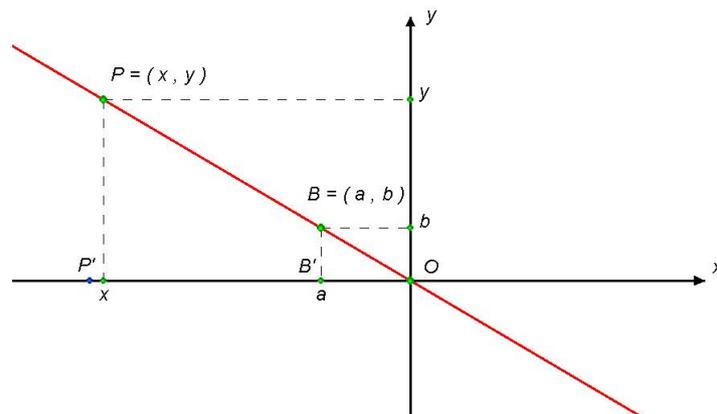


Figura 6.7:

Seja $P = (x, y)$ um ponto qualquer da reta, os triângulos POP' e BOB' são homotéticos (ver Figura 6.7). Então temos que

$$\begin{aligned} \frac{PP'}{BB'} &= \frac{OP'}{OB'} \\ \frac{y}{b} &= \frac{-x}{-a} \\ y &= \frac{b}{a}x \end{aligned}$$

Como a e b são valores constantes, com $a \neq 0$ e x e y variáveis, podemos escrever simplificadamente a equação como

$$y = k.x$$

em que $k = \frac{b}{a} < 0$.

É oportuno lembrar que a origem, isto é, o ponto $(0, 0)$ satisfaz trivialmente a equação. Finalmente, se a reta passa pelo ponto $(a, 0)$, olhando para o sistema de coordenadas temos que a reta coincide com o eixo x . Portanto, a propriedade especial que satisfaz esta reta é que todos seus pontos têm segunda coordenada zero (ver Figura 6.8). Logo, a equação desta reta é $y = 0$ ou, equivalentemente, $y = 0.x$.

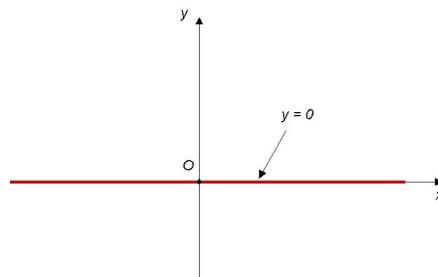


Figura 6.8:

Conclusão: Toda reta que contém a origem, possui equação cartesiana do tipo

$$y = kx \text{ ou } x = 0$$

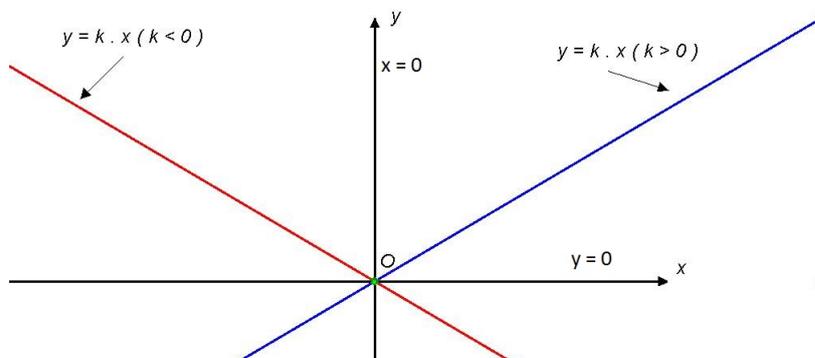


Figura 6.9:

Coefficiente angular

Vamos entender melhor a constante k na equação da reta. Note que existe uma relação entre este número k e a inclinação da reta em relação ao eixo horizontal, isto é, o ângulo que esta reta determina com o eixo das abscissas no sentido anti-horário.

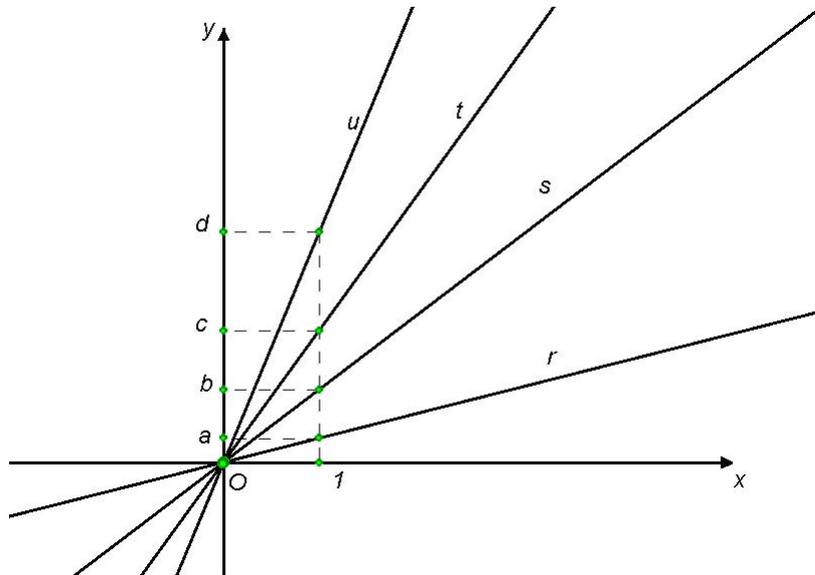


Figura 6.10:

As equações das retas r , s , t e u da Figura 6.10 são respectivamente iguais a $y = a.x$, $y = b.x$, $y = c.x$ e $y = d.x$. Como $a < b < c < d$, os ângulos que as respectivas retas formam com o eixo horizontal vão crescendo e ao mesmo tempo evidenciando que essas constantes a , b , c e d , são características dos ângulos que determinam as inclinações das respectivas retas. Note que o valor de k é obtido de uma proporção de triângulos, logo este valor depende do ângulo.

Definição 6.1.2 . *O coeficiente angular da reta $y = kx$ é o valor da constante k .*

Esta razão constante é exatamente a tangente do ângulo que a reta determina com o eixo horizontal no sentido anti-horário.

Convém observar que o eixo x (reta horizontal passando pela origem) possui coeficiente angular cujo valor é zero. Por outro lado, o eixo y (reta vertical passando pela origem) não possui coeficiente angular ($k = \frac{b}{0}$), ficando portanto sua equação $x = 0$.

. Podemos observar para este caso que, à medida que a inclinação da reta se aproxima de 90° , seu coeficiente angular tende a aumentar indefinidamente. Este fato se representa simbolicamente por $k \rightarrow +\infty$.

Exemplo de reflexão de retas

Neste momento, é oportuno identificar retas que são imagens umas das outras pela reflexão de eixo y . Estas retas possuem coeficientes angulares simétricos. Por exemplo, a reta $y = x$ tem como imagem $y = -x$; já a reta $y = 2x$ tem como imagem $y = -2x$.

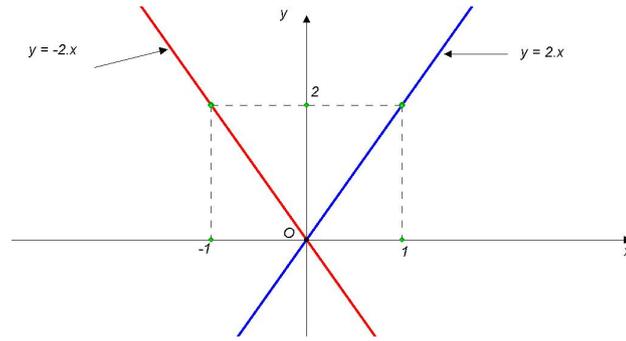


Figura 6.11:

Retas que não passam pela origem

O estudo deste caso recai sobre o caso anterior das retas que passam pela origem. Para tanto basta observar que para toda reta que não passa pela origem, existe uma única reta que passa pela origem e é paralela a esta reta. Resta mostrar, então, que uma vez conhecida a equação de uma reta r que passa pela origem, a equação de uma reta r' , que lhe é paralela, é determinada de modo natural, executando-se uma translação sobre a reta r .

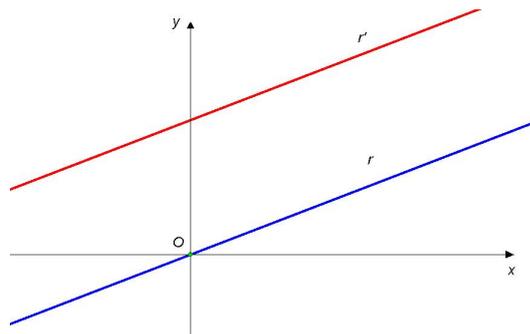


Figura 6.12:

No caso de r' ser uma reta vertical, isto é, aquela que é perpendicular ao eixo x , é possível concluir que, após uma translação horizontal de medida a , deve ser cumprido que $x = a$ (Figura 6.13). Assim, a equação cartesiana desta reta é $x = a$.

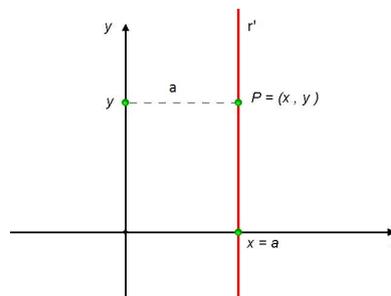


Figura 6.13:

Do mesmo modo, quando r' é uma reta horizontal, basta fazer uma translação vertical de medida b . Logo, a segunda coordenada dos pontos desta reta deve ser $y = b$. Assim a equação desta reta é $y = b$.

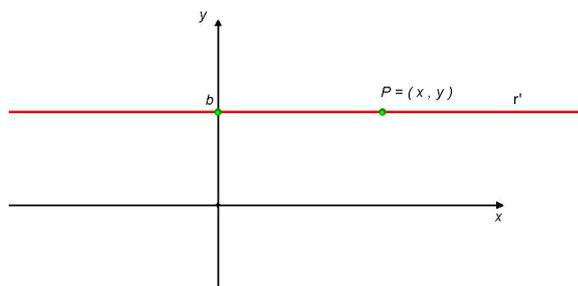


Figura 6.14:

De forma geral, podemos obter a equação da reta r' fazendo uma translação vertical de uma reta r paralela a r' e que passa pela origem, isto pode ser denotado como $r' = T_{\vec{v}}(r)$, em que \vec{v} é um vetor vertical e tal que seu módulo é igual a b , isto é, $(|\vec{v}| = b)$. Esta forma de abordagem é bastante natural. Podemos concluir então, daí, que retas paralelas possuem seus coeficientes angulares iguais, exceto para retas verticais.

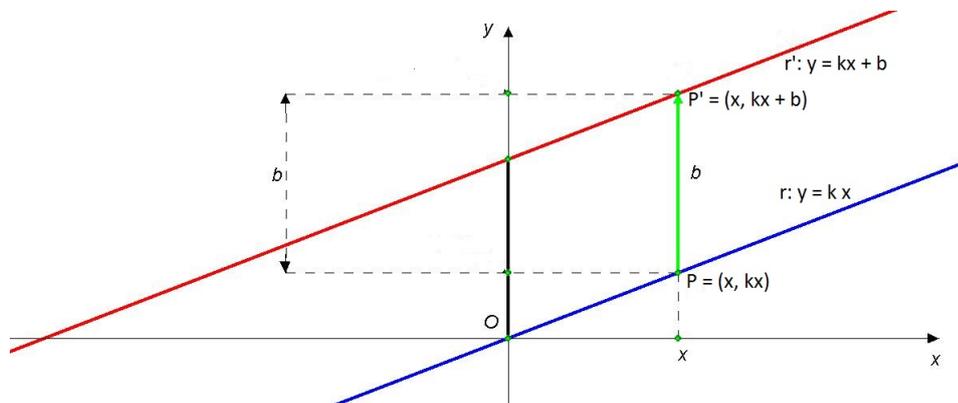


Figura 6.15:

Para qualquer ponto P pertencente à reta r de equação $y = kx$, uma translação vertical de medida b leva este ponto ao ponto P' da reta r' . A elevação do ponto P é dada pelo deslocamento de sua segunda coordenada, que é $y = kx$. Assim, a segunda coordenada do ponto P' é determinada por $y = kx + b$.

Conclusão A equação de qualquer reta no plano é dada por $x = a$ ou

$$y = kx + b$$

Definimos o *coeficiente angular* da reta por k . O valor de b será chamado de *coeficiente linear* e representa a ordenada do ponto em que a reta intercepta o eixo y . No caso das retas $x = a$, não é possível definir coeficiente angular nem linear.

Retas paralelas

Pela construção da equação da reta, podemos afirmar:

Proposição 6.1.1 *Duas retas são paralelas se, e somente se, possuem o mesmo coeficiente angular.*

Isto é, se r é a reta de equação $y = kx + b$ e s é a reta de equação $y = k'x + b'$, então r é paralela a s se, e somente se, $k = k'$.

Retas perpendiculares

A caracterização de ângulos retos é de extrema utilidade no estudo da Geometria Analítica. Ter capacidade para saber se o ângulo entre duas retas é de 90° ou se dois vetores são perpendiculares é essencial para o desenvolvimento da Geometria Analítica, como também para suas aplicações. A ideia aqui desenvolvida para estudar o perpendicularismo faz uso da noção de rotação. Esta abordagem se mostrará útil não somente para a sua caracterização, como também servirá como motivação para a definição do conceito de produto escalar no estudo dos vetores no \mathbb{R}^2 . A grande maioria da literatura sobre o assunto faz uma abordagem que exige do educando um estudo prévio da Trigonometria. A vantagem da abordagem via homotetia e Transformações Geométricas é de poder dispensar tais ferramentas teóricas. Do ponto de vista construtivista, esta perspectiva, aliada às ferramentas tecnológicas, contribui para que desperte no aluno alguma curiosidade a respeito da utilização dos resultados obtidos.

O problema que se coloca agora é o de determinar a equação de uma reta que é perpendicular a uma determinada reta que é conhecida. Seja r , como na Figura 6.16, a reta conhecida e r' a reta que se quer determinar, que lhe é perpendicular.

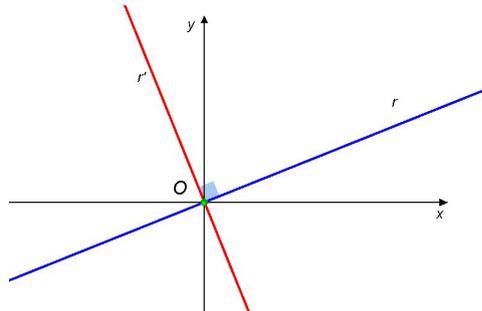


Figura 6.16:

A reta r que passa pela origem foi escolhida porque os demais casos podem ser reduzidos ao estudo desta particular configuração. Antes da demonstração propriamente dita, convém analisar a figura 6.17, que mostra um retângulo no primeiro quadrante que sofreu uma rotação de $+90^\circ$ em torno da origem O .

O vértice $A = (a, b)$ foi transformado no ponto $A' = (-b, a)$. Isto significa que pontos associados por uma rotação de 90° em torno da origem possuem coordenadas que são naturalmente identificadas. Seja agora uma reta r , da figura 6.18, que passa pela origem e pelo ponto $A = (a, b)$. A reta r' , que é perpendicular a r e que passa pela origem, só pode ser aquela que contém o ponto $A' = (-b, a)$ (ver figura 6.18)

Se a equação da reta r é $y = \frac{b}{a}x$, pelo que vimos a equação da reta r' é $y = \frac{-a}{b}x$. Multiplicando-se os coeficientes angulares das retas, obtém-se que

$$\left(\frac{b}{a}\right) \cdot \left(\frac{-a}{b}\right) = -1$$

De modo geral, duas retas que passam pela origem e que possuem coeficientes angulares são perpendiculares quando o produto de seus coeficientes angulares é igual a -1 . Esta

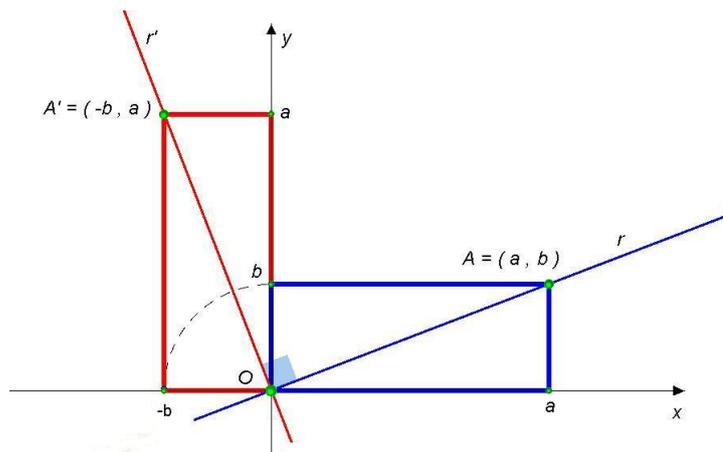


Figura 6.17:

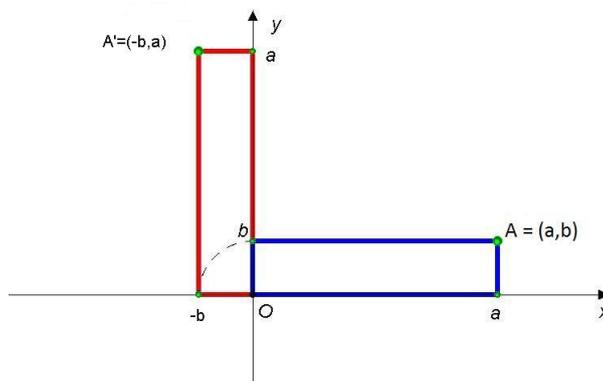


Figura 6.18:

propriedade se generaliza para quaisquer pares de retas perpendiculares que possuam coeficiente angular. De fato, retas que não passam pela origem, possuem retas que lhes são paralelas e que passam pela origem, essas retas são tais que possuem coeficientes angulares iguais e assim, o produto de seus coeficientes angulares deve ser portanto igual a -1 (ver Figura 6.19).

Os pares de retas r e r' e s e s' são perpendiculares e, além disso, s e s' possuem os mesmos coeficientes angulares e as retas r e r' idem. Assim, as retas s e s' são tais que seus coeficientes angulares têm produto igual a -1 . Podemos, então, enunciar o seguinte resultado:

Proposição 6.1.2 *Dadas duas retas $r : y = kx + b$ e $s : y = k'x + b'$, então, r e s são perpendiculares se, e somente se, $k.k' = -1$.*

Vetores perpendiculares e produto interno

Seja \vec{u} um vetor. Após uma rotação de $+90^\circ$ em torno da origem, este vetor gera o vetor \vec{v} (ver Figura 6.20). O vetor \vec{u} foi escolhido com as suas coordenadas positivas para efeito de simplicidade. Cabe observar que uma rotação de -90° poderia também ser aplicada.

Se $\vec{u} = (a, b)$, temos que $\vec{v} = (-b, a)$. Dessa forma, salta aos olhos, o seguinte

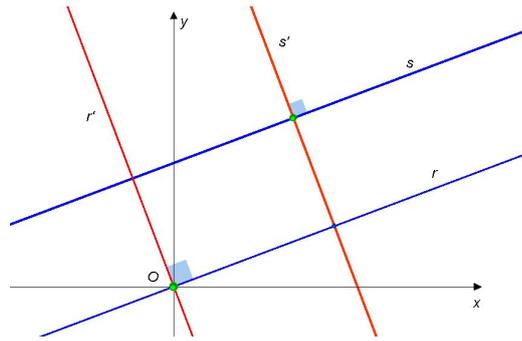


Figura 6.19:

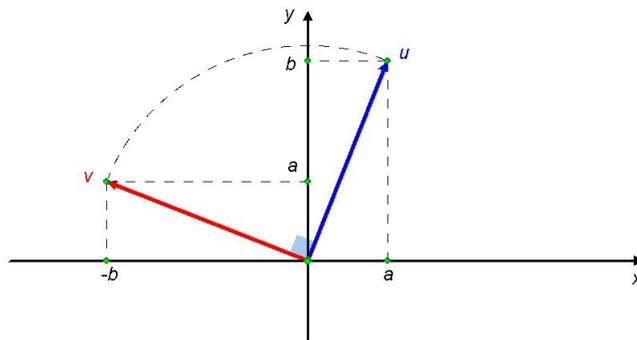


Figura 6.20:

resultado envolvendo suas coordenadas:

$$(a) \cdot (-b) + (b) \cdot (a) = 0$$

Logo, se $\vec{u} = (x, y)$ e $\vec{v} = (x', y')$, então, uma condição suficiente para que os esses vetores sejam perpendiculares é que se tenha $x.x' + y.y' = 0$. Dada a importância desta expressão, nós a chamamos de *produto interno* e a denotamos por $\vec{u} \cdot \vec{v}$. Isto é,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (x, y) \cdot (x', y') = x.x' + y.y'$$

Assim, dois vetores são perpendiculares se seu *produto interno* é zero.

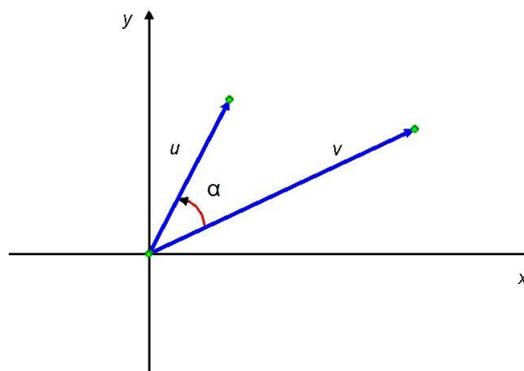


Figura 6.21:

Em geral, nos textos de Ensino Médio, define-se o *produto escalar* de dois vetores \vec{u} e \vec{v} por meio do ângulo que estes formam, usando funções trigonométricas e normas:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cos(\alpha)$$

em que α é o ângulo formado por esses vetores e tal que $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ e se $\vec{u} = (x, y)$, então $|\vec{u}| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Cabe ressaltar que esta definição para o produto escalar, embora útil em suas aplicações na Física, não é adequada para uma primeira apresentação do produto escalar, pois, não dá condições ao aluno, a uma reflexão sobre o porquê da necessidade desta definição. Por outro lado, ela é uma fórmula que pode ser obtida de sua expressão em coordenadas.

Estas definições são equivalentes. Na maioria dos livros, a verificação deste fato passa pelo conhecimento prévio da fórmula de adição de arcos na Trigonometria:

$$\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

Ela não é tarefa fácil de verificar: demanda algum tempo, além da complexidade intrínseca, considerando-se o grau de maturidade dos educandos neste nível do processo Ensino-Aprendizagem. Além disso, a demonstração da fórmula de adição de arcos, como já foi comentado, não é realizada pelo professor na maioria dos casos.

A seguir verificamos a equivalência nas definições do *produto interno*, usando uma metodologia alternativa para encontrar uma forma de evitar a situação acima descrita, de modo que o ganho efetivo nesta nova perspectiva seja a possibilidade de tratar destes assuntos o mais breve possível, além de o fazer de modo criativo e estimulante.

Usando Transformações Geométricas, podemos levar um dos vetores (\vec{v}) a coincidir com o eixo x (ver Figuras 6.21 e 6.22). Assim, suponha que $\vec{u} = (a, b)$ e $\vec{v} = (c, 0)$. Logo, $\vec{u} \cdot \vec{v} = a \cdot c + b \cdot 0 = ac$

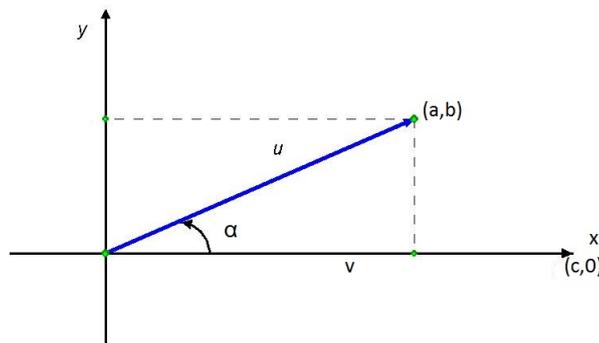


Figura 6.22:

Por conseguinte, como $|\vec{v}| = c$ e, usando o triângulo retângulo da Figura 6.22, temos que $\cos(\alpha) = \frac{a}{|\vec{u}|}$. Dessa forma,

$$|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\alpha) = |\vec{u}| \cdot c \cdot \frac{a}{|\vec{u}|} = ac$$

Mostra-se assim a equivalência destas definições.

Capítulo 7

Funções Trigonômétricas

Neste momento dispomos de ferramentas conceituais que nos permitem definir com propriedade a noção de função trigonométrica de variável real, que no caso do seno, por exemplo, se representa formalmente como $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \ x \mapsto \text{sen}(x)$. Tradicionalmente, as linhas trigonométricas de um ângulo são definidas, em um primeiro estudo, para ângulos medidos em graus, variando de 0° até 90° , ou seja, ângulos com os quais seja possível construir um triângulo retângulo em que tal ângulo é interno a este triângulo. Para isto, fixe um ângulo de medida α . Com base em seus lados constrói-se um triângulo retângulo BAC (ver Figura 7.1).

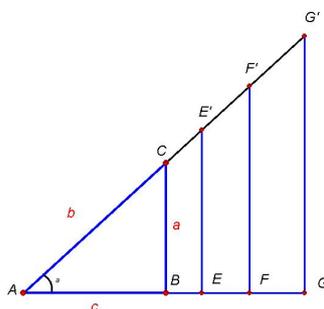


Figura 7.1:

Pelos resultados estudados na homotetia, qualquer outro triângulo retângulo que construirmos com este ângulo deve ter medidas proporcionais ao triângulo BAC . Por exemplo,

$$\frac{a}{c} = \frac{EE'}{AE} = \frac{FF'}{AF} = \frac{GG'}{AG} = \dots$$

Isso garante que a razão entre os lados deste triângulo (por exemplo $\frac{a}{c}$) é uma característica do ângulo α e somente ele a possui. Como tais razões são constantes, podemos dar nomes a elas¹.

¹A palavra seno (ver em [9]) vem de *sinus*. *Sinus* é a tradução latina da palavra árabe Jaib, que significa dobra, bolso ou prega de uma vestimenta. Isto não tem nada a ver com o conceito matemático de seno. Trata-se de uma tradução defeituosa, que infelizmente dura até hoje. A palavra árabe adequada, a que deveria ser traduzida, seria *jiba*, em vez de *jaib*. *Jiba* significa a corda de um arco de caça ou de guerra.

Logo, definimos as seguintes funções trigonométricas de acordo com a Figura 7.2:

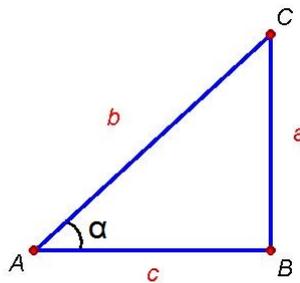


Figura 7.2:

$$\begin{array}{ll}
 \bullet \text{Sen}(\alpha) = \frac{a}{b} & \bullet \text{Csc}(\alpha) = \frac{b}{a} \\
 \bullet \text{Cos}(\alpha) = \frac{c}{b} & \bullet \text{Sec}(\alpha) = \frac{b}{c} \\
 \bullet \text{Tg}(\alpha) = \frac{a}{c} & \bullet \text{Cotg}(\alpha) = \frac{c}{a}
 \end{array}$$

Note que da definição das funções trigonométricas, temos as seguintes relações:

$$\begin{array}{ll}
 \bullet \text{Tg}(\alpha) = \frac{\text{sen}(\alpha)}{\text{cos}(\alpha)} & \bullet \text{Cotg}(\alpha) = \frac{\text{cos}(\alpha)}{\text{sen}(\alpha)} \\
 \bullet \text{sec}(\alpha) = \frac{1}{\text{cos}(\alpha)} & \bullet \text{csc}(\alpha) = \frac{1}{\text{sen}(\alpha)}
 \end{array}$$

Agora, com auxílio de uma circunferência de raio 1, círculo trigonométrico (ver Figura 7.3), podemos estender o domínio das funções trigonométricas para qualquer ângulo, ou melhor, para qualquer número real.

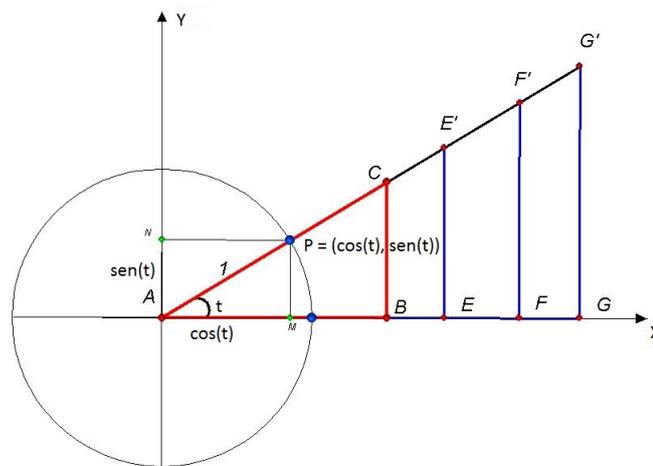


Figura 7.3:

Observe que, dado um ponto P na circunferência de raio 1, P situado no primeiro quadrante, usando as definições das funções trigonométricas no triângulo, temos que suas

coordenadas representam o $\cos(t)$ e o $\sin(t)$, onde t é o ângulo formado pelo eixo x e o raio que liga a origem ao ponto P . Assim, definimos as funções trigonométricas para qualquer ângulo t entre 0° e 360° como as coordenadas do ponto encontrado ao fazer a interseção da circunferência com o semirraio que determina o ângulo t . Esta definição pode ser naturalmente estendida a todo \mathbb{R} , executando rotações no sentido horário e anti-horário no círculo trigonométrico. Este fato pode ser ensinado usando as Transformações Geométricas no círculo trigonométrico, aproveitando para usar as ferramentas em Geometria Dinâmica de reflexão, no Tabulae ou Geogebra.

Assim como as funções seno e cosseno possuem uma interpretação geométrica, a função tangente também tem. Para isto, considere a reta (tg) paralela ao eixo y , que passa pelo ponto $(1,0)$ na circunferência. Agora, dado um ângulo t , tome o ponto Q interseção do semirraio que forma o ângulo t , com dita reta (tg). A tangente representa a coordenada y do ponto Q (ver Figura 7.4).

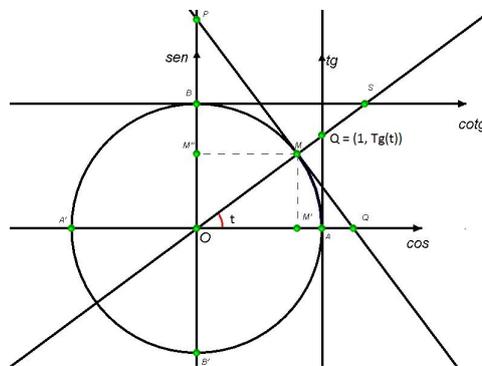


Figura 7.4:

Chamamos a atenção ao fato de que, quando estudamos as funções reais de variável real, o domínio das funções consideradas são todos subconjuntos de números reais, isto é, na notação clássica $f(x)$, o número x é um número real e portanto sem referência a nenhuma unidade. É preciso atentar para o fato de que $\sin(60^\circ)$ não é o mesmo que $\sin(60)$, pois representam funções com domínios diferentes (a reta com medida em graus e a reta usual). Apesar de possuírem características similares, isto causa uma confusão para o educando, caso não seja devidamente elucidada esta grande diferença. Esta situação fica ainda mais delicada quando se trata da confecção do gráfico da função real $f(x)$, de variável real x , que se representa por $f(x) = \sin(x)$.

7.1 O gráfico da função seno

Desejamos esboçar o gráfico da função $f(x) = \sin(x)$. A princípio, sabemos que as funções trigonométricas foram desenvolvidas para um ângulo. Desse modo, qualquer tentativa para confecção de um gráfico que relacione um ângulo e seu seno deverá levar em consideração esta perspectiva. Para o traçado do gráfico de qualquer função, devemos utilizar os eixos horizontal e vertical, os quais servem como representações geométricas dos números reais \mathbb{R} . Embora $\sin(x)$ e $\sin(x^\circ)$ possuam o mesmo significado, não vamos usar os ângulos em graus para fazer o gráfico da função seno. A ideia é usar uma aproximação para o comprimento da circunferência (processo de retificação, dado que π não é construtível com régua e compasso) e mostrar como construir ponto a ponto dito gráfico.

- 1. Traçamos um diâmetro qualquer \overline{AB} , com $AB = 2R$ e uma perpendicular r , por A , ao diâmetro \overline{AB}
- 2. Tomamos AC igual ao diâmetro AB , C em r , isto é, $AC = 2R$
- 3. Dividimos o raio OA em cinco partes iguais e tomamos $CD = \frac{1}{5} \cdot R$ e $DF = \frac{2}{5} \cdot R$, D e F em r
- 4. Tomamos $AE = OD$ e traçamos por E a paralela à reta OF . Obtemos desta forma, o ponto G em r .

O segmento \overline{AG} assim construído representa aproximadamente a retificação da circunferência de diâmetro AB , isto é, $AG \cong 2\pi \cdot R$

- $AC = 2R$
- $CD = \frac{1}{5} \cdot R$
- $DF = \frac{2}{5} \cdot R$

Logo, $AD = 2R + \frac{R}{5} = \frac{11R}{5}$ e $AF = 2R + \frac{3R}{5}$. Mas $AE^2 = OD^2 = OA^2 + AD^2 = \frac{R\sqrt{146}}{5}$
Temos que o triângulo AOF é semelhante ao triângulo AEG , de onde

$$AG = AF \cdot \frac{AE}{AO}$$

Substituindo AF , AE e AO pelos seus valores encontrados anteriormente teremos que $AG = \frac{13\sqrt{146} \cdot R}{25} = \frac{2R \cdot 13\sqrt{146}}{50}$. Efetuando-se os cálculos obtemos o valor de $AG = 2R(3,1415919)$, ou seja, encontramos o valor de AG , que corresponde à retificação da circunferência de diâmetro AB com erro por falta e inferior a um milionésimo do diâmetro.

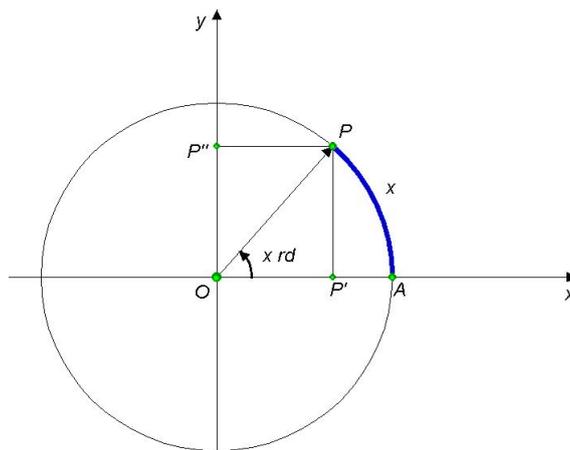


Figura 7.7:

Logo, adotaremos um sistema de coordenadas como mostra a Figura 7.7, em que a unidade de medida no eixo das abscissas é o raio da circunferência trigonométrica $OA = 1$. Com o ângulo x em radianos e o raio da circunferência igual a 1, segue que o arco AP

possui comprimento igual a x . Sabemos que o valor do seno do ângulo de $\text{sen}(x \text{ rad})^2$ corresponde à ordenada do ponto P'' do eixo y , isto é, $\text{sen}(x) = \text{Ord}(P'')$. Para ângulos $x \text{ rad}$, os respectivos senos estão associados à medida do segmento PP' . Para $0 < x < \pi$, isto é, ângulos de primeiro e segundo quadrantes (incluindo o ângulo de $\frac{\pi}{2}$), os valores de seus senos são iguais às medidas dos segmentos PP' (positivos). Para ângulos que variam entre π e 2π , os valores dos senos são negativos e, em valores absolutos, coincidem com a medida do segmento PP' .

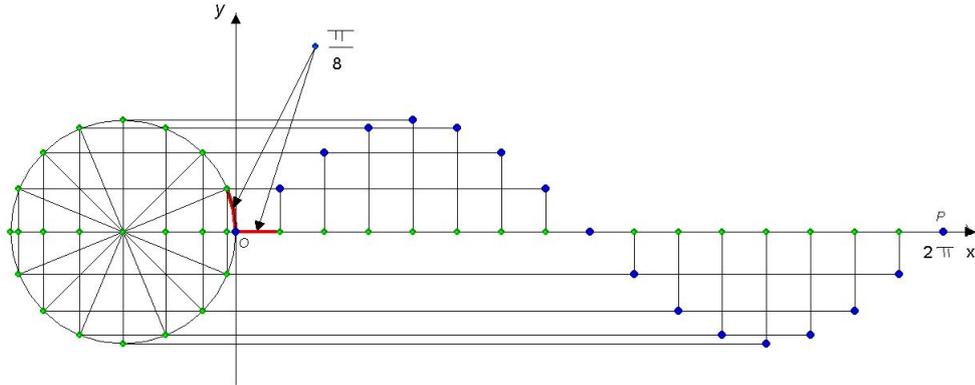


Figura 7.8:

O segmento de reta OP do eixo das abscissas, correspondente à “retificação” da circunferência de raio 1 portanto, de comprimento aproximadamente igual a 2π , foi dividido em 16 partes iguais, assim como a circunferência trigonométrica. Quanto maior o número de subdivisões da circunferência trigonométrica, melhor será a resolução do traçado do gráfico da função. No caso, estamos determinando os valores dos senos dos ângulos de $0, \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{8}, \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{8}, \dots, 2\pi$. Os valores dos respectivos senos foram obtidos na circunferência trigonométrica e transportados, diretamente, para o gráfico. Como se pode ver, os pontos mais robustos fazem parte do gráfico da função seno. Vale lembrar que este procedimento não se dá com a exatidão esperada, já que o número π não é construtível com régua e compasso.

Nos *softwares* em GD, podemos utilizar a transformação de homotetia para o traçado do gráfico da função seno, embora outros programas já executem diretamente o traçado destas funções sem a preocupação com os elementos essenciais para seu desenho. A importância de se realizar esta construção via homotetia ajuda na apropriação, por parte do educando, de elementos conceituais de extrema relevância na etapa em que se encontram no processo Ensino-aprendizagem. A respeito da construção via homotetia, ela nos permite optar por duas visualizações: a primeira utiliza a ferramenta rastro de objetos; este procedimento permite a construção ponto a ponto com o arrastar do *mouse* sobre um ponto determinado. A segunda faz uso do recurso (*Locus*) do Lugar Geométrico, que traça a curva integralmente. A confecção minuciosa do gráfico da senóide será realizada a seguir porém SEM a utilização dos recursos RASTRO e LOCUS

²Pelo fato de a função seno poder ser desenvolvida em função do comprimento do arco x na circunferência, as funções trigonométricas em geral são denominadas de funções circulares. É provável que a divisão da circunferência em 360° tenha se originado com a tabela de cordas de Hiparco (ver em [21])

Construção do Gráfico da função seno no TABULAE

- passo 1** Utilizando o ícone circunferência, desenha-se circunferência tangente ao eixo y em um ponto O desse eixo como na figura.
- passo 2** indo ao ícone “Criar segmento”, marcar-se o segmento OP de comprimento igual ao segmento MB da circunferência retificada.
- passo 3** Ir ao ícone “divisão de segmentos” em várias partes, escolhe-se 16 divisões para a divisão deste segmento.
- passo 4** Divide-se a circunferência do item 1 em 16 partes iguais. Usa-se as ferramentas de retas perpendiculares para construir um polígono de 16 lados. Parte-se de um quadrado e dobra-se o número de lados.
- passo 5** Usa-se a ferramenta “traçar paralelas” e desenha-se retas paralelas ao eixo x , passando pelos 16 pontos de divisão da circunferência.
- passo 6** Com a mesma ferramenta do item anterior, traçar paralelas ao eixo y passando agora pelos 16 pontos de divisão do segmento OP .
- passo 7** Usa-se a ferramenta “ponto de interseção” para determinar os pontos de interseção das retas horizontais e verticais.

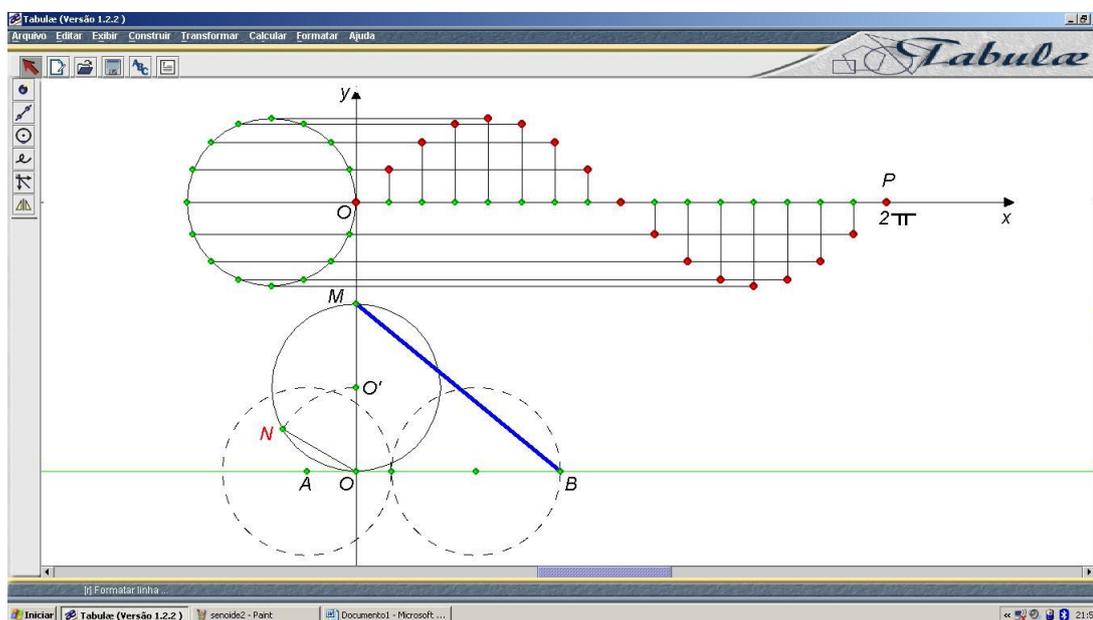


Figura 7.9:

Capítulo 8

Atividades e Comentários

Em uma primeira etapa, foram realizadas aulas para duas turmas de segundo período (equivalente à primeira série do Ensino Médio) do Instituto Federal do Rio de Janeiro, seguindo a proposta metodológica contida no presente trabalho. Em uma segunda etapa elaborou-se um resumo em *Power-Point* do presente trabalho. Este resumo foi apresentado a um grupo de professores do Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro (IFRJ) no *campus* Paracambi, Município do Rio de Janeiro. Esse grupo de professores, contou com a presença da coordenadora do curso de Licenciatura em Matemática daquela instituição de Ensino. Todos atuam no curso de Licenciatura em Matemática do referido *campus*. O trabalho foi também apresentado na Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro para alunos do curso de Licenciatura em Matemática daquela instituição. O trabalho foi ainda apresentado na UFF para alunos do curso de Mestrado do programa do PROFMAT, Turma 2014. A apresentação em *Power-Point* teve um tempo de duração de aproximadamente 40 minutos. Após a apresentação, seguiu-se um debate entre os presentes. Nesta parte da apresentação foi possível uma ampla discussão acerca da proposta metodológica, bem como o aprofundamento de alguns temas associados. A apresentação total durou o tempo de 1h 30 min. Ao final dos trabalhos foi solicitado aos presentes que descrevessem suas considerações sobre o trabalho apresentado. Alguns professores e alunos fizeram suas considerações presencialmente e em folhas de papel almaço, enquanto outros eletronicamente. Algumas dessas considerações foram selecionadas e estão disponibilizadas no anexo deste trabalho. Este capítulo foi dividido em duas partes: na primeira, é apresentada uma atividade que envolve o número π e sua relação com a natureza, a qual serve como matéria motivacional, para o ensino dos conteúdos tratados ao longo do trabalho; na segunda, fazemos um breve resumo dos resultados obtidos ao desenvolver as atividades.

8.1 π na natureza

Esta importante e gratificante parte do trabalho teve por finalidade a apresentação de um estudo acerca da sinuosidade de rios que desaguam no mar e o número π , apontada por Eistein.

Definição 8.1.1 *A sinuosidade de um rio é o quociente entre o comprimento de sua curva e a medida do segmento formado pela sua nascente e seu deságue.*

Segundo o livro intitulado “O ÚLTIMO TEOREMA DE FERMAT” (consultar [25]), Albert Eistein afirmou que:

O valor da sinuosidade dos rios que deságuam no mar é aproximadamente π .

Para uma verificação deste fato, tive a colaboração do Engenheiro Cartógrafo do Instituto Militar de Engenharia, Jorge Ricardo Muniz Kwasinski Filho, que me auxiliou na utilização das ferramentas modernas estudadas nas disciplinas de Geoprocessamento e Geodésia, que permitiram realizar medições geográficas em programas sofisticados, que mostram a pujança das ideias da geometria elementar, associada aos conceitos da Física que se destinam ao estudo da descrição de nosso planeta Terra.

Como vimos, o número π foi derivado, originalmente, da geometria dos círculos; no entanto, ele vive reaparecendo em uma grande variedade de acontecimentos científicos. No caso da proporção entre os rios, a aparição de π é o resultado de uma batalha travada entre a ordem e o caos. Einstein foi o primeiro a sugerir que os rios possuem uma tendência a um caminho mais serpenteante porque uma curva menor vai produzir correntes mais rápidas nas margens opostas, que por sua vez produzirão uma erosão maior e uma curva mais pronunciada. Quanto mais fechada a curva, mais rápidas serão as correntezas na margem oposta, maior a erosão e mais o rio irá serpentear. Contudo, existe um processo que irá se opor ao caos. Os meandros farão o rio se voltar sobre si mesmo, anulando-se. O rio vai se tornar mais reto, e o meandro será deixado para o lado, formando um lago. O equilíbrio entre estes fatores opostos leva a uma relação média de entre o comprimento real e a distância em linha reta da nascente até a foz. A proporção de π é mais comumente encontrada entre rios que fluem sobre planícies, como as que existem no Brasil e na tundra siberiana (ver [25])

Esta prática exige o domínio de conceitos básicos das disciplinas Cartografia e Geoprocessamento bem como a utilização de alguns softwares gratuitos da área, como o Google Earth e o Quantum Gis (versão 1.8 -Lisboa);

1º Passo: *Download* dos insumos básicos: Arquivos formato .shp (*shapefile*). Dos dados das bacias hidrográficas brasileiras, pela Agência Nacional de Águas - ANA: [30] e dos limites Municipais (Estados e Municípios): [31]

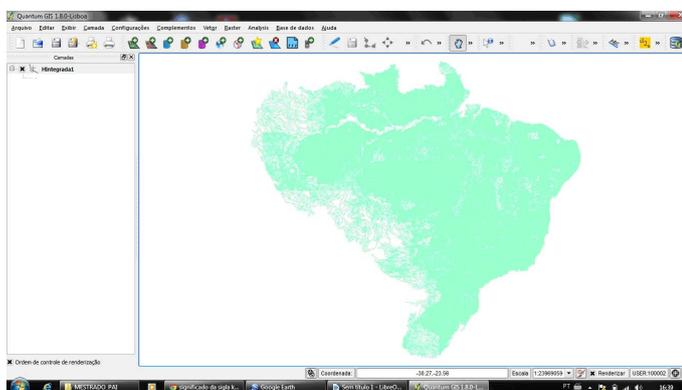


Figura 8.1: Arquivo de bacias hidrográficas da ANA aberto no QGIS

2º Passo: Foi escolhido um importante manancial da cidade do Rio de Janeiro situado na área da Baixada Fluminense no estado do Rio de Janeiro, conhecido como Rio Guandu.

3º Passo: Mudança de projeção cartográfica do arquivo de Bacias Hidrográficas disponibilizado no sistema de coordenadas geográficas SAD69 (*South American Datum 1969*) para o sistema de coordenadas geográficas WGS84 (*World Geodetic System-1984*) por meio do software Quantum GIS. Tal etapa permite compatibilizar os sistemas de referência geográficos a serem utilizados no experimento.

4º Passo: Transformação do arquivo de hidrografia selecionado no formato .shp para o formato .kml (*Keyhole Markup Language*) compatível com programa *Google Earth*.

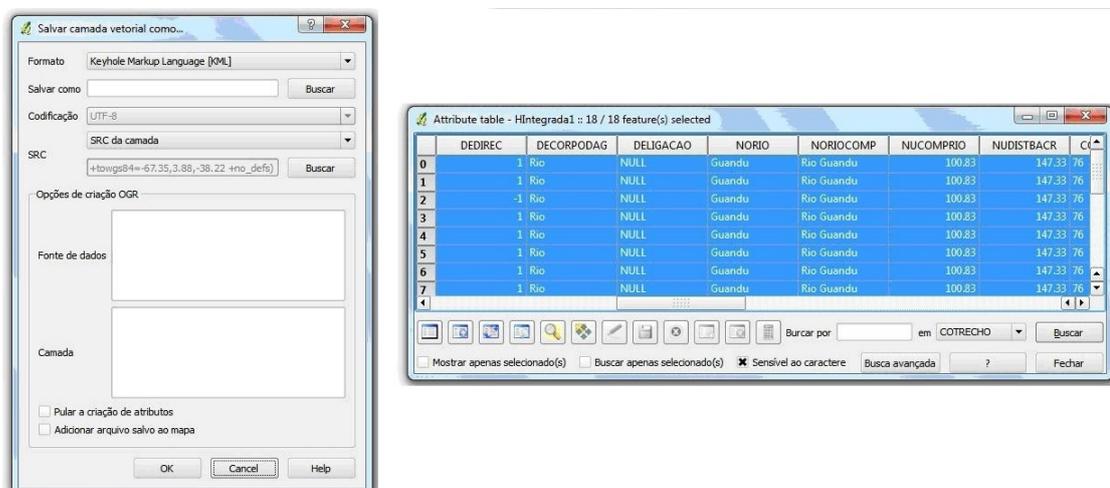


Figura 8.2: Exportação do de interesse no QGIS, para o formato kml.

5º Passo: Edição vetorial do Curso d’água no *Google Earth*. Nesta etapa utilizando-se os recursos visuais e de edição cartográfica proporcionados pelo *software* citado, foi realizada a correção e adequação do curso do rio fornecido no arquivo original para um novo trajeto compatível com as imagens de satélite disponibilizadas. Tal medida se justifica pela diferença de detalhamento cartográfico (escala) entre os dois produtos.

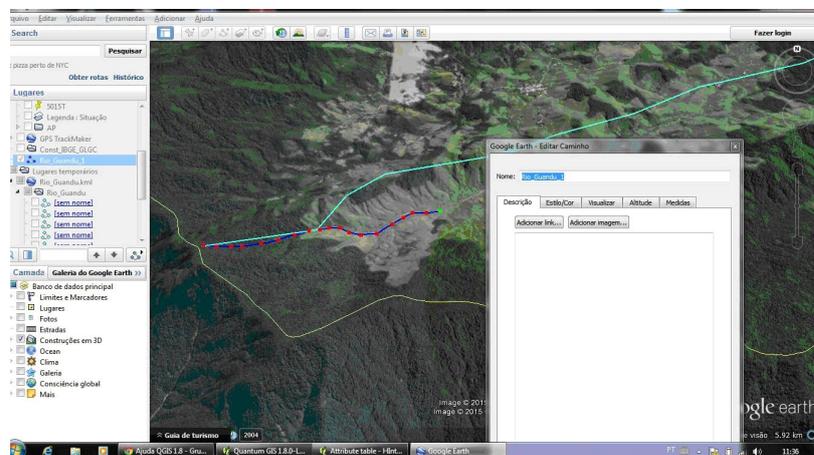


Figura 8.3: Edição vetorial do arquivo “Rio Guandu” obtido na ANA.

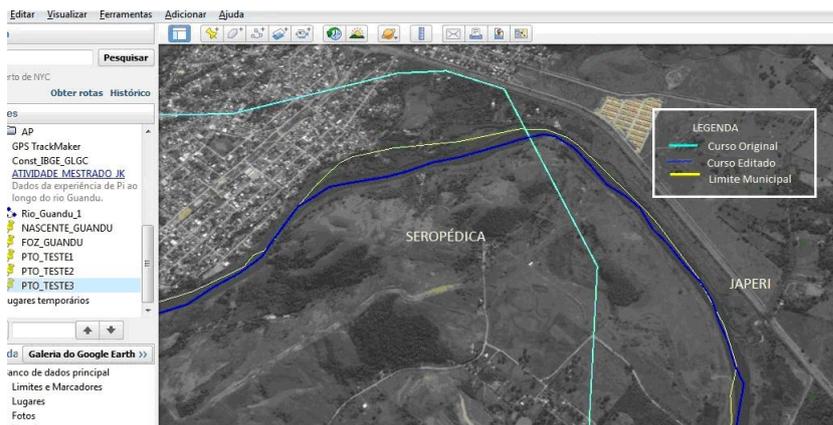


Figura 8.4: Detalhamento das diferenças encontradas entre o curso da água no arquivo original (linha na cor azul ciano) em relação ao curso do rio segundo as imagens de satélite (que aparecem na cor azul escura).

6º Passo: Localização dos principais pontos de interesse para o experimento: nascente do rio, foz e pontos de teste. Foram selecionados três pontos distribuídos de maneira homogênea ao longo do trecho do rio nomeados como "*PTO_TESTE1*", "*PTO_TESTE2*" e "*PTO_TESTE3*". Tais marcações tiveram como objetivo registrar de maneira expedita o comportamento da razão entre a distância cartográfica entre dois pontos de interesse percorrida sobre rio e em linha reta. A Tabela 1 sintetiza os testes realizados:

Trecho Observado	Distância em Linha Reto (Km) - A	Distância sobre o Rio (Km) - B	Razão obtida(B/A)
NASCENTE-FOZ	33,03	113	3,42
NASCENTE-PTO_TESTE1	19,11	25	1,31
NASCENTE-PTO_TESTE2	47,32	61	1,29
NASCENTE-PTO_TESTE3	49,13	91,6	1,86
PTO_TESTE1-PTO_TESTE2	27,63	36	1,3
PTO_TESTE1-PTO_TESTE3	33	66,6	2,02
PTO_TESTE2-PTO_TESTE3	22	30,6	1,39
PTO_TESTE1_FOZ	23,56	88	3,74
PTO_TESTE2_FOZ	31,07	52	1,67
PTO_TESTE3_FOZ	18,91	21,4	1,13

Figura 8.5:

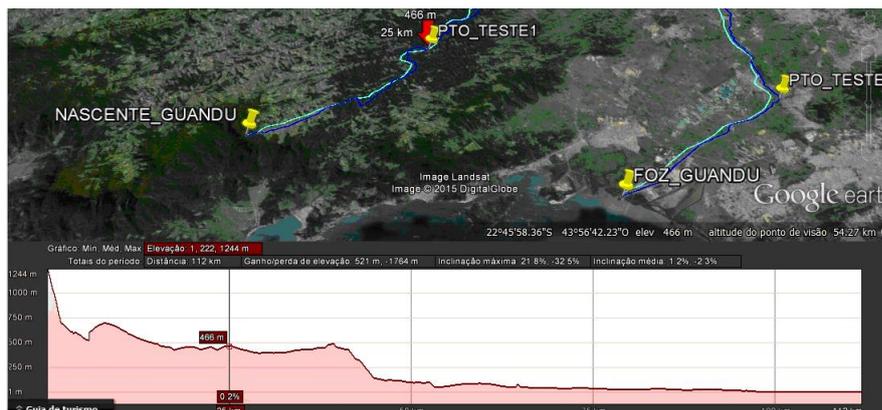


Figura 8.6: Visualização do Perfil do Rio e da distância sobre a lâmina d'água entre dois pontos selecionados.

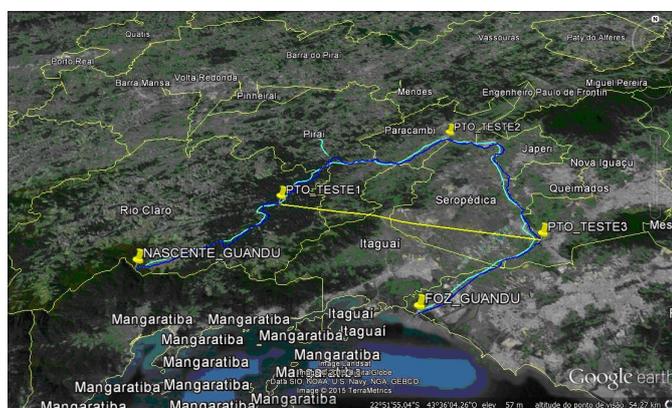


Figura 8.7: Medição da distância cartográfica entre os pontos teste 1 e 3.

8.2 Considerações finais

Nas apresentações do presente trabalho no Instituto Federal do Rio de Janeiro (IFRJ), na Universidade Federal Fluminense (UFF) e na Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (UFRRJ), ficou patente que a abordagem escolhida para tratamento dos assuntos constantes no currículo do Ensino Médio com base nas Transformações Geométricas e o uso dos *softwares* de Geometria Dinâmica se configuram em uma alternativa viável para sua aplicação efetiva em sala de aula. Com base nos comentários dos alunos e professores, observamos que o trabalho deve ter continuidade, sendo complementado com a inserção de atividades que privilegiem os aspectos gráficos em exercícios, confecção de material apropriado, oficinas e cursos de formação continuada de professores. Foi possível também constatar, pela opinião das pessoas, que o presente trabalho alcançou os objetivos pretendidos, a saber: contribuir efetivamente para a elucidação de conceitos abstratos, quase sempre de difícil compreensão para um aluno de Ensino Médio, associando-os a uma linguagem acessível e natural como o são as idéias de movimentos rígidos explorados no estudo das Transformações Geométricas. O trabalho, na visão de alguns participantes, contribui para cobrir uma lacuna que se encontra nos livros didáticos atuais, que são extremamente reducionistas, não levando em consideração as necessidades do educando. Um dos professores relata especificamente que a ideia de se apresentar o perpendicularismo entre retas é um exemplo claro desta desconexão pedagógica frequente nos textos

didáticos. Outro professor destaca que vai passar a utilizar em suas aulas de Geometria Analítica, a metodologia proposta no presente trabalho. A respeito do tratamento dispensado ao número π , um professor chegou a comentar sobre a originalidade da apresentação que mostra a utilidade da homotetia para seu entendimento. Sobre a relação do número π com o curso dos rios foi destacado a importância deste resultado, de cunho interdisciplinar, como uma atividade que deveria ser mais explorada na medida em que suscita a possibilidade de uma integração entre áreas distintas da Matemática, como a Física e a Geografia. Foi sugerida uma participação na semana científica do *Campus* Paracambi do IFRJ para apresentação da atividade sobre a sinuosidade de rios. Sobre a utilização de recurso didático de apoio, o TABULAE, os alunos manifestaram grata satisfação em sentir, na apresentação do trabalho, que a tecnologia pode e deve ser utilizada em seu favor. Em vista do que foi exposto, temos como objetivo para projetos futuros: elaborar material didático direcionado aos alunos do Ensino Médio e também para os licenciandos de Matemática. Essas atividades devem envolver o Desenho Geométrico e as Transformações Geométricas. Um desses assuntos, para citar um exemplo, pode ser o estudo das Cônicas (Elipse Parábola e Hipérbole), adequando-os aos níveis de ensino para os quais serão direcionados e sempre com a utilização do ferramental tecnológico como o TABULAE.

Referências Bibliográficas

- [1] AABOE, Asger; *Episódios da História Antiga da Matemática*. Editora Sociedade Brasileira de Matemática, 2002.
- [2] ALVARENGA, Beatriz, Antonio Máximo; *Física Volume 2*. Editora Scipione, 2007.
- [3] ATHAYDE, Virgílio Pinheiro; *Geometrografia II*. Editora Ao Livro Técnico SA, 1971.
- [4] AVILA, Geraldo; *Euclides, Geometria e Fundamentos*. Editora RPM n° 45, pg 2, 1985.
- [5] AVILA, Geraldo; *Eudoxo, Dedekind, números reais e Ensino de Matemática*. Editora RPM n° 57, pg 5, 1985.
- [6] AVILA, Geraldo; *Geometria e Astronomia*. Editora Revista do Professor de Matemática n° 13, 1988.
- [7] AVILA, Geraldo; *Legendre e o Postulado das Paralelas*. Editora RPM 22 ,1992.
- [8] BELFORT, Elizabeth; *Geometria Dinâmica: Aplicando Informática no Ensino* Editora Anais XII semana de matemática, Universidade Estadual de Maringá, pg 32, 2000.
- [9] BOYER, Carl; Tradução Elza F. Gomide *História da Matemática*. Editora Edgar Blhucer, LTDA 1974.
- [10] CARVALHO, Raphael Alcaires; *Descartes, Barrow e Fermat: Métodos das Tangentes*. Editora, RPM n°75, pg 34, 2011.
- [11] COURANT, Richard; Herbert, Robbins; *O que é Matemática*. Editora Ciência Moderna, 2000.
- [12] COXETER. H.S.M; *Introduion to Geometry, 2a ed. New York*. Editora Editora Jonh Wiley and Sons, 1967.
- [13] EVES, Howard; Tradução Hygino H. Domingues. *Introdução à história da Matemática*. Editora Editora da Unicamp, 2004.
- [14] FRANCIELY, Amistraro; *Funções Trigonométricas: $\text{sen}x$, $\text{cos}x$ e $\text{tg}x$. Estudo de proposições de abordagem no Ensino Médio*. Editora Universidade federal de Santa catarina, 2004.
- [15] GIONCO, Affonso Rocha; *Curso de Desenho Geométrico*. Editora Nobel, 1997.

- [16] GONÇALVES, Zózimo Menna; *Geometria Analítica com Tratamento vetorial*. Editora Científica, 1969.
- [17] HOZUMI, Vânia Maria R H; *O software TABULAE no CAP da UFRJ*. Editora Revista da Pesquisa, Ensino e Extensão do CAP-UFRJ, 2009.
- [18] IEZZI, Gelson; Osvaldo, Dolci; David, Degenszajn; Roberto, Périgo; Nilze, Almeida; *Matemática, Ciência e Aplicações, PNLD*. Editora Atual , 2004.
- [19] LIMA, Elon Lages; *Matemática e Ensino*. Editora SBM, 2003.
- [20] LIMA, Elon Lages; *O que é o número π* . Editora RPM nº6, pg 18, 1985.
- [21] LIMA, Elon Lages; *Trigonometria e Números Complexos*. Editora SBM Coleção do Professor de Matemática, 1992.
- [22] NETO, Sérgio Lima; *Tópicos de Geometria Elementar V-2 Geometria Euclidiana Plana*. Editora SBM Coleção do Professor de Matemática, 2012.
- [23] PAIVA, Manoel; *Matemática 1, PNLD*. Editora Moderna, 2013.
- [24] PCN, Parâmetros Curriculares Nacionais, Ensino Médio; *Conhecimentos de Matemática*. Editora Ministério da Educação, Secretaria de Educação Média e Tecnológica, 1999.
- [25] SING, Simon; *O Último Teorema de Fermat*. Editora RECORD, 2008.
- [26] SOUZA, André Lopes C; *Ensino das Transformações Geométricas Tese de Mestrado profmat 2014*. Editora Instituto de Matemática e Estatística da UFF.
- [27] SPIVAK, Michael; *Cálculo Infinitesimal*. Editora Reverté, S.A , segunda edição, 1992.
- [28] YOUSSEF, Antônio Nicolau; Elizabeth, Soares; Vicente Paz F; *Matemática, PNLD*. Editora Scipione, 2008.
- [29] WAGNER, Eduardo; Morgado, Augusto C; *Geometria II*. Editora Livraria Francisco Alves Editora, 1974.
- [30] site da agência Nacional de Águas.
<http://www.ana.gov.br/bibliotecavirtual/login.asp?urlRedir=/bibliotecavirtual/solicitacaoBaseDados.asp>
- [31] site dos limites municipais.
<http://www.visualizador.inde.gov.br/>

Anexos

Impressões sobre a apresentação do Prof. Jorge Kwasinski

Conforme previamente combinado, no dia 18 de agosto de 2015, no laboratório de Matemática do IFRJ-Paracambi, diante da Profª Margareth Mara; Profª Bianca Coloneze; Prof. Poncio Mineiro e de discentes do curso de Licenciatura em Matemática (Jefferson Araújo; Ednaid Faria; Laiane Camões e Karina Nascimento), foi feita a apresentação do Prof. Jorge Kwasinski sobre transformações geométricas. Cabe-me, conforme prometido ao Prof. Jorge, algumas impressões.

Confesso que nutro grande simpatia pelas ideias demonstradas pelo Prof. Jorge, durante sua apresentação. Elas refletem inquietudes pertinentes à prática docente em Matemática que, quase sempre, são omitidas pela maioria dos professores que atuam no Ensino Médio. Para muito além do aspecto matemático, tal trabalho nos leva imediatamente à reflexão entre o conflito existente (e quase sempre dissimulado) entre verdades matemáticas e a prática destes professores em sala de aula. Ora, esperar de um aluno a percepção (ou compreensão) de um certo conteúdo matemático a partir da mera aceitação (ou imposição!) de "teoremas previamente sabidos" sem uma devida justificativa, significa - guardadas as devidas proporções - reduzir o ensino de Matemática a uma mera questão de fé! Ao contrário disso, o que fora apresentado pelo Prof. Jorge revela um excelente equilíbrio entre intuição e rigor. Achei muito original a condução que fora feita por ele ao apresentar o número π e sua relação com o curso do rio Guandu; sua nascente e foz. Sobre perpendicularismo de retas, confesso que não vi (assim como todos os presentes) nada mais natural para associar rotações no plano. Há, no entanto, algo que pode ser pensado e, creio eu, melhorado na intenção de uma difusão maior dessas ideias: como fazer para que a médio prazo tais práticas possam efetivamente ocorrer em turmas de Ensino Médio? Humildemente, dentro de minhas limitações, creio que uma saída para se buscar tal efetividade seja o trabalho contínuo junto a futuros professores. Inserir tais práticas em cursos de licenciatura em Matemática seria um bom começo. Aos colegas que já atuam em salas de aula, julgo ser muito útil levá-los a uma reflexão sobre suas práticas tal qual é feito hoje nos programas de aperfeiçoamento de professores do Ensino Médio. Sugeri, após a apresentação do Prof. Jorge, que tal tema pudesse ter espaço em sua dissertação, afinal de contas, o ProImat é uma das grandes conquistas para todos nós que militamos em Matemática na Escola Básica. É o perfeito espaço para tais discussões e ações concretas.

Desejo muita boa sorte ao Prof. Jorge. Seu intuito em levantar tais questionamentos é muito positivo e revela um aspecto fundamental para quem é professor: temos, permanentemente, que nos reinventar! Dessa forma, nossa passagem pela vida torna-se eterna, afinal de contas, sempre estaremos aqui presentes como produto de nossas ações. E, através de nossa postura profissional, conseguiremos o respeito e os ecos de uma mudança efetiva para um Brasil melhor.

Prof. Poncio Mineiro - IFRJ (Campus Paracambi)

Paracambi, 18 de agosto de 2015.

Relato sobre a Proposta apresentada pelo Prof. Jorge Ricardo Muniz, abordando o tema "Aplicações das transformações geométricas no ensino médio".

A proposta apresentada mostra principalmente uma estratégia simples e compreensível dos assuntos abordados, que normalmente são inseridos de maneira muito formal. E que por este motivo, torna-se pouco compreendido dentro do universo de alunos do ensino médio.

O tratamento exposto pelo professor é uma proposta que adequa o rigor matemático dos conceitos em questão, ~~atrelado~~ ^{atrelado} a conhecimentos adquiridos nas séries finais do ensino fundamental como por exemplo, o Teorema de Tales e o estudo das proporções.

①

Figura 8.9:

Em suma, acredito que a proposta apresentada represente uma boa possibilidade do processo de aprendizagem das transformações geométricas.

Margarite Mara Donia da Silva
Professora e coordenadora do Curso LM,
Matr. Siage nº 1545665.

2

Figura 8.10:

Paracambi, 25 de Agosto de 2015.

Relato

Prof. Bianca de Mocha e Silva Colonze

MAT. 2675368

O trabalho apresentado pelo professor Sergei Kuniz, intitulado por "Aplicações das Transformações Geométricas no Ensino Médio" traz uma abordagem diferenciada, e muito interessante sobre como utilizar translações, rotações e homotecias, em alguns conceitos trabalhados no ensino médio.

A maioria dos livros didáticos abordam a demonstração da equação da reta de forma formal, fazendo uso do coeficiente angular sendo pouco compreendida pela maioria dos alunos deste nível de ensino.

A nova abordagem trazida pelo professor é uma ótima alternativa na tentativa de promover o real entendimento da equação da reta de forma clara e direta.

Além disso, o método do professor Sergei consegue mostrar o motivo de retas perpendiculares serem do tipo " $y = \frac{a}{b}x$ " e " $y = -\frac{b}{a}x$ ", ficando claro que o produto dos seus coeficientes $\frac{a}{b}$ e $(-\frac{b}{a})$ será sempre "-1". (o que normalmente é pouco ou nada explicado nos métodos tradicionais trazidos pelos livros didáticos)

Figura 8.11:

Buscarei fazer um planejamento para colocar em teste uma abordagem numa próxima oportunidade em licitação. Já o conteúdo, e a auditoria que o mesmo também deve ser levado à cursos de formação de professores e formação continuada.

Rildo de Souza

Figura 8.12:

Considero o trabalho muito bom, especialmente para nós, alunos da licenciatura. Com o avanço da tecnologia, é sempre bom usar ferramentas interessante à nosso favor.

Espero que o trabalho, a ideia seja alcançada por muitos, seja em apresentações práticas, aulas, congressos ou afins.

Jefferson J. Santos

JEFFERSON A. SANTOS - ALUNO DA
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA - UFRJ

Figura 8.13: