SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

NOÇÕES DE CÁLCULO I NO ENSINO MÉDIO: UMA PROPOSTA DE INTERVENÇÃO CURRICULAR.

Flávio Martins Machado

Orientador: Prof. Dr. Renato Fabrício Costa Lobato

BELÉM
Abril de 2016

Flávio Martins Machado

NOÇÕES DE CÁLCULO I NO ENSINO MÉDIO: UMA PROPOSTA DE INTERVENÇÃO CURRICULAR.

Dissertação submetida à Coordenação Acadêmica do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional na Universidade Federal do Pará, oferecido em associação com a Sociedade Brasileira de Matemática, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Renato Fabrício Costa Lobato

BELÉM
Abril de 2016

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da UFPA

Machado, Flávio Martins, 1982-
Noções de cálculo I no ensino médio: uma proposta de intervenção curricular / Flávio Martins Machado. - 2016.

Orientador: Renato Fabrício Costa Lobato.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Programa de Pós-Graduação em Matemática (Mestrado Profissional), Belém, 2016.

1. Cálculo diferencial-Metodologia-Estudo e ensino (Ensino médio). 2. Cálculo integral-Metodologia-Estudo e ensino (Ensino médio). 3. Geogebra-Software. 4. Tecnologia educacional-Matemática. 5. Tecnologia-Matemática-Conhecimentos e aprendizagem. I. Título.

CDD 22. ed. 515.3

Flávio Martins Machado

NOÇÕES DE CÁLCULO I NO ENSINO MÉDIO: UMA PROPOSTA DE INTERVENÇÃO CURRICULAR.

Dissertação submetida à Coordenação Acadêmica do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional na Universidade Federal do Pará, oferecido em associação com a Sociedade Brasileira de Matemática, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Aprovada em 01 de Abril de 2016 por:

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Renato Fabrício Costa Lobato
PROFMAT / UFPA (**Orientador**)

Prof. Dr. Anderson David de Souza Campelo
PROFMAT / UFPA – Membro Interno

Prof. Dr. José Augusto Nunes Fernandes
Faculdade de Matemática / UFPA – Membro Externo

Prof. Dr. João Furtado de Souza
Faculdade de Física / MNPEF / UFPA – Membro Externo

BELÉM
Abril de 2016

"La matematica è l'alfabeto con cui Dio ha scritto l'universo."

"A matemática é o alfabeto com o qual Deus escreveu o universo."

Galileu Galilei

Agradecimentos

✓A Deus e N. S. Nazaré pela oportunidade de fazer esse curso de Mestrado.

✓Ao meu sempre querido e amado tio Ivo, meu segundo pai, que nos deixou em 20/11/2015, dia da nossa última aula deste curso. Obrigado por tudo, meu tio, pelo que o senhor fez pela nossa família. Saudades eternas.

✓Aos meus pais e irmãs pela família maravilhosa que formamos.

✓À minha esposa Erika Machado que tem sido uma companheira e amiga sem igual, compreendendo a importância desse curso na minha carreira profissional.

✓A meu filho Felipe Machado que nasceu no dia 11/11/2015, quase na reta final do curso e trouxe muita luz, motivação e uma missão ímpar na vida: tornar-me um pai que seja um exemplo para seu filho.

✓A todos os amigos(as) da turma PROFMAT 2014 da UFPA, pelo sentimento mútuo de ajuda que nos conduziu ao final desse curso. Formamos uma verdadeira família.

✓À Universidade Federal do Pará.

✓A todo corpo docente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional − PROFMAT, por me proporcionarem um aprendizado de qualidade.

✓Aos professores Dr. **Renato Fabrício Costa Lobato** e Dr. **José Augusto Nunes Fernandes**, pela orientação nesse trabalho e por toda contribuição para realização do mesmo.

✓Enfim, a todos que de alguma forma contribuíram nessa caminhada do mestrado.

RESUMO

Este trabalho, voltado para professores do Ensino Médio, ocupa-se em propor uma metodologia para o ensino de noções de Cálculo Diferencial e Integral no Ensino Médio, pois esse tema, atualmente estudado em diversos cursos no Ensino Superior, apresenta altíssimos índices de reprovação, o que sugere um abismo existente entre a matemática trabalhada na Educação Básica e a do Ensino Superior, além de trazer grandes vantagens aos alunos na assimilação de conceitos matemáticos e físicos. Nesse sentido, este trabalho busca abordar ainda no Ensino Médio noções de limites, derivadas e integrais de maneira intuitiva e livre do rigor matemático excessivo que os livros de Cálculo I adotados na Universidade tratam o tema. A metodologia baseia-se em experiências que apresentaram resultados bastante positivos na prática docente, tais como: abordagem de tópicos da história da matemática, uso de recursos tecnológicos e mapas conceituais como ferramentas pedagógicas auxiliares.

Palavras-chave: Cálculo I. Ensino Médio. Função. Geogebra. Gráfico. Professor.

ABSTRACT

This paper, aimed at high school teachers, mind to propose a methodology for teaching differential calculus notions and Integral in high school, because this topic is currently studied in several courses in higher education, has extremely high failure rates, suggesting a gap between mathematics worked in high school and university, and bring great advantages to students in the assimilation of mathematical and physical concepts. In this sense, this study also seeks to tackle in high school notions of limits, derivatives and integrals of intuitive and free way of excessive mathematical severity that Calculus I books adopted at the University address the topic. The methodology is based on experiences that showed very positive results in teaching practice, such as topical approach to the history of mathematics, use of technological resources and conceptual maps as auxiliary teaching tools.

keywords: Calculus I. High School. Function. Geogebra. Graphic. Teacher.

Lista de Figuras

Sumário

INTRODUÇÃO

1 – Considerações iniciais e motivações

O presente trabalho, voltado para professores da educação básica, em especial do Ensino Médio, ocupa-se em propor uma metodologia para o ensino das noções de cálculo I na última etapa da Educação Básica. É comum ouvir reclamações dos estudantes de todos os níveis sobre a Matemática, em especial sobre o quão distante da realidade ela é ou parece ser. Isso se deve muito à maneira em que essa importante ciência é mostrada aos alunos e também a estruturação do currículo, que em determinados momentos, por se apresentar desconectado, não contribui com a aprendizagem e estímulo ao aluno, que ao sair da escola, não se encontra devidamente preparado para continuar os estudos e evoluir enquanto pessoa e profissionalmente. A Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB) em seu artigo 22, afirma que essa etapa de conclusão da Educação Básica tem de garantir as aprendizagens necessárias ao desenvolvimento de conhecimentos, atitudes e práticas sociais e de trabalho. Isso significa que o jovem, ao se formar, poderá ingressar na vida adulta de forma digna seja qual for o caminho que quiser seguir.

Trabalho com alunos de Ensino Médio desde 2001, quando ingressei no curso de Licenciatura Plena em Matemática. Em uma das muitas conversas que tive com grupo de alunos (2^o ano) da rede pública, após a aula, uma chamou-me muito a atenção. Um aluno disse-me, e teve o apoio dos demais, que o Ensino Médio não fazia sentido para ele, simplesmente porque não sabia o motivo de estudar tantos conteúdos. Nesse momento perguntei a ele se havia entendido a aula do dia (geometria espacial - cones). Respondeu-me o discente que entendera muito pouco, porque falei de alguns tópicos de geometria plana, que ele havia estudado no 7^o e 8^o ano do Ensino Fundamental. Além disso, eu havia apenas apresentado várias fórmulas para calcular áreas e volume do cone.

O relato desse aluno me marcou bastante. Foi quando comecei a perceber a desconexão de vários conteúdos ensinados em Matemática. Desde aí, passei a dar mais atenção às opiniões de alunos e a quebrar um pouco a imagem de que o alunado de hoje não se interessa pelo estudo.

Após cursar a disciplina Cálculo I na universidade fiquei encantado pela abrangência da disciplina, já que além de ser aplicada em várias áreas do conhecimento, oferece respostas para vários questionamentos que os livros didáticos do Ensino Médio omitem. A respeito da abrangência e importância do estudo de Cálculo, Lopes (1999, p.125) faz uma reflexão afirmando que:

> O Cálculo Diferencial e Integral permite, nas mais variadas áreas do conhecimento, como Engenharia, Química, Física, Biologia, Economia, Computação, Ciências Sociais, Ciências da Terra, etc, a análise sistemática de modelos que permitem prever, calcular, otimizar, medir, analisar o desempenho e performance de experiências, estimar, proceder análises estatísticas e ainda desenvolver padrões de eficiência que beneficiam o desenvolvimento social, econômico, humanístico dos diversos países do mundo.

A partir dessa reflexão concordo totalmente com Ávila (1999, p.2), quando fala do ensino de cálculo no Ensino Médio ao afirmar que "descartá-lo no ensino é grave, porque deixa de lado uma componente significativa e certamente a mais relevante da Matemática para a formação do aluno num contexto de ensino moderno e atual".

Antes de ingressar como concursado na rede estadual de ensino, ministrei muitas aulas de Cálculo I para universitários de diversos cursos (de ciências exatas, humanas e biológicas) e as dúvidas pairavam em torno da carência de conhecimentos matemáticos relativos aos níveis fundamental e médio, considerados essenciais para a abordagem dos conteúdos de Cálculo Diferencial e Integral I. Muitos dos alunos sequer haviam estudado alguns tópicos dessa disciplina.

Atualmente, a disciplina Cálculo I é a campeã de reprovações no Ensino Superior. Isso sugere um abismo que existe entre a matemática ensinada no Ensino Médio e a do Ensino

Superior. A consequência disso são altos índices de evasão de alunos de cursos como Física, Matemática e Engenharias. Nesse contexto, Palis (1995, p.22) afirma que:

> Os cursos de Cálculo, principalmente o primeiro da sequência, apresentam índices absurdamente elevados de abandono e insucesso. Estes índices, por si só, já apontam a necessidade de se buscar alternativas de ação pedagógica que, aliadas a outras medidas, possam dar conta desse problema que, desde muitos anos, subsiste na Universidade.

A meu entender, um dos principais motivos que levam a esses elevados índices de reprovação e evasão é que, no Ensino Superior, a disciplina Cálculo I é estudada com grau de rigor matemático considerável. O aluno é levado a um nível de abstração jamais experimentado, logo "quanto maior a altura, maior a queda". Franchi (1995, p.40) descreve como os cursos de Cálculo são ministrados nas Universidades ao afirmar que:

> De modo geral, as aulas são expositivas. O centro do processo ensino-aprendizagem está no professor, que deve transmitir os conhecimentos matemáticos ao aluno. Os conteúdos são apresentados prontos, de forma inquestionável e pouco têm a ver com situações da realidade. São apresentadas definições, enunciados e teoremas que a seguir são demonstrados. Seguem técnicas de Cálculos e exercícios.

Se os discentes estudassem, ainda no Ensino Médio, noções de limites, derivadas e integrais sem esse excesso de rigor, certamente sentiriam menos esse impacto. Essa é a essência da proposta metodológica que abordarei nesse trabalho, contemplando a interdisciplinaridade e tornando mais amplo o aprendizado dos conteúdos. Por exemplo, o ensino da derivada é de grande importância, pelo tanto que ajuda no tratamento referente ao estudo das funções. Seu ensino iniciado na primeira série do Ensino Médio pode se integrar harmoniosamente com a Física no estudo do movimento e outros conceitos de grandezas físicas, além de servir para o estudo de polinômios e outras aplicações científicas. Ávila (1991, p.2) resume bem a importância do Cálculo no Ensino Médio:

> O Cálculo é moderno porque traz ideias novas, diferentes do que o aluno de 2° grau encontra nas outras coisas que aprende em Aritmética, Álgebra, Geometria, Trigonometria e Geometria Analítica. Não apenas novas, mas ideias que têm grande relevância numa variedade de aplicações científicas no mundo moderno. Ora, o objetivo principal do ensino não é outro senão preparar o jovem para se integrar mais adequadamente à sociedade. Não se visa, com o ensino da Matemática no 2° grau, formar especialistas no assunto. Ensina-se Matemática porque esta é uma disciplina que faz parte significativa da experiência humana ao longo dos séculos, porque ela continua sendo hoje, com intensidade ainda maior do que no passado, um instrumento eficaz e indispensável para os outros ramos do conhecimento.

Portanto, esse trabalho ocupa-se em apresentar uma proposta de ensino, ainda no Ensino Médio, de noções de Cálculo I (limites, derivadas e integrais) livre do rigor matemático excessivo com o qual a disciplina é estudada no Ensino Superior. Seu objetivo é fazer uma intermediação mais tranquila entre a matemática estudada na educação básica para a Superior, fazendo com que o aluno compreenda melhor vários conceitos e esteja mais preparado para lidar com alto nível de abstração com que esse assunto é tratado nas Universidades.

Ao resolver seguir essa proposta é altamente recomendável que o professor leia as referências [3], [4] e [5].

2 – Organização da Dissertação

O capítulo 1 aborda a metodologia de trabalho, trazendo as diretrizes que o docente deve seguir a respeito de conhecimentos prévios que o aluno já deve possuir para compreender os conceitos abordados em Cálculo I, a importância do uso de recursos tecnológicos como ferramenta auxiliar de ensino e a relevância do professor abordar tópicos da história da Matemática no ensino.

O capítulo 2 traz passagens da história do Cálculo para que o professor possa situar o estudante no contexto histórico que motivou os matemáticos da época a desenvolver o tema em questão. Também aborda um histórico do ensino do cálculo no Brasil.

Os capítulos 3, 4 e 5 tratam, respectivamente, das noções de limites, derivadas e integrais abordando os principais tópicos de cada tema, além de algumas aplicações importantes no Ensino Médio, sempre utilizando uma linguagem simples, livre de qualquer tipo de rigor apresentado nos livros de Cálculo I do Ensino Superior. O objetivo é que os alunos compreendam os conceitos mais importantes e construam uma base mais concreta para enfrentar o rigor de um curso de Cálculo I na Universidade.

O capítulo 6 fala sobre as considerações do trabalho e procedimentos a serem tomadas após o desenvolvimento da metodologia.

Capítulo 1

UM POUCO SOBRE A METODOLOGIA

Neste capítulo tratarei da apresentação da metodologia a ser desenvolvida pelo professor. Primeiramente, procurei saber um pouco a opinião de professores da educação básica sobre o assunto. Para isso, preparei uma entrevista (presente no apêndice 1) para ter um apanhado geral sobre a viabilidade da proposta metodológica.

Foram entrevistados 30 professores que atuam na educação básica em escolas públicas estaduais, particulares e cursinhos pré-vestibulares na cidade de Belém-PA. Por ter carácter secundário neste trabalho, citarei apenas os resultados que mais me chamaram atenção: a média de idade foi de 33,4 anos; tempo médio de docência é de 9,5 anos; todos são licenciados plenos em Matemática, apenas 2 entrevistados possuem mestrado, 17 possuem especialização e 11 somente graduação.

Quanto à formação nas disciplinas de Cálculo, 19 professores julgam ter obtido boa formação nessas disciplinas (assinalaram notas de 3 a 5). Para eles, em média, os livros texto de Cálculo são satisfatórios e a 90% respondeu que seus professores não utilizaram recursos tecnológicos no ensino do Cálculo.

Quanto ao ensino do Cálculo no Ensino Médio, 24 professores atribuíram notas de 1 ou 2 à viabilidade de ensinar cálculo; 21 consideram-se aptos a ensinar noções de cálculo atualmente; todos os entrevistados entendem que é importante alunos do Ensino Médio estudarem Cálculo, mas 18 professores entendem que é um assunto difícil (assinalaram notas 4 ou 5) para o aluno do Ensino Médio.

Paralelo a essa entrevista, perguntei a todos os docentes entrevistados se costumam usar recursos tecnológicos em sua prática docente. Apenas 17% responderam que fazem uso com frequência.

Em relação à principal razão que dificultaria, ou impediria, o ensino de cálculo no Ensino Médio 95% os professores alegaram que não há tempo hábil para fazê-lo, pois o programa dos vestibulares é muito extenso. Em geral, os docentes da rede pública apontaram a falta de base dos alunos como outro fator. Já os docentes da rede particular alegaram falta de tempo devido às aulas no contra-turno, enquanto os professores de cursinho baseiam-se no fato do assunto não estar no currículo do Ensino Médio.

No apêndice C (pág. 82) deste trabalho há um quadro sintético sobre o resultado dessa pesquisa.

1.1 Uso de recursos tecnológicos no ensino

O processo de aprendizagem da Matemática há vários anos foi e vem sendo discutido por pessoas relacionadas com a Educação em todo mundo e mesmo assim o fracasso escolar ainda continua. A reprovação e a insatisfação diante dos resultados negativos obtidos na escola, que podem ser refletidos na vida do aluno, sugerem que a Matemática ainda é tratada como um ensino sem significado para o aluno, fazendo com que a disciplina cause medo. Nesse contexto, o uso de recursos tecnológicos como instrumento de apoio têm ajudado a tornar as aulas mais participativas e dinâmicas, ajudando a mudar essa percepção negativa do aluno em relação a Matemática. De acordo com Litwin (1997, p.4) apud Araújo (2004, p.43):

> Entendemos a tecnologia educacional como o corpo de conhecimentos que, baseando-se em disciplinas científicas encaminhadas para as práticas do ensino, incorpora todos os meios a seu alcance e responde à realização de fins nos contextos sócio-históricos que lhe conferem significação. A tecnologia educacional, assim como a Didática, preocupa-se com as práticas do ensino, mas diferentemente dela inclui entre suas preocupações o exame da teoria da comunicação e dos novos desenvolvimentos tecnológicos: a informática, hoje em primeiro lugar, o vídeo, a TV, o rádio, o áudio e os impressos, velhos ou novos, desde livros até cartazes.

Neste sentido, o uso dos recursos tecnológicos em sala de aula, necessita de professores preparados, que saibam utilizá-los de forma objetiva e prática. Além de obter conhecimentos de suas possibilidades e habilidades, inerentes a estes recursos, tendo consigo um bom planejamento para aula e conhecer bem o recurso no qual irá utilizar.

Dentre essas novas tecnologias educacionais, temos o computador que aos poucos esta se tornando cada vez mais comum e essencial para a vida na sociedade. Ele gera novas possibilidades de ensino e aprendizagem, integrado ao processo de desenvolvimento de conteúdos matemáticos.

Integrado com softwares matemáticos, como Geogebra, Cabri-Géomètré e aplicativos para smartphones dentre outros, os recursos tecnológicos atuam como instrumento prático de visualização e manuseio de símbolos e figuras geométricas que auxiliam na construção da imagem e ao desenvolvimento do aprendizado pelo aluno. O aluno consegue iniciar a aquisição de um conhecimento matemático de forma mais prática e dinâmica, além do manuseio do computador como inserção social.

De acordo com o PCN (1998, p.44) em Matemática, o computador pode ser utilizado para diversas finalidades nas aulas de Matemática:

> Como fonte de informação, poderoso recurso para alimentar o processo de ensino e aprendizagem; Como auxiliar no processo de construção de conhecimento; Como meio para desenvolver autonomia pelo uso de softwares que possibilitem pensar, refletir e criar soluções; Como ferramenta para realizar determinadas atividades – uso de planilhas eletrônicas, processadores de texto, banco de dados, etc.

Portanto, nessa proposta metodológica, o uso de recursos tecnológicos como ferramenta de apoio possui relevante destaque. Praticamente todas as construções apresentadas nesse trabalho foram feitas no Geogebra, software base para auxiliar o aluno a visualizar os conceitos apresentados nas noções de Cálculo I. Esse software foi escolhido por ser um programa de domínio público, presente no sistema operacional Linux Educacional instalado na maioria dos computadores presentes nos laboratórios de informática de escolas da rede pública do Estado do Pará. Para usuários de outros sistemas operacionais o Geogebra pode ser obtido através do site *www.geogebra.org*.

Além da versão para computadores o Geogebra está disponível para usuários de celulares e tablets na plataforma Android, IOS e Windows Phone, o que facilita para a maioria dos alunos que possui smartphone e/ou tablet. O professor deve orientá-los a instalar algum aplicativo que construa gráficos de funções. Obviamente que o professor deverá ter conhecimento e certa prática ao operar o Geogebra. Outro recursos tecnológico fundamental para o desenvolvimento dessa proposta metodológica é o uso de um projetor multimídia.

1.2 Revisão dos conteúdos do Ensino Fundamental

Antes de iniciar as noções de Cálculo I com os alunos, o professor precisa certificar-se que os alunos possuem uma boa base de conteúdos vistos no Ensino Fundamental. São eles: operações com números reais, potenciação e radiciação e suas propriedades, racionalização de denominadores, expressões algébricas – operações com monômios e polinômios, fatoração (fator comum, agrupamento, produto da soma pela diferença, soma e diferença de cubos), produtos notáveis (quadrado e cubo da soma e da diferença), sistemas de equações do 1º grau e equações do 1º e 2º graus.

Para isso, inicialmente o docente pode aplicar um teste de nivelamento para identificar quais assuntos precisam ser melhor trabalhados. Concluída essa etapa, o professor pode usar como base as referências [7], [14] e [16], pois possuem uma linguagem bem simplificada e trazem comentários pertinentes sobre o que mais os discentes costumam sentir dificuldades. As obras citadas tratam-se apenas de uma sugestão ficando o docente livre para adotar o livro que melhor lhe agrade para fazer listas de exercícios de fixação, a fim de reforçar os conteúdos que os discentes mais sentiram dificuldade. O tempo que o professor passará nessa etapa dependerá do desempenho da turma.

1.3 História da Matemática como recurso didático

Não é raro encontrarmos em qualquer escola algum aluno perguntando quem inventou a Matemática, pois queria matar essa pessoa. Pois bem, quem faz esse tipo de questionamento, possivelmente, não consegue associar a ciência que está estudando a seu cotidiano. Pensando nisso já indaguei-me diversas vezes sobre o que poderia fazer para que os alunos se interessem mais pela Matemática. Passei, então, antes de iniciar algum conteúdo, a contar fatos históricos relacionados ao assunto a ser estudado para que os alunos compreendam o contexto e as motivações que levaram os matemáticos da época a dedicar-se àquele conhecimento. Percebi nos discentes um certo interesse e curiosidade quando comentava sobre fatos históricos. Nesse sentido, Guzmán (2003) faz um importante comentário afirmando que:

> Um certo conhecimento de História da Matemática, deveria ser parte indispensável da bagagem de conhecimentos de qualquer matemático em geral e do professor de todos os níveis. Isso, não somente com a intenção de utilizá-la como um instrumento em seu ensino, mas principalmente por que a História pode proporcionar uma visão verdadeiramente humana da Matemática, o que é difícil de se imaginar, pois a imagem que os alunos possuem dessa disciplina está totalmente desvinculada da realidade.

Infelizmente, muitos professores negligenciam a história da ciência que ensinam alegando diversos motivos, por exemplo, falta de tempo para comentar fatos históricos. Klein apud Tahan (1973 p.9) afirma que: “O professor que ensina a Matemática desligada de sua parte histórica, comete verdadeiro atentado contra a ciência e contra a cultura em geral”.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL – 1997, p.34) de Matemática também mencionam a importância da história da Matemática ao afirmar que:

> Em muitas situações, o recurso à História da Matemática pode esclarecer ideias matemáticas que estão sendo construídas pelo aluno, especialmente para dar respostas a alguns “porquês” e, desse modo, contribuir para a constituição de um olhar mais crítico sobre os objetos de conhecimento.

Por esses motivos, considero recomendável que o professor fale um pouco sobre a história do Cálculo para os alunos. Essa parte será comentada no capítulo seguinte.

1.4 Uso de mapas conceituais como ferramenta didática

É muito comum alunos dos Ensinos Fundamental e Médio não encontrarem relação entre os conteúdos que estudam, muitas vezes porque o professor não consegue fazê-los compreender a relação que existe entre diversos conceitos. Esta lógica de dependência estrita dos conhecimentos matemáticos, em que um novo conceito é desencadeado a partir de outros conhecimentos anteriores que os amparam, vai ao encontro da Teoria da Aprendizagem Significativa proposta por Ausubel (Moreira, p.2). Segundo ele, a aprendizagem de uma nova informação só ocorre de maneira significativa a partir de outros conhecimentos que o aluno traz consigo. Além disso, ressalta-se que essa aprendizagem pode ser facilitada através da utilização de estratégias adequadas.

Nesse sentido, é interessante que o professor desenvolva estratégias que busquem facilitar o processo de ensino-aprendizagem, buscando, de fato, a ocorrência de uma aprendizagem significativa. Zarpelon (2014, p.3) cita Maffra (2011, p.6) quando este último afirma que:

> o uso de Mapas Conceituais pode estimular e organizar a criação e a comunicação de ideias complexas, propiciando uma aprendizagem significativa e, assim, tornando-se uma estratégia possível para a melhoria do ensino/aprendizagem.

Portanto, professores e alunos podem lançar mão dessa estratégia, uma vez que a mesma permite organizar os conceitos que são mais relevantes no Cálculo, bem como fazer conexões importantes entre seus significados. O professor, a medida que for avançando nos conteúdos aqui apresentados, pode ir montando o mapa proposto, fazendo as adaptações que achar necessárias.

Na seção de anexos há mapas conceituais sobre limites, derivadas e integrais propostos por Zarpelon (2014, p. 11), que se encontram, respectivamente, nos anexos A, B e C deste trabalho.

Capítulo 2

UM BREVE HISTÓRICO SOBRE O CÁLCULO

Esse breve histórico teve como base principalmente as referências [8] e [30], pois o autor usa uma linguagem bastante acessível ao expor os fatos históricos. Além disso, a obra traz alguns problemas que os matemáticos da época deparam-se, resolvendo-os, inclusive. Porém, esses problemas não serão abordados nessa proposta, pois a ideia de abordar a história do Cálculo é para situar o estudante em um contexto histórico para que ele perceba como ele desenvolveu-se para resolver questões principalmente relativas à Física.

A última seção desse capítulo aborda um breve histórico do ensino do cálculo no Brasil.

2.1 Contextualização histórica

Até o século XVII a geometria era o principal domínio da Matemática − qualquer um que quisesse aprendê-la deveria começar pelos *Elementos de Euclides*, ou algo similar. No entanto, foi crescendo a consciência de que grande parte do conhecimento geométrico devia servir a aplicações, desde as mais práticas − como as técnicas para construir mapas − até as mais abstratas − como a teoria da perspectiva, na pintura − e a astronomia. Nesse contexto, o século XVII é marcado pela consciência que o desenvolvimento técnico pode melhorar a vida dos homens. Três nomes são exemplos típicos desse período: Galileu (1564 − 1642), Bacon (1561 − 1626) e Descartes (1596 − 1650).

Ao privilegiar a invenção e a intervenção na natureza, o pensamento da época se associava ao estudo quantitativo dos fenômenos. Descartes defendia que o pensamento não deve se dedicar a compreender todos os tipos de coisas, mas somente aqueles que são passíveis de quantificação. As deduções lógicas que permitem passar de uma proposição a outra devem ser substituídas por relações entre coisas quantificáveis, traduzidas por equações (igualdades entre quantidades).

Em 1626, Descartes frequentou, em Paris, um círculo de cientistas que gravitavam em torno do padre Mersenne ($1588 - 1648$) e discutiam livremente críticas ao pensamento peripatético (aristotélico); de tais estímulos Descartes progrediu para tornar-se o "pai da filosofia moderna", apresentar uma visão científica transformada do mundo e estabelecer um novo ramo da matemática. Em seu mais célebre tratado, o *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences (Discurso sobre o método para raciocinar bem e procurar a verdade nas ciências)* de 1637, ele anunciou seu programa de pesquisa filosófica. Ele esperava, por dúvida sistemática, chegar a ideias claras e precisas, a partir das quais seria possível deduzir inúmeras conclusões válidas. Essa abordagem da ciência levou-o a supor que tudo era explicável em termos de matéria (ou extensão) e movimento. O universo todo, ele postulou, como sendo feito de matéria em movimento incessante em vórtices, e todos os fenômenos deveriam ser explicados mecanicamente em termos de forças exercidas pela matéria contígua.

Podemos dizer que a época é marcada por uma concepção geral das curvas que não se limitava ao estudo de curvas particulares, ampliando o universo dos objetos geométricos pela introdução de curvas que descrevem movimentos ou são expressas por equações algébricas. A "exatidão" dos procedimentos empregados em geometria foi redefinida por Descartes. Ao invés de construções geométricas, foram admitidas técnicas algébricas na definição de curvas, instituídas como objeto central da geometria. Na segunda metade do século XVII surgiram os primeiros efeitos desta mudança e o trabalho com curvas, incluindo a busca por tangentes e áreas, incentivará o desenvolvimento dos métodos infinitesimais.

Nos trabalhos do final do referido século, o conceito de curva recobre três concepções:

a curva como expressão algébrica, eventualmente infinita; a curva como trajetória de um ponto em movimento; e, a curva como polígono com um número infinito de lados. As três exerciam um papel central no desenvolvimento dos métodos infinitesimais e Leibniz foi um dos protagonistas dessa mudança.

Os métodos analíticos de Descartes e Fermat (1601 − 1665) motivaram o estudo das propriedades aritméticas de séries infinitas na Inglaterra. Com base nisso, John Wallis (1616 − 1703) e James Gregory (1638 − 1675) conseguiram resolver um grande número de problemas − como o de encontrar a tangente a uma curva, calcular quadraturas ou retificar curvas − e tiveram grande influência sobre Newton (1643 − 1727) e Leibniz (1646 − 1716).

Apesar de haver certa confusão sobre a prioridade da invenção do Cálculo na qual participaram seguidores de Newton e Leibniz, atualmente os historiadores refutam a ideia de que Leibniz plagiou Newton e ressaltam que os métodos e motivações dos dois eram basicamente diferentes. O livro principal de Newton, os *Philosophiae naturalis principia mathematica (Princípios matemáticos da Filosofia Natural)*, não contém desenvolvimentos analíticos. Os resultados são apresentados na linguagem da geometria sintética, enquanto que Leibniz defende vigorosamente os métodos analíticos. O que os distingue é a relação de cada um com a Matemática de seu tempo. Para Leibniz, os problemas de fundamento do Cálculo eram preocupações que não deviam interferir no desenvolvimento dos algoritmos diferenciais. Já Newton esforçou-se para colocar sua teoria em uma linguagem rigorosa − a da geometria clássica. Se compararmos os cálculos de ambos com o atual, veremos que eles trabalhavam essencialmente com variáveis definidas sobre curvas, ao passo que atualmente o Cálculo fundamenta-se na noção de função. O principal objetivo de estudo, no século XVII, era o desenvolvimento de métodos para resolver problemas sobre curvas geométricas, muitas vezes de origem física, como o de encontrar a tangente, calcular a área sob uma curva e achar comprimentos de curvas ou velocidades de pontos se movendo sobre uma curva.

2.2 O método cartesiano

Após Galileu, o movimento e os fenômenos da natureza em geral puderam ser compreendidos por meio da Matemática. É nesse contexto que o pensamento de Descartes se desenvolve, com as certezas aristotélicas, que haviam dominado a Idade Média, sacudidas pela "Nova Ciência", assentada sobre os trabalhos de Galileu. Nesse contexto, os problemas geométricos devem ser formulados em linguagem algébrica para que se possa penetrar nas relações que existem entre os objetos do universo. Este é o passo fundamental para legitimar o estudo da geometria por meio da álgebra, pois o que esta última permite apreender são as proporções envolvidas com objetos geométricos.

Desde o início de *La géométrie*, um dos três apêndices do *Discours de la méthode*, Descartes propõe a utilização do método analítico. Dar nomes às linhas de figuras, tanto para as conhecidas quanto para as desconhecidas, era a essência do método analítico. Logo na abertura do primeiro livro de *La géométrie*, Descartes se refere às cinco operações básicas da aritmética − adição, subtração, multiplicação, divisão e radiciação − e mostra que elas correspondem a construções simples com régua e compasso.

Ao mesmo tempo em que renovou a geometria, Descartes estava, de certo modo, ligado à tradição. Não bastava resolver equações, era preciso construir as soluções. Seu objetivo não era propriamente algébrico, mas consistia em aplicar a álgebra para resolver problemas geométricos. Para isso ele propôs um método que permite reduzir a resolução de problemas geométricos à resolução de uma ou mais equações.

A grande novidade da obra de Descartes é a introdução de um sistema de coordenadas para representar equações indeterminadas. A introdução desta ferramenta, fundamental para o projeto cartesiano, foi motivada inicialmente pelo problema de Pappus: (Roque, 2012 p.251)

> Encontrar o lugar geométrico de um ponto tal que, se segmentos de reta são traçados deste ponto até três ou quatro retas dadas, formando com elas ângulos determinados, o produto destes dois segmentos deve ser proporcional ao produto dos outros dois (se há quatro retas) ou ao quadrado do terceiro (se há três retas).

É interessante notar que a utilização de um sistema de coordenadas, passo fundamental na invenção da geometria analítica, está associada a um problema indeterminado, ou seja, com duas quantidades desconhecidas (chamadas mais tarde de “variáveis”). Além disso, esse sistema não empregava necessariamente um sistema de eixos ortogonais, pois, para cada problema, devia ser escolhido o sistema mais conveniente.

2.3 O estudo das curvas e as primeiras noções de função

Atualmente, quando pensamos no conceito de função, algumas ideias nos vêm à mente. Uma delas é a ideia de uma correspondência. Desse ponto de vista, pode-se dizer que as tabelas babilônicas e egípcias já pressupunham, de alguma forma, a ideia de função, já que se tratavam justamente de registros de correspondências (por exemplo, entre um número e o resultado das operações que envolvem esse número). As tabelas de cordas de Ptolomeu ($90 - 168$), similares às nossas tabelas de senos, também estebeleciam correspondências que consideramos hoje de natureza funcional.

Entretanto, diversas ideias fundamentais no conceito que temos hoje de função não estavam presentes nesses exemplos, pois em nenhum deles está presente a ideia de variação, que só foi introduzida formalmente no século XIX, porém já se encontrava presente nas tentativas de matematização do movimento dos séculos XVI e XVII. O estudo da variação dos fenômenos naturais em função do tempo, por meio de leis matemáticas, se deve em grande parte ao desenvolvimento da física após Galileu. Em seguida, passou-se a associar o movimento a uma curva que pode ser expressa por meio de uma equação.

Desde Viète ($1540 - 1603$), a representação simbólica de uma quantidade desconhecida permitia exprimir estas relações por fórmulas algébricas. Mas ele dedicava-se, principalmente, à solução de problemas determinados, nos quais não se colocava o problema de relacionar duas grandezas que variam. Já nas curvas estudadas por Descartes, a relação entre as quantidades indeterminadas era do tipo funcional, uma quantidade sendo associada à outra por meio de uma equação. Portanto, havia, na época, uma concepção implícita de que os tipos de relações entre variáveis eram dadas por expressões analíticas de curvas algébricas ou por meio de séries infinitas. As curvas constituíam o principal objeto neste momento e motivaram dois problemas paradigmáticos associados ao seu estudo: o cálculo de tangentes, pois esta fornece a direção do vetor velocidade de um móvel que percorre uma curva e o cálculo de áreas por meio de decomposições infinitas.

2.4 O cálculo de Leibniz

Como aconteceu com Newton, o estudo de séries infinitas foi muito importante no início de suas descobertas. Relacionando o triângulo de Pascal e o triângulo harmônico, Leibniz percebeu uma maneira de encontrar o resultado de muitas séries infinitas convergentes. A essa altura, ele voltou-se para o trabalho de Blaise Pascal (1623 −1662) − *Traité des sinus du quart de cercle* que lhe teria dado um importante insight: a determinação da tangente a uma curva dependia das diferenças das abscissas e ordenadas na medida em que essas se tornassem infinitamente pequenas e que a quadratura, isto é a área, dependia da soma das ordenadas ou retângulos infinitamente finos.

Esse insight levaria Leibniz em 1676 a chegar às mesmas conclusões a que havia chegado Newton alguns anos antes: ele tinha em mãos um método muito importante devido a sua abrangência. Independente de uma função ser racional ou irracional, algébrica ou transcendente − termo criado por Leibniz − as operações de encontrar "somas" (integrais) ou "diferenças" (diferenciais) poderiam ser sempre aplicadas. O destino havia reservado a Leibniz a tarefa de elaborar uma notação apropriada para estas operações, assim como a nomenclatura − Cálculo Diferencial e Cálculo Integral − ambas utilizadas atualmente.

A primeira exposição do cálculo diferencial foi publicada por Leibniz em 1684, sob um longo mais significativo título de *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, qua nec irrationales quantitades moratur (Um novo método para máximos e mínimos e também para tangentes, que não é obstruído por quantidades irracionais).* Aqui, Leibniz deu as fórmulas $d(xy) = x\ dy + y\ dx$, $d(x/y) = (y\ dx - x\ dy)/y^2$ e $dx^n = nx^{n-1}\ dx$ para produtos, quocientes e potências (ou raízes), juntamente com aplicações geométricas.

Dois anos mais tarde, Leibniz publicou uma explicação do cálculo integral em que mostra que as quadraturas são casos especiais do método inverso ao das tangentes. Aqui, ele deu ênfase à relação inversa entre derivação e integração no teorema fundamental do cálculo.

2.5 O cálculo de Newton

No final da década de 60 (do século XVII), Newton já empregava procedimentos infinitesimais em seus trabalhos. Um pouco mais tarde, no início dos anos 70, ele reformula os algoritmos dos seus cálculos na linguagem de *fluentes* e *fluxões*. Para Newton, os fluentes eram quantidades variáveis com o tempo, quantidades que *fluem*. Esta concepção levou alguns historiadores a afirmar que sua noção de continuidade se relacionava com o movimento, a variação das quantidades no tempo, diferentemente de Leibniz, que empregava justificativas de natureza metafísica.

A taxa de variação de uma quantidade com o tempo era chamada *fluxão*. Se v, x, y e z são quantidades fluentes, seus fluxões eram designados, respectivamente, por $\dot{v}$, $\dot{x}$, $\dot{y}$ e $\dot{z}$. O problema fundamental do cálculo seria, então: dada a relação entre quantidades fluentes, encontrar a relação entre seus fluxões.

Dessa forma, os métodos de Newton e Leibniz são distintos. No entanto, as justificativas de Newton não parecem ser, matematicamente falando, tão diferentes das de Leibniz. A diferença principal entre eles estava no modo de expor suas teorias. O principal livro de Newton não contém desenvolvimentos analíticos. Os resultados são apresentados na linguagem da geometria sintética. Preocupado desde o princípio em fundar um cálculo universal, os métodos de Leibniz são apresentados como métodos e algoritmos, o que, juntamente com a praticidade da notação, fez com que seus métodos tivessem uma melhor recepção do que os de Newton.

2.6 O Ensino do Cálculo no Brasil

A Reforma Francisco Campos de 1931 dividiu o ensino secundário no Brasil em dois ciclos: o ***fundamental*** (cinco anos de duração) e o ***complementar*** (dois anos de duração). Na quinta série do fundamental já constava o ensino das noções de ***derivada***, conforme Dassie (2008):

> **Quinta série - Aritmética, Álgebra e Geometria:** [...] Derivada de um polinômio inteiro em x; Noção de Limite; Derivada de $\sqrt{x}$; Derivada de $\operatorname{sen} x$, $\cos\ x$, $\operatorname{tg} x$ e $\operatorname{cotg} x$; Interpretação geométrica da noção de derivada; Aplicação da noção de derivada ao estudo da variação de algumas funções simples; Processos elementares de desenvolvimento em série; Convergência de uma série; Desenvolvimento em série do seno, cosseno e tangente; Problema inverso da derivação; Primitivas imediatas; Aplicação ao cálculo de certas áreas; Volumes do Prisma, Cilindro, Cone e Pirâmide e dos respectivos troncos; Volume da Esfera e suas partes; Estudo sucinto das seções cônicas. (Brasil apud Dassie, 2008, p. 248.)

Conforme consta no artigo 4º do Decreto Federal nº 19.890 de 1931, relacionado ao curso complementar, o aluno estudaria por dois anos as seguintes matérias:

> **Art 4º:** O Curso Complementar, obrigatório para os candidatos à matrícula em determinados institutos de Ensino Superior, será feito em dois anos de estudo intensivo, com exercícios e trabalhos práticos individuais, e compreenderá as seguintes matérias: Alemão ou Inglês, Latim, Literatura, Geografia, Geofísica e Cosmografia, História da Civilização, Matemática, Física, Química, História Natural, Biologia Geral, Higiene, Psicologia e Lógica, Sociologia, Noções de Economia e Estatística, História da Filosofia e Desenho. (Brasil, 1931)

O curso complementar se subdividia em curso pré-médico, curso pré-politécnico e curso pré-jurídico. O ensino de ***noções de cálculo***, além de estar no curso no pré-politécnico, estava presente no pré-médico como podemos observar no programa:

> [...] 19 – Derivadas e Diferenciais das funções de uma variável; definições, notações e interpretação geométrica. 20 – Funções de mais de uma variável. Derivadas e diferenças parciais. Diferença total. 21 – Derivadas e diferenciais sucessivas. 22 – Desenvolvimento em série de funções de uma variável. Fórmula de Taylor. Resto da fórmula de Taylor. Expressão de Lagrange. Fórmula de Mac-Laurin. Aplicações as funções elementares. 23 – Formas indeterminadas. Regra de L'Hopital. 24 – Estudo das curvas definidas por equação de duas varíáveis resolvidas em relação a uma delas. Tangentes e normais. Assíntotas, Concavidade, Máximo e Mínimo. Pontos de Inflexão. Pontos Notáveis. (Brasil, apud Otone e Silva, 2006, p. 58)

Os alunos que ingressassem no pré-politécnico, também estudariam os conceitos do Cálculo Diferencial, conforme Otone e Silva (2006):

> [...] Limites. [...] Função contínuas. [...] Funções elementares. Diferença finita, derivada, diferencial. Cálculo das derivadas e das diferenciais. Aplicação às funções elementares. Teorema de Rolle. [...] Regra de L'Hospital. Comparação das funções exponencial e logarítmica com polinômios. [...] Máximos e Mínimos. Estudo da variação de uma função. Representação cartesiana. (Brasil, apud Otone e Silva, 2006, p. 60)

Em 1942, uma nova legislação (decreto-lei nº 4.244), conhecida como ***Lei Orgânica do Ensino Secundário***, modificou a organização curricular do secundário. Separando em dois ciclos, o Ginasial (quatro anos de duração) e o Colegial (três anos de duração). O ensino secundário apresentava em seu programa curricular o estudo de conceitos do Cálculo no terceiro ano do curso Científico do Colegial e na terceira série do curso Clássico do Colegial. Entre eles, o ensino de derivadas e aplicações envolvendo problemas de máximos e mínimos. No curso Científico a abordagem era mais abrangente.

Em 1951, a Portaria nº 966 do Ministério de Educação e Saúde incumbiu o colégio Pedro II da elaboração das disciplinas de todo o curso secundário. Todas as escolas brasileiras deveriam seguir esse programa. Para a terceira série do curso colegial o programa proposto para o ensino de Matemática no secundário era o seguinte:

> Conceito de função; Representação cartesiana; Reta e Círculo; Noção intuitiva de Limite e continuidade; Noções sobre derivadas e primitivas; Interpretações e aplicações; Introdução à teoria das equações; Polinômios; divisibilidade por $x \pm a$; Problemas de composição, transformação e pesquisa de raízes; equações de tipos especiais. (Brasil, 1951)

Mas, a partir de 1960, o ensino de Cálculo foi sendo excluído das escolas brasileiras. Os defensores da Matemática Moderna priorizavam outros tópicos que melhor se prestavam às necessidades que eles consideravam modernas e, por outro lado, não haveria muito espaço no programa, já que o rigor e o formalismo que se exigia da Teoria dos Conjuntos e vários detalhamentos axiomáticos, tomavam muito tempo. Além disso, o ensino de Cálculo exigia um estudo detalhado dos números reais, o que levava muito tempo, e por isso seria totalmente inviável. Também os vestibulares da época, de um modo geral, não cobravam mais, em seus editais, o estudo de Cálculo.

Capítulo 3

NOÇÃO DE LIMITE

Muitos alunos, após terem estudado Cálculo, perguntam-se por que afinal tiveram que estudar limites, pois após estudado ele volta pouquíssimas vezes e ainda assim com um papel secundário ao tópico em discussão. No entanto, limites são fundamentais para o desenvolvimento do cálculo e todas as técnicas mais significativas, incluindo diferenciação, integração e série infinita. Dessa forma, o estudo de limite exerce um papel central no estudo do Cálculo.

Neste capítulo abordaremos o conceito de limite de uma função, sob um enfoque intuitivo. Por fugir do objetivo de apresentar a noção de limite a alunos do Ensino Médio, não serão utilizadas as formalizações da definição oficial de limite envolvendo deltas $-$ épsilons presentes em livros de Cálculo do Ensino Superior. Além do conceito de limite avaliaremos limites numericamente e trataremos de continuidade de funções. Para um melhor entendimento do assunto será fundamental que o professor utilize o software Geogebra para plotar gráficos de funções e que os discentes tenham instalado em seus tablets ou smartphones algum aplicativo que plote gráficos das funções estudadas no Ensino Médio.

3.1 O que é limite?

Comecemos com uma função simples $f(x) = 2x + 3$. A essa altura os alunos conseguem facilmente identificar que se trata de uma função afim, cujo gráfico é uma reta, possui inclinação 2 e intersecta o eixo das ordenadas em 3. O valor númerico de $f(x)$ quando $x = 2$ é igual a $f(2) = 2 \cdot 2 + 3 = 7$. Isso quer dizer que o ponto $(3, 7)$ pertence gráfico de $f(x)$. Estudemos, agora, os valores da função f quando x assume valores próximos de 2, porém diferentes de 2, conforme mostram os quadros 3.1 e 3.2.

Quadro 3.1: Valores de $f(x)$ aproximando de 2 à esquerda.

x	1,5	1,8	1,9	1,99	1,999
$f(x)$	6	6,6	6,8	6,98	6,998

Fonte: Autor

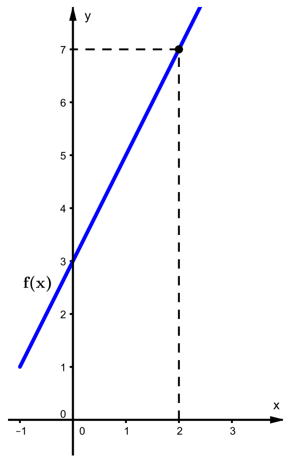
Quadro 3.2: Valores de $f(x)$ aproximando de 2 à direita.

x	2,5	2,25	2,1	2,01	2,001
$f(x)$	8	7,5	7,2	7,02	7,002

Fonte: Autor

Note que quanto mais o argumento se aproxima de 2 mais a imagem de $f(x)$ se aproxima de 7. Ainda que não se soubesse que $f(2) = 7$ seria possível descobrir um provável resultado utilizando um número suficientemente próximo de 2, como 1,99999. É óbvio que f tende ao ponto $(2,7)$, e é isso o que significa limite.

Figura 3.1: Gráfico da função $f(x) = 2x + 3$.



Fonte: Autor - Geogebra

Definição 3.1. ***Limite*** *é o ponto ao qual uma função tende com um dado valor de x, não importando se ela o alcança ou não.*

Em linguagem matemática nosso exemplo fica escrito da seguinte forma:

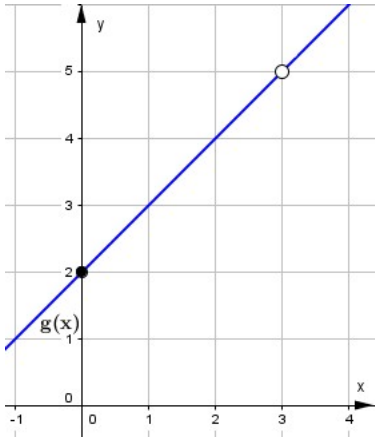
$$\lim_{x\to 2} f(x) = 7$$

e lê-se: "O limite de $f(x)$ quando x tende a 2 é igual a 7".

Analisemos agora, um exemplo um pouco mais desenvolvido. Consideremos a função $g(x) = \dfrac{x^2 - x - 6}{x - 3}$. No 1º ano do Ensino Médio os estudantes aprendem a determinar domínio de uma função. No caso de $g(x)$, claramente há uma restrição, pois o denominador de uma fração nunca pode ser zero. Construíndo o gráfico no Geogebra, temos a figura 3.2 :

Como fizemos no exemplo anterior, se tomarmos um número suficientemente próximo de $x = 3$, por exemplo, $x = 2,99999$ e $x = 3,00001$ teremos, respectivamente, $g(2,99999) =$

Figura 3.2: Gráfico da função $g(x)$ não definida em $x = 3$.



Fonte: Autor - Geogebra

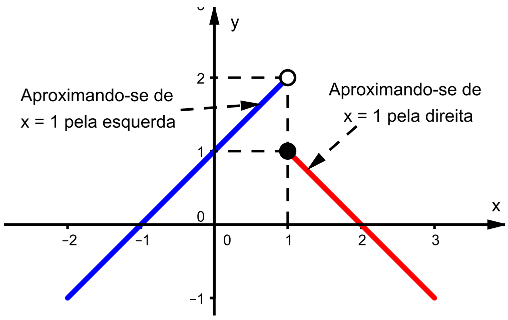
$4,99999$ e $g(3,00001) = 5,00001$. Assim, ainda que $g(x)$ não esteja definida para $x = 3$ $\lim_{x\to 3} g(x) = 5$. Esse é um exemplo de limite existente porque a função tende a uma altura apesar de não alcançá-la na verdade.

3.1.1 Limites laterais

Consideremos a função $h(x) = \begin{cases} x+1, & se \quad x < 1 \\ -x+2, & se \quad x \geq 1 \end{cases}$, representada pelo gráfico da figura 3.3.

Se tomarmos valores de x aproximando-se de 1 *pela esquerda*, ou seja, por valores menores do que 1, então os valores de $h(x)$ aproximam-se de 2. Assim, $\lim_{x\to 1^-} h(x) = 2$ e é chamado *limite à esquerda.*

Figura 3.3: Limite de $g(x)$ quando $x \to 1$ à esquerda e à direita.



Fonte: Autor - Geogebra

Se tomarmos valores de x aproximando-se de 1 *pela direita*, ou seja, por valores maiores do que 1, então os valores de $h(x)$ aproximam-se de 1. Assim, $\lim_{x\to 1^+} h(x) = 1$ e é chamado *limite à direita.*

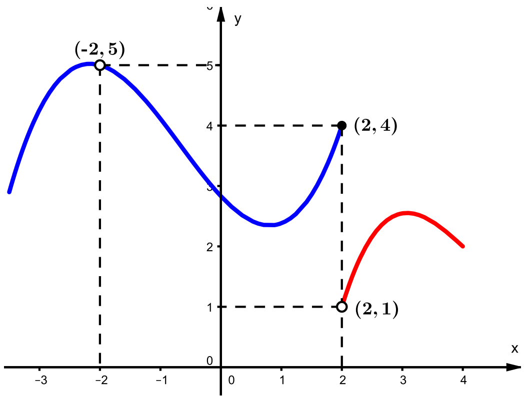
O sinal $-$, colocado depois do número 1, indica que x tende a 1 *pela esquerda*. Analogamente, o sinal +, indica que x tende a 1 *pela direita*.

3.1.2 Quando existe um limite?

Com tudo o que já vimos até aqui é possível determinar se o limite de uma função existe ou não. Para que exista limite de uma função f em um valor x, generalizando com $x = a$, devem ocorrer três condições:

1. O limite pela esquerda deve existir em $x = a$;
2. O limite pela direita deve existir em $x = a$;
3. Os limites pela esquerda e pela direita devem ser iguais.

Figura 3.4: Pontos da função $f(x)$ onde existe limite.



Fonte: Autor - Geogebra

A figura 3.4 mostra o gráfico de uma função $f(x)$. Onde existe limite nesse gráfico?

Analisando os valores de x em -2 e 2 observamos que em $x = -2$ existe limite, ao passo que em $x = 2$ não existe limite, pois, nesse ponto, apesar de existir limites pela esquerda e pela direita eles são diferentes, o que contraria a condição 3.

Visualmente, existe limite se o gráfico "não quebrar" nesse ponto. Para o gráfico de *f(x)* em questão, há uma quebra em $x = 2$, mas não em $x = -2$, o que significa que não existe limite na quebra, mas pode existir no intervalo do gráfico. Quando dizemos que um limite existe, isso significa que esse limite é igual a um **número finito**. Alguns limites são iguais ao infinito ou infinito negativo, mas nesses caso dizemos que os limites *não existem*.

Até o final dessa seção, o professor deverá certificar-se que os alunos compreenderam que: o limite de uma função em um determinado valor de x é o valor a que a função tende; mesmo que a função não esteja definida em um determinado ponto, ainda assim pode haver limite nesse ponto; se houver quebra no gráfico, então não há limite no ponto da quebra; o limite existe em um ponto $x = c$, quando os limites pela esquerda e pela direita existem e são iguais.

3.2 Avaliando limites numericamente

Até o momento, aproximamos limites usando valores de x suficientemente próximos ao número de que estávamos nos aproximando. Porém, com o passar do tempo, esse método torna-se exaustivo. Essa seção trata sobre os principais processos para avaliar limites.

A grande maioria dos limites pode ser avaliada por meio de três técnicas: substituição, fatoração e conjugação. Em geral, apenas uma delas vai funcionar em determinado problema de limite, então deve-se tentar um método de cada vez até achar aquele que funcione.

3.2.1 Técnica da substituição

Muitos limites podem ser avaliados simplesmente utilizando-se o valor de x do qual se aproxima na função. O termo especial para isso é método da substituição (ou método da substituição direta). Por exemplo, avaliando a função $f(x) = \lim\limits_{x \to -1} (x^3 - 2x^2 + 1)$, basta utilizar o número do qual estamos nos aproximando (no caso, -1) como variável.

$$f(x) = \lim_{x \to -1} [x^3 - 2x^2 + 1] = \lim_{x \to -1} [(-1)^3 - 2(-1)^2 + 1] = -2$$

À medida que nos aproximamos de $x = -1$ a partir da esquerda ou da direita, a função tende a -2, o que garante a existência de um limite: -2.

3.2.2 Técnica da fatoração

Consideremos a função $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$. Vamos calcular o limite de $f(x)$, quando x tende a 2 aplicando a técnica da substituição.

$$f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{2^2 - 4}{2 - 2} = \frac{0}{0}$$

O resultado $\dfrac{0}{0}$ obtido é uma indeterminação. Então estamos diante de um problema que a substituição não consegue resolver. Nesse caso, a técnica da fatoração torna-se eficaz. Essa é uma ótima oportunidade para o professor chamar atenção dos alunos para a importância de conhecer os principais métodos de fatoração estudados no 8º ano do ensino fundamental. Note que o numerador dessa fração é uma diferença de quadrados. Dessa forma, podemos reescrever o limite assim:

$$f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x+2)(x-2)}{x-2}$$

Cancelando os fatores $(x-2)$, obtemos $f(x) = \lim_{x\to 2} x+2$. Agora sim podemos aplicar a técnica da substituição, pois a indeterminação que aparecera já não existe. Dessa forma, $f(x) = \lim_{x\to 2}(2+2) = 4$.

Vale ressaltar que em alguns casos a divisão polinomial pelo método das chaves (estudado no 8º ano do Ensino Fundamental), também é eficaz em alguns casos, já que só funciona quando o grau do polinômio do dividendo é maior que ou igual ao grau do polinômio do divisor. Portanto, é mais eficaz focar esforços nas fatorações, por ser um método mais geral.

3.2.3 Técnica da conjugação

Caso a substituição e a fatoração não tenham funcionado a conjugação pode resolver o problema, apesar de esta técnica ser bastante restritiva em relação às já comentadas, pois é útil apenas para limites que contêm radicais.

Definição 3.2. *A conjugação de uma expressão binomial simplesmente muda o sinal entre os dois termos para o oposto.*

Por exemplo, $2+\sqrt{x}$ e $2-\sqrt{x}$ são conjugados.

A ideia desse técnica é multiplicar pares conjugados, pois aparecerá uma diferença de quadrados. Dessa forma, é possível eliminar os radicais. Porém esse ela só deve ser aplicada caso o da substituição não tenha funcionado.

Por exemplo, calcule o $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$.

Primeiramente, usando o método da substituição, temos: $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{4}-2}{4-4} = \dfrac{0}{0}$. Como já vimos, esse resultado é uma indeterminação. Logo, usando o técnica da conjugação, multipliquemos o numerador e o denominador da fração pelo conjugado de $\sqrt{x}-2$, que é $\sqrt{x}+2$. Daí:

$$\lim_{x\to 4} \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} = \lim_{x\to 4} \frac{(\sqrt{x})^2-2^2}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} = \lim_{x\to 4} \frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}$$

Cancelando os fatores $(x-4)$, segue que: $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{1}{\sqrt{x}+2}$. Aplicando o método da substituição, temos: $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{1}{\sqrt{4}+2} = \dfrac{1}{2+2} = \dfrac{1}{4}$.

É sempre bom que o aluno tenha em mãos uma calculadora, pois é sempre possível verificar os resultados das três técnicas apresentadas. O professor pode pedir ao aluno que tome algum valor de x muito próximo ao que se está avaliando e aplicar a ideia apresentada na seção (3.1.2). Os métodos apresentados aqui são úteis para deixar o trabalho menos tedioso e exaustivo. Um excelente recurso de apoio para a visualização dos resultados é utilizar o site *www.wolframalpha.com*, pois o aluno, além de obter o resultado numérico do limite terá ainda o gráfico da função. Para isso, basta digitar na barra de comandos do *wolframalpha* a palavra *plot* e, em seguida, digitar a função desejada. O professor poderá orientar os alunos para utilizar com eficiência esse recurso.

3.3 Limites e infinito

Até o momento, analisamos limites à medida que x se aproximava de um número finito. Agora, iremos avaliar limites onde x se aproxima do infinito ou infinito negativo. Para isso, analisemos o gráfico da função $f(x) = \dfrac{1}{x}$ expresso pela figura 3.5

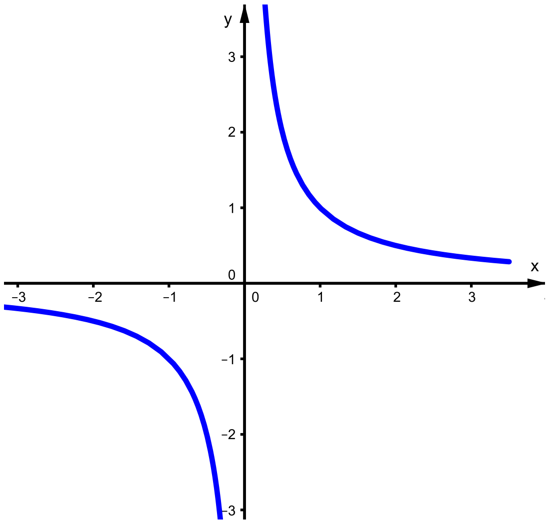
Notamos que, a medida que tomamos valores de x cada vez maiores, ou seja, aproximando-se do infinito a imagem da função fica cada vez menor, mas nunca chega a zero. Portanto, $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = 0$. Analogamente, quando tomamos valores de x a função f aproxima-se de zero, logo $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0$. O gráfico de f possui uma assíntota horizontal. Também é conveniente observar que: $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x}$ e $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x}$ não existem.

O professor pode usar outros exemplos até que os alunos concluam que:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{a}{x^n} = 0, \forall\ a \in \mathbb{R} \text{ e } n \in \mathbb{N}.$$

Nesse momento, o professor encontra-se diante de uma propícia ocasião para apresentar aos discentes o conceito de assíntota.

Figura 3.5: Gráfico da função $f(x) = \dfrac{1}{x}$.



Fonte: Autor - Geogebra

Definição 3.3. *Assíntota é uma linha reta cuja a imagem de uma função "tenta", mas não consegue alcança-la à medida que os valores de x tornam-se infinitamente positivos ou negativos.*

Calcular o limite no infinito ou no infinito negativo de uma função racional é o mesmo que determinar o local da assíntota horizontal.

3.3.1 Usando a álgebra para calcular limites no infinito

Em geral avaliar limites no infinito é um pouco diferente de avaliar limites comuns; a substituição, fatoração e a conjugação não vão funcionar. Por exemplo, vamos analisar $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x+2}{5x-1}$.

Aplicando a técnica da substituição, isto é, inserindo ∞ no lugar de x em qualquer uma das funções irracionais, obtemos $\dfrac{\infty}{\infty}$, que é uma indeterminação e não igual a 1, já que ∞ não é um número. Logo, a ideia para se resolver limites desse tipo é olhar para o grau do polinômio do numerador e denominador, ou seja, para a maior potência de cada polinômio.

Daí, a colocamos em evidência da seguinte maneira:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x+2}{5x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(3+\frac{2}{x}\right)}{x\left(5-\frac{1}{x}\right)}$$

Usando o fato de que $\lim_{x\to\infty} \frac{a}{x^n} = 0, \forall a \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, então: $\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$. Cancelando os fatores x no numerador e denominador segue que:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(3+\frac{2}{x}\right)}{x\left(5-\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3+0}{5-0} = \frac{3}{5}$$

Portanto, de uma maneira geral, digamos que vamos calcular $\lim_{x\to\infty} r(x)$ sendo que $r(x)$ é definida como uma fração cujo numerador, $n(x)$, e denominador, $d(x)$, são simplesmente polinômios. Compare os graus (expoentes maiores) de $n(x)$ e $d(x)$:

- Se o grau do numerador for mais alto, então $\lim_{x\to\infty} r(x) = \infty$ ou $-\infty$ (não há limite porque a função cresce ou decresce infinitamente.
- Se o grau do denominador for maior, então $\lim_{x\to\infty} r(x) = 0$.
- Se os graus forem iguais, então $\lim_{x\to\infty} r(x)$ é igual ao *coeficiente principal* de *n(x)* dividido pelo *coeficiente principal* de *d(x)*.

3.4 Limite trigonométrico

Esta seção, além de apresentar o limite trigonométrico fundamental, responde a uma pergunta comumente feita por alunos do 2º ano do Ensino Médio quando estudam trigonometria: Por que o uso da unidade radiano é necessário? Em geral, os livros didáticos brasileiros expõem apenas o conceito de radiano sem explicar um pouco da sua origem. Segundo Quintaneiro (2009, p.2):

> Ao tratar ora de seno de grandezas angulares medidas em graus, ora de seno de grandezas lineares medidas em radianos, sem justificativa para esta passagem, os livros didáticos podem favorecer implicitamente a ideia de que, em Matemática, a consistência das definições não é um imperativo. Isso pode se converter em um fator de conflito potencial, que mais tarde irá prejudicar a compreensão da ideia da função seno. Tal tratamento indiscriminado de ângulos e arcos pode levar quem estuda a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \text{ sen } x$ (de domínio real) a responder, por exemplo, que $f(30^\circ) = 0,5$.

3.4.1 Um pouco sobre o radiano

Quintaneiro (2009, p.6) afirma que o termo radiano (radian) aparece impresso pela primeira vez no dia 5 de junho de 1873, em exames de James Thonson na Faculdade de Queens, nos Estados Unidos. Em 1871, Thomas Muir da Universidade de Andrew, também nos Estados Unidos, já tinha hesitado entre rad, radial e radian (radiano). Em 1874, Muir adotou radian depois de uma consulta a Thonson. Os termos acima descritos provavelmente são inspirados pela palavra radius (raio). A proposta de radiano, como nos é apresentada hoje, é a de usar o raio como unidade de medida comum para o arco e meia corda.

Podemos destacar duas principais necessidades de se trabalhar com o raio como unidade de medida para o arco de meia corda.

A primeira está em trabalhar com o raio como unidade de medida: está em articular a trigonometria de arcos e cordas com a trigonometria anterior aos Elementos de Euclides, que relacionavam razões de lados de triângulos semelhantes. Notemos que se o raio é a unidade de medida, o comprimento da meia corda (isto é o seno) torna-se uma razão entre lados do triângulo retângulo. Assim, toda trigonometria feita em triângulos retângulos relacionando ângulos a razões de segmentos equivale a relações entre arcos e cordas feitas na circunferência (no primeiro quadrante).(Quintaneiro, 2009, p.8)

A segunda necessidade de se trabalhar com o raio como unidade de medida: Se utilizarmos uma unidade de medida comum para o arco e para a meia corda temos que: $\lim\limits_{\mathbf{x} \to \mathbf{0}} \frac{\text{sen}\mathbf{x}}{\mathbf{x}} = \mathbf{1}$ (limite trigonométrico fundamental).

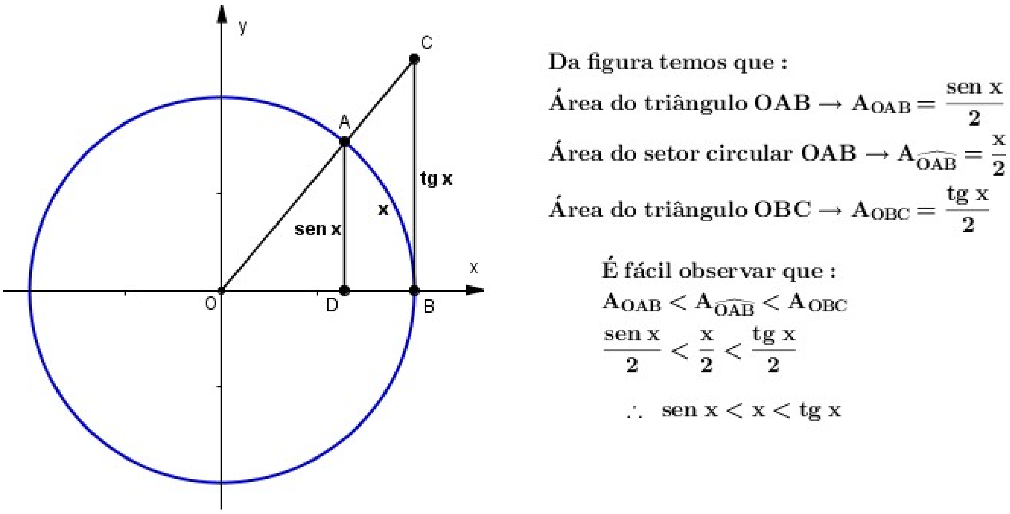
3.4.2 Demonstração do limite trigonométrico fundamental

Para demonstrar o limite fundamental partimos da seguinte desigualdade:

$$\text{sen } x < x < \text{ tg } x$$

Ela pode facilmente ser demonstrada pelo professor analisando a figura 3.6, sendo a circunferência o ciclo trigonométrico, portanto seu raio é igual a 1.

Figura 3.6: Demonstração da desigualdade sen $x < x <$ tg x.



Fonte: Autor - Geogebra

Sem perda de generalidade, podemos reescrever a desigualdade demonstrada da seguinte maneira: sen $x \leq x \leq$ tg x. Dividindo a desigualdade acima por sen x:

$$1 \leq \frac{x}{\text{sen } x} \leq \frac{\text{tg } x}{\text{sen } x}$$

Mas, $\dfrac{\text{tg } x}{\text{sen } x} = \dfrac{1}{\cos x}$. Então, $1 \leq \dfrac{x}{\text{sen } x} \leq \dfrac{1}{\cos x}$. Invertendo a desigualdade, temos:

$$1 \geq \frac{\text{sen } x}{x} \geq \cos x$$

Considerando $g(x) = 1$, $f(x) = \dfrac{\text{sen} x}{x}$ e $h(x) = \cos x$, segue que: $g(x) \geq f(x) \geq h(x)$.

Daí, utilizando que:

$$\lim_{x \to 0} g(x) = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 0} h(x) = 1 \quad \text{teremos} \quad 1 \geq \lim_{x \to 0} \frac{\text{sen} x}{x} \geq 1$$

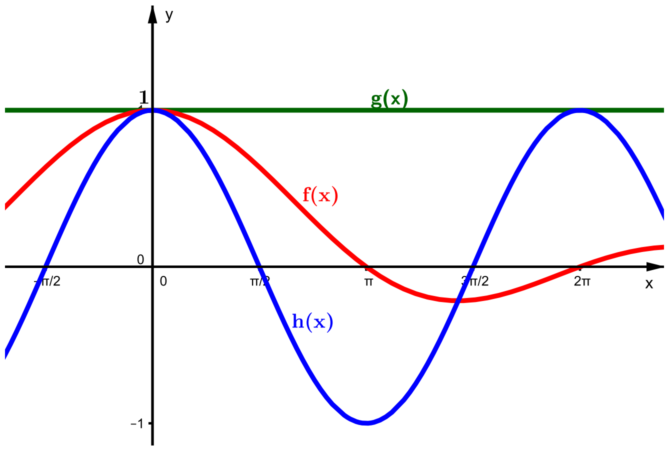
Pelo teorema do confronto (não demonstrado, mas aplicado), finalmente temos que:

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}} \frac{\text{sen}\mathbf{x}}{\mathbf{x}} = \mathbf{1}$$

O fato desta proposta metodológica não demonstrar o referido teorema não traz prejuízo ao entendimento do aluno, pois o professor pode utilizar o Geogebra para demonstrar o resultado acima, conforme a figura 3.7. Dessa forma, apenas enunciaremos o tal teorema.

Teorema 3.1 (**Teorema do confronto**). *Sejam f, g e h três funções tais que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, para todo $x \neq a$. Se $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L$, então existe $\lim_{x\to a} g(x)$ e é também igual a L.*

Figura 3.7: Interpretação geométrica do limite trigonométrico.



Fonte: Autor - Geogebra

Vale ainda destacar a importância de o professor trabalhar com os alunos a parte algébrica da trigonometria, que envolve as relações derivadas da equação fundamental da trigonometria ($sen^2x + cos^2x = 1$), relações de arcos duplos e transformação em produto.

3.5 Continuidade de uma função

Quando se estuda Cálculo, alguns dos mais importantes teoremas da área trazem uma condição muito significativa: a continuidade. Na verdade, quase nenhuma de nossas conclusões mais importantes em Cálculo (inclusive seu Teorema Fundamental) funciona se as funções em questão não forem contínuas. Testar a continuidade em uma função é muito similar a testar a existência de limites em uma função.

Para as funções estudadas no Ensino Médio, intuitivamente, uma função é contínua, se não houver "buracos", quebras ou "saltos", que pode ser desenhada por completo sem precisar levantar o lápis.

A definição matemática de continuidade faz muito sentido se mantivermos uma coisa em mente: enquanto os limites nos dizem a que tende uma função, a continuidade garante que a função chegue lá. Uma função $f(x)$ é contínua em um ponto $x = c$ se as três condições a seguir forem verdadeiras:

- $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ existe;
- *f(c)* é definida;
- $\lim\limits_{x\to c} f(x) = f(c)$.

Em outras palavras, o limite existe em $x = c$ (o que significa que a função tende a uma imagem); a função existe em $x = c$ (o que significa que não há um buraco); e o limite é igual ao valor da função (ou seja, o valor da função confere com o valor a que ela tende).

A maioria das funções estudadas no Ensino Médio têm a garantia de serem contínuas em qualquer ponto de seu domínio, incluindo funções polinomiais, exponenciais, logarítmicas e trigonométricas. A maioria das funções descontínuas encontradas devem-se a pontos indefinidos em funções racionais e saltos devido a funções definidas por várias sentenças.

Capítulo 4

NOÇÃO DE DERIVADA

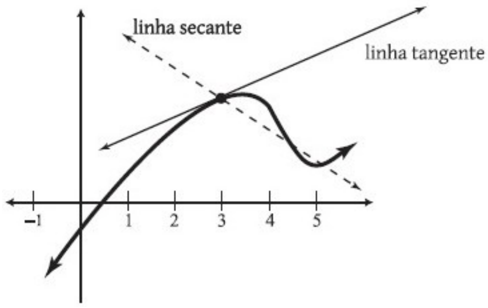
Este capítulo descreve a solução para um dos dilemas matemáticos mais complicados de todos os tempos: como calcular a inclinação de uma reta tangente a uma curva que pode ser representada por uma função não-linear. Usaremos os limites para preparar uma fórmula geral que nos permitirá encontrar a inclinação da tangente para uma função em qualquer ponto. Nessa apresentação a visualização geométrica deve ser enfatizada, pois é um recurso interessante para a compreensão do conceito de derivada.

A partir daqui tudo o que se falar em cálculo envolverá as derivadas em algum nível. Trataremos das duas interpretações de derivada: inclinação da tangente e taxa de variação. Veremos como essas ideias respondem a várias perguntas que frequentemente não são respondidas (principalmente envolvendo física) pelo professor do Ensino Médio, já que atualmente o referido tema não se encontra na grade curricular. Além disso, a derivada nos dá suporte para plotar gráficos de diversos tipos de funções dando-nos a possibilidade de calcular pontos de máximo e mínimo da função, ideia muito aplicada em situações que envolvem otimização como determinar a área máxima ou lucro máximo, por exemplo.

4.1 Definição de derivada

Antes de começarmos a calcular a inclinação de uma reta tangente a uma curva, é conveniente lembrar o que é uma *linha tangente* e *linha secante* para fazer referência à parte histórica já apresentada. A *tangente* é uma reta que simplesmente desliza ao longo da margem de uma curva, tocando-a em um único ponto, chamado ponto de tangência. Já a *secante* é uma linha que corta a curva em pelo menos dois pontos.

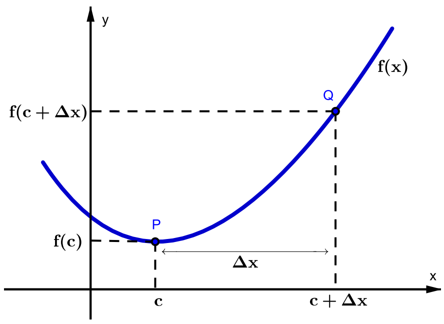
Figura 4.1: Linha secante e linha tangente a uma curva.



Fonte: referência [22] p.91

Para resolver o problema, supomos que a curva seja o gráfico de uma certa função f. Sejam $P = (c, f(c))$ e $Q = (c + \Delta x, f(c + \Delta x))$ dois pontos do gráfico de f, conforme mostra a figura 4.2

Figura 4.2: Ideia de derivada como declive.



Fonte: Autor - Geogebra

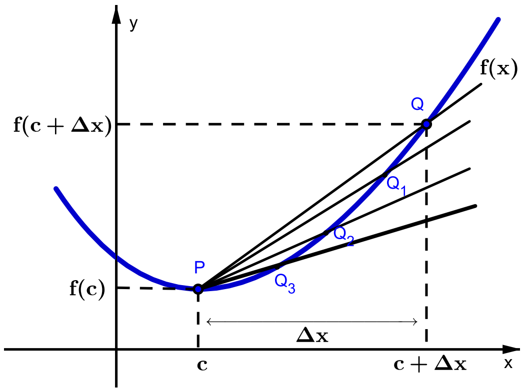
A inclinação (declive) da reta secante PQ é dada pelo quociente, conforme já estudado no 1º ano do Ensino Médio em funções lineares e no 3º ano em geometria analítica:

$$\frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{c + \Delta x - c} = \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x}$$

Esse quociente é também chamado de *razão incremental*, já que Δx é realmente um incremento que damos à abscissa de P para obter a abscissa de Q. Consequentemente, a ordenada $f(c + \Delta x)$ é obtida de $f(c)$ mediante o incremento $f(c + \Delta x) - f(c)$.

Como queremos traçar a tangente em P, mante-lo-emos fixo, enquanto fazemos o ponto Q aproximar-se de P, passando por sucessivas posições, Q_1, Q_2, Q_3, etc. Dessa forma, a secante PQ assumirá as posições PQ_1, PQ_2, PQ_3, etc., conforme mostra a figura 4.3. Portanto, esperamos que a razão incremental, que é o declive da secante, aproxime-se de um determinado valor m, à medida que o ponto Q se aproxima de P. Logo, definimos a *reta tangente* à curva no ponto P como sendo aquela que passa por P cujo declive ou coeficiente angular ou inclinação é m.

Figura 4.3: Ideia de derivada como limite.



Fonte: Autor - Geogebra

Para que isso aconteça, o número Δx deve aproximar-se cada vez mais de zero na razão incremental, ou seja, $\Delta x \to 0$. Dessa forma, podemos dizer que m é o *limite da razão incremental com* Δx *tendendo a zero*, ou seja, é a *derivada* da função f no ponto c e é indicada por f' e escrevemos:

$$\boxed{m = f'(c) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x}}$$

Além da notação mencionada acima, costumamos indicar a derivada de uma função $y = f(x)$ por y', Df ou $Df(x)$, notações devidas a Leibniz. Em Mecânica, é comum o uso do símbolo $\dot{y}$ para indicar a derivada de uma função y da variável tempo t, notação esta que é devida a Newton. Outra notação frequentemente usada, também devida a Leibniz, é $\dfrac{dy}{dx}$ ou $\dfrac{df}{dx}$.

É fundamental que o professor crie no Geogebra uma animação mostrando exatamente o que foi exposto para que o aluno perceba, com naturalidade, o conceito de limite na definição de derivada. O passo a passo da construção dessa animação está presente no apêndice A pág. 82.

4.2 Aplicações à Cinemática

Conforme vimos no capítulo 2 as ideias que levaram à introdução do conceito de derivada aparecem nos trabalhos de vários nomes marcantes da Matemática. Mas foi com Newton e Leibniz, trabalhando independentemente um do outro, que esse importante conceito se consolidou. Para Leibniz a derivada está associada ao problema da tangente a uma curva. Já Newton, dedicado aos seus estudos de Mecânica, foi levado a introduzir a derivada para caracterizar a velocidade instantânea de um móvel.

Para entender melhor isso, consideremos uma partícula que se move numa trajetória qualquer. Seja $s = s(t)$ o espaço percorrido pelo móvel até o instante t. Então, $\Delta s = s(t+\Delta t) - s(t)$ é o espaço percorrido desde o instante t até o instante $t+\Delta t$. A *velocidade média* v_m, nesse intervalo de tempo que vai de t a $t+\Delta t$, é definida como sendo o quociente do espaço percorrido pelo tempo gasto em percorrê-lo, ou seja,

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t}.$$

Dizemos que o movimento é *uniforme* quando a velocidade média tem o mesmo valor v para qualquer intervalo de tempo considerado. Assim,

$$v = \frac{s(t) - s_0}{t} \Longrightarrow s(t) = s_0 + vt,$$

onde s_0 é o "espaço inicial" para $t = 0$. Esta última equação é chamada *equação horária do movimento*. O professor pode fazer analogia à forma geral da função linear $f(x) = ax + b$ para que o aluno perceba que o gráfico da equação horária é uma reta com declive v e coeficiente linear s_0.

4.2.1 Velocidade instantânea

Caso o movimento não seja uniforme, a velocidade média nada nos dirá sobre o estado do movimento no instante t (ou em qualquer outro instante entre t e $t+\Delta t$). Podemos imaginar diversos movimentos distintos entre os instantes t e $t+\Delta t$, todos com a mesma velocidade média: em certos trechos, o móvel pode mover-se mais rapidamente, mais devagar ou até parar uma ou várias vezes antes de completar o percurso. Nesse contexto, como caracterizar o "estado de movimento" num dado instante t? Neste caso, é preciso deixar o tempo *fluir* para podermos analisar as características do movimento. Dessa forma, imaginamos intervalos de tempo Δt cada vez menores, para que as velocidades médias correspondentes possam dar-nos informações cada vez mais precisas do que se passa no instante t. Assim, o conceito de *velocidade instantânea*, $v = v(t)$, no instante t, como sendo o limite, com $\Delta t \to 0$ da razão incremental que dá a velocidade média, surge com certa naturalidade para o estudante que já estudou limite.

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

A velocidade instantânea é, então, a derivada do espaço em função do tempo. Newton deu-lhe o nome de *fluxão*, indicando-a com o símbolo $\dot{s}$. A posição e a velocidade do móvel a cada instante constituem o que chamamos de *estado de movimento*.

Diversos livros didáticos de Física do Ensino Médio abordam o conceito de velocidade instantânea exatamente como foi descrito acima. Sem a ferramenta cálculo nessa etapa do ensino, como fazer o aluno compreender esse conceito?

4.2.2 Movimento uniformemente variado

O conceito de *aceleração* é introduzido de maneira análoga ao de velocidade: ela mede a variação da velocidade em relação ao tempo. Podemos definir aceleração média e aceleração instantânea, sendo esta dada por

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2S}{dt^2}.$$

A notação $\dfrac{d^2S}{dt^2}$ representa a segunda derivada da função posição em relação ao tempo. Dizemos que um movimento é *uniformemente variado* quando sua aceleração for constante e diferente de zero. O caso mais notável desse tipo de movimento é o de um corpo em queda livre, estudo ao qual Galileu dedicou-se mais que qualquer um de seus predecessores.

Consideremos um movimento uniformemente variado com aceleração a. Sejam $v = v(t)$, sua velocidade num instante t e $v_0 = v(0)$ a velocidade inicial. Como a é constante, podemos escrever

$$\frac{v - v_0}{t} = a \Longrightarrow v = v_0 + at,$$

que é a *equação horária da velocidade.*

Outra fórmula do movimento uniformemente variado é a *equação horária do movimento* dada por $s = s_0 + v_0t + \dfrac{at^2}{2}$. Para alunos mais interessados e curiosos ela desperta um considerável interesse quanto a sua origem. Porém, sua demonstração, por razões didáticas, será mostrada no próximo capítulo como uma das aplicações de integral.

Esta seção é de relevante importância no estudo de física, pois, utilizando a ferramenta cálculo, é possível fazer a modelagem matemática de todas as equações que compõem a Cinemática. Atualmente, no Ensino Médio, essas equações apenas são expostas ao alunos como resultados prontos e acabados. Os discentes, sem opções, seguem seu estudo de Física, mas com alguns porquês em suas cabeças. Como vimos, suas demonstrações não abordam conceitos extremamente complexos a ponto de omiti-los do Ensino Médio.

4.3 Regras de derivação

Até agora, aprendemos como encontrar derivadas usando o quociente diferencial, porém se sempre procedermos dessa forma, certamente os cálculos tornar-se-ão demorados e tediosos. Daí vem a importância de o professor abordar as regras de derivação, a fim de dinamizar o estudo.

Como essas regras envolvem técnicas algébricas e este trabalho tem a finalidade de propor uma metodologia para o ensino das noções de cálculo I, então essas regras não serão tratadas aqui de forma específica, uma vez que o professor pode encontrá-las em diversos livros de cálculo. Sugerimos aos docentes as referências [2], [19] e [21]. O mestre deverá abordar as seguintes regras de derivação: derivada da soma e diferença de funções, derivada do produto e quociente de duas funções. Além disso, tratar das derivadas das funções estudadas no Ensino Médio, se possível demonstrando-as, tais como: funções polinomiais, exponencial, logarítmica e trigonométricas.

Outro ponto importante das regras de derivação é a regra da cadeia, aplicada para funções compostas. Nesse caso, o docente pode dispensar sua demonstração devido ao tratamento matemático mais minucioso. Aqui, o fundamental é que os discentes saibam utiliza-la. A demonstração pode ser deixada para um curso de Cálculo I mais rigoroso, geralmente visto no Ensino Superior.

A seguir apresentaremos apenas os resultados das regras e das derivadas citadas para uma melhor visualização do docente sobre os tópicos que necessita abordar em sala.

- Regras de derivação

Quadro 4.1: Regras de derivação

Derivada de uma constante	$f(x) = a,\ a \in \mathbb{R} \Longrightarrow f'(x) = 0$
Derivada da soma e/ou diferença	$[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$
Derivada de produto por uma constante	$[C \cdot f(x)]' = C \cdot f'(x)$
Derivada do produto	$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
Derivada do quociente	$\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]' = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$

Fonte: Autor

- Derivadas das funções elementares

Quadro 4.2: Derivadas das funções elementares

Derivada da função potência	$f(x) = a \cdot x^n$	$f'(x) = an \cdot x^{n-1}$
Derivada da função exponencial	$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x \cdot \ln a$
Derivada da função logarítmica	$f(x) = \log_a^x$	$f'(x) = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$
Derivada da função seno	$f(x) = \text{sen}x$	$f'(x) = \cos x$
Derivada da função cosseno	$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\text{sen}x$
Derivada da função tangente	$f(x) = \text{tg}x$	$f'(x) = \sec^2 x$

Fonte: Autor

- Regra da cadeia

As regras de derivação contidas no quadro 4.1 não são suficientes para o cálculo das derivadas de todas as funções que surgem na prática. Por exemplo, funções do tipo $y = \sqrt{4x-1}$ ou $y = (x^8+7)^{40}$. Nestes casos, temos uma função de outra função, uma "dentro da outra" (ou "composta com") outra.

Definição 4.1 (Regra da Cadeia). *Dada a função composta $h(x) = f(g(x))$, onde $f(x)$ e $g(x)$ são funções diferenciáveis, então temos que:*

$$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Ou seja, para determinar a derivada de uma expressão em que uma função está "presa" dentro de uma outra, você deve seguir os seguintes passos:

1. Descubra a derivada da função "de fora", isolando a função "de dentro";
2. Multiplique o resultado pela derivada da função "interna".

Em outras palavras, podemos escrever a regra da cadeia da seguinte forma:

$$\text{Se } y = u(x)\text{, então, } \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}}$$

Para esclarecer os passos propostos vamos derivar a função $y = (x^8+7)^{40}$.

<u>Solução</u>: Inicialmente, observe que temos duas funções $u = x^8+7$ (função "de dentro") e $y = u^{40}$ (função "de fora").
Aplicando a regra da cadeia precisamos calcular $\dfrac{dy}{du}$ e $\dfrac{du}{dx}$.
$\dfrac{dy}{du} = y' = 40u^{40-1} = 40u^{39}$ e $\dfrac{du}{dx} = u' = 8x^{8-1} = 8x^7$.
Portanto, $\dfrac{dy}{dx} = 40u^{39} \cdot 8x^7$. Mas, como $u = x^8+7$. Dessa forma:

$$\frac{dy}{dx} = y' = 40u^{39} \cdot 8x^7 = 40(x^8+7)^{39} \cdot 8x^7 = 320x^7(x^8+7)^{39}.$$

4.4 Taxas de Variação

Geometricamente, a derivada fornece a inclinação da reta tangente em um ponto da curva. E essa inclinação pode nos dizer muito sobre a curva. Mas não é só isso. Outra característica da derivada que é conveniente o professor explorar veementemente é: *a derivada de uma curva nos dá a taxa de variação instantânea da curva.* Isso é fundamental porque uma função curvilínea muda diferentemente em seu domínio − às vezes ela cresce rapidamente e a tangente é íngreme (resultando em uma derivada de valor alto). Em outras localizações, a curva pode crescer de forma rasa ou até mesmo decrescer, resultando em uma derivada baixa ou negativa, respectivamente.

A inclinação da tangente em uma curva nos dá a taxa de variação da curva naquele ponto (por exemplo, a taxa de variação instantânea, já que você só pode dizer o que está acontecendo naquele instante). A inclinação de uma secante em uma curva nos dá a taxa média de variação (razão incremental) em um intervalo específico.

4.5 Usando derivadas em gráficos

Esta seção trata de algumas aplicações das derivadas destinadas, principalmente, a construção do gráfico de uma função. Até aqui é importante que o professor se certifique que os alunos compreenderam bem as regras de derivação, pois, a partir daqui, elas serão empregadas para dinamizar as aplicações aqui expostas.

Para começar a abordar o tema o professor pode instigar os discentes a plotar o gráfico de uma função polinomial (grau maior que 2). Após alguns minutos, o docente poderá expor esse gráfico no Geogebra e pedir para que a turma comente as dificuldades encontradas para executar a tarefa. Provavelmente os alunos farão as seguintes perguntas: Como sei que a função cresce ou decresce até esse ponto? Em que ponto atingem o limite máximo ou mínimo? Como elas se curvam? etc. Identificar essas dificuldades ajuda o docente a mensurar se os discentes concentraram suas análises em pontos estratégicos do gráfico da função polinomial em questão.

A partir daí, o professor dará início aos assuntos tratados nessa seção para responder às indagações da turma. Alguns teoremas importantes serão comentados aqui, mas fugiremos de qualquer tipo de rigor nas demonstrações. O fundamental é que os alunos compreendam os teoremas. Para isso, serão apresentadas as interpretações geométricas deles.

No final da seção reuniremos todas as informações aqui tratadas para plotar o gráfico de uma função que será apresentada no momento oportuno.

4.5.1 Máximos e mínimos

Trataremos, inicialmente, de algumas definições que nos ajudarão a nortear a ideia de máximos e mínimos.

Definição 4.2. *Seja a função $f : D \to \mathbb{R}$ e seja $x_0 \in D$. Chamamos* vizinhança *de x_0 um intervalo* V *que pode ser interpretado como uma região do gráfico bastante próxima da abscissa x_0.*

Definição 4.3. *Dizemos que x_0 é um* ponto de máximo local *de* f *se existir uma vizinhança* V *de x_0 tal que: $(\forall x)(x \in V \implies f(x) \leq f(x_0))$. Neste caso, o valor de $f(x_0)$ é chamado* máximo local *de* f*.*

Definição 4.4. *Dizemos que x_0 é um* ponto de mínimo local *de* f *se existir uma vizinhança* V *de x_0 tal que: $(\forall x)(x \in V \implies f(x) \geq f(x_0))$. Neste caso, o valor de $f(x_0)$ é chamado* mínimo local *de* f*.*

Definição 4.5. *Dizemos que $f(x_0)$ é um* valor máximo absoluto *de* f *se $f(x_0) \geq f(x)$ para todo* x *do domínio de* f*, isto é, $f(x_0)$ é o maior valor que* f *assume.*

Definição 4.6. *Dizemos que $f(x_0)$ é um* valor mínimo absoluto *de* f *se $f(x_0) \leq f(x)$ para todo* x *do domínio de* f*, isto é, $f(x_0)$ é o menor valor que* f *assume.*

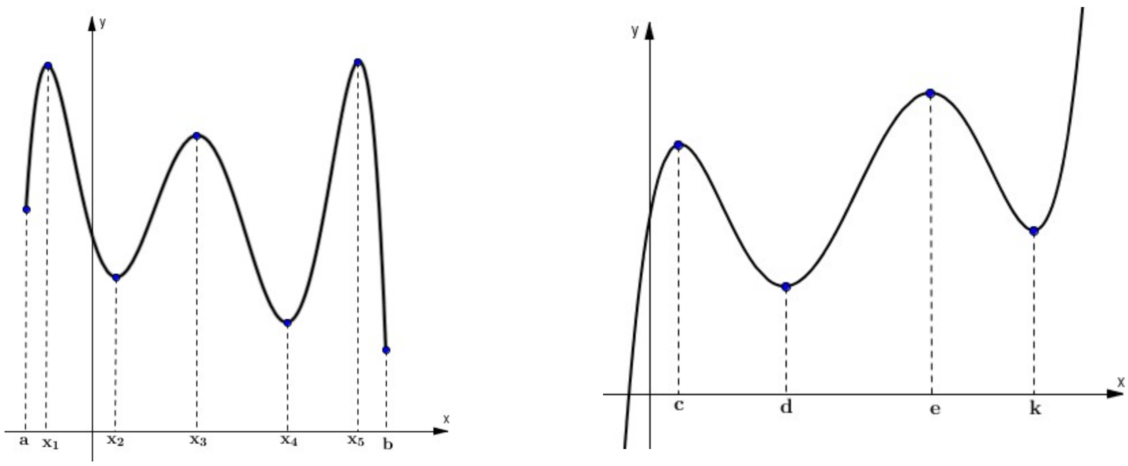
Na figura 4.4a os pontos a, x_2, x_4 e b são pontos de mínimo locais, enquanto que x_1, x_3 e x_5 são pontos de máximo locais. Os pontos de máximo e mínimo locais que não são extremos do intervalo em que a função está definida são chamados de *pontos de máximo ou mínimo locais interiores.*

Já na figura 4.4b, observamos que a função tem máximos e mínimos locais, mas não apresenta um máximo e um mínimo absoluto.

Figura 4.4: Gráficos de funções com pontos de máximo e mínimo

(a) Gráfico com máximos e mínimos locais

(b) Gráfico sem máximo e mínimo absoluto



Fonte: Autor - Geogebra

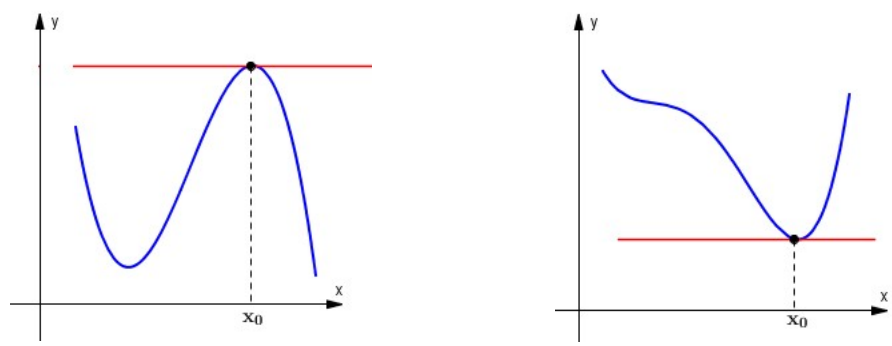
Teorema 4.1 (**Teorema de Fermat**). *Se $f : D \to \mathbb{R}$ é uma função derivável no ponto $x_0 \in D$ e x_0 é ponto extremo local interior de f, então, $f'(x) = 0$.*

Embora a demonstração desse teorema seja bastante simples ficará a cargo do professor mostrá-la à turma (para isso, sugerimos a referência [21]). Trataremos aqui da sua interpretação geométrica.

Figura 4.5: Interpretação geométrica do Teorema de Fermat

(a) $f(x_0)$ é máximo local interior

(b) $f(x_0)$ é mínimo local interior



Fonte: Autor - Geogebra

O Teorema de Fermat garante que num extremo local interior de uma função derivável f, a reta tangente ao gráfico de f é paralela ao eixo das abscissas.

4.5.2 Derivadas – crescimento – decréscimo

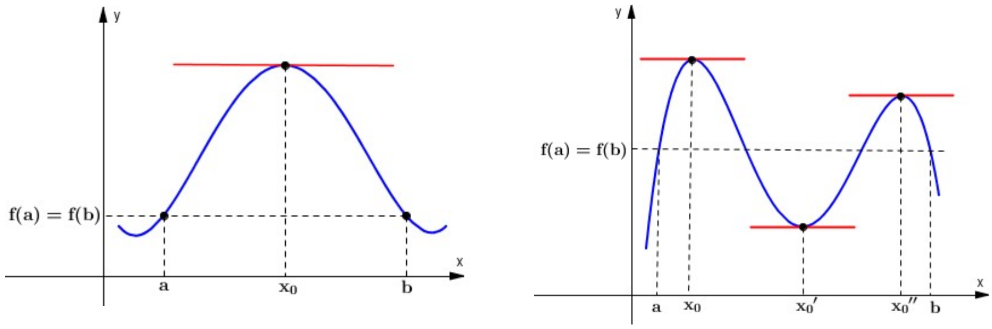
Essa seção trata de alguns teoremas que terminam por estabelecer um elo entre a derivada de uma função e crescimento ou decréscimo desta.

Teorema 4.2 (**Teorema de Rolle**). *Se f é uma função contínua em $[a, b]$, é derivável em $]a, b[$, e $f(a) = f(b)$, então existe pelo menos um ponto $x_0 \in]a, b[$ tal que $f'(x_0) = 0$.*

Figura 4.6: Interpretação geométrica do Teorema de Rolle

(a) $f(x_0)$ é máximo local interior

(b) $f(x_0)$ e $f(x_0'')$ são máximos locais e $f(x_0')$ é mínimo local



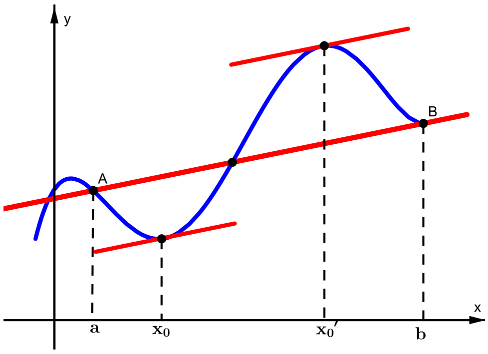
Fonte: Autor - Geogebra

Interpretado geometricamente, o teorema de Rolle afirma que, se uma função é derivável em $]a, b[$, contínua em $[a, b]$ e assume valores iguais nos extremos do intervalo, então algum ponto de $]a, b[$ a tangente ao gráfico de f é paralela ao eixo dos x, conforme mostram os gráficos da figura 4.6

Teorema 4.3 (**Teorema do Valor Médio**). *Se f é contínua em $[a, b]$ e derivável em $]a, b[$, então existe ao menos um ponto $x_0 \in]a, b[$ tal que $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_0)$.*

Geometricamente falando, se f é uma função contínua em $[a, b]$ e derivável em $]a, b[$, então existe um ponto $x_0 \in]a, b[$ tal que a reta tangente ao gráfico de f no ponto $P = (x_0, f(x_0))$ é paralela à reta determinada pelos pontos $A = (a, f(a))$ e $B = (b, f(b))$, já que possuem coeficientes angulares iguais.

Figura 4.7: Interpretação geométrica do Teorema do Valor Médio



Fonte: Autor - Geogebra

Portanto, sendo f uma função contínua em $[a, b]$ e derivável em $]a, b[$, temos:

(I) $f'(x) \geq 0$ *em* $]a, b[\Longleftrightarrow f$ *é crescente em* $[a, b]$

(II) $f'(x) \leq 0$ *em* $]a, b[\Longleftrightarrow f$ *é decrescente em* $[a, b]$

4.5.3 Concavidade e Pontos de Inflexão

Definição 4.7. *Seja f uma função contínua no intervalo* $[a, b]$ *e derivável no ponto* $x_0 \in]a, b[$. *Dizemos que o gráfico tem concavidade positiva (para cima) em* x_0 *se, e somente se, existe uma vizinhança* V *de* x_0 *tal que, para* $x \in V$, *os pontos do gráfico de f estão acima da reta tangente à curva no ponto* x_0.

Analogamente, se existe uma vizinhança V *de* x_0 *tal que, para* $x \in V$, *os pontos do gráfico de f estão abaixo da reta tangente à curva no ponto* x_0, *dizemos que o gráfico de f tem concavidade negativa (para baixo).*

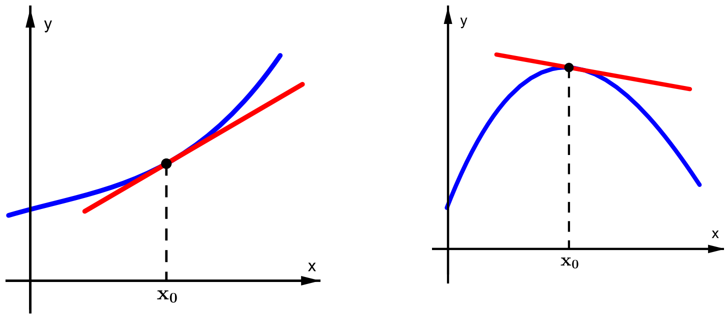
Teorema 4.4. *Se f é uma função derivável até segunda ordem no intervalo* $[a, b]$, x_0 *é interno a* $[a, b]$ *e* $f''(x) \neq 0$, *então:*

(I) quando $f''(x) > 0$, *o gráfico de* f *tem concavidade positiva em* x_0;

(II) quando $f''(x) < 0$, *o gráfico de* f *tem concavidade negativa em* x_0.

Figura 4.8: Concavidade de uma função

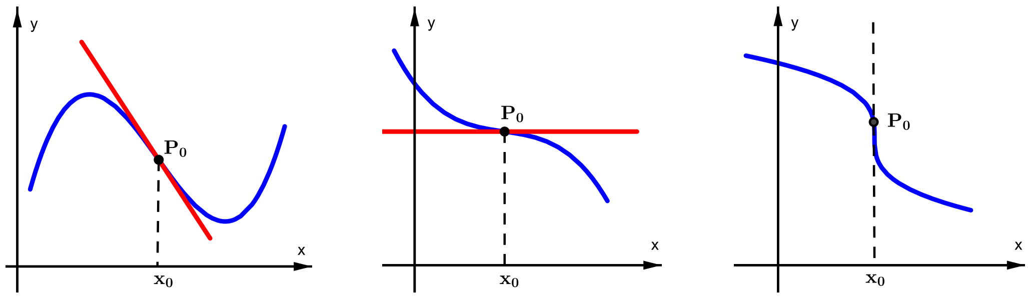
(a) Função com concavidade positiva (b) Função com concavidade negativa



Fonte: Autor - Geogebra

Definição 4.8. *Seja f uma função contínua no intervalo* $[a, b]$ *e derivável no ponto* $x_0 \in]a, b[$. *Dizemos que* $P_0 = (x_0, f(x_0))$ *é um ponto de inflexão do gráfico de f se, e somente se, a concavidade "troca de sinal" nesse ponto.*

Figura 4.9: Exemplos diversos de ponto de inflexão.



Fonte: Autor - Geogebra

4.5.4 Uma relevante aplicação no Ensino Médio

Diversos livros de Ensino Médio, por exemplo, na coleção Matemática Aula por Aula (Barreto Filho, 2003, p.104) o autor apresenta o vértice da parábola como sendo o ponto de interseção do eixo de simetria com a própria parábola. Dessa forma, para justificar as coordenadas do vértice, o autor utiliza a fórmula de resolução de equações do 2º grau e o fato da abscissa do mesmo ser a média aritmética entre as raízes x_1 e x_2 da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$. Daí,

$$x_V = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{\frac{-b}{a}}{2} \Longrightarrow \boxed{x_V = \frac{-b}{2a}}$$

Em seguida, obtem-se a ordenada desse ponto substituindo x_V na função. Logo,

$$\boxed{y_V = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a}}$$

A questão é que ao considerar abscissa do vértice como a média aritmética entre as raízes, o autor parte da premissa de que existem zeros reais o que, sabe-se, nem sempre ocorre. Dessa forma, pode não fazer sentido para o aluno considerar raízes da mesma e, nesse caso, a busca pelo extremo da função estaria comprometida. Porém, alguém poderia questionar argumentando que se a função não tem zeros reais, então, tem complexos. Dessa forma, seria possível encontrar o extremo utilizando o mesmo raciocínio empregado pelo autor da obra citada. Atualmente, o tema números complexos não faz mais parte do conteúdo programático do Ensino Médio. Portanto, mais uma vez, o aluno carrega questionamentos para o futuro, o que prejudica a aprendizagem.

Entretanto, utilizando a interpretação geométrica da derivada (coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função em cada ponto) pode-se obter as coordenadas do vértice da parábola sem considerar os possíveis zeros da função. Notamos que, no vértice, a reta tangente é horizontal, logo possui coeficiente angular igual a zero, já que o vértice é ponto de máximo ou mínimo absoluto da função.

Seja $f(x) = ax^2 + bx + c$ a forma geral da função quadrática. Derivando-a em relação a x, temos: $f'(x) = 2ax + b$. Mas, no vértice $f'(x) = 0$, então:

$$f'(x) = 2ax_V + b = 0 \Longrightarrow 2ax_V = -b \Longrightarrow x_V = \frac{-b}{2a}$$

Outro ponto que no Ensino Médio é apenas mencionado e não explicado é quanto a concavidade da parábola. Os livros didáticos limitam-se a dizer sem explicar o porquê que, quando $a > 0$ a parábola é côncava para cima (concavidade positiva) e, quando $a < 0$ é côncava para baixo (concavidade para baixo). Pelo que já vimos o teste da segunda derivada facilmente responde a essa pergunta. Dessa forma, derivando novamente em relação a x obtemos $f''(x) = 2a$. Portanto, a concavidade da parábola depende apenas do sinal de a.

Dessa forma, se utilizarmos o cálculo diferencial a compreensão de algumas propriedades e conceitos se dá de maneira mais natural e contextualizada.

4.5.5 Variação das funções

Utilizaremos as definições e teoremas aqui expostos para estudar a varição de uma função *f*. Para caracterizar como varia uma função *f*, procuramos determinar:

a) o domínio;

b) a paridade;

c) os pontos de descontinuidade;

d) as interseções do gráfico com os eixos x e y;

e) o comportamento no infinito;

f) o crescimento ou decrescimento;

g) os pontos de inflexão e a concavidade;

h) o gráfico.

O professor deve orientar os discentes para que estes utilizem em seus smartphones algum aplicativo instalado que plote gráfico de funções para uma melhor orientação. Plotar gráficos de funções seguindo o roteiro proposto é um dos pontos centrais deste trabalho, pois envolve muito o que já foi tratado até aqui. O professor deverá dar uma atenção especial a este tópico orientando os alunos a exercitarem bastante o estudo de variação de uma função.

Vamos estudar a variação da função $f(x) = x^4 - 2x^2 - 3$. O motivo da escolha dessa função é estratégico, porque ainda no Ensino Fundamental, os alunos aprendem a calcular raízes de uma equação biquadrada. No caso da função, é um dos raros momentos que os discentes terão contato com funções polinomiais de grau maior que 2.
Solução:

a) o domínio de *f(x)*;

Como toda função polinomial o domínio é $\mathbb{R}$.

b) a paridade;

Como toda função par o gráfico desta função será simétrico em relação ao eixo das ordenadas. Além disso:

$$f(-x) = (-x)^4 - 2(-x)^2 - 3 = x^4 - 2x^2 - 3 = f(x).$$

c) os pontos de descontinuidade;

A função polinomial é contínua em $\mathbb{R}$.

d) as interseções do gráfico com os eixos x e y;

Fazendo $f(x) = 0$ e resolvendo a equação biquadrada teremos que as soluções em $\mathbb{R}$ são: $x_1 = -\sqrt{3}$ e $x_2 = \sqrt{3}$. Substituindo $x = 0$ na função, temos $f(0) = -3$. Portanto as interseções com os eixos são os pontos $(0, -3)$, $(-\sqrt{3}, 0)$ e $(\sqrt{3}, 0)$.

e) o comportamento no infinito;

Fazemos $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

f) o crescimento ou decrescimento;

Derivando f em relação a x temos $f'(x) = 4x^3 - 4x$. Daí, tomando $f'(x) = 0 \Longrightarrow 4x^3 - 4x = 0 \Longrightarrow 4x(x^2 - 1) = 0$. Dessa forma teremos que $x = -1, 0, 1$ são pontos de máximo ou mínimo locais. Portanto, os intervalos de crescimento e decrescimento da função estão descritos na figura 4.10

Figura 4.10: Análise dos intervalos de crescimento e decrescimento da função

(a) Sinais da 1ª derivada nos intervalos dos extremos

(b) Intervalos de crescimento e decrescimento de *f(x)*

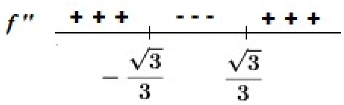
Fonte: Autor - Geogebra

g) os pontos de inflexão e concavidade;

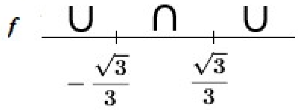
Calculando a derivada segunda de $f(x)$ temos: $f''(x) = 12x^2 - 4$. Teremos, assim, um ponto de inflexão quando $f''(x) = 0$. Daí, $f''(x) = 12x^2 - 4 = 0 \Longrightarrow x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Esses são as abscissas dos pontos de inflexão. As ordenadas são $-\dfrac{32}{9}$. A figura 4.11 a seguir descreve a concavidade de *f*.

Figura 4.11: Análise da concavidade da função

(a) Sinais da 2ª derivada nos intervalos dos extremantes



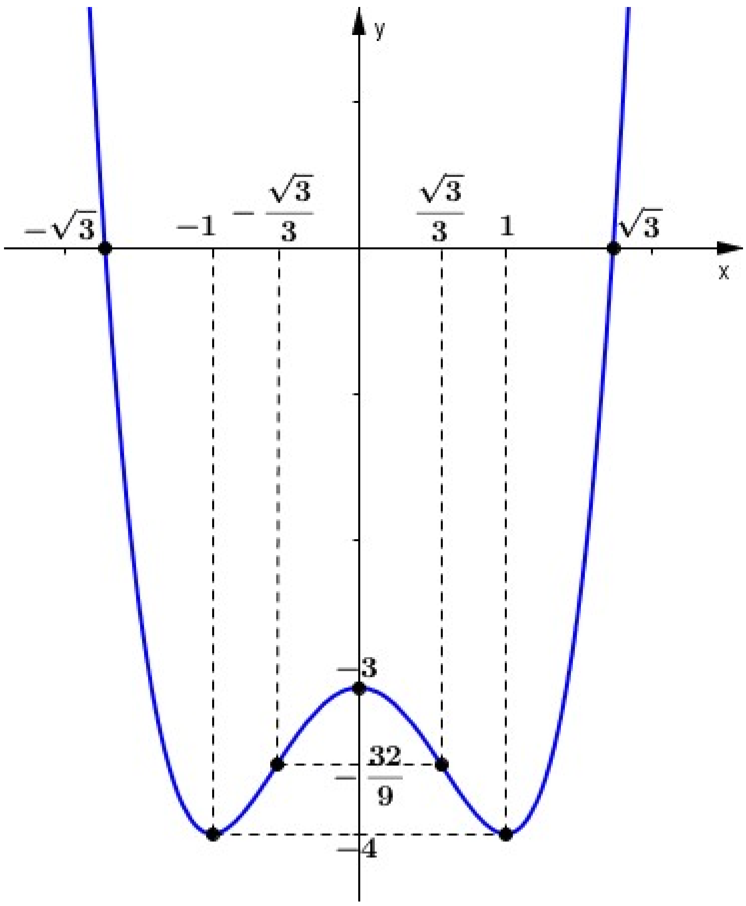
(b) Intervalos da concavidade de *f(x)*



Fonte: Autor - Geogebra

h) o gráfico.

Figura 4.12: Gráfico da função $f(x) = x^4 - 2x^2 - 3$.



Fonte: Autor - Geogebra

Reunindo todas as informações acima podemos plotar o gráfico da função $f(x)$, conforme mostra a figura 4.12

Capítulo 5

NOÇÃO DE INTEGRAL

A noção de integral surgiu da necessidade de se calcular áreas de figuras planas cujos contornos não são segmentos de reta.

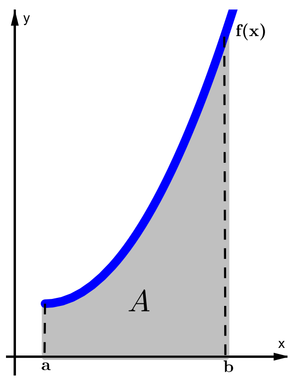
Este capítulo apresenta a integral como área sob o gráfico de uma função e, em seguida, com a noção de primitiva. Também será apresentado o Teorema Fundamental do Cálculo, que explica a relação exata entre integrais e a área limitada pela curva e o eixo das abscissas. Essa relação é direta e pode ser útil. Na sequência trataremos do cálculo de integrais das funções elementares (estudadas no Ensino Médio). Por último apresentaremos algumas aplicações interessantes e relevantes na Mecânica e no cálculo de volumes.

5.1 Área - Somas de Riemann

Inicialmente, consideremos o problema de calcular a área A da região limitada pela função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e o eixo das abscissas, conforme mostra a figura 5.1

Queremos tentar e descobrir a área do espaço sombreado, porém não dispomos de nenhuma fórmula geométrica que nos ajude a encontrar a área de uma figura curva. Para começar, vamos aproximar a área usando figuras cujas áreas já possuem fórmulas. O processo de usar retângulos (que possui fórmula) para aproximar uma área se chama *soma de Riemann*, que será detalhada a seguir.

Figura 5.1: Área sob o gráfico da função *f(x)* no intervalo $[a, b]$.



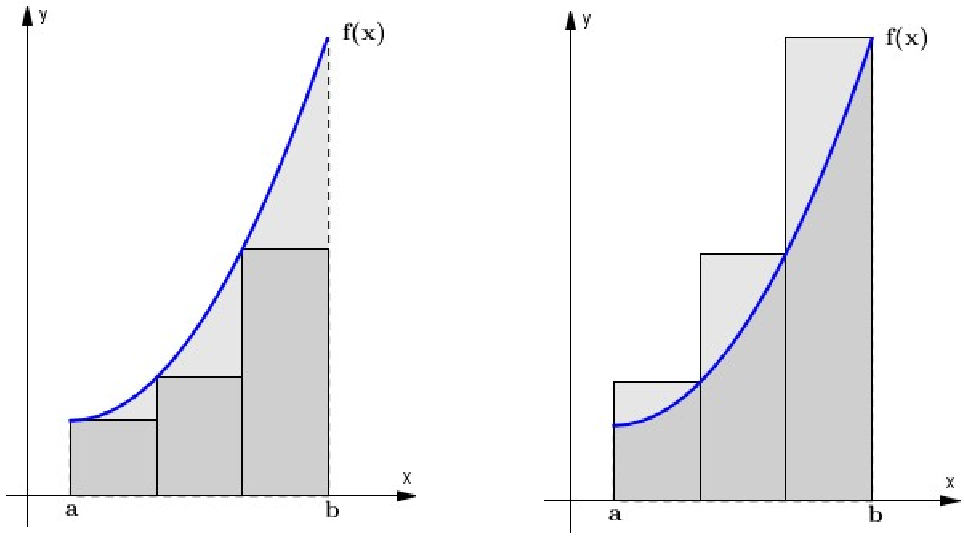
Fonte: Autor - Geogebra

5.1.1 Soma à direita e à esquerda

Para simplificar o entendimento vamos aproximar a área do espaço sombreado utilizando três retângulos. Na figura 5.2a somamos à esquerda, pois o canto esquerdo superior do retângulo toca a curva. Cada retângulo possui a mesma medida da base e a altura de cada é dada pela altura da função da borda esquerda do retângulo. Analogamente, na figura 5.2b somamos à direita.

Figura 5.2: Aproximação da área sombreada por soma à esquerda e à direita.

(a) Soma à esquerda (b) Soma à direita



Fonte: Autor - Geogebra

Claramente, a área que os retângulos abrangem na figura 5.2a é menor do que o que há abaixo da curva, já que porções grandes dessa aréa não foram abrangidas pelos retângulos. Entretanto, na figura 5.2b, a área que os retângulos abrangem é bem maior do que o há abaixo da curva.

Em seguida, o professor pode perguntar aos alunos: o que fazer para que a soma das áreas dos retângulos se ajustem muito mais à área sombreada? Espera-se que os discentes cheguem a conclusão que se deve aumentar o número de retângulos.

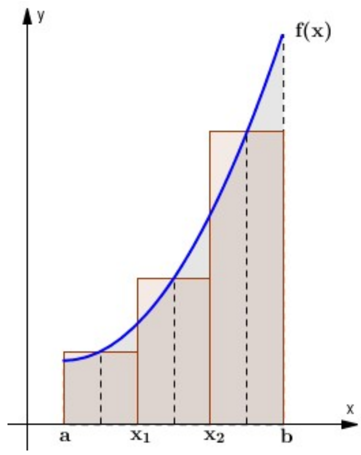
No apêndice B (pág. 84) há o passo a passo da construção no Geogebra das somas à direita e à esquerda para que o professor reproduza e mostre aos alunos.

5.1.2 Soma média

A soma média é bem parecida com as somas à direta e à esquerda. A única diferença é a forma como se define a altura dos retângulos. Essa altura será o valor da função no ponto central do intervalo. Por exemplo, observando a figura 5.3 a altura de um dos retângulos será a ordenada do ponto médio das abscissas a e x_1. Comparando com a figura 5.2(a), note que houve uma maior aproximação das áreas dos retângulos com a área sombreada.

Também observamos que, a medida que aumentamos o número de retângulos, a medida da base de cada um diminui. Os matemáticos do século XVII interpretavam a área sob um gráfico como soma de uma infinidade de retângulos verticais, já que em cada ponto x há um retângulo de altura *f(x)* e base infinitamente pequena, indicada por dx, de sorte que a área desse retângulo é dada pelo produto $f(x) \cdot dx$, que também é uma quantidade infinitamente pequena. Escrevemos matematicamente a referida área A da seguinte maneira:

Figura 5.3: Obtenção da área sombreada utilizando a soma média.



Fonte: Autor - Geogebra

$$\mathbf{A} = \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{f(x)dx}$$

Essas quantidades "infinitamente pequenas" receberam o nome de *infinitésimos*.

Há outros métodos geométricos para se obter a área sob um gráfico como o método do trapézio (que aproxima dois pontos seguidos por retas) e o método de Simpson (que aproxima três pontos seguidos por uma parábola). Fica a cargo do professor decidir mostrá-los ou não à turma.

5.2 Primitivas

Definição 5.1. *Dizemos que uma função F é primitiva de uma outra função f se esta é a derivada daquela, isto é, se $F' = f$.*

Por exemplo, x^6 é primitiva de $6x^5$ e sen x é primitiva de cos x. Como a derivada de uma constante C é sempre zero, se F é primitiva de f, então $F + C$ também é. Dessa forma, uma função f, com primitiva F, tem uma infinidade de primitivas, do tipo $F(x) + C$. A partir desse momento passaremos a chamar a primitiva de uma função de *integral* desta função. O quadro 5.1 mostra a integral das funções elementares.

Além disso, é importante que o professor deixe bem claro aos alunos a relação que existe entre integrais e derivadas − que uma é a operação inversa da outra.

Quadro 5.1: Primitivas das funções elementares.

Função	**Primitiva**
Constante	$\int dx = x + C$
Potência	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$
Exponencial	$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, a > 0$
Seno	$\int \text{sen } x \, dx = -\cos \; x + C$
Cosseno	$\int \cos x \, dx = \text{ sen } x + C$
Tangente	$\int \text{tg}x \, dx = \ln \lvert \sec \; x \rvert + C$
$y = \frac{1}{x}$	$\int \frac{1}{x} \cdot dx = \ln \lvert x \rvert + C$

Fonte: Autor

5.2.1 Propriedades da integral

Sejam f, g integráveis em $[a, b]$ e C uma constante. Então:

a) Aditividade: $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$

b) Multiplicação por escalar: $\int_a^b Cf(x)dx = C \cdot \int_a^b f(x)dx.$

c) Aditividade por intervalos: Sendo f integrável nos intervalos $[a, c]$ e $[c, b]$. Daí:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

5.3 Teorema Fundamental do Cálculo

O intuito de apresentar este teorema é embasar o cálculo de áreas. Logo, abordar sua demonstração é irrelevante aos alunos e deve ser omitida pelo professor.

Definição 5.2. *Se f for integrável em $[a, b]$ e se F for uma primitiva de f em $[a, b]$, então:*

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)}$$

5.3.1 Calculando a área entre duas curvas

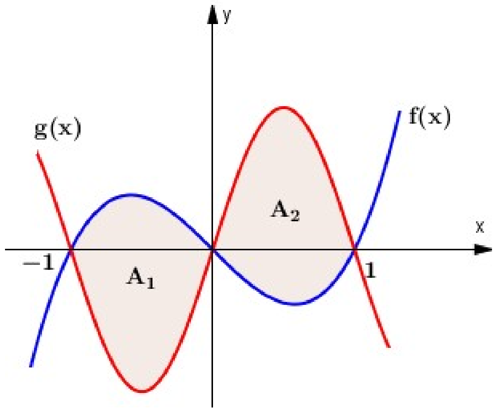
Exercícios que pedem o cálculo de áreas entre duas curvas são bastante interessantes, além de explorar quase tudo o que foi visto até aqui, pois é extremamente importante esboçar o gráfico das curvas. Esse tipo de exercício deve ser explorado pelo professor, pois há várias aplicações em diversas áreas do conhecimentos envolvendo essa modelagem. Por exemplo, em Física, o trabalho de uma força é dado pela integral da função força em relação ao deslocamento que ela provoca no corpo. Esse tipo de situação ocorre com frequência em livros didáticos da disciplina.

Resolveremos um exercício do tipo para que o professor se oriente. Mas antes, é recomendável que o docente veja a seção 5.4.1, pois na solução do exercício será necessário o uso da técnica da substituição para resolver uma das integrais. Por exemplo, calcule a área A do plano limitado pelos gráficos de $f(x) = x^3 - x$ e $g(x) = \text{sen}(\pi x)$, com $-1 \leq x \leq 1$.

Inicialmente, "plotamos" o gráfico de $f(x)$ e $g(x)$, utilizando algum recurso tecnológico proposto, conforme mostra a figura 5.4

Observando o gráfico, percebemos que a área pedida está dividida em duas regiões: $A_1(-1 \leq x \leq 0)$ e A_2 $(0 \leq x \leq 1)$. Daí:

Figura 5.4: Área definida entre $f(x)$ e $g(x)$ para $-1 \leq x \leq 1$.



Fonte: Autor - Geogebra

$A_1 = \int_{-1}^{0} [f(x) - g(x)]dx$, pois o gráfico de *f(x)* está acima do de *g(x)*.

Então, $A_1 = \int_{-1}^{0} (x^3 - x)\, dx - \int_{-1}^{0} \text{sen}(\pi x)\, dx$, onde:

$$\int_{-1}^{0} (x^3 - x)\, dx = \frac{x^4}{4}\Big|_{-1}^{0} - \frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{0} = \frac{[0^4 - (-1)^4]}{4} - \frac{[0^2 - (-1)^2]}{2} = \frac{-1}{4} - \left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{1}{4}\ u.a$$

Vamos, agora, resolver $\int_{-1}^{0} \text{sen}(\pi x)dx$

Fazendo $u = \pi x \Longrightarrow du = \pi dx$. Quando: $\begin{cases} x = -1, & u = -\pi; \\ x = 0, & u = 0. \end{cases}$ Reescrevendo a integral:

$$\int_{-\pi}^{0} \text{sen}\ u \cdot \frac{du}{\pi} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} \text{sen}\ u\ du = \frac{1}{\pi}\left(-\cos u\ |_{-\pi}^{0}\right) = -\frac{1}{\pi}(\cos\ 0 - \cos\ \pi) = -\frac{1}{\pi}[1 - (-1)] = -\frac{2}{\pi}$$

Logo, $A_1 = \frac{1}{4} - \left(-\frac{2}{\pi}\right) = \frac{\pi + 8}{4\pi}\ u.a.$

Analisando o gráfico vemos que, por simetria, $A_2 = A_1$. Os cálculos são realizados de maneira análoga atentando para o fato que: $A_2 = \int_{0}^{1} [g(x) - f(x)]dx$, pois, nessa parte, o gráfico de *g(x)* está acima do de *f(x)*.

Portanto, a área pedida é igual a $A_1 + A_2 = 2 \cdot \frac{\pi + 8}{4\pi} = \frac{\pi + 8}{2\pi}\ u.a.$

5.4 Algumas técnicas de integração

Essa seção trata de algumas técnicas que permitem encontrar primitivas de determinadas funções. Dois desses métodos são elementares, por isso não podem ser ignorados nem num curso de noções iniciais de integral. São eles: *integração por substituição* e a *integração por partes.* A importância dessas técnicas elementares não se deve apenas para calcular primitivas de certas funções, mas também por serem instrumentos relevantes para o desenvolvimento de várias outras técnicas mais avançadas no Cálculo.

5.4.1 Integração por substituição

Até o momento aprendemos como calcular integrais de funções que possuem primitivas imediatas como as mostradas no quadro 5.1. Por exemplo:

$$\int \text{sen}\, x\, dx = -\cos x + C, \quad \int 3x^4\, dx = \frac{3}{5}x^5 + C \quad e \quad \int e^x\, dx = e^x + C.$$

Mas, como integrar funções como $x \cdot \text{sen} x$, $\cos^2 x$ e $\text{sen}\,(\pi x)$ (resolvida no exemplo da seção anterior)? Há várias técnicas para se fazer isso. Cada uma delas é adequada para cada tipo de função. Às vezes um deles funciona bem para um certo tipo de função, mas é completamente inadequado para outras. Pode acontecer também de que ambas as técnicas se apliquem a uma mesma função. Veremos, inicialmente, como aplicar a integração por substituição.

A chave para a substituição é encontrar uma parte da função cuja derivada esteja também na função. A derivada pode aparecer a menos de um coeficiente, mas, do contrário, deve aparecer na própria função. Para isso devemos procurar por uma parte da função cuja derivada também apareça na função; denominadores, bases de potências e arcos são boas opções. Em seguida, isolamos a parte escolhida a u (por exemplo) e encontramos a derivada. Por último, usamos as suas expressões u e du para substituir partes da integral original, e a sua nova integral, após a substituição (mudança de variável de x para u, por exemplo) ficará mais fácil de resolver, pois será uma imediata.

Para tornar esse roteiro mais claro, resolvamos $\int (e^{\text{sen } x} \cdot \cos\ x)\ dx$.

Solução:

Pelas sugestões expostas acima é plausível fazermos a substituição $u =$ sen x. Derivando u em relação a x, temos:

$$\frac{du}{dx} = \cos\ x \Longrightarrow dx = \frac{du}{\cos\ x}$$

Então, reescrevendo a integral após a substituição, segue que:

$$\int e^u \cdot \cos\ x \cdot \frac{du}{\cos\ x} = \int e^u \cdot du$$

Notamos que, após a substituição, temos uma integral imediata. Portanto:

$$\int e^u \cdot du = e^u + C, \text{onde C é uma constante.}$$

Mas, como fizemos $u =$ sen x, teremos que $\int (e^{\text{sen } x} \cdot \cos\ x)\ dx = e^{\text{sen } x} + C$.

5.4.2 Integração por partes

A integração por partes baseia-se na regra de derivação de um produto de duas funções $u = u(x)$ e $v = v(x)$. Sabemos que:

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

Integrando ambos os lados em relação a x, temos:

$$\int (u(x) \cdot v(x))'\ dx = \int (u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x))\ dx$$
$$\int (u(x) \cdot v(x))'\ dx = \int u'(x) \cdot v(x) dx + \int u(x) \cdot v'(x)\ dx$$
$$u(x) \cdot v(x) = \int v(x) \cdot u'(x)\ dx + \int u(x) \cdot v'(x)\ dx$$
$$\int u(x) \cdot v'(x)\ dx = u(x) \cdot v(x) - \int v(x) \cdot u'(x)\ dx$$

Observe que ela pode ser também escrita na forma:

$$\boxed{\int u\ dv = u \cdot v - \int v\ du}$$

A integração por partes separa a integral em duas partes. Uma delas (que chamaremos de u) deve ser fácil de diferenciar. A outra (que vamos chamar de dv), deve ser fácil de integrar.

Em seguida, devemos diferenciar u para obter du (como na substituição u), e integrar dv para obter v.

Por exemplo, vamos calcular $\int (x \cdot \text{sen } x)\, dx$.

Solução:

Fazendo: $u = x$ e $dv = \text{ sen } x\, dx$

Derivando u em relação a x, temos: $du = dx$

Integrando ambos os lados de $dv = \text{ sen } x\, dx$ segue que: $v = -\cos\, x$

Substituindo na expressão da integração por partes

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du$$

$$\int (x \cdot \text{ sen } x)\, dx = x \cdot (-\cos\, x) - \int (-\cos\, x)\, dx$$

$$\int (x \cdot \text{ sen } x)\, dx = -x \cdot \cos\, x + \int \cos\, x\, dx$$

Portanto,

$$\int (x \cdot \text{ sen } x)\, dx = -x \cdot \cos\, x + \text{ sen } x + C.\text{onde C é uma constante.}$$

5.5 Algumas aplicações das integrais

5.5.1 Equação horária da posição

Vamos demonstrar, usando integral, a equação horária da posição do movimento uniformemente variado.

Para começar, relembramos a equação horária da velocidade $v = v_0 + at$, onde v, v_0, a e t são, respectivamente, a velocidade final, velocidade inicial, aceleração e tempo. Mas, a velocidade é a taxa de variação da posição em relação ao tempo escrita matematicamente por $v = \dfrac{dS}{dt}$. Neste momento, cabe que o professor esclareça aos alunos a interpretação dessa notação de derivada àquela proposta por Leibniz. Então:

$$\frac{dS}{dt} = v_0 + at. \text{ Daí:}$$

$$dS = (v_0 + at)\, dt \Longrightarrow dS = v_0\, dt + at\, dt$$

Integrando ambos os lados da equação, temos:

$$\int_{S_0}^{S} dS = \int_{t_0}^{t} v_0\, dt + \int_{t_0}^{t} at\, dt$$

$$S|_{S_0}^{S} = v_0 \cdot t|_{t_0}^{t} + a \cdot \left.\frac{t^2}{2}\right|_{t_0}^{t}$$

$$S - S_0 = v_0(t - t_0) + \frac{a}{2} \cdot (t^2 - t_0^2). \text{ Fazendo } t_0 = 0$$

$$S - S_0 = v_0(t - 0) + \frac{a}{2} \cdot (t^2 - 0^2)$$

Dessa forma, segue a equação horária da posição do movimento uniformemente variado

$$\boxed{S = S_0 + v_0 t + \frac{a}{2} \cdot t^2}$$

5.5.2 Cálculo de volumes

Essa aplicação da integral visa contemplar os alunos do 2º ano do Ensino Médio quando estudam geometria espacial. Os livros didáticos do Ensino Médio apenas apresentar a fórmula para o cálculo de volumes dos sólidos, porém, quando os discentes se deparam com a fórmula do volume do cone ou pirâmide e volume da esfera é comum perguntarem ao professor: Por que para calcular o volume do cone ou pirâmide temos que dividir por 3 o produto da área da base pela altura do sólido? De onde vem o fator 4/3 na fórmula do volume da esfera? Novamente, o Cálculo serve como ferramenta para responder a essas dúvidas dos alunos.

Consideremos o sólido de revolução gerado a partir da rotação do gráfico de f em torno do eixo x, sendo $f(x) \geq 0$ em $[a, b]$, conforme a figura 5.5. Dessa forma, o volume do sólido gerado é dado por:

$$\boxed{V = \pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2\, dx}$$

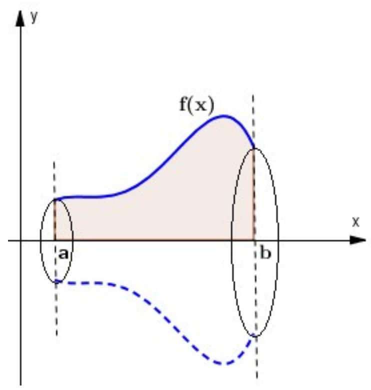


Figura 5.5: Volume da curva rotacionada em relação ao eixo x.

Não mostraremos aqui a demonstração dessa fórmula apesar de não ser de difícil entendimento para alunos do Ensino Médio. Fica a cargo do professor demonstrá-la à turma.

Para calcular o volume de um cone circular de raio r e altura h, podemos ter:

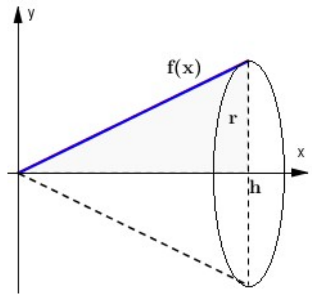


Figura 5.6: Volume do cone circular por integral.

$$f(x) = \frac{r}{h}x$$

Logo: $V = \pi \cdot \int_0^h \left(\frac{r}{h}x\right)^2 dx$

$V = \pi \cdot \frac{r^2}{h^2} \cdot \int_0^h x^2 dx = \pi \cdot \frac{r^2}{h^2} \cdot \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^h$

$V = \pi \cdot \frac{r^2}{h^2} \cdot \frac{h^3}{3}$

$$\boxed{V = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 h}$$

No caso de uma esfera de raio r, podemos ter:

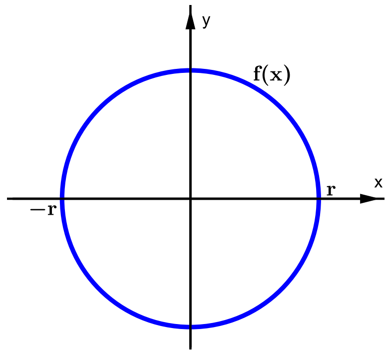


Figura 5.7: Volume da esfera por integral.

$$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2},$$

é a equação da circunferência estudada no 3º ano em geometria analítica.

Logo: $V = \pi \cdot \int_{-r}^{r} \left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx = \pi \cdot \int_{-r}^{r} \left(r^2 - x^2\right) dx$

$V = \pi \cdot \left.\left(r^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\right|_{-r}^{r} = \pi \cdot r^2 \cdot x|_{-r}^{r} - \pi\left(\frac{1}{3} \cdot x^3\Big|_{-r}^{r}\right)$

$V = \pi r^2 \cdot [r - (-r)] - \frac{\pi}{3} \cdot [r^3 - (-r)^3]$

$V = \pi r^2 \cdot 2r - \frac{\pi}{3} \cdot 2r^3$

$V = 2\pi r^3 - \frac{2}{3}\pi r^3$

Portanto,

$$\boxed{V = \frac{4}{3}\pi r^3}$$

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao propor essa proposta metodológica, mostramos que é plausível transmitir aos alunos da última etapa da Educação Básica, sem usar qualquer tipo de rigor matemático, noções básicas de Cálculo Diferencial de Integral I. Apesar dessa proposta ainda não ter sida colocada em prática ela baseia-se em práticas docentes que apresentaram resultados satisfatórios como relatar tópicos da história da matemática, uso de recursos tecnológicos e mapas conceituais como instrumento complementar de ensino. Ao adotar essas práticas os alunos passaram a interagir mais durante as aulas, aumentando o interesse pelos temas estudados além de apresentar melhor aproveitamento nas avaliações.

Abordar noções de Cálculo I no Ensino Médio proporciona ao aluno ter contato com modelos matemáticos muito mais próximos de situações reais, ou seja, propicia ao aluno a oportunidade de estudar e analisar fenômenos que ocorrem no dia a dia. Por exemplo, ao fazer um trajeto de carro de casa à escola dificilmente se conseguirá imprimir no veículo velocidade constante (movimento uniforme) ou aceleração constante (movimento uniformemente variado), haverá momentos em que o carro acelerará e desacelerará com maior ou menor intensidade.

Além disso, essa proposta metodológica visa contemplar o prosseguimento dos estudos, já que aborda noções de limites, derivadas e integrais de maneira intuitiva sem o rigor apresentado nos livros de Cálculo I do Ensino Superior. Dessa forma, ela ajuda a preparar o aluno a enfrentar um curso de Cálculo Diferencial e Integral em nível universitário.

Em um evento ocorrido na Universidade Federal do Pará no dia 04/03/2016 sobre propostas para a Base Nacional Comum (documento proposto pelo MEC que busca deixar claro os conhecimentos essenciais aos quais todos os estudantes brasileiros têm o direito de ter acesso e se apropriar durante sua trajetória na Educação Básica, ano a ano, desde o ingresso na Creche até o final do Ensino Médio) da disciplina Matemática, em momento adequado, questionei os integrantes da mesa sobre a viabilidade de inclusão de noções de Cálculo Diferencial e Integral no Ensino Médio exatamente nos moldes que essa dissertação aborda. Houve uma certa divisão – metade deles considera válida a introdução de noções de limite, mas mostraram-se mais conservadores quanto às de derivadas e integrais. Ora, conforme afirma Ávila nas referências [3], [4] e [5], o ensino de derivadas traz grande vantagem na compreensão de vários conceitos abordados em Matemática e Física.

Consideramos o capítulo que trata de derivadas o principal desta dissertação. Apesar de ir além tratando de noções de integral, o capítulo 5 pode ser omitido pelo professor, pois consideramos a integral um assunto mais técnico que contempla mais os objetivos de um curso de nível superior.

A Sociedade Brasileira de Matemática também fez sua contribuição para a Base Nacional Comum. Neste documento (referência [33]), a SBM propõe como tema suplementar (considerado opcional) para o 1º ano do Ensino Médio o estudo de taxas de variação.

Portanto, foram aqui expostos vários argumentos sobre a necessidade e a viabilidade de abordar noções de Cálculo I no Ensino Médio. Provavelmente, o grande desafio de se implementar um projeto desse nas escolas é a resistência que alguns professores têm em relação à disciplina, conforme mostra a entrevista feita com docentes da Educação Básica. Interessante é que todos consideram importante o ensino de noções de Cálculo I nessa etapa do ensino, mas apresentam diversos motivos para não fazê-lo.

O professor que decidir implementar essa proposta em sua escola precisará de uma carga horária maior. Para isso, o docente pode solicitar essa carga horária por meio de projeto pedagógico e trabalhar com os alunos no contra-turno.

Por fim, acreditamos que o PROFMAT vem cumprindo seu objetivo, uma vez que se propõe formar profissionais com uma visão crítica do contexto atual que se encontra a Educação Básica no Brasil ao propor estratégias que melhorem a qualidade do ensino e o desenvolvimento da matemática em nível nacional.

REFERÊNCIAS

[1] ARAÚJO, P.M.C., **Um Olhar Docente Sobre as Tecnologias Digitais Na Formação Inicial do Pedagogo**. Universidade Católica de Minas. 2004, 160f. Disponível em: www.biblioteca.pucminas.br/teses/Educacao_AraujoPM_1.pdf. Acesso em: 26 fev. 2016.

[2] ÁVILA, Geraldo, **Cálculo das funções de uma variável – vol.1** – 7ª ed. – Rio de Janeiro: LTC, 2011.

[3] ________________., **O ensino de cálculo no 2º grau**. *Revista do Professor de Matemática*, nº 18. Sociedade Brasileira de Matemática, 1991.

[4] ________________., **Limites, derivadas e integrais no Ensino Médio?**. *Revista do Professor de Matemática*, nº. 60. Sociedade Brasileira de Matemática, 2006a.

[5] ________________., **Derivadas e Cinemática**. *Revista do Professor de Matemática*, nº 61. Sociedade Brasileira de Matemática, 2006b.

[6] BARRETO FILHO, B., **Coleção Matemática Aula por Aula** São Paulo: FTD, 2003.

[7] BOULOS, Paulo, **Pré-cálculo** São Paulo: MAKRON Books, 1999.

[8] BOYER, Carl B., **História da Matemática** – 3ª ed. – São Paulo: Edgard Blücher, 2012.

[9] BRASIL. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional** Disponível em http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/Leis/L9394.htm Acesso em: 20 de março de 2016.

[10] BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática – Ensino Fundamental**. Brasília: Secretaria de Educação Fundamental, 1998.

[11] BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática** – Brasília: Secretaria de Educação Fundamental, 1997. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf> Acesso em 19 fev. 2016.

[12] BUSSE, Ronaldo da Silva; SOARES, Flávia dos Santos. **O Cálculo Diferencial e Integral e o Ensino Médio**. Disponível em: www.sbembrasil.org.br/files/ix_enem/Poster/.../PO02944174789T.doc Acesso em: 28 fev. 2016.

[13] DASSIE, B. A., **Euclides Roxo e a Educação Matemática no Brasil**. Rio de Janeiro, 2008. Tese (Doutorado). Programa de Pós-Graduação em Educacação. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro: 2008.

[14] DEMANA, Franklin D. et al., **Pré-cálculo** – 2ª ed. – São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2013.

[15] FERREIRA, Emanuel L.; SANTOS, Francely A. dos., **Os Recursos Tecnológicos Aplicados ao Processo de Ensino e Aprendizagem da Matemática no Ensino Fundamental**. Disponível em: w3.ufsm.br/ceem/eiemat/Anais/.../RE/RE_Ferreira_Emanoel_Lopes.pdf Acesso em: 28 fev. 2016.

[16] FORSETH, krystle Rose; BURGER, Cristopher et al., **Pré-cálculo para leigos** – Rio de Janeiro: Alta Books, 2011.

[17] FRANCHI, Regina Helena de Oliveira, **Curso de Cálculo: Uma proposta alternativa. Temas e Debates**. Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática, São Paulo, ano 8, n. 6, p. 39-43, Abr. 1995.

[18] GUEDES, Anderson Guimarães; ASSIS, Márcia Maria A., **Cálculo Diferencial e Integral no Ensino Médio: uma análise nas escolas de ensino médio da cidade do Natal/RN**. Disponível em

www.sbemrn.com.br/site/II%20erem/comunica/doc/comunica3.pdf. Acesso em 03 fev. 2016.

[19] GUIDORIZZI, Hamilton Luiz, **Um curso de cálculo – vol.1** – 5ª ed. – Rio de Janeiro: LTC, 2001.

[20] GUZMÁN, Miguel. O; PÉREZ, Daniel G., **Enseñanza de las Ciencias y la Matemática: Tendencias e Innovaciones** – Madrid: Popular, 2002.

[21] IEZZI, Gelson et al., **Fundamentos de Matemática Elementar 8: limites, derivadas, noções de integral** – 5ª ed. – São Paulo: Atual, 1993.

[22] KELLY, W. Michael et al., **O guia completo pra quem não é C.D.F.: cálculo** – Rio de Janeiro: Alta Books, 2013.

[23] LAPA, Nilton, **Matemática aplicada: uma abordagem introdutória** – São Paulo: Saraiva, 2014.

[24] LOPES, A., **Algumas reflexões sobre a questão do alto índice de reprovação nos cursos de Cálculo da UFRGS**. Sociedade Brasileira de Matemática. Rio de Janeiro, n.26/27, p.123-146, jun./dez. 1999. (Matemática Universitária)

[25] MOREIRA, Marco Antônio, **Mapas Conceituais e Aprendizagem Significativa** Disponível em: http://www.if.ufrgs.br/ moreira/mapasport.pdf Acesso em 16 de fev. 2016.

[26] OTONE e SILVA, Maryneusa Cordeiro, **A Matemática do curso complementar da Reforma Francisco Campos**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Departamento de Matématica, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo: 2006.

[27] PALIS, Gilda de la Rocque, **Computadores em Cálculo uma alternativa que não dejustifica por si mesma. Temas e Debates**. Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática, São Paulo, ano 8, n.6, p. 22-38, Abr. 1995.

[28] QUINTANEIRO, Wellerson; GIRALDO, Victor; PINTO, Márcia Fusaro, **De onde vem a unidade radiano e por que seu uso é necessário?**. Disponível

em https://sites.google.com/site/wellersonquintaneiro/publicacoes-e-trabalhos-de-conclusao-de-curso. Acesso em: 08 fev. 2016.

[29] REVEMAT - **Revista Eletrônica de Educação Matemática**. V 4.1, p.18-25, UFSC: 2009.

[30] ROQUE, Tatiana; CARVALHO, J.P.Pitombeira, **Tópicos de História da Matemática** – Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[31] RYAN, Mark, *Cálculos para leigos* – 2ª ed. – Rio de Janeiro: Alta Books, 2009.

[32] SILVA, Clovis Pereira, **A Matemática no Brasil: uma história de seu desenvolvimento**. São Leopoldo: Unisinos, 1999.

[33] SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA. **Contribuição da SBM Currículo de Matemática**. Disponível em (disponível em http://www.sbm.org.br/wp-content/uploads/2015/01/Contribuição\da\SBM\Ensino\Meio\FINAL.pdf). Acesso em: 19 março 2016.

[34] SOUZA, Jorge Raimundo da Trindade, **Orientações e normas para elaboração de trabalhos acadêmicos** – Belém: editora da UFPA, 2013.

[35] TAHAN, Malba, **As Maravilhas da Matemática** – 2ª ed. – Rio de Janeiro: Bloch, 1973.

[36] ZARPELON, Edinéia; RESENDE, Maurício Martins M.; PINHEIRO, Nilcéia Aparecida M., **Uso de Mapas Conceituais na Disciplina de Cálculo Diferencial e Integral 1: Uma Estratégia em Busca da Aprendizagem Significativa**. Disponível em http://sinect.com.br/anais2014/anais2014/artigos/ensino-de-matematica/01410017581.pdf. Acesso em: 09 fev. 2016.

APÊNDICES

Apêndice A: Construção no Geogebra da animação sobre definição de derivada

N.	Nome	Ícon...	Definição	Comando
1	Ponto A			
2	Ponto B			
3	Ponto C			
4	Função f_3		Polinômio[{A, B, C}]	Polinômio[{A, B, C}]
5	Função f		$f(x) = Se[-2 \leq x \leq 10, f_3(x)]$	$f(x) = Se[-2 \leq x \leq 10, f_3(x)]$
6	Ponto x_2		(1, f(1))	(1, f(1))
7	Número a	a = 2		
8	Ponto x_3		(a, f(a))	(a, f(a))
9	Reta b		Reta x_2x_3	Reta[x_2, x_3]
10	Função s		$s(x) = Se[-2 \leq x \leq 11, -(x(b) / y(b)) x - z(b) / y(b)]$	$s(x) = Se[-2 \leq x \leq 11, -(x(b) / y(b)) x - z(b) / y(b)]$
11	Reta c		Reta passando por x_2 e perpendicular a EixoX	Perpendicular[x_2, EixoX]
12	Reta d		Reta passando por x_3 e perpendicular a EixoX	Perpendicular[x_3, EixoX]
13	Reta e		Reta passando por x_2 e perpendicular a d	Perpendicular[x_2, d]
14	Ponto D		Ponto de interseção de e, d	Interseção[e, d]
15	Ponto x_0		Ponto de interseção de c, EixoX	Interseção[c, EixoX]
16	Ponto f_0		Ponto de interseção de EixoY, e	Interseção[EixoY, e]
17	Segmento Δ_x		Segmento [x_2, D]	Segmento[x_2, D]
18	Segmento Δ_y		Segmento [D, x_3]	Segmento[D, x_3]

19	Ponto x_1		Ponto de interseção de d, EixoX	Interseção[d, EixoX]
20	Segmento h		Segmento [x_2, x_0]	Segmento[x_2, x_0]
21	Segmento i		Segmento [x_3, x_1]	Segmento[x_3, x_1]
22	Segmento g		Segmento [x_2, f_0]	Segmento[x_2, f_0]
23	Reta j		Reta passando por x_3 e perpendicular a EixoY	Perpendicular[x_3, EixoY]
24	Ponto f_1		Ponto de interseção de j, EixoY	Interseção[j, EixoY]
25	Segmento k		Segmento [f_1, x_3]	Segmento[f_1, x_3]
26	Valor Booleano l			
27	Texto texto1	ABC		
28	Texto texto2	ABC		
29	Texto texto2$_1$	ABC		
30	Número o		Δ_y / Δ_x	Δ_y / Δ_x
31	Texto texto3	ABC	"\frac{\Delta_y}{\Delta_x}=\frac{" + (LaTeX[Δ_y]) + "}{" + (LaTeX[Δ_x]) + "}=" + (LaTeX[o]) + ""	"\frac{\Delta_y}{\Delta_x}=\frac{" + (LaTeX[Δ_y]) + "}{" + (LaTeX[Δ_x]) + "}=" + (LaTeX[o]) + ""
32	Reta t		Tangente a f em x = x(x_2)	Tangente[x_2, f]
33	Texto texto5	ABC	"t(x) = " + t + ""	"t(x) = " + t + ""
34	Função p		p(x) = Se[-2 ≤ x ≤ 11, -(x(t) / y(t)) x - z(t) / y(t)]	p(x) = Se[-2 ≤ x ≤ 11, -(x(t) / y(t)) x - z(t) / y(t)]
35	Valor Booleano m			
36	Texto texto4	ABC	"s ⇒ " + b + ""	"s ⇒ " + b + ""
37	Valor Booleano n			
38	Valor Booleano q			

Apêndice B: Construção no Geogebra da animação sobre a soma de Riemann

N.	Nome	Ícone...	Definição	Comando
1	Ponto A	A	Ponto sobre EixoY	Ponto[EixoY]
2	Ponto B	A		
3	Ponto C	A		
4	Ponto D	A		
5	Ponto E	A		
6	Função f		Polinômio[{A, B, C, D, E}]	Polinômio[{A, B, C, D, E}]
7	Função g		g(x) = Se[0 ≤ x ≤ x(D), f(x)]	g(x) = Se[0 ≤ x ≤ x(D), f(x)]
8	Número n	a = 2		
9	Número a		SomaDeRiemannInferior[g, 0, x(D), n]	SomaDeRiemannInferior[g, 0, x(D), n]
10	Número b		SomaDeRiemannSuperior[g, 0, x(D), n]	SomaDeRiemannSuperior[g, 0, x(D), n]
11	Número e		Integral de g de 0 a x(D)	Integral[g, 0, x(D)]
12	Texto texto1	ABC	"\int_a^{b}{ f(x)}=" + (LaTeX[e]) + ""	"\int_a^{b}{ f(x)}=" + (LaTeX[e]) + ""
13	Texto texto2	ABC		
14	Texto texto3	ABC		
15	Valor Booleano h			
16	Texto texto4	ABC	"Soma\;Superior=" + (LaTeX[b]) + ""	"Soma\;Superior=" + (LaTeX[b]) + ""
17	Texto texto5	ABC	"Soma\;Inferior=" + (LaTeX[a]) + ""	"Soma\;Inferior=" + (LaTeX[a]) + ""
18	Valor Booleano c			
19	Valor Booleano d			

APÊNDICE C: ENTREVISTA COM DOCENTES DO ENSINO MÉDIO

Figura 5.8: Entrevista feita com professores que atuam com alunos do Ensino Médio.

Fonte: Autor

Ensino de noções de cálculo I no Ensino Médio

Parte I. Perfil dos colaboradores

1. Idade (anos)				
	20 a 30	31 a 40	41 a 50	Mais de 50
	26%	44%	23%	7%

2. Formação			
	Licenciatura Plena em Matemática	Licenciatura Plena em áreas afins à Matemática	Outras
	100%	0%	0%

3. Maior titulação				
	Graduado	Especialista	Mestre	Doutor
	36%	57%	7%	0%

4. Quantos anos você atua como professor na Educação Básica?						
	0 a 5	6 a 10	11 a 15	16 a 20	21 a 25	Mais de 25
	13%	20%	27%	17%	10%	13%

Parte II. Formação do professor nas disciplinas de Cálculo

Nas partes II e III dessa entrevista, dê notas de 1 a 5.

Pergunta	Nota 1	Nota 2	Nota 3	Nota 4	Nota 5
5. Formação que lhe foi oferecida pela instituição onde fez graduação.	17%	20%	30%	23%	10%
6. Embasamento teórico em Cálculo devido as disciplinas ofertadas durante a graduação	15%	15%	40%	20%	10%
7. Suficiência e adequação das disciplinas ofertadas na grade do curso de Licenciatura para um razoável entendimento do Cálculo.	0%	3%	45%	45%	7%
8. Material didático utilizado (livro texto) pelo professor de Cálculo na licenciatura.	7%	17%	50%	27%	3%
9. Recursos tecnológicos utilizados pelos professores durante as aulas de Cálculo na Licenciatura.	50%	40%	7%	3%	0%

Parte III. Sobre o ensino do cálculo no Ensino Médio.

Pergunta	Nota 1	Nota 2	Nota 3	Nota 4	Nota 5
10. Viabilidade de ensinar noções de cálculo no Ensino Médio	30%	50%	10%	10%	0%
11. Sobre o seu preparo e capacidade para ensinar Cálculo no Ensino Médio atualmente.	10%	7%	14%	46%	23%
12. Grau de importância para o aluno no Ensino Médio aprender elementos de Cálculo.	0%	0%	35%	45%	20%
13. Grau de dificuldade que o Ensino do Cálculo apresentaria para seus alunos do Ensino médio.	0%	20%	20%	27%	33%

Na sua opinião, utilizando poucas palavras, qual a principal razão que dificultaria ou o/a impediria de ensinar noções de cálculo no Ensino Médio.

ANEXO A: Mapa conceitual sobre limite

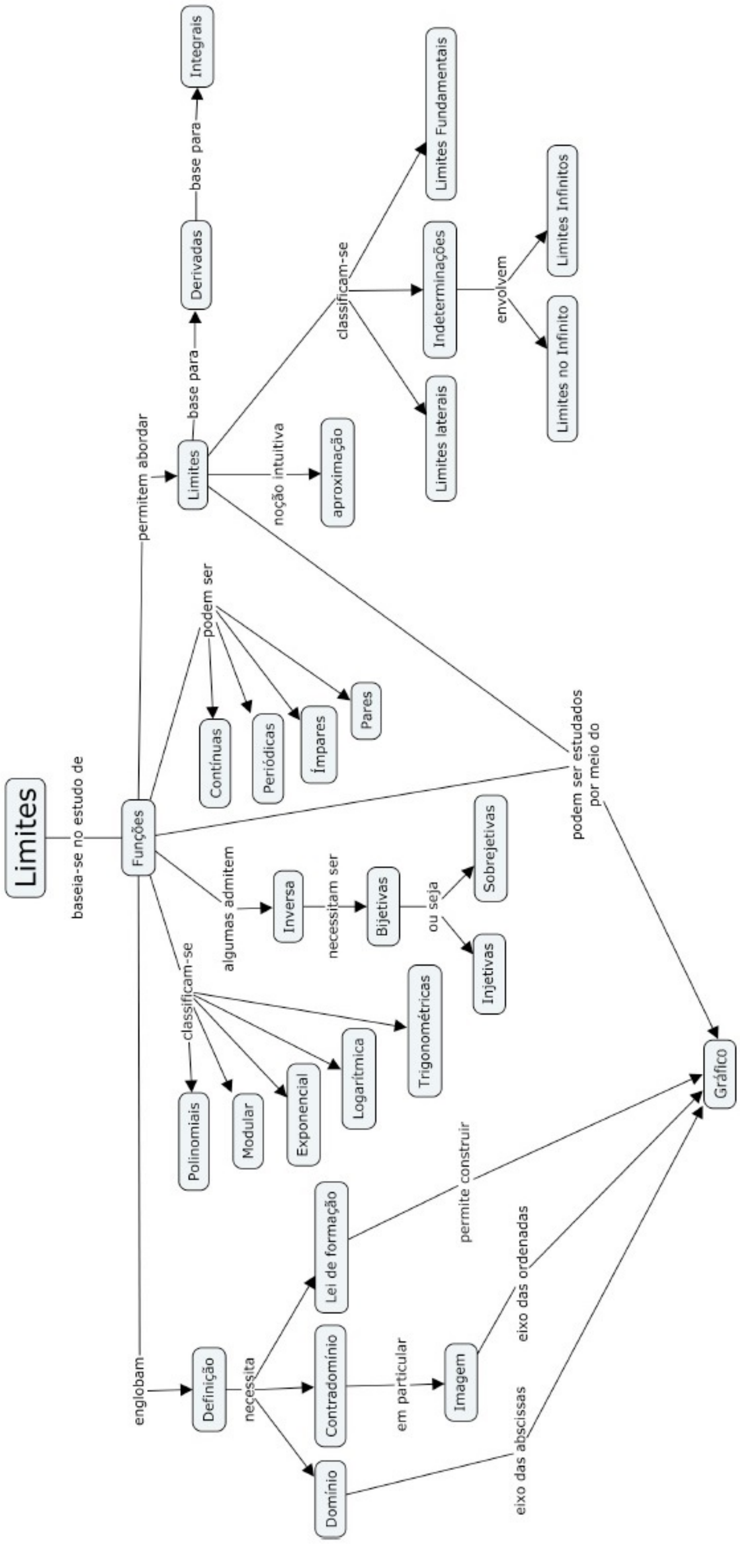


Figura 5.9: Mapa conceitual de limites extraído da referência [36], p.12

ANEXO B: Mapa conceitual sobre derivada

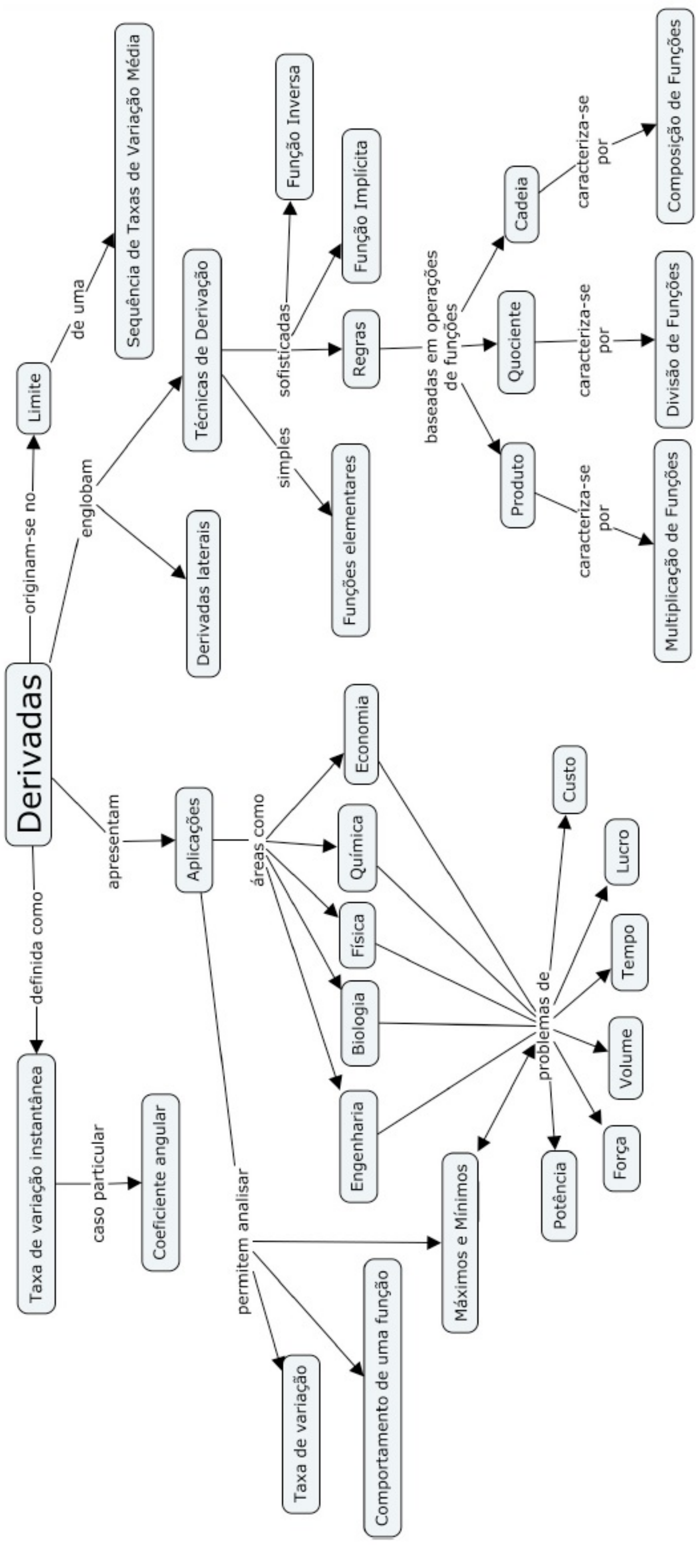


Figura 5.10: Mapa conceitual de derivadas extraído da referência [36], p.12

ANEXO C: Mapa conceitual sobre integral

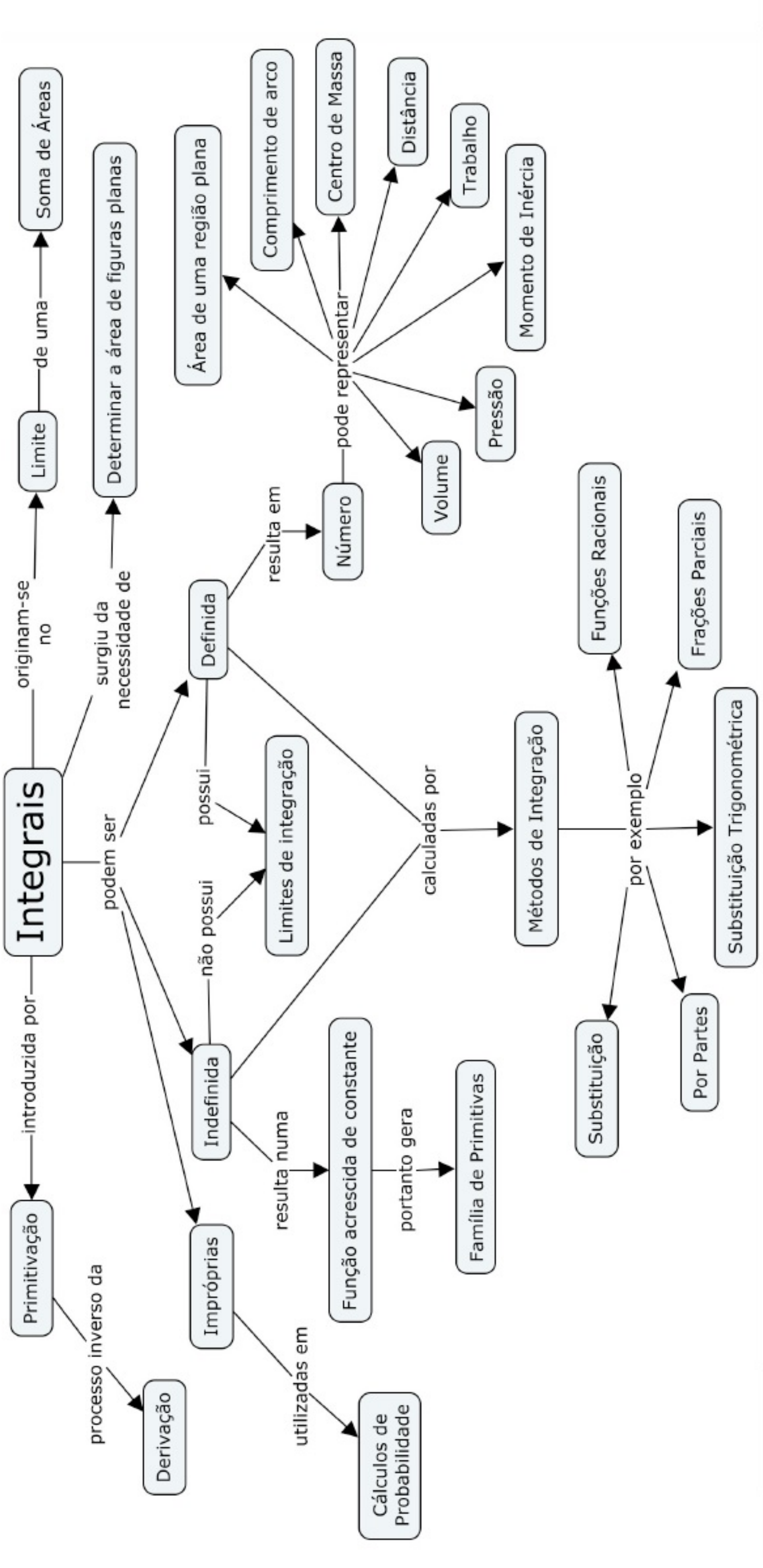


Figura 5.11: Mapa conceitual de integrais extraído da referência [36], p.12