Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
Coordenação do PROFMAT

José Augusto da Silva Marques

EQUAÇÕES DO TERCEIRO GRAU – UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DA ÁLGEBRA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Orientador: Mário Olivero

NITERÓI
Abril/2015

JOSÉ AUGUSTO DA SILVA MARQUES

EQUAÇÕES DO TERCEIRO GRAU – UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DA ÁLGEBRA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Dissertação apresentada por **José Augusto da Silva Marques** ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre.

Orientador: Mário Olivero

Niterói
2015

M357 **Marques , José Augusto da Silva**
Equações do terceiro grau – uma proposta para o ensino da álgebra na educação básica / José Augusto da Silva Marques. – Niterói, RJ : [s.n.], 2015.

43f.
Orientador: Prof. Dr. Mario Olivero
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT) – Universidade Federal Fluminense, 2015.

1. Ensino de matemática. 2.Equação Algébrica. . I. Título.

CDD 510.7

JOSÉ AUGUSTO DA SILVA MARQUES

EQUAÇÕES DO TERCEIRO GRAU – UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DA ÁLGEBRA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Dissertação apresentada por **José Augusto da Silva Marques** ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - da Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre. Linha de Pesquisa: Ensino da Matemática.

Aprovada em: 06/05/2015

Banca Examinadora

Prof. Mário Olivero Marques da Silva - Orientador

Doutor – Universidade Federal Fluminense - UFF

Profa. Nancy de Souza Cardim - Membro

Doutora – Universidade Federal Fluminense - UFF

Profa. Cristiane de Mello - Membro
Doutor – Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro - UNIRio

---

Profa. Miriam Abdón - Membro

Doutor – Universidade Federal Fluminense - UFF

NITERÓI – 2006

DEDICATÓRIAS

Dedico este trabalho a todos os meus familiares, a meus alunos e a todos que de alguma maneira contribuíram para a realização deste trabalho.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar a Deus por seu amor incondicional e sua inspiração para realizar esse trabalho.

Aos meus filhos, Luiz Felipe e Maria Gabriella, que são o que tenho de mais valiosos.

Aos meus familiares, principalmente minha mãe Nilza e minha irmã Carmem Lucia, que me incentivaram e compreenderam a minha ausência durante essa caminhada.

Aos professores que fazem parte do programa PROFMAT da Universidade Federal Fluminense, que de forma direta ou indireta contribuíram para minha formação.

Aos amigos e colegas que fazem parte da turma do PROFMAT pelo apoio, incentivo e estudos que realizamos durante todo o curso.

A CAPES pelo suporte financeiro que recebi ao longo de todo o curso de mestrado.

Ao professor orientador Dr. Mario Olivero, pela paciência, dedicação e sugestões para realização deste trabalho.

RESUMO

(Texto máximo em 250 caracteres)

Marques, José Augusto da Silva. EQUAÇÕES DO TERCEIRO GRAU – UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DA ÁLGEBRA NA EDUCAÇÃO BÁSICA. Rio de Janeiro, 2015. 86p. Trabalho de conclusão de curso. Instituto de Matemática, Universidade Federal Fluminense.

Este trabalho tem por objetivo estudar métodos algébricos para resolução das equações polinomiais do terceiro grau tomando como universo o Conjunto dos Números Reais levando em consideração o ensino desses métodos na Educação Básica. Começamos com uma abordagem da importância do ensino da Álgebra, tomando os Parâmetros Curriculares Nacionais como a principal referência. A seguir destacamos os aspectos históricos do assunto citando alguns dos matemáticos que colaboraram para obtenção de alguns métodos de resolução de equações. Destinamos um capítulo à fundamentação Matemática, destacando alguns aspectos que são importantes para o desenvolvimento do tema. No capítulo seguinte, damos destaque para a utilização de tabelas na construção de gráficos, mostrando a sua importância na formação do aluno. Em seguida, apresentamos um capítulo com o relato de uma experiência feita com alunos da primeira série do Ensino Médio, na qual foram propostas atividades que evidenciaram as nossas propostas de trabalho.

Palavras-chaves: equações algébricas, problemas, gráficos e solução.

ABSTRACT

The main goal of this study is evaluate algebraic methods to solve third degree polynomial equations in real numbers, and application of those methods in basic education. We start explaining the importance of teaching algebra, following National Curricular Parameters as our main reference. Next, we cover historical aspects, exploring mathematic foundations that are relevant to the subject development, followed by usage of tables to construct graphics and its importance in student development. Finally, we discuss an experiment with high school students where we suggested activities that provide evidence of our proposed methods.

Keywords: algebraic equations; problems; graphics and solutions.

SUMÁRIO

Introdução e Justificativa

Este trabalho tem como ponto de partida a frase do físico e matemático Isaac Newton (1642-1727): *"Equacionar significa traduzir um determinado problema para a linguagem algébrica, ou seja, para a linguagem das fórmulas Matemáticas"* e tem como objetivo fundamental analisar e aprofundar o ensino de equações cúbicas ou equação do terceiro grau, suas resoluções e mistérios que podem e devem ser estudadas nas séries iniciais do Ensino Médio, tomando como conjunto universo o Conjunto dos Números Reais.

Como a linguagem da álgebra é a equação, vamos observar um dos exemplos que Newton escreveu no seu manual de Álgebra intitulado *Aritmética Universal*. Ou seja a arte de armar equações.

Em língua portuguesa	No idioma da Álgebra
Um negociante tinha certa soma de dinheiro;	x
No primeiro ano, gastou 100 libras;	$x - 100$
Ajuntou o restante de um terço deste;	$(x-100) + \frac{(x-100)}{3} = \frac{4x-400}{3}$
No ano seguinte voltou a gastar 100 libras;	$\frac{4x-400}{3} - 100 = \frac{4x-700}{3}$
Aumentou a quantia restante de um terço da mesma;	$\frac{4x-700}{3} + \frac{4x-700}{9} = \frac{16x-2800}{9}$
No terceiro ano, gastou novamente 100 libras;	$\frac{16x-2800}{9} - 100 = \frac{16x-3700}{9}$
Depois de a este resultado juntar sua terça parte...	$\frac{16x-3700}{9} + \frac{16x-3700}{27} = \frac{64x-14800}{27}$
seu capital atingiu o dobro do inicial.	$\frac{64x-14800}{27} = 2x$

A solução de uma equação é frequentemente fácil. Em compensação, armar a equação com base nos dados do problema costuma ser mais difícil. Podemos ver que a arte de armar equações consiste, na realidade, em traduzir "da língua mãe para a algébrica". Mas o idioma da Álgebra é extremamente resumido, motivo pelo qual nem todas as frases que giram em torno do tema ou assunto da língua materna podem ser facilmente compreendidas.

Sabe-se que o ensino de álgebra no Ensino Médio é considerado muito difícil por parte dos alunos por não visualizarem muitas aplicações práticas voltadas a vida cotidiana. Percebe-se também que a interpretação de problemas algébricos, que exigem uma tradução da linguagem corrente para a linguagem Matemática, apresenta obstáculos, assim como a relação entre a Álgebra e a Aritmética.

Por isso, este trabalho vai procurar apresentar um estudo sobre as possíveis razões para as dificuldades apresentadas pelos alunos do Ensino Fundamental e Médio no estudo dos conceitos e procedimentos algébricos, procurando contribuir para o aprimoramento dos conhecimentos acerca das equações polinomiais. Por meio deste trabalho, pretende-se compreender as dificuldades encontradas e buscar alternativas capazes de permitir uma melhor compreensão da aprendizagem da Álgebra, em especial na resolução das equações cúbicas ou equação do terceiro grau.

Uma das maiores dificuldades que pode ser observada com os alunos que ingressam no Ensino Médio é com respeito à aplicação da regra dos sinais na resolução de cálculos numéricos, principalmente com a utilização de números negativos, tal como a conhecemos hoje.

Podemos encontrar e destacar nos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática - PCN para ensino fundamental das séries iniciais (BRASIL, 1998a) os números negativos sendo citados em quatro momentos. Um deles fala da importância da compreensão da constituição dos números, da existência das diferentes categorias, ao longo da história. A relação entre medida e um número é outro aspecto citado que possibilitaria a compreensão da criação dos diversos tipos de número, entre eles, os negativos.

Nos PCN para o ensino fundamental de 5ª a 8ª séries (BRASIL, 1998b) os números negativos também são encontrados em aproximadamente quatro páginas. Tratam, inicialmente, de um pequeno histórico, e apresentam um quadro de obstáculos esperados quando da abordagem desses números. São eles:

• conferir significado às quantidades negativas;

• reconhecer a existência de números nos dois sentidos a partir do zero, enquanto para os naturais a sucessão acontece num único sentido;

• reconhecer diferentes papéis para o zero (zero absoluto e zero origem);

• perceber a lógica dos números negativos que contraria a lógica dos números naturais – por exemplo, é possível "adicionar seis a um número e obter um no resultado" como também é possível "subtrair um número de dois e obter nove";

• interpretar sentenças do tipo $x = -y$. (O aluno costuma pensar que x é positivo e y é negativo.) (BRASIL, 1998b, p. 98)

Como os números negativos são interpretados como uma ampliação dos números naturais e incorporados às leis da aritmética, é encontrado nos PCN uma recomendação de utilizar a representação da reta numérica para os números inteiros, apresentando, também, a regra dos sinais por meio de uma tabela a ser completada, sugerindo regularidades das sequências construídas, observando sempre um padrão numérico como acrescentar cinco ou retirar cinco.

A seguir vamos apresentar diversos tópicos que estão inseridos nos Parâmetros Curriculares que estão bem definidos e que serão explorados neste trabalho, na busca de soluções, algébrica ou geométrica, das equações envolvendo polinômios do terceiro grau.

Ao se estabelecer um primeiro conjunto de parâmetros para a organização do ensino de Matemática no Ensino Médio, pretende-se contemplar a necessidade da sua adequação para o desenvolvimento e promoção de alunos, com diferentes motivações, interesses e capacidades, criando condições para a sua inserção num mundo em mudança e contribuindo para desenvolver as capacidades que deles serão exigidas em sua vida social e profissional.

A Matemática no Ensino Médio que tem um valor que oferece e ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo, também desempenha um papel instrumental, pois é uma ferramenta que serve para a vida cotidiana e para muitas tarefas específicas em quase todas as atividades humanas.

No que diz respeito ao caráter instrumental da Matemática no Ensino Médio, ela deve ser vista pelo aluno como um conjunto de técnicas e estratégias que servem e devem ser estudadas e aplicadas a outras áreas do conhecimento, assim como para a atividade profissional.

Nesse sentido, é preciso que se perceba a Matemática como um sistema de códigos e regras que a tornam uma linguagem de comunicação de ideias e permite modelar a realidade e interpretá-la.

É importante que se perceba que as definições, demonstrações e encadeamentos conceituais e lógicos têm a função de construir novos conceitos e estruturas a partir de outros e que servem para validar intuições e dar sentido às técnicas aplicadas.

A essas concepções da Matemática no Ensino Médio se junta a ideia de que, no Ensino Fundamental, os alunos devem ter se aproximado de vários campos do conhecimento matemático e agora estão em condições de utilizá-los e ampliá-los e desenvolver de modo mais amplo capacidades tão importantes quanto as de abstração, raciocínio em todas as suas vertentes, resolução de problemas de qualquer tipo, investigação, análise e compreensão de fatos matemáticos e de interpretação da própria realidade.

O Ensino de Matemática, no Ensino Fundamental e Médio, apresenta novas informações e oferece instrumentos necessários para que seja possível aos estudantes prosseguir aprendendo. Saber aprender é a condição básica para prosseguir aperfeiçoando-se ao longo da vida. É preciso ainda uma rápida reflexão sobre a relação entre Matemática e tecnologia. Embora seja comum, quando nos referimos às tecnologias ligadas à Matemática, tomarmos por base a informática e o uso de calculadoras, estes instrumentos, não obstante sua importância de maneira alguma constitui o centro da questão.

O impacto da tecnologia na vida de cada indivíduo vai exigir competências que vão além do simples lidar com as máquinas. A velocidade do surgimento e renovação de saberes e de formas de fazer em todas as atividades humanas tornarão rapidamente ultrapassadas a maior parte das competências adquiridas por uma pessoa ao início de sua vida profissional. (PCN)

Esse progresso da tecnologia, cujo instrumento mais importante é hoje o computador e a internet, vai exigir do ensino de Matemática um redirecionamento sob uma perspectiva curricular que venha favorecer o desenvolvimento de habilidades e procedimentos com os quais o aluno possa se reconhecer e se orientar nesse mundo do conhecimento em constante movimento. Para isso, habilidades como selecionar informações, analisar as informações obtidas e, a partir disso, tomar decisões exigirão linguagem, procedimentos e formas de pensar matemáticos que devem ser desenvolvidos ao longo do Ensino Médio, bem como a capacidade de avaliar limites, possibilidades e adequação das tecnologias em diferentes situações.

Assim, as funções da Matemática descritas anteriormente e a presença da tecnologia nos permitem afirmar que aprender Matemática no Ensino Médio deve ser mais do que memorizar resultados dessa ciência e que a aquisição do conhecimento matemático deve estar vinculada ao domínio de um saber fazer Matemática e de um saber pensar matemático. (PCN)

Esse domínio passa por um processo lento, trabalhoso, cujo começo deve ser uma prolongada atividade sobre resolução de problemas de diversos tipos, com o objetivo de elaborar conjecturas, de estimular a busca de regularidades, a generalização de padrões, a capacidade de argumentação, elementos fundamentais para o processo de formalização do conhecimento matemático e para o desenvolvimento de habilidades essenciais à leitura e interpretação da realidade e de outras áreas do conhecimento.

A partir das considerações feitas sobre a importância do ensino de Matemática no Ensino Básico, podemos observar os objetivos estabelecidos, nos PCNs para que o ensino dessa disciplina possa resultar em aprendizagem real e significativa para os alunos.

As finalidades do ensino de Matemática no nível médio indicam como objetivos levar o aluno a:

• *compreender os conceitos, procedimentos e estratégias matemáticas que permitam a ele desenvolver estudos posteriores e adquirir uma formação científica geral;*

• *aplicar seus conhecimentos matemáticos a situações diversas, utilizando*-os *na interpretação da ciência, na atividade tecnológica e nas atividades cotidianas;*

• *analisar e valorizar informações provenientes de diferentes fontes, utilizando ferramentas matemáticas para formar uma opinião própria que lhe permita expressar-se criticamente sobre problemas da Matemática, das outras áreas do conhecimento e da atualidade;*

• *desenvolver as capacidades de raciocínio e resolução de problemas, de comunicação, bem como o espírito crítico e criativo;*

• *utilizar com confiança procedimentos de resolução de problemas para desenvolver a compreensão dos conceitos matemáticos;*

• *expressar*-se *oral, escrita e graficamente em situações matemáticas e valorizar a precisão da linguagem e as demonstrações em Matemática;*

• estabelecer conexões entre diferentes temas matemáticos e entre esses temas e o conhecimento de outras áreas do currículo;

• reconhecer representações equivalentes de um mesmo conceito, relacionando procedimentos associados às diferentes representações;

• promover a realização pessoal mediante o sentimento de segurança em relação às suas capacidades matemáticas, o desenvolvimento de atitudes de autonomia e cooperação. (PCN)

Voltando a analisar o currículo, ele deve ser elaborado procurando corresponder a uma boa organização, devendo contemplar aspectos dos conteúdos e práticas que precisam ser enfatizados. Essa organização terá de cuidar dos conteúdos mínimos da Base Nacional Comum, assim como procurar fazer algumas indicações sobre possíveis temas que podem compor a parte do currículo flexível, a ser organizado em cada unidade escolar, podendo ser de aprofundamento ou para direcionar as necessidades e interesses da escola e da comunidade em que ela está inserida. Sem dúvida, os elementos essenciais de um núcleo comum devem compor uma série de temas ou tópicos em Matemática escolhidos a partir de critérios que visam ao desenvolvimento das atitudes e habilidades.

Continuando a análise dos Parâmetros Curriculares para o ensino de Matemática observa-se que o critério central é o da contextualização e da interdisciplinaridade, ou seja, é o potencial de um tema permitir conexões entre diversos conceitos matemáticos e entre diferentes formas de pensamento matemático, ou, ainda, a relevância cultural do tema, tanto no que diz respeito às suas aplicações dentro ou fora da Matemática, como à sua importância histórica no desenvolvimento da própria ciência.

Um exemplo disso pode ser observado com relação ao ensino de funções, o ensino isolado desse tema não permite a exploração do caráter integrador que esse possui. *Aspectos do estudo de polinômios e equações algébricas podem ser incluídos no estudo de funções polinomiais, enriquecendo o enfoque algébrico que é feito tradicionalmente.*

Além das trocas de dados internos à própria Matemática, o conceito de função desempenha também papel importante para descrever e estudar através da leitura, interpretação e construção de gráficos, o comportamento de certos fenômenos tanto do cotidiano como de outras áreas do conhecimento, como a Física, Geografia ou Economia. Cabe, portanto, ao ensino de Matemática garantir que o aluno adquira certas habilidades para trabalhar com o conceito de função em situações diversas e, nesse sentido, através de uma variedade de situações problema de Matemática e de outras áreas, o aluno pode ser incentivado a buscar a solução, ajustando seus conhecimentos sobre funções para construir um modelo para interpretação e investigação em Matemática.

O currículo do Ensino Básico deve ainda garantir também espaço para que os alunos possam estender e aprofundar seus conhecimentos sobre números e álgebra, mas não isoladamente de outros conceitos, nem em separado dos problemas e da perspectiva sócio-histórica que está na origem desses temas.

Estes conteúdos estão diretamente relacionados ao desenvolvimento de habilidades que dizem respeito à resolução de problemas, à adaptação do uso da linguagem simbólica, à validação de argumentos, à descrição de modelos e à capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção no mundo real.

É importante que o trabalho com números possa também permitir que os alunos se apropriem da capacidade de estimativa, para que possam ter controle sobre a ordem de grandeza de resultados de cálculo ou medições e tratar com valores numéricos aproximados de acordo com a situação e o instrumental disponível.

Continuando com uma análise dos Parâmetros Curriculares encontramos em outra direção as habilidades de visualização, desenho, argumentação lógica e de aplicação na busca de soluções para problemas que podem ser desenvolvidas com um trabalho adequado de Geometria, para que o aluno possa usar as formas e propriedades geométricas na representação e visualização de partes do mundo que o cerca.

Essas competências são muito importantes na compreensão e ampliação da percepção de espaço e construção de modelos para interpretar questões da Matemática e de outras áreas do conhecimento. De fato, ao perceber as relações entre as representações planas nos desenhos, mapas e na tela do computador com os objetos que lhes deram origem, conceber novas formas planas ou espaciais e suas propriedades a partir dessas representações são essenciais para a leitura do mundo através dos olhos das outras ciências, em especial a Física.

Integrando o currículo, com o mesmo peso que os conceitos e os procedimentos, o desenvolvimento de valores e atitudes são fundamentais para que o aluno aprenda a aprender. Omitir ou descuidar do trabalho com esse aspecto da formação pode impedir a aprendizagem inclusive da própria Matemática. Dentre esses valores e atitudes podemos destacar que ter iniciativa na busca de informações, demonstrar responsabilidade, ter confiança em suas formas de pensar, fundamentar suas ideias e argumentações são essenciais para que o aluno possa aprender, se comunicar, perceber o valor da Matemática como bem cultural de leitura e interpretação da realidade e possa estar melhor preparado para sua inserção no mundo do conhecimento e do trabalho.

Competências e habilidades a serem desenvolvidas em Matemática, apresentadas nos Parâmetros Curriculares.

Quanto à representação e comunicação podemos destacar a:

• Leitura e a interpretação de textos de Matemática.

• Ler, interpretar e utilizar representações matemáticas (tabelas, gráficos, expressões etc.);

• Transcrever mensagens matemáticas da linguagem corrente para linguagem simbólica (equações, gráficos, diagramas, fórmulas, tabelas etc.) e vice-versa;

• Exprimir-se com correção e clareza, tanto na língua materna, como na linguagem matemática, usando a terminologia correta;

• Produzir textos matemáticos adequados;

• Utilizar adequadamente os recursos tecnológicos como instrumentos de produção e de comunicação;

• Utilizar corretamente instrumentos de medição e de desenho.

Quanto à investigação e compreensão

• Identificar o problema (compreender enunciados, formular questões etc.);

• Procurar, selecionar e interpretar informações relativas ao problema;

• Formular hipóteses e prever resultados;

• Selecionar estratégias de resolução de problemas;

• Interpretar e criticar resultados numa situação concreta;

• Distinguir e utilizar raciocínios dedutivos e indutivos;

• Fazer e validar conjecturas, experimentando, recorrendo a modelos, esboços;

• Discutir ideias e produzir argumentos convincentes.

E em relação à contextualização sociocultural

• Desenvolver a capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção no real;

• Aplicar conhecimentos e métodos matemáticos em situações reais, em especial em outras áreas do conhecimento;

• Relacionar etapas da história da Matemática com a evolução da humanidade;
• Utilizar adequadamente calculadoras e computador, reconhecendo suas limitações e potencialidades.

Para que essa etapa da escolaridade possa complementar a formação iniciada na escola básica e permitir o desenvolvimento das capacidades que são os objetivos do ensino de Matemática, é preciso rever e redimensionar alguns dos temas tradicionalmente ensinados. Como pode ser observado, a Matemática tem caráter instrumental muito mais amplo, além de sua dimensão própria, de investigação e invenção. Portanto, é certo que ela se situa como uma forma de linguagem, ferramenta de expressão e raciocínio, estabelecendo-se também como espaço de elaboração e compreensão de ideias que se desenvolvem em estreita relação com o todo social e cultural. Ela possui também uma dimensão histórica. Por isso, o conjunto de competências e habilidades que o trabalho de Matemática deve auxiliar a desenvolver pode e deve ser descrito tendo em vista este relacionamento com as demais áreas do saber, cada uma delas consolidadas na área correspondente do Ensino Básico. É o que encontramos no quadro resumo das competências e habilidades gerais do ensino de Matemática.

1. Alguma Fundamentação Matemática

Vamos fazer um sucinto estudo de polinômios, apresentando alguns conceitos importantes.

Uma equação polinomial do terceiro grau é uma equação da forma

$$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0,$$

na qual A, B, C e D são números reais e $A \neq 0$. Uma equação polinomial do terceiro grau pode ser também denominada equação algébrica do terceiro grau. O conjunto formado pelas raízes da equação polinomial $P(x) = 0$ é o conjunto solução (S) ou conjunto verdade (V) da equação. Resolver uma equação polinomial é obter o seu conjunto solução.

O estudo das equações polinomiais é alicerçado no teorema a seguir:

Teorema Fundamental da Álgebra: *Todo polinômio com coeficientes complexos possui pelo menos uma raiz complexa.*

A demonstração desse teorema foi tese de doutoramento de Carl Friedrich Gauss (1777-1855) no ano de 1798. Embora outros matemáticos tivessem tentado essa demonstração, Gauss foi o primeiro a realizá-la com perfeição. A demonstração deste teorema pode ser encontrada no livro “A Matemática do Ensino Médio”, volume 3, dos professores Elon Lages Lima, Paulo Cezar Pinto Carvalho e Augusto César Morgado, SBM, na página 229.

São consequências importantes do *Teorema Fundamental da Álgebra*:

1. Todo polinômio com coeficientes complexos de grau n tem exatamente n raízes complexas, contando as suas multiplicidades;
2. Se os coeficientes de $p(x)$ forem reais, então suas raízes complexas aparecem aos pares conjugados ($a + bi$ e $a - bi$);
3. Todo polinômio de grau ímpar cujos coeficientes são reais tem ao menos uma raiz real.

Outra consequência imediata do teorema fundamental da álgebra é o teorema a seguir:

Teorema da Decomposição: *Todo polinômio com coeficientes reais pode ser decomposto como um produto de potências inteiras não negativas de fatores lineares (tipo $(ax + b)^k$, associados as raízes reais) e/ou fatores quadráticos irredutíveis em R (tipo $(ax^2 + bx + c)^k$, cujas raízes associadas são não reais).*

Por exemplo, a decomposição de $p(x) = (x^2 - 4)^2(x - 1)^3(x^2 + 3)$ segundo o Teorema da Decomposição em Fatores Irredutíveis é a seguinte:

$$p(x) = (x - 2)^2(x + 2)^2(x - 1)^3(x^2 + 3).$$

Em particular, se $x_1, x_2, \dots, x_k$ são raízes distintas de $p(x)$, então temos a seguinte fatoração $p(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_k)\, s(x)$, onde $s(x)$ é um polinômio de grau $n - k$ e n é o grau de $p(x)$.

Relações entre coeficientes e raízes (Relações de Girard)

Albert Girard (1590-1633), flamengo, em sua obra *Invention Nouvelle en l'Algèbre* (1629), apresentou um importante teorema que relaciona as raízes com os coeficientes de uma equação polinomial. Vejamos essas relações no caso das equações do terceiro grau.

Consideremos a equação do terceiro grau $Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0, (A \neq 0)$,
cujas raízes são x_1, x_2 e x_3.

Vimos que essa equação pode ser escrita sob a forma:

$$A(x - x_1).(x - x_2).(x - x_3) = 0$$

Temos a identidade:

$$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = A(x - x_1).(x - x_2).(x - x_3), \ \forall x \in R.$$

Isto é:

$$x^3 + \left(\frac{B}{A}\right)x^2 + \left(\frac{C}{A}\right)x + \left(\frac{D}{A}\right) =$$

$$= x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1.x_2 + x_1.x_3 + x_2.x_3)x - x_1.x_2.x_3 \quad \forall x \in R.$$

Portanto:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -{}^{B}/_{A} \\ x_1.x_2 + x_1.x_3 + x_2.x_2 = {}^{C}/_{A} \\ x_1.x_2.x_3 = -{}^{D}/_{A} \end{cases}$$

As igualdades na proposição acima são chamadas de *relações entre coeficientes e raízes* da equação dada. Estas relações nos dão um sistema de n equações nas n incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$. É natural pensar que resolvendo o sistema poderíamos encontrar as raízes da equação. Vejamos o que sucede em um exemplo.

Exemplo 1. Considere a equação $x^3 + x + 1 = 0$. A esta equação está associado o sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1.x_2 + x_1.x_3 + x_2.x_2 = 1 \\ x_1.x_2.x_3 = -1 \end{cases}$$

Para resolver este sistema procederemos por eliminação. Multiplicando a segunda equação por x_3, obtemos

$$x_1.x_2.x_3 + x_1.x_3{}^2 + x_2.x_3{}^2 = x_3$$

Usando a terceira equação segue-se que $-1+(x_1+x_2).{x_3}^2 = x_3$. Usando a primeira equação obtém-se $-1+(-x_3).{x_3}^2 = x_3$.

Portanto para achar x_3 devemos resolver a equação ${x_3}^2+x_3+1=0$, que é precisamente a equação proposta originalmente.

Este exemplo nos mostra que as relações não nos provem de um método para resolver as equações. Entretanto, se tivermos alguma informação adicional sobre as raízes de uma equação, é possível chegar às soluções. Vejamos o próximo exemplo.

Podemos resolver a equação $x^3 - 3x^2 + x + 1 = 0$, sabendo que as suas raízes estão em progressão aritmética.

Sejam $x_1 = a - r, x_2 = a\ e\ x_3 = a + r$ as raízes da equação. Temos que

$$\begin{cases} 3 = x_1 + x_2 + x_3 = 3a \\ 1 = x_1.x_2 + x_1.x_3 + x_2.x_2 = 3a^2 - r^2 \\ -1 = x_1.x_2.x_3 = a(a^2 - r^2) \end{cases}$$

Da primeira dessas equações segue-se que $a = 1$. Da segunda, temos então que $3 - r^2 = 1$, logo $r^2 = 2$ e, portanto, $r = \pm\sqrt{2}$. Segue-se que as raízes da equação são: $1 - \sqrt{2},\ 1\ e\ 1 + \sqrt{2}$.

Multiplicidade de uma raiz

Uma raiz x_0 de um polinômio $p(x)$ tem multiplicidade m $(m \geq 1)$ se $p(x)$ for divisível por $(x - x_0)^m$ e não for divisível por $(x - x_0)^{m+1}$.

Podemos observar que uma raiz x_0 tem multiplicidade m se, e somente se,

$$p(x) = q(x).(x - x_0)^m, \text{ onde } q(x_0) \neq 0$$

Por exemplo, a equação $(x-5)(x-4)^2 = 0$ pode ser escrita como

$(x-5)(x-4)(x-4) = 0$. A raiz 5 é **raiz simples** da equação e a raiz 4 tem multiplicidade 2.

Raízes inteiras de uma equação algébrica de coeficientes inteiros

A resolução de equações algébricas (ou polinomiais) é uma tarefa relevante da Matemática Elementar. É um fato bastante conhecido que não existem fórmulas de resolução para equações de grau maior do que quatro. Uma prova deste importante resultado pode ser encontrada no livro de Otto Endler, chamado Teoria dos Corpos (página 136), das Publicações Matemáticas do IMPA, disponíveis em pdf no endereço de internet a seguir.

http://www.impa.br/opencms/pt/biblioteca/pm/PM_19.pdf

Sabemos encontrar raízes de polinômios de grau dois pela conhecida fórmula de Bhaskara. Se o grau for três, há a fórmula de Cardano que não é muito conhecida e nem tão simples quanto a de Bhaskara, mas que pode nos ajudar a encontrar as raízes. Se o grau for superior a três, o problema fica ainda mais complicado. No entanto, há dois testes que podem ser feitos para procurar raízes inteiras e racionais de polinômios com coeficientes inteiros. Esses testes funcionam assim: *se o polinômio em questão possuir alguma raiz racional, saberemos identificá-la testando os valores que o polinômio assume num conjunto de teste formado por um número finito de elementos.*

Teorema *(Pesquisa de raízes inteiras) Seja* $p(x)$ *um polinômio com coeficientes inteiros, digamos* $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, *onde* $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1 \in \mathbb{Z}$ *e* $a_o \in \mathbb{Z}^*$. *Se* $x_0 \in \mathbb{Z}^*$ *for raiz de* $p(x)$, *então* x_0 *é divisor de* a_0.

Demonstração:

Por hipótese, $0 = p(x_0) = a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + \ldots + a_1 x_0 + a_0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow a_0 = -x_0 \left(-a_n x_0^{n-1} - a_{n-1} x_0^{n-2} - \ldots - a_1 \right)$$

Os dois membros do lado direito da expressão anterior são inteiros, log $a_0 = x_0$ é inteiro, o que prova o teorema.

Nas condições do teorema anterior, vemos que se $p(x)$ possuir alguma raiz inteira, esta deve pertencer ao *conjunto de teste formado pelos divisores do seu termo constante*. Portanto, se nenhum elemento desse conjunto for raiz de $p(x)$, então as raízes de $p(x)$ não são inteiras!

Note que, em geral, nem todo elemento do conjunto de teste é raiz. Isto é, no conjunto de teste pode haver mais elementos do que raízes, ou mesmo nenhuma raiz.

Como exemplo, vamos considerar o polinômio $p(x) = 3x^3 - 12x - x^2 + 4$.
Para a fatoração do polinômio precisamos conhecer as raízes de $p(x)$. Vamos pesquisar as raízes inteiras, pois os coeficientes de $p(x)$ são inteiros. Conjunto para teste $T = \{\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 4\}$ é formado pelos divisores de 4. Note que:

$$p(-1) = 12;\ p(1) = -1;\ p(-2) = 0;\ p(2) = 0;\ p(-4) = -156;\ p(4) = 132.$$

Temos então apenas duas raízes inteiras de $p(x)$, a saber, $x = 2$ e $x = -2$.
Usando Briot-Ruffini ou o método da chave com $(d(x) = x^2 - 4)$, obtemos a fatoração $p(x) = (x-2)(3x-1)(x+2)$.

3. Histórico sobre a Resolução de Equações

A Teoria das Equações é uma das mais belas e relevantes páginas da História da Matemática, onde se evidencia a força criativa do espírito humano.

Perto do ano 2000 a.C. a aritmética babilônica já havia evoluído para uma álgebra retórica bem desenvolvida. Não só se resolviam equações quadráticas, seja pelo método equivalente ao de substituição numa fórmula geral, seja pelo método de completar quadrados, como também se discutiam algumas cúbicas (grau três) e algumas biquadradas (grau quatro). Encontrou-se uma tabula que fornece além de uma tábua de quadrados e de cubos dos inteiros de 1 a 30, também a sequência de valores de $n^3 + n^2$ correspondente a esse intervalo. São dados muitos problemas que levam a cúbica da forma $x^3 + x^2 = b$, os quais podem ser resolvidos usando-se a tábua de $n^3 + n^2$.

Por exemplo: Encontrar, por meio da tábula acima, uma raiz da equação cúbica $x^3 + x^2 - 3136 = 0$, cuja solução é obtida substituindo x por $2y$.

Outro problema babilônico cuja data aproximada é 1800 a.C. parece pedir a solução do sistema de equações

$$x.y.z + x.y = \frac{7}{6}, \quad y = \frac{2x}{3}, \quad z = 12x.$$

Para que se resolva esse sistema usando a tábua, basta eliminar x e y, obtendo uma equação cúbica em z.

Otto Eduard Neugebauer (1899 —1990), matemático e historiador austro-estadunidense, conhecido por suas pesquisas sobre a história da astronomia e outras ciências exatas na Idade Antiga e na Idade Média, estudando tabletes de argila, descobriu que os antigos babilônios sabiam muito mais sobre Matemática e Astronomia do que se supunha. Otto Neugebauer acredita que os babilônios tinham capacidade bastante para reduzir uma equação cúbica geral à "forma normal" $n^3 + n^2 = b$, embora não haja até agora nenhuma evidência de que eles tenham feito isso.

Com relação à tábua, Neugebauer assinalou que os babilônios podem muito bem ter dado conta da relação a seguir,

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2$$

para vários valores de n, que pode ser demonstrada por indução.

Sabe-se também que os babilônios procuraram desenvolver questões aritméticas e era notável sua familiaridade com as propriedades dos números. É difícil determinar as origens desse aspecto da civilização babilônica, mas é conhecido que, por volta de 1800 A.C., alguns métodos de resolução da equação do segundo grau já eram utilizados enquanto os egípcios, em uma mesma época, possuíam apenas métodos de resolução de equações do primeiro grau.

Um outro problema considerado fundamental da antiga Álgebra Babilônia era saber qual número adicionado ao seu recíproco seria igual a um número dado. Em notação moderna, os babilônios procuravam x tal que $x + \frac{1}{x} = b$.

Essa equação leva-nos a uma equação quadrática em x, a saber, $x^2 - bx + 1 = 0$. Procurando a solução através do processo de "completar quadrados", eles calculavam $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ depois $\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - 1}$ e então achavam as raízes da equação com

$$\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - 1} \text{ e } \frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - 1}\ .$$

Os problemas algébricos eram enunciados e resolvidos verbalmente. As palavras us (comprimento), sag (largura) e asa (área) eram frequentemente utilizadas para as incógnitas, não necessariamente porque as incógnitas representassem essas quantidades geométricas, mas provavelmente porque muitos problemas algébricos eram decorrentes de situações geométricas e a terminologia geométrica foi adotada. Podemos ter uma ideia de como estes termos eram empregados pelo seguinte texto babilônio:

'Multipliquei Comprimento e Largura obtendo Área 10. O excesso do Comprimento sobre a Largura multiplicou por si mesmo e o resultado por 9 e esta Área é aquela obtida multiplicando o Comprimento por si mesmo. Quais são o Comprimento e a Largura?"

Hoje nós podemos escrever tal problema como:

$$x.y = 10;\ \ 9(x - y)^2 = \ x^2$$

É fácil observar também que tal problema leva a uma equação do quarto grau sem termos em x e x^3, podendo então ser resolvida como uma equação quadrática em x^2.

Voltemos aos problemas envolvendo equações do terceiro grau que, como já afirmamos, também eram conhecidos dos babilônios. Um exemplo, em notação moderna seria:

$$12x = z, y = x \text{ e } x.y.z = V,$$

onde V é algum volume conhecido de, por exemplo, um paralelepípedo em que a medida do comprimento é igual a medida da largura e a medida da altura é doze vezes maior que a medida do comprimento.

Os números negativos e complexos entraram para o modelo numérico muito mais tarde, em conexão com os esforços, na Itália por volta de 1500, para a resolução da equação do terceiro e quarto graus.

Já os gregos antigos usavam os métodos das Construções Geométricas para resolver algumas equações do segundo grau e até alguns tipos de equações cúbicas. Dentro dessa linha, os gregos nos legaram os famosos problemas clássicos da “trissecção do ângulo”, da “duplicação do cubo” e da “quadratura do círculo”. A importância desses problemas está no fato de que eles não podem ser resolvidos geometricamente por meio dos instrumentos régua (sem escala) e compasso. Matemáticos de diferentes períodos contribuíram para mostrar a ligação desses problemas com a teoria das equações polinomiais sendo, então, todos respondidos negativamente.

Os gregos empregaram métodos geométricos, mas, os hindus, no início da era cristã, utilizaram métodos aritméticos na resolução de equações, os quais foram desenvolvidos pelos árabes. Um dos mais significativos resultados desse período árabe é, sem dúvida, a solução algébrica geral da equação do segundo grau, cujas raízes são dadas pela fórmula amplamente conhecida.

Apesar de tudo, as resoluções algébricas para as equações cúbicas eram desconhecidas. No final do século XV e início do século XVI os matemáticos italianos, principalmente de Bolonha, descobriram que a solução da equação cúbica poderia ser reduzida àquelas dos seguintes tipos:

$$x^3 + \ px = q, x^3 = px + q \ e \ x^3 + \ q = px$$

(observe que essas distinções são decorrentes do não reconhecimento dos números negativos).

Ora, já que as raízes das equações de grau menor ou igual a quatro são expressões radicais, naturalmente a pergunta que segue é inevitável:

Será que as equações de grau cinco também são resolúveis por meio de expressões radicais?

Sabe-se que muitos matemáticos importantes atacaram o problema. Euler não conseguiu resolvê-lo, porém encontrou novos métodos para a resolução da equação do quarto grau. Já em 1770 Lagrange conseguiu um resultado que iria contribuir bastante para o estudo das equações do quinto grau. Ele unificou os argumentos nos casos das equações de grau três e quatro e mostrou porque tal argumento falhava no caso do grau cinco. A partir daí um sentimento de que a resposta para o grau cinco seria negativa tomou corpo entre os pesquisadores da época. Ruffini, em 1813, tentou uma demonstração de tal impossibilidade, mas seus argumentos apresentavam muitas falhas. Finalmente, em 1824, Abel provou que a *equação geral* de grau cinco não é resolúvel por meio de radicais. Não ficou estabelecido, porém, quando uma equação de grau maior do que cinco é ou não "resolúvel por meio de radicais".

Joseph Liouville (1809 — 1882), matemático francês, cuja importância dos trabalhos de Evariste Galois (1811-1832) foi o primeiro a aperceber-se, em 1843 escreveu para a Academia de Ciências de Paris anunciando que os trabalhos deixados por Galois continham uma solução que respondia precisamente quando uma equação de grau maior ou igual a cinco é ou não "resolúvel por meio de radicais".

A solução apresentada por Galois, ao caracterizar as equações polinomiais resolúveis por meio de radicais, através de propriedades do grupo de automorfismos de um corpo, é considerada uma das principais conquistas da Álgebra no século XIX.

O leitor interessado neste assunto pode consultar, a respeito, a literatura existente sobre a Teoria de Galois. Em particular, o livro de A. Gonçalves, citado na Bibliografia, apresenta um parágrafo no capítulo VII sobre a solubilidade por meio de radicais.

Voltando as equações do terceiro grau, a história da resolução da equação de terceiro grau é muito pitoresca, plena de lances dramáticos, paixões e disputas pela fama e a fortuna que seu achado poderia trazer a seus autores. Ela foi narrada recentemente num interessante artigo do professor Elon L. Lima e pode ser encontrada também em livros de história da Matemática tais como *História da Matemática*, de C. Boyer.

Uma das personagens dessa história é Niccolò Fontana (1500-1557). Em 1512 os franceses saquearam Brescia, sua cidade natal e sua mãe buscou refúgio para o filho na igreja, mas os soldados também invadiram o santuário, e a criança foi ferida no rosto. O ferimento lhe causou uma gagueira permanente, que lhe valeu o apelido de Tartaglia (gago, em italiano), pelo qual se tornou conhecido. Ele não foi o primeiro a obter o método de resolução dessas equações; Scipione del Ferro (1465-1562), que foi professor na Universidade de Bolonha e cuja biografia é pouco conhecida foi o verdadeiro descobridor. Antes de morrer, del Ferro ensinou seu método a dois discípulos, Annibale delia Nave - seu futuro genro e sucessor na cátedra em Bolonha - e António Maria Fior (ou Floridus, em latim).

Em 1535 houve uma disputa Matemática muito interessante entre Fior e Tartaglia. Esses confrontos intelectuais não eram infreqüentes na época e, muitas vezes, a permanência de um matemático numa cátedra dependia de seu bom desempenho nesses encontros. Cada um dos adversários propôs ao outro trinta problemas e foi combinado que o perdedor deveria pagar trinta banquetes ao ganhador. Tartaglia preparou questões variadas, mas todos os problemas propostos por Fior implicavam equações do tipo $x^3 + ax = b$. Precisamente na noite de 12 para 13 de fevereiro, Tartaglia conseguiu descobrir o método de resolução de tais equações e, na hora do confronto, verificou-se que Tartaglia tinha resolvido todas as questões propostas por Fior, enquanto este não tinha conseguido resolver a maioria das questões submetidas por Tartaglia. Declarado vencedor, Tartaglia voluntariamente abriu mão aos trinta banquetes.

A notícia do triunfo de Tartaglia logo se espalhou e chegou aos ouvidos de Girolamo Cardano (1501-1576), que, na época, ocupava uma cadeira de medicina na Universidade de Pavia e era membro do Colégio Médico de Milão. De todos os participantes da nossa história, talvez seja Cardano o mais enigmático, aquele cuja vida é mais pitoresca e, certamente, que teve uma formação mais universal.

Para ter uma ideia de quão extenso e profundo era seu conhecimento, citamos a seguir os comentários de Gabriel Naudé (1600-1653), bibliotecário francês, que publicou a autobiografia de Cardano pela primeira vez em 1643:

> *Não somente era ele inquestionavelmente um médico notável, como foi também provavelmente o primeiro e único homem a se distinguir em todas as ciências ao mesmo tempo. É uma das ilustrações da Natureza daquilo que um homem é capaz de atingir. Nada de significativo lhe era desconhecido em Filosofia, Medicina, Astronomia, Matemática, História, Metafísica ou as Ciências Sociais, ou em outras áreas mais remotas do conhecimento. Ele também errava, é claro, isto é apenas humano; é maravilhoso, porém, quão raramente ele errava.*

Por outro lado, Naudé foi bem mais crítico quanto à vida pessoal e características de personalidade de Cardano, distorcendo-as até o patológico e foram estas opiniões de Naudé, amplamente divulgadas no prefácio das obras de Cardano, que deram origem à visão distorcida que as futuras gerações tiveram sobre seu caráter.

Na época da descoberta de Tartaglia, Cardano gozava de boa posição em Milão e o convidou a sua casa, com o pretexto de apresentá-lo ao comandante militar da cidade, uma vez que Tartaglia tinha feito também algumas descobertas sobre tiro e fortificações e esperava obter disso algum benefício. Uma vez lá, com muita insistência Cardano conseguiu que lhe fosse revelado o segredo da resolução das equações do terceiro grau.

Tartaglia consentiu em lhe ensinar a regra de resolução (embora não lhe ensinasse a demonstração da mesma), sob forma de versos, em troca do juramento solene de que Cardano jamais publicaria esse segredo.

Conhecendo um método de resolução, Cardano procurou - e achou - uma demonstração que o justificasse. Mais ainda, ele estimulou seu secretário e discípulo Ludovico (Luigi) Ferrari (1522-1565) a trabalhar com a equação de quarto grau e ele achou o correspondente método de resolução com a devida demonstração.

De posse de ambas as soluções, Cardano deve ter se sentido fortemente tentado a publicá-las. Em 1544, mestre e discípulo realizaram uma viagem a Florença e, no caminho, fizeram uma visita a Annibale delia Nave, em Bologna. De acordo com um relato de Ferrari, este lhes mostrou um manuscrito de del Ferro que continha a famosa regra de Tartaglia, manuscrito este que ainda se conserva. Aparentemente, ao saber que a fórmula de Tartaglia existia já desde trinta anos antes, Cardano se sentiu desobrigado de cumprir seu juramento e publicou, em 1545, em Nuremberg, uma obra intitulada *Ars Magna*, que o tornou verdadeiramente famoso em todo o continente. Nas palavras de C. Boyer, "ele provavelmente era o matemático mais competente da Europa". Nessa obra aparecem, pela primeira vez, as regras de resolução das equações do terceiro e quarto graus. A seu favor, podemos dizer que Cardano não esquece de fazer as devidas atribuições de mérito aos respectivos descobridores.

A seguir, faremos uma análise do método que Tartaglia confiou a Cardano. Como foi dito acima, Tartaglia comunicou a Cardano o segredo da sua descoberta por meio de versos. Tal idéia não é tão estranha quanto pode parecer a princípio; devemos lembrar que, na época, os autores não dispunham ainda de uma notação adequada para tratar as equações em sua generalidade e não podiam, portanto, expressar seus métodos resumidamente mediante fórmulas, como fazemos hoje em dia.

A reprodução dos versos na sua versão original, tal como transcritos na página 120 da edição de 1554 dos *Quesiti,* pode ser encontrado na Revista do Professor de Matemática numéro 25, no artigo “A Soluçao de Tartaglia para a Equação do Terceiro Grau, do professor César Polcino Milies, bem como uma analise, desses versos numa linguagem acessível ao leitor contemporâneo.

A Resolução da Equação do Terceiro Grau

Veremos agora como justificar a fórmula de Tartaglia para resolver equações do terceiro grau. Naturalmente, utilizaremos métodos e notações modernos, o que nos permitirá dar uma exposição relativamente simples.

Dada a equação geral do terceiro grau $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$. Ela é equivalente a

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0$$

Logo, basta considerar equações em que o coeficiente de x^3 é igual a 1.

Dada a equação $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, a substituição de $x = y - \frac{a}{3}$ a transforma em

$$\left(y - \frac{a}{3}\right)^3 + a\left(y - \frac{a}{3}\right)^2 + b\left(y - \frac{a}{3}\right) + c = 0 \text{ , ou seja:}$$

$$y^3 + \left(b - \frac{a^2}{3}\right)y + \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c = 0,$$

Que é uma equação desprovida de termo do segundo grau. Portanto, é suficientemente estudar as equações do terceiro grau do tipo

$$x^3 + px + q = 0.$$

Vamos agora, procurar suas soluções, escrevendo $x = u + v$. Substituindo, obtemos:

$$u^3 + v^3 + 3u^2v + 3uv^2 + p(u + v) + q = 0,$$

isto é:

$$u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q = 0.$$

Portanto, se conseguirmos achar números u, v tais que

$$u^3 + v^3 = -q, \qquad u.v = -\frac{p}{3}$$

Ou seja

$$u^3 + v^3 = -q, \qquad u^3 v^3 = -\frac{p^3}{27}$$

Então $x = u + v$ será raiz da equação $x^3 + px + q = 0$.

Ora, o problema de achar u^3 e v^3 conhecendo a sua soma e o seu produto é, como sabemos, de fácil solução: u^3 e v^3 são as raízes da equação do segundo grau

$$w^3 + qw - \frac{p^3}{27} = 0$$

Utilizando a fórmula clássica para resolver esta equação, obtemos

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

e

$$v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

Consequentemente:

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \quad \text{e} \quad v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Portanto:

$$x = u + v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Assim, $x = u + v$, dada pela fórmula acima, é uma raiz da equação

$x^3 + px + q = 0$

Vejamos como funciona o método de Tartaglia, em um exemplo concreto. Seja a equação $x^3 - 6x - 9 = 0$.

Aqui, $p = -6$ e $q = -9$

$$x = \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2 + \left(-\frac{6}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2 + \left(-\frac{6}{3}\right)^3}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \sqrt{\frac{49}{4}}} + \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \sqrt{\frac{49}{4}}} =$$

$$= \sqrt[3]{\frac{9+7}{2}} + \sqrt[3]{\frac{9-7}{2}} = \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{1} = 2 + 1 = 3$$

Fazendo uma verificação da veracidade da raiz $x = 3$, obteremos:

$3^3 - 6.3 - 9 = 27 - 18 - 9 = 0$

Na fórmula acima, podemos destacar o radicando $D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$. Pode ser mostrado que se $D > 0$ a equação tem uma raiz real e duas raízes complexas conjugadas; Se $D = 0$, tem-se três raízes reais, sendo uma repetida; se D < 0 então as três raízes da equação $x3 + px + q = 0$ são reais e distintas. Este é um aspecto paradoxal da fórmula de Ferro e Tartaglia. Quando $D < 0$, a fórmula exprime $x = u + v$ como soma de duas raízes cúbicas de números complexos. No entanto é este caso em que a equação possui três raízes reais distintas. Este é chamado tradicionalmente o "caso irredutível" porque, ao tentar eliminar os radicais, recai-se noutra equação do terceiro grau.

Para ilustrar observemos os exemplos retirados do livro de Álgebra de Leonhard Paul Euler (1707 – 1783) grande matemático e físico suíço de língua alemã que passou a maior parte de sua vida na Rússia e na Alemanha e que fez importantes descobertas em campos variados em cálculo e grafos. Também fez muitas contribuições para a matemática moderna no campo da terminologia e notação, em especial para a análise matemática, como a noção de uma função matemática. Voltando ao livro, escrito em 1770, o qual serviu de modelo para os compêndios utilizados por sucessivas gerações de estudantes.

Como primeiro exemplo observe a equação $x^3 - 6x - 9 = 0$. Aqui, $D = \frac{49}{4} = (\frac{7}{2})^2 > 0$. Logo a fórmula nos dá a raiz $x = 2 + 1 = 3$. Dividindo

$x^3 - 6x - 9 = 0$ por $x - 3$, obtemos $x^2 - 3x + 3$, logo as duas raízes restantes são as da equação $x^2 - 3x + 3 = 0$, isto é,

$$-\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \; e - \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Podemos destacar que a raiz 3 (como toda raiz inteira) poderia ser obtida mediante simples inspeção, examinando-se os divisores do termo independente – 9, sem necessidade de usar a fórmula.

Um segundo exemplo seria a resolução da equação $x^3 - 3x - 2 = 0$. Nesse caso, D = 0 e a fórmula nos dá a raiz $x = 2$. Como $(x^3 - 3x - 2) \div (x - 2) = x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$, as outras raízes são – 1 e – 1, ou seja uma raiz dupla (multiplicidade 2). Novamente neste exemplo, chegaríamos às raízes simplesmente examinando os divisores de 2, pois a equação não tem raízes irracionais.

Para terminar a equação $x^3 - 6x - 4 = 0$ nos dá D = – 4 < 0. Portanto ela deve ter 3 raízes reais distintas. A fórmula fornece uma delas $x = \sqrt[3]{2 + 2i} + \sqrt[3]{2 - 2i}$. Isto parece um número complexo mas, tem que ser um número real. Ora, testando os divisores de – 4, termo independente de x, como já vimos no Teorema de Pesquisa de Raízes Inteiras, vemos que – 2 é raiz da equação proposta. As outras duas são as raízes de $x^2 - 2x - 2 = 0$ por que $x^2 - 2x - 2 = = (x^3 - 6x - 4) \div (x + 2)$. Logo as três raízes da equação são $-2,\ 1 + \sqrt{3}$ e $1 - \sqrt{3}$. Este é um exemplo de um caso irredutível: três raízes reais mas a fórmula nos dá um radical complexo.

Voltando a fórmula geral assinalamos que este procedimento é suficiente para resolver qualquer equação do 3.º grau. De fato, dada uma equação geral de grau 3 podemos, para efeito de determinar as suas raízes, supor que o coeficiente do termo dominante seja 1 e ela será, então, da forma

$$y^3 + \ a.y^2 + \ b.y + c = 0$$

Mediante a substituição y = x + α na igualdade acima, obtemos

$$x^3 + \ (3\alpha + a).x^2 + \ (3\alpha^2 + \ 2a.\alpha + b).x + \ \alpha^3 + \ b.\alpha + c = 0$$

que, para $\alpha = -\frac{a}{3}$, é uma questão do tipo $x^3 + \ px + q = 0$.

Finalmente, retomando a exposição histórica, lembramos que, no “Ars Magna”, Cardano estudou a equação cúbica particular $x^3 + 6x = 20$, quando se serviu de linguagem e processo geométricos.

4. **A Utilização de Tabelas na Construção de Gráficos**

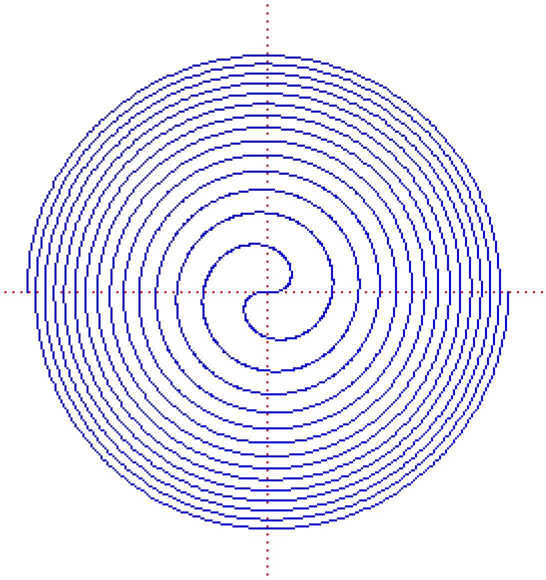
Temos observado quantas dificuldades os alunos do início do Ensino Médio apresentam quando necessitam fazer cálculos numéricos e também constatamos o quanto eles ficam presos ao uso de tabelas na construção de gráficos de funções. Isto faz com que percam a ideia geral do comportamento da função. Com a tabela, o problema se reduz a marcação de alguns pontos do gráfico através de avaliação em valores de x (geralmente, x = 0, +1, - 1, + 2, - 2), tornando-se um exercício meramente computacional.

No entanto, este recurso pode e deve ser usado para que os alunos tenham uma boa perspectiva da função, contanto que ele não seja o único recurso usado ou se for usado com uma perspectiva mais global prévia do tipo de função cujo gráfico ele vai esboçar. Por exemplo, no caso de uma função polinomial do primeiro grau, isto é, do tipo $f(x) = ax + b$, sabe-se que o seu gráfico é uma reta e, portanto, bastam dois pontos para determiná-lo inteiramente. Para uma função polinomial do segundo grau, ou seja, $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, sabe-se que o seu gráfico é uma parábola cujo eixo é a reta vertical definida pela equação $x = -\frac{b}{2a}$, bem como outras características conhecidas.

Quando se esboça o gráfico de uma função $f: R \to R$ apenas marcando em um sistema de coordenadas uma sequência qualquer de pontos $(x_1; f(x_1)), \ . \ . \ . \ ,(x_n; f(x_n))$, corre-se o risco de escolher mal os pontos, trabalhando demais ou então deixando de perceber aspectos importantes da curva.

Para o caso das funções definidas por uma equação algébrica do terceiro grau, também é possível estabelecer uma perspectiva prévia de como deve ser o gráfico, o que auxiliará sobremaneira o seu esboço usando a plotagem de uma série de pontos. O fato geométrico relevante nesta situação é a existência de um ponto de simetria na curva.

Dizemos que uma figura F é simétrica em relação ao ponto P, se para todo ponto A pertencente à figura, o ponto A’ da reta definida por A e P que tem a mesma distância até P, porém oposto ao ponto A, também pertence à figura.



A curva chamada Espiral de Fermat é um exemplo de figura simétrica em relação à origem.

No caso de polinômios do terceiro grau $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, com $a \neq 0$, vamos encontrar um ponto P tal que o gráfico da função é simétrico em relação a ele. Começamos por “completar o cubo”, processo análogo ao de “completar o quadrado”, utilizado nos polinômios do segundo grau. Para isso, fazemos:

$$f(x) = a\left(x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a}\right) =$$

$$= a\left(x^3 + 3.\frac{b}{3a}x^2 + 3.\left(\frac{b}{3a}\right)^2 x + \left(\frac{b}{3a}\right)^3 - 3.\left(\frac{b}{3a}\right)^2 x - \left(\frac{b}{3a}\right)^3 + \frac{c}{a}\,x + \frac{d}{a}\right) =$$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{3a}\right)^3 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{3a^2}\right)x + \frac{d}{a} - \frac{b^3}{27a^3}\right] =$$

$$= a\left(x + \frac{b}{3a}\right)^3 + \left(c - \frac{b^2}{3a}\right)x + d - \frac{b^3}{27a^2}$$

Logo, $f(x) = a\left(x + \frac{b}{3a}\right)^3 + c_1\left(x + \frac{b}{3a}\right) + c_0$. Observe que não há termo do segundo grau. Note que $c_1 = c - \frac{b^2}{3a}$ e $c_0 = d - \frac{bc}{3a} + \frac{2b^3}{27a^2}$.

O ponto $P = \left(-\frac{b}{3a}\,;\, c_0\right)$ pertencente à curva $u = f(x)$, e que vai exercer um papel importante. Pondo $x_p = -\frac{b}{3a}$, tem-se que;

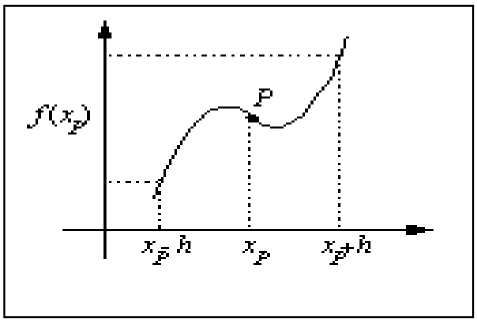
$\frac{f(xp+h)-f(xp-h)}{2} = \frac{ah^3+c_1h+c_0-ah^3-c_1h+c_0}{2} = c_0 = f(x_p)$, qualquer que seja h.

Este resultado diz qu*e* *P* é o ponto médio do segmento de extremos $(x_p - h; f(x_p - h))$ e $(x_p + h; f(x_p + h))$.

Ou seja, o gráfico de *f* é simétrico em relação ao ponto *P*.

Uma segunda maneira para determinar este ponto é usando os conhecimentos do Cálculo Diferencial. Sabemos que o polinômio $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tem por derivada $p'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$, e o sinal desta função determina o comportamento do gráfico de p do ponto de vista de crescimento e decrescimento. Derivando uma segunda vez, obtemos a função afim $p''(x) = 6ax + 2b$ que tem um único zero, no ponto $x_0 = -\frac{b}{3a}$, que é a primeira coordenada do ponto P.

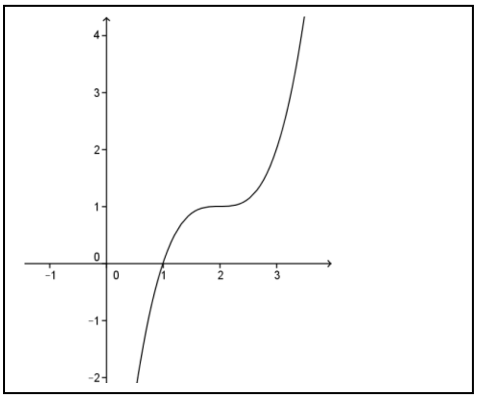
Como necessariamente há mudança no sinal da função $p''(x)$ em torno deste ponto, ele é o único ponto de inflexão e o ponto de simetria.



Observe que, no caso do segundo grau, há uma simetria axial (em relação a uma reta). No terceiro grau, há uma simetria central (em relação a um ponto).

Vamos ilustrar este fato por dois exemplos.

Para a função $f(x) = (x-2)^3 + 1$, a = 1, b = – 6 e usando a fórmula $P = \left(-\frac{b}{3a}\ ;\ c_0\right)$, determinamos o ponto de simetria $P = (2{,}1)$. Logo, no esboço do gráfico, uma vez marcado, por exemplo, o ponto (3, 2) = (2 + 1, 1 + 1) (que corresponde a h = 1), obtém-se imediatamente o outro ponto do gráfico (2 – 1; 1 – 1) = (1; 0). Marcando-se (4; 9) = (2 + 2; 1 + 8), obtém-se o ponto (2 – 2; 1 – 8) = (0; – 7), e assim por diante

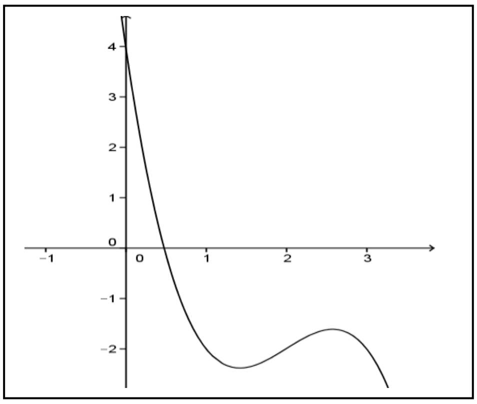


Como segundo exemplo, temos: se $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 11x + 4$, então

$$f(x) = -(x^3 - 6x^2 + 12x - x - 8 + 4) = -[(x-2)^3 - (x-2) + 2]$$

sendo o gráfico simétrico em relação ao ponto $P = (2;-2)$.

Logo, se marcarmos o ponto $(4; -8) = (2 + 2; -2 - 6)$, teremos imediatamente o ponto $(2 - 2; 0 - 2 + 6) = (0; 4)$; se marcarmos o ponto $(-1; 22) = (2 - 3; -2 + 24)$, teremos imediatamente o ponto $(2 + 3; -2 - 24) = (5, -26)$ e assim por diante.



5. **Relato da Experiência em Sala de Aula**

Atividades Envolvendo Equações do Segundo Grau

Este é o relato de três aulas de 50 minutos realizado em um colégio da rede estadual, na cidade do Rio de Janeiro, com alunos da primeira série do Ensino Médio.

A experiência foi realizada com grupos de quatro a seis alunos, para os quais foram propostas duas atividades. Na primeira atividade, que abordava o tema das funções quadráticas, foi utilizado um problema clássico que envolve equações do 2^0 grau que é encontrar dois números conhecendo sua soma e produto. Vamos apresentar os problemas abordados e, posteriormente alguns comentários sobre a aula em si.

"Quais são os dois números inteiros cuja soma é igual a seis e o produto é igual a cinco?"

Os alunos foram estimulados a descobrir mentalmente quais são os tais números. Após várias tentativas e erros o resultado foi encontrado, por dois alunos de grupos diferentes, que chegaram aos números um e cinco.

Descoberto os números, foi solicitado que eles completassem o sistema a seguir.

$$\begin{cases} x + y = \\ x \cdot y = \end{cases}$$

A expectativa é de que os alunos relacionem problemas de natureza oral, mais próximos de situações cotidianas com os métodos e práticas de natureza matemática, como equações, fórmulas e conceitos.

Notamos que o problema proposto remonta dos tempos dos matemáticos babilônicos, que por volta de 1700 a.C., já conheciam regras para resolver equações do segundo grau, sob forma de problemas, como o de achar dois números conhecendo sua soma e seu produto.

Utilizando o método da substituição, escrevemos o valor de y em função de x na primeira equação e o substituímos na segunda equação. Veja a seguir.

$$\begin{cases} x + y = \quad \Rightarrow y = \\ x \cdot y = \quad \Rightarrow x \cdot (\quad\quad) = \end{cases}$$

Após os cálculos terem sido feitos, chegamos a uma primeira equação.

$$-x^2 + 6x - 5 = 0$$

Os alunos foram solicitados a multiplicar esta equação por menos um, levando a uma segunda equação, equivalente à primeira.

$$x^2 - 6x + 5 = 0$$

Logo depois foi explicado que a função quadrática, ou como também é conhecida nos livros didáticos, a função polinomial do segundo grau, tem a sua lei de formação expressa pelo trinômio de segundo grau, $f(x) = ax^2 + bx + c$ ou $y = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$. As duas equações encontradas no problema original foram dadas como exemplos.

$(A)\ f(x) = x^2 - 6x + 5$ ou $y = x^2 - 6x + 5$

$(B)\ f(x) = -x^2 + 6x - 5$ ou $y = -x^2 + 6x - 5$

A partir da função expressa no item A, $y = f(x) = x^2 - 6x + 5$, foi pedido que procurassem determinar as imagens $f(0), f(1), f(3), f(5)\ e\ f(6)$ dos seguintes elementos do domínio, $0, 1, 3, 5\ e\ 6$. O que posso destacar deste momento foi a dificuldade de efetuar os cálculos tendo muitos erros, principalmente na utilização das regras de sinais, na potenciação, multiplicação e soma ou subtração, mesmo que trabalhando só com números positivos.

Como estávamos trabalhando com cálculos, pedi que determinassem as raízes ou zeros da função, explicando que bastava igualar o trinômio a zero, ou seja, resolver a equação $f(x) = 0$. Calculamos o valor do discriminante $\Delta = b^2 - 4.a.c$ e usamos a Fórmula de Báskara.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Após serem determinadas as raízes da função, foi dito que os pontos $(1,0)\ e\ (5,0)$ são os pontos de intersecção do gráfico da função com o eixo das abscissas (eixo x).

Feito isso, foi mostrado a eles que a equação do segundo grau, na forma

$$x^2 - Sx + P = 0,$$

expressa o oposto da soma das raízes como o coeficiente de x e como o produto das raízes o termo independente.

Para confirmar esse fato, solicitamos aos alunos que substituíssem os valores das raízes na equação $(x - x_1)(x - x_2) = 0$ e a expandissem. Mais uma vez, observamos as severas dificuldades que eles apresentaram para efetuar essas operações.

O objetivo de enfatizar a importância das raízes das equações é de preparar os alunos para estabelecer uma correlação entre os aspectos algébricos e os geométricos da questão.

Ainda foi destacado que o vértice da curva que expressa a função polinomial do segundo grau pode e deve ser obtido calculando a abscissa do vértice como ponto médio das raízes da função que nos dá

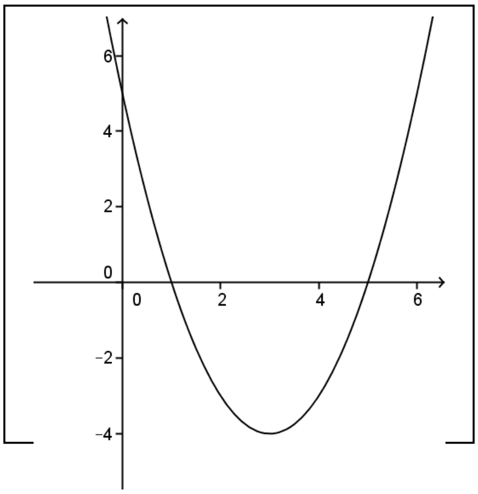
$$x_v = -\frac{b}{2.a} =$$

substituindo o valor encontrado na função dada, foi determinado a ordenada y_v do vértice.

Após este momento, em função da escola estar com o laboratório de informática sendo reestruturado, pois com o fim do curso profissionalizante de informática ele ficou um grande período desativado, pedi então que utilizando a tabela abaixo fossem organizado os dados já obtidos nas atividades anteriores.

x	$y = f(x) = x^2 - 6x + 5$	(x, y)
0	$y = f(0) = 0^2 - 6.0 + 5 = 5$	$(0,5)$
1		
3		
5		
6		

e com os cinco pontos (x, y) obtidos na tabela, foi construído um esboço do gráfico da função em um sistema de coordenadas cartesianas:

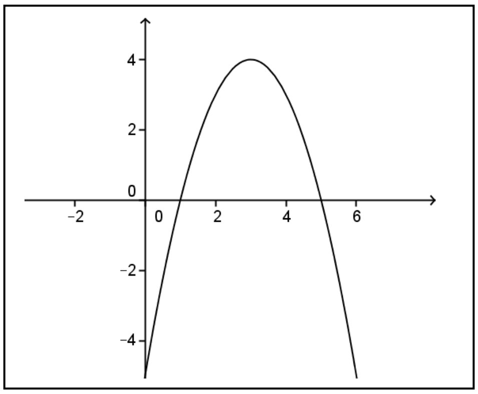


Ao escolher os pontos na construção da tabela, buscamos usar números que enfatizassem a simetria da situação.

Terminado esta etapa, voltamos às equações iniciais encontradas e tomando a segunda equação escrevemos a função $y = f(x) = -x^2 + 6x - 5$.

Novamente foi pedido que os alunos calculassem as imagens para os mesmos valores de x tomados anteriormente, foi calculado as raízes ou zeros, momento que foi destacado que ao multiplicarmos a equação por um mesmo valor as raízes ou zeros não se alteram, e finalmente que fosse calculado as coordenadas do vértice.

Mais uma vez foi armazenado esses dados em uma tabela e foi construído um esboço do gráfico.



Para encerrar esta atividade, foi pedido que os alunos relatassem as suas dificuldades e o que eles puderam observar com a construção dos gráficos. Obtivemos registros tais como os que apresentamos a seguir.

Joyce – “Achei o trabalho complicado e espero que eles não caiam na prova.”

Edenilson – “Eu achei meio difícil.”

Christian – “Achei o trabalho cansativo.”

Jéssica – Professor, eu consegui entender o trabalho, mas acho que os sinais me confundem um pouco, as vezes.

Registro do grupo da Jéssica – Que se o “a” é positivo o gráfico fica para cima. Pelo contrário, fica virado para baixo.

Grupo da Iviny – Achamos fácil, porém os gráficos ainda são complicados.

Grupo do Gabriel – Posso observar que os gráficos em que construi, as parábolas se inverteram por causa da troca de sinais.

Atividades Envolvendo Equações do Terceiro Grau

Após esta experiência envolvendo a função polinomial do segundo grau foi proposto, aos alunos das mesmas turmas, em um novo momento que novamente se organizassem em grupos com até seis (06) alunos para realizarmos um trabalho, agora envolvendo uma função polinomial do terceiro grau.

Mais uma vez, foi tomado como ponto de partida um problema, descrito a seguir.

Problema – Dona Margarida, uma jovem senhora de aproximadamente 40 anos, vinha caminhando por uma rua do bairro em que mora, quando avistou no outro lado da rua o prof. Mário, um grande algebrista conhecido em toda a redondeza. Aproveitando o encontro, Dona Margarida gritou para o professor.

– Prof. Mário, tudo bom com o senhor, vou aproveitar a ocasião para lhe fazer uma pergunta com respeito ao seguinte problema: Tenho três filhos e o produto de suas idades é 36 anos, então pergunto, qual é a idade dos meus filhos?

O prof. Mário surpreso com a pergunta respondeu:

– Dona Margarida, tudo bom, só que apenas esta informação não me permite responder corretamente a sua pergunta, a senhora não teria outra dica para me dar?

– Hã, desculpe professor, olha, a soma das idades deles três é o número daquela casa amarela.

Depois que o professor avistou o número da casa, ele falou:

– Desculpe mais uma vez Dona Margarida, mas ainda não tenho informações suficientes para poder lhe responder com certeza absoluta.

A informação final foi dividida em duas partes com o objetivo de mostrar aos alunos que um mesmo problema, mudando apenas uma informação, pode gerar soluções diferenciadas como podemos vê, para os grupos que chamei de A e B a informação foi:

E dona Margarida acrescentou:

– Olha, o filho mais velho toca piano.

Enquanto para os grupos que foi chamado de C e D,

– Olha, o filho mais novo tem olhos azuis.

Como o prof. Mario respondeu de forma imediata e correta a solução do problema, procurei saber se eles teriam a solução de forma também imediata. Como a resposta negativa foi unanime, procurei induzi-los a solução tentando inicialmente descobrir os oito produtos possíveis com três fatores cujo resultado é igual a 36.

Foi um momento interessante, pois os alunos se entusiasmaram com o problema e procuraram responder o que estava sendo proposto. Como no problema é afirmado que Dona Margarida tinha aproximadamente 40 anos, procurei ver se eles associavam esta informação com o descarte do produto 36 x 1 x 1, mas não obtive sucesso e só depois de perguntar se uma pessoas com aproximadamente 40 anos pode ter um filho com 36 anos é que eles descartaram esse produto.

Como o prof. Mario não conseguiu descobrir as idades com esta informação procurei mostrar que era importante o número da casa amarela e pedi que fizessem a soma de todas as soluções possíveis. A partir daí, alguns alunos, poucos na realidade, concluíram que o número da casa amarela era treze (13) e com a última informação para os grupos A e B "de que o mais velho toca piano" chegaram as idades de 9 anos, 2 anos e 2 anos, e para os grupos C e D, cuja última informação foi "o mais novo tem olhos azuis" concluíram que as idades eram 1 ano, 6 anos e 6 anos.

Neste momento foi colocado por um grupo de meninas se os filhos de D. Margarida eram gêmeos, o que gerou um certo rebuliço, mas chegou-se a conclusão que nada poderia ser afirmado pois eles poderiam ter nascido no início e no fim de um mesmo ano, e nós não sabíamos quando foi proposto o problema.

Logo a seguir, questionou-se quais seriam as soluções possíveis se fosse feita a troca do produto das idades de 36 para 48. Após ter sido encontrado todas as soluções possíveis, foi perguntado se caso o número da casa amarela não fosse alterado, haveria a necessidade da última informação, de que o filho mais velho toca piano ou se o filho mais novo tem olhos azuis. Eles concluíram que não e que as idades dos filhos seriam 8 anos, 3 anos e 2 anos.

Até aqui, tudo corria a mil maravilhas, pois a Álgebra ainda não tinha entrado em cena, o que podemos destacar como a importância da Aritmética na resolução de problemas, e como tudo não são feitos de flores foi pedido aos alunos que encontrassem uma equação do terceiro grau a partir de conhecidas as suas raízes utilizando a igualdade $(x-a)(x-b)(x-c)=0$ sendo $a, b\ e\ c$ as suas raízes.

Após muitos erros e acertos conseguimos chegar as equações para os grupos A e B, que tinham como informação final que "o mais velho toca piano:

$$x^3 - 13x^2 + 40x - 36 = 0$$

e para os grupos C e D que tinham como informação final que "o mais novo tem olhos azuis:

$$x^3 - 13x^2 + 48x - 36 = 0$$

Depois foi mostrado a eles as relações entre os coeficientes e as raízes de uma equação do 3^0 grau (Relações de Girard) e pedido que calculassem sendo a, b e c as raízes encontradas nas soluções do problema:

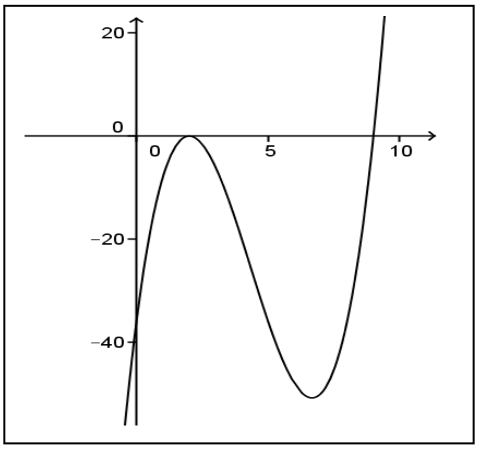
$$\begin{cases} a + b + c = \\ a.b + a.c + b.c = \\ a.b.c = \end{cases}$$

substituindo na equação $x^3 - (a + b + c)x^2 + (a.b + a.c + b.c)x - a.b.c = 0$, chegamos novamente as equações procuradas.

Tomando nos grupos A e B a função polinomial do 3^0 grau $f(x) = x^3 - 13x^2 + 40x - 36 = 0$ e novamente tomando como recurso a construção de uma tabela como temos abaixo:

x	$y = f(x) = x^3 - 13x^2 + 40x - 36 = 0$	(x, y)
0		
2		
5		
9		
10		

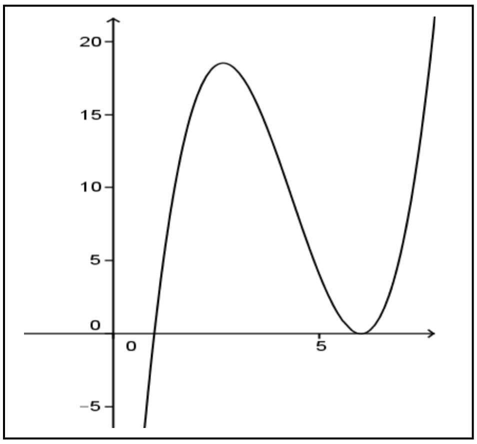
e determinado os cinco (05) pontos, foi representado em um sistema de coordenadas cartesianas e construído um esboço do gráfico, podendo ser destacado que os alunos tiveram problemas por causa da escala a ser utilizada no eixo das ordenadas.



Para os grupos C e D a partir da função $f(x) = x^3 - 13x^2 + 48x - 36$ foi feito cálculos semelhantes e a partir dos valores obtidos na tabela abaixo:

x	$y = f(x) = x^3 - 13x^2 + 48x - 36 = 0$	(x, y)
0		
1		
2		
6		
7		

Foi construído o esboço do gráfico da função.

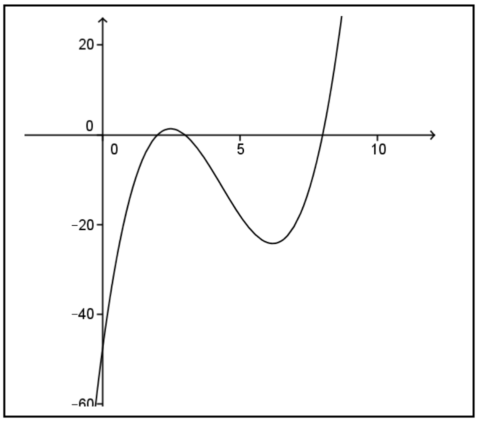


Aproveitando a construção dos esboços dos gráficos foi destacado que eles tinham três raízes inteiras sendo uma de multiplicidade um e duas de multiplicidade dois aonde a função muda de comportamento deixando de ser crescente para ser decrescente ou vice-versa.

Para finalizar esta atividade, foi proposto aos alunos que voltassem ao problema com o produto das idades igual a 48 anos, cuja solução foi 8 anos, 3 anos e 2 anos e pedido que escrevessem a equação do terceiro grau relativa e tomando este polinômio como lei de associação para a função, e mais uma vez com auxílio da tabela abaixo:

x	$y = f(x) = x^3 - 13x^2 + 46x - 48 = 0$	(x, y)
1		
2		
3		
5		
8		
9		

foi construído o esboço do gráfico.



Foi pedido finalmente que descrevessem as dificuldades encontradas, que dessem sugestões para melhorar as atividades e quais as diferenças encontradas na construção dos gráficos propostos, pois, como já foi exposto com respeito as multiplicidades das raízes, neste último gráfico todas as raízes tem multiplicidade 1, mas infelizmente eles alegaram cansaços, fato que pude comprovar com a dispersão que eles passaram a ter, só tendo um grupo formado só por meninas que procuraram concluir apesar dos erros de cálculos e registraram que "achamos várias dificuldades em fazer as contas e a diferença desse gráfico foi que os resultados para ligar uns aos outros foi maior os números".

Apesar do planejamento cuidadoso das atividades, realmente observamos que para esse grupo de alunos, a quantidade de trabalho proposto foi maior do que aquela a qual eles normalmente se deparam nas atividades da escola.

Para finalizar esse relato quero registrar que como sugestão do meu orientador Prof. Mario, levei para sala de aula o meu tablet, e com auxilio de uma calculadora gráfica, mostrei aos meus alunos como seriam os gráficos das funções que eles trabalharam, momento também muito interessante pois alguns alunos se entusiasmaram e baixaram o aplicativo em seus celulares, deixando para um próximo momento, uma aula sobre a utilização do mesmo.

6. **Conclusão**

Nesta seção apresento minhas considerações finais, o que percebi ao longo da realização deste trabalho e os entendimentos que tive para as minhas questões de pesquisa.

Na construção deste trabalho, que em parte tem como objetivo de entender as dificuldades e o desestimulo que os alunos possuem na aprendizagem da Álgebra, pude observar o quanto a escola está longe de ser o foco de interesse de alguns de nossos estudantes, que não sentem desejo de aprender. O que está faltando para que os alunos ambicionem mais do que construímos na escola? Como podemos fazer com que entendam que é maravilhosa a sensação da descoberta, que o saber é alimento da alma?

Na busca de respostas para os questionamentos que deram início a este trabalho, e com uma fundamentação teórica, trabalhei com duas turmas da primeira série do Ensino Médio de uma escola pública da cidade do Rio de Janeiro durante aproximadamente dois meses tendo um imprevisto, pois foi deflagrada uma greve e as turmas ficaram reduzidas. Nesse tempo, trabalhei atividades envolvendo equações do segundo e terceiro graus, para que pudesse ter um entendimento melhor de suas dificuldades acreditando que são muitos os pontos que devem ser avaliados sobre as dificuldades que temos no ensino de Álgebra nos dias atuais.

Pode se perceber também que durante o processo de resolução de uma equação, o aluno está trabalhando outros conceitos matemáticos além de determinar as raízes da equação, tais como estudo dos sinais, propriedades da adição, operações inversas, multiplicação de números inteiros, multiplicação de polinômios, área do retângulo, área do quadrado, volume do paralelepípedo, volume do cubo. Aliados a todos esses conteúdos poderíamos destacar também o desenvolvimento da visão espacial e do raciocínio lógico dedutivo.

Muitos dos métodos usados na álgebra atual são exatamente os mesmos usados há alguns milênios, diferenciando apenas na notação com que são apresentados. Para alguns professores o trabalho que está sendo apresentado pode ser considerado incompleto, pois só é possível encontrar a solução para raízes racionais. Além disso, quando o aluno resolve uma equação do segundo ou terceiro grau ele estará, mesmo que intuitivamente, estabelecendo relações entre os coeficientes e as raízes da equação, ou seja, as relações de Girard.

Analisando o contexto histórico das equações polinomiais verificamos a dificuldade enfrentada pelos matemáticos da época para determinarem um método que possibilitasse encontrar as raízes de uma equação do terceiro grau. Os desafios levavam esses grandes gênios a uma dedicação incansável até obterem resultados satisfatórios. Entendemos que o ensino de equações polinomiais até no ensino básico não pode se restringir apenas as equações de primeiro e segundo graus, visto que nos livros didáticos atuais dificilmente encontramos algum desses métodos algébricos.

O ensino de equações polinomiais com grau maior que dois permite que o aluno entre em contato com outras curvas além de retas, parábolas e círculos, com as quais eles já estão acostumados, dando-lhes uma bagagem matemática maior. Este ensino também permite estabelecer algumas relações importantes, como por exemplo, verificar o tipo de solução que estas equações possuem e relacionar os seus coeficientes com suas respectivas raízes.

Não conseguindo formalizar as informações, o aluno não resolverá o problema. Além da tradução da linguagem corrente para a linguagem algébrica, a resolução de um problema vai exigir que o aluno faça uso de conhecimentos que fazem parte dos procedimentos algébricos.

Essa é uma questão que requer reflexão, estudo individual ou coletivo, sendo capaz de mostrar que muitas vezes o uso apenas do livro didático pode ser limitador. Quanto às questões feitas na entrevista com os alunos, no que se refere ao sentimento de estudar Matemática, Álgebra, e fazer representações algébricas, os alunos demonstraram uma simpatia e percebi nas respostas que o fato de não gostar está ligado ao fato de não compreender. Com relação as atividade que exigiam um grau maior de abstração e em que a maioria da turma não obteve sucesso, a opinião dos alunos ficou dividida e uma grande parte deles considerou-a fácil. Parece-me que não conseguiram entendê-la, interpretá-la.

Acredito que grande parte da dificuldade de interpretação está relacionada com o fato de o aluno ter alguma deficiência na linguagem escrita. Espero que este trabalho possa despertar o interesse ao estudo das equações polinomiais do terceiro grau nas séries iniciais do ensino básico, sendo uma ferramenta que auxilie no desenvolvimento de estratégias pedagógicas eficientes para tal fim, mesmo sabendo que não é recomendado trabalhá-lo em sua totalidade por conter conceitos não adequados para o ensino básico, mas sendo útil para o conhecimento do professor.

Desta forma, a explicação contribuirá para a construção do conhecimento e ainda tornará a aula mais rica com essa troca de ideias. Encerro este trabalho com as respostas para as minhas inquietações iniciais, mas com muitas outras questões que surgiram durante esta jornada, acreditando que deixo pontos a serem analisados e que devemos estar constantemente avaliando a nossa prática pedagógica.

BIBLIOGRAFIA

[1] BOYER, CARL. B. *História da matemática*, tradução: Elza F. Gomide, Edgard Blucher, Ed. Da Universidade de São Paulo, São Paulo, 1974.

[2] DANTE, Luiz Roberto. Matemática: contexto e aplicações Volume 1. 2. ed. São Paulo: Ática, 2010.

[3] DANTE, Luiz Roberto. Matemática: contexto e aplicações Volume 3. 2. ed. São Paulo: Ática, 2010.

[4] EVES, Howard. *Introdução à história da matemática*, tradução: Hygino H. Domingues, Editora da Unicamp, Campinas, 2004.

[5] GARBI, Gilberto G. *O romance das equações algébricas*, 4 edição, Editora Livraria da Física, São Paulo, 2010.

[6] IEZZI, Gelson. Fundamentos de matemática elementar, 6: complexos, polinômios, equações. 7. ed. São Paulo: Atual, 2005.

[7] LIMA, Elon Lages. Meu professor de matemática e outras histórias. 1. ed. SBM, 2002. Coleção do Professor de Matemática.

[8] LIMA, E. L., **A Equação do Terceiro Grau**. Matemática Universitária, nº 5, 1987, p. 9-23.

[9]LIMA, E. L., CARVALHO, P. C. P., WAGNER, E., MORGADO, A. C. **A matemática do ensino médio** – volume 1, 9ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[10]LIMA, E. L., CARVALHO, P. C. P., WAGNER, E., MORGADO, A. C. **A matemática do ensino médio** – volume 3, 6ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[11] MILIES, C. P., **Uma solução de Tartaglia para a equação do terceiro grau.** Revista do Professor de Matemática, nº 25, 1994, p. 15-22. 49

[12] MOREIRA, C. G. T. de A., **Uma Solução das Equações do 3º e do 4º graus**. Revista do Professor de Matemática, nº 25, 1994, p. 23-25.

[13] PAIVA, Manoel Rodrigues. Matemática: Paiva. 3. ed. São Paulo: Moderna, 2010

[14] ROQUE, Tatiana; CARVALHO, João Bosco Pitombeira. Tópicos de História da Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2012.