

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Teorema do Hexágono de Pascal

João Carlos Cataldo

Rio de Janeiro

2013

João Carlos Cataldo

Teorema do Hexágono de Pascal

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao
Programa de Pós-graduação em Matemática
PROFMAT da UNIRIO, como requisito para a
obtenção do grau de MESTRE em Matemática.

Orientador: Silas Fantin
Doutor em Matemática – USP

Rio de Janeiro
2013

Cataldo, João Carlos

Teorema do Hexágono de Pascal / João Carlos Cataldo – 2013

79.p

1. Matemática 2. Álgebra. I. Título

CDU 536.21

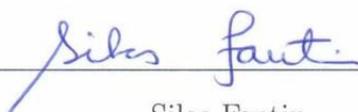
João Carlos Cataldo

Teorema do Hexágono de Pascal

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Pós-graduação em Matemática PROF-MAT da UNIRIO, como requisito para a obtenção do grau de MESTRE em Matemática.

Aprovado em 11 de abril de 2013

BANCA EXAMINADORA



Silas Fantin

Doutor em Matemática - USP



Leonardo Tadeu Silves Martins

Doutor em Matemática - UFF



Victor Augusto Giraldo

Doutor em Matemática - UFRJ

Dedicatória

Esse trabalho é fruto de um grande esforço que perdurou por dois longos anos cheios de dificuldades impostas pela vida que precisavam ser superadas. Nada seria possível se não fosse a existência de minha família. Dedico-o com todo amor a minha mulher Marta e aos meus queridos filhos, Nicole e João, porque eles são mais do que tudo para mim.

Resumo

Neste trabalho de conclusão de curso do programa de Pós-graduação em matemática PROFMAT da UNIRIO são apresentadas duas demonstrações do Teorema do Hexágono de Pascal. A primeira por geometria sintética, via o Teorema de Menelau, e a segunda algébrica, via o Teorema de Bézout.

Esse trabalho foi desenvolvido em conjunto com o trabalho do professor João Jorge Fernandes Chaves cujo tema é o Teorema de Pappus. Em ambos há pré-requisitos comuns e o Teorema de Pappus pode ser entendido como um caso particular do Teorema do Hexágono de Pascal.

Houve uma grande preocupação com o uso de uma linguagem adequada a alunos do ensino médio. Ao final do trabalho há uma proposta de algumas atividades que podem ser aplicadas a esses alunos. Tanto ao longo do desenvolvimento do trabalho quanto nas atividades propostas ao final, foi usado o programa computacional gratuito Geogebra.

Palavras-chaves: Pascal, Pappus, Menelau, Bézout,

Abstract

This course conclusion paperwork for the Master Program in Mathematics from PROFMAT UNIRIO presents two proofs of Pascal's Hexagon Theorem. The first for synthetic geometry, by Menelau's Theorem, and the second algebraic, by the Bézout's Theorem.

This paper was developed in conjunction with João Jorge Fernandes Chaves 's paperwork whose theme is Pappus's theorem. In both papers there are common prerequisites and Pappus's theorem can be understood as a particular case of Pascal's Hexagon Theorem.

There was concern with the use of appropriate language to high school students. At the end of the paper there is a proposal of some activities that can be applied to these students. During the development of the paper and at the proposed activities, we used the free software GeoGebra.

Keywords: Pascal, Pappus, Menelau, Bézout,

Agradecimentos

Agradeço, sinceramente,

A minha querida esposa Marta que há muitos anos tem sido sempre o vetor que dá o melhor sentido a minha vida. Sua orientação, seu carinho e seu apoio são decisivos para levar adiante o meu trabalho e a minha própria vida.

Aos meus amigos irmãos João Jorge que dividiu comigo esse trabalho e vem fazendo uma forte parceria há vinte anos.

Ao professor Silas, o orientador desse trabalho, que com muita dedicação e talento soube ajudar e contribuir de modo decisivo para essa obra.

A todos os professores da UNIRIO, porque levaram a sério com dedicação e profissionalismo o curso de mestrado e fortaleceram a minha formação.

A cada amigo e colega de trabalho, pelo apoio, incentivo e por fazerem parte da minha história, especialmente os amigos da UERJ, alguns dos quais são meus companheiros há muitos anos.

A minha mãe Maria e a meu pai João que, mesmo sem estar mais entre nós, estão em mim todo tempo, e em todos os pensamentos. Sou apenas um resumo de toda sabedoria deles.

A CAPES, pelo suporte financeiro, que permitiu a realização deste trabalho.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	11
CAPÍTULO 1	13
1.1 TEOREMA DE MENELAU.....	14
1.2 RAZÃO DE DIVISÃO DE UM SEGMENTO ORIENTADO.....	16
1.3 TEOREMA DE MENELAU NA FORMA COMPLETA	18
1.4 POTÊNCIA DE UM PONTO EM RELAÇÃO A UMA CIRCUNFERÊNCIA.....	21
1.5 TEOREMA DO HEXAGRAMA DE PASCAL NA CIRCUNFERÊNCIA.....	25
CAPÍTULO 2	29
2.1 DEFINIÇÕES INICIAIS.....	29
2.2 INTERSEÇÃO DE CURVAS ALGÉBRICAS PLANAS	32
2.3 RESULTANTE DE DOIS POLINÔMIOS DE DUAS VARIÁVEIS	38
2.4 POLINÔMIOS IRREDUTÍVEIS.....	42
2.5 LEMAS PRINCIPAIS.....	46
2.6 TEOREMA DE BÉZOUT	54
CAPÍTULO 3	57
3.1 TEOREMA DO HEXÁGONO DE PASCAL.....	57
3.2 VARIANTES DO TEOREMA DE PASCAL.....	59
3.3 CONSEQUÊNCIAS DO TEOREMA DE PASCAL.....	63
CAPÍTULO 4.....	66
4.1 ATIVIDADE 1.....	66
4.2 ATIVIDADE 2.....	67
4.3 ATIVIDADE 3.....	67
4.4 ATIVIDADE 4.....	68
4.5 ATIVIDADE 5.....	68
CAPÍTULO 5.....	69
5.1 Solução da atividade 1.....	69
5.2 Solução da atividade 2.....	70

5.3 Solução da atividade 3.....	71
5.4 Solução da atividade 4.....	72
5.5 Solução da atividade5.....	74
SUGESTÕES PARA SALA DE AULA.....	77
SUGESTÕES PARA SALA DE AULA.....	77
CONCLUSÃO	78
BIBLIOGRAFIA.....	79

INTRODUÇÃO

- Gatinho de Cheshire (...)
Poderia me dizer, por favor, que caminho devo tomar para ir embora daqui?
- Isso depende muito de para onde quer ir - respondeu o Gato.
- Para mim, acho que tanto faz... - disse a Alice.
- Nesse caso, qualquer caminho serve - afirmou o Gato de Cheshire.

Os recorrentes ajustes curriculares das escolas brasileiras reduziram e compartimentaram o ensino da matemática. A ciência da razão precisa entrelaçar, através da Lógica, a Aritmética com a Álgebra e a Geometria. Não se podem formar técnicos especialistas, em apenas uma dessas três áreas da Matemática, para o ensino básico. É preciso ver o todo, interligado na Matemática e levar sua linguagem e seu modo dedutivo para as outras ciências. O resultado que se deve buscar é de formar jovens criativos que adquiram familiaridade com as ciências em uma visão holística do mundo.

Quando se ensina um conteúdo com enfoques diferentes, o pensamento lógico e dedutivo fica mais aprofundado o que possibilita aumentar o entendimento do assunto ensinado. Há muito tempo é comum o uso de materiais concretos para ajudar a compreensão de conceitos matemáticos e hoje a tecnologia digital pode ser usada com esse mesmo propósito. Com a disponibilidade desse instrumento é fácil pesquisar informações relevantes e, usando programas específicos, criar conjecturas, fazer inferências e descobrir alguns resultados para depois demonstrá-los. Isso sem dúvida pode melhorar a capacidade de abstração do estudante, o que é valioso para o bom entendimento dessa ciência.

Esse trabalho entremeia conceitos de Geometria e Álgebra com o suporte de material digital disponível. O texto está escrito de acordo com os conteúdos do ensino básico e com uma linguagem apropriada a essa etapa. Todavia, as ideias são construídas com o rigor necessário ao ensino dessa ciência. Seu desenvolvimento reúne personagens e fatos históricos para situar no tempo a evolução do conhecimento matemático que é um verdadeiro patrimônio da humanidade. O objetivo principal é demonstrar o teorema do hexágono de Pascal que é dotado de um forte apelo geométrico, através de um caminho essencialmente algébrico.

A partir da Geometria Analítica de Descartes, define-se uma curva plana como sendo o conjunto solução de uma equação polinomial de duas variáveis com coeficientes reais. Esse conjunto será o ingrediente fundamental para desenvolver o estudo do **Teorema do Hexagrama Místico de Pascal**, apresentado no século XVII por Blaise Pascal aos 16 anos, que garante o seguinte:

“Os pontos de interseções determinados pelos prolongamentos dos lados opostos de um hexágono inscrito numa cônica irredutível estão alinhados”.

Será visto que esse resultado é independente da cônica dada destacando-se, também, o caso da cônica degenerada em duas retas concorrentes. Esse caso é conhecido na literatura clássica, como o Teorema de Pappus.

O primeiro capítulo apresenta os pré-requisitos geométricos acompanhados de uma demonstração básica do Teorema do Hexágono de Pascal na circunferência, a luz do Teorema de Menelau de Alexandria, o último dos grandes geômetras grego. Essas demonstrações podem ser apreciadas com facilidade por alunos do ensino básico, pois envolve apenas conhecimentos do Teorema de Tales das retas paralelas ou de semelhança de triângulos.

O segundo capítulo disserta sobre os pré-requisitos algébricos voltados para o estudo da interseção das curvas algébricas planas, feito pelo método da resultante de dois polinômios de duas variáveis reais. Nele se discute uma demonstração do Teorema de Bézout, dirigida aos alunos do ensino médio. Essa versão mais simples mostra como estimar o número de pontos de interseção de duas curvas planas dadas.

O terceiro capítulo consiste na demonstração do Teorema de Pascal por um caminho algébrico. São também discutidas variantes e consequências desse teorema que podem ser visualizadas através de recursos digitais como o Programa Computacional Geogebra.

O quarto capítulo propõe algumas sugestões de atividades que podem ser aplicadas em sala de aula e estão relacionadas com a abordagem desenvolvida neste trabalho. As soluções dessas questões seguem no quinto capítulo.

CAPÍTULO 1

O presente capítulo reúne alguns pré-requisitos geométricos mais relevantes ao desenvolvimento desse trabalho, permanecendo, sempre que possível, os conceitos da geometria Euclidiana, embora em alguns pontos seja necessária a introdução de novos conceitos.

A História da Matemática vem sendo escrita a milênios, do Egito antigo e Babilônia até os dias atuais, a Matemática vem evoluindo com o aprimoramento e desenvolvimento de novas técnicas, fazendo com que esteja em constante expansão em suas diversas subáreas de atuação. Situar as descobertas no tempo com a investigação das dificuldades existentes em cada época pode ajudar a compreender melhor algumas estruturas e conceitos que foram evoluindo. O que está construído resulta de muito trabalho e esforço, muitas vezes na tentativa de resolver problemas, propostos na época, que são os motores propulsores do processo de criação.

Para chegar ao foco principal desse trabalho, que é de apresentar a demonstração do Teorema do Hexágono de Pascal perpassam outros matemáticos que escreveram importantes páginas dessa história. Foram os pré-requisitos criados para levar a matemática até o estudo das curvas algébricas que são usadas nessa demonstração.



Euclides



Menelau

A obra de Euclides de Alexandria (325 a.C. – 265 a.C.) foi a primeira que atingiu um alto grau de sofisticação. Ele introduziu o método axiomático e não se sabe se sua obra tinha um motivo didático ou se era para reunir o conhecimento da época. Entretanto sabem-se que de fato ele alcançou esses dois objetivos com treze livros intitulados Os Elementos. Esses livros continham Aritmética, Álgebra e Geometria com grande rigor. Depois da Bíblia esse foi o livro que teve o maior número de publicações em diferentes idiomas e o mais estudado até os nossos tempos.

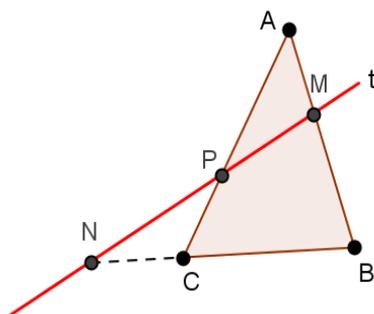
Através de comentários de historiadores gregos e árabes sabe-se que Menelau de Alexandria (70 d.C. – 130d.C) escreveu uma coleção de seis livros sobre “*Cordas no Círculo*”, um livro de “*Elementos da Geometria*” e uma série de trabalhos em geometria e astronomia, todos perdidos. O único livro de Menelau que sobreviveu aos tempos foi o “*Sphaerica*”, um tratado escrito em três volumes sobre geometria e trigonometria esférica, do qual chegou até o nosso tempo uma tradução árabe. No volume III ele menciona o teorema que é pré-requisito para esse trabalho porque pode ser aplicado na resolução de problemas de pontos colineares.

1.1 - TEOREMA DE MENELAU

O Teorema de Menelau com a forma do ensino básico pode ser enunciado do seguinte modo:

Teorema de Menelau - versão 1: *Se uma reta t qualquer intersecta as retas suportes dos três lados AB, BC e CA de um triângulo ABC nos pontos M, N e P, respectivamente, então:*

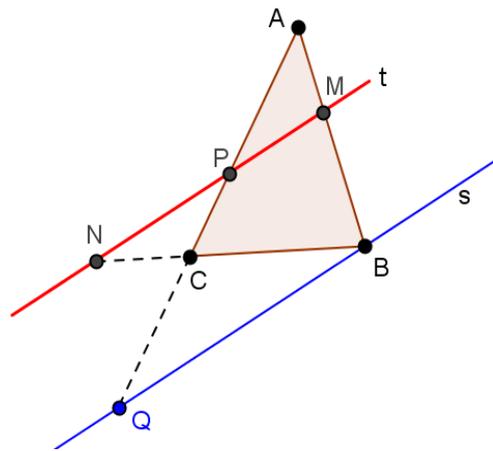
$$\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} \cdot \frac{\overline{BN}}{\overline{NC}} \cdot \frac{\overline{CP}}{\overline{PA}} = 1$$



Demonstração:

Há pelo menos dois modos simples de se demonstrar esse teorema no ensino básico. Pelo teorema do feixe de retas paralelas de Tales ou por semelhança de triângulos. Aqui será apresentado o primeiro método.

Considere a reta s , $s//t$, que passa pelo vértice B e intersecta o prolongamento do lado \overline{AC} em Q . Observe o desenho abaixo.



As paralelas t e s dividem as transversais \overline{AQ} e \overline{AB} em segmentos proporcionais.

(i) Das transversais \overline{AB} e \overline{AQ} resulta:

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{PQ}} \Rightarrow \frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} \cdot \frac{\overline{PQ}}{\overline{AP}} = 1$$

(ii) Das transversais \overline{QP} e \overline{BN}

$$\frac{\overline{PC}}{\overline{PQ}} = \frac{\overline{NC}}{\overline{NB}} \Rightarrow \frac{\overline{PC}}{\overline{PQ}} \cdot \frac{\overline{NB}}{\overline{NC}} = 1$$

Multiplicando os termos das últimas igualdades representadas em (i) e (ii) temos:

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} \cdot \frac{\overline{PQ}}{\overline{AP}} \cdot \frac{\overline{PC}}{\overline{PQ}} \cdot \frac{\overline{NB}}{\overline{NC}} = 1 \Rightarrow \frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} \cdot \frac{\overline{PC}}{\overline{AP}} \cdot \frac{\overline{NB}}{\overline{NC}} = 1 \quad \blacksquare$$

Para mostrar que esse teorema é recíproco e justificar a sua forma completa, é necessário introduzir um conceito que hoje é estudado no ensino médio. A noção de segmento orientado e a definição de razão em que um ponto divide esse segmento orientado.

1.2 - RAZÃO DE DIVISÃO DE UM SEGMENTO ORIENTADO

Antes de tudo, representa-se o segmento orientado de origem A e extremidade B , com $A \neq B$, por \overrightarrow{AB} . O comprimento do segmento \overrightarrow{AB} é a distância entre os pontos A e B e será denotado por $|\overrightarrow{AB}|$. A razão em que um ponto P divide \overrightarrow{AB} , $P \neq B$ que está situado sobre a reta suporte do segmento orientado \overrightarrow{AB} , será indicada por $r(PAB)$ ou r_{AB} . Essa razão é um número real tal que:

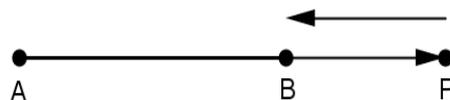
$$|r_{AB}| = \frac{|\overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{PB}|}$$

e tem as seguintes condições:

(1ª) a razão é positiva, $r_{AB} > 0$, se \overrightarrow{AP} e \overrightarrow{PB} têm o mesmo sentido, isto é, P é um ponto interior ao segmento \overrightarrow{AB} , conforme a figura abaixo.



(2ª) a razão é negativa, $r_{AB} < 0$, se \overrightarrow{AP} e \overrightarrow{PB} têm sentidos opostos, isto é, P é um ponto externo ao segmento \overrightarrow{AB} , conforme o desenho.



(3ª) a razão é nula, $r_{AB} = 0$, se $P = A$, isto é, $|\overrightarrow{AP}| = 0$.

Desse modo, quando P é um ponto qualquer, da reta suporte do segmento \overline{AB} , pode-se escrever a equação

$$\overline{AP} = r_{AB} \cdot \overline{PB} \quad (I)$$

Substituindo $r_{AB} = t$ se $t \neq 0$ obtemos $\overline{PB} = \frac{1}{t} \cdot \overline{AP}$. Além disso, para todo $P \neq A$ vale que:

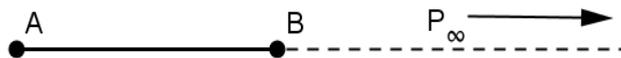
$$\begin{aligned} \overline{AP} + \overline{PB} = \overline{AB} \quad \therefore \quad \overline{AP} + \frac{1}{t} \cdot \overline{AP} = \overline{AB} \quad \therefore \quad \frac{t+1}{t} \cdot \overline{AP} = \overline{AB} \quad \therefore \\ \overline{AP} = \frac{t}{t+1} \cdot \overline{AB}, \quad t \neq -1, \quad (II) \end{aligned}$$

Note que se na equação (I) for substituído a razão $t = -1$, obtém-se o seguinte resultado: $\overline{AP} = -\overline{PB} \quad \therefore \quad \overline{AP} + \overline{PB} = 0 \quad \therefore \quad \overline{AB} = \vec{0}$ o que é uma contradição, visto que $A \neq B$.

Agora, considerando-se que as coordenadas de A , B e P nessa reta são respectivamente a, b e x . Da equação (II) pode-se escrever que:

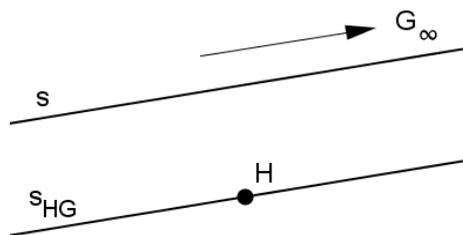
$$x - a = \frac{t}{t+1} \cdot (b - a) \quad \therefore \quad x = a + \frac{t}{t+1} \cdot (b - a), \quad \text{para } t \neq -1.$$

Se $Q(x)$ é um ponto de coordenada x , na reta suporte do segmento \overline{AB} , e a razão em que o ponto Q divide esse segmento, conforme definido anteriormente, é o número t que se aproxima de -1 (representa-se $t \rightarrow -1$), então $|x|$ tende para infinito ($|x| \rightarrow \infty$) na expressão $x = a + \frac{t}{t+1} \cdot (b - a)$. Assim, convencionou-se que $t = -1$ está associado a um ponto no infinito o que será representado por P_∞ . Além disso, como $|\overline{AB}|$ é finito e não nulo resulta que $|\overline{AP_\infty}| = |\overline{P_\infty B}|$.



Defina a função $r: \overline{AB} \rightarrow R$ que associa a cada ponto P da reta \overline{AB} um número real $r(PAB) = t$. Essa função é sobrejetiva porque dado um número real t qualquer existe um ponto $P(x)$, cuja coordenada x é obtida pela expressão $x = a + \frac{t}{t+1} \cdot (b-a)$. Além disso, se $r(PAB) = r(P'AB) = t$ então $\overline{AP} = \overline{AP'}$, isto é, $P = P'$ o que prova que essa função é injetiva. Com isso, concluímos que a função definida é bijetiva.

Por convenção, duas retas paralelas têm um ponto comum no infinito; assim, uma reta do infinito, com a notação l_∞ , é o conjunto de todos os pontos, de um plano, no infinito. Se G é um ponto do infinito (G_∞) de uma reta s e $H \notin s \cap l_\infty$, indicaremos s_{GH} a reta paralela à reta s que passa pelo ponto H .



Dado um triângulo ABC , admita no decorrer do trabalho que os lados orientados estão na ordem $\overline{AB}, \overline{BC}$ e \overline{CA} .

1.3 - TEOREMA DE MENELAU NA FORMA COMPLETA

Teorema de Menelau: Considere um triângulo ABC cujos lados $\overline{AB}, \overline{BC}$ e \overline{CA} têm retas suportes s_{AB}, s_{BC} e s_{CA} . Se $M \in s_{AB}, N \in s_{BC}$ e $P \in s_{CA}$ então:

M, N e P são colineares se, e somente se $r(MAB).r(NBC).r(PCA) = -1$.

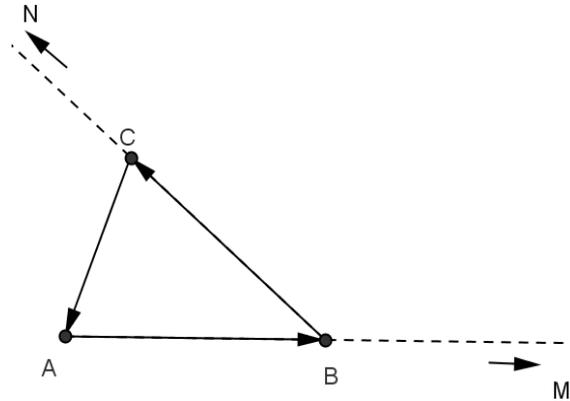
Demonstração:

A demonstração será separada em três passos.

1º passo: Dois pontos estão no infinito, digamos M e N , então:

$$r(MAB) \cdot r(NBC) \cdot r(PCA) = -1 \Leftrightarrow (-1) \cdot (-1) \cdot r(PCA) = -1 \Leftrightarrow$$

$$r(PCA) = -1 \Leftrightarrow M, N, P \in l_\infty, \text{ ou seja, } M, N \text{ e } P \text{ são colineares.}$$

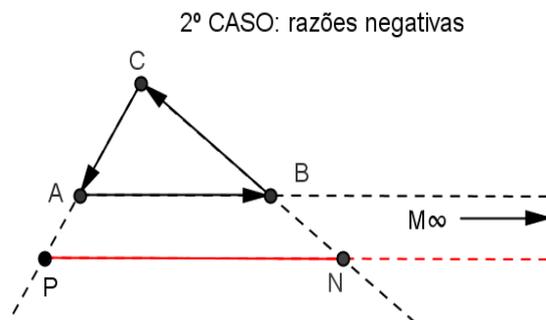
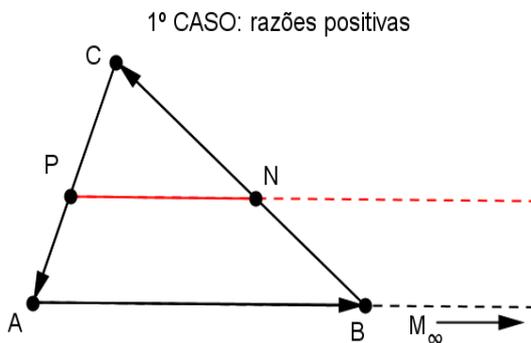


2º passo: Apenas um ponto está no infinito; digamos $M \in l_\infty \Rightarrow r(MAB) = -1$.

Logo, as outras razões têm o mesmo sinal e $r(NBC) \cdot r(PCA) = 1 \Leftrightarrow$

$$\frac{\overline{BN}}{\overline{NC}} \cdot \frac{\overline{CP}}{\overline{PA}} = 1 \Leftrightarrow \frac{\overline{BN}}{\overline{NC}} = \frac{\overline{PA}}{\overline{CP}} \Leftrightarrow \overline{NP} \parallel \overline{AB}.$$

Observe as duas situações possíveis abaixo:



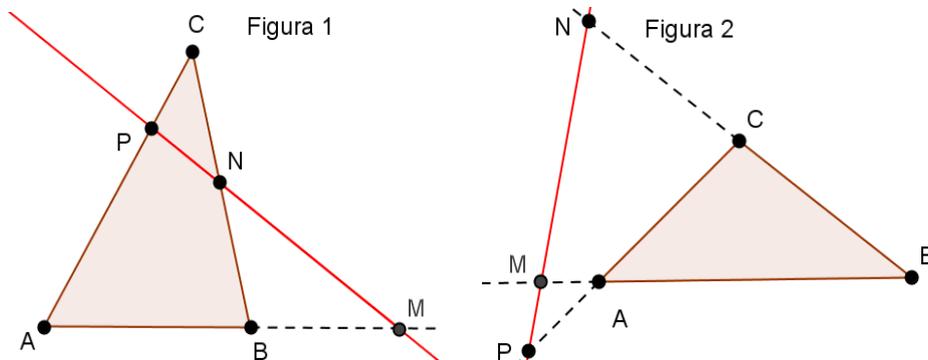
Nos dois casos a reta l_{PN} intersecta a reta l_{AB} no ponto M_∞ , então os três pontos M_∞ , N e P são colineares.

3º passo: Os três pontos M , N e P não estão em l_∞ . Então primeiramente vamos provar que se os três pontos M , N e P são colineares então o produto das razões é (-1) .

Já foi provado na seção 1.2 que se os três pontos são colineares, então vale a igualdade:

$$|r(MAB) \cdot r(NBC) \cdot r(PCA)| = |r(MAB)| \cdot |r(NBC)| \cdot |r(PCA)| = \frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} \cdot \frac{\overline{BN}}{\overline{NC}} \cdot \frac{\overline{CP}}{\overline{PA}} = 1.$$

Além disso, uma reta transversal que não passa por um vértice intersecta dois lados e o prolongamento de um deles, ou os prolongamentos dos três lados, conforme sugerem as figuras abaixo.

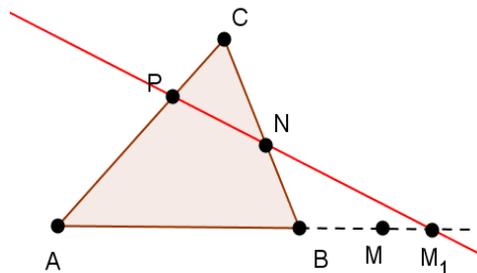


Na figura 1 a reta transversal intersecta apenas o prolongamento de um lado. Logo, apenas a razão $r(MAB)$ é negativa, então o produto das três é (-1) .

Na figura 2 a reta transversal intersecta os prolongamentos dos três lados, então as três razões são negativas, logo o produto é (-1) . Isso finaliza a demonstração da condição necessária.

Agora falta demonstrar que: se o produto das razões é -1 , então os três pontos são colineares.

Sejam $M \in t_{AB}$, $N \in t_{BC}$, $P \in t_{CA}$ e M_1 o ponto de intersecção das retas t_{AB} e t_{PN} .



Observe a figura anterior.

(I) Por hipótese, o produto das razões é (-1) : $r(MAB).r(NBC).r(PAC) = -1$.

(II) Pela condição necessária demonstrada anteriormente se P , N e M_1 são colineares, então $r(M_1AB).r(NBC).r(PCA) = -1$.

De (I) e (II) resulta $r(MAB) = r(M_1AB)$ que é equivalente a $M = M_1$ porque essa relação é bijetiva. Com isso, concluímos que M , N e P são colineares e isso finaliza a demonstração da condição suficiente. ■

1.4 - POTÊNCIA DE UM PONTO EM RELAÇÃO A UMA CIRCUNFERÊNCIA.

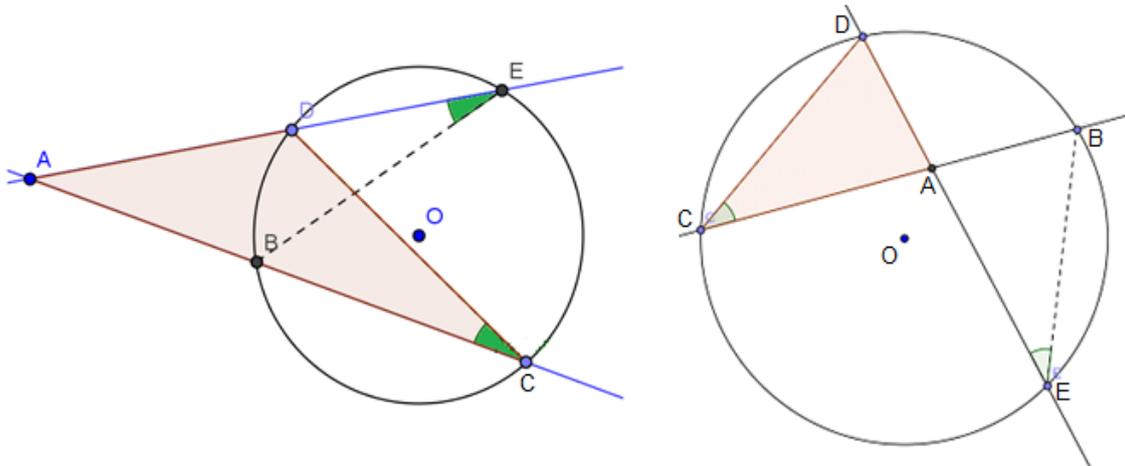
Nesta seção iremos mostrar algumas relações métricas que ocorrem na circunferência e conduzem a um importante conceito que será usado nesse estudo. Os teoremas que serão apresentados são alvo do ensino médio.

Proposição 1 Representando por $\lambda(O, r)$ uma circunferência de centro O e raio r , considere A um ponto qualquer do plano dessa circunferência $\lambda(O, r)$, $A \notin \lambda$. Se duas retas, concorrentes em A , intersectam λ determinando as cordas BC e DE , então:

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = \overline{AD} \cdot \overline{AE}.$$

Demonstração:

A demonstração desse fato será feita por semelhança de triângulos e independe se o ponto A é interno ou externo a circunferência. Observe que nas figuras abaixo as retas l_{BC} e l_{DE} se intersectam no ponto A .

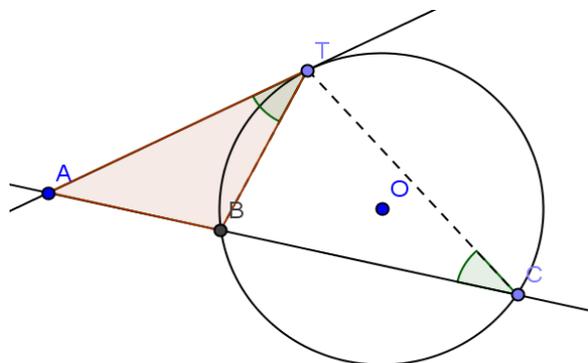


Nos dois casos, os ângulos internos \hat{C} e \hat{E} dos triângulos ACD e AEB são ângulos inscritos da circunferência $\lambda(O, r)$ que possuem o mesmo arco BD compreendido entre os seus lados, logo $\hat{C} = \hat{E}$. Além disso, é fácil ver que, $E\hat{A}B = C\hat{A}D$ porque \hat{A} é um ângulo comum na primeira figura ou dois ângulos opostos pelo vértice na segunda. Portanto, os triângulos ACD e AEB são semelhantes e assim seus lados homólogos são proporcionais. Em consequência podemos escrever a proporção:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} \quad \therefore \quad \overline{AB} \cdot \overline{AC} = \overline{AD} \cdot \overline{AE}. \quad \blacksquare$$

Ainda existe outra relação análoga a anterior que será justificada abaixo por semelhança de triângulos.

Proposição 2: Se duas retas são concorrentes em A , uma é secante a circunferência λ e a outra é tangente a λ no ponto T , então $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = \overline{AT}^2$.

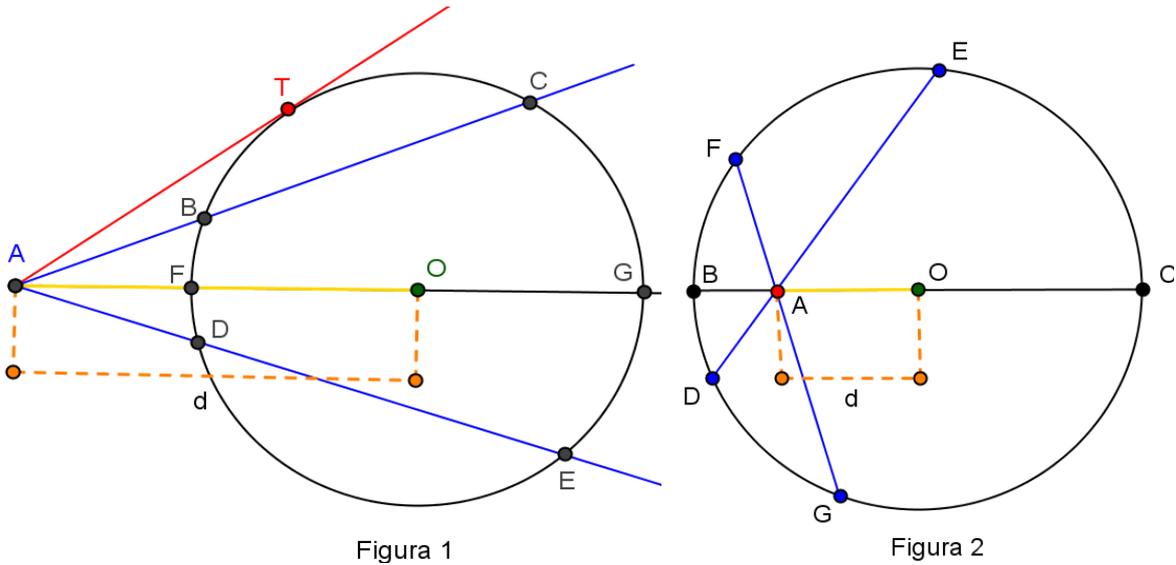


De fato, nessa situação o triângulo ABT é semelhante ao triângulo ATC porque

$\widehat{ATB} = \widehat{ACT}$ e \widehat{A} é um ângulo interno comum. Então podemos escrever a proporção:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AT}} = \frac{\overline{AT}}{\overline{AC}} \quad \therefore \quad \overline{AB} \cdot \overline{AC} = \overline{AT}^2 \quad \blacksquare$$

Essas relações métricas dependem da distância (d) do ponto A ao centro da circunferência. Observe as figuras abaixo:



Na figura I, $\overline{AF} = d - r$ e $\overline{AG} = d + r$, então pelos resultados anteriores temos:

$$\overline{AT}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{AC} = \overline{AD} \cdot \overline{AE} = \overline{AF} \cdot \overline{AG} = (d - r) \cdot (d + r) = d^2 - r^2.$$

Na figura II, $\overline{AB} = r - d$ e $\overline{AC} = r + d$, logo das relações anteriores resulta:

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = \overline{AD} \cdot \overline{AE} = \overline{AF} \cdot \overline{AG} = (r - d) \cdot (r + d) = r^2 - d^2.$$

Isso mostra que o valor do produto $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$ depende da posição do ponto A em relação à circunferência. Por isso é uma propriedade posicional; assim, será chamada de potência do ponto A em relação à circunferência λ de centro O e raio r e será representado por $Pot_{\lambda}(A)$.

Definição: (Potência do ponto A)

Essa potência é um número real cuja unidade equivale à unidade de área e atende as condições seguintes:

(i) o módulo da potência, $|Pot_{\lambda}(A)|$, é o produto das medidas dos segmentos colineares que ligam o ponto A à circunferência.

(ii) se \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{AC} tem o mesmo sentido, então A é um ponto exterior a circunferência e a $Pot_\lambda(A) > 0$.

(iii) se \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{AC} tem sentidos contrários, então A é um ponto interior a circunferência e a $Pot_\lambda(A) < 0$.

(iv) se A é um ponto que pertence à circunferência, então $Pot_\lambda(A) = 0$.

Com essa definição, podemos escrever que para todo ponto A que dista (d) do centro O de uma circunferência $\lambda(O, r)$, temos: $Pot_\lambda(A) = d^2 - r^2$.

Note que:

$$A \text{ é um ponto exterior} \Rightarrow d > r \Rightarrow Pot_\lambda(A) > 0$$

$$A \text{ é um ponto interior} \Rightarrow d < r \Rightarrow Pot_\lambda(A) < 0$$

$$A \text{ pertence à circunferência} \Rightarrow d = r \Rightarrow Pot_\lambda(A) = 0$$

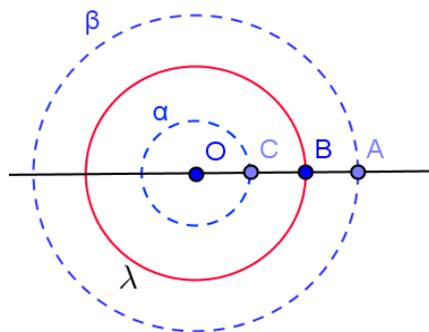
Exemplo:

Sejam $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CO} = 2 \text{ cm}$ e a circunferência $\lambda = \lambda(O, \overline{OB})$, então as potências de A , B e C são:

$$Pot_\lambda(A) = 6^2 - 4^2 = 20 \text{ cm}^2$$

$$Pot_\lambda(B) = 4^2 - 4^2 = 0 \text{ cm}^2$$

$$Pot_\lambda(C) = 2^2 - 4^2 = -12 \text{ cm}^2$$



O conjunto de todos os pontos do plano que possuem a mesma potência em relação a uma circunferência $\lambda(O, r)$ é outra circunferência concêntrica. De fato, no exemplo anterior, todos os pontos da circunferência $\alpha(O, 2)$ têm a mesma potência (-12 cm^2) em relação à circunferência λ e todos da circunferência $\beta(O, 6)$ têm a mesma potência igual a (20 cm^2) em relação a λ .

1.5 - TEOREMA DO HEXÁGRAMA DE PASCAL NA CIRCUNFERÊNCIA

Blaise Pascal (1623 – 1662), matemático, físico, teólogo e escritor de origem francesa, nasceu em Clermont-Ferrand, região de Auvergne, na França, em 19 de junho de 1623. Pascal aos doze anos começou a trabalhar em Geometria, chegando a descobrir que a soma dos ângulos de um triângulo é igual a dois ângulos retos.



Pascal

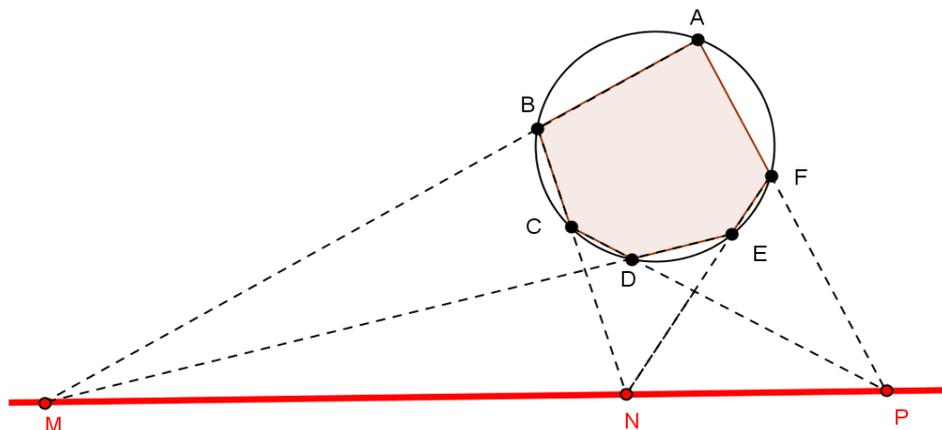
Seu pai Etienne Pascal, frequentava reuniões na casa do Padre franciscano Marin Mersenne, filósofo e físico francês, onde se discutia religião e outros assuntos, como: Filosofia, Física, Matemática, com a participação de personalidades importantes. Foi com aproximadamente quatorze anos que Pascal começou a acompanhar seu pai nessas reuniões e aos dezesseis anos apresentou o ensaio sobre as cônicas, baseado nos estudos de Girard Desargues que também participava dos

encontros promovidos na casa de Mersenne. Ainda aos dezesseis anos apresentou vários teoremas de Geometria Projetiva, entre os quais constava o teorema que é o propósito principal desse trabalho. Esse teorema, da forma que será apresentado, pode ser estudado no ensino básico.

Teorema do Hexágono de Pascal na circunferência:

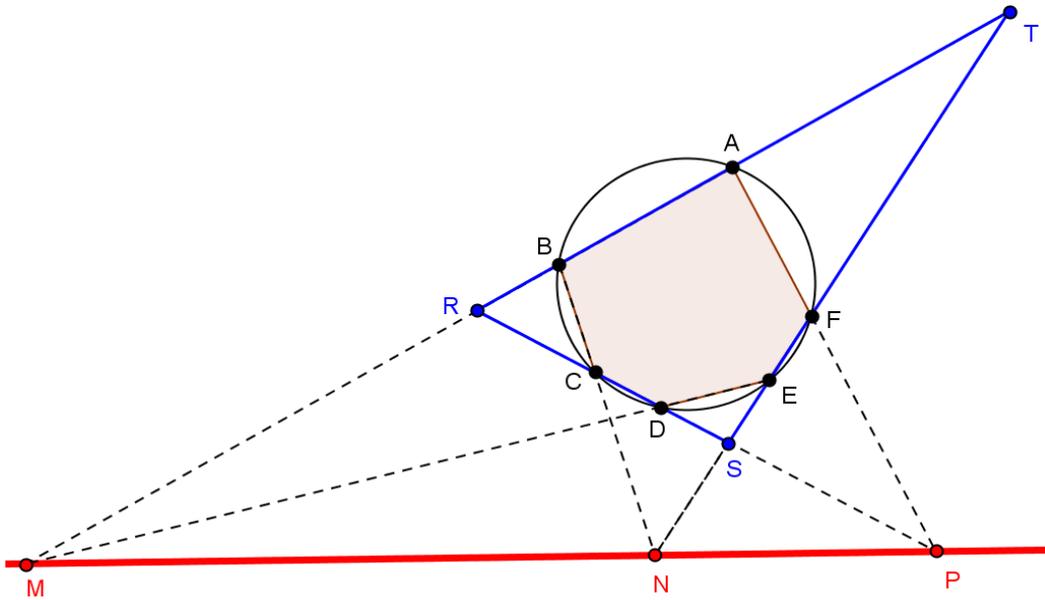
Considere um hexágono ABCDEF convexo (pode não ser convexo) inscrito numa circunferência. Se os pares de retas que são suportes dos lados opostos $\{l_{AB}, l_{DE}\}$, $\{l_{BC}, l_{EF}\}$, $\{l_{CD}, l_{AF}\}$ se intersectam em três pontos respectivamente M, N e P, no infinito ou não, então eles são colineares.

Observe a figura abaixo que ilustra este teorema.



Demonstração:

Considere o triângulo RST definido pelas interseções das retas l_{AB} , l_{CD} e l_{EF} que contêm três lados não consecutivos do hexágono.



Aplicando o teorema de Menelau três vezes ao triângulo RST , encontra-se:

(1º) Com a transversal l_{BC} : $r(CRS) \cdot r(NST) \cdot r(BTR) = -1$

(2º) Com a transversal l_{DE} : $r(DRS) \cdot r(EST) \cdot r(MTR) = -1$

(3º) Com a transversal l_{AF} : $r(PRS) \cdot r(FST) \cdot r(ATR) = -1$

Multiplicando os elementos das três equações acarreta:

$$r(CRS) \cdot r(NST) \cdot r(BTR) \cdot r(DRS) \cdot r(EST) \cdot r(MTR) \cdot r(PRS) \cdot r(FST) \cdot r(ATR) = -1$$

$$r(MTR) \cdot r(NST) \cdot r(PRS) \cdot \mu = -1.$$

Sendo $\mu = r(CRS) \cdot r(BTR) \cdot r(DRS) \cdot r(EST) \cdot r(FST) \cdot r(ATR)$ e

$$|\mu| = \left| \frac{\overline{RC}}{\overline{CS}} \cdot \frac{\overline{TB}}{\overline{BR}} \cdot \frac{\overline{RD}}{\overline{DS}} \cdot \frac{\overline{SE}}{\overline{ET}} \cdot \frac{\overline{SF}}{\overline{FT}} \cdot \frac{\overline{TA}}{\overline{AR}} \right| = \left| \frac{\overline{RC} \cdot \overline{RD}}{\overline{BR} \cdot \overline{AR}} \cdot \frac{\overline{SE} \cdot \overline{SF}}{\overline{CS} \cdot \overline{DS}} \cdot \frac{\overline{TB} \cdot \overline{TA}}{\overline{FT} \cdot \overline{ET}} \right|$$

Para calcular o valor de μ basta lembrar que a potência do ponto R em relação a circunferência é:

$$Pot(R) = \overline{RC} \cdot \overline{RD} = \overline{RB} \cdot \overline{RA} > 0, \text{ então } \frac{\overline{RC} \cdot \overline{RD}}{\overline{RB} \cdot \overline{RA}} = 1, \text{ analogamente tem-se:}$$

$$Pot(S) = \overline{SE} \cdot \overline{SF} = \overline{SD} \cdot \overline{SC} > 0, \text{ent\~{a}o } \frac{\overline{SE} \cdot \overline{SF}}{\overline{SD} \cdot \overline{SC}} = 1$$

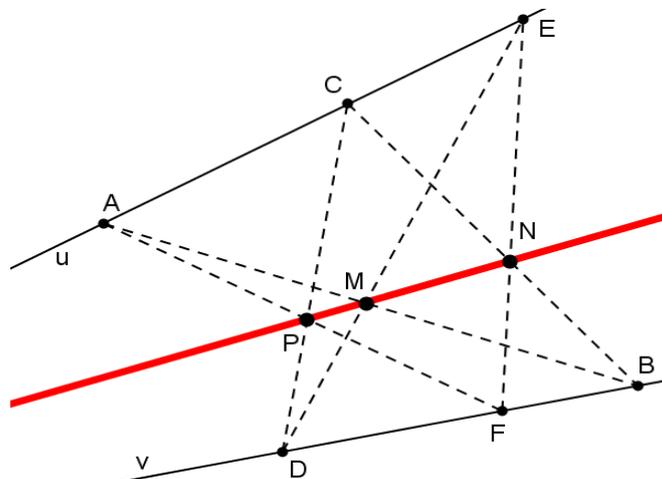
$$Pot(T) = \overline{TA} \cdot \overline{TB} = \overline{TF} \cdot \overline{TE} > 0, \text{ent\~{a}o } \frac{\overline{TA} \cdot \overline{TB}}{\overline{TF} \cdot \overline{TE}} = 1$$

Substituindo na express\~{a}o de μ , obt\~{e}m-se $\mu = 1$ e a conclus\~{a}o \~{e} que

$$r(MTR) \cdot r(NST) \cdot r(PRS) = -1.$$

Pelo teorema de Menelau conclui-se que M , N e P s\~{a}o colineares. ■

Com o decl\~{i}nio de estudos de geometria entre os Gregos e com os novos desenvolvimentos limitando-se \~{a} astronomia, trigonometria e \~{a}lgebra, Pappus foi o \~{u}ltimo ge\~{o}metra cl\~{a}ssico grego (290d.C e 350d.C.) de import\~{a}ncia. Sua fama reside em sua extensa obra denominada “*The Collection*”, na qual ele reuniu uma lista de importantes obras antigas, algumas atualmente perdidas. Nesse comp\~{e}ndio, ele acrescentou in\~{u}meras explica\~{c}o\~{e}s e amplia\~{c}o\~{e}s. Essa obra cont\~{e}m oito livros que abordam os seguintes t\~{o}picos: c\~{o}nicas, geometria plana, mec\~{a}nica, linhas retas tangentes a certas curvas, entre outros. Pappus foi o que chamamos hoje em dia de “comentarista”. O teorema de Pappus \~{e} citado hoje como base para a geometria projetiva moderna e pode ser tratado como um caso particular do teorema de Pascal. Esse teorema pode ser enunciado do seguinte modo: Considere o hex\~{a}gono n\~{a}o convexo $ABCDEF$ com os v\~{e}rtices n\~{a}o consecutivos A , C e E pertencentes a uma reta, e os v\~{e}rtices B , D e F sobre outra concorrente com a primeira. Se os pares de lados opostos: (AB, DE) , (BC, EF) , (CD, AF) s\~{a}o concorrentes respectivamente em M , N e P , ent\~{a}o esses pontos s\~{a}o colineares. Observe a figura abaixo.



Mais precisamente se pode escrever do seguinte modo:

Teorema de Pappus: *Sejam as retas coplanares distintas u e v com dois conjuntos de três pontos distintos $\{A, C, E\} \subset u$ e $\{B, D, F\} \subset v$. Então os pontos de intersecção $l_{AB} \cap l_{DE} = M$, $l_{BC} \cap l_{EF} = N$ e $l_{CD} \cap l_{AF} = P$ são colineares.*

Comentário: A demonstração do Teorema de Pappus, com enfoque no ensino fundamental, é similar a apresentada no Teorema do Hexágono de Pascal na circunferência e pode ser vista no trabalho de conclusão de curso do PROFMAT – UNIRIO de João Jorge Fernandes Chaves.

CAPÍTULO 2

Na Grécia antiga Apolônio (± 262 a – 190 a.C.) escreveu um conjunto de oito livros sobre as curvas planas que podem ser obtidas intersectando-se um cone de duas folhas por um plano. Essas curvas são denominadas cônicas. Elas têm propriedades geométricas impressionantes que podem ser usadas na física e aplicadas em diversos ramos da engenharia, arquitetura e astronomia. Coube a Pierre de Fermat (1601-1665) e a René Descartes (1596-1650) a descoberta de que as seções cônicas podem ser expressas por equações do segundo grau nas coordenadas (x, y) . O primeiro escritor a colocar o estudo algébrico das cônicas em algo que se pode chamar de uma base moderna foi Guillaume François Antoine, Marquês de l'Hôpital (1661-1704).

2.1 DEFINIÇÕES INICIAIS

Nesse capítulo serão apresentadas algumas notações e conceitos algébricos que são importantes para a compreensão do trabalho. Os resultados mais relevantes serão demonstrados ou indicaremos a fonte para buscar a sua prova.

Denomina-se polinômio de duas variáveis x e y sobre R , isto é, quando x e y percorrem o conjunto dos números reais, a adição de termos algébricos do tipo $ax^i y^j$, $a \in R$ e com expoentes i e j naturais. Por exemplo $x^2 + xy^2 - 4x^3 y^2 - 6$ é um polinômio, porém $x^{-3} + 2xy - 5x^3 y$ não é um polinômio porque o expoente do primeiro termo (x^{-3}) não é um número natural. A função $f: R^2 \rightarrow R$ definida por $f(x, y) = z$ é denominada função polinomial de duas variáveis reais. O polinômio que define essa função será denotado por f ou $f(x, y)$, embora sejam conceitos distintos.

O grau do monômio $ax^i y^j$, para $a \neq 0$, é a soma dos expoentes das variáveis x e y , isto é, $i + j$. Com isso, o grau do polinômio é definido pelo maior grau de todos os seus monômios e o grau de um polinômio f será denotado por ∂f . Com essa notação pode-se escrever que se $h(x, y) = 2x - 3x^2 y^2 + 6xy^2$, o grau do polinômio h é $\partial h = \text{máx}\{1, 4, 3\} \Rightarrow \partial h = 4$.

As ideias de Descartes e Fermat possibilitaram descrever as cônicas e suas degenerações através de polinômios de grau dois com duas variáveis.

Definição:

Uma curva algébrica plana é o lugar geométrico dos pontos do plano cujas coordenadas cartesianas satisfazem a uma equação do tipo

$$f(x, y) = 0,$$

Onde f é um polinômio não constante; isto é, a curva algébrica plana é o conjunto dos zeros do polinômio de duas variáveis reais e será representada por $Z(f)$:

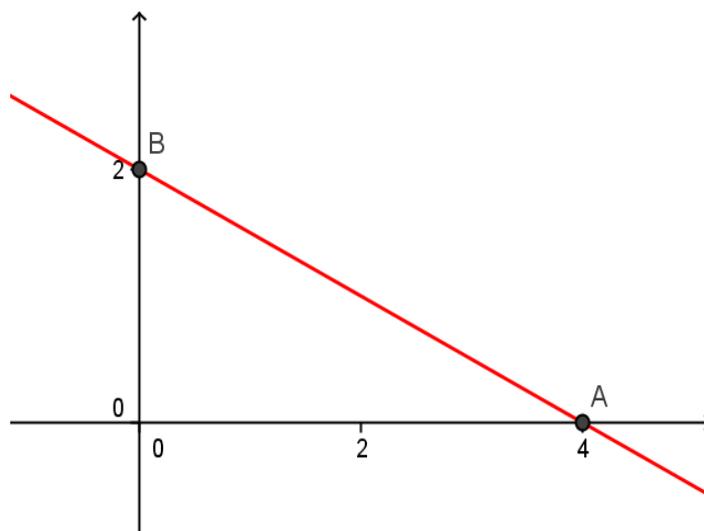
$$Z(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; f(x, y) = 0\}$$

Esse conjunto é também denominado traço real do polinômio ou simplesmente traço e o grau da curva é o grau do polinômio; assim, curvas de graus 1, 2 ou 3 são chamadas retas, cônicas ou cúbicas, respectivamente.

Algumas curvas algébricas planas são estudadas no ensino médio nas suas formas mais simples. A seguir apresentamos essas curvas definidas pelos conjuntos dos zeros de polinômios de grau 1 e 2.

A reta

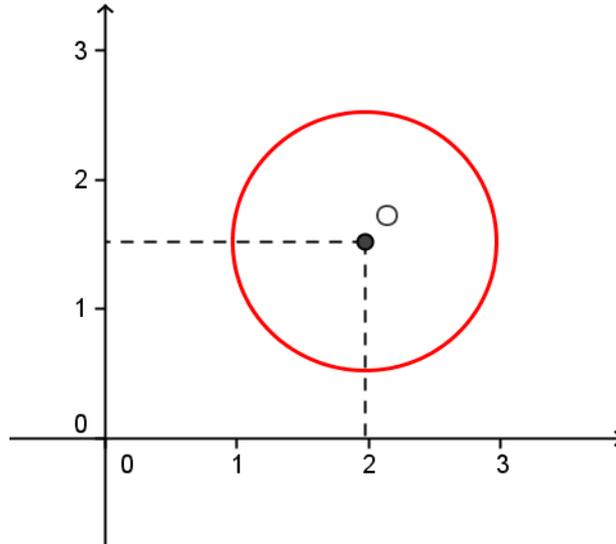
Dado $f(x, y) = ax + by + c$ com a e b reais não simultaneamente nulos, o traço de f é uma reta: $Z(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; ax + by + c = 0\}$.



A circunferência

Dado $g(x, y) = (x-a)^2 + (y-b)^2 - r^2$ com a e b reais quaisquer e r um número real positivo, o traço de g é uma circunferência:

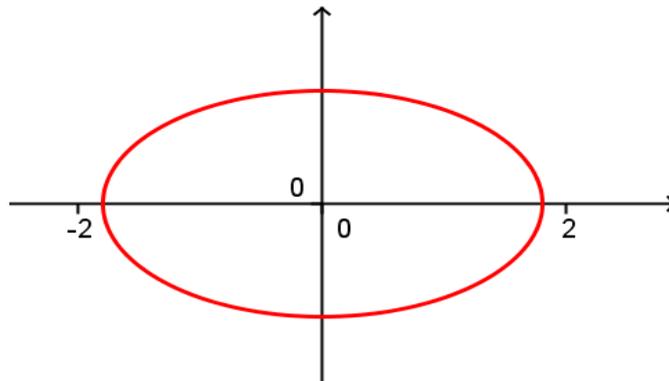
$$Z(g) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (x-a)^2 + (y-b)^2 - r^2 = 0\}.$$



A elipse

Dado $h(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1$ com a e b reais não nulos, $a \neq b$, o traço de h é uma elipse:

$$Z(h) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0\}.$$

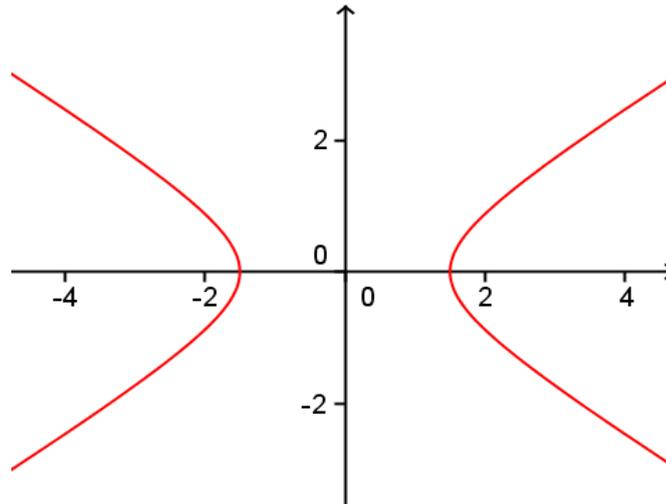


A hipérbole

Seja $i(x, y) = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1$ com a e b reais não nulos, $a \neq b$, o traço de i é uma

hipérbole:

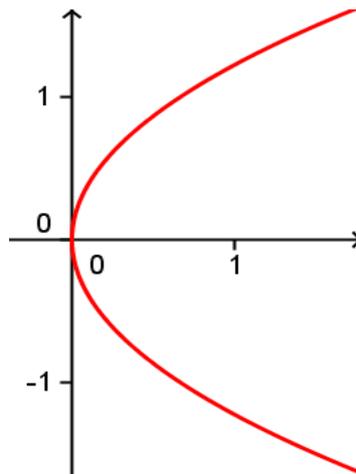
$$Z(i) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0\}.$$



A parábola

Seja $j(x, y) = y^2 - ax$ com a real não nulo, o traço de j é uma parábola:

$$Z(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y^2 = ax\}.$$



2.2 INTERSEÇÃO DE CURVAS ALGÉBRICAS PLANAS

*Pode-se escrever um polinômio $f(x, y)$ de dois modos:
com a variável y , e coeficientes dependentes de x , $f \in (R[x])[y]$; ou com a variável
 x e coeficientes em $R[y]$, $f \in (R[y])[x]$.*

Exemplo:

Se $f(x, y) = -xy^2 + xy + 8y^2 - 5y + 4$, têm-se os seguintes modos:

Primeiro modo:

se $f \in (R[x])[y]$, $f(x, y) = a_0(x) \cdot y^2 + a_1(x) \cdot y + a_2(x)$, ou seja,

$f(x, y) = (8-x) \cdot y^2 + (x-5) \cdot y + (4)$ e seus coeficientes são $a_0(x) = 8-x$, $a_1(x) = x-5$
e $a_2(x) = 4$.

Segundo modo:

se $f \in (R[y])[x]$, $f(x, y) = b_0(y) \cdot x + b_1(y)$, ou seja,

$f(x, y) = (-y^2 + y) \cdot x + (8y^2 - 5y + 4)$ e seus coeficientes são $b_0(y) = -y^2 + y$ e
 $b_1(y) = 8y^2 - 5y + 4$.

Segundo J. Stillwell a resolução de um sistema de equações lineares foi desenvolvida na China por volta de 200 anos a. C.. A técnica de eliminar uma variável de dois polinômios para resolver sistemas de equações não lineares foi desenvolvida na Europa no século XVII motivado pelo estudo da interseção de curvas algébricas.

Para determinar a interseção de uma reta $Z(f) = \{(x, y) \in R^2; x - y + 3 = 0\}$ com uma hipérbole $Z(g) = \{(x, y) \in R^2; 2x^2 - y^2 - 7 = 0\}$ é preciso resolver o sistema:

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ 2x^2 - y^2 - 7 = 0 \end{cases}$$

É claro que é possível achar o valor de y na primeira equação e eliminá-lo substituído esse valor na segunda equação. Entretanto aqui será usada outra técnica um pouco diferente. Em primeiro lugar vamos escrever os dois polinômios com variáveis y e coeficientes dependentes de x .

$$S_1 \begin{cases} (0) \cdot y^2 + (-1) \cdot y + (x+3) = 0 \\ (-1) \cdot y^2 + (0) \cdot y + (2x^2 - 7) = 0 \end{cases}$$

Se $y = k$ é uma das soluções da primeira equação, multiplicando essa equação por y obtém-se outra equação que também possui a solução $y = k$. Com isso forma-se um novo sistema de três equações (S_2) cujo conjunto solução contém o do sistema S_1 .

$$S_2 \begin{cases} (0) \cdot y^2 + (-1) \cdot y + (x+3) = 0 \\ (-1) \cdot y^2 + (x+3) \cdot y + (0) = 0 \\ (-1) \cdot y^2 + (0) \cdot y + (2x^2 - 7) = 0 \end{cases}$$

Pode-se ainda escrever S_2 na forma matricial o que resulta em

$$S_3 \begin{bmatrix} 0 & -1 & x+3 \\ -1 & x+3 & 0 \\ -1 & 0 & 2x^2-7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y^2 \\ y^1 \\ y^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Com a substituição de y^0 , y^1 e y^2 por z_1 , z_2 e z_3 , respectivamente, obtém-se um sistema linear homogêneo de incógnitas z_1 , z_2 e z_3 . Como y deve percorrer o conjunto de todos os números reais, o sistema linear homogêneo S_3 deve ser indeterminado, caso contrário teria apenas a solução trivial o que corresponderia obter somente $y = 0$. A condição para que isso ocorra, isto é, o sistema linear homogêneo tenha infinitas soluções é o determinante da matriz dos coeficientes ser igual à zero. Logo,

$$\det \begin{bmatrix} 0 & -1 & x+3 \\ -1 & x+3 & 0 \\ -1 & 0 & 2x^2-7 \end{bmatrix} = 0$$

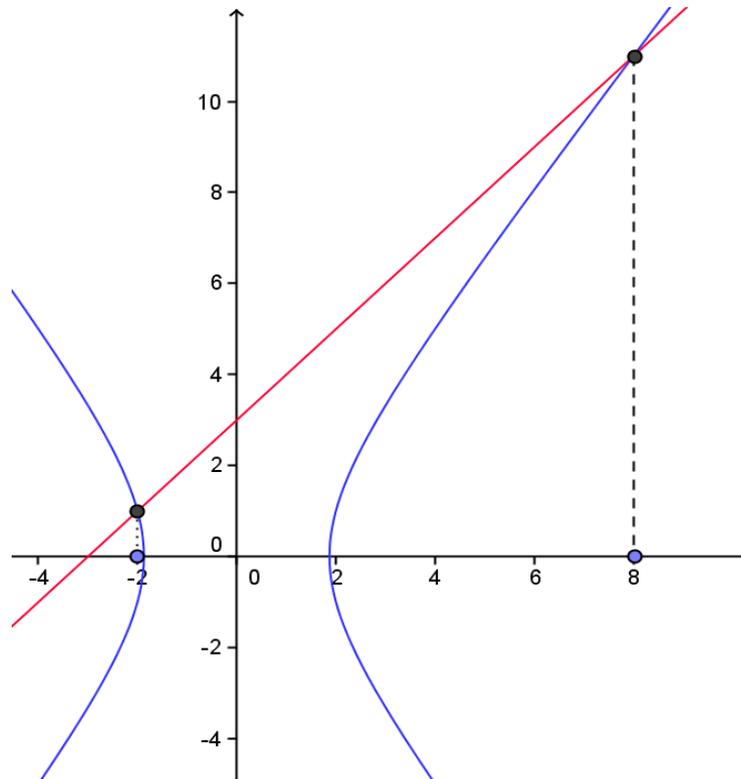
Resolvendo o determinante de ordem três, pelo desenvolvimento de Laplace aplicado a primeira coluna, encontra-se a equação:

$$\begin{aligned} (-1)^{2+1} \cdot (-1) \cdot [-(2x^2-7)] + (-1)^{3+1} \cdot (-1) \cdot [-(x+3)^2] &= 0 \quad \therefore -2x^2 + 7 + x^2 + 6x + 9 = 0 \\ \therefore x^2 - 6x - 16 = 0 \quad \therefore x = 8 \quad \text{ou} \quad x = -2. \end{aligned}$$

Essa técnica funciona como um método de eliminação de uma das variáveis, que no caso foi y , para calcular a outra. Com a substituição dos valores de x na equação $x - y + 3 = 0$ determina-se a solução do sistema S_1 , isto é, os pontos de interseção das duas curvas:

$$Z(f) \cap Z(g) = \{(8, 11), (-2, 1)\},$$

Conforme ilustra a figura abaixo:



O número de pontos de interseção de duas curvas $Z(f)$ e $Z(g)$ é representado por: $\#(Z(f) \cap Z(g))$. Cabe agora ao leitor a seguinte pergunta: é possível determinar esse número sem resolver o sistema formado pelas equações que definem as curvas? Com o propósito de responder a essa questão, convido o leitor a pensar na interseção dos traços dos polinômios f e g ,

$$f(x, y) = y^2 - x \text{ e } g(x, y) = x^2 - 2x + y^2,$$

Então é preciso resolver o sistema:

$$S_1 \begin{cases} -x + y^2 = 0 \\ x^2 - 2x + y^2 = 0 \end{cases}$$

Escrevendo os polinômios com a variável y e coeficientes dependentes de x encontra-se

$$S_4 \begin{cases} (1) \cdot y^2 + (0) \cdot y + (-x) = 0 & (E_1) \\ (1) \cdot y^2 + (0) \cdot y + (x^2 - 2x) = 0 & (E_2) \end{cases}$$

Multiplicando-se as equações E_1 e E_2 por y obtemos um sistema que pode ser interpretado como linear homogêneo de quatro incógnitas.

$$S_5 \begin{cases} (1) \cdot y^3 + (0) \cdot y^2 + (-x) \cdot y + (0) = 0 & (E_1) \cdot y \\ (0) \cdot y^3 + (1) \cdot y^2 + (0) \cdot y + (-x) = 0 & (E_1) \\ (1) \cdot y^3 + (0) \cdot y^2 + (x^2 - 2x) \cdot y + (0) = 0 & (E_2) \cdot y \\ (0) \cdot y^3 + (1) \cdot y^2 + (0) \cdot y + (x^2 - 2x) = 0 & (E_2) \end{cases}$$

Que é equivalente a

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -x & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -x \\ 1 & 0 & x^2 - 2x & -x \\ 0 & 1 & 0 & x^2 - 2x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y^3 \\ y^2 \\ y^1 \\ y^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Como y deve percorrer o conjunto dos números reais, o determinante da matriz dos coeficientes deve ser nulo,

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -x \\ 1 & 0 & x^2 - 2x & -x \\ 0 & 1 & 0 & x^2 - 2x \end{bmatrix} = 0$$

e este determinante resolvido pelo método de Laplace resulta em

$$(-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -x & 0 \\ x^2 - 2x & -x & -x \\ 1 & 0 & x^2 - 2x \end{vmatrix} + (-1)^{3+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -x \\ 1 & 0 & x^2 - 2x \end{vmatrix} = 0 \quad \therefore$$

$$(x^2 - 2x)^2 + x(x^2 - 2x) + x^2 + x(x^2 - 2x) = 0.$$

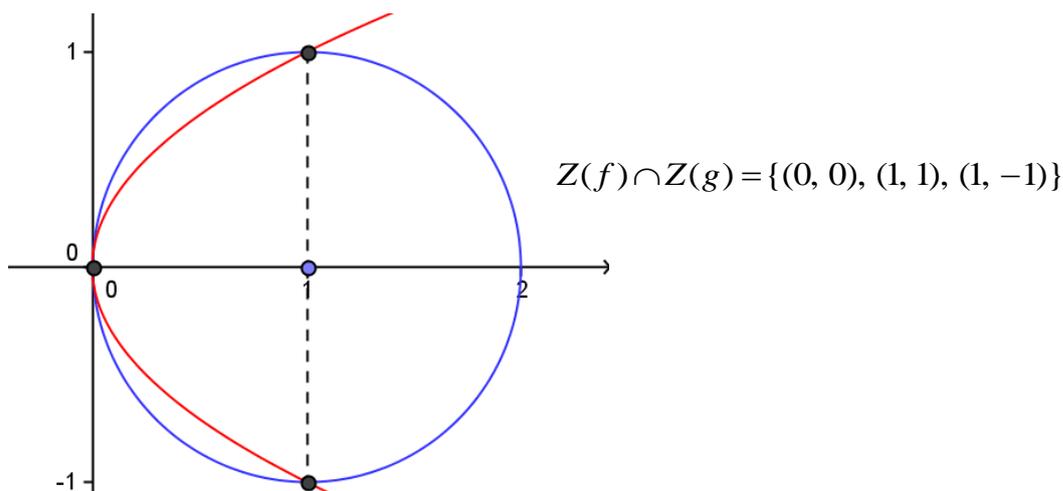
Fatorando o polinômio do primeiro membro da equação obtém-se:

$$(x^2 - 2x) \cdot [(x^2 - 2x) + x + x] + x^2 = 0 \quad \therefore (x^2 - 2x) \cdot [x^2] + x^2 = 0$$

e colocando x^2 em evidência resulta

$$x^2 \cdot (x^2 - 2x + 1) = 0 \quad \therefore x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 1$$

Note que calcular os valores de x eliminando y tem um significado geométrico. É o mesmo que projetar ortogonalmente os pontos de interseção das curvas no eixo das abscissas. É razoável pensar que são dois pontos de interseção porque obtivemos dois valores reais de x . Entretanto é necessário tomar cuidado com essa conclusão, porque podem ocorrer outros pontos pertencentes às retas verticais cujas equações são $x = 0$ e $x = 1$. Nesse caso, apenas com a projeção ortogonal dos pontos de $Z(f) \cap Z(g)$ sobre o eixo x não se saberia determinar a cardinalidade do conjunto interseção.



Para contornar esse problema pode-se ainda projetar sobre o eixo y resolvendo de algum modo o sistema para calcular y . É o que será feito a seguir.

Os mesmos polinômios $f(x, y) = y^2 - x$ e $g(x, y) = x^2 - 2x + y^2$, com a variável x e coeficientes dependentes de y formam agora outro sistema com equações (e_1) e (e_2) :

$$S_2 \begin{cases} (0) \cdot x^2 + (-1) \cdot x + (y^2) = 0 & (e_1) \\ (1) \cdot x^2 + (-2) \cdot x + (y^2) = 0 & (e_2) \end{cases}$$

De modo análogo, ao que foi feito antes, multiplica-se a primeira equação (e_1) por x para recair em um sistema que se interpreta como linear homogêneo de três variáveis.

$$S_3 \begin{cases} (-1) \cdot x^2 + (y^2) \cdot x + (0) = 0 & (e_1) \cdot x \\ (0) \cdot x^2 + (-1) \cdot x + (y^2) = 0 & (e_1) \\ (1) \cdot x^2 + (-2) \cdot x + (y^2) = 0 & (e_2) \end{cases}$$

O sistema (S_3) pode ser escrito na forma matricial do seguinte modo:

$$\begin{bmatrix} -1 & y^2 & 0 \\ 0 & -1 & y^2 \\ 1 & -2 & y^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x^2 \\ x^1 \\ x^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Como x deve percorrer o conjunto dos números reais, o determinante da matriz dos coeficientes deve ser nulo,

$$\det \begin{bmatrix} -1 & y^2 & 0 \\ 0 & -1 & y^2 \\ 1 & -2 & y^2 \end{bmatrix} = 0 \quad \therefore \quad y^2 + y^4 - 2y^2 = 0 \quad \therefore \quad y^2(y^2 - 1) = 0 \quad \therefore$$

$$y = 0 \quad \text{ou} \quad y = 1 \quad \text{ou} \quad y = -1$$

Esses valores indicam que há três pontos de projeção no eixo y . Entretanto foram encontrados dois pontos de projeção no eixo x . Portanto, o conjunto interseção das curvas é constituído por três pontos dos quais há dois que pertencem a uma reta perpendicular ao eixo x . De fato, sobre a reta $x = 1$ conforme mostra o gráfico anterior.

Para calcular os pontos de interseção de duas curvas o método é o de selecionar, uma das variáveis, digamos x , para figurar nos coeficientes, isto é, considerar f e g como polinômios na variável y , e coeficientes em $R[x]$. Com isso procura-se determinar os valores de x_0 para os quais $f(x_0, y)$ e $g(x_0, y)$ admitem uma raiz comum. Geometricamente isso equivale a encontrar as projeções sobre o eixo dos x dos pontos de $Z(f) \cap Z(g)$, isto é, os pontos x_0 para os quais a equação $f(x_0, y) = g(x_0, y)$ admite uma raiz. Este processo, típico da chamada Teoria de Eliminação, repousa sobre o estudo da Resultante de Polinômios cuja definição será feita a seguir motivada nos exemplos anteriores.

2.3 RESULTANTE DE DOIS POLINÔMIOS DE DUAS VARIÁVEIS

Definição: *Considere*

$$f(x, y) = a_0(x) \cdot y^m + a_1(x) \cdot y^{m-1} + \dots + a_m(x) \quad e$$

$$g(x, y) = b_0(x) \cdot y^n + b_1(x) \cdot y^{n-1} + \dots + b_n(x),$$

Denomina-se resultante de f e g o determinante da matriz de ordem $(m + n)$ com n linhas formadas pelos coeficientes de f seguidas por m linhas formadas pelos coeficientes de g , subentendendo-se que os espaços em branco são preenchidos com zeros.

$$R_{f,g} = \det \left[\begin{array}{cccccccccc} a_0 & a_1 & \dots & a_{m-1} & a_m & - & - & - & \dots & - \\ - & a_0 & a_1 & \dots & a_{m-1} & a_m & - & - & \dots & - \\ - & - & a_0 & a_1 & \dots & a_{m-1} & a_m & - & \dots & - \\ \vdots & \dots & \vdots \\ - & - & - & - & - & a_0 & a_1 & - & a_{m-1} & a_m \\ b_0 & b_1 & \dots & b_{n-1} & b_n & - & - & - & \dots & - \\ - & b_0 & b_1 & \dots & b_{n-1} & b_n & - & - & \dots & - \\ - & - & b_0 & b_1 & \dots & b_{n-1} & b_n & - & \dots & - \\ \vdots & \dots & \vdots \\ - & - & - & - & - & b_0 & b_1 & \dots & b_{n-1} & b_n \end{array} \right] \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} n \text{ linhas} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ m \text{ linhas} \end{array}$$

Resolver a equação, resultante igual à zero, corresponde a eliminar y no sistema

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

A resultante de f e g também pode ser calculada tomando-se os polinômios com variável x e seus respectivos coeficientes pertencentes a $\mathbb{R}[y]$. Nesse caso $R_{f,g} = 0$ elimina o x no sistema.

Exemplo 1:

Se $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ e $g(x, y) = 3x^2 + 2y^2 - 6$, tomando-se os polinômios $f, g \in (\mathbb{R}[x])[y]$, tem-se:

$$f(x, y) = 1 \cdot y^2 + 0 \cdot y + (x^2 - 1) \quad e \quad g(x, y) = 2 \cdot y^2 + 0 \cdot y + (3x^2 - 6)$$

$$R_{f,g} = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & x^2 - 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & x^2 - 1 \\ 2 & 0 & 3x^2 - 6 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3x^2 - 6 \end{bmatrix}$$

Resolvendo esse determinante por Laplace encontra-se:

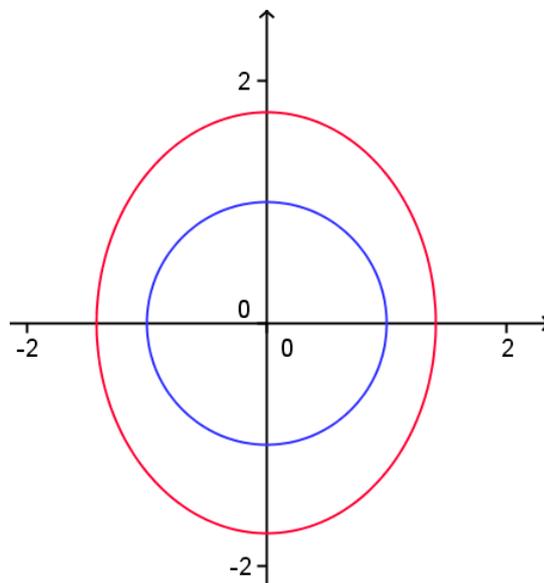
$$R_{f,g} = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3x^2 - 6 & 0 \\ 2 & 0 & 3x^2 - 6 \end{vmatrix} + (-1)^{3+1} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & x^2 - 1 & 0 \\ 1 & 0 & x^2 - 1 \\ 2 & 0 & 3x^2 - 6 \end{vmatrix} \quad \therefore$$

$$R_{f,g} = \left[(3x^2 - 6)^2 - 2(x^2 - 1)(3x^2 - 6) \right] + \left[4(x^2 - 1)^2 - 2(x^2 - 1)(3x^2 - 6) \right] \quad \therefore$$

$$R_{f,g} = \left[(3x^2 - 6)^2 - 4(x^2 - 1)(3x^2 - 6) + 4(x^2 - 1)^2 \right] = \left[(3x^2 - 6) - 2(x^2 - 1) \right]^2 = \left[x^2 - 4 \right]^2$$

Para calcular a interseção dessa circunferência $Z(f)$ com a elipse $Z(g)$ basta resolver a equação $R_{f,g} = 0 \quad \therefore \quad x^2 - 4 = 0 \quad \therefore \quad x = \pm 2$ e substituir na equação

$x^2 + y^2 - 1 = 0 \quad \therefore \quad 4 + y^2 - 1 = 0 \quad \therefore \quad y^2 = -3$. Este último resultado é impossível no conjunto dos números reais. Logo, as curvas não têm ponto comum conforme se pode observar no gráfico desenhado abaixo, $Z(f) \cap Z(g) = \emptyset$.



Exemplo 2:

Agora, outro exemplo é calcular a resultante dos polinômios

$f(x, y) = x^2 + y^2 - 4$ e $g(x, y) = xy - 1$, considerando $f, g \in (R[x])[y]$, ou seja,

$$R_{f,g} = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & x^2 - 4 \\ x & -1 & 0 \\ 0 & x & -1 \end{bmatrix}. \text{ Resolvendo este determinante encontra-se:}$$

$$R_{f,g} = 1 + x^2(x^2 - 4) = x^4 - 4x^2 + 1.$$

Para determinar os pontos de interseção dessas cônicas resolve-se a equação

$$R_{f,g} = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}.$$

Como esses dois últimos valores são positivos, $x = \pm\sqrt{2 \pm \sqrt{3}}$.

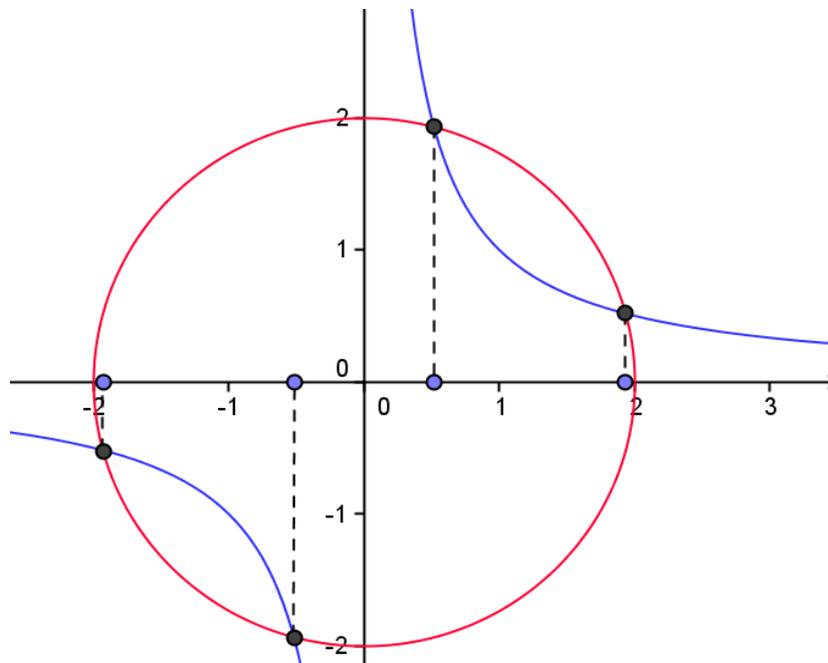
Logo, $x_1 = \sqrt{2 + \sqrt{3}}$, $x_2 = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$, $x_3 = -\sqrt{2 + \sqrt{3}}$ e $x_4 = -\sqrt{2 - \sqrt{3}}$.

Para calcular os correspondentes valores de y substitui-se cada valor de x na equação

$$g(x, y) = 0 \Rightarrow xy = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{x}.$$

$$x_1 = \sqrt{2 + \sqrt{3}} \Rightarrow y_1 = \frac{1}{\sqrt{2 + \sqrt{3}}} \Rightarrow y_1 = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{\sqrt{2 + \sqrt{3}} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{3}}} \Rightarrow y_1 = \sqrt{2 - \sqrt{3}}.$$

Analogamente, obtém-se: $y_2 = \sqrt{2 + \sqrt{3}}$, $y_3 = -\sqrt{2 - \sqrt{3}}$, $y_4 = -\sqrt{2 + \sqrt{3}}$. Então, o conjunto de pontos de interseção da circunferência $Z(f)$ com a hipérbole $Z(g)$ é $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4)\}$ como pode ser visto no gráfico abaixo.



Os resultados que serão apresentados a seguir revelam a importância do estudo da resultante de dois polinômios.

2.4 POLINÔMIOS IRREDUTÍVEIS

Definição: Considere R o conjunto dos números reais e $R[x]$ o conjunto dos polinômios de coeficientes reais com a variável $x \in R$ ou na indeterminada $x \in R$. Diz-se que $f \in R[x]$ com $\partial f \geq 1$ é irredutível sobre R quando para qualquer fatoração $f = g \cdot h$ com $g \in R[x]$ e $h \in R[x]$ exatamente um desses polinômios é constante, isto é, $g(x) = a$ ou $h(x) = b$ com $a \in R$ e $b \in R$.

A mesma definição vale para o conjunto dos números complexos C .

Uma observação importante é que todo polinômio de grau 1 é irredutível em R e em C .

Note que dado $f(x) = 2x - 6 \in R[x]$ podemos escrever $f(x) = 2 \cdot (x - 3)$ ou $f(x) = 12 \cdot (\frac{1}{6}x - \frac{1}{2})$ ou $f(x) = \sqrt{2} \cdot (\sqrt{2}x - 3\sqrt{2})$ seja como for um dos fatores é uma constante real. Admita que os dois fatores não fossem constantes, então teriam graus maiores do que ou iguais a 1, e daí o grau de f seria no mínimo 2. Isso é uma contradição porque f tem grau 1.

Se $f(x) = 2x - 6 \in C[x]$ além das fatorações anteriores poderíamos escrever produtos com coeficientes imaginários do tipo:

$f(x) = 2i \cdot (-ix + 3i)$ ou $f(x) = (1+i)((1-i)x - 3(1-i))$ onde i representa a unidade imaginária do conjunto C dos números complexos.

Por outro lado polinômios do segundo grau nem sempre são irredutíveis em R , todavia são sempre redutíveis em C . De fato, o teorema fundamental da álgebra (teorema de Gauss) garante que qualquer polinômio de grau n em $C[x]$ tem n raízes complexas e então pode ser decomposto em um produto de fatores do primeiro grau e coeficientes complexos.

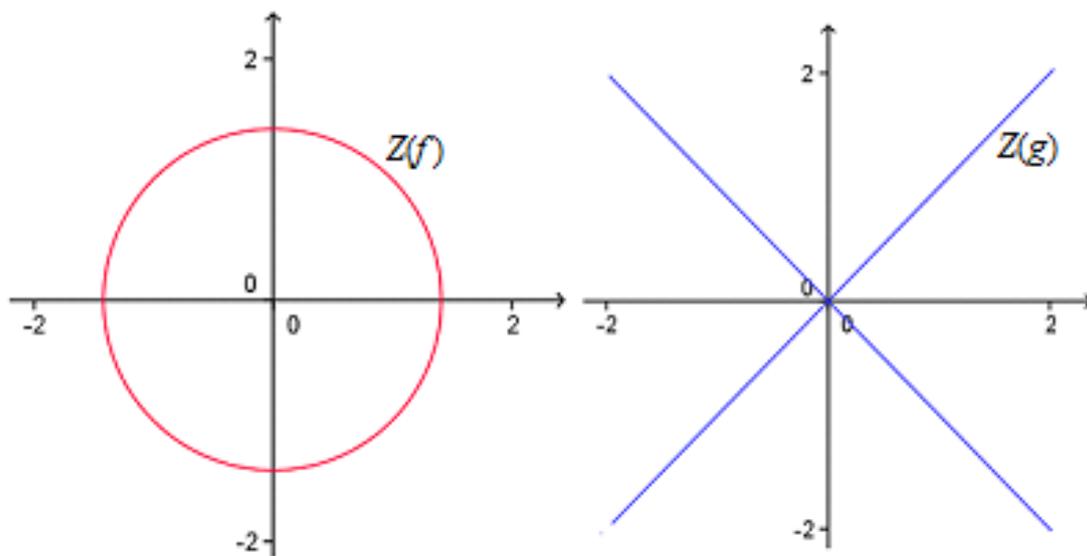
$f(x) = ax^2 + bx + c \in R[x]$ com coeficientes $a, b, c \in R$ nem sempre pode ser fatorado em $R[x]$. Se $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ esse polinômio não tem raízes em R por isso não é possível a sua fatoração com fatores do primeiro grau em $R[x]$; assim,

$f(x) = x^2 - 2x + 5$ é irreduzível em $R[x]$ porque $\Delta = -16$. Porém, é redutível em C pois $f(x) = (x - (1 + 2i))(x - (1 - 2i))$.

Agora, $f(x) = x^2 - 5x + 6$ pode ser fatorado em $R[x]$ e conseqüentemente em $C[x]$ porque $\Delta \geq 0$: $f(x) = (x - 2)(x - 3)$.

Considerando $R[x, y]$ o conjunto dos polinômios de duas variáveis reais x e y valem os mesmos conceitos anteriores. Desse modo $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2$ é irreduzível em $R[x, y]$ e $g(x, y) = x^2 - y^2$ é redutível, porque $g(x, y) = x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$.

As curvas definidas por esses polinômios $Z(f) = \{(x, y) \in R^2 \mid x^2 + y^2 - 2 = 0\}$ e $Z(g) = \{(x, y) \in R^2 \mid x^2 - y^2 = 0\}$ podem ser vistas nos desenhos abaixo.

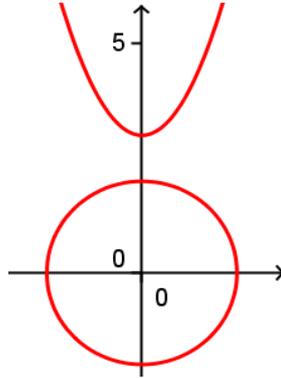


Uma curva Ω definida por um polinômio redutível em $R[x, y]$ pode apresentar dois ramos separados ou não. De fato se essa curva é o conjunto dos zeros do polinômio cuja fatoração é $h_1(x, y) \cdot h_2(x, y)$ então $h_1(x, y) \cdot h_2(x, y) = 0$ se, e somente se, $h_1(x, y) = 0$ ou é $h_2(x, y) = 0$; assim, a curva Ω é a união dos conjuntos $\{(x, y) \in R^2; h_1(x, y) = 0\}$ e $\{(x, y) \in R^2; h_2(x, y) = 0\}$ e estes conjuntos por si só são curvas.

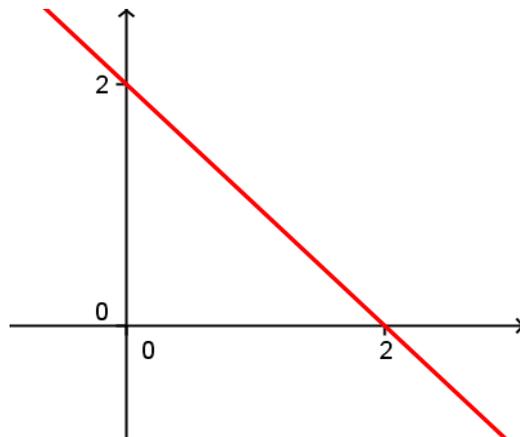
Examine os casos seguintes:

1º caso: $f(x, y) = x^4 + x^2y^2 - x^2y - x^2 - y^3 + 3y^2 + 4y - 12$ cuja fatoração é

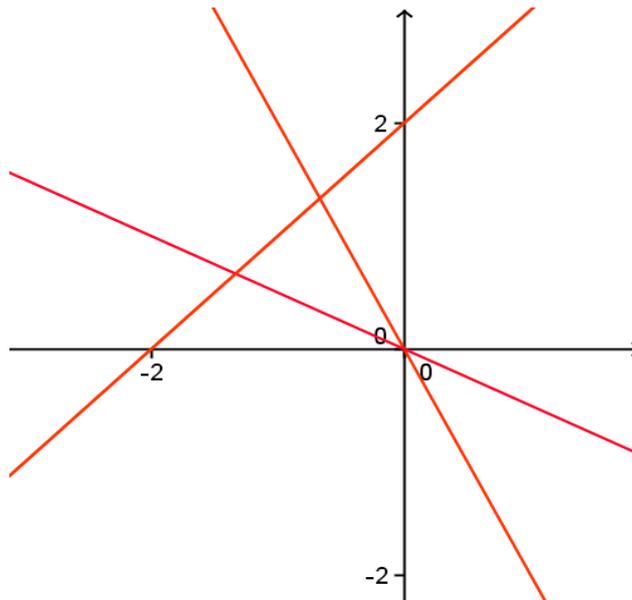
$f(x, y) = (x^2 - y + 3)(x^2 + y^2 - 4)$ define a curva $f(x, y) = 0$, ou seja, todos os pontos do \mathbb{R}^2 tais que $x^2 - y + 3 = 0$ ou $x^2 + y^2 - 4 = 0$. Observe a curva $Z(f)$ abaixo que tem dois ramos.



2º caso: $g(x, y) = x^2 + 2xy + y^2 - 4x - 4y + 4$ cuja fatoração é $g(x, y) = (x + y - 2)^2$ tem traço real $Z(g) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x + y - 2)^2 = 0\}$ e apenas um ramo.



3º caso: se um polinômio $h = l_1l_2l_3$ é o produto de três polinômios do primeiro grau $l_1(x, y) = 2x + y$, $l_2(x, y) = x + 2y$ e $l_3(x, y) = x - y + 2$, então o polinômio h é do terceiro grau e $Z(h) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; h(x, y) = 0\}$ é uma curva de três ramos definidos pelas retas L_1 , L_2 e L_3 que são os zeros dos polinômios l_1 , l_2 e l_3 , conforme o desenho dado abaixo.



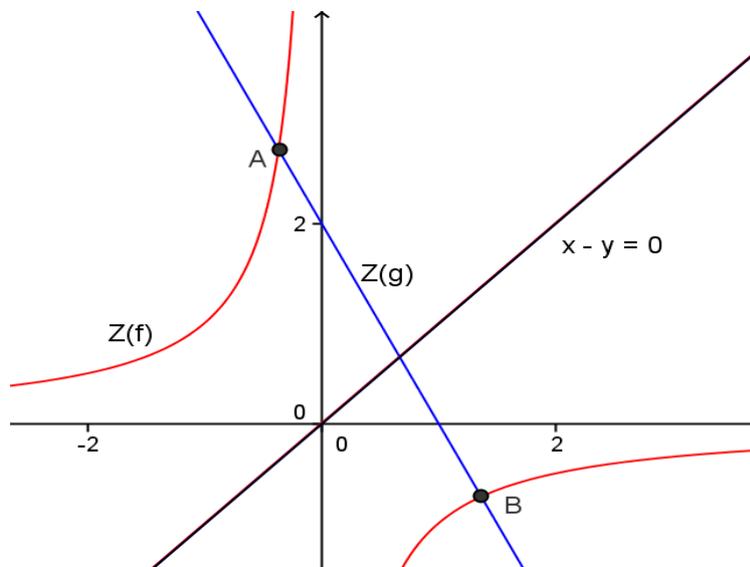
As curvas cônicas definidas por polinômios irredutíveis são a elipse (diz-se que a circunferência é uma degeneração da elipse), a hipérbole e a parábola. Embora seja irredutível o polinômio que define a hipérbole, ela é uma curva de dois ramos.

Considere que f e g tenham um fator comum, digamos h com grau $\partial h \geq 1$, o sistema que determina a interseção das curvas equivale a:

$$\begin{cases} f(x, y) = h(x, y) \cdot f_1(x, y) = 0 \\ g(x, y) = h(x, y) \cdot g_1(x, y) = 0 \end{cases}$$

Todos os pontos (x_0, y_0) tais que $h(x_0, y_0) = 0$ são soluções desse sistema. Logo a interseção $Z(f) \cap Z(g)$ tem infinitos pontos.

Observe a interseção das curvas traçadas abaixo.



Nesse gráfico

$$Z(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2y - xy^2 + x - y = 0\} \text{ e}$$

$$Z(g) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x^2 - xy - y^2 - 2x + 2y = 0\}$$

cujos respectivos polinômios são redutíveis, a saber:

$f(x, y) = (x - y)(xy + 1)$ e $g(x, y) = (x - y)(2x + y - 2)$, então $Z(f) \cap Z(g)$ é um conjunto de infinitos pontos pois é formado pelos pontos A, B e todos os pontos (x, y) tais que $x - y = 0$.

2.5 LEMAS PRINCIPAIS

Um lema é um resultado preliminar que é usado como um passo intermediário para demonstrar um resultado mais relevante da teoria.

Os lemas seguintes, aliados ao estudo da resultante de dois polinômios, são os ingredientes fundamentais para a demonstração do Teorema de Bézout em sua versão mais simples, que revela como se estima o número de pontos de interseção de duas curvas algébricas planas.

A estrutura do conjunto dos números inteiros Z é apresentada aos estudantes bem cedo. Já nos primeiras séries do ensino básico mostra-se que esse conjunto é munido da operação de adição com as propriedades: comutativa, associativa, elemento neutro e elemento inverso; e da operação de multiplicação que apresenta as propriedades: comutativa, associativa e elemento neutro. Ainda vale a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. Logo depois se apresenta o conjunto dos números racionais $Q = \left\{ \frac{a}{b}; a \in Z \text{ e } b \in Z, b \neq 0 \right\}$ com as mesmas propriedades, para adição e multiplicação, com o acréscimo que todo número racional, não nulo, tem um inverso multiplicativo; em seguida apresenta-se o conjunto dos números reais R que herda todas as propriedades dos números racionais.

O conjunto dos polinômios na indeterminada x e coeficientes reais, indicado por $R[x]$, copia a mesma estrutura de Z . Assim é natural que se defina o conjunto denotado

por $R(x)$ cujos elementos são frações de polinômios, de modo análogo à definição de \mathcal{Q} :

$$R(x) = \left\{ \frac{p(x)}{q(x)}; p(x) \in R[x], q(x) \in R[x] \text{ e } q(x) \neq 0 \right\}$$

Note que $R[x] \subset R(x)$, basta fazer $q(x) = 1$, o que é análogo à $Z \subset \mathcal{Q}$.

O produto de dois números racionais é zero se, e somente se, pelo menos um deles é zero e o mesmo ocorre em $R(x)$: $\forall f, g \in R(x) / \{0\}, f \cdot g \neq 0$. Por isso dizemos que $R(x)$ dotado das operações de adição e multiplicação constitui um *domínio ou domínio de integridade*. Além disso, esse domínio é chamado *domínio de fatoração única ou domínio fatorial* porque todo elemento não nulo e não invertível de $R(x)$ se escreve de forma única, a menos da ordem de seus fatores, como um produto de elementos irredutíveis de $R(x)$.

Considere a função $\delta: R[y] / \{0\} \rightarrow \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ que associa a cada polinômio o seu grau ∂f . Essa função, aliada às propriedades do conjunto $R(x)$, define uma estrutura algébrica $(R(x)[y], \delta)$ denominada *domínio euclidiano* no qual existe um algoritmo similar ao algoritmo de Euclides. Por tudo isso, dados $f, g \in R(x)[y]$ sem fatores comuns, existem $p, q \in R(x)[y]$ que satisfazem a relação:

$$p \cdot f + q \cdot g = 1.$$

Lema I. *Sejam $f, g \in R[x, y]$ (polinômios de duas variáveis reais x e y) sem fatores irredutíveis em comum. Então existe uma relação*

$$a \cdot f + b \cdot g = c(x)$$

onde $a, b \in R[x, y]$, porém, $c \in R[x]$ é um polinômio não nulo apenas na variável x . Resultado análogo vale trocando x por y .

Demonstração:

Como $f, g \in R[x][y] \subset R(x)[y]$, podemos considerar f, g como elementos de $R(x)[y]$. Visto que f, g não tem fator comum em $R[x][y]$, também não admitem fator

comum em $R(x)[y]$ que é um domínio euclidiano, assim existe uma relação

$$pf + qg = 1 \text{ em } R(x)[y].$$

Eliminando os denominadores de p e q obtemos a relação prometida. ■

Se $p(x) \in R[x]$ é um polinômio, não constante, de uma variável x real e coeficientes reais sabe-se, pelo teorema fundamental da álgebra de **Carl Friedrich Gauss** (1777-1855), que a equação $p(x) = 0$ tem no máximo um número finito de soluções reais. Mais precisamente, esse número é menor do que ou igual a ∂p (grau de p). O próximo lema é uma versão análoga a esse resultado para polinômios de duas variáveis reais.

Lema II. *A interseção de duas curvas algébricas planas $C_1 = Z(f)$ e $C_2 = Z(g)$ sem componentes em comum é finita.*

Demonstração:

Sejam $f, g \in R[x, y]$ polinômios não constantes sem fator comum. Pelo lema (I) existem polinômios $a_1, b_1, a_2, b_2 \in R[x, y]$ que satisfazem as relações:

$$\begin{cases} a_1(x, y) \cdot f(x, y) + b_1(x, y) \cdot g(x, y) = c_1(x) \\ a_2(x, y) \cdot f(x, y) + b_2(x, y) \cdot g(x, y) = c_2(y) \end{cases}$$

onde $c_1(x) \in R[x]$ e $c_2(y) \in R[y]$ são polinômios não nulos nas variáveis x e y , respectivamente. Quando (x_0, y_0) é solução do sistema $f(x, y) = g(x, y) = 0$, isto é, ponto de interseção das curvas de $Z(f)$ e $Z(g)$, x_0 é uma raiz de $c_1(x) = 0$ e y_0 é uma raiz de $c_2(y) = 0$ porque substituindo (x_0, y_0) nas relações obtém-se

$$\begin{cases} a_1(x_0, y_0) \cdot f(x_0, y_0) + b_1(x_0, y_0) \cdot g(x_0, y_0) = c_1(x_0) \\ a_2(x_0, y_0) \cdot f(x_0, y_0) + b_2(x_0, y_0) \cdot g(x_0, y_0) = c_2(y_0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1(x_0) = 0 \\ c_2(y_0) = 0 \end{cases}$$

e, pelo teorema de Gauss, isso ocorre em um número finito de valores reais de x_0 e de y_0 . ■

Lema III. Escolhido um sistema de eixos conveniente, escreve-se os polinômios $f(x, y)$ e $g(x, y)$ de variável y , com coeficientes em $R[x]$, para calcular a resultante $R_{f,g}$ que é um polinômio na variável x . O grau desse polinômio é no máximo igual a $\partial f \cdot \partial g$.

Demonstração:

Escrevendo f, g como polinômios em $(R[x])[y]$, segue que

$$\begin{aligned} f(x, y) &= a_0(x) \cdot y^m + a_1(x) \cdot y^{m-1} + \dots + a_m(x) \\ g(x, y) &= b_0(x) \cdot y^n + b_1(x) \cdot y^{n-1} + \dots + b_n(x) \end{aligned}$$

onde $a_i(x)$ e $b_j(x)$ são polinômios que têm grau máximo, respectivamente, i e j , visto que $\partial f = m$ e $\partial g = n$. Afirmamos que a resultante $R_{f,g}$ é uma soma de termos do tipo:

$$\pm a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_m} b_{j_1} b_{j_2} \dots b_{j_n} \text{ com } i_1 + i_2 + \dots + i_m + j_1 + j_2 + \dots + j_n = mn$$

De fato: por definição, $R_{f,g} = \det(C_{i,j})$ com i e j inteiros que variam de 1 até $m + n$.

$$\text{Para } 1 \leq i \leq m, \quad c_{ij} = \begin{cases} a_{j-i}, & \text{se } i \leq j \leq i+n \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$\text{Para } m+1 \leq i \leq m+n, \quad c_{ij} = \begin{cases} b_{m+j-i}, & \text{se } i-m \leq j \leq i \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Desta forma,

$$R_{f,g} = \det(C_{i,j}) = \sum_k (\pm c_{1k_1} \cdot c_{2k_2} \cdot \dots \cdot c_{mk_m} \cdot c_{m+1k_{m+1}} \cdot c_{m+2k_{m+2}} \cdot \dots \cdot c_{m+nk_{m+n}}),$$

ou seja, uma soma de termos com $m + n$ elementos da matriz $(C_{i,j})$ onde

$$\{k_1, k_2, \dots, k_m, k_{m+1}, k_{m+2}, \dots, k_{m+n}\} = \{1, 2, 3, \dots, m+n-1, m+n\}$$

e esses produtos dos elementos de $(C_{i,j})$ valem zero ou

$$\pm a_{k_1-1} \cdot a_{k_2-2} \cdot \dots \cdot a_{k_m-m} \cdot b_{m+k_{m+1}-(m+1)} \cdot b_{m+k_{m+2}-(m+2)} \cdot \dots \cdot b_{m+k_{m+n}-(m+n)} \cdot$$

A soma S dos índices destes termos corresponde ao maior grau possível do polinômio resultante e vale:

$$S = (k_1 - 1) + (k_2 - 2) + \dots + (k_m - m) + (k_{m+1} - 1) + (k_{m+2} - 2) + \dots + (k_{m+n} - n)$$

$$S = \sum_{p=1}^{m+n} k_p - (1 + 2 + \dots + m) - (1 + 2 + \dots + n)$$

Lembrando que k_p é um número natural que varia de 1 até $m + n$, a parcela $\sum_{p=1}^{m+n} k_p$ de S

corresponde a soma de todos os números naturais de 1 até $m + n$. Assim temos

$$S = \frac{(1+m+n)(m+n)}{2} - \frac{(1+m)m}{2} - \frac{(1+n)n}{2} = mn.$$

Deste modo, concluímos que:

$$\text{grau}(R_{f,g}(x)) \leq \partial f \cdot \partial g = m \cdot n \quad \blacksquare$$

Lema IV. Sejam f, g dois polinômios em $R[x]$ de grau ≥ 1 , onde $\partial f = n$ e $\partial g = m$.

São equivalentes:

(1) $R_{f,g} = 0$

(2) Existem polinômios não nulos $f_1, g_1 \in R[x]$ tais que $f_1 \cdot g = g_1 \cdot f$ onde $\partial f_1 \leq (n - 1)$ e $\partial g_1 \leq (m - 1)$.

Demonstração:

Sejam $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$ com $a_0 \neq 0$ e $g(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_m$ com $b_0 \neq 0$ dois polinômios em $R[x]$ de grau ≥ 1

Encontrar $f_1 = \alpha_1 \cdot x^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} \cdot x + \alpha_n$ e $g_1 = \beta_1 \cdot x^{m-1} + \dots + \beta_{m-1} \cdot x + \beta_m$ não nulos tais que $f_1 \cdot g = g_1 \cdot f$ é equivalente a obter uma solução não trivial, em R , de um sistema linear homogêneo com $n + m$ equações nas incógnitas

$\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_{m-1}, \beta_m$. Basta igualar os coeficientes dos termos de mesmo grau:

$$\begin{cases} a_0\beta_1 - b_0\alpha_1 = 0 \\ a_1\beta_1 + a_0\beta_2 - b_1\alpha_1 - b_0\alpha_2 = 0 \\ a_2\beta_1 + a_1\beta_2 + a_0\beta_3 - b_2\alpha_1 - b_1\alpha_2 - b_0\alpha_3 = 0 \\ \dots \\ a_n\beta_m - b_m\alpha_n = 0 \end{cases}$$

Observe que a matriz dos coeficientes desse sistema é:

$$M = \begin{bmatrix} a_0 & - & - & \dots & - & -b_0 & - & - & \dots & - \\ a_1 & a_0 & & \dots & - & -b_1 & -b_0 & - & \dots & - \\ \vdots & a_1 & a_0 & \dots & - & \vdots & -b_1 & -b_0 & \dots & - \\ a_n & \vdots & a_1 & \dots & - & -b_m & \vdots & -b_1 & \dots & - \\ - & a_n & \vdots & & - & - & -b_m & \vdots & \dots & - \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ - & - & - & \dots & a_0 & - & - & - & \dots & -b_0 \\ - & - & - & \dots & a_1 & - & - & - & \dots & -b_1 \\ - & - & - & \dots & \vdots & - & - & \vdots & \dots & \vdots \\ - & - & - & \dots & a_n & - & - & \dots & \dots & -b_m \end{bmatrix}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{m \text{ colunas}}$
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{n \text{ colunas}}$

Essa matriz corresponde a (-1) vezes n colunas da transposta da matriz que define a resultante. Pelo teorema de Cramer um sistema linear homogêneo tem solução não trivial se e somente se o determinante da matriz dos coeficientes é nulo, nesse caso, $\det M = 0$. Da teoria dos determinantes sabe-se que:

- matrizes transpostas têm determinantes iguais;
- quando se multiplica uma fila qualquer da matriz quadrada por um número, seu determinante fica multiplicado por esse número.

Logo, usando as propriedades acima se obtém:

$$R_{f,g} = (-1)^n \cdot \det(M^T) = (-1)^n \cdot \det M = (-1)^n \cdot 0 = 0. \blacksquare$$

Lema V. *Sejam f, g dois polinômios em $R[x]$ de grau ≥ 1 . São equivalentes:*

- (1) $R_{f,g} = 0$
- (2) f e g possuem um fator comum de grau ≥ 1 em $R[x]$

Demonstração:(1) \Rightarrow (2):

Como $R_{f,g} = 0$, pelo Lema IV, existem $f_1, g_1 \in R[x]$ tais que $f_1 g = g_1 f$ onde $\partial f_1 \leq (n-1)$ e $\partial g_1 \leq (m-1)$. Como $R[x]$ é domínio fatorial, todos os fatores irredutíveis de grau ≥ 1 de f aparecem no produto $f_1 \cdot g$, todavia nem todos podem aparecer em f_1 , pois por hipótese, $\partial f_1 < \partial f$, assim, pelo menos um dos fatores irredutíveis de grau ≥ 1 de f aparece em g .

(2) \Rightarrow (1):

Seja $h \in R[x]$ um fator comum de f e g com grau ≥ 1 . Temos

$$f = h \cdot f_1 \text{ com } f_1 \in R[x] \text{ e } \partial f_1 < \partial f$$

$$g = h \cdot g_1 \text{ com } g_1 \in R[x] \text{ e } \partial g_1 < \partial g$$

Claramente, temos que

$$f_1 \cdot g = f_1 \cdot h \cdot g_1 = g_1 \cdot f$$

Segue novamente do Lema IV, que $R_{f,g} = 0$. ■

Observação:

Seja S o conjunto das retas que passam por pelo menos dois pontos de $Z(f) \cap Z(g) = \Gamma_1$. Se $\#(\Gamma_1) = \eta$, então da análise combinatória sabe-se que

$\#(S) \leq C_\eta^2 = \frac{\eta(\eta-1)}{2}$, isto é, S também é finito. Como o conjunto dos números reais R

é infinito, escolha $m \in R$ que não é coeficiente angular de nenhuma reta do conjunto S .

Se S contém pelo menos uma reta vertical, aplica-se uma transformação

$(x, y) \rightarrow (x - \frac{y}{m}, y)$ aos pontos das curvas $Z(f)$ e $Z(g)$, desalinhando todos os

pontos de Γ_1 da direção vertical. Considere dois pontos $A_1(x_1, y_1)$ e $A_2(x_2, y_2)$ de Γ_1 ,

interseção de $Z(f)$ com $Z(g)$, que pela transformação aplicada correspondem

respectivamente a $B_1(x_1 - \frac{y_1}{m}, y_1)$ e $B_2(x_2 - \frac{y_2}{m}, y_2)$, $y_1 \neq y_2$, pertencentes ao

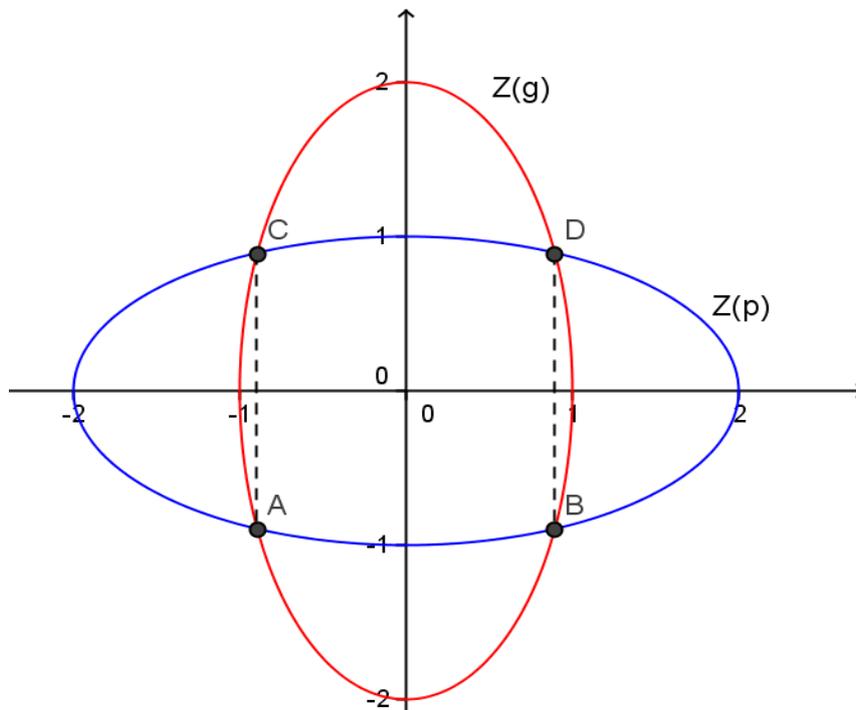
conjunto Γ_2 , interseção das novas curvas obtidas. Suponha que B_1 e B_2 estejam

alinhados na mesma reta vertical, então $x_1 - \frac{y_1}{m} = x_2 - \frac{y_2}{m}$ e isso resulta em $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

o que é uma contradição porque nenhuma reta de S pode ter coeficiente angular m . Essa transformação define uma correspondência biunívoca entre os conjuntos Γ_1 e Γ_2 , logo $\#(\Gamma_1) = \#(\Gamma_2)$. Conclui-se que é sempre possível determinar o número de pontos de interseção de duas curvas através de uma projeção sobre o eixo x . ■

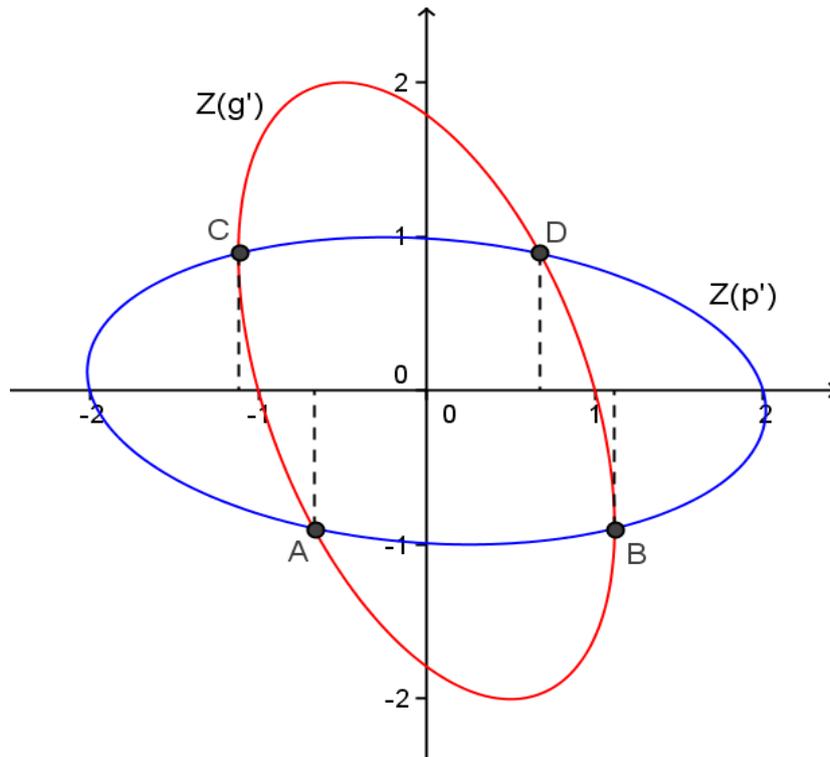
As figuras abaixo exemplificam o que ocorre quando se aplica uma transformação do tipo $(x, y) \rightarrow (x - \frac{y}{m}, y)$.

$$Z(g) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 4x^2 + y^2 - 4 = 0\} \text{ e } Z(p) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + 4y^2 - 4 = 0\}$$



$Z(g) \cap Z(p) = \{A, B, C, D\}$ onde A e C têm a mesma abscissa e as de B e D são iguais também. Com a transformação $(x, y) \rightarrow (x - \frac{y}{2}, y)$ obtém-se as novas curvas:

$$Z(g') = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 4(x + \frac{y}{2})^2 + y^2 - 4 = 0\} \text{ e } Z(p') = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (x + \frac{y}{2})^2 + 4y^2 - 4 = 0\}$$



$Z(g') \cap Z(p') = \{A, B, C, D\}$ onde A, B, C e D têm abscissas diferentes.

2.6 TEOREMA DE BÉZOUT

Foi o matemático Frances Étienne Bézout (1739 – 1783), autor de um dos livros de matemática mais utilizados de sua época, os seis volumes de Cours de Mathématique. Nascido na França, em março de 1739, em uma família de Magistrados distritais, Bézout preferiu os números à política, convencendo seu pai a lhe permitir estudar matemática ao invés de direito. Foi muito influenciado pelo trabalho de Leonahrd Euler, e suas habilidades foram reconhecidas pela Académie Royale des Sciences.

Ele é bem conhecido por seu trabalho sobre o uso de determinantes na eliminação algébrica. Outros trabalhos que ele publicou sobre a teoria das equações foram reunidos em Théorie Générale des Algébriques em 1779. Este inclui um resultado conhecido hoje por teorema de Bézout, um importante resultado da matemática que revela como estimar o número de pontos de interseção de duas curvas planas. Após sua morte em 1783 uma estátua foi erguida em Nemours, cidade de seu nascimento, uma pequena homenagem para um grande matemático.



Bézout

Teorema de Bézout *Sejam $f(x, y)$ e $g(x, y)$ dois polinômios em $R[x, y]$ de graus $n, m \geq 1$ sem fator comum em $R[x, y]$. Então*

$$\# (Z(f) \cap Z(g)) \leq n \cdot m$$

Demonstração:

Se $(x, y) \in R^2$ é tal que $f(x, y) = g(x, y) = 0$ então segue do Lema (ii) que existe somente um número finito de ordenadas possíveis para um ponto de R^2 da interseção das curvas determinadas por f e por g . Consequentemente, para uma ordenada fixa $y_0 \in R$ existem no máximo n pontos em R^2 da curva determinada por $f(x, y)$ com esta ordenada y_0 , a saber os pontos (x, y_0) tais que x seja uma raiz de $f(x, y_0) = 0$

Pela observação anterior é possível obter um sistema de coordenadas onde pontos distintos de interseção têm ordenadas distintas. Escrevemos então

$$\begin{aligned} f(x, y) &= a_0 x^n + a_1(y) x^{n-1} + \dots + a_n(y) \text{ com } a_0 \neq 0 \\ g(x, y) &= b_0 x^m + b_1(y) x^{m-1} + \dots + b_m(y) \text{ com } b_0 \neq 0 \end{aligned}$$

Desta forma, a resultante é um elemento de $R[y]$. Denotaremos esta resultante por:

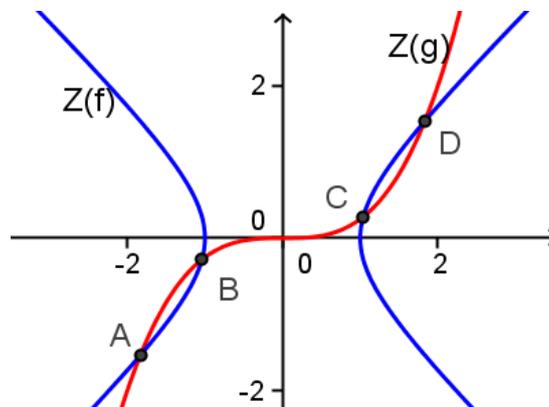
$$R_{f,g}(y)$$

Temos que:

$$\begin{aligned}
\#(Z(f) \cap Z(g)) &= \#\{y_0 \in R; f(x, y_0) \text{ e } g(x, y_0) \text{ tem uma raiz comum em } R\} \\
&\leq \#\left\{ \begin{array}{l} y_0 \in R; f(x, y_0) \text{ e } g(x, y_0) \text{ tem um fator} \\ \text{comum de grau } \geq 1 \text{ em } R[x] \end{array} \right\} \\
&= \#\{y_0 \in R; R_{f(x, y_0), g(x, y_0)} = 0\} - \text{pelo lema (v)} \\
&= \#\{y_0 \in R; R_{f, g}(y_0) = 0\} \\
&\leq \text{grau } R_{f, g}(y) - \text{o n\u00famero de ra\u00edzes \u00e9 menor ou igual ao grau} \\
&\leq n \cdot m - \text{pelo Lema (III)} \blacksquare
\end{aligned}$$

Exemplo:

Como as curvas alg\u00e9bricas planas $Z(f) = \{(x, y) \in R^2; x^2 - y^2 - 1 = 0\}$ e $Z(g) = \{(x, y) \in R^2; x^3 - 4y = 0\}$ n\u00e3o t\u00eam componente comum, ent\u00e3o o teorema de B\u00e9zout garante $\#(Z(f) \cap Z(g)) \leq 2 \cdot 3 = 6$. De fato, observe na figura abaixo que mostra a interse\u00e7\u00e3o da c\u00f4nica $Z(f)$ com a c\u00fabica $Z(g)$ igual a um conjunto de quatro pontos: $Z(f) \cap Z(g) = \{A, B, C, D\}$.



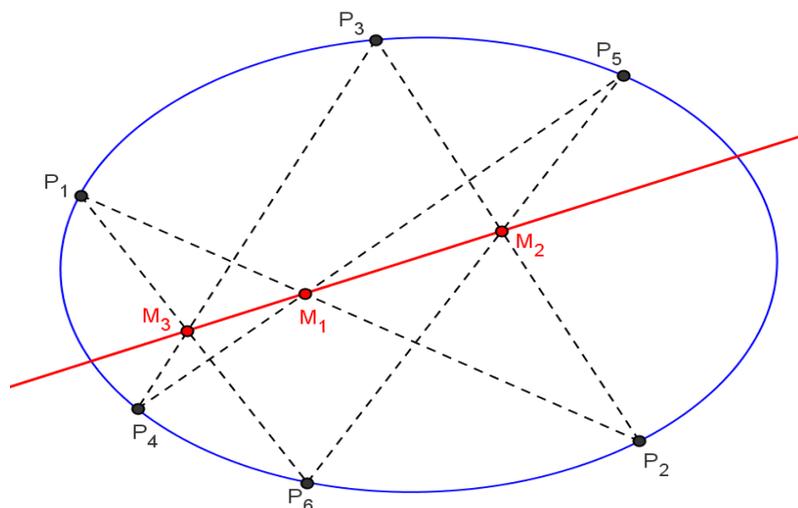
CAPÍTULO 3

Neste capítulo, apresentaremos o resultado central do nosso trabalho, que é o Teorema do Hexágono de Pascal, a luz do Teorema de Bezout apresentado no capítulo anterior, que diz o seguinte: “O prolongamento dos lados opostos de um hexágono inscrito em uma cônica irreduzível qualquer ao se intersectarem determinam três pontos que estão sempre alinhados”, fato este, que surpreendeu a comunidade matemática da época, pois foge um pouco a intuição geométrica.

3.1 TEOREMA DO HEXÁGONO DE PASCAL

Este resultado foi apresentado no capítulo 1 para o caso particular da cônica ser uma circunferência. De maneira mais precisa, o resultado diz o seguinte:

Teorema do hexágono de Pascal. *Sejam P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 e P_6 pontos distintos sobre uma cônica irreduzível Ω . Se os pares de retas (P_1P_2, P_4P_5) , (P_2P_3, P_5P_6) e (P_3P_4, P_6P_1) intersectam-se respectivamente nos pontos M_1, M_2 e M_3 , então esses três pontos são colineares.*



Demonstração:

Escolhendo um sistema de coordenadas em \mathbb{R}^2 .

Seja L_i a reta $P_i P_{i+1}$ com $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ e $P_7 = P_1$ cuja equação é $l_i(x, y) = 0$. Seja ainda $f(x, y) = 0$ a equação de Ω .

Escolha um ponto $A \in \Omega$ diferente de P_1, P_2, \dots, P_6 cujas coordenadas sejam (α, β) . Fixando um valor de i vamos supor que $A \in L_i = P_i P_{i+1}$, então A, P_i e P_{i+1} são três pontos distintos da reta L_i e da cônica Ω . Pelo teorema de Bézout, como o grau de $l_i(x, y)$ é 1 e o grau de $f(x, y)$ é 2, o suposto é absurdo, logo $A \notin L_i$.

Considere agora o polinômio $g(x, y) = l_1 \cdot l_3 \cdot l_5 + u \cdot l_2 \cdot l_4 \cdot l_6$, com $u \in \mathbb{R}^*$. Como o grau de $l_i(x, y)$ é 1 qualquer que seja $i = 1, 2, \dots, 6$, acarreta que:

$$\partial(l_1 l_3 l_5) = 3 \text{ e } \partial(l_2 l_4 l_6) = 3 \quad \therefore \quad \partial g \leq 3.$$

Por outro lado se os pontos P_1, P_2 e M_1 pertencem à curva $Z(g)$ e também a reta L_1 , então pelo teorema de Bezout $\#(Z(g) \cap L_1) \leq \partial g \cdot \partial l_1 \quad \therefore \quad 3 \leq \partial g$ ou $l_1(x, y)$ divide $g(x, y)$. Entretanto l_1 não divide g porque l_1 não divide $u \cdot l_2 \cdot l_4 \cdot l_6$, pois $\mathbb{R}[x, y]$ é um domínio de fatoração única, logo, $\partial(g) = 3$. Escolha o número real u de modo que o ponto $A = (\alpha, \beta) \in \Omega$ e $\Omega = Z(f)$ se encontre também sobre a curva $Z(g)$, isto é:

$$0 = g(\alpha, \beta) = l_1(\alpha, \beta) \cdot l_3(\alpha, \beta) \cdot l_5(\alpha, \beta) + u \cdot l_2(\alpha, \beta) \cdot l_4(\alpha, \beta) \cdot l_6(\alpha, \beta) \quad \therefore$$

$$u = -\frac{l_1(\alpha, \beta) \cdot l_3(\alpha, \beta) \cdot l_5(\alpha, \beta)}{l_2(\alpha, \beta) \cdot l_4(\alpha, \beta) \cdot l_6(\alpha, \beta)}$$

Assim, $u \neq 0$ porque $A \notin L_i$ para todo $i = 1, 2, \dots, 6$. Com isso, os pontos P_1, P_2, \dots, P_6 e A estão na intersecção de $\Omega = Z(f)$ com $Z(g)$, ou seja, $\#(Z(f) \cap Z(g)) \geq 7 > \partial f \cdot \partial g = 2 \cdot 3$, logo, pelo teorema de Bézout f divide g . Então existe h de grau 1, tal que $g = f \cdot h$ e $Z(g) = Z(f) \cup Z(h)$.

Agora, basta provar que os pontos M_1, M_2 e M_3 , de $Z(g)$, pertencem à reta $Z(h)$ ou simplesmente mostrar que esses pontos não pertencem a $Z(f)$. Para isso,

suponha que $M_1 \in \Omega$, ($M_1 = L_1 \cap L_4$), neste caso os pontos P_1, P_2, P_4, P_5 e M_1 são pontos distintos da interseção de $Z(l_1 l_4)$ com $Z(f) = \Omega$, ou seja,

$$\#(Z(f) \cap V(l_1 l_4)) \geq 5 > \partial f \cdot \partial(l_1 l_4) = 2 \cdot 2,$$

então pelo teorema de Bézout $f(x, y)$ e $l_1 l_4$ têm fator comum. Isso é uma contradição visto que f é irredutível. Logo, $M_1 \notin \Omega$.

Analogamente $M_2 \notin \Omega$ e $M_3 \notin \Omega$ e portanto M_1, M_2 e M_3 pertencem a $Z(h)$, sendo assim colineares. ■

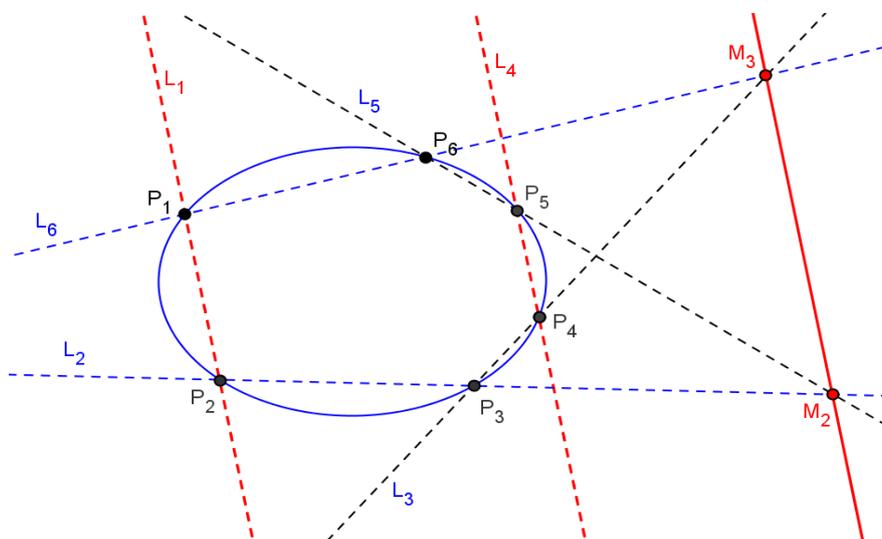
3.2 VARIANTES DO TEOREMA DE PASCAL

Complemento (I) do Teorema de Pascal. Sejam P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 e P_6 pontos distintos sobre uma cônica irredutível Ω . Se as retas

- $L_1(P_1 P_2)$ e $L_4(P_4 P_5)$ são paralelas
- $L_2(P_2 P_3)$ e $L_5(P_5 P_6)$ se intersectam em M_2
- $L_3(P_3 P_4)$ e $L_6(P_6 P_1)$ se intersectam em M_3

Então

- A reta L_1 é paralela à reta $L(M_2 M_3)$.



É bom lembrar que na geometria pode-se dizer que retas paralelas se encontram no infinito, isto é, $L_1 \cap L_4 \cap M_2 M_3 = M_\infty$ e ainda assim os três pontos M_2, M_3 e M_∞ são colineares.

Demonstração:

Suponha que a reta $L = M_1 M_2$ intersecta L_1 em B e L_4 em B' afirmamos que $B \notin \Omega$ e $B' \notin \Omega$.

De fato, se $B \in \Omega$, os três pontos B, P_1 e P_2 que são distintos estão em $L_1 \cap \Omega$ e isso contraria o teorema de Bézout que garante que há no máximo dois pontos de intersecção entre uma reta (grau 1) e uma cônica irreduzível (grau 2). Logo, $B \notin \Omega$. Analogamente conclui-se que $B' \notin \Omega$.

Repetindo os argumentos da demonstração do teorema anterior temos os polinômios $g = l_1.l_3.l_5 + u.l_2.l_4.l_6$, o polinômio h de grau 1 e o polinômio irreduzível f da cônica satisfazendo a relação $g = f.h$, assim, B, B', M_2 e M_3 são pontos distintos de $Z(h)$.

Sendo $B = (b_1, b_2)$, lembrando que $g = l_1.l_3.l_5 + u.l_2.l_4.l_6$ e $g = f.h$ temos que

$$0 = g(b_1, b_2) = l_1(b_1, b_2).l_3(b_1, b_2).l_5(b_1, b_2) + u.l_2(b_1, b_2).l_4(b_1, b_2).l_6(b_1, b_2).$$

Como $B \in L_1$, $l_1(b_1, b_2) = 0$, resulta que $l_2(b_1, b_2).l_4(b_1, b_2).l_6(b_1, b_2) = 0$, ou seja, um desses fatores é zero:

$$l_2(b_1, b_2) = 0 \Rightarrow B \in L_2 \text{ ou}$$

$$l_4(b_1, b_2) = 0 \Rightarrow B \in L_4 \text{ ou}$$

$$l_6(b_1, b_2) = 0 \Rightarrow B \in L_6$$

Vamos supor que $B \in L_2$ e lembrar que $B \in L_1$, então $B = P_2$ é o único ponto de intersecção de L_1 com L_2 , logo, $B \in \Omega$. Isso contraria o fato já demonstrado que $B \notin \Omega$. Logo, $B \notin L_2$. Analogamente prova-se que $B \notin L_6$.

Se $B \in L_4$, como $B \in L_1$ temos que $L_1 \cap L_4 = B$ e isso contraria a hipótese de que $L_1 // L_4$, logo, $B \notin L_4$.

Em qualquer caso, temos um absurdo e assim concluímos que a reta $Z(h)$ não pode intersectar L_1 e de maneira análoga, repetindo o mesmo raciocínio para B' , $Z(h)$ não pode intersectar L_4 .

Logo, $L = Z(h) = M_2M_3$ é a reta paralela a $P_1P_2 = L_1$ e a $P_4P_5 = L_4$. ■

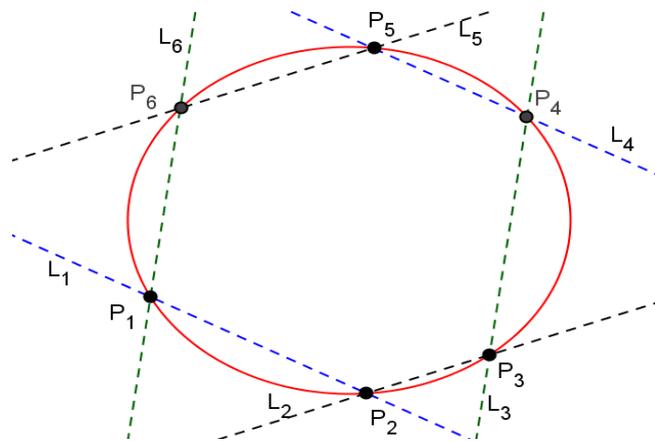
A seguir, apresentaremos outro resultado complementar do Teorema de Pascal:

Complemento II do Teorema de Pascal. Sejam P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 e P_6 pontos distintos sobre uma cônica irreduzível Ω . Se

- As retas $L_1(P_1 P_2)$ e $L_4 (P_4P_5)$ são paralelas
- As retas $L_2(P_2 P_3)$ e $L_5 (P_5P_6)$ são paralelas

Então:

- As retas $L_3(P_3 P_4)$ e $L_6 (P_6P_1)$ são paralelas.



Demonstração:

Suponha por absurdo que $L_3 \cap L_6 = B$. Seja $g = l_1 \cdot l_3 \cdot l_5 + \mu \cdot l_2 \cdot l_4 \cdot l_6$ conforme na demonstração do teorema de Pascal. Então se $B = (b_1, b_2) \therefore g(b_1, b_2) = 0$, isto é, $B \in Z(g)$.

Por outro lado, suponha que $B \in \Omega$, então B, P_1 e P_6 são três pontos distintos de $L_6 \cap \Omega$ e novamente pelo teorema de Bézout só pode haver no máximo dois pontos em comum na reta e na cônica, então a suposição não pode ocorrer, isto é, $B \notin \Omega$, quer dizer B não está na cônica, porém está na reta.

Pelos mesmos fatos demonstrados no teorema de Pascal, o polinômio $g = f \cdot h$, onde f é o polinômio irredutível da cônica Ω e h um polinômio de grau 1, como $B \notin \Omega$, conclui-se que B pertence à reta $Z(h)$. Além disso, qualquer ponto $D \in Z(h)$, temos que $D \notin \Omega$.

Afirmamos que existe B' pertencente a exatamente uma das interseções $L_5 \cap Z(h)$ ou $L_1 \cap Z(h)$ porque se não $Z(h) // L_5$ e $Z(h) // L_1$ e sendo assim $L_1 // L_5$, e conseqüentemente $L_1 // L_2$, gera um absurdo porque contraria a hipótese $L_1 \cap L_2 = P_1$.

(i) $L_5 \cap Z(h) \neq \emptyset$

Se $B' \in L_5 \cap Z(h)$, então $B' \in L_2$ ou $B' \in L_4$ ou $B' \in L_6$ visto que

$$g = l_1 l_3 l_5 + \mu \cdot l_2 l_4 l_6 = f \cdot h.$$

É preciso analisar essas três pertinências.

(1ª) Se $B' \in L_2$ e $B' \in L_5$, então L_2 e L_5 são concorrentes e isso contraria a hipótese $L_2 // L_5$. Logo, $B' \notin L_2$.

(2ª) Se $B' \in L_4$ e $B' \in L_5$, então $B' = P_5$ que é o ponto de interseção dessas retas, porém o ponto de interseção das retas está na cônica, $B' \in \Omega$, o que contraria o fato que $B' \in h$ e não pode pertencer a Ω , logo $B' \notin L_4$.

(3ª) Se $B' \in L_6$ e $B' \in L_5$, então $B' = P_6$ que é o ponto de interseção de L_5 e L_6 , então $B' \in \Omega$ o que de novo é um absurdo. Logo, $B' \notin L_6$.

Em qualquer caso temos um absurdo, conclui-se que não existe um ponto B tal que $B \in L_3$ e $B \in L_6$ de modo que $L_3 // L_6$. ■

O teorema de Pascal permanece válido mesmo quando a elipse se degenera em uma circunferência, conforme demonstrado no capítulo 1, ou quando a hipérbole se degenera em duas retas concorrentes e nesse caso leva o nome de Teorema de Pappus.

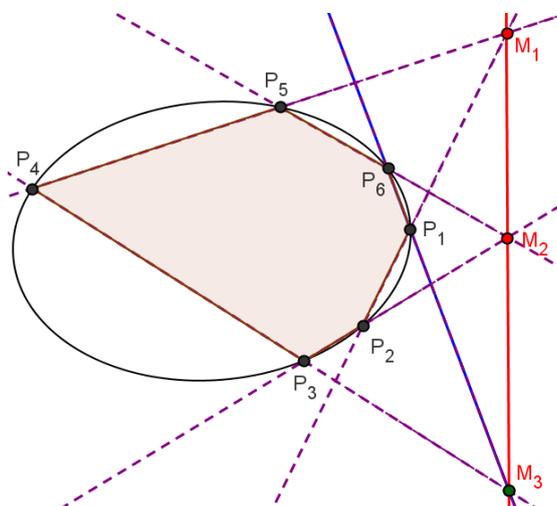
Na geometria grega encontramos o manancial do assunto, no que se refere à forma e ao conteúdo. É inestimável a importância desse legado notável para toda a geometria subsequente. A contribuição mais importante de Pappus de Alexandria para o conhecimento das cônicas foram os seus resultados sobre foco, diretriz e excentricidade. Ele unifica a definição das três curvas, que variam de acordo com o valor da excentricidade. Sua obra acabou sendo o réquiem da geometria grega, pois, após Pappus, a geometria grega deixou de ser uma disciplina brilhante, apenas sua memória foi preservada por escritores menos criativos e comentadores. O Teorema de Pappus já foi citado no capítulo 1, todavia, conforme foi dito, ele pode ser visto como uma consequência do Teorema de Pascal e tem também uma demonstração algébrica, similar à demonstração desse teorema, que pode ser apreciada no TCC e João Jorge F. Chaves.

3.3 CONSEQUÊNCIAS DO TEOREMA DE PASCAL

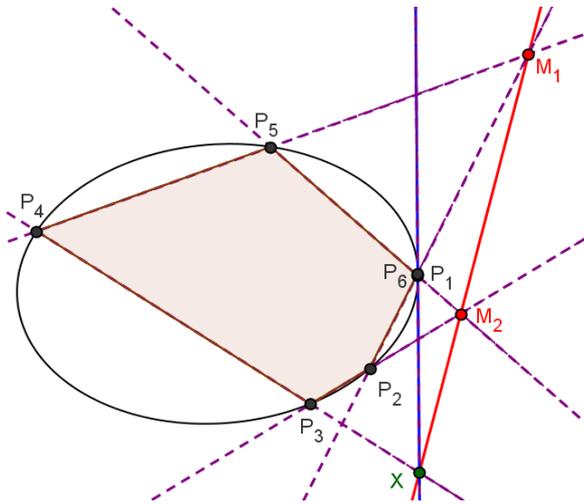
O teorema de Pascal tem consequências interessantes. Algumas delas são expostas a seguir com o intuito de incentivar o leitor a usar o material digital disponível de geometria dinâmica, para constatá-las.

1ª consequência: o pentágono inscrito em uma cônica.

Dado o hexágono $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ inscrito na cônica com a reta de Pascal.



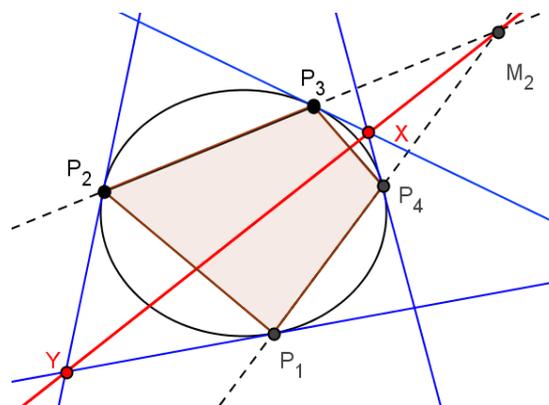
Faça o vértice P_6 se aproximar do vértice P_1 de modo que o polígono se aproxime do pentágono $P_1P_2P_3P_4P_5$, então a reta que contém o lado P_1P_6 tende a uma reta tangente à curva no ponto P_1 ; assim, obtém-se o hexágono de Pascal degenerado, conforme sugere a figura abaixo.



Um pentágono está inscrito em uma cônica e a reta tangente à curva num vértice intersecta a reta que contém o lado oposto no ponto X . Se M_1 e M_2 são os pontos de interseção das retas suportes dos outros pares de lados não adjacentes, então M_1 , M_2 e X são colineares.

2ª consequência: o quadrilátero inscrito em uma cônica.

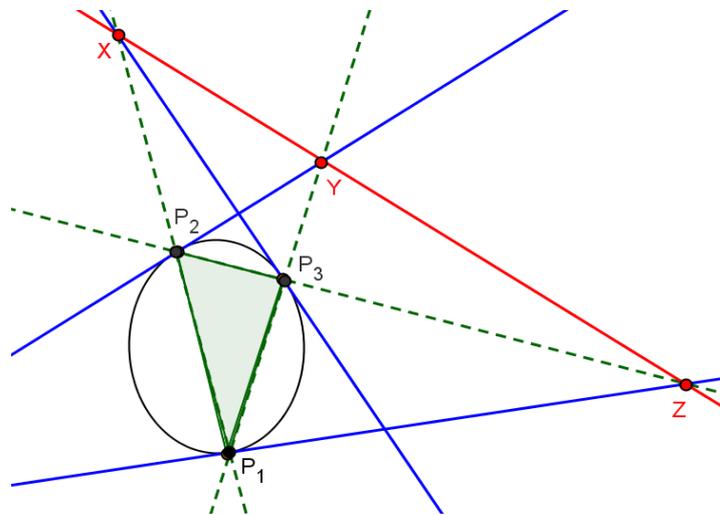
Com procedimento análogo ao anterior degenera pentágono $P_1P_2P_3P_4P_5$, em um quadrilátero $P_1P_2P_3P_4$, conforme a figura traçada abaixo.



O quadrilátero $P_1P_2P_3P_4$ está inscrito em uma cônica, com os lados opostos P_1P_4 e P_2P_3 concorrentes em um ponto M_2 . Se os pares de retas (t_1, t_2) e (t_3, t_4) tangentes à cônica, nos pontos (P_1, P_2) e (P_3, P_4) , intersectam-se nos pontos Y e X , então esses pontos M_2, Y e X são colineares.

3ª consequência: o triângulo inscrito em uma cônica.

Finalmente considere a situação limite do polígono anterior para obter um triângulo inscrito na cônica com as retas tangentes em cada vértice.



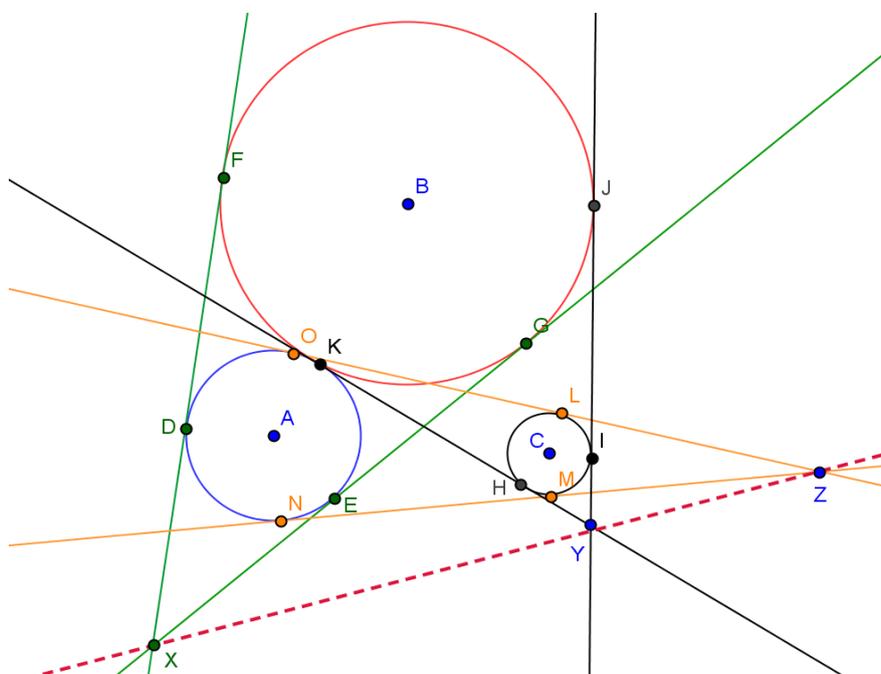
Dado um triângulo $P_1P_2P_3$ inscrito em uma cônica, os pontos X, Y e Z de interseção de cada um dos lados com as tangentes à cônica, nos respectivos vértices opostos, são colineares.

CAPÍTULO 4

As atividades propostas nesse capítulo constituem uma sugestão de trabalho para as classes da terceira série do ensino médio, embora a primeira possa ser aplicada em outras séries.

4.1 ATIVIDADE 1

Sejam $\alpha(A, r_1)$, $\beta(B, r_2)$ e $\gamma(C, r_3)$ três círculos que não são interiores dois a dois. Considere $D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N$ e O os pontos de tangência das retas tangentes exteriores comuns às circunferências α, β e γ , conforme sugere o desenho que segue abaixo.



Para cada par de circunferências existe um ponto de interseção, X, Y ou Z das tangentes exteriores. Se os raios são iguais esses pontos estão no infinito.

- 1º) Usando o geogebra investigue se os pontos estão alinhados na mesma reta.
- 2º) Aplicando o teorema de Menelau demonstre que esses pontos são sempre colineares. Sugestão: com semelhança de triângulos retângulos calcule e multiplique a razão dos raios. Pelo teorema de Menelau conclua a colinearidade.

4.2 ATIVIDADE 2

Considere as curvas algébricas do 1º grau $Z(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 3x + 4y - 12 = 0\}$ e $Z(g) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 3x - 2y - 3 = 0\}$.

- 1º) Determine a resultante $R_{f,g}$ tomando os polinômios com variável y e coeficientes em $\mathbb{R}[x]$.
- 2º) Estime o número de pontos de interseção aplicando o teorema de Bézout.
- 3º) Calcule a interseção de $Z(f)$ com $Z(g)$ usando a resultante.
- 4º) Verifique os resultados construindo as curvas com o Geogebra.
- 5º) Considerando $f(x, y) = ax + by - c$ e $g(x, y) = a'x + b'y - c'$ determine x para que $R_{f,g} = 0$, tomando os coeficientes desses polinômios em $\mathbb{R}[x]$. Qual a condição para que o sistema $f(x, y) = 0$ e $g(x, y) = 0$ seja possível e determinado, isto é, tenha uma única solução?

4.3 ATIVIDADE 3

O lugar geométrico dos pontos do plano que têm a mesma potência em relação a duas circunferências, não concêntricas, desse plano é denominado eixo radical.

Considere as circunferências:

$$Z(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0\} \text{ e}$$

$$Z(g) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 4y - 5 = 0\}.$$

- i) Aplique o teorema de Bezout para estimar o número de pontos de interseção dessas curvas.
- ii) Desenhe as circunferências usando o Geogebra e observe que os dois pontos de interseção tem potências iguais, que valem zero. Trace a reta definida por esses pontos e pesquise, usando o texto dinâmico, se os pontos dessa reta têm a mesma potência em relação às circunferências.
- iii) Determine a equação do eixo radical.

4.4 ATIVIDADE 4

Considere $f(x, y) = x^2 - y^2 - c$, $c \in [-5, 5]$.

- 1º) Usando o controle deslizante trace a curva $Z(f)$ no Geogebra para $c = 0,75$.
- 2º) Escolha três pontos da curva P_1, P_3 e P_5 , com abscissas e ordenadas positivas. Escolha os pontos P_2, P_4 e P_6 com $x > 0$ e $y < 0$.
- 3º) Construa um hexágono não convexo e marque os pontos de interseção dos lados opostos.
- 4º) Trace a reta de Pascal e faça com o controle deslizante c percorrer o intervalo $[-5, 5]$.

O que ocorre com a reta de Pascal e com a curva quando $c = 0$? O que se pode concluir a cerca da relação entre os teoremas de Pascal e de Pappus através da geometria dinâmica?

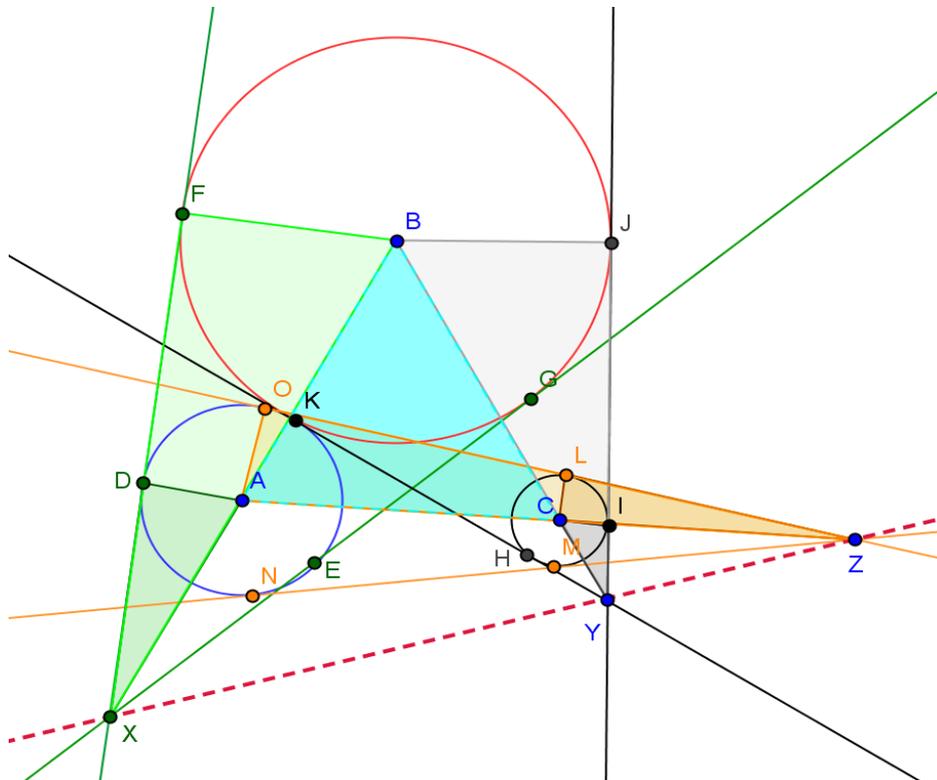
4.5 ATIVIDADE 5

Considere a cônica $x^2 - 2xy + ky^2 + 4x - 8y + 2 = 0$ com $k \in \mathbb{R}$.

- 1º) Pesquise com o Geogebra quais as curvas definidas por essa equação polinomial quando k varia no intervalo $[-2, 2]$.
- 2º) Construa um Hexagrama de Pascal e faça k percorrer esse intervalo com o controle deslizante.

CAPÍTULO 5

5.1 Solução da atividade 1



Observe a figura acima. Dois triângulos retângulos que tenham um ângulo agudo comum são semelhantes. Então, indicando a semelhança dos triângulos com o sinal (\approx) podemos escrever:

$$\triangle XAD \approx \triangle XBF \quad \therefore \frac{\overline{AX}}{\overline{XB}} = -\frac{r_1}{r_2}$$

$$\triangle YBJ \approx \triangle YCI \quad \therefore \frac{\overline{BY}}{\overline{YC}} = -\frac{r_2}{r_3}$$

$$\triangle ZAO \approx \triangle ZML \quad \therefore \frac{\overline{CZ}}{\overline{ZA}} = -\frac{r_3}{r_1}$$

Multiplicando as três proporções encontram-se: $\frac{\overline{AX}}{\overline{XB}} \cdot \frac{\overline{BY}}{\overline{YC}} = \frac{\overline{CZ}}{\overline{ZA}} = -1$.

Como os pontos X, Y e Z pertencem aos prolongamentos dos lados do triângulo ABC, pelo teorema de Menelau eles são colineares.

5.2 Solução da atividade 2

1º) A resultante $R_{f,g}$ é dada por:

$$R_{f,g} = \det \begin{pmatrix} 4 & 3x-12 \\ -2 & 3x-3 \end{pmatrix} = 12x-12+6x-24 = 18x-36$$

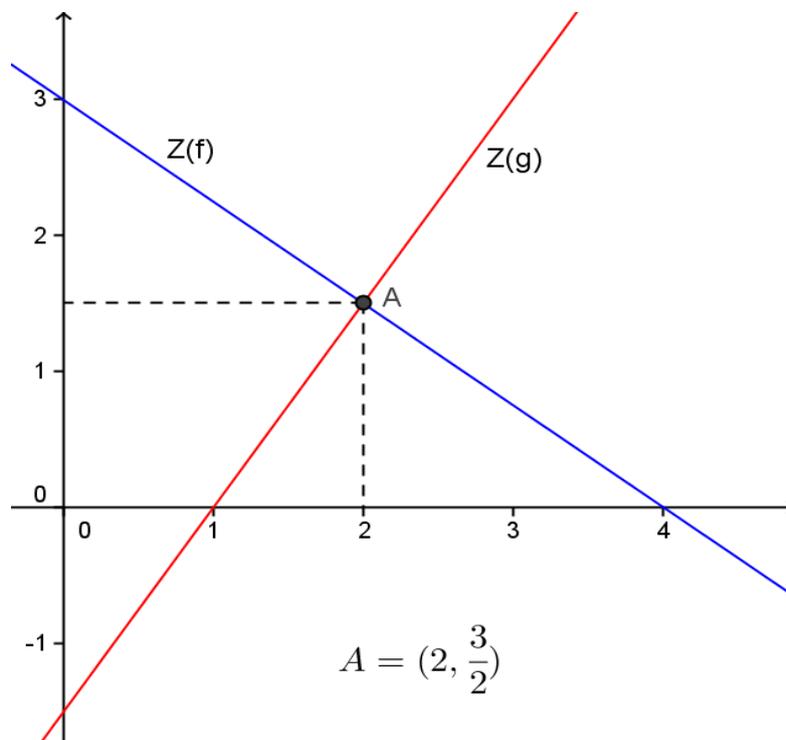
2º) Como f e g são ambas de grau um, pelo teorema de Bézout

$$\#(Z(f) \cap Z(g)) \leq 1 \cdot 1 \leq 1$$

3º) Resolvendo a equação $R_{f,g} = 0$ temos $18x - 36 = 0 \quad \therefore \quad x=2 \quad \therefore \quad y = \frac{3}{2}$

Portanto, o ponto de intersecção é $(2, \frac{3}{2})$

4º)



5º)

$$R_{f,g} = \det \begin{pmatrix} b & ax-c \\ b' & a'x-c' \end{pmatrix} = b.a'.x - b.c' - b'.a.x + b.c'$$

$$R_{f,g} = 0 \quad \therefore \quad b.a'.x - b.c' - b'.a.x + b.c' = 0 \quad \therefore$$

$$x(b.a' - a.b') = b.c' - c'.b \quad \therefore \quad x = \frac{b.c' - c'.b}{b.a' - a.b'}, \quad \text{se } b.a' - a.b' \neq 0$$

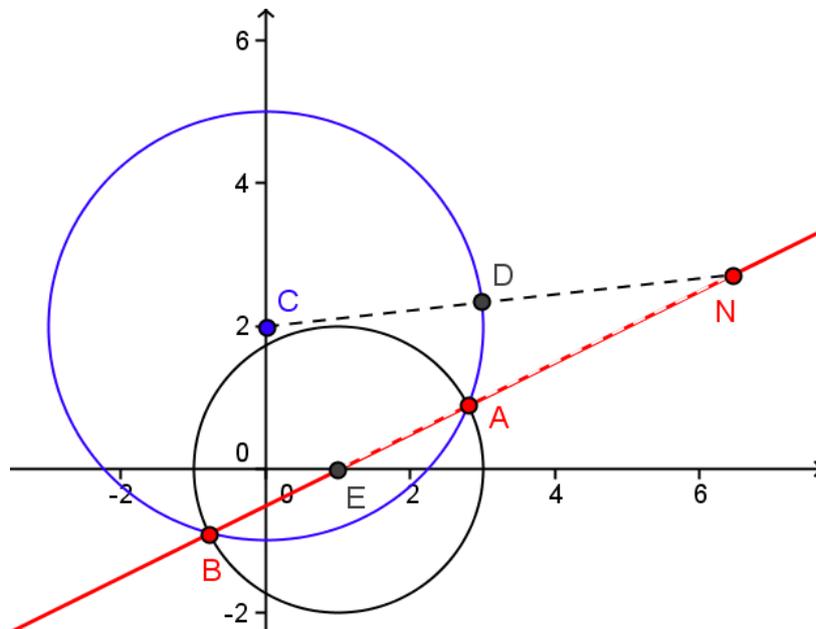
A condição para que o sistema $f(x, y) = 0$ e $g(x, y) = 0$ tenha uma única solução é;

$$b.a' - a.b' \neq 0$$

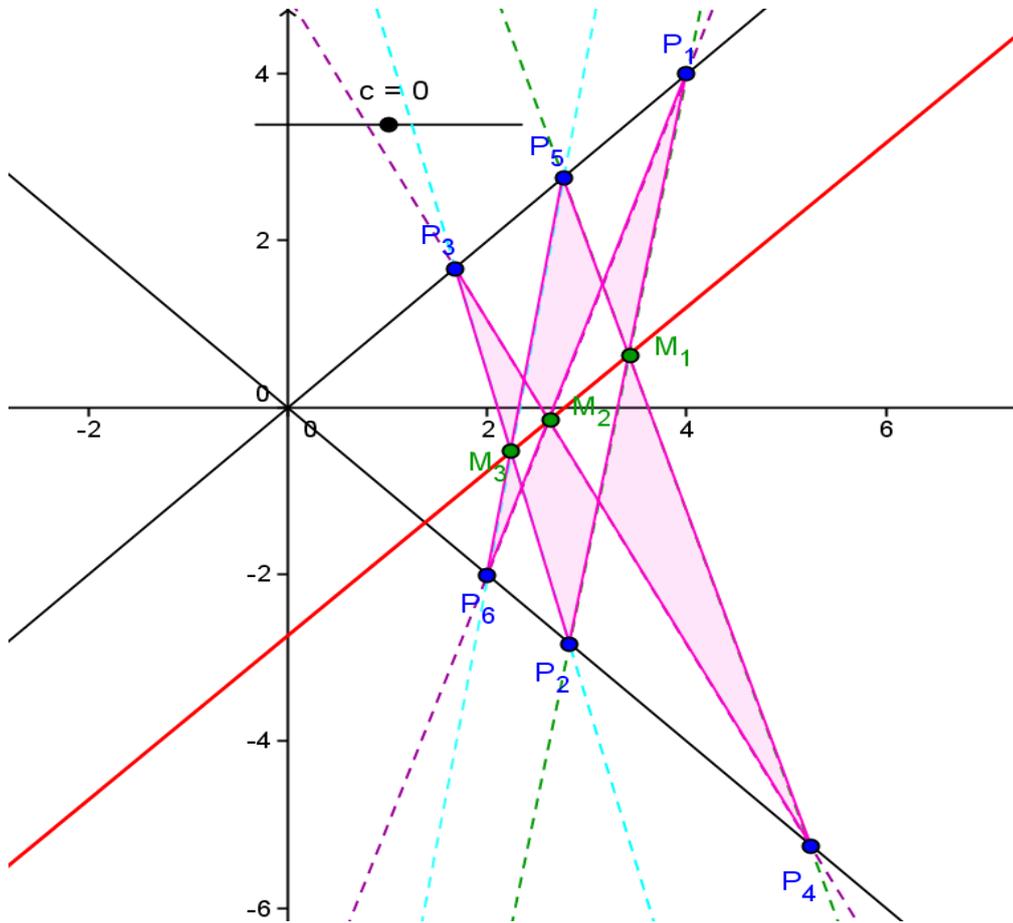
5.3 Solução da atividade 3

i) Como $\partial f = 2$ e $\partial g = 2$, pelo teorema de Bézout $\#(Z(f) \cap Z(g)) \leq 2.2 \leq 4$

ii) Seja $N = (x, y)$ um ponto qualquer do plano. A potência de N em relação a circunferência $Z(f)$ de centro $E = (1, 0)$ e raio $r_1 = 2$ tem que ser igual a potência de N em relação à circunferência $Z(g)$ de centro $C = (0, 2)$ e raio $r_2 = 3$. Movendo o ponto N verifica-se que $pot_C(N) = pot_E(N)$.

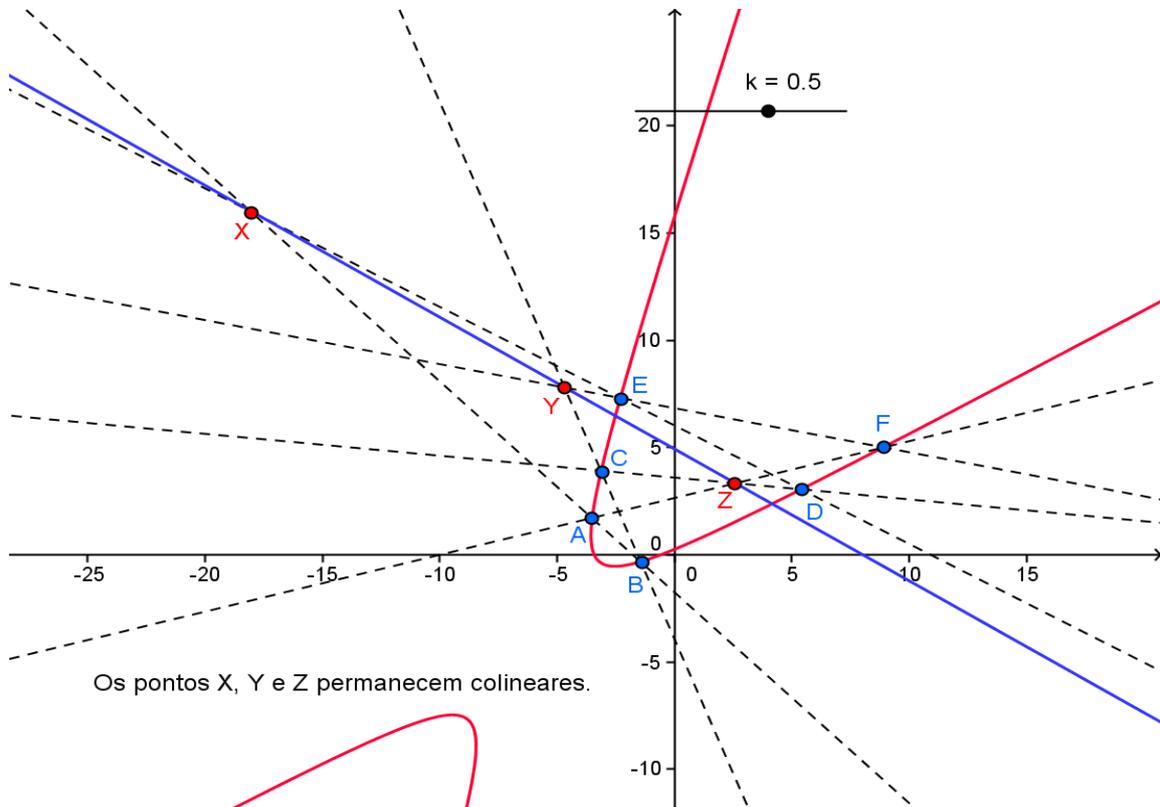


a hipérbole degenera em duas retas concorrentes e a reta de Pascal continua definida pela interseção dos lados opostos do hexágono $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ transformando-se na reta de Pappus, conforme pode ser observado na figura abaixo. Pode-se concluir que o Teorema de Pappus é válido para as cônicas degeneradas e então inclui o Teorema de Pascal.

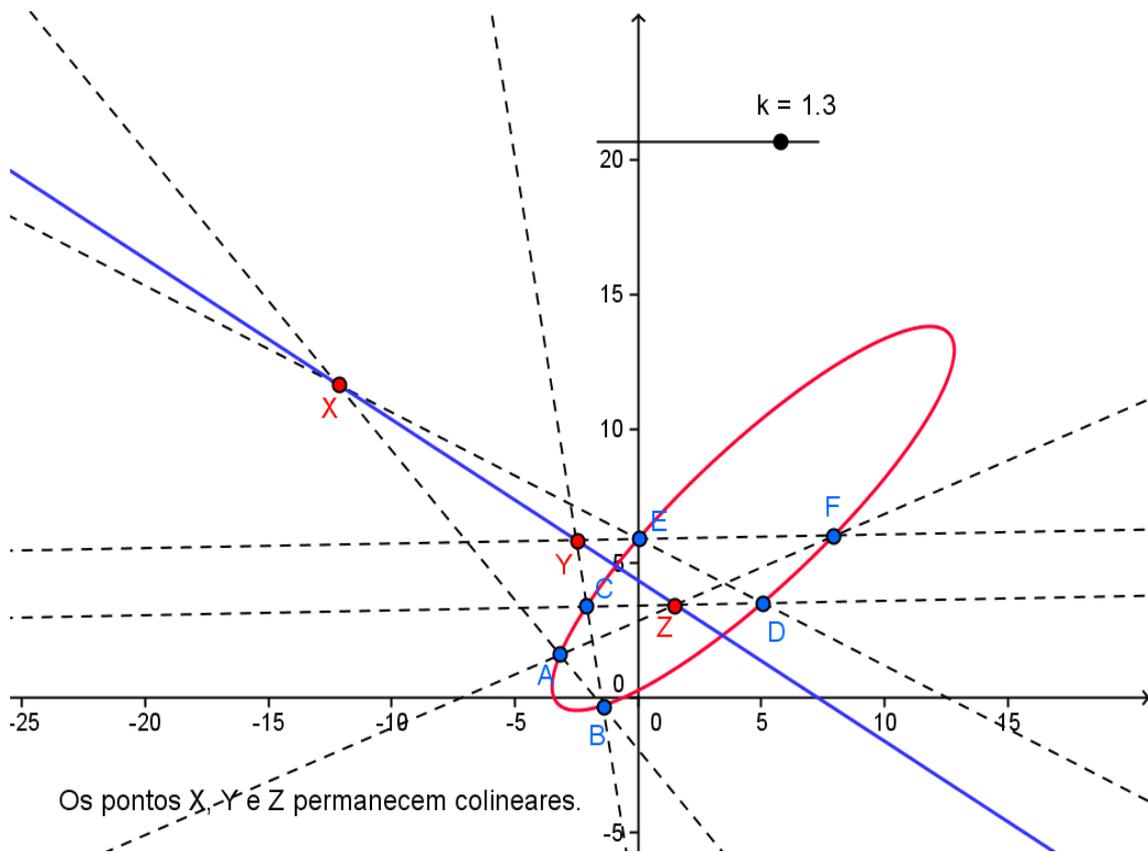


5.5 Solução da atividade 5

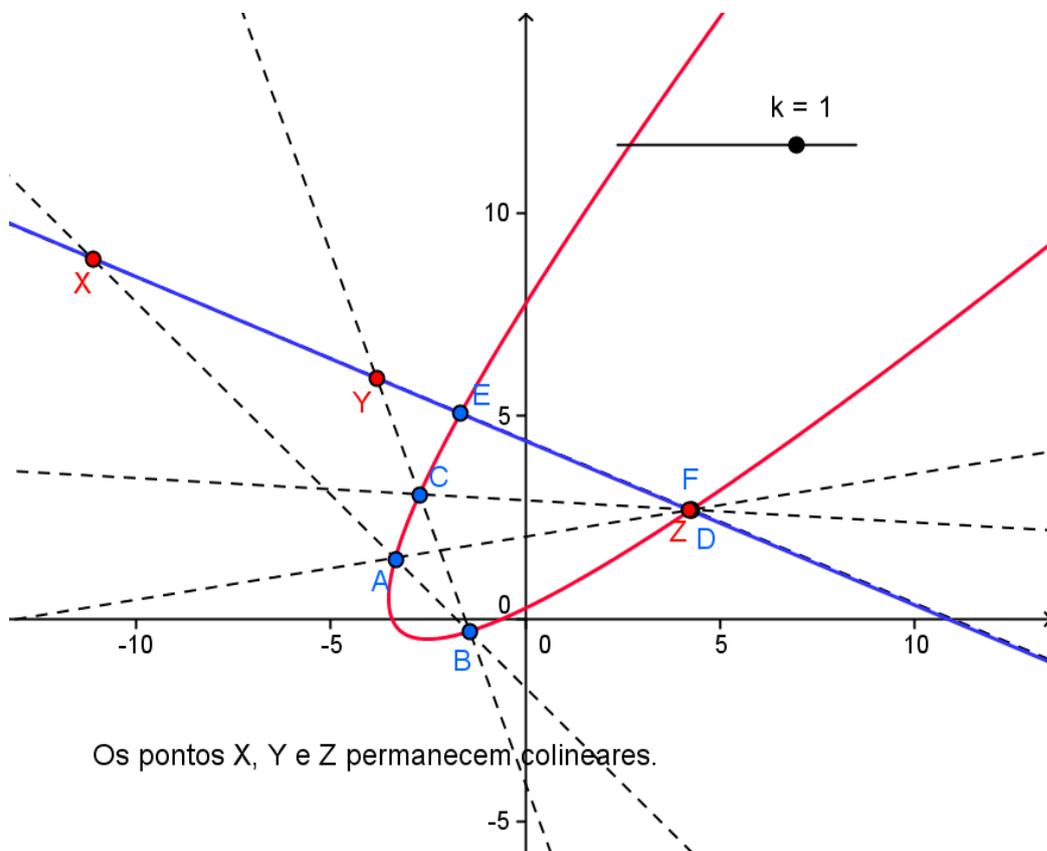
Hipérbole



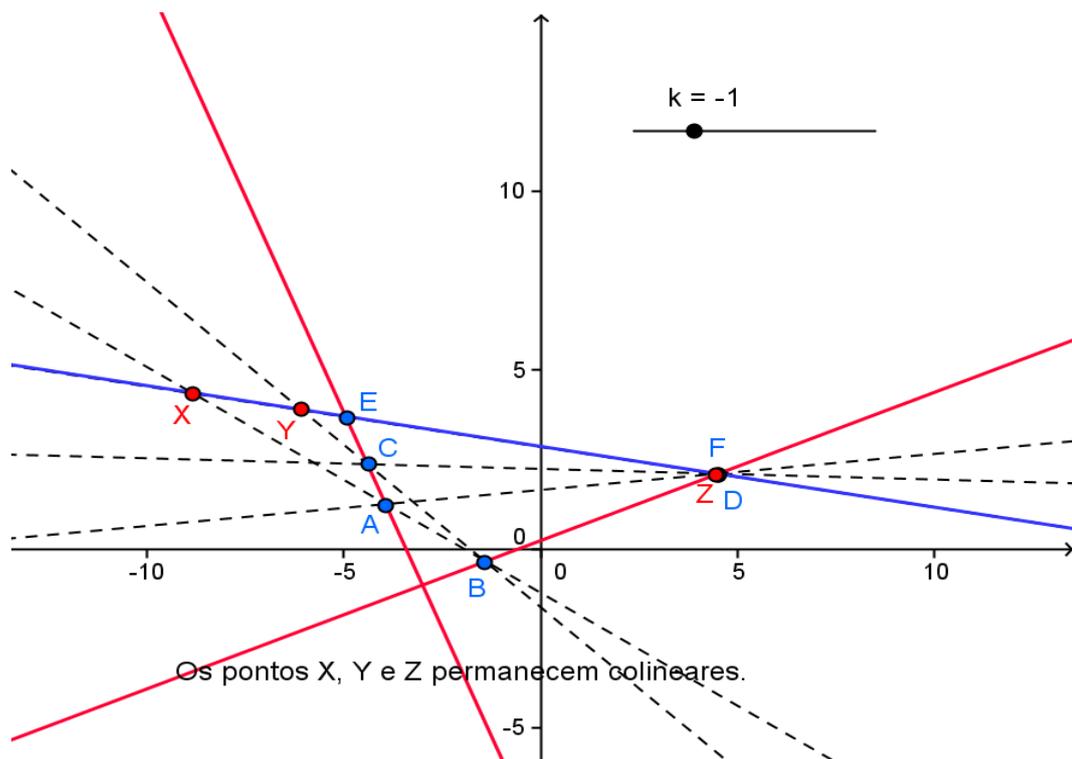
Elipse



Parábola



Retas concorrentes



(2º) A curva é

hipérbole se $-2 \leq k \leq -1$,

duas retas concorrentes se $k = -1$,

hipérbole se $-1 < k < 1$,

parábola se $k = 1$ e

elipse se $1 < k \leq 2$.

SUGESTÕES PARA SALA DE AULA

Conscientes da limitada atenção dada ao ensino de geometria no Brasil, oferecemos com essa dissertação uma pequena contribuição para ampliar esse ensino. Algumas abordagens que fizemos e as atividades sugerem possíveis ampliações e métodos exemplificados a seguir:

- Sempre que possível, propor o problema antes de desenvolver a teoria, é uma estratégia que pode despertar a curiosidade do aluno.
- Escrever com precisão e clareza usando o objeto geométrico para facilitar a compreensão.
- Usar os meios digitais oferecidos como o software de geometria dinâmica para facilitar o entendimento do resultado aonde se quer chegar.
- Usar programas computacionais de geometria dinâmica com o propósito de compreender os problemas, fazer inferências e conjecturas para depois prová-las.
- Valorizar todas as respostas dando igual ênfase ao conhecimento e a criatividade mesmo que essa não conduza ao resultado correto.
- Trabalhar com as atividades sugeridas nesse trabalho ou outras, valorizando sempre a aula de exercícios.
- Rever e aprofundar os conhecimentos adquiridos nas séries anteriores sempre que for solicitado como pré requisito.
- Procurar contextualizar e interdisciplinar os conteúdos ensinados com o rigor matemático necessário e apenas quando tenha um verdadeiro sentido.

CONCLUSÃO

Esse trabalho tem como foco principal apresentar a demonstração do Teorema do Hexágono de Pascal, feita em 1639, e algumas de suas consequências. Como todo bom problema de matemática, não possui apenas um método de demonstração. Nessa dissertação escolhemos fazer uma abordagem via geometria sintética, que contempla os alunos do ensino básico, no capítulo 1. Depois, tomamos o caminho da geometria analítica e algébrica, nos capítulos 2 e 3, que se destinam ao ensino médio, procurando sempre dar um tratamento adequado a esses níveis escolares.

Não se deve ensinar tudo ao mesmo tempo, mesmo porque a construção de todo conhecimento da humanidade não seu deu dessa forma. O ensino deve ser processado aos poucos, como a construção de um edifício. Primeiro construímos a base com os fatos mais elementares, porém nunca abrindo mão do rigor matemático, e depois os andares acima vão sendo construídos sem desvalorizar o que já foi feito. Foi com essa visão que elaboramos esses capítulos. Eles não se destinam a uma única série, pelo contrário, podem ser aplicados em varias séries entre o ensino básico e médio.

O ensino das geometrias sintética e analítica vem pouco a pouco diminuindo, sendo deixado de lado nos currículos da escola brasileira. O estudante deixa de ter contato com um importante ramo da matemática, suas técnicas e seus belíssimos resultados. De certa forma isso é uma escolha, conforme disse o gato de Cheshire, tudo depende para onde queremos ir. De fato, é até surpreendente que nossa escola, com seus métodos de ensino, não tenham ainda estrangulado o desejo de aprender. É preciso estimular o aprendizado por vários caminhos acessíveis e construir sólidos alicerces para o ensino e a pesquisa.

Se o processo de modernização do ensino se estende aos ramos de todas as disciplinas e há um grande esforço no sentido de melhorar seus aprendizados, no ensino da Geometria e da Álgebra o rompimento com os moldes tradicionais precisa ser definitivo. Desejamos que a uma Geometria inerte suceda uma ciência dinâmica que ganhe vida com o uso dos instrumentos digitais disponíveis e a partir disso use o método dedutivo.

BIBLIOGRAFIA

- [1] - Boyer, Carl B. *História da Matemática*, tradução: Elza F. Gomide. São Paulo, Ed. da Universidade de São Paulo, 1974.
- [2] - Garcia, Arnaldo e Lequain, Yves - *Elementos de Álgebra* - Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro 2012.
- [3] - Vainsencher, Israel - *Introdução às Curvas Algébricas Planas*, IMPA, Rio de Janeiro 2002.
- [4] - Barros, Abdênago e Andrade, Plácido – *Introdução à Geometria Projetiva* – SBM Textos Universitários, Rio de Janeiro 2010.
- [5] - Roque, Tatiana e Pitombeira de Carvalho, João Bosco – *Tópicos de História da Matemática* – SBM Coleção PROFMAT, Rio de Janeiro 2012.
- [6] - Gonçalves, Zózimo Menna – *Curso de Geometria Analítica*, Editora Científica, Rio de Janeiro 1969.
- [7] - Botolossi, Humberto - *O Método da Área* - II Bienal SBM Universidade Federal da Bahia outubro de 2004.
- [8] - Morgado, Augusto Cesar e Wagner, Eduardo e Jorge, Miguel – *Geometria II*, Livraria Francisco Alves, Rio de Janeiro 1974.
- [9] - Monteiro de Castro, Luciano – *Introdução à Geometria Projetiva*, revista *Eureka!* 8
- [10] - Muniz Neto, Antônio Caminha – *Como Fermat e Bézout podem salvar o dia*, revista *Eureka!* 11.
- [11] - Ávila, Geraldo – *Euclides, Geometria e Fundamentos* – Revista do Professor de Matemática 45, SBM.
- [12] - Nunes de Andrade, Lenimar – *Construção de Cônicas e o Teorema de Pascal* - Revista do Professor de Matemática 45, SBM.