



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ  
Departamento de Matemática  
Mestrado Profissional em Matemática em Rede  
Nacional – PROFMAT



# Teorema de Euler para poliedros não convexos

**Wellen Eder Pedrochi**

Orientador

**Prof. Dr. Rodrigo Martins**

Coorientadora

**Profa. Dra. Luciene Parron Gimenes Arantes**

Maringá - PR  
2016



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ  
Departamento de Matemática  
Mestrado Profissional em Matemática em Rede  
Nacional – PROFMAT



# Teorema de Euler para poliedros não convexos

Wellen Eder Pedrochi

Trabalho de Conclusão de Curso, na forma de dissertação, apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Matemática.

Orientador

**Prof. Dr. Rodrigo Martins**

Coorientadora

**Profa. Dra. Luciene Parron Gimenes Arantes**

**Maringá - PR  
2016**

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)  
(Biblioteca Central - UEM, Maringá, PR, Brasil)

P372t Pedrochi, Wellen Eder  
Teorema de Euler para poliedros não convexos /  
Wellen Eder Pedrochi. -- Maringá, 2016.  
60 f. : figs. color

Orientador: Prof. Dr. Rodrigo Martins.  
Coorientadora: Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Luciene Parron Gimenes  
Arantes.  
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de  
Maringá, Centro de Ciências Exatas, Departamento de  
Matemática, Programa de Mestrado Profissional em  
Matemática em Rede Nacional, 2016.

1. Geometria. 2. Poliedros. 3. Teorema de Euler.  
4. Teorema de Cauchy. 5. Característica de Euler-  
Poincaré. I. Martins, Rodrigo, orient. II. Arantes,  
Luciene Parron Gimenes, coord. III. Universidade  
Estadual de Maringá. Centro de Ciências Exatas.  
Departamento de Matemática. Programa de Mestrado  
Profissional em Matemática em Rede Nacional. IV.  
Título.

CDD 23.ed. 516

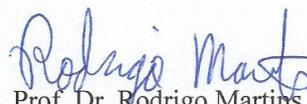
GV5-002702

WELLEN EDER PEDROCHI

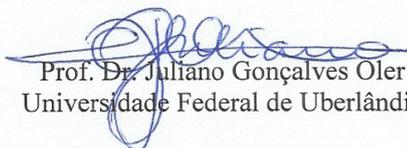
**TEOREMA DE EULER PARA POLIEDROS NÃO CONVEXOS**

Trabalho de Conclusão de Curso, apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática tendo a Comissão Julgadora composta pelos membros:

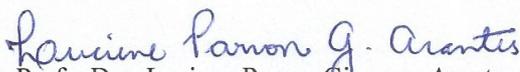
COMISSÃO JULGADORA:



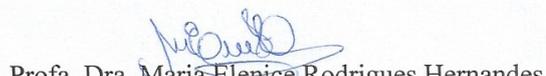
Prof. Dr. Rodrigo Martins  
DMA/Universidade Estadual de Maringá (Presidente)



Prof. Dr. Juliano Gonçalves Oler  
Universidade Federal de Uberlândia



Profa. Dra. Luciene Parron Gimenes Arantes  
DMA/Universidade Estadual de Maringá



Profa. Dra. Maria Elenice Rodrigues Hernandez  
DMA/Universidade Estadual de Maringá

Aprovada em: 05 de fevereiro de 2016.

Local de defesa: Auditório do DMA, Bloco F67, campus da Universidade Estadual de Maringá.

*Dedico este trabalho a minha família, em especial a minha esposa Rosângela e meus filhos Leonardo e Isabela pela compreensão e apoio em todos os momentos.*

# Agradecimentos

Agradeço à Deus a realização de um sonho antigo.

À minha família pelo apoio e compreensão pela minha ausência.

Aos colegas de mestrado pela amizade e companheirismo.

À todos os professores do PROFMAT - UEM, pela dedicação, especialmente ao professor Dr. Rodrigo Martins e a professora Dra. Luciene Parron Gimenes Arantes, pela orientação deste trabalho.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

Ao governo do Estado do Paraná, pela licença concedida para cursar o mestrado.

*É com a hipótese mais simples que se precisa ter cuidado; pois é ela que tem mais chance de passar despercebida.*

Poincaré

# Resumo

Neste trabalho demonstramos o Teorema de Euler para poliedros convexos e mostramos que ele também é válido para alguns poliedros não convexos. Exibimos uma demonstração do Teorema de Euler apresentada por Cauchy e aprimorada por Elon Lages Lima. Além disso, apresentamos uma generalização do Teorema de Euler, a qual ficou conhecida como Característica de Euler-Poincaré.

**Palavras-chave:** Geometria, Poliedros, Teorema de Euler, Teorema de Cauchy, Característica de Euler-Poincaré.

# Abstract

In this paper we show Euler's Theorem for convex polyhedra and show that it also applies to some non-convex polyhedra. We display a demonstration of Euler's theorem presented by Cauchy and improved by Elon Lages Lima. Besides that, we present a generalization of Euler's theorem, which became known as Euler-Poincaré Characteristic.

**Key words:** Geometry, Polyhedra, Euler's Theorem, Cauchy's Theorem, Euler-Poincaré Characteristic.

# Lista de Figuras

1	Leonard Euler . . . . .	12
2	Augustin-Louis Cauchy . . . . .	13
3	Jules Henri Poincaré . . . . .	14
4	Elon Lages Lima . . . . .	15
1.1	Polígono de $n$ lados . . . . .	17
1.2	É poliedro . . . . .	17
1.3	Não é poliedro . . . . .	17
1.4	Poliedro convexo . . . . .	18
1.5	Poliedro não convexo . . . . .	18
1.6	Projeção do poliedro $P$ sobre o plano $H$ . . . . .	19
1.7	Sombra das faces iluminadas . . . . .	20
1.8	Planificação do poliedro $P$ . . . . .	21
1.9	Planificação do poliedro $P$ . . . . .	21
1.10	Planificação do poliedro $P$ . . . . .	22
2.1	Cubo sem a face superior . . . . .	23
2.2	Cubo sem a face superior . . . . .	24
2.3	Subpoliedro $Q$ . . . . .	24
2.4	Bordo do subpoliedro $Q$ . . . . .	25
2.5	Subpoliedro conexo $Q$ . . . . .	25
2.6	Subpoliedro não conexo $Q = Q_a \cup Q_b$ . . . . .	25
2.7	Poliedro não convexo . . . . .	26
2.8	Subpoliedro não conexo $Q = Q_a \cup Q_b$ . . . . .	26
2.9	Poliedro não convexo visão lateral . . . . .	27
2.10	Poliedro não convexo visão inferior . . . . .	27
2.11	Poliedro $P$ , convexo . . . . .	28
2.12	Poliedro $Q$ , face retirada em azul . . . . .	28
2.13	Exemplo de achatamento . . . . .	29
2.14	Dodecaedro achatado, com faces triangulares . . . . .	29
2.15	Faces triangulares em verde com uma aresta livre . . . . .	30
2.16	Faces triangulares azuis com duas arestas livres . . . . .	30
2.17	Polígonos e arestas retiradas em pontilhado . . . . .	31

2.18	Subpoliedro $Q$	31
2.19	Subpoliedros $Q_1$ e $Q_2$	31
2.20	Subpoliedros $Q_1$ e $Q_2$ após sucessivas retiradas	32
2.21	Polígonos e arestas retiradas em pontilhado, subpoliedro $Q$ colorido	32
2.22	Subpoliedros $Q_1, Q_2, Q_3$	33
2.23	Subpoliedros $Q_1, Q_2, Q_3$ após a retirada de alguns triângulos	33
2.24	Polígonos e arestas retiradas em pontilhado, subpoliedro $Q$ colorido	34
2.25	Subpoliedros $Q_1, Q_2$	34
2.26	Subpoliedros $Q_1, Q_2$ após a retirada de um triângulo	35
2.27	Polígonos e arestas retiradas em pontilhado, subpoliedro $Q$ colorido	35
2.28	Subpoliedro $Q$ colorido	36
2.29	Subpoliedro $Q$	36
2.30	Subpoliedros $Q_1$ e $Q_2$	37
2.31	Subpoliedros $Q_1$ e $Q_2$	37
2.32	Introdução	38
2.33	Definição de poliedro convexo e não convexo	38
2.34	Atividades	39
2.35	Teorema de Euler para poliedros convexos e um poliedro não convexo	39
2.36	Poliedros de Platão	39
2.37	Poliedros de Platão	39
2.38	Poliedros Regulares	40
2.39	Exemplos	40
2.40	Atividades	40
3.1	Poliedro homeomorfo a esfera	41
3.2	Poliedro homeomorfo a um toro	42
3.3	1-tórico.	42
3.4	2-tórico	43
3.5	3-tórico	43
3.6	$(n + 1)$ -tórico	44
3.7	$(n + 1)$ -tórico	46
3.8	3-tórico	46
3.9	Janela 2D	47
3.10	Opções da janela de visualização	47
3.11	Malha	48
3.12	Ferramenta ponto	48
3.13	Pontos marcados	49
3.14	Ferramenta polígono	49
3.15	Construindo polígonos	50
3.16	Base do 2-tórico	50
3.17	Janela de visualização 3D	51

3.18	Janelas 2D e 3D . . . . .	51
3.19	Janela 3D . . . . .	52
3.20	Extrusão . . . . .	52
3.21	Construindo poliedros . . . . .	53
3.22	Ferramenta de giro . . . . .	53
3.23	2-tórico . . . . .	54
3.24	Tirando o paralelepípedo que envolve o 2-tórico . . . . .	54
3.25	Tirando eixos e plano cinza . . . . .	55
3.26	Retirar nomenclatura de arestas ou pontos . . . . .	55
3.27	Renomear arestas ou pontos . . . . .	56
3.28	Cubo sendo planificado . . . . .	56
3.29	Cubo planificado . . . . .	57
3.30	Dodecaedro sendo planificado . . . . .	57
3.31	Dodecaedro planificado . . . . .	57
3.32	1-tórico sendo planificado . . . . .	58
3.33	1-tórico planificado . . . . .	58

# Sumário

Introdução	11
<b>1 Teorema de Euler para poliedros convexos</b>	<b>16</b>
1.1 Poliedros Convexos . . . . .	16
1.2 Demonstração do Teorema de Euler . . . . .	18
1.2.1 Demonstração por soma dos ângulos internos. . . . .	18
1.2.2 Ideia da demonstração indutiva sobre o número de faces. . . . .	21
<b>2 Teorema de Euler para poliedros não convexos</b>	<b>23</b>
2.1 Teorema de Cauchy . . . . .	27
2.2 Apêndice . . . . .	38
<b>3 Característica de Euler-Poincaré para poliedros <math>n</math>-tóricos</b>	<b>41</b>
3.1 Apêndice . . . . .	47
3.1.1 Construção de um poliedro $n$ -tórico com o GeoGebra 5.0. . . . .	47
3.1.2 Planificações . . . . .	56
<b>4 Considerações finais</b>	<b>59</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>60</b>

## Introdução

A proposta desse trabalho é demonstrar o Teorema de Euler e mostrar que ele pode ser aplicado aos poliedros convexos e a uma classe de poliedros não convexos que veremos adiante. Também sob hipóteses adicionais esse teorema pode ser generalizado.

O Teorema de Euler é um tema de muita relevância e tem sido ensinado, há décadas, nas disciplinas de Geometria Espacial no Ensino Médio. É um resultado muito simples tendo um enunciado de fácil compreensão o qual relaciona o número de vértices  $V$ , o número de arestas  $A$  e o número de faces  $F$  de um poliedro. Mais especificamente,  $V - A + F = 2$ , o que é de fácil ilustração e entendimento, o que torna agradável e sedutor para quem o estuda. Poincaré foi o primeiro matemático a compreender que o Teorema de Euler é um resultado de Topologia, e não de Geometria como se pensava. A relação  $X(P) = V - A + F$  ficou conhecida como Característica de Euler-Poincaré de um poliedro  $P$ .

Os livros didáticos de matemática do Ensino Médio de forma geral evoluíram, estão mais contextualizados, porém ainda requerem um certo rigor matemático. Certas demonstrações como a do Teorema de Euler poderiam ser incluídas nos livros do Ensino Médio e isto daria aos alunos uma ideia mais formal da Matemática.

Lima, em [6], relata que a demonstração mais divulgada do Teorema de Euler foi apresentada por Cauchy, depois reproduzida por autores conceituados, como Hilbert-Cohn Vossen e Courant-Robbins numa forma aparentemente compatível com o nível do ensino médio. Para expandir as noções apresentadas no ensino médio, ou seja, a versão para poliedros convexos, utilizaremos a leitura crítica feita por Elon Lages Lima que pode ser encontrada em [6].

Nosso trabalho está organizado da seguinte maneira. No primeiro capítulo, justificamos o Teorema de Euler para poliedros convexos, de duas maneiras, a primeira por soma dos ângulos internos e a segunda de forma indutiva sobre o número de faces de um poliedro. Em seguida, no segundo capítulo abordamos o Teorema de Euler para poliedros não convexos. No terceiro capítulo, tratamos do caso geral do Teorema de Euler, conhecido como Característica de Euler-Poincaré. Finalmente, no quarto capítulo, apresentamos as considerações finais.

Nas próximas linhas faremos um breve apanhado da vida de quatro grandes matemáticos que contribuíram para a solidificação do Teorema de Euler e contribuíram na forma como apresentamos o trabalho.

## Euler



Figura 1: Leonard Euler

O suíço Leonhard Euler (1707-1783) nasceu na Basileia, ensaiou uma carreira no campo da teologia, mas encontrou sua verdadeira vocação na matemática, sendo um dos matemáticos que mais publicou trabalhos relevantes. Suas contribuições variam, da Geometria à Combinatória, passando pela Teoria dos Números e Física. Em cada uma dessas áreas do conhecimento há pelo menos um resultado obtido por Euler.

Euler estudou com Jacques Bernoulli e foi amigo de seus filhos Nicolaus e Daniel, e através deles descobriu sua vocação para a matemática. Por recomendação dos irmãos Bernoulli, em 1727, tornou-se membro da Academia de S. Petersburgo onde os irmãos Bernoulli eram professores de matemática. À partir daí, Euler passou a escrever uma grande quantidade de artigos de matemática. Em 1735, perdeu a visão do olho direito, porém isso não diminuiu sua produção de pesquisa, conquistando reputação internacional. Em 1741, Euler foi convidado por Frederico, o Grande, para fazer parte da Academia de Berlim, aceitou o convite e passou vinte e cinco anos na corte de Frederico.

Euler passou quase todos os últimos dezessete anos de sua vida em total cegueira. Essa tragédia não deteve o fluxo de sua pesquisa e publicações, que continuou sem diminuição até que, em 1783, aos setenta e seis anos, morreu subitamente enquanto tomava chá na companhia de um de seu netos.

## Cauchy



Figura 2: Augustin-Louis Cauchy

Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) recebeu a primeira educação do seu pai que era instruído, matriculou-se na *École Polytechnique* e ganhou a admiração de Lagrange e Laplace. Dois anos mais tarde ingressou na *École des Ponts et Chaussées*. Trabalhou como engenheiro e, paralelamente a seu trabalho, resolveu vários problemas de interesse matemático. Persuadido por Lagrange e Laplace decidiu abandonar a engenharia civil e aceitou um cargo de professor na Escola Politécnica.

Cauchy escreveu extensiva e profundamente sobre a matemática pura e sobre matemática aplicada. Embora não sentisse muita atração pela geometria em suas várias formas, em 1811, em um de seus primeiros artigos, apresentou uma generalização da forma poliedral de Euler  $V - A + F = 2$ , onde  $A$ ,  $F$  e  $V$  são, respectivamente, o número de arestas, faces e vértices de um poliedro.

## Poincaré



Figura 3: Jules Henri Poincaré

Jules Henri Poincaré (1854-1912) nasceu em Nancy na França. Era desajeitadamente ambidestro, e sua inaptidão em exercícios era legendária, tinha vistas fracas e era muito distraído. Não foi especialmente precoce em mostrar aptidão matemática e reconhecia que tinha dificuldades com cálculos aritméticos simples. O caso de Poincaré mostra que para ser um grande matemático não é necessário ter facilidade com números, há outros aspectos mais relevantes do talento matemático inato. Como Euler, Poincaré tinha notável capacidade para exercícios mentais em todos os aspectos do pensamento matemático. Estudou Engenharia na École Polytechnique, e obteve seu doutorado na Universidade de Paris. Sentia-se igualmente à vontade em todos os ramos da matemática. Coube a Poincaré dar uma solução geral para o Teorema de Euler e ele foi o primeiro matemático a compreender que se tratava de um resultado de Topologia, e não de Geometria.

## Lima

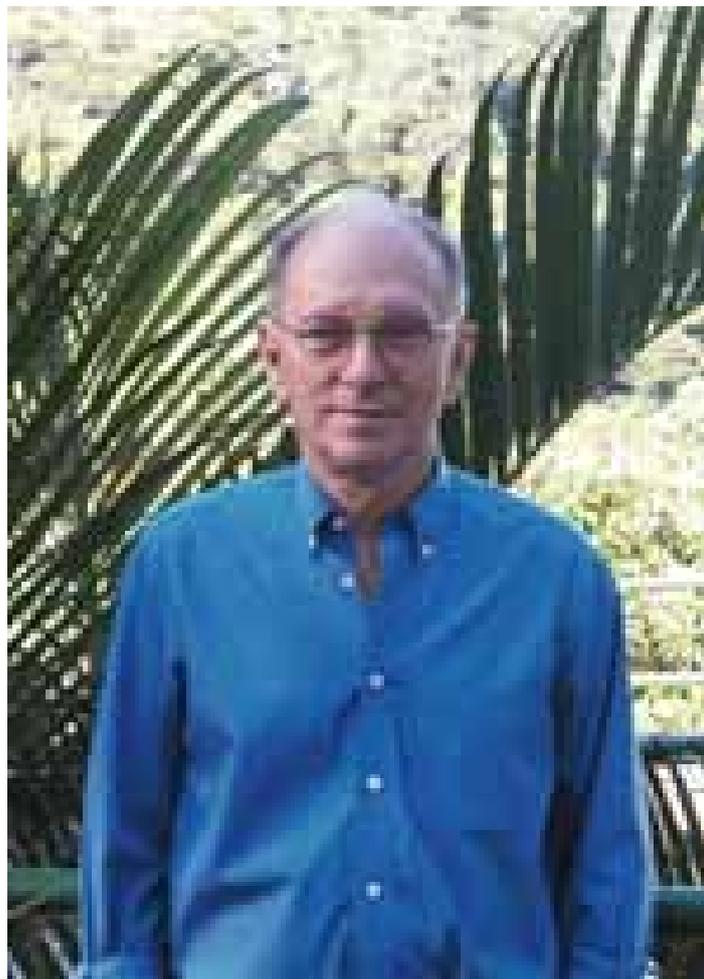


Figura 4: Elon Lages Lima

Elon Lages Lima nasceu em 1929 em Maceió, iniciou seus estudos universitários em Fortaleza, fazendo graduação em Matemática pela Faculdade Católica de Filosofia do Ceará em 1952. Bacharelou-se em Matemática na Universidade Federal do Rio de Janeiro e fez mestrado em Matemática pela University of Chicago em 1955 e doutorado em Matemática pela mesma University of Chicago em 1958. Atualmente é pesquisador titular do Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), ao qual está ligado desde seus tempos de graduação, como bolsista de Iniciação Científica. Sua área de maior interesse é a Topologia, tendo começado com Topologia Algébrica, dedicando-se posteriormente à Topologia Diferencial. É autor de muitos livros, membro titular da Academia Brasileira de Ciências, já foi Diretor do IMPA e presidente da Sociedade Brasileira de Matemática. É torcedor moderadamente fanático do Fluminense.

Elon Lages Lima reescreveu a demonstração dada por Cauchy do Teorema de Euler e sua visão crítica da prova desse resultado é a parte principal deste trabalho.

# 1 Teorema de Euler para poliedros convexos

Aqui, listamos várias definições e resultados importantes, utilizados no nosso trabalho.

No decorrer deste trabalho utilizamos ao menos duas definições de poliedros, na escolha da definição, seja ela mais ou menos restrita, reside a dificuldade em incluir na demonstração poliedros que não sejam convexos. Neste capítulo, apresentamos duas justificativas do Teorema de Euler para poliedros convexos, que podem ser encontradas em livros de apoio ao ensino médio, por exemplo, veja [6] e [7].

## 1.1 Poliedros Convexos

**Definição 1.1** (Polígono). *Seja  $A_1, A_2, \dots, A_n$  uma sequência de  $n$  pontos distintos de um plano, sendo  $n \geq 3$ . Suponha que os  $n$  segmentos de reta consecutivos  $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \dots, \overline{A_{n-1}A_n}, \overline{A_nA_1}$  definidos por esses pontos tenham as seguintes propriedades:*

1. *nenhum desses segmentos se intersectam, salvo em seus pontos extremos;*
2. *dois segmentos que tenham uma extremidade em comum não são colineares (não estão contidos em uma mesma reta).*

*Dizemos, neste caso, que  $A_1A_2\dots A_n$  é um polígono de  $n$  lados.*

A seguir, enunciamos um resultado que será essencial na demonstração do Teorema de Euler e cuja demonstração pode ser encontrada em [2].

**Lema 1.1.** *A soma  $S_i$  dos ângulos internos de um polígono convexo de  $n$  lados ( $n \geq 3$ ) é dada por:*

$$S_i = \pi(n - 2).$$

*Demonstração.* Seja  $A_1A_2A_3\dots A_n$  um polígono convexo de  $n$  lados.

De um vértice qualquer conduzimos todas as diagonais que têm esse vértice como extremo. Veja Figura 1.1. Assim, o polígono fica dividido em  $(n - 2)$  triângulos e a soma  $S_i$  dos ângulos internos  $i_j$ , onde  $j = 1, \dots, n$ , do polígono é dada por

$$S_i = i_1 + i_2 + i_3 + \dots + i_n,$$

ou seja, é igual à soma dos ângulos internos dos  $(n - 2)$  triângulos.

Logo,

$$S_i = 180^\circ(n - 2) = \pi(n - 2).$$

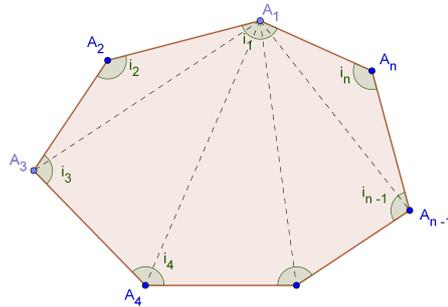


Figura 1.1: Polígono de  $n$  lados

□

De posse da definição de polígono, podemos definir poliedros.

**Definição 1.2.** *Poliedro é uma reunião de um número finito de polígonos planos denominados faces, de modo que:*

1. cada lado de um desses polígonos denominado aresta é também lado de um, e apenas um, outro polígono;
2. a interseção de duas faces quaisquer, ou é uma aresta ou é um ponto denominado vértice ou é vazia.

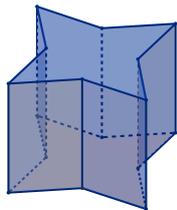


Figura 1.2: É poliedro

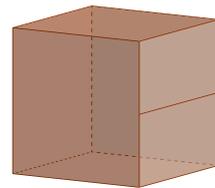


Figura 1.3: Não é poliedro

Todo poliedro limita uma região do espaço chamada de interior desse poliedro.

**Definição 1.3.** Dizemos que um poliedro é convexo se o seu interior é convexo. Mais precisamente, um conjunto  $C$ , do plano ou do espaço, diz-se convexo, quando qualquer segmento de reta que liga quaisquer dois pontos de  $C$  está inteiramente contido em  $C$ .

No caso dos poliedros, podemos substituir a Definição 1.3 por: "Um poliedro é convexo se qualquer reta (não paralela a nenhuma de suas faces) o corta em no máximo, dois pontos". Essas definições encontram-se em [7] e [8].

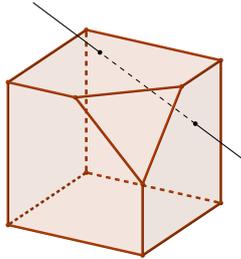


Figura 1.4: Poliedro convexo

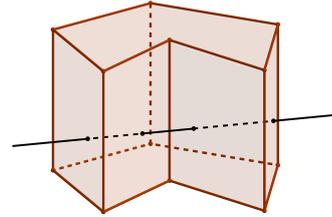


Figura 1.5: Poliedro não convexo

## 1.2 Demonstração do Teorema de Euler

A seguir, enunciamos o Teorema de Euler para poliedros convexos. Apresentamos uma demonstração utilizando a soma dos ângulos internos das faces, depois uma ideia da prova por indução sobre o número de faces de um poliedro. Estas justificativas podem ser encontradas em [7].

**Teorema 1.1** (Teorema de Euler). *Para todo poliedro convexo, vale a relação*

$$V - A + F = 2,$$

onde  $V$  é o número de vértices,  $A$  é o número de arestas e  $F$  é o número de faces do poliedro.

### 1.2.1 Demonstração por soma dos ângulos internos.

Ainda no caso de poliedros convexos, a demonstração do Teorema de Euler apresentada, a seguir, é uma adaptação feita por Zoroastro Azambuja Filho, da demonstração de Legendre de modo a evitar a Geometria Esférica, tornando-a mais elementar e pode ser encontrada em [7].

*Demonstração.* Iniciamos a demonstração calculando a soma dos ângulos internos de todas as faces de um poliedro convexo  $P$ .

Vamos enumerar as faces do poliedro  $P$  de 1 até  $F$  e seja  $n_k$  o gênero (número de lados) da  $k$ -ésima face ( $1 \leq k \leq F$ ). Pelo Lema 1.1, sabemos que a soma dos ângulos

internos de um polígono convexo de gênero  $n$  é  $S_i = \pi(n - 2)$  e observamos que se um poliedro é convexo então todas as suas faces são polígonos convexos. Assim, a soma dos ângulos internos de todas as faces de  $P$  é dada pela expressão:

$$S = \pi(n_1 - 2) + \pi(n_2 - 2) + \dots + \pi(n_F - 2). \quad (1.1)$$

Daí,

$$S = \pi[(n_1 + n_2 + \dots + n_F) - (2 + 2 + \dots + 2)]. \quad (1.2)$$

Observamos que no primeiro parênteses, a soma dos números de lados de todas as faces é igual ao dobro do número de arestas, pois cada lado de cada face foi contado duas vezes, e no segundo parênteses, a soma das  $F$  parcelas é igual a  $2F$ . Assim

$$S = \pi(2A - 2F) = 2\pi(A - F). \quad (1.3)$$

Vamos agora escolher uma reta  $r$  que não seja paralela a nenhuma das faces de  $P$ . Tomemos um plano  $H$ , que não intersecta  $P$  e que seja perpendicular a  $r$ . O plano  $H$  será chamado plano horizontal e as retas paralelas a  $r$  (logo perpendiculares a  $H$ ) serão chamadas retas verticais.  $H$  divide o espaço em dois semiespaços, um dos quais contém o poliedro  $P$ . Este será chamado o semiespaço superior e diremos que seus pontos estão acima de  $H$ , conforme vimos na Figura 1.6.

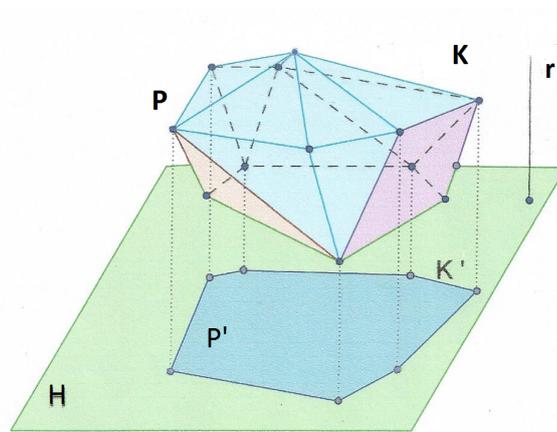


Figura 1.6: Projeção do poliedro  $P$  sobre o plano  $H$

Consideremos, então, a sombra  $P'$  do poliedro  $P$ . Como  $P$  é convexo, cada ponto de  $P'$  é sombra de um ou dois pontos de  $P$ . A sombra  $P'$  do poliedro  $P$  tem como contorno um polígono convexo  $K'$ , sombra de uma poligonal fechada  $K$  formada por arestas de  $P$ . Cada ponto de  $K'$  é sombra de um único ponto de  $P$ . A poligonal  $K$  é chamada de contorno aparente do poliedro  $P$ . Cada ponto interior de  $P'$  (portanto não pertencente a  $K'$ ) é sombra de exatamente dois pontos de  $P$ . Dados dois pontos de  $P$  que têm mesma sombra, ao mais alto (mais distante de  $H$ ) chamaremos ponto iluminado e o mais baixo será chamado sombrio.

Depois dessas considerações, vamos calcular novamente a soma de todos os ângulos das faces de  $P$ , observando que a soma dos ângulos internos de uma face é a mesma soma dos ângulos internos de sua sombra (ambos são polígonos de mesmo gênero).

Sejam  $V_1$  o número de vértices iluminados,  $V_2$  o número de vértices sombrios e  $V_0$  o número de vértices do contorno aparente  $K$ . Então  $V = V_0 + V_1 + V_2$ .

Notemos ainda que  $V_0$  é o número de vértices (e de lados) da poligonal  $K'$ , contorno de  $P'$ .

Consideremos, então, a sombra das faces iluminadas. A sombra das faces iluminadas é um polígono convexo com  $V_0$  em seu contorno e  $V_1$  pontos interiores que por sua vez são sombras dos vértices iluminados de  $P$ .

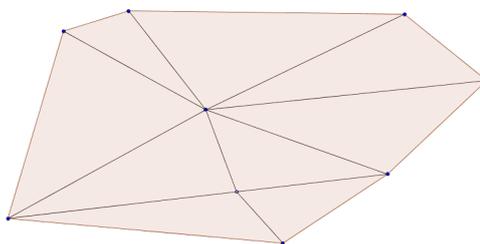


Figura 1.7: Sombra das faces iluminadas

A soma de todos os ângulos internos do polígono da Figura 1.7 é dada por:

$$S_1 = 2\pi V_1 + \pi(V_0 - 2). \quad (1.4)$$

De maneira análoga, obtemos a soma de todos os ângulos da sombra das faces sombriadas

$$S_2 = 2\pi V_2 + \pi(V_0 - 2). \quad (1.5)$$

Somando  $S_1$  e  $S_2$ , obtemos

$$S = S_1 + S_2 = 2\pi V_1 + 2\pi V_2 + 2\pi(V_0 - 2) = 2\pi(V_1 + V_2 + V_0 - 2).$$

Daí,

$$S = 2\pi(V - 2). \quad (1.6)$$

Comparando (1.3) e (1.6) e dividindo por  $2\pi$ , resulta

$$(A - F) = (V - 2).$$

Portanto,

$$V - A + F = 2. \quad (1.7)$$

□

### 1.2.2 Ideia da demonstração indutiva sobre o número de faces.

Vamos justificar o Teorema de Euler, usando o Princípio de Indução sobre o número de faces de um poliedro.

Vamos descrever agora uma situação em que o Teorema de Euler se aplica em regiões do plano. Seja  $P$  um dodecaedro com  $V$  vértices,  $A$  arestas e  $F$  faces. Considere um achatamento do poliedro  $P$  no plano, ou seja, imaginemos um poliedro de borracha e vamos inflá-lo injetando ar até que se transforme em uma esfera. Em seguida, a partir de um furo feito em uma das regiões, esticá-lo até que se transforme em um plano.

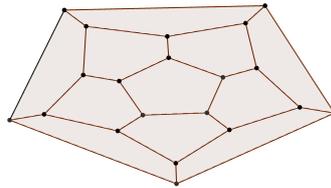


Figura 1.8: Planificação do poliedro  $P$

Vamos chamar de nó a projeção de cada vértice, de linha a projeção de cada aresta e de região a projeção de cada face. Das  $F$  regiões, uma é ilimitada e o caso da região  $I$  na Figura 1.9 que chamaremos de oceano.

Observemos na figura seguinte, temos um plano o qual está dividido em 12 regiões (faces), através de 30 linhas (arestas) que concorrem em 20 nós (vértices).

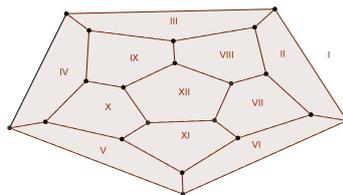


Figura 1.9: Planificação do poliedro  $P$

Desta forma para o poliedro  $P$ , vale

$$V - A + F = 20 - 30 + 12 = 2.$$

De mãos desses conceitos e baseados em [7], exibimos uma ideia da prova do Teorema de Euler para poliedros convexos.

**Ideia da prova:** A fórmula  $V - A + F = 2$  vale no caso simples em que apenas um polígono de  $n$  lados está desenhado no plano. Neste caso,  $A = V = n$  e  $F = 2$

Usaremos indução para o caso geral, ou seja, vamos mostrar que se a relação de Euler vale para uma decomposição do plano em  $F$  regiões, então ela ainda vale para

uma decomposição em  $F + 1$  regiões. Podemos construir uma decomposição por etapas onde, em cada uma delas, uma nova região é acrescentada no oceano das anteriores. Consideremos, então, uma decomposição do plano em  $F$  regiões através de  $A$  arestas que concorrem em  $V$  vértices, como mostra a parte em linhas cheias da Figura 1.10, satisfazendo a relação de Euler. Acrescentamos agora uma nova região contida no oceano das regiões anteriores (como mostra a parte em linhas tracejadas da figura), desenhando uma sequência de arestas ligando dois vértices do contorno da divisão anterior. Se acrescentamos  $r$  arestas, então acrescentamos  $r - 1$  vértices e uma nova região.

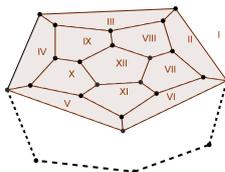


Figura 1.10: Planificação do poliedro  $P$

Daí teremos,

$$(V + r - 1) - (A + r) + (F + 1) = V - A + F = 2.$$

Portanto, o Teorema de Euler permanece válido, o que conclui a demonstração.

## 2 Teorema de Euler para poliedros não convexos

A demonstração de Cauchy para o Teorema de Euler foi feita obedecendo algumas hipóteses formuladas por ele. Elon Lages Lima, em [6], através de uma interpretação crítica da demonstração de Cauchy para o Teorema de Euler mostrou qual a proposição provada pela demonstração de Cauchy e a reescreveu na forma de um teorema que chamaremos de Teorema de Cauchy e cuja demonstração faremos nesse capítulo.

A seguir, apresentamos definições necessárias à demonstração do Teorema de Cauchy que veremos em breve, e em especial a definição de poliedro dada por Cauchy. Podemos perceber que esta definição é mais geral que a Definição 1.2.

**Definição 2.1.** (*Definição de Cauchy para poliedros*) Um poliedro  $P$  é a reunião de um número finito de polígonos convexos, chamados de faces de  $P$ . Os lados desses polígonos são chamados de arestas de  $P$ . Os vértices do poliedro são os vértices de suas faces. Exige-se ainda que as faces do poliedro  $P$  estejam “regularmente dispostas”, isto é, que a interseção  $F_1 \cap F_2$  de duas faces quaisquer de  $P$  (distintas) seja uma aresta comum, um vértice comum a  $F_1$  e  $F_2$  ou vazia.

**Exemplo 2.1.** Pela Definição 2.1, um poliedro não é necessariamente uma região fechada do espaço, isto é, um conjunto que divide o espaço em regiões interior e exterior do poliedro. O cubo sem a face superior da Figura 2.1 é um exemplo de poliedro que não é uma região fechada do espaço.

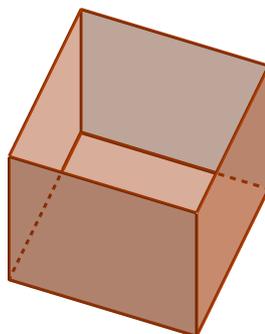


Figura 2.1: Cubo sem a face superior

**Definição 2.2.** Diz-se que uma aresta do poliedro é livre quando ela é lado de apenas uma face.

**Exemplo 2.2.** O cubo sem a face superior da Figura 2.2 é um exemplo de poliedro em que as arestas azuis são livres, pois cada uma delas é lado de apenas uma face.

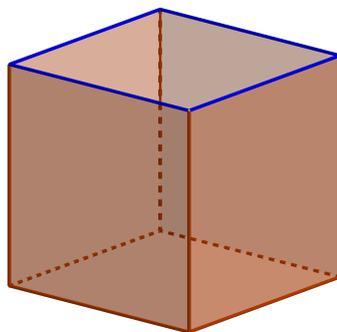


Figura 2.2: Cubo sem a face superior

**Definição 2.3.** Um subconjunto  $Q$  de um poliedro  $P$  chama-se subpoliedro de  $P$  quando  $Q$  é reunião de algumas das faces de  $P$  e  $Q$  é também um poliedro.

**Exemplo 2.3.** Vamos chamar o poliedro da Figura 2.2 de  $P$ . Então, o poliedro  $Q$  da Figura 2.3 é um subpoliedro de  $P$ , pois é a reunião de algumas de suas faces.

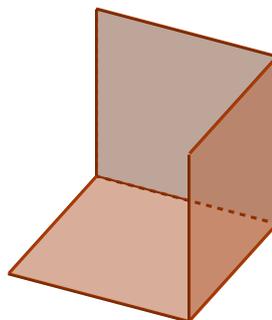


Figura 2.3: Subpoliedro  $Q$

**Definição 2.4.** Chama-se bordo, de um poliedro, a reunião de suas arestas livres.

**Exemplo 2.4.** A reunião das arestas azuis livres da Figura 2.4 forma o bordo do subpoliedro  $Q$ .

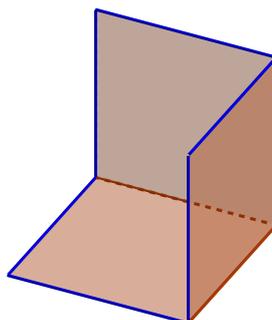


Figura 2.4: Bordo do subpoliedro  $Q$

**Definição 2.5.** Um subpoliedro  $Q$ , de um poliedro  $P$ , é conexo quando não é possível escrevê-lo como reunião  $Q = Q_a \cup Q_b$ , onde  $Q_a$  e  $Q_b$  são subpoliedros disjuntos de  $P$ , ou seja,  $Q_a \cap Q_b = \emptyset$ , salvo no caso trivial em que  $Q_a$  ou  $Q_b$  é vazio.

**Observação 2.1.** Quando o subpoliedro é conexo, é possível ligar dois vértices quaisquer de  $Q$  por alguma poligonal formada por suas arestas.

**Exemplo 2.5.** Podemos observar que é possível ligar dois vértices quaisquer do subpoliedro da Figura 2.5, por uma poligonal formada por suas arestas.

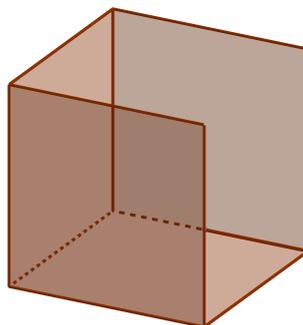


Figura 2.5: Subpoliedro conexo  $Q$

No caso da Figura 2.6, não é possível ligar dois vértices quaisquer de  $Q$  por uma poligonal formada por suas arestas, por isso esse subpoliedro não é conexo.

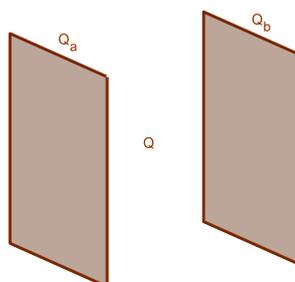


Figura 2.6: Subpoliedro não conexo  $Q = Q_a \cup Q_b$

**Definição 2.6.** Um ciclo de um subpoliedro  $Q$  é uma linha poligonal fechada, tendo como lados as arestas de  $Q$ . Um ciclo  $\beta \subset Q$  é um bordo quando existe algum subpoliedro  $Q_a \subset Q$ , onde  $\beta$  é o conjunto das arestas livres de  $Q_a$ .

**Exemplo 2.6.** O poliedro não convexo da Figura 2.7 possui o ciclo em azul que não é bordo.

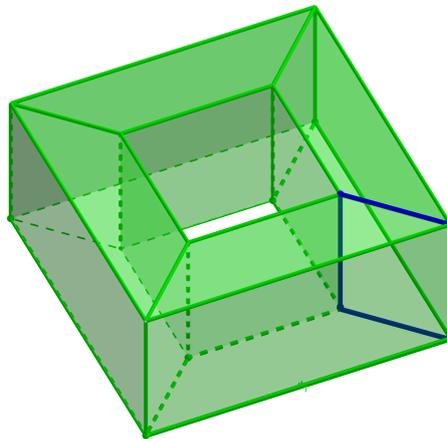


Figura 2.7: Poliedro não convexo

**Exemplo 2.7.** De acordo com a Definição 2.6, temos que na Figura 2.8,  $\beta_a$  em azul e  $\beta_b$  em vermelho são ambos ciclos e bordos.

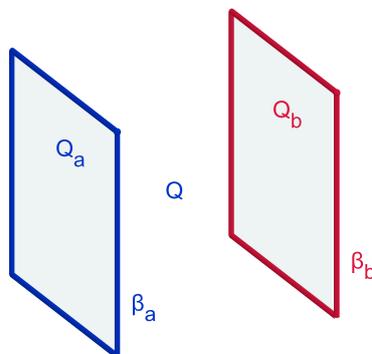


Figura 2.8: Subpoliedro não conexo  $Q = Q_a \cup Q_b$

Antes de enunciarmos o Teorema de Cauchy, observamos que o poliedro nas Figuras 2.9 e 2.10 não é convexo e satisfaz o Teorema de Euler, pois  $V - A + F = 7 - 12 + 7 = 2$ .

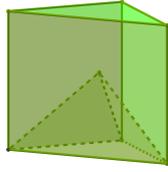


Figura 2.9: Poliedro não convexo visão lateral

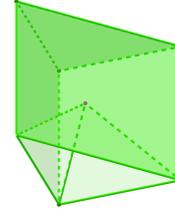


Figura 2.10: Poliedro não convexo visão inferior

Já foi demonstrado que o Teorema de Euler é sempre válido para poliedros convexos e podemos perceber que para poliedros não convexos ela pode ou não ser verdadeira. A Figura 2.7 é um exemplo de um poliedro não convexo em que não é verdadeiro o Teorema de Euler, pois  $V = 16$ ,  $A = 32$ ,  $F = 16$ , obtendo  $V - A + F = 16 - 32 + 16 = 0$ .

Então, surge uma pergunta: Sob quais condições vale a relação  $V - A + F = 2$  para um poliedro não convexo? Essa pergunta perdurou durante anos e vários geômetras posteriores a Euler tentaram resolver este problema. Cauchy conseguiu mostrar que a relação de Euler é válida para alguns poliedros não convexos aqueles, mais especificamente, poliedros que podem se “tornar” uma esfera, isto é, deformáveis na esfera.

## 2.1 Teorema de Cauchy

A seguir, apresentamos uma versão do Teorema de Euler levando em conta a Definição 2.1 de poliedro. Inicialmente, esta demonstração foi feita por Cauchy e, posteriormente, complementada por Elon Lages Lima. Chamamos tal resultado de Teorema de Cauchy. Essa demonstração pode ser encontrada em [6], no entanto, nós a reescrevemos cuidadosamente em nosso trabalho.

**Definição 2.7.** *Duas faces  $F$  e  $S$  de um poliedro  $P$  são ditas encadeadas quando existe uma sequência  $F_1, F_2, \dots, F_n$  de faces de  $P$  tais que  $F_1 = F, F_n = S$  e, para  $i = 1, 2, \dots, n - 1$ , a interseção  $F_i \cap F_{i+1}$  é uma aresta comum a  $F_i$  e  $F_{i+1}$ .*

**Teorema 2.1** (Teorema de Cauchy). *Seja  $P$  um poliedro (Definição 2.1). Suponhamos que*

- i) toda aresta de  $P$  está contida exatamente em duas faces;*
- ii) duas faces quaisquer são encadeadas;*
- iii) todo ciclo em  $P$  é um bordo.*

*Então,  $P$  satisfaz a relação  $V - A + F = 2$ , onde  $V$  é o número de vértices,  $A$  o número de arestas, e  $F$  o número de faces de  $P$ .*

*Demonstração.* Seja  $P$  o dodecaedro da Figura 2.11 poliedro com  $V$  vértices,  $A$  arestas e  $F$  faces.

A demonstração será feita em etapas, para facilitar análises posteriores.

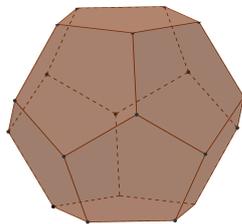


Figura 2.11: Poliedro  $P$ , convexo

### 1ª Etapa (Retirar uma face):

Retiramos uma face de  $P$ , obtendo um "poliedro modificado  $Q$ ", esta ação não altera os valores de  $V$  e  $A$ , mas  $F$  diminui uma unidade.  $Q$  não é um poliedro segundo a Definição 1.2, mas é um poliedro de acordo com a Definição 2.1.

Este fato ocorre porque de acordo com a hipótese (i) do Teorema 2.1, cada aresta está contida em duas faces e assim a face retirada não tem arestas livres no poliedro  $P$ . Vamos considerar o poliedro  $Q$  da Figura 2.12. Para provarmos, o Teorema de Euler para o poliedro  $P$  é equivalente provarmos que no poliedro  $Q$ , vale  $V_Q - A_Q + F_Q = 1$ .

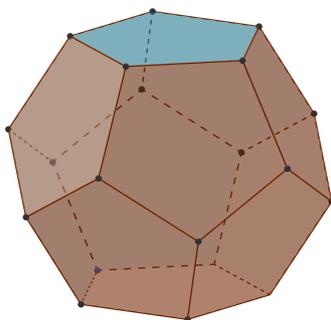


Figura 2.12: Poliedro  $Q$ , face retirada em azul

### 2ª Etapa (Achatar o poliedro $Q$ ):

O poliedro modificado  $Q$  possui arestas livres, a saber os lados da face retirada. Esticando-se o poliedro  $Q$  a partir das suas arestas livres, podemos achatá-lo de forma que se torne uma figura plana. Este procedimento muda as formas do poliedro, porém o número de vértices  $V_Q$ , arestas  $A_Q$  e faces  $F_Q$  fica constante, o que modifica eventualmente, é a forma. Vamos considerar a origem de uma semirreta como um foco luminoso. O modelo achatado do poliedro é sua sombra sobre o plano da projeção.

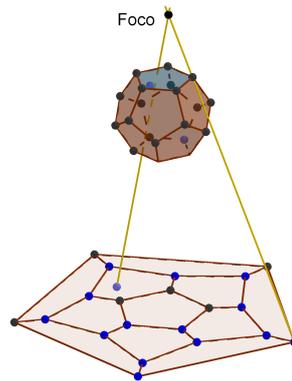


Figura 2.13: Exemplo de achatamento

### 3ª Etapa (Decompor cada face do poliedro achatado em triângulos):

Traçando diagonais que não se cortam, decomparamos cada face em triângulos. Traçamos cada diagonal que não intercepta as outras, o número de vértices  $V_Q$  não muda, enquanto o número de arestas  $A_Q$  e faces  $F_Q$  aumenta de uma unidade. Logo  $V_Q - A_Q + F_Q$  não se altera, pois,

$$V_Q - (A_Q + 1) + (F_Q + 1) = V_Q - A_Q + F_Q - 1 + 1 = V_Q - A_Q + F_Q.$$

Daí, podemos supor que todas as faces do poliedro são triângulos.

A Figura 2.14 mostra como fica o dodecaedro depois das 1ª, 2ª e 3ª etapas.

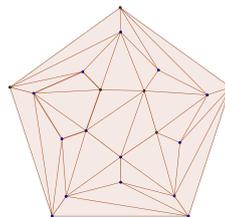


Figura 2.14: Dodecaedro achatado, com faces triangulares

### 4ª Etapa (Retirar uma a uma as faces que possuem alguma aresta livre (despetalar o poliedro plano)):

Retirando-se uma a uma as faces (agora triangulares) que têm alguma aresta livre do poliedro plano  $Q$ , vamos mostrar que o número  $V_Q - A_Q + F_Q$  não se altera.

Há seis possibilidades a serem consideradas ao retirar uma face triangular com pelo menos uma aresta livre, dependendo da aresta escolhida.

- (1) O triângulo a ser retirado tem apenas uma aresta livre;

Vamos retirar uma face triangular com apenas uma aresta livre. Por exemplo, um dos triângulos verdes da Figura 2.15, o número de vértices  $V_Q$  não muda e o número de arestas  $A_Q$  e faces  $F_Q$  diminuem ambos uma unidade, ou seja,

$$V_Q - (A_Q + 1) + (F_Q + 1) = V_Q - A_Q + F_Q - 1 + 1 = V_Q - A_Q + F_Q.$$

Observemos que  $V_Q - A_Q + F_Q$  é constante e que o subpoliedro resultante é conexo.

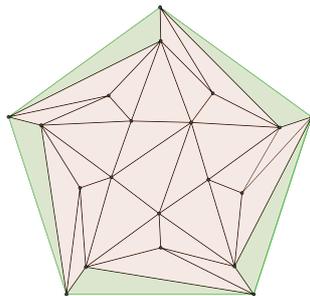


Figura 2.15: Faces triangulares em verde com uma aresta livre

- (2) O triângulo a ser retirado tem duas arestas livres e um vértice livre;

Ao retirar uma face triangular com duas arestas livres, como, por exemplo, um dos triângulos azuis da Figura 2.16, o número de vértices  $V_Q$  e faces  $F_Q$  diminuem uma unidade, enquanto que o número de arestas diminui duas unidades, ou seja,

$$(V_Q - 1) - (A_Q - 2) + F_Q - 1 = V_Q - A_Q + F_Q - 1 + 2 - 1 = V_Q - A_Q + F_Q,$$

tornando  $V_Q - A_Q + F_Q$  constante. O subpoliedro resultante é conexo.

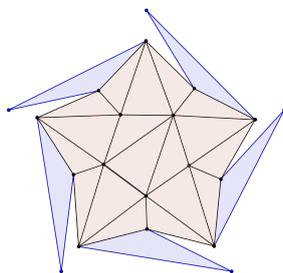


Figura 2.16: Faces triangulares azuis com duas arestas livres

O fato de nos itens (1) e (2) termos como resultado subpoliedros conexos deve-se a hipótese (ii) do Teorema 2.1, que diz que duas faces quaisquer de  $P$  são encadeadas, ou seja, o poliedro inicial  $P$  possui pelo menos uma face sem arestas livres.

Vejam os demais casos:

- (3) O triângulo a ser retirado tem duas arestas livres, mas nenhum dos seus vértices é livre;

Os polígonos com arestas pontilhadas foram retirados através de sucessivas aplicações dos itens (1) e (2) até chegarmos nos polígonos em vermelho, azul e verde.

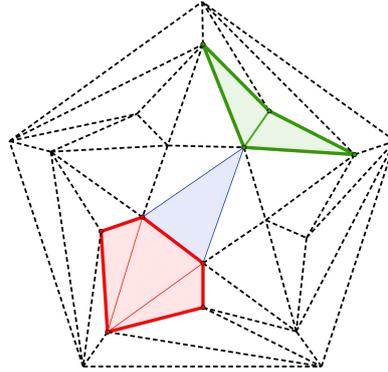


Figura 2.17: Polígonos e arestas retiradas em pontilhado

**Afirmção:** Ao retirarmos o triângulo azul em destaque do subpoliedro  $Q$  da Figura 2.18, geramos  $Q$  desconexo (justificativa no final da demonstração). Assim, passamos a ter os subpoliedros conexos  $Q_1$  e  $Q_2$  com bordos  $\beta_1$  e  $\beta_2$ , respectivamente, formados pelos ciclos em destaque verde e vermelho na Figura 2.19. Chamamos  $Q_1$  e  $Q_2$  de componentes conexas.

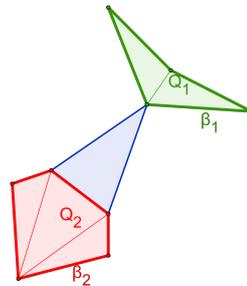


Figura 2.18: Subpoliedro  $Q$

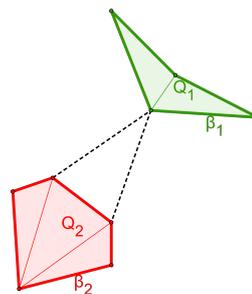


Figura 2.19: Subpoliedros  $Q_1$  e  $Q_2$

Com a retirada deste triângulo, mantém-se o número  $V_Q$ , diminui-se  $F_Q$  em uma unidade e  $A_Q$  em duas unidades de  $Q = Q_1 \cup Q_2$ . Assim,

$$V_Q - (A_Q - 2) + (F_Q - 1) = V_Q - A_Q + F_Q + 1.$$

Porém, o número de componentes conexas também aumenta em uma unidade.

Ao efetuarmos sucessivas retiradas de faces triangulares dos subpoliedros  $Q_1$  e  $Q_2$ , através de aplicações dos itens (1) e (2), teremos no final uma face triangular em cada componente, conforme Figura 2.20.

As sucessivas retiradas não alteram os valores de  $V_Q$ ,  $A_Q$  e  $F_Q$ , do poliedro  $Q$ , mantendo constante o valor de  $V_Q - A_Q + F_Q + 1$ .

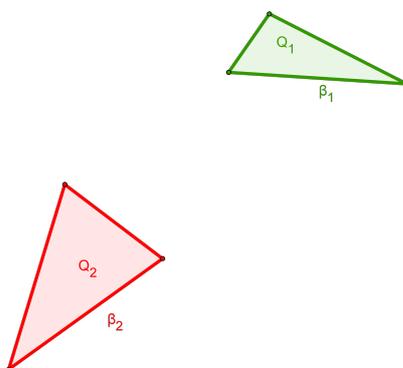


Figura 2.20: Subpoliedros  $Q_1$  e  $Q_2$  após sucessivas retiradas

Por fim, retiramos uma face triangular,  $Q_1$  ou  $Q_2$ . A expressão  $V_Q - A_Q + F_Q + 1$  passa a ser:

$$V_Q - A_Q + F_Q + 1 = (V_Q - 3) - (A_Q - 3) + (F_Q - 1) + 1 = V_Q - A_Q + F_Q.$$

- (4) O triângulo a ser retirado tem três arestas livres mas nenhum de seus vértices é livre;

Os polígonos com arestas pontilhadas foram retirados através de sucessivas aplicações dos itens (1) e (2) até chegarmos nos polígonos em vermelho, azul, verde e roxo.

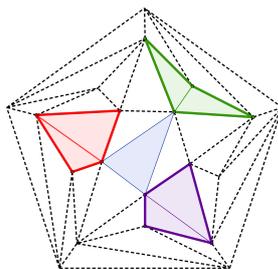


Figura 2.21: Polígonos e arestas retiradas em pontilhado, subpoliedro  $Q$  colorido

Para o caso da Figura 2.21, o subpoliedro  $Q = Q_1 \cup Q_2 \cup Q_3$  é conexo e ao retirarmos o triângulo azul, temos com a face retirada o valor de  $V_Q$  constante e  $A_Q$  diminui 3 unidades. Isto se deve à retirada da face e do valor de  $F_Q$  ter diminuído uma unidade.

Daí,

$$V_Q - (A_Q - 3) + (F_Q - 1) = V_Q - A_Q + F_Q + 3 - 1 = V_Q - A_Q + F_Q + 2.$$

Porém,  $Q$  torna-se desconexo, veja Figura 2.22, aumentando em duas unidades suas componentes conexas.

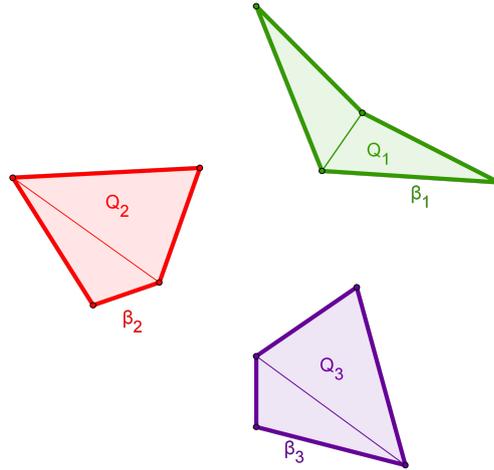


Figura 2.22: Subpoliedros  $Q_1, Q_2, Q_3$

A partir das três componentes conexas  $Q_1, Q_2, Q_3$  geradas, efetuamos sucessivas retiradas de faces triangulares aplicando os itens (1) e (2), até chegarmos na Figura 2.23.

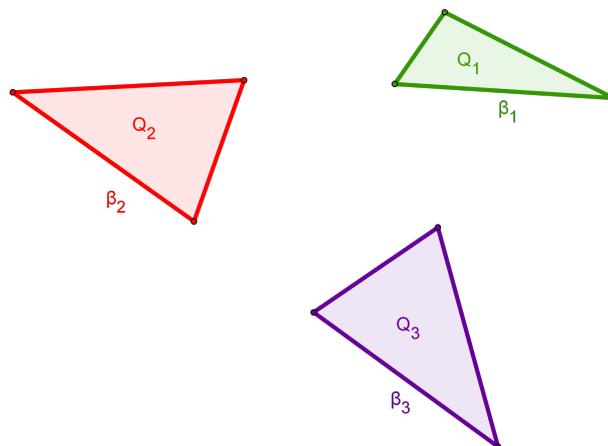


Figura 2.23: Subpoliedros  $Q_1, Q_2, Q_3$  após a retirada de alguns triângulos

Por fim, retira-se duas faces triangulares de quaisquer um dos subpoliedros  $Q_1$  ou  $Q_2$  ou  $Q_3$ , obtendo

$$(V_Q - 6) - (A_Q - 6) + (F_Q - 2) + 2 = V_Q - A_Q + F_Q - 6 + 6 - 2 + 2 = V_Q - A_Q + F_Q.$$

- (5) O triângulo a ser retirado tem três arestas livres e um de seus vértices livre;

Os polígonos com arestas pontilhadas foram retirados através de sucessivas aplicações dos itens (1) e (2) até chegarmos nos polígonos em vermelho, azul, e verde.

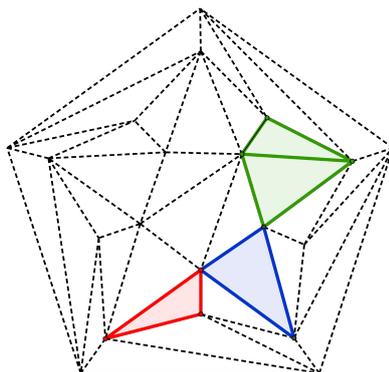


Figura 2.24: Polígonos e arestas retiradas em pontilhado, subpoliedro  $Q$  colorido

Para o caso da Figura 2.24, o subpoliedro  $Q$  é conexo e ao retirarmos o triângulo azul, temos que com a face retirada, o valor de  $V_Q$  diminui uma unidade,  $A_Q$  diminui três unidades devido as arestas livres da face retirada, e o valor de  $F_Q$  diminui uma unidade.

Assim,

$$(V_Q - 1) - (A_Q - 3) + (F_Q - 1) = V_Q - A_Q + F_Q + 1.$$

O número de componentes conexas também aumenta em uma unidade assim como no item (3).

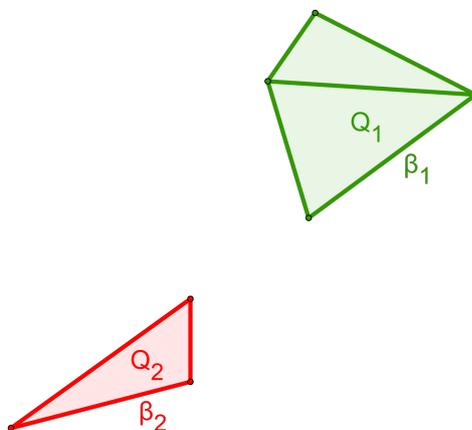


Figura 2.25: Subpoliedros  $Q_1$ ,  $Q_2$

Ao efetuarmos sucessivas retiradas de faces triangulares dos subpoliedros  $Q_1$  e  $Q_2$ , através de aplicações dos itens (1) e (2), teremos no final uma face triangular em cada componente, conforme a Figura 2.26.

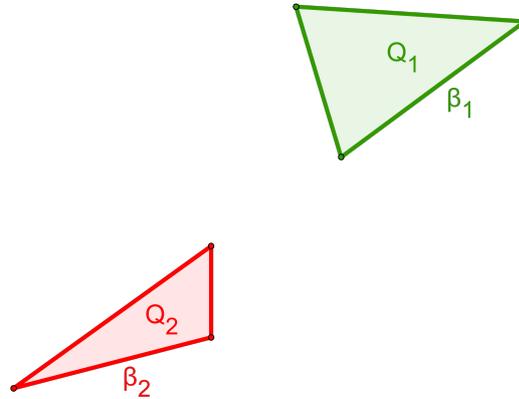


Figura 2.26: Subpoliedros  $Q_1$ ,  $Q_2$  após a retirada de um triângulo

Finalmente, retiramos uma face triangular,  $Q_1$  ou  $Q_2$ . A expressão  $V_Q - A_Q + F_Q + 1$  passa a ser:

$$(V_Q - 3) - (A_Q - 3) + (F_Q - 1) + 1 = V_Q - A_Q + F_Q.$$

- (6) O triângulo a ser retirado tem três arestas e dois vértices livres;

Os polígonos com arestas pontilhadas foram retirados através de sucessivas aplicações dos itens (1) e (2) até chegarmos nos polígonos em vermelho e azul. Assim, a Figura 2.27 resulta na Figura 2.28.

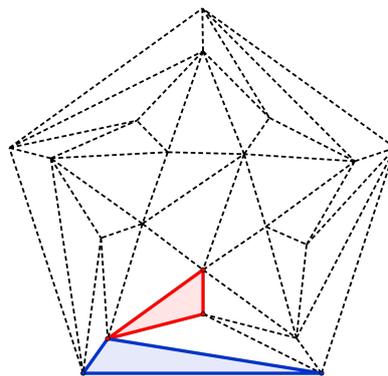


Figura 2.27: Polígonos e arestas retiradas em pontilhado, subpoliedro  $Q$  colorido

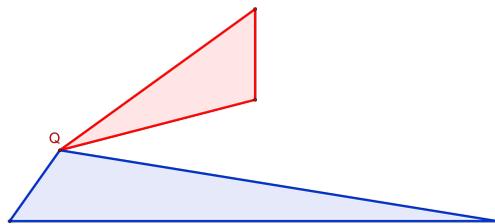


Figura 2.28: Subpoliedro Q colorido

Ao retirarmos o triângulo azul, o valor de  $V_Q - A_Q + F_Q$  não se altera, pois  $V_Q$  diminui duas unidades,  $A_Q$  diminui 3 unidades e  $F_Q$  diminui uma unidade.

Daí,

$$(V_Q - 2) - (A_Q - 3) + (F_Q - 1) = V_Q - A_Q + F_Q.$$

Em todos os casos, na quarta etapa, terminamos com um triângulo em que:

$$V_Q - A_Q + F_Q = 3 - 3 + 1 = 1.$$

Lembrando que na primeira etapa retiramos uma face do poliedro P, obtendo um "poliedro modificado Q". Vamos devolver essa face agora, o que resulta,

$$V - A + F = V_Q - A_Q + (F_Q + 1) = 1 + 1 = 2.$$

Para finalizarmos, vamos demonstrar a afirmação de que o subpoliedro  $Q$  é desconexo. É o que acontece ao retirarmos o triângulo azul  $XYZ$  cujos lados  $XZ$  e  $YZ$  são arestas livres mas o vértice  $Z$  e o lado  $XY$  não são livres, veja Figura 2.29. Desta forma, obtemos um novo poliedro, no qual os vértices  $X$  e  $Z$  pertencem a componentes conexas distintas, isto é, não podem ser ligados por uma poligonal cujos lados são arestas.

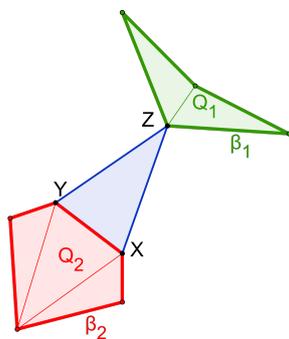
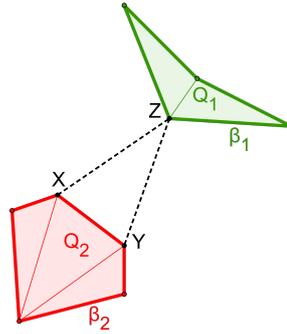
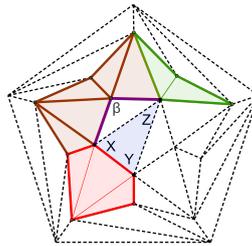


Figura 2.29: Subpoliedro Q

Figura 2.30: Subpoliedros  $Q_1$  e  $Q_2$ 

Esta desconexão de  $Q_1$  e  $Q_2$  é justificada pela condição de que todo ciclo é um bordo, com efeito, suponhamos que não fosse desconexo, ou seja, conexo. Então existiria uma curva  $\beta$  formada por arestas ligando  $X$  a  $Z$  sem passar pela aresta  $XZ$ , porém a curva  $\beta \cup XZ$  é uma curva fechada e, portanto, seria um ciclo, mas como todo ciclo é bordo, o poliedro formado, considerando a aresta  $XZ$  teria como bordo  $\beta \cup XZ$ , contrariando o fato de que  $XZ$  é uma aresta livre da face  $XYZ$ , já que essa aresta possui duas faces laterais.

Figura 2.31: Subpoliedros  $Q_1$  e  $Q_2$ 

□

## 2.2 Apêndice

Os livros didáticos, no melhor dos casos, definem poliedros convexos e apresentam alguns exemplos de poliedros não convexos. A partir dessa definição mostram a validade do Teorema de Euler para os poliedros convexos e alguns não convexos, omitindo qualquer demonstração, não há preocupação em aprofundar o assunto.

**Exemplo 2.8.** A seguir, exibimos o trecho do livro didático do Ensino Médio, em [9], referente ao Teorema de Euler.



Figura 2.32: Introdução

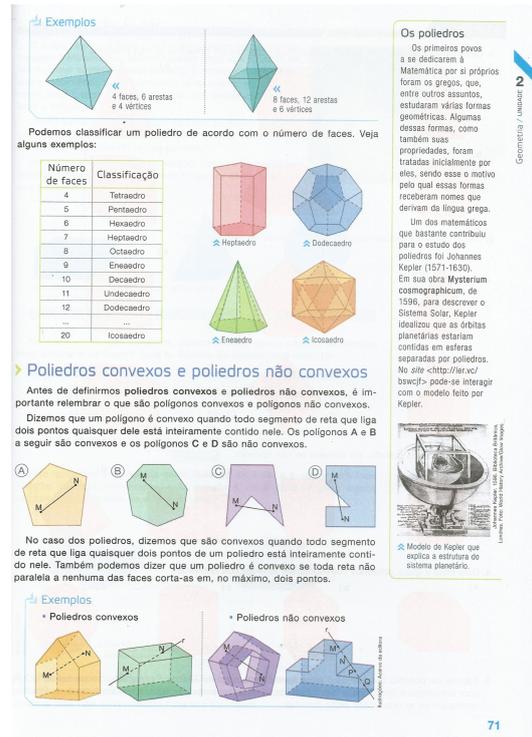


Figura 2.33: Definição de poliedro convexo e não convexo

**ATIVIDADES** Antes de responder no caderno.

- Classifique cada uma das figuras geométricas espaciais em poliedros ou não poliedros.
  - 
  - 
  - 
  - 
  - 
  -
- Determine o número de faces, arestas e vértices de cada poliedro.
  - 
  - 
  - 
  - 
  - 
  -
- Classifique cada poliedro em convexo ou não convexo.
  - 
  - 
  - 
  -
- Determine a quais polígonos correspondem as faces dos poliedros.
  - 
  - 
  - 
  -
- Esboce um poliedro convexo de 6 faces e um não convexo de 7 faces. Em seguida, troque essas figuras com um colega e determine a quantidade de vértices e arestas das figuras que você recebeu. Por fim, verifiquem se as resoluções estão corretas.

Figura 2.34: Atividades

**Relação de Euler**

O suíço Leonhard Euler (1707-1783) realizou muitas contribuições à Matemática. Mesmo ficando cego aos 59 anos de idade, Euler continuou seus estudos. É provável que nenhum outro matemático tenha produzido tanto quanto ele, que durante toda a vida publicou cerca de 500 trabalhos, entre livros e artigos.

Dentre as várias contribuições de Euler, podemos destacar uma importante relação envolvendo o número de faces (F), arestas (A) e vértices (V) de um poliedro.

Antes de escrevermos essa relação, observe os seguintes poliedros, nos quais está indicado o número de vértices, faces e arestas:

$V=8 \quad F=6 \quad A=12$

$V=5 \quad F=5 \quad A=9$

$V=20 \quad F=12 \quad A=30$

Em cada um desses poliedros, podemos notar que o número de vértices mais o número de faces é igual ao número de arestas mais dois.

Paralelepípedo ou hexaedro	Pentaedro	Dodecaedro
$8 + 6 = 12 + 2$	$5 + 5 = 9 + 2$	$20 + 12 = 30 + 2$
$V + F = A + 2$	$V + F = A + 2$	$V + F = A + 2$
$14 = 14$	$10 = 10$	$32 = 32$

Podemos representar essa relação da seguinte maneira:

$$V + F = A + 2$$

Essa igualdade é conhecida como Relação de Euler e é válida para todo poliedro convexo. No entanto, essa relação é válida também para alguns poliedros não convexos. Veja os exemplos.

$V=16$   
 $F=10$   
 $A=24$   
 $V + F = A + 2 \Rightarrow 16 + 10 = 24 + 2$   
relação verdadeira

$V=18$   
 $F=13$   
 $A=30$   
 $V + F = A + 2 \Rightarrow 18 + 13 = 30 + 2$   
relação falsa

Os poliedros cuja Relação de Euler é válida são chamados poliedros eulerianos. Assim, podemos afirmar que todos os poliedros convexos são eulerianos, mas nem todo poliedro euleriano é convexo.

Figura 2.35: Teorema de Euler para poliedros convexos e um poliedro não convexo

**Poliedros de Platão**

Platão (427 a.C.-347 a.C.) foi um filósofo grego, discípulo de Sócrates, nascido em Atenas. Em 387 a.C., após a morte de seu mestre, fundou em sua cidade natal uma escola que ficou conhecida como "Academia". Na fachada dessa escola, podia-se ler: "Que ninguém que ignore a Geometria entre aqui". Nessa frase, podemos observar que, apesar de Platão não ter dado contribuição significativa aos resultados matemáticos técnicos da época, ele tinha uma grande admiração pela Geometria.

Comumente é dito que Platão passou a ter uma visão matemática por influência de um amigo, Arquitas. Acredita-se também que foi a partir daí que ele soube da existência de cinco poliedros: o tetraedro, o cubo, o octaedro, o icosaedro e o dodecaedro. Nessa época, esses poliedros eram associados aos quatro elementos considerados primordiais: ar, associado ao octaedro; terra, associada ao cubo; fogo, associado ao tetraedro; e água, associada ao icosaedro. O quinto e último poliedro foi o dodecaedro, que Platão considerou o símbolo do universo.

Devido à sua importância, esses poliedros convexos são chamados Poliedros de Platão. Um Poliedro de Platão satisfaz simultaneamente as seguintes condições:

- todas as faces têm o mesmo número de arestas
- de cada vértice parte o mesmo número de arestas
- a Relação de Euler é válida

**Exemplos**

- O poliedro abaixo é de Platão, pois todas as faces têm o mesmo número de arestas (3); de cada vértice parte o mesmo número de arestas (3); a Relação de Euler é válida, ou seja:  $V=4; F=4; A=6$   
 $V + F = A + 2 \Rightarrow 4 + 4 = 6 + 2 \Rightarrow 8 = 8$
- O poliedro abaixo não é de Platão. Apesar das duas das condições serem satisfeitas, ou seja, de ter o mesmo número de arestas partindo de cada vértice e a Relação de Euler ser válida, nem todas as faces têm o mesmo número de arestas. Podemos notar que algumas faces têm 3 arestas, enquanto outras têm 4.

Em relação aos Poliedros de Platão, temos a seguinte propriedade: Existem 5, e somente 5, classes de Poliedros de Platão.

Para demonstrar essa propriedade, considere um Poliedro de Platão em que V, F e A representam o número de vértices, faces e arestas, respectivamente. Considere também que n é o número de arestas de cada face e que p é o número de arestas que partem de cada vértice.

Cada face tem n arestas (n≥3), e cada aresta é comum a 2 faces. Assim:  $A = \frac{n \cdot F}{2} \Rightarrow F = \frac{2 \cdot A}{n}$

Como cada aresta contém 2 vértices, e p (p≥3) corresponde ao número de arestas que partem de cada vértice, temos:  $A = \frac{p \cdot V}{2} \Rightarrow V = \frac{2 \cdot A}{p}$

Figura 2.36: Poliedros de Platão

Substituímos F por  $\frac{2A}{n}$  e V por  $\frac{2A}{p}$  na Relação de Euler. Em seguida, dividimos a equação obtida por 2A:

$$V + F = A + 2 \Rightarrow \frac{2A}{p} + \frac{2A}{n} = A + 2 \Rightarrow \frac{1}{p} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2} + \frac{2}{A}$$

Vamos supor que as faces sejam triangulares. Nesse caso, temos n=3, e assim:  $\frac{1}{p} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2} + \frac{2}{A} \Rightarrow \frac{1}{p} = \frac{1}{6} + \frac{2}{A} \Rightarrow \frac{1}{p} > \frac{1}{6} \Rightarrow p < 6$

Para n=3, temos que p pode ser 3, 4 ou 5.

Agora, vamos supor que as faces sejam quadrangulares. Nesse caso, temos n=4, e assim:  $\frac{1}{p} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} + \frac{2}{A} \Rightarrow \frac{1}{p} = \frac{1}{4} + \frac{2}{A} \Rightarrow \frac{1}{p} > \frac{1}{4} \Rightarrow p < 4$

Para n=4, temos p igual a 3.

Supondo que as faces sejam pentagonais (n=5), temos:  $\frac{1}{p} + \frac{1}{5} = \frac{1}{2} + \frac{2}{A} \Rightarrow \frac{1}{p} = \frac{3}{10} + \frac{2}{A} \Rightarrow \frac{1}{p} > \frac{3}{10} \Rightarrow p < \frac{10}{3} \approx 3,3$

Para n=5, temos p igual a 3.

Se n≥6, obteremos p<3, o que não é possível, pois p deve ser maior ou igual a 3, isto é, p≥3.

Organizando as informações obtidas, temos:

	n	p
Faces triangulares	3	3
Face quadrangular	4	3
Face pentagonal	5	3

Observando essas informações podemos notar que há 5 classes de Poliedros de Platão. Utilizando as relações obtidas anteriormente, determinamos os valores de V, F e A. Organizando esses valores em um quadro, temos as 5 classes de poliedros possíveis.

n	p	V	F	A	Nome do poliedro
3	3	4	4	6	Tetraedro
3	4	6	8	12	Octaedro
3	5	12	20	30	Icosaedro
4	3	8	6	12	Hexaedro
5	3	20	12	30	Dodecaedro

Observe alguns Poliedros de Platão:

Figura 2.37: Poliedros de Platão

### Poliedros regulares

Dizemos que um poliedro convexo é **regular** quando satisfaz as seguintes condições:

- as faces são polígonos regulares e congruentes entre si
- de cada vértice do poliedro parte o mesmo número de arestas

Em relação aos poliedros regulares, temos a seguinte propriedade: Existem 5, e somente 5, poliedros regulares.

Podemos demonstrar essa propriedade da seguinte maneira:

Se um poliedro é regular, suas faces são polígonos regulares e congruentes entre si e, desse modo, todas as faces têm o mesmo número de lados. Além disso, em um poliedro regular, de cada vértice parte o mesmo número de arestas.

Assim, dizemos que todo poliedro regular é de Platão. Logo, existem, no máximo, 5 poliedros regulares.

Veja a seguir os 5 poliedros regulares e suas respectivas planificações:

« Tetraedro regular: 4 faces triangulares equiláteras e 3 arestas que partem de cada vértice.

« Hexaedro regular ou cubo: 6 faces quadradas e 3 arestas que partem de cada vértice.

« Octaedro regular: 8 faces triangulares equiláteras e 4 arestas que partem de cada vértice.

« Dodecaedro regular: 12 faces pentagonais regulares e 3 arestas que partem de cada vértice.

« Icosaedro regular: 20 faces triangulares equiláteras e 5 arestas que partem de cada vértice.

Portanto, existem 5, e somente 5, poliedros regulares.

76

### ATIVIDADES RESOLVIDAS

R1. (UPPEL-RS) No país do México, há mais de mil anos, o povo Asteca resolveu o problema da armazenagem da pós-colheita de grãos com um tipo de silo em forma de uma bola colocado sobre uma base circular de alvenaria. A forma desse silo é obtida juntando 20 placas hexagonais e mais 12 placas pentagonais.

Com base no texto, é correto afirmar que esse silo tem:

a) 90 arestas e 60 vértices    d) 86 arestas e 60 vértices  
 b) 86 arestas e 56 vértices    e) 110 arestas e 60 vértices  
 c) 90 arestas e 56 vértices

**Resolução**

• Número de faces  
 $F = 20 + 12 = 32$

• Número de arestas  
 20 faces hexagonais:  $20 \cdot 6 = 120$   
 12 faces pentagonais:  $12 \cdot 5 = 60$

Como cada aresta é comum a duas faces, o número de arestas do silo é:

$$A = \frac{120 + 60}{2} = \frac{180}{2} = 90$$

• Número de vértices

Substituindo o número de faces e o de arestas na Relação de Euler, obtemos o número de vértices do silo.

$$V + F = A + 2 \quad V + 32 = 90 + 2 \quad V = 60$$

Portanto, o silo tem 90 arestas e 60 vértices, ou seja, a alternativa correta é a.

R2. Classifique em verdadeira ou falsa cada afirmação, justificando cada caso.

a) O cubo é um Poliedro de Platão.  
 b) As faces de um icosaedro regular são triângulos equiláteros.  
 c) A Relação de Euler é válida somente para poliedros convexos.  
 d) Se as faces de um poliedro convexo são polígonos regulares congruentes entre si, então o poliedro é regular.

**Resolução**

a) Verdadeira, pois o cubo é um hexaedro regular e, portanto, um Poliedro de Platão.

b) Verdadeira, pois o icosaedro regular tem como faces 20 triângulos regulares.

c) Falsa, pois a Relação de Euler é válida também para alguns poliedros não convexos, como o apresentado a seguir.

d) Falsa, pois também é necessário que, de cada vértice do poliedro parta o mesmo número de arestas.

77

Figura 2.38: Poliedros Regulares

Figura 2.39: Exemplos

### ATIVIDADES

16. Observe nas figuras abaixo o hexaedro regular e sua planificação.

Para cada item, esboce a planificação correspondente ao poliedro, nomeando adequadamente os vértices.

a)    b)

17. Sabendo-se que determinado poliedro regular possui 12 vértices e que suas faces têm forma triangular, responda:

a) Quantas arestas e faces tem esse poliedro?  
 b) Qual é o nome desse poliedro?  
 c) Esse poliedro é de Platão? Justifique.

18. **DESAFIO**

Considere dois poliedros convexos, A e B, em que A tem 8 vértices a mais que B e ambos têm o mesmo número de arestas. Sabendo que o poliedro A é formado apenas por faces pentagonais e que B é formado apenas por faces triangulares, determine o número de faces, vértices e arestas de cada um desses poliedros.

19. Certo poliedro convexo é formado apenas por faces pentagonais e hexagonais, todas regulares. Sabendo que esse poliedro possui 90 arestas e que a soma dos ângulos internos de suas faces é igual a  $20880^\circ$ , calcule a quantidade de faces pentagonais e hexagonais desse poliedro.

78

Figura 2.40: Atividades

### 3 Característica de Euler-Poincaré para poliedros $n$ -tóricos

Nesse capítulo, vamos considerar poliedros com buracos no formato como vemos nas Figuras 3.3, 3.4, 3.5. Percebemos que o Teorema de Euler não satisfaz poliedros com buracos. De fato, no poliedro com um buraco, temos  $V - A + F = 0$ , e no poliedro com dois buracos  $V - A + F = -2$ , etc.

Foi graças a Poincaré, em 1893, a solução definitiva para o Teorema de Euler. Ele foi o primeiro matemático a compreender que o Teorema de Euler é um teorema de Topologia, e não de Geometria.

Poincaré mostrou que dado um poliedro  $P$  o número  $X(P) = V - A + F$ , chamado de Característica de Euler-Poincaré, é um invariante topológico, isto é, ele mostrou que poliedros homeomorfos possuem mesma Característica de Euler-Poincaré, ou seja, se imaginarmos cada poliedro feito de borracha e os inflarmos, injetando ar, os poliedros que não possuem furos, ou seja,  $n = 0$  serão transformados em esferas, são todos os casos em que seu invariante topológico é  $X(P) = V - A + F = 2$ . Já os poliedros que tem um buraco  $n = 1$  serão transformados em um toro (câmara de pneu cheia de ar) e seu invariante topológico é  $X(P) = V - A + F = 0$  e assim por diante.

**Exemplo 3.1.** O poliedro da Figura 3.1 pode ser homeomorfo a esfera.



Figura 3.1: Poliedro homeomorfo a esfera

**Exemplo 3.2.** O poliedro da Figura 3.2 pode ser homeomorfo a um toro.



Figura 3.2: Poliedro homeomorfo a um toro

**Definição 3.1.** Duas figuras  $\mathbb{P}$  e  $\mathbb{Q}$  são homeomorfas quando existe uma transformação contínua  $f : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{Q}$  cuja inversa  $f^{-1} : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{P}$  também é contínua. (Neste caso,  $f$  chama-se um homeomorfismo de  $\mathbb{P}$  em  $\mathbb{Q}$ )

Definimos como homeomorfismo toda aplicação bijetora, contínua e com inversa contínua.

**Definição 3.2** (Poliedros  $n$ -tóricos). Chamamos de poliedros  $n$ -tóricos os poliedros com  $n$  buracos, conforme o exemplo a seguir.

Neste capítulo vamos demonstrar, por indução a Característica de Euler-Poincaré para poliedros  $n$ -tóricos.

**Exemplo 3.3.** Poliedro com um buraco chamamos 1-tórico, dois buracos chamamos 2-tórico, três buracos chamamos 3-tórico, ...,  $n$  buracos chamamos  $n$ -tórico. Veja Figuras 3.3, 3.4 e 3.5.

Inicialmente, consideremos o poliedro da Figura 3.3 com  $n = 1$ , o 1-tórico.

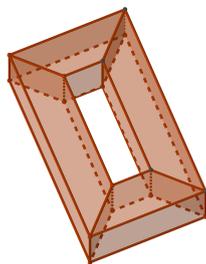


Figura 3.3: 1-tórico.

Notemos que sua Característica de Euler-Poincaré será:

$$X(P) = V - A + F = 16 - 32 + 16 = 0.$$

Agora consideremos o poliedro da Figura 3.4,

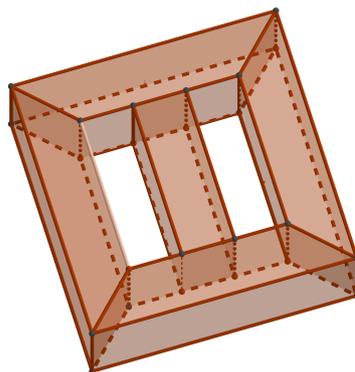


Figura 3.4: 2-tórico

Sua Característica de Euler-Poincaré será:

$$X(P) = V - A + F = 24 - 48 + 22 = -2.$$

Para 3-tórico, temos

$$X(P) = V - A + F = 32 - 64 + 28 = -4.$$

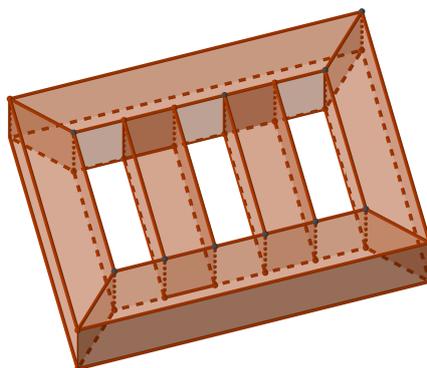


Figura 3.5: 3-tórico

O que podemos observar calculando a Característica de Euler-Poincaré dos poliedros das Figuras 3.3, 3.4 e 3.5, é que temos uma progressão aritmética, a saber  $(0, -2, -4, \dots)$ , de razão  $r = -2$ , onde o primeiro é  $a_1 = 0$ . Vamos calcular o termo geral  $a_n$ . Lembrando que:

$$a_n = a_1 + (n - 1).r = 0 + (n - 1).(-2) = 2 - 2n \quad n \in \mathbb{N}.$$

Vamos agora formalizar esse resultado.

**Teorema 3.1.** *Seja  $P$  um poliedro  $n$ -tórico com  $V$  vértices,  $A$  arestas e  $F$  faces. Então, a Característica de Euler-Poincaré de  $P$  é dada por*

$$X(P) = V - A + F = 2 - 2n,$$

onde  $n \in \mathbb{N}$  e  $n \geq 1$ .

*Demonstração.* Vamos demonstrar, por indução, que a Característica de Euler-Poincaré para poliedros  $n$ -tóricos satisfaz

$$X(P) = V - A + F = 2 - 2n, \quad (3.1)$$

com  $n \geq 1$ .

Para o 1-tórico, conforme Figura 3.3, temos

$$X(P) = V - A + F = 16 - 32 + 16 = 0.$$

Suponhamos a fórmula (3.1) válida para u  $n$ -tórico.

Daí,

$$X(P) = V_n - A_n + F_n = 2 - 2n.$$

Provaremos que a fórmula (3.1) vale para poliedros com  $n + 1$  buracos. Para concluirmos a prova, vamos considerar as figuras abaixo. Primeiramente, vamos unir os poliedros das Figuras 3.3 e 3.4. Notemos que para o poliedro da Figura 3.4, vale  $X(P) = V_n - A_n + F_n = 2 - 2n$ . Ao acrescentarmos o poliedro da Figura 3.3, devemos lembrar que vale para este poliedro a relação  $X(P) = V - A + F = 16 - 32 + 16 = 0$ .

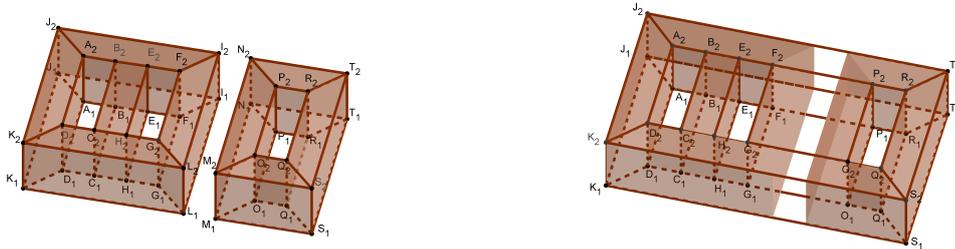


Figura 3.6:  $(n + 1)$ -tórico

Ao “colarmos” os dois poliedros das Figuras 3.4 e 3.3, a saber o  $n$ -tórico e o 1-tórico, alguns vértices, faces e arestas, se tornaram apenas um. Faremos a demonstração detalhadamente.

Com relação aos vértices  $V_n$  temos que, ao juntarmos o poliedro da Figura 3.4 com o da Figura 3.3 aumentarão 16 vértices no poliedro da Figura 3.4 porém 4 vértices de cada figura, se tornaram apenas um, a saber,  $(I_1, I_2, L_1, L_2)$  e  $(M_1, M_2, N_1, N_2)$ . Desta forma, o número de vértices obtidos é dado por  $V_n + 16 - 8$ .

Com relação às arestas, teremos que as  $A_n$  arestas do poliedro da Figura 3.4 serão somadas as 32 arestas da Figura 3.3, porém muitas arestas se uniram, a saber,

$$\begin{aligned}
& (I_1I_2, L_1L_2, I_1L_1, I_2L_2), \\
& (M_1M_2, N_1N_2, M_1N_1, M_2N_2), \\
& (F_1I_1, F_2I_2, G_1L_1, G_2L_2), \\
& (M_1O_1, M_2O_2, N_1P_1, N_2P_2), \\
& (I_1J_1, I_2J_2, K_1L_1, K_2L_2), \\
& (M_1S_1, M_2S_2, N_1T_1, N_2T_2).
\end{aligned}$$

Ainda novas arestas se formarão:

$$(K_1S_1, K_2S_2, J_1T_1, J_2T_2), (F_1P_1, F_2P_2, G_1O_1, G_2O_2).$$

Daí, obtemos o seguinte número de arestas

$$A_n + 32 - 24 + 8.$$

Com relação as faces temos que as  $F_n$  faces do poliedro da Figura 3.4 serão somadas as 16 faces do poliedro da Figura 3.3, porém algumas faces se uniram, a saber,

$$\begin{aligned}
& (I_1I_2L_1L_2, M_1M_2N_1N_2), \\
& (F_1G_1I_1L_1, F_2G_2I_2L_2, M_1N_1O_1P_1, M_2N_2O_2P_2), \\
& (D_1G_1K_1L_1, D_2G_2K_2L_2, A_1F_1I_1J_1, A_2F_2I_2J_2, M_1O_1Q_1S_1, M_2O_2Q_2S_2, N_1P_1R_1T_1, N_2P_2R_2T_2)
\end{aligned}$$

e

$$(K_1K_2L_1L_2, M_1M_2S_1S_2, I_1I_2J_1J_2, N_1N_2T_1T_2)$$

dando origem às faces

$$\begin{aligned}
& (F_1G_1O_1P_1, F_2G_2O_2P_2), \\
& (D_1K_1Q_1S_1, D_2K_2Q_2S_2, A_1J_1R_1T_1, A_2J_2R_2T_2)
\end{aligned}$$

e

$$(J_1J_2T_1T_2, K_1K_2S_1S_2).$$

Logo, obtemos o seguinte número de faces do  $(n + 1)$ -tórico, como mostra a Figura 3.7,

$$F_n + 16 - 18 + 8.$$

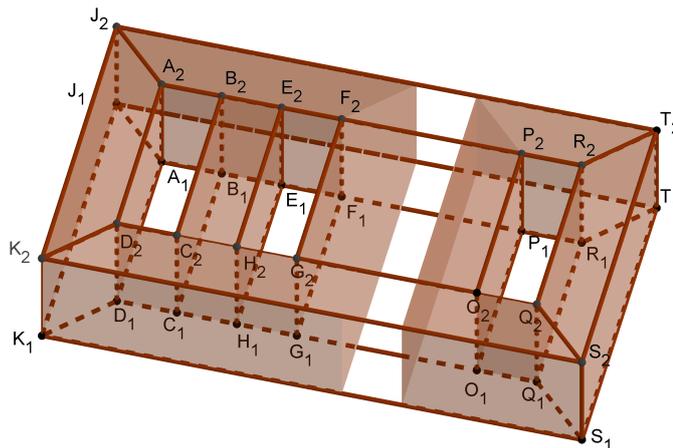


Figura 3.7:  $(n + 1)$ -tórico

Agora vamos checar o Teorema de Euler-Poincaré, para o  $(n + 1)$ -tórico.

$$V_{n+1} - A_{n+1} + F_{n+1} = V_n + 16 - 8 - (A_n + 32 - 24 + 8) + F_n + 16 - 18 + 8 = V_n + 8 - A_n - 16 + F_n + 6.$$

Logo,

$$V_{n+1} - A_{n+1} + F_{n+1} = V_n - A_n + F_n - 2 = 2 - 2n - 2 = 2 - 2(n + 1).$$

Portanto, a fórmula é válida para poliedros com  $n + 1$  buracos, conseqüentemente,

$$X(P) = V - A + F = 2 - 2n,$$

é válida para  $n \in \mathbb{N}$  e  $n \geq 1$ .

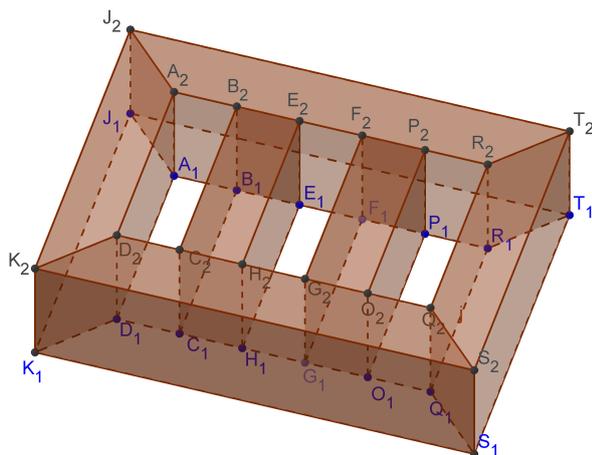


Figura 3.8: 3-tórico

□

## 3.1 Apêndice

### 3.1.1 Construção de um poliedro $n$ -tórico com o GeoGebra 5.0.

A seguir, apresentamos passo a passo a construção de um 2-tórico com ajuda do software GeoGebra versão 5.0. Para a construção de qualquer outro  $n$ -tórico, basta aplicar os passos abaixo de forma a obter os  $n$  buracos do poliedro.

Ao abrir o GeoGebra temos a visão da janela 2D, mesmo querendo construir uma figura tridimensional começaremos por ela.

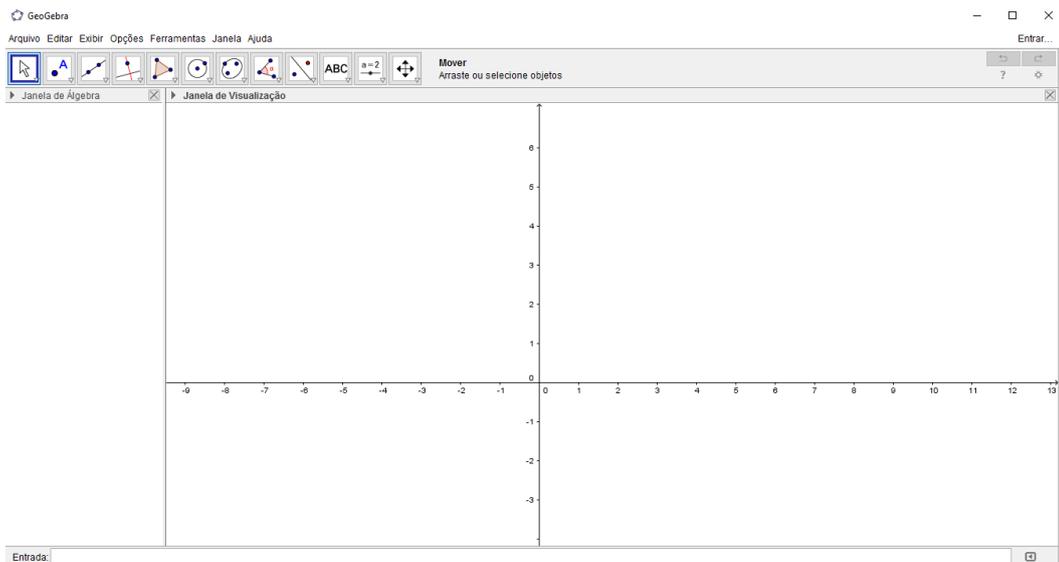


Figura 3.9: Janela 2D

Em seguida clicando com o botão direito do mouse sobre os eixos aparecerá a "Janela de Visualização":

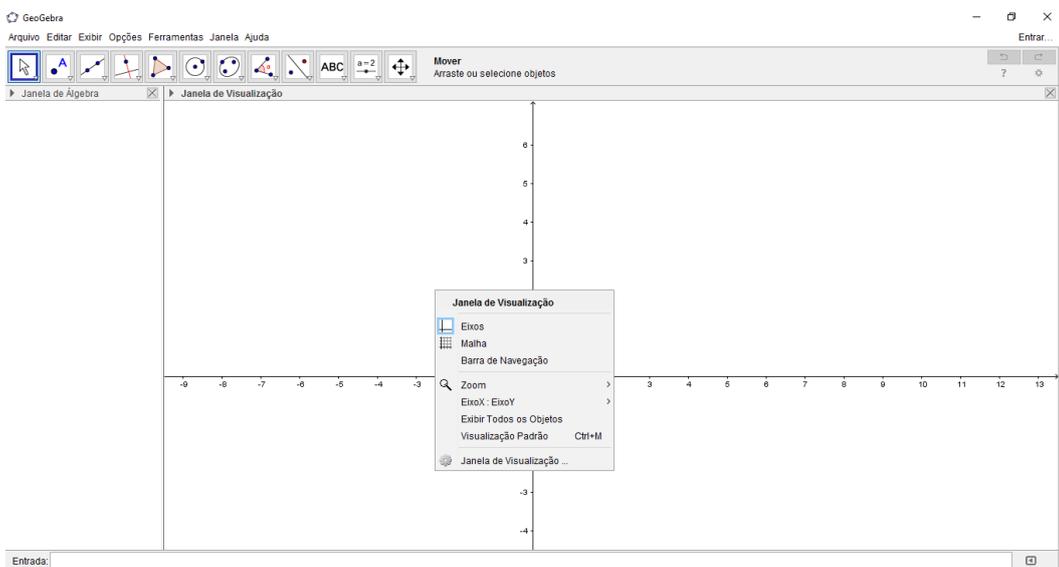


Figura 3.10: Opções da janela de visualização

Vamos selecionar "Malha", para podermos marcar os pontos, a tela ficará como na Figura 3.11.

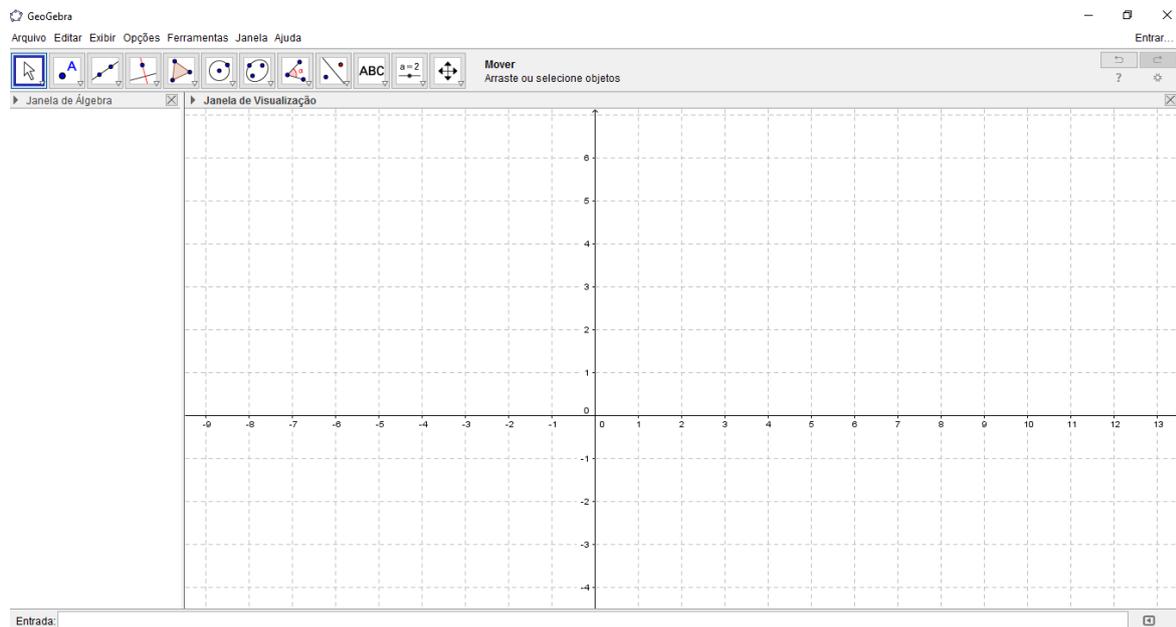


Figura 3.11: Malha

Agora vamos selecionar os pontos que queremos, para isso vamos clicar na ferramenta "Ponto".

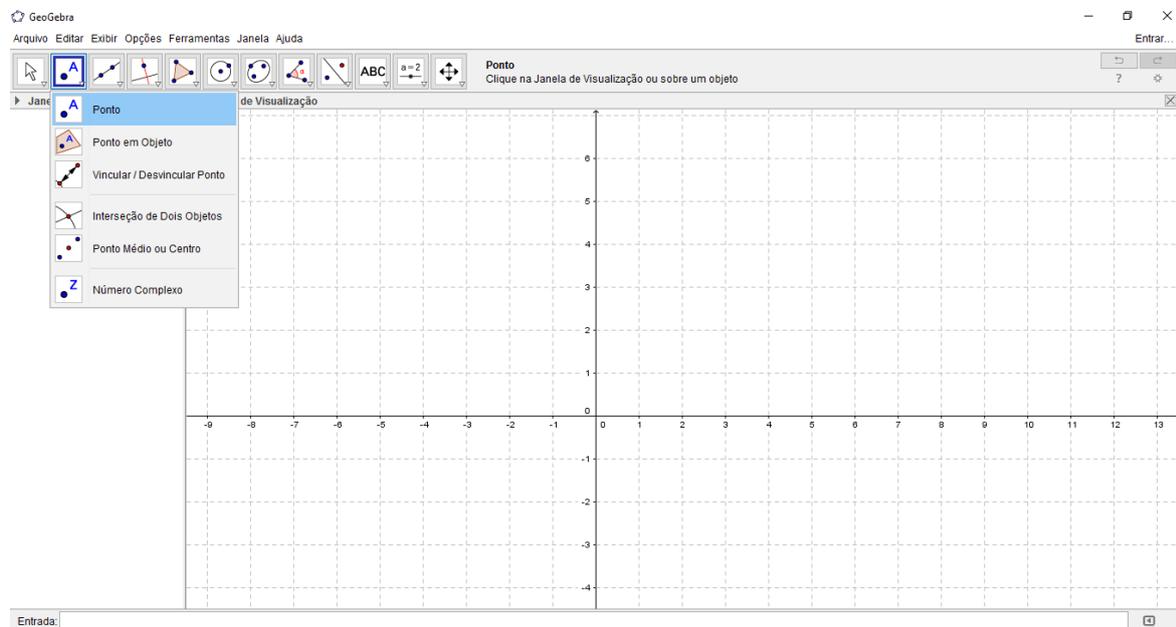


Figura 3.12: Ferramenta ponto

Vamos marcar os pontos que queremos. Imagine e marque os pontos da base do 2-tórico, observemos que cada ponto marcado tem suas coordenadas na janela de álgebra à esquerda.

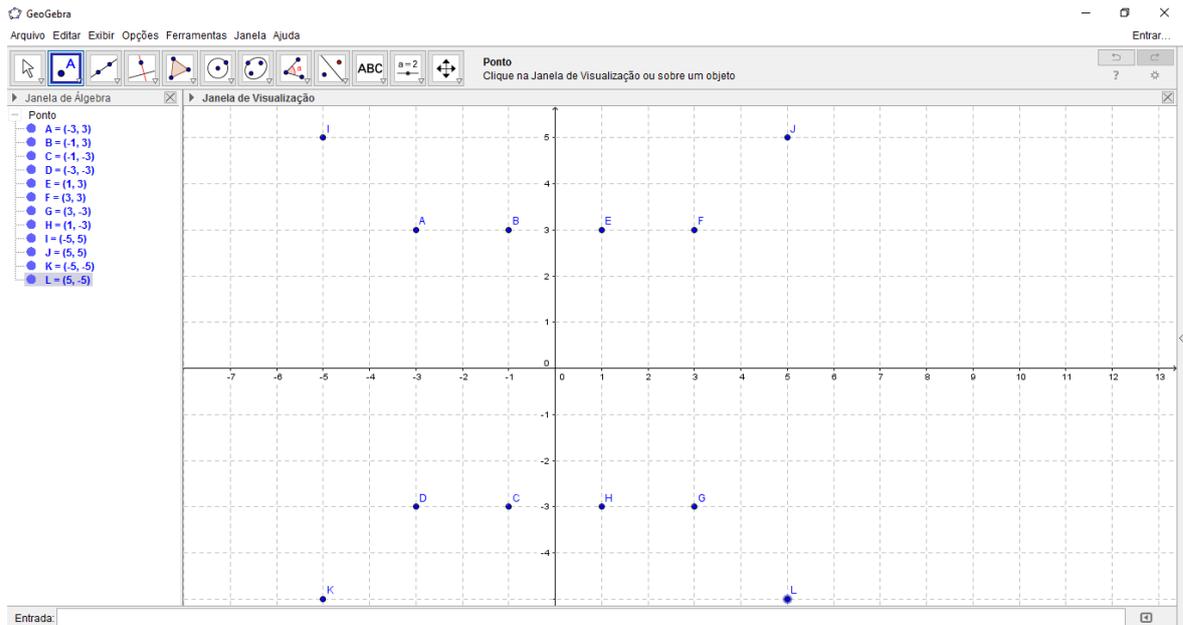


Figura 3.13: Pontos marcados

Para construirmos a base do nosso 2-tórico vamos selecionar a ferramenta "Polígono".

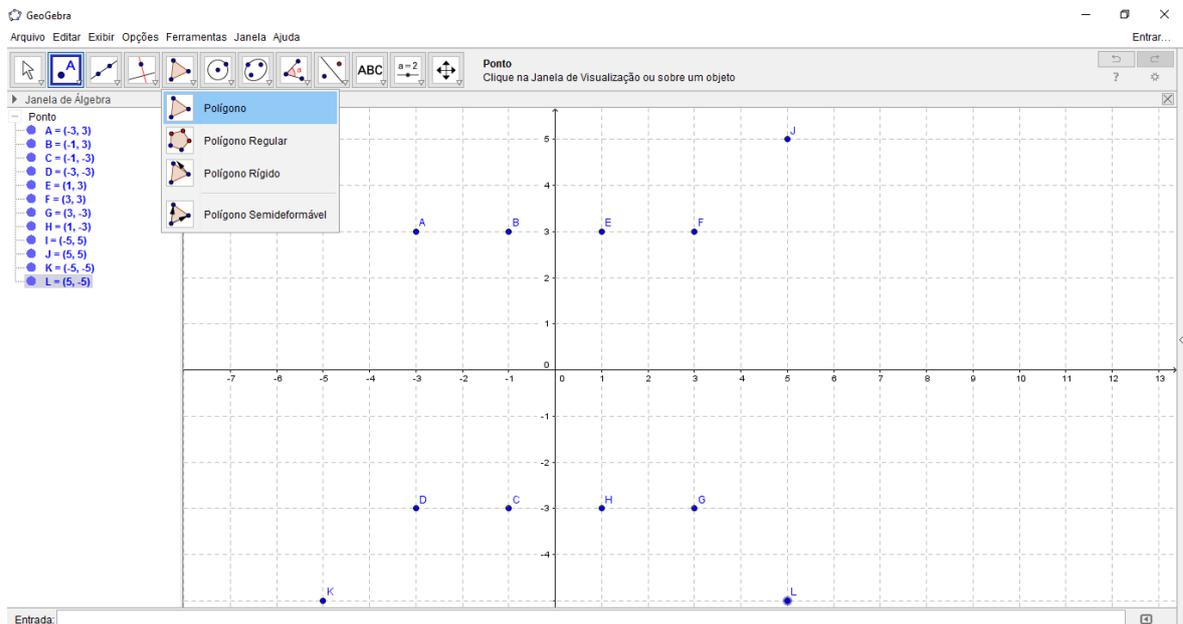


Figura 3.14: Ferramenta polígono

Posteriormente, vamos clicando nos pontos e formando os polígonos, lembrando que todo polígono deve ser fechado, por isso o primeiro ponto do polígono a ser clicado também deverá ser o último. Mais um detalhe importante, como queremos buracos no centro, temos que ir construindo polígonos em volta dos buracos de forma que eles sejam formados naturalmente.

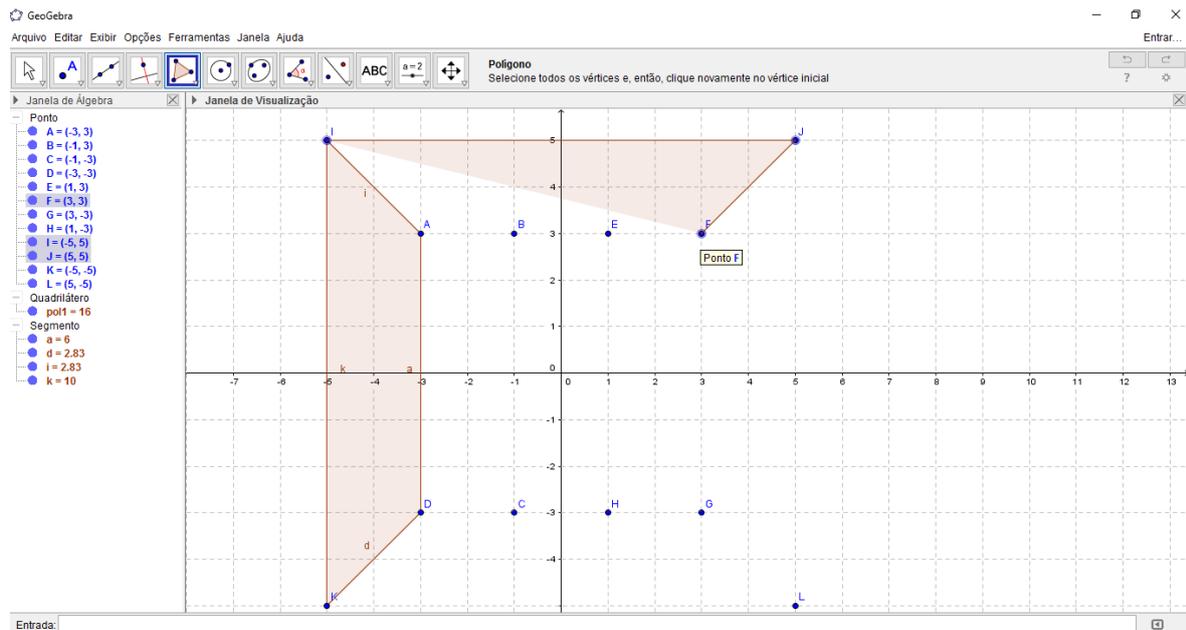


Figura 3.15: Construindo polígonos

Com a junção dos quatro trapézios e do retângulo temos a base do nosso 2-tórico.

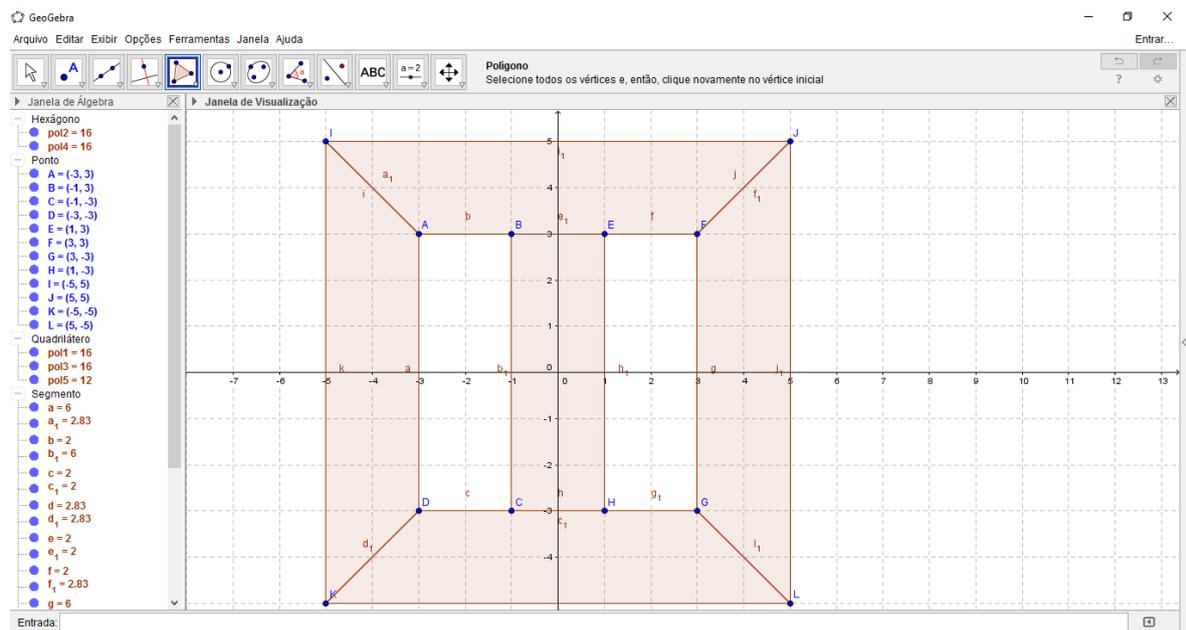


Figura 3.16: Base do 2-tórico

Começaremos a construção da figura tridimensional, para isso vamos clicar em “Exibir”, “Janela de Visualização 3D”.

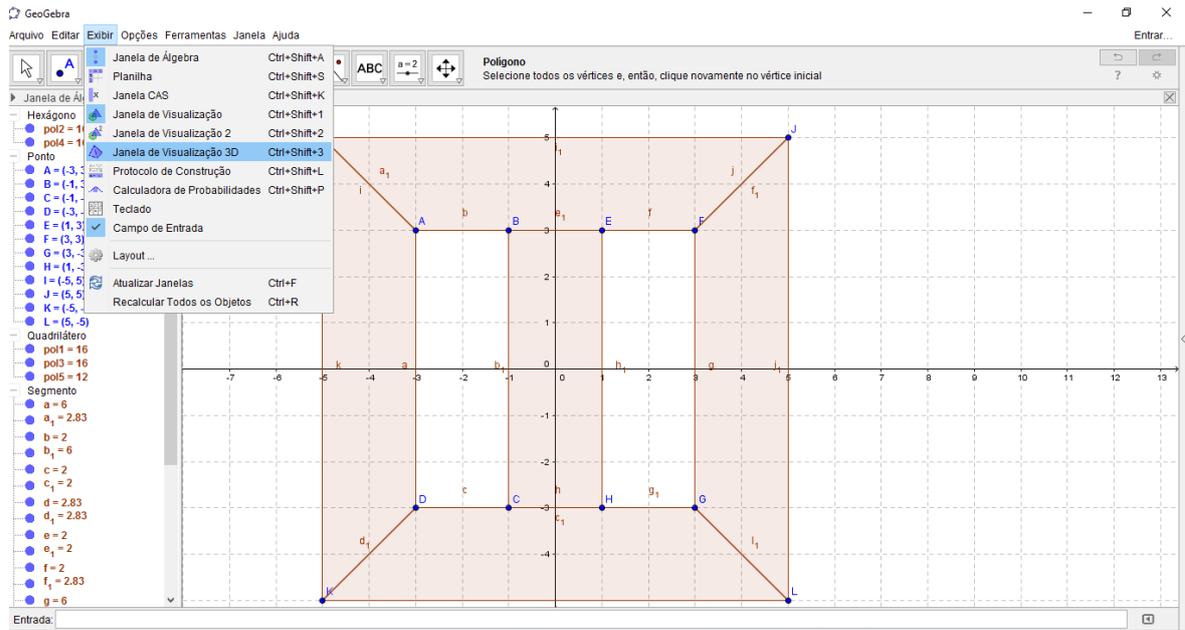


Figura 3.17: Janela de visualização 3D

Aparecerá duas janelas uma bidimensional e outra tridimensional do lado direito.

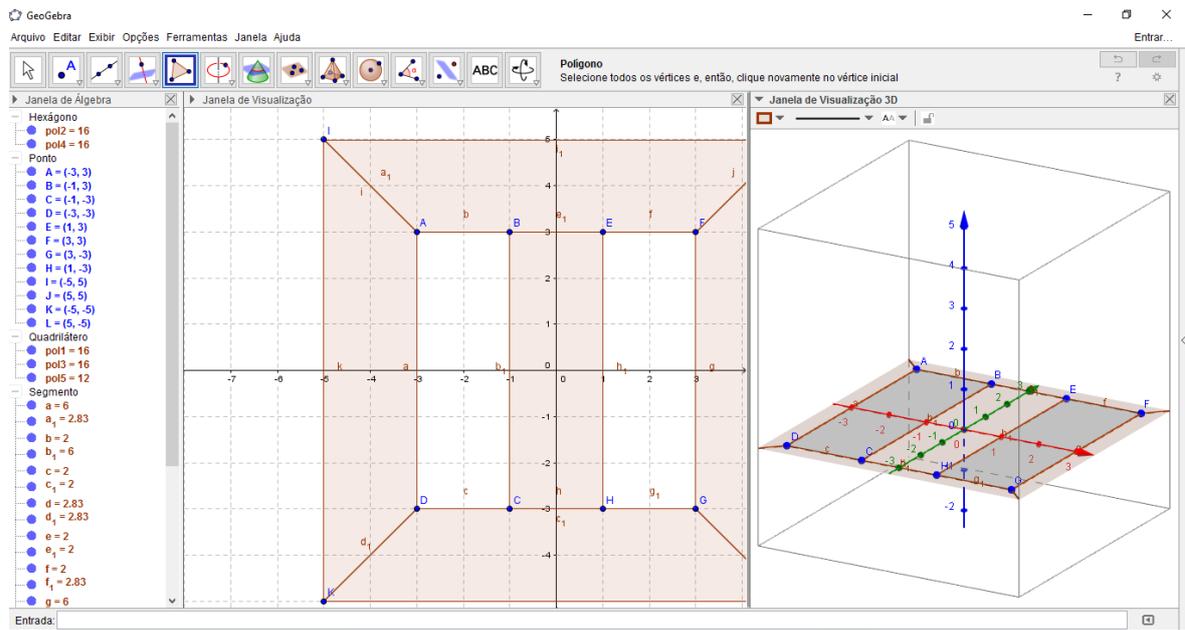


Figura 3.18: Janelas 2D e 3D

Poderemos agora fechar a janela 2D pois trabalharemos de agora em diante apenas com a janela 3D.

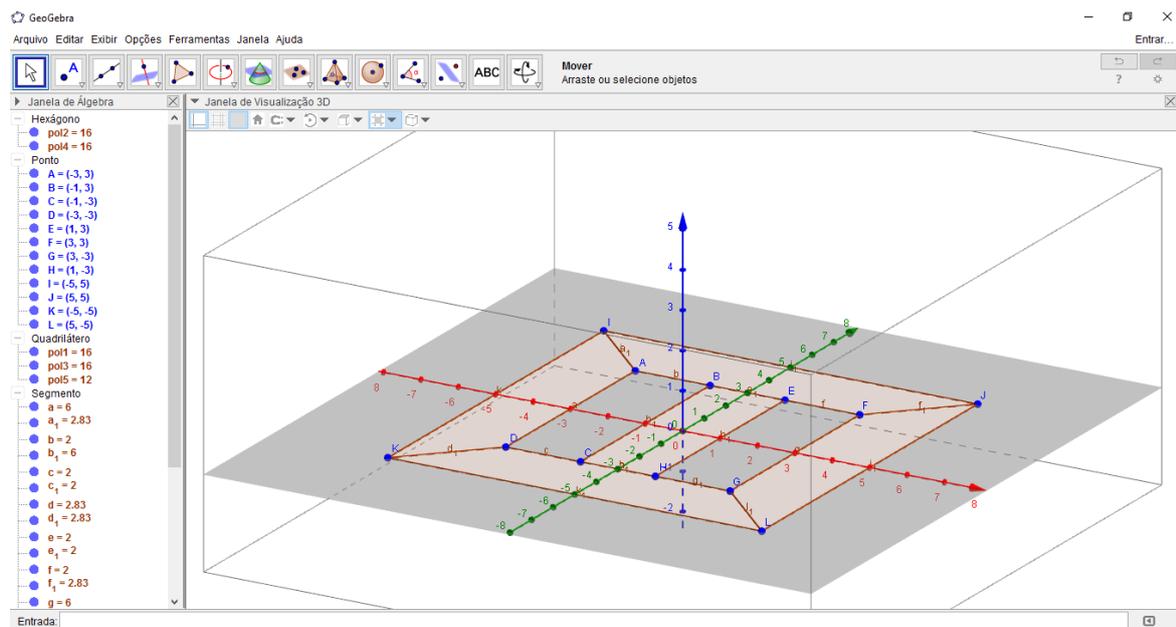


Figura 3.19: Janela 3D

Para fazermos esse plano transformar-se no 2-tórico que queremos, selecionaremos “Extrusão para Prisma ou Cilindro”.

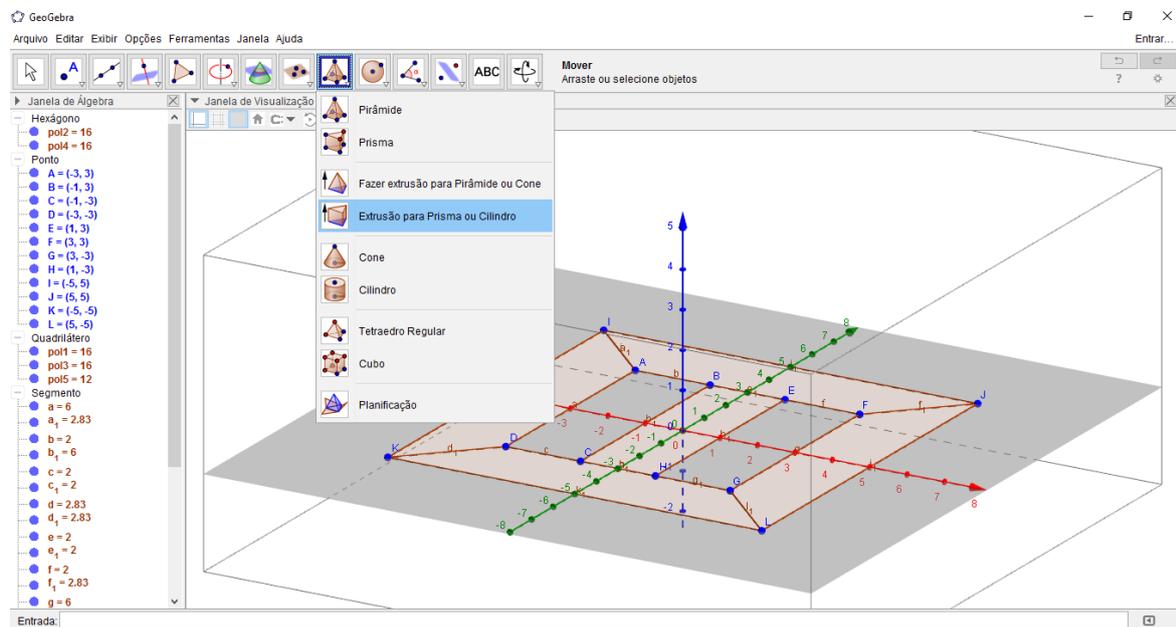


Figura 3.20: Extrusão

Clicando e arrastando para cima cada um dos polígonos construídos, formaremos poliedros.

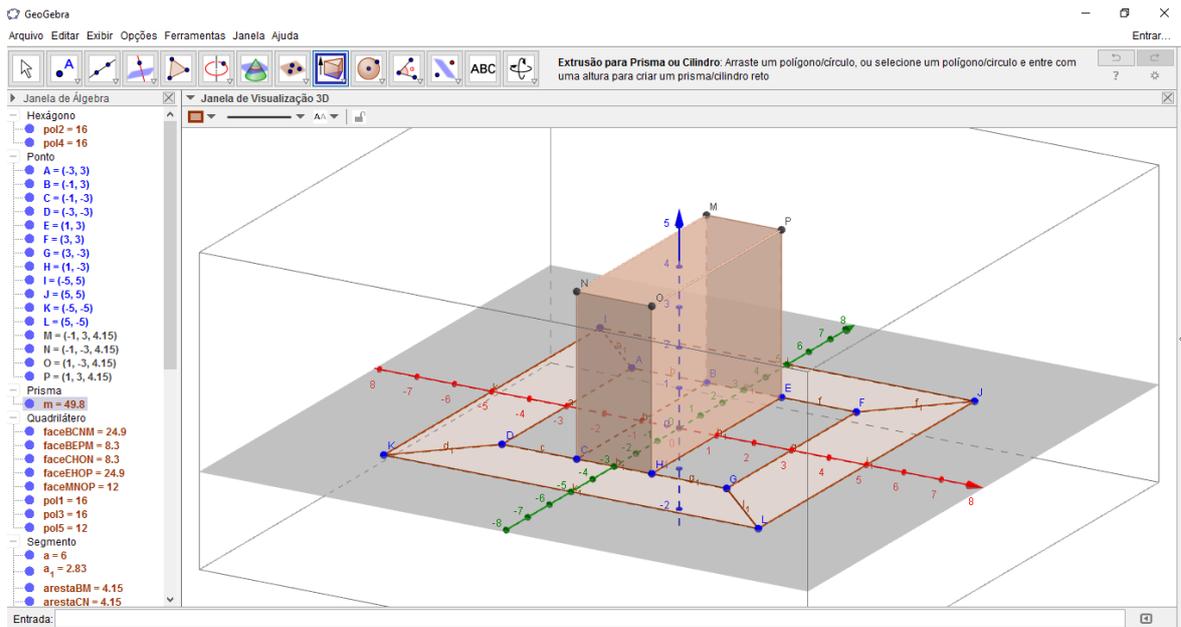


Figura 3.21: Construindo poliedros

Para facilitar nossa construção, com a ferramenta "Girar Janela de Visualização 3D", podemos girar nossa figura como quisermos possibilitando uma melhor visualização.

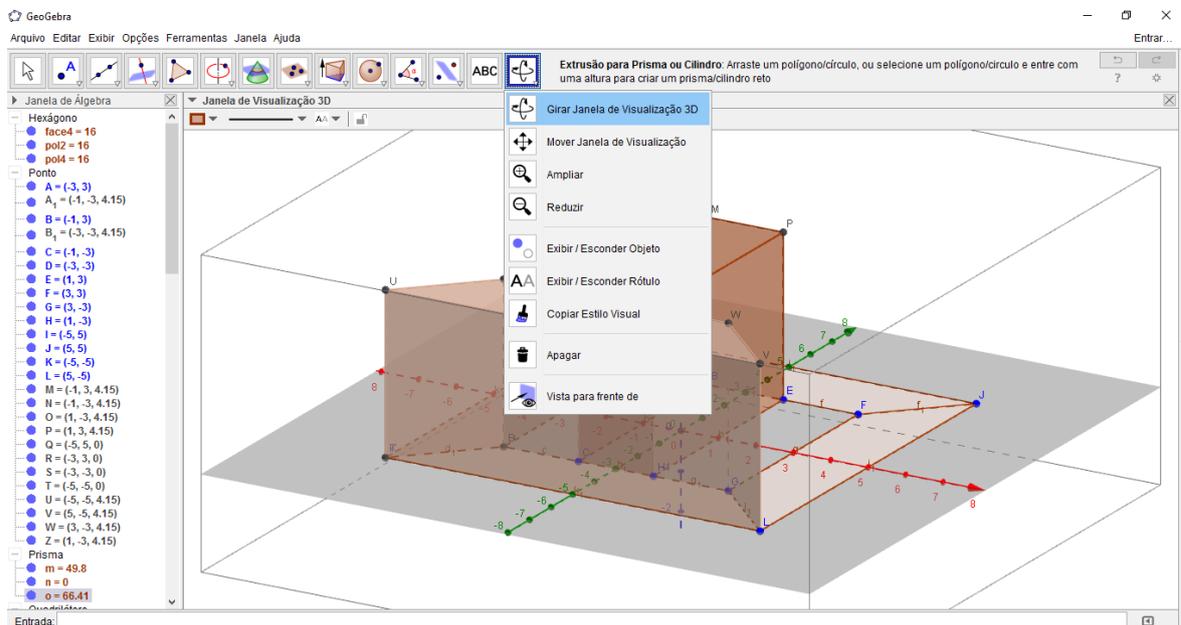


Figura 3.22: Ferramenta de giro

Com a junção dos cinco poliedros formados teremos o nosso 2-tórico. Observe que, novamente os furos surgiram naturalmente.

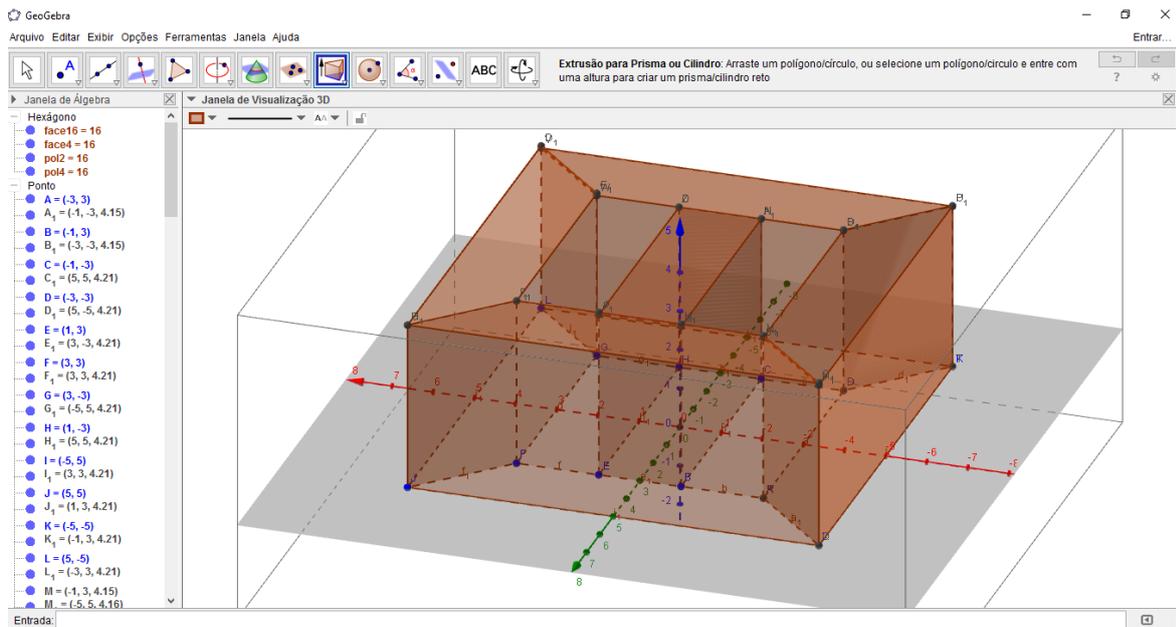


Figura 3.23: 2-tórico

Observemos que na Figura 3.23 formada temos pontos sobrepostos representados por letras maiúsculas, letras minúsculas representado as arestas, temos os eixos, um plano cinza em baixo e as arestas de um grande paralelepípedo envolvendo todo o 2-tórico, vamos fazer uma "limpeza" para que o 2-tórico se sobressaia.

Começaremos tirando o grande paralelepípedo que envolve o 2-tórico, clicando com o botão direito do mouse ao lado do 2-tórico aparecerá a "Janela de Visualização 3D", clique em "Janela de Visualização" e desabilite a opção "Habilitar Clipping" o paralelepípedo desaparecerá.

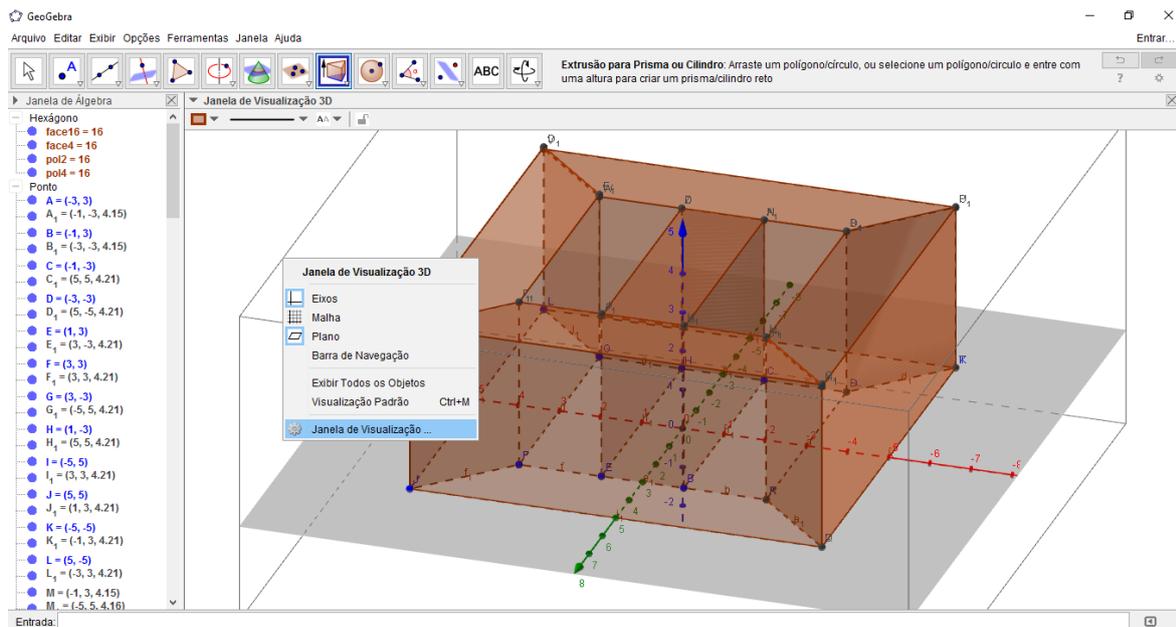


Figura 3.24: Tirando o paralelepípedo que envolve o 2-tórico

Para eliminarmos os eixos e o plano cinza que está em baixo do 2-tórico, temos que novamente clicar com o botão direito do mouse ao lado do 2-tórico e selecionar eixos, eles desaparecerão e depois com o mesmo procedimento selecionar plano e ele desaparecerá.

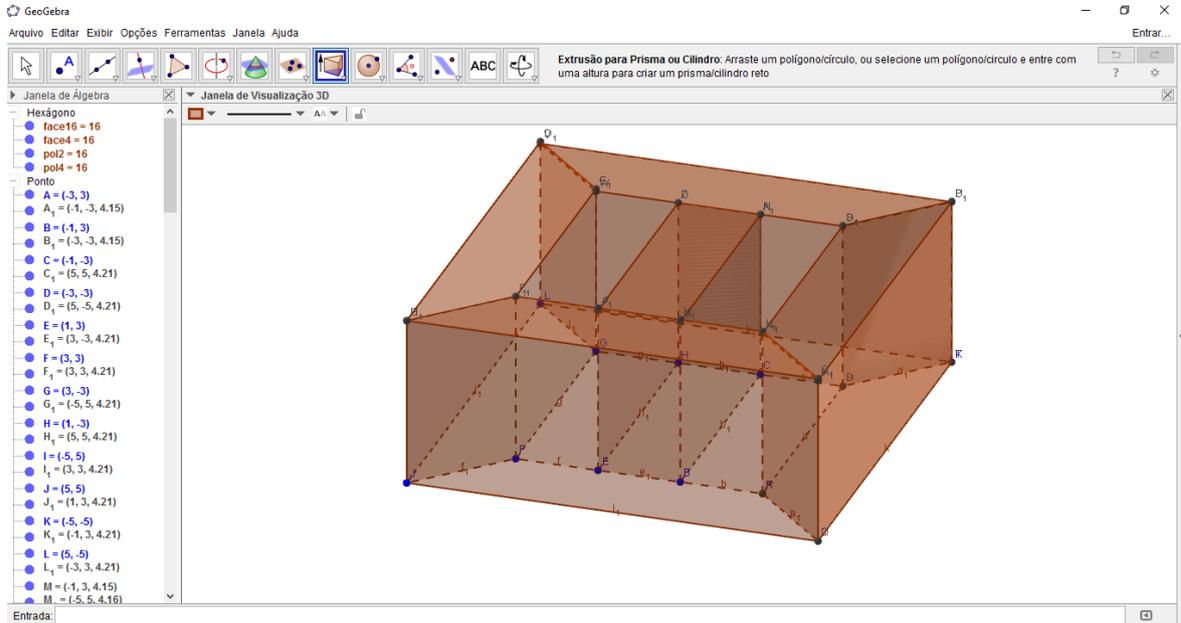


Figura 3.25: Tirando eixos e plano cinza

Se desejarmos eliminar a nomenclatura das arestas, basta clicar com o botão direito do mouse em cima da letra que representa determinada aresta, clicar em "Exibir Rótulo". Vale o mesmo procedimento para eliminar os pontos do poliedro.

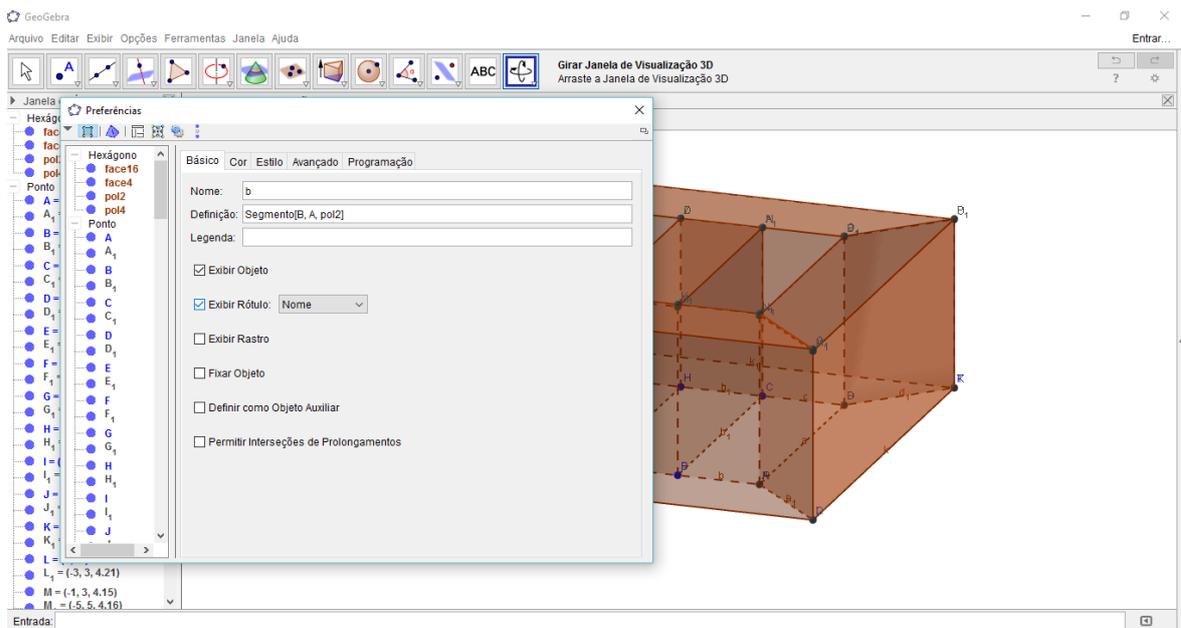


Figura 3.26: Retirar nomenclatura de arestas ou pontos

Finalizando, para mudar a nomenclatura de alguma aresta ou de algum ponto, basta clicar com o botão direito do mouse sobre o objeto desejado e clicar em “Renomear” e dar o nome desejado.

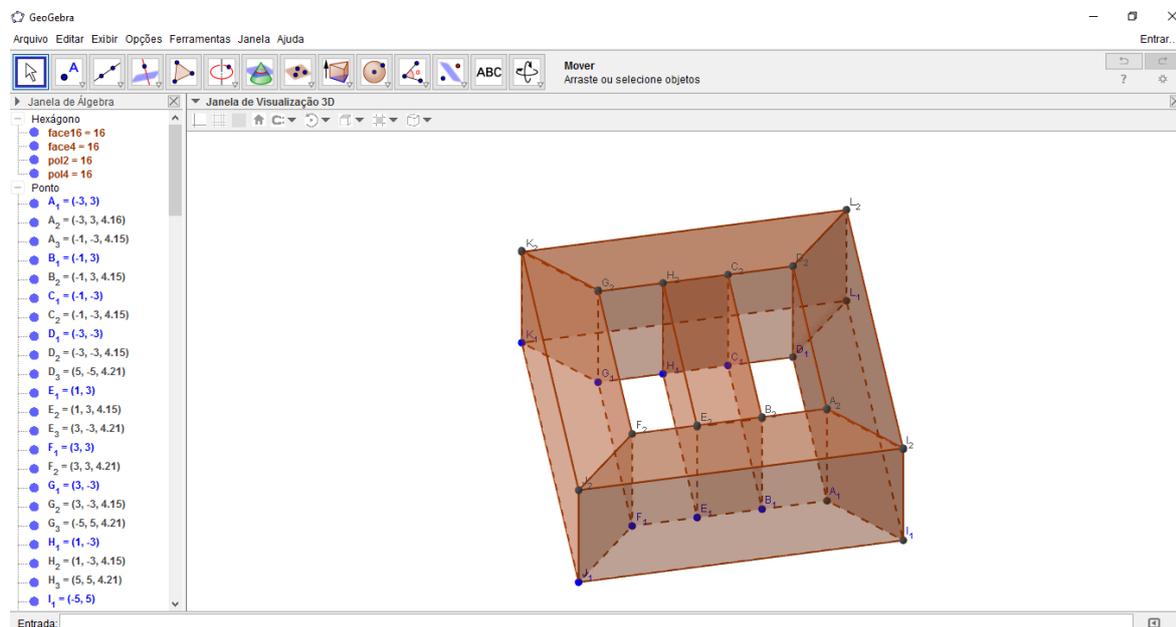


Figura 3.27: Renomear arestas ou pontos

### 3.1.2 Planificações

Ao planificarmos com o GeoGebra 5.0 poliedros homeomorfos a uma esfera sejam eles convexos ou não, conseguimos moldes que permitiria, se quiséssemos construí-los com um único pedaço de cartolina, isso ocorre devido ao fato do poliedro não ter buracos, veja os casos do Cubo e do Dodecaedro abaixo:

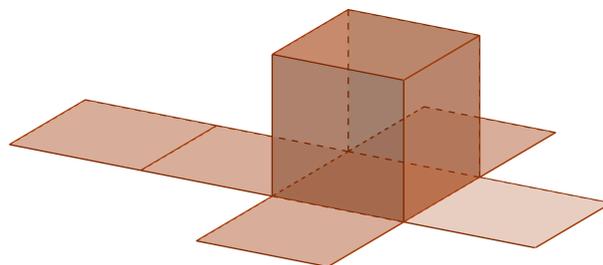


Figura 3.28: Cubo sendo planificado

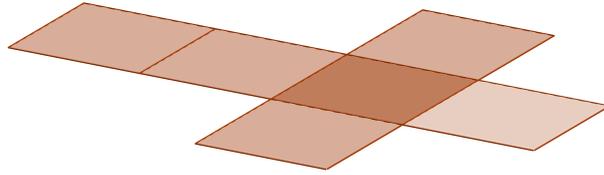


Figura 3.29: Cubo planificado

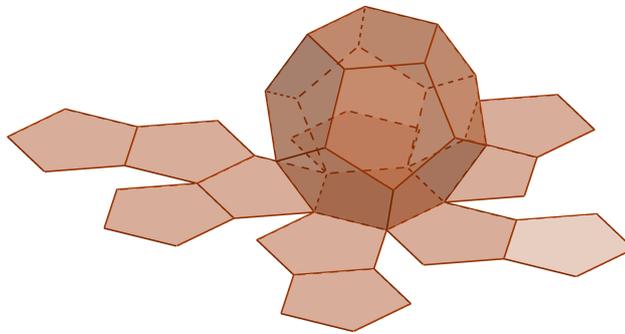


Figura 3.30: Dodecaedro sendo planificado

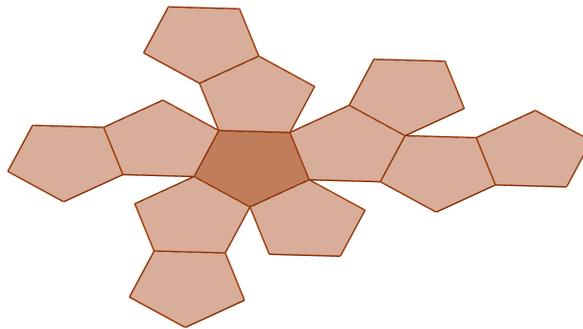


Figura 3.31: Dodecaedro planificado

Ao planificarmos um poliedro homeomorfo ao toro, teremos planificações sobrepostas como podemos observar nas cores verde e azul e marron na Figura 3.33, o que significa que não conseguiríamos construir esse poliedro com um único pedaço de cartolina, esse fato se deve ao buraco existente nesse poliedro e teríamos planificações sobrepostas também no 2-tórico, 3-tórico e assim por diante.

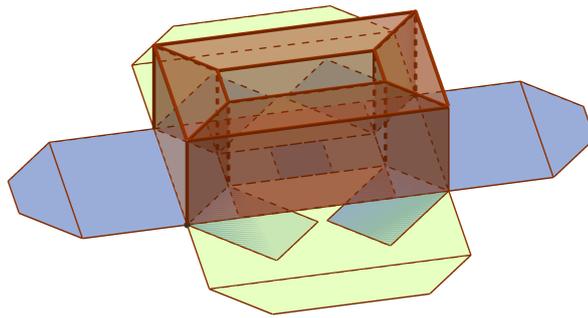


Figura 3.32: 1-tórico sendo planificado

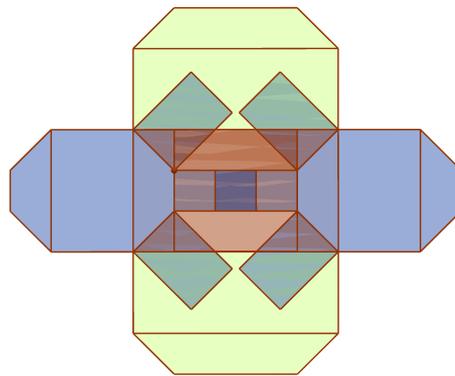


Figura 3.33: 1-tórico planificado

## 4 Considerações finais

Neste trabalho demonstramos o Teorema de Euler para poliedros convexos e mostramos que esse teorema também é válido para alguns poliedros não convexos, e exibimos as condições necessárias para que isso aconteça. De forma detalhada, apresentamos a demonstração e sua generalização que ficou conhecida como Característica de Euler-Poincaré.

Esperamos que esse trabalho possa ser usado como material de apoio para professores do ensino médio e que possa contribuir para esclarecer possíveis dúvidas a respeito do Teorema de Euler.

# Referências Bibliográficas

- [1] Boyer, C. B., *História da Matemática*. São Paulo. Edgar Blucher LTDA. 2013.
- [2] Dolce, O., Pompeo, J. N., *Fundamentos de Matemática Elementar - Volume 9*, 7ª edição. São Paulo. Editora ATUAL. 1995.
- [3] Dolce, O., Pompeo, J. N., *Fundamentos de Matemática Elementar - Volume 10*, 4ª edição. São Paulo. Editora ATUAL. 1985.
- [4] Eves, H., *Introdução à História da Matemática*. Trad. Hygino H. Domingues. Campinas. Editora UNICAMP. 2004.
- [5] Lima, E. L., *Curso de Análise-Volume 1*. Rio de Janeiro. IMPA. Projeto Euclides. 1992.
- [6] Lima, E. L., *Meu Professor de Matemática e outras histórias*. Rio de Janeiro. SBM. 1991.
- [7] Lima, E. L., Carvalho, P. C. P., Morgado, A. C., Wagner, E., *A Matemática do Ensino Médio - Volume 2*. Rio de Janeiro. SBM. 1999.
- [8] Muniz Neto, A. C., *Geometria*. Rio de Janeiro. Coleção PROFMAT. SBM. 2013.
- [9] Souza, J., *Novo Olhar Matemática - Volume 3*. São Paulo. FTD. 2013.