



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

ÁRISON ANDRÉ ROCHA DE OLIVEIRA

MODELAGEM COMPUTACIONAL
DO PROBLEMA DE CONDUÇÃO DE CALOR

BELÉM

2016



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

ÁRISON ANDRÉ ROCHA DE OLIVEIRA

MODELAGEM COMPUTACIONAL DO PROBLEMA DE CONDUÇÃO DE CALOR

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal do Pará (PROFMAT-UFPA) como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: **Dr. Anderson de Jesus Araújo Ramos**

Agência Financiadora: **CAPES**

BELÉM

2016

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da UFPA

Oliveira, Árison André Rocha de, 1983 -

Modelagem computacional do problema de condução de calor/Árison André Rocha de Oliveira - 2016.

Orientador: Anderson de Jesus Araújo Ramos.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará. Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (Mestrado), Belém, 2016.

1. Matemática-Estudo e ensino. 2. Diferenças finitas. 3. Condução de Calor. 4. Equações diferenciais-Soluções numéricas. 5. Modelagem Computacional.
Título.

CDD 22. ed. 372.7

CERTIFICADO DE AVALIAÇÃO

ÁRISON ANDRÉ ROCHA DE OLIVEIRA

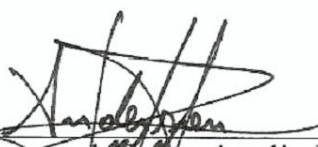
MODELAGEM COMPUTACIONAL DO PROBLEMA DE CONDUÇÃO DE CALOR

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal do Pará (PROFMAT-UFPA) como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre em Matemática.

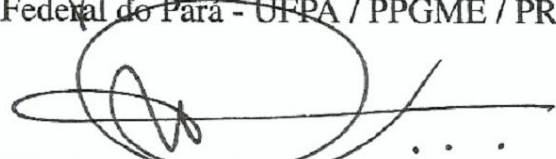
DATA DA AVALIAÇÃO: 08/04/16

CONCEITO: Aprovado.


Banca examinadora:



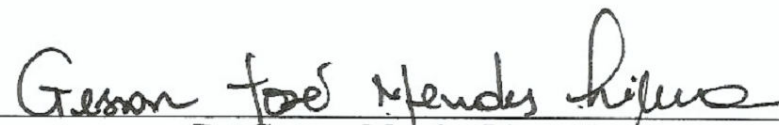
Dr. Anderson de Jesus Araújo Ramos (Orientador)
Universidade Federal do Pará - UFPA / PPGME / PROFMAT



Dr. Renato Fabrício Costa Lobato (Membro)
Universidade Federal do Pará - UFPA / PROFMAT



Dr. Anderson David de Souza Campelo (Membro)
Universidade Federal do Pará - UFPA / PPGME / PROFMAT



Dr. Gesson Mendes Lima (Externo)
Secretaria de Estado de Educação - SEDUC / CEFOR

Dedico este trabalho a minha família, pelo apoio e compreensão.

AGRADECIMENTOS

- Primeiramente, a Deus pela vida e pela saúde;

- Aos meus pais, Ary Sanches e Socorro, por me compreenderem e por me terem dado a condição de uma educação invejável;

- A Leide, minha esposa, pelo incentivo, companheirismo e amizade;

- Ao Gabriel, meu filho, e Samuel, meu sobrinho, motivação para chegar cada vez mais longe;

- Às minhas irmãs, Ariete e Ariane, pelo companheirismo, amizade e pelas conversas de apoio e incentivo;

- A todos os professores que durante o curso contribuíram a construção do conhecimento;

- Ao Professor Anderson Ramos, pela orientação e profundo envolvimento neste trabalho;

- Aos amigos e colegas de turma, direta ou indiretamente, contribuíram para a conclusão do curso e desta dissertação.

“Os números governam o mundo.”

Platão.

Resumo

Instituto de Ciências Exatas e Naturais

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Modelagem Computacional do Problema de Condução de Calor

por Árison André Rocha de Oliveira

A Modelagem Computacional é uma área de conhecimento multidisciplinar que trata da aplicação de modelos matemáticos e técnicas da computação à análise, compreensão e estudo da fenomenologia de problemas complexos em áreas tão abrangentes quanto as engenharias, ciências exatas, biológicas, humanas, economia e em particular a transferência de calor, que é a área de interesse do presente trabalho. O presente trabalho visa estudar a implementação computacional através da utilização do Método de Diferenças Finitas (MDF) para solucionar o problema da condução de calor, onde o problema físico se baseia na Lei de Resfriamento de Fourier (LRF), cuja formulação matemática constitui de uma equação diferencial parcial (EDP) e verificar a estabilização das soluções numéricas para o problema da equação do calor com as condições de fronteira Dirichlet homogêneas e condições iniciais. Isso se torna possível, graças ao uso do método explícito em diferenças finitas para a aproximação finita do problema contínuo. Para o experimento usou-se uma placa de metálica com dimensões $20\text{cm} \times 30\text{cm}$, uma vela, como fonte contínua de calor aplicada ao ponto médio do lado da placa de dimensão 20cm e o software matemático MATLAB 7.0 para as simulações numéricas. Com isso, foi possível obter uma solução numérica explícita do problema e o gráfico denominado curva de calor, onde é possível ter uma ideia da dissipação de temperatura que ocorre durante o experimento e mostrou-se também a importância do critério de estabilidade para a convergência das soluções. Tudo isso, possibilita ter uma visão mais ampla do conhecimento estudado e ajuda a entender melhor o processo de modelagem computacional.

Palavras-chave: Transferência de Calor. Condução. Análise Numérica. Método de Diferenças Finitas. Modelagem Computacional.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ

Abstract

Instituto de Ciências Exatas e Naturais

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Computational modeling of Heat Conduction Problem

by Árison André Rocha de Oliveira

The Computational Modeling is a multidisciplinary field of knowledge that deals with the application of mathematical models and techniques of computer analysis, understanding and study of the phenomenology of complex problems in areas as broad as the engineering, exact sciences, biological, human, economy and in particular heat transfer, which is the area of interest to this work. This work aims to study the computational implementation through the use of Difference Method Finite (MDF) to solve the problem of heat conduction, where the physical problem is based on Fourier Cooling Law (FRL), whose mathematical formulation is a partial differential equation (PDE) and check the stability of numerical solutions to the heat equation of the problem with the Dirichlet homogeneous boundary conditions and initial conditions. This is made possible thanks to the use of explicit finite difference method for the finite approximation of the continuous problem. For the experiment used a metallic plate with dimensions $20\text{cm} \times 30\text{cm}$, a candle, as a continuous source of heat applied to the midpoint of the side of the scale plate 20cm and the mathematical software MATLAB 7.0 for numerical simulations. Thus, it was possible to obtain an explicit numerical solution of the problem and the graph called heat curve, where you can get an idea of the temperature dissipation that occurs during the experiment and showed also the importance of the stability criterion for the convergence of solutions. All this makes it possible to have a broader view of the studied knowledge and helps to better understand the computer modeling process.

Key words: Heat transfer. Conduction. Numerical analysis. Finite Difference Methods. Computational modeling.

Sumário

INTRODUÇÃO	1
1 CONCEITOS PRELIMINARES	4
1.1 Alguns Aspectos Físicos	4
1.1.1 Transmissão de Calor por Condução	4
1.1.2 Transmissão de Calor por Convecção	5
1.1.3 Transmissão de Calor por Radiação	6
1.2 Alguns Aspectos Numéricos	7
1.2.1 Série de Taylor	7
1.2.2 Ordem de Aproximação de uma Fórmula de Diferença	8
1.2.3 Erro de Truncamento Local e Erro Global	8
1.3 Alguns Aspectos Computacionais - MATLAB	9
1.3.1 Sintaxe e Comentários	9
1.3.2 Estrutura de Repetição	9
1.3.3 Anotações no Gráfico	10
2 ASPECTOS HISTÓRICOS	11
2.1 Transferência de Calor por Condução	11
3 MODELAGEM MATEMÁTICA	14
3.1 Problema da Condução de Calor	14
3.2 Modelagem da Condução de Calor numa Barra	15
3.2.1 Lei de Resfriamento de Fourier	16
4 MÉTODO NUMÉRICO	21
4.1 Método de Diferenças Finitas	21

4.2	Consistência, Estabilidade e Convergência	25
5	MODELAGEM COMPUTACIONAL	27
5.1	Discretização do Domínio $[0, L] \times [0, T]$	27
5.2	Discretização da Equação do Calor	28
5.3	Implementação Computacional	31
5.4	Código em Matlab	33
5.5	Resultados de Simulações Numéricas	35
	BIBLIOGRAFIA	39

INTRODUÇÃO

A forma como o ensino da Matemática é tratada na escola nos leva a vários questionamentos que constroem a nossa problemática. Várias perguntas vêm à tona, como, por exemplo: Quais são as maiores dificuldades enfrentadas pelo professor no ensino dessa disciplina? Por que, somente um número tão pequeno de alunos aprende Matemática? Por que muitos professores se apresentam resistentes ao uso de computadores no ensino da disciplina? De que maneira a utilização do computador pode contribuir para que o ensino da Matemática seja mais bem efetivado? Como os professores interagem com as propostas de inovação do ensino, principalmente com o uso do computador? Diante desses questionamentos, evidencia-se uma realidade em que os alunos, nas mais diferentes regiões do Brasil, apresentam resultados insatisfatórios quando avaliados em relação aos conhecimentos básicos da Matemática. Pois, segundo afirmação de Stegemann (1994), o Brasil amargou a penúltima colocação na avaliação internacional (1992) de desempenho na área de matemática, realizada com crianças de 9 a 13 anos de 20 países, ficando na frente apenas de Moçambique uma ex-colônia portuguesa na África, que naquele ano possuía mais de 60 % de sua população formadas de analfabetos. Os dados levantados por Stegemann levam a diferentes pontos de reflexão sobre a eficiência do ensino escolar na vida do aluno. Por isso, na elaboração desse trabalho, defendemos a ideia de que a Matemática é uma linguagem que busca dar conta de aspectos do real e que é instrumento formal de expressão e comunicação para diversas ciências. Entretanto, a Matemática no cotidiano escolar não tem conseguido atingir seus objetivos dada a dicotomia que é estabelecida entre a realidade e o conhecimento matemático. Diante de tal problemática apresenta-se no contexto educacional, a interdisciplinaridade, que além de interligar o conhecimento matemático a outras áreas afins, o faz à própria realidade dos alunos.

Nos parâmetros curriculares nacionais do ensino médio, por exemplo, podemos destacar dois objetivos:

Compreender procedimentos e estratégias matemáticas que permitam ao aluno desenvolver estudos posteriores e adquirir uma formação científica geral.

Analisar e valorizar informações de diferentes fontes utilizando ferramentas matemáticas para formar uma opinião própria que lhe permita expressar-se criticamente sobre problemas da matemática, das outras áreas do conhecimento e da atualidade (BRASIL, 1999, p. 84-85).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática foram elaborados com o objetivo de orientar as escolas a planejarem seus currículos, de forma que possam prever situações em que os alunos tenham acesso aos conhecimentos socialmente elaborados e que são necessários ao exercer a cidadania. Que eles consigam evidenciar a importância que a Matemática tem para a compreensão do mundo em sua volta, e que também consigam perceber que esta área do conhecimento estimula a criatividade, o espírito investigativo e o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas.

Dessa forma, o saber adquirido pelo aluno reveste-se uma universalidade maior que o âmbito dos problemas tratados, de modo que passa a ser instrumento para outras e diferentes investigações, constituindo um ciclo dinâmico, na medida em que novos saberes levam a novas compreensões do mundo e à colocação de novos problemas, dando-lhe condições de analisar e compreender o mundo que o cerca.

Os PCN's também sugerem alguns caminhos para "fazer Matemática" na sala de aula, no qual cita que é consensual a ideia de que não existe um caminho que possa ser identificado como único e melhor para o ensino de qualquer disciplina, em particular, de Matemática. No entanto, conhecer diversas possibilidades de trabalho em sala de aula é fundamental para que o professor construa sua prática. Dentre elas destacamos a Modelagem Computacional.

A Modelagem Computacional é uma área de conhecimento multidisciplinar que trata da aplicação de modelos matemáticos e técnicas da computação à análise, compreensão e estudo da fenomenologia de problemas complexos em áreas tão abrangentes quanto as engenharias, ciências exatas, biológicas, humanas e economia e pode ser considerada um caminho capaz de integrar a realidade vivenciada pelos alunos aos conteúdos matemáticos, ganhando importância como metodologia de trabalho na sala de aula, pois através

dela o aluno desenvolve habilidades de criar e resolver problemas, questionar, estabelecer conjecturas, criar modelos e interpretar as soluções a partir de um tema advindo do seu cotidiano.

Dessa forma, o aluno poderá ter um contato bem mais concreto com fenômenos antes conhecidos apenas através de teorias, graças aos processos de simulação numérica da modelagem computacional.

Com base no exposto objetivamos com este estudo:

- Propor uma metodologia para tornar o Ensino de Matemática mais interessante, criativo e agradável usando a interdisciplinaridade como fator atrativo;
- Usar recurso tecnológicos para entender conceitos matemáticos e interpretar fenômenos naturais relacionados ao problema de condução de calor numa barra;
- Inserir recursos computacionais nas escolas e ajudar o professor de matemática e áreas afins a explicar de forma menos abstrata o importante fenômeno físico da condução de calor.

A organização deste trabalho é a seguinte: No Capítulo 2 fazemos um breve comentário de alguns aspectos históricos concernentes à teoria de propagação do calor e como ela evoluiu até chegar à Lei de Fourier. No Capítulo 3, falamos um pouco da Modelagem Matemática com explicações bem ilustradas e deduzimos uma demonstração bem didática do problema de condução de calor numa barra. O Capítulo 4, é onde iniciamos a abordagem numérica do problema, discretizando o problema, informando o método numérico a ser utilizado e definindo alguns conceitos necessários para o bom entendimento. Finalmente chegamos ao Capítulo 5, colocando em prática a modelagem computacional, com exemplos bem próximos da realidade e sempre ilustrando o passo a passo de todo o processo, inclusive fazendo uma descrição detalhada do algoritmo usado na implementação.

Capítulo 1

CONCEITOS PRELIMINARES

Neste capítulo faremos uma introdução de alguns conceitos que serão necessários para o desenvolvimento dos próximos capítulos.

1.1 Alguns Aspectos Físicos

Sempre que existir um gradiente de temperatura no interior de um sistema ou que dois sistemas a diferentes temperaturas forem colocados em contato, haverá transferência de energia. O processo pelo qual a energia é transportada chama-se *transmissão de calor* (Kreith e Bohn (2003); Kern (1987)). Há três modos distintos de transmissão de calor: *condução, convecção e radiação*.

1.1.1 Transmissão de Calor por Condução

A condução é um processo pelo qual o calor flui de uma região de temperatura mais alta para outra de temperatura mais baixa, dentro de um meio (sólido, líquido ou gasoso) ou entre meios diferentes em contato físico direto. Na transmissão de calor por condução, a energia é transmitida por meio de comunicação molecular direta, sem apreciável deslocamento das moléculas. Quando as moléculas em uma região adquirem uma energia cinética maior do que a das moléculas da região adjacente, por motivo de uma diferença de temperatura, as moléculas possuidoras de maior energia transmitirão parte de sua energia para as moléculas da região de temperatura mais baixa. A transferência de energia pode ocorrer pelo impacto elástico (como nos fluidos) ou por difusão de elétrons

de movimento rápido das regiões de alta para as de baixa temperatura (como nos metais).

A relação básica para a transmissão de calor por condução foi proposta por Fourier em 1822. A equação elementar para a condução unidimensional no regime permanente denominada *Lei de Fourier* é:

$$q_{\kappa} = -\kappa A \frac{d\theta}{dx}, \quad (1.1)$$

onde:

- q_{κ} : é o calor transmitido por condução por unidade de tempo ($Kcal/h$ em unidades usuais ou $J/s = W$ no SI);
- κ : é a condutividade térmica do material ($Kcal/(h \cdot m \cdot ^\circ C)$);
- A : é a área da secção através da qual o calor flui, medido perpendicularmente à direção do fluxo (m^2);
- $d\theta/dx$: é o gradiente de temperatura na secção ao longo de x ($^\circ C/m$ em unidades usuais ou K/m).

1.1.2 Transmissão de Calor por Convecção

A convecção é um processo de transporte de energia pela ação combinada da condução de calor, armazenamento de energia e movimento de mistura. Ela é importante principalmente como mecanismo de transferência de energia entre uma superfície sólida e um líquido ou gás em movimento. A transferência de energia por convecção de uma superfície cuja a temperatura está acima daquela do fluido envolvente tem lugar em várias etapas. Primeiro, o calor flui por condução da superfície para as partículas adjacentes do fluido. A energia assim transferida serve para aumentar a temperatura e a energia interna dessas partículas fluidas (energia intrínseca de um elemento de matéria, em virtude da velocidade e da posição relativa das moléculas). Então, as partículas fluidas se movem para uma região de menor temperatura no fluido, onde se misturam e transferem uma parte de sua energia para outra partícula. O fluxo, nesse caso, é tanto de fluido com de energia. A energia é, em realidade, armazenada nas partículas fluidas e transportada como resultante do movimento de massa destas.

A transmissão de calor por convecção é classificada, de acordo com a forma com que o fluxo é gerado, em convecção natural e convecção forçada. Quando o movimento do fluido ocorre meramente como resultado das diferenças de densidade causadas pelos gradientes de temperatura, fala-se de convecção natural ou livre. Quando o movimento do fluido é induzido por algum agente externo (por exemplo bomba ou ventilador), o processo é chamado de convecção forçada.

O calor transmitido por unidade de tempo por convecção entre uma superfície e um fluido pode ser calculada pela seguinte relação denominada *Lei de Resfriamento de Newton*

$$\frac{d\theta}{dt} = -h_c A \Delta\theta, \quad (1.2)$$

onde:

- $d\theta/dt$: é o calor transmitido por unidade de tempo por convecção ($Kcal/h$ em unidades usuais ou W no SI);
- h_c : é a o coeficiente médio de transmissão de calor por meio de convecção ($Kcal/(h \cdot m^2 \cdot ^\circ C)$ ou $W/(m^2 \cdot K)$);
- A : é a área de transmissão de calor (m^2);
- $\Delta\theta$: é a diferença entre a temperatura da superfície θ e a do fluido envolvente θ_a , em um local especificado (geralmente bastante afastado da superfície) x ($^\circ C$ em unidades usuais ou K no SI).

1.1.3 Transmissão de Calor por Radiação

A radiação é um processo pelo qual o calor é transmitido de um corpo a alta para um de mais baixa temperatura, quando tais corpos estão separados no espaço, ainda que exista vácuo entre eles. A radiação térmica ocorre por ondas eletromagnéticas, que podem transportar energia através de um meio transparente ou através do espaço. A energia transmitida dessa matéria é chamada de *calor radiante*.

A quantidade de energia que deixa a superfície como calor radiante depende da temperatura absoluta e da natureza da superfície. Um “irradiador perfeito” ou “corpo negro” emite energia radiante à vazão q_r , cuja relação denominada *Lei de Stefan-Boltzmann*

é dada por:

$$q_r = \sigma A_e T_e^4, \quad (1.3)$$

onde:

- q_r : é a energia radiante ($Kcal/h$ em unidades usuais);
- σ : é a constante dimensional com valor de $4,88 \cdot 10^{-8} Kcal/(h \cdot m^2 \cdot K^4)$;
- A_e : é a área da superfície do corpo emissor de calor (m^2);
- T_e : é a temperatura da superfície emissora.

1.2 Alguns Aspectos Numéricos

1.2.1 Série de Taylor

Seja $f : (a, b) \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável até a ordem $n + 1$ em (a, b) com $\frac{\partial^{(n+1)} f}{\partial x^{(n+1)}}$ contínua em (a, b) e seja $x \in (a, b)$. Então existe um $\xi \in (a, b)$ tal que

$$\begin{aligned} f(x+h, t) &= f(x, t) + h \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} + \frac{h^3}{3!} \frac{\partial^3 f(x, t)}{\partial x^3} \\ &+ \dots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} \frac{\partial^{(n-1)} f(x, t)}{\partial x^{(n-1)}} + \frac{h^n}{n!} \frac{\partial^n f(x, t)}{\partial x^n} + \mathcal{O}(h^{n+1}), \end{aligned} \quad (1.4)$$

onde

$$\mathcal{O}(h^{n+1}) = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \frac{\partial^{(n+1)} f(\xi, t)}{\partial x^{(n+1)}}, \quad (1.5)$$

é denominado erro de Lagrange. A Série de Taylor relaciona os valores da função e suas derivadas, num ponto x , com valores dessa mesma função numa vizinhança de x . Quando $x = 0$, chamamos simplesmente de Série de Mac-Laurin.

1.2.2 Ordem de Aproximação de uma Fórmula de Diferença

Seja $\mathcal{F}(x, t; h)$ uma fórmula de diferença para aproximação da derivada de ordem n de uma função $f(x, t)$ com erro $\mathcal{E}(x, t; h)$. Então:

$$\frac{\partial^n f(x, t)}{\partial x^n} = \mathcal{F}(x, t; h) + \mathcal{E}(x, t; h). \quad (1.6)$$

Dizemos que a fórmula $\mathcal{F}(x, t; h)$ é de ordem p se $\mathcal{E}(x, t; h) = h^p \mathcal{R}(x, t)$, onde $\mathcal{R}(x, t)$ não depende de h . Nesse caso usamos a notação $\mathcal{E}(x, t; h) = O(h^p)$. Essa notação significa que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathcal{E}(x, t; h)}{h^p}$ é uma constante finita. Por exemplo no caso da fórmula centrada temos que:

$$\mathcal{F}(x, t; h) = \frac{f(x+h, t) - f(x-h, t)}{2h} \quad \text{e} \quad \mathcal{E}(x, t; h) = -\frac{h^2}{3!} \frac{\partial^3 f(\xi, t)}{\partial x^3}, \quad (1.7)$$

de forma que essa fórmula é de segunda ordem $O(h^2)$.

1.2.3 Erro de Truncamento Local e Erro Global

O erro cometido ao substituirmos a solução exata na equação de diferenças é chamado de *erro de truncamento local*. Então denotando $f(x_i, t_n)$ a solução exata calculada no ponto (x_i, t_n) da malha e por τ_i^n o erro de truncamento local cometido no cálculo de f_{i+1}^n , definimos

$$\tau_i^n := \frac{f(x_{i+1}, t_n) - f_{i+1}^n}{\Delta x}, \quad (1.8)$$

ponderado pelo passo Δx da malha. Isto nos permite dizer que o erro de truncamento local é uma medida de quanto a solução da equação diferencial discretizada na malha deixa de satisfazer a equação de diferenças.

Definimos o *erro global* em um ponto x_i , por

$$e_i^n := f(x_i, t_n) - f_i^n, \quad (1.9)$$

isto é, a diferença entre a solução exata no ponto (x_i, t_n) da malha e a solução aproximada. Note que diferentemente do caso do erro de truncamento local, a definição de erro global

não assume que os valores anteriores utilizados no cálculo de f_i^n são exatos, e portanto o erro global como o nome sugere, pode conter toda espécie de erro que contamine a solução incluindo o erro de arredondamento do computador.

1.3 Alguns Aspectos Computacionais - MATLAB

Atualmente, o MATLAB é definido como um sistema interativo e uma linguagem de programação para computação técnica e científica em geral, integrando a capacidade de fazer cálculos, visualização gráfica e programação.

1.3.1 Sintaxe e Comentários

- “clear” : Remove todas as variáveis do espaço de trabalho;
- “clc” : Limpa a janela de comandos e coloca o cursor na posição inicial;
- “input” : Permite entrada de dados durante a execução do programa via teclado;
- “round” : Faz um arredondamento para o inteiro mais próximo;
- “x = a : h : b” : Cria um vetor x começando com o valor **a**, incrementando-se do valor **h** até atingir o valor último ou o valor mais próximo possível de **b**;
- “ = ” : Atribui um valor a uma variável;
- “ + ” : Adição;
- “ - ” : Subtração;
- “ * ” : Multiplicação escalar;
- “ / ” : Divisão;
- “ , ” : Separa comandos dados em uma mesma linha;
- “ ; ” : Separa comandos dados em uma mesma linha. Se o último caractere da declaração é um ponto e vírgula, a impressão na tela é suprimida, mas a tarefa é realizada;
- “ % ” : Todo e qualquer caracter depois do símbolo de porcentagem é tomado como comentário.

1.3.2 Estrutura de Repetição

A estrutura de repetição faz com que uma sequência de comandos seja executada repetidamente até que uma dada condição de interrupção seja satisfeita.

A estrutura **for-end** permite que um grupo de comandos seja repetido um número específico de vezes. Sua sintaxe é:

```
for < variavel >=< arranjo >  
< comandos >  
end
```

onde **<variável>** é a variável de controle que assume todos os valores contidos no vetor linha **<arranjo>** . Assim, o número de repetições da lista **<comandos>** é igual ao número de elementos no vetor **<arranjo>**. A variável de controle não pode ser redefinida dentro da estrutura **for-end**. O laço **for** é o controlador de fluxo mais simples e usado na programação MATLAB.

1.3.3 Anotações no Gráfico

O MATLAB possui comandos de fácil utilização para adicionar informações em um gráfico. Vejamos alguns deles:

- “figure” : Mostra a janela gráfica;
- “plot” : Comando para plotar gráficos bidimensionais;
- “surf” : Comando para plotar gráficos tridimensionais;
- “grid” : Linhas de grade;
- “title” : Título do gráfico;
- “xlabel” : Título do eixo X;
- “ylabel” : Título do eixo Y;
- “zlabel” : Título do eixo Z.

Capítulo 2

ASPECTOS HISTÓRICOS

Jean-Baptiste Joseph Fourier (Auxerre, 21 de março de 1768 - Paris, 16 de maio de 1830) foi um matemático e físico francês, celebrado por iniciar a investigação sobre a decomposição de funções periódicas em séries trigonométricas convergentes chamadas séries de Fourier e pela sua contribuição aos problemas da condução do calor.

2.1 Transferência de Calor por Condução

No século XVIII, a mecânica teve seu ápice moldado pelo paradigma newtoniano e o formalismo matemático desenvolvido por Euler, Lagrange e Laplace. É nesse cenário que Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) começa seus estudos sobre a condução do calor. A correta formulação da lei de propagação do calor foi apresentada em 1807 em um trabalho intitulado “Mémoire sur la propagation de la chaleur.” (GUINNESS and RAVETZ, 1972). Nesse trabalho, Fourier rompeu com o esquema laplaciano, ignorou a natureza do calor e ampliou as aplicações do cálculo diferencial. Contudo, sua publicação só aconteceu em 1822 em uma versão revisada e ampliada sob o título *Théorie analytique de la chaleur* (FOURIER, 1822) onde Fourier, deduziu a equação da condução do calor por meio de equações diferenciais parciais e desenvolveu a solução através de séries trigonométricas. E embora tenha ignorado qualquer hipótese acerca da natureza do calor, Fourier descreveu um modelo físico para explicar o mecanismo de propagação do calor.

As primeiras tentativas de Fourier na formulação de uma teoria para a condução

do calor não foram bem-sucedidas, aponto dele próprio manifestar sua insatisfação com a dedução e com suas incertezas (HERIVEL, 1975). Nos anos seguintes, Fourier passou a dedicar-se a um novo trabalho sobre a propagação do calor em corpos contínuos, o qual foi submetido à Academia francesa em 1807. Nesse trabalho Fourier idealizou um modelo em que uma barra era dividida em seções de espessuras infinitamente pequenas e o calor era comunicado de uma seção à outra devido à diferença de temperatura entre elas. A ideia da troca de calor entre as seções fora concebida em seu trabalho anterior, mas dessa vez, dois novos conceitos decisivos foram incorporados. O primeiro desses conceitos foi o de fluxo do calor. O segundo elemento novo na análise de Fourier foi o de considerar a diferença entre o calor que entra em uma seção e o calor que sai dela, como sendo a quantidade de calor absorvido responsável pela mudança de temperatura na seção. Tais considerações permitiram que Fourier obtivesse a nova equação geral de propagação do calor em corpos sólidos

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k}{c\rho} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right). \quad (2.1)$$

Nessa equação a temperatura u é função do tempo t e das três coordenadas x, y, z , e k é a condutividade da substância. Diferentemente da equação obtida em seu trabalho anterior, aqui Fourier introduz corretamente o calor específico c e a densidade ρ da substância.

O conceito de calor específico é essencial para entender o processo de propagação do calor em função do tempo. Ele permite a conversão da taxa de calor acumulado em um elemento de volume para uma equivalente mudança na temperatura. A condutividade térmica governa o transporte de calor no espaço. Juntos, esses dois parâmetros respondem às mudanças temporais do estado térmico do sólido.

Enfim, após controvérsias envolvendo o comitê examinador composto por Lagrange, Laplace, Lacroix e Monge, esse trabalho de Fourier não foi publicado. O que parece certo, segundo Herivel (1975), é que os problemas apontados estavam relacionados à natureza puramente matemática, sobretudo ao uso de expansão trigonométrica na solução da equação do calor. Entretanto, motivos de natureza política também podem estar relacionados à rejeição deste trabalho. Uma versão revisada e estendida foi submetida à Academia em 1811 e, embora tenha vencido um prêmio oferecido pelo Institut de France,

continuou sem publicação. Foi então que Fourier começou a preparação de uma terceira versão, a qual foi convertida em um livro sob o título *Théorie analytique de la chaleur*.

Neste livro, Fourier estabeleceu sua teoria da propagação do calor em corpos sólidos mantendo a mesma tradição da mecânica racional, a qual reduzia os fenômenos naturais à análise matemática. Contudo, é possível afirmar que um novo campo da ciência do calor foi estabelecido; isso pode ser verificado sob dois aspectos: o primeiro decorre do fato de que as leis da mecânica não se aplicam aos fenômenos do calor, apesar de toda a tradição metodológica da análise inserida nesse primeiro campo; e o segundo, do fato de que há uma ruptura na abordagem do estudo do calor, afastando-se da filosofia laplaciana, na qual as teorias elaboradas para a sua explicação estavam vinculadas à natureza do calor. Nesse sentido, pode-se afirmar que a teoria da propagação do calor proposta por Fourier não se origina da refutação de uma teoria anterior, nem da descoberta de novos fatos, ela apresenta-se como uma ciência autônoma, com características próprias.

O trabalho de Fourier contém o primeiro tratamento matemático da condução do calor, bem como a primeira grande matematização de um campo da física fora da mecânica. Nessa pesquisa, evidenciamos as bases conceituais que foram empregadas na construção de sua teoria, desde as suas primeiras concepções até o seu reconhecimento, por meio da obra “*Teoria analítica do calor*”. Consequentemente, foi possível perceber as mudanças ocorridas nos modelos de condução do calor, a fim de melhor explicar a teoria.

O estudo do desenvolvimento histórico da teoria de condução do calor de Fourier ilustra bem a natureza da ciência enquanto construção humana. Permite entender que os caminhos para alcançar a correta elaboração de uma teoria muitas vezes são tortuosos, com hipóteses confusas e frequentemente falhas. E ainda, que a criação de uma teoria está vinculada ao contexto histórico-filosófico. A reflexão acerca desses elementos, sobretudo no ensino de ciências, colabora com uma visão mais próxima da realidade, desmistificando a ideia de uma ciência pronta e acabada ou que é realizada apenas por figuras heroicas.

Capítulo 3

MODELAGEM MATEMÁTICA

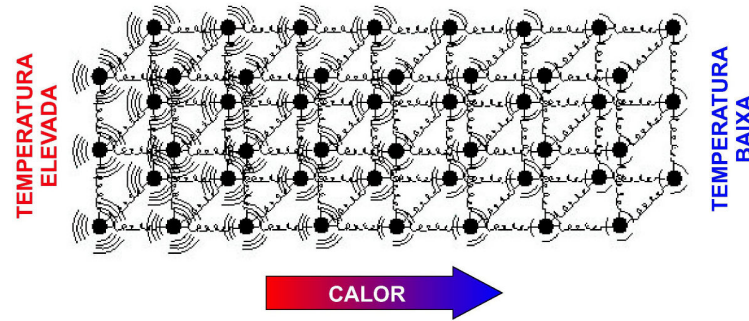
“Modelagem Matemática é um processo dinâmico utilizado para obtenção e validação de modelos matemáticos. É uma forma de abstração e generalização, com a finalidade de previsão de tendências. A modelagem consiste, essencialmente, na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual.” (BASSANEZI, 2002, p.24).

Neste capítulo, falamos um pouco de algumas leis e conceitos físicos importantes que nos darão suporte no processo de modelagem. Também fazemos uma demonstração bem didática da equação diferencial parcial que modela o problema de condução de calor em uma barra.

3.1 Problema da Condução de Calor

O fenômeno da condução de calor é um processo de transmissão de calor pelo qual a energia passa de molécula para molécula sem que elas sejam deslocadas. Por exemplo: aquecendo-se a extremidade de uma barra metálica, as moléculas passam a vibrar com maior intensidade, transmitindo essa energia adicional às moléculas mais próximas, que também passam a vibrar mais intensamente até alcançar a outra extremidade. Vejamos a figura abaixo

Figura 3.1: Visão microscópica da agitação das moléculas

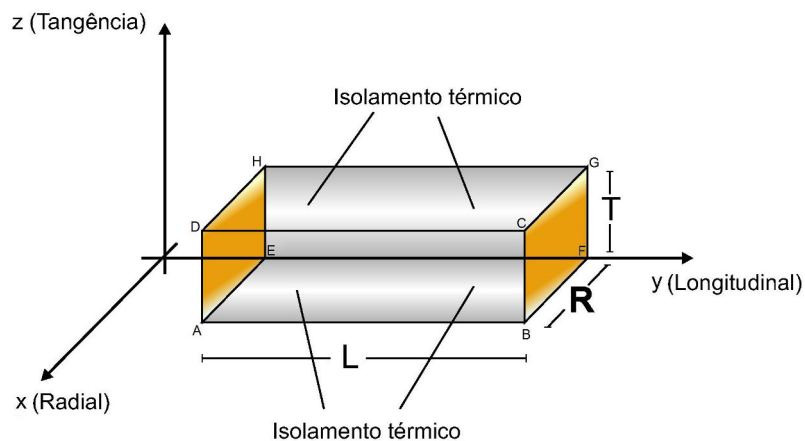


Como vimos no capítulo anterior, o primeiro a fazer um estudo detalhado da transmissão de calor por condução foi o físico e matemático francês Joseph Fourier. Experimentalmente ele obteve uma fórmula que nos dá a rapidez com que o calor é transmitido por condução.

3.2 Modelagem da Condução de Calor numa Barra

Consideremos uma barra de comprimento L , largura R e espessura T , cuja secção longitudinal tem área $A = LR$, feita de um material condutor uniforme de calor. Suponhamos que as faces frontais (ABCD e EFGH) da barra estejam isoladas termicamente de modo que não haja transferência de calor com o meio ambiente através dela, apenas através de suas extremidades.

Figura 3.2: Barra homogênea fixada no sistema cartesiano



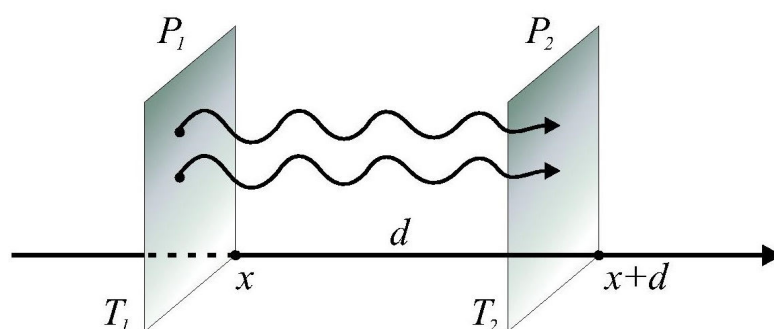
Devido á uniformidade do material e o isolamento térmico nas faces frontais o fluxo de calor se dá apenas na direção longitudinal. Portanto trata-se de um problema de condução

de calor em apenas uma direção. Para estudarmos a condução de calor nessa barra, usamos a Lei de Resfriamento de Fourier.

3.2.1 Lei de Resfriamento de Fourier

Considere duas placas P_1 e P_2 de áreas iguais a A mantidas em temperaturas constantes, T_1 e T_2 respectivamente. Se P_1 e P_2 forem colocadas paralelamente a uma distância d uma da outra,

Figura 3.3: Energia térmica em trânsito



haverá passagem de calor da placa mais quente para a placa menos quente, e a quantidade de calor transmitida por unidade de tempo é dada por

$$Q = \frac{kA|T_2 - T_1|}{d}, \quad (3.1)$$

onde o fator de proporcionalidade positivo k é a condutibilidade térmica do material entre as placas P_1 e P_2 . Utilizaremos a seguir essa lei para estudarmos a condução de calor na barra, tal como é feito em Figueiredo (2005).

Representemos por $u(x, t)$ a temperatura de um ponto de abscissa x no tempo t . Observe que a temperatura independe das coordenadas espaciais y e z . A seguir tomamos duas secções transversais da barra localizadas no ponto x e $x + d$. Para aplicarmos a lei de Fourier, supomos que essas secções sejam as placas P_1 e P_2 conforme mostra a Figura 3.2. Entretanto percebemos que há uma dificuldade, pois as temperaturas nessas secções variam com o tempo, e portanto não são constantes com o que a lei de Fourier. Para contornar essa dificuldade introduzimos uma nova grandeza física denominada fluxo de calor através da secção situada no ponto x , num instante de tempo t . Sendo assim, as

temperaturas das placas P_1 e P_2 são dadas por $T_1 = u(x, t)$ e $T_2 = u(x + d, t)$. Logo, temos que o fluxo de calor que atravessa a secção é dado pelo seguinte limite

$$\lim_{d \rightarrow 0} Q = \lim_{d \rightarrow 0} \frac{kA|u(x + d, t) - u(x, t)|}{d} = kA \lim_{d \rightarrow 0} \frac{|u(x + d, t) - u(x, t)|}{d}, \quad (3.2)$$

$$\lim_{d \rightarrow 0} Q = kA|u_x(x, t)|. \quad (3.3)$$

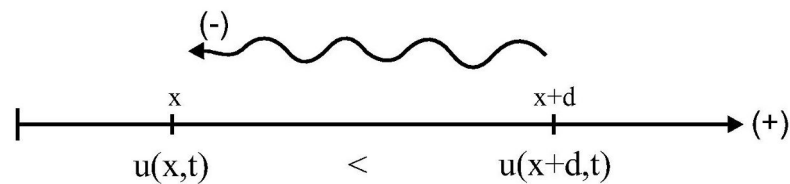
Definimos, então, o fluxo de calor na direção positiva do eixo x como uma função $q(x, t)$ dada por:

$$q(x, t) = kA|u_x(x, t)|. \quad (3.4)$$

Sendo assim temos dois casos a serem analisados.

Caso I (Função Crescente): Se $u(x, t)$ é uma função crescente no intervalo $(x, x + d)$, então $u_x(x, t) \geq 0$, mas por outro lado, $u(x, t) \leq u(x + d, t)$ e portanto o calor fluirá da placa P_2 situada no ponto $x + d$ para a placa P_1 situada no ponto x .

Figura 3.4: Calor propagando no sentido negativo

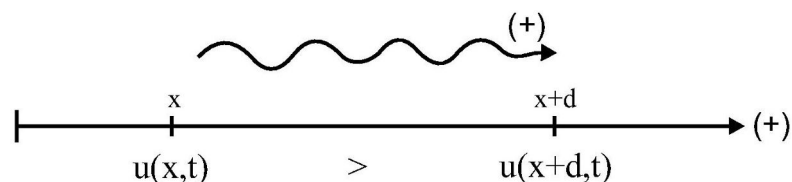


Logo temos que

$$q(x, t) = -kAu_x(x, t).$$

Caso II: (Função Decrescente) Se $u(x, t)$ é uma função decrescente no intervalo $(x, x + d)$, então $u_x(x, t) \leq 0$, mas por outro lado, $u(x + d, t) \leq u(x, t)$ e portanto o calor fluirá da placa P_1 situada no ponto x para a placa P_2 situada no ponto $x + d$.

Figura 3.5: Calor propagando no sentido positivo



Logo temos que

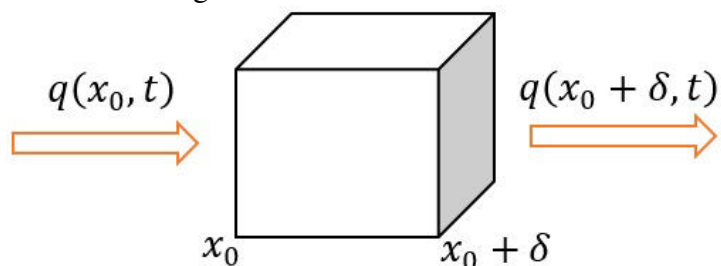
$$q(x, t) = -kAu_x(x, t).$$

Assim, percebemos que em ambos os casos, que a fórmulas do fluxo de calor não se altera e portanto o fluxo de calor é dado por

$$q(x, t) = -kAu_x(x, t). \quad (3.5)$$

Fixemos agora um elemento da barra situado entre os pontos x_0 e $x_0 + \delta$ o qual será denominado de volume de controle e vejamos qual é a quantidade q que ai entra, no período de tempo entre os instantes t_0 e $t_0 + \tau$.

Figura 3.6: Volume de controle



Usando o fluxo de calor que acabamos de deduzir temos que

$$\bar{q} = \int_{t_0}^{t_0+\tau} q(x_0, t) dt - \int_{t_0}^{t_0+\tau} q(x_0 + \delta, t) dt$$

e conseqüentemente,

$$\bar{q} = \int_{t_0}^{t_0+\tau} kA \left[u_x(x_0 + \delta, t) - u_x(x_0, t) \right] dt.$$

Uma ferramenta importante usada na simplificação da equação acima é o Teorema Fundamental do Cálculo (TFC), descrito abaixo.

Teorema 3.1 (TFC: Integral da Derivada). *Se F é derivável em $[a, b]$ e $f = F'$ é integrável em $[a, b]$, então*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \quad (3.6)$$

Demonstração. Ver Lima [9]. □

Usando o Teorema Fundamental do Cálculo, a equação acima pode ser escrita como

$$\bar{q} = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \int_{x_0}^{x_0+\delta} kAu_{xx}(x, t)dxdt. \quad (3.7)$$

Por outro lado, sabemos que o calor específico c de uma substância é a quantidade de calor necessária para elevar em $1^\circ C$ a temperatura de um grama dessa substância. Portanto q pode ser escrito como

$$\bar{q} = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \int_{x_0}^{x_0+\delta} c\rho Au_t(x, t)dxdt. \quad (3.8)$$

Igualando as duas últimas equações obtemos

$$\int_{t_0}^{t_0+\tau} \int_{x_0}^{x_0+\delta} kAu_{xx}(x, t)dxdt = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \int_{x_0}^{x_0+\delta} c\rho Au_t(x, t)dxdt. \quad (3.9)$$

Como esta identidade vale para todo $t_0 > 0$, todo $0 < x_0 < L$ e todo $\tau > 0$ e $\delta > 0$, concluímos que

$$kAu_{xx}(x, t) = c\rho Au_t(x, t),$$

ou seja,

$$u_t(x, t) - Ku_{xx}(x, t) = 0, \quad (3.10)$$

onde $K = k/c\rho$ é a constante de difusividade térmica. A equação diferencial parcial que acabamos de encontrar é denominada equação do calor. Para que o problema de condução de calor fique bem definido do ponto de vista da análise matemática, precisamos informar a distribuição de temperatura inicial da barra, também conhecida como condição inicial e saber o comportamento da temperatura nas extremidades da barra, ou seja, das condições de contorno. Para nossas pretensões abordaremos o caso mais simples, que é a condição de contorno do tipo Dirichlet homogênea. Com isso, passamos a considerar o seguinte problema unidimensional

$$\begin{cases} u_t(x, t) - Ku_{xx}(x, t) = 0, & \text{em } (0, L) \times (0, T), \\ u(0, t) = u(L, t) = 0, & 0 < t < T, \\ u(x, 0) = u_0(x), & 0 < x < L. \end{cases} \quad (3.11)$$

onde K é a constante de difusividade térmica que no sistema CGS tem as dimensões cm^2/s e a função $u_0(x)$ é a condição inicial que deve também satisfazer as condições de contorno.

Capítulo 4

MÉTODO NUMÉRICO

“A essência dos métodos numéricos está na discretização do contínuo. É esta discretização que torna finito o problema e portanto viabiliza sua solução através dos computadores.” (CUNHA, 1993).

4.1 Método de Diferenças Finitas

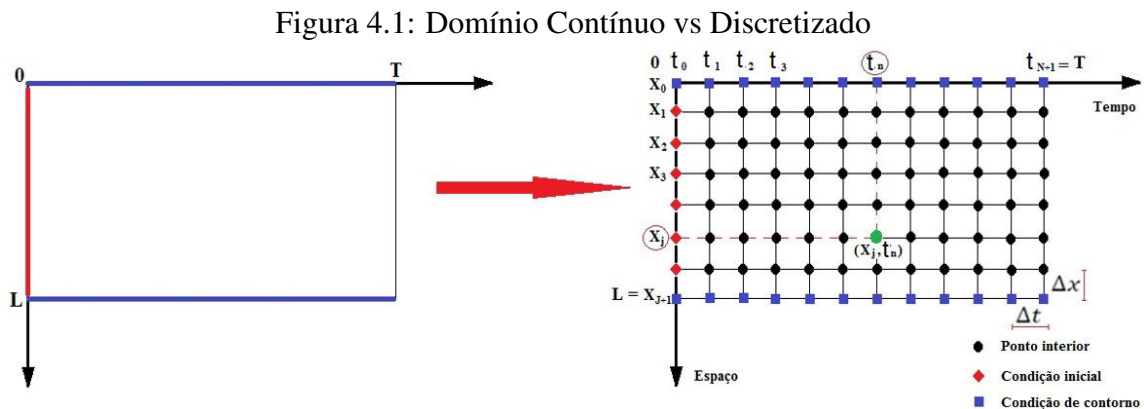
A ideia geral do método de diferenças finitas é a discretização das variáveis e a substituição das derivadas presentes na equação diferencial por aproximações envolvendo somente valores numéricos da função. Na prática substituem-se as derivadas pela razão incremental que converge para o valor da derivada quando o incremento tende a zero e assim dizemos então que o problema foi discretizado.

Neste trabalho trataremos o problema totalmente discreto, isto é, tanto o espaço quanto o tempo estão discretizados. Então, seja (x, t) um par ordenado real qualquer e $\Delta x, \Delta t$ dois números reais positivos. Definimos a malha de passo $\Delta x, \Delta t$ associada a (x_0, t_0) como o conjunto de pontos

$$(x_j, t_n) = (j\Delta x, n\Delta t),$$

para todo $j = 0, 1, \dots, J, J + 1$ e $n = 0, 1, \dots, N, N + 1$.

A seguir, ilustramos na figura abaixo um domínio contínuo, seguido de um totalmente discretizado.



A ferramenta matemática essencial no cálculo de aproximações para as derivadas é a Série de Taylor, que relaciona valores da função e suas derivadas num ponto (x, t) com valores dessa mesma função numa vizinhança de (x, t) , ou seja, com valores de $u(x \pm \Delta x, t \pm \Delta t)$. Se $u(x, t)$ tem derivadas até a ordem $(n + 1)$ em x e em t , então podemos escrever:

$$\begin{aligned}
 u(x + \Delta x, t) &= u(x, t) + \Delta x \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + \frac{\Delta x^3}{3!} \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x^3} \\
 &+ \dots + \frac{\Delta x^n}{n!} \frac{\partial^n u(x, t)}{\partial x^n} + \frac{\Delta x^{(n+1)}}{(n+1)!} \frac{\partial^{(n+1)} u(\xi_1, t)}{\partial x^{(n+1)}}, \quad (4.1)
 \end{aligned}$$

com $\xi_1 \in [x, x + \Delta x]$ e

$$\begin{aligned}
 u(x - \Delta x, t) &= u(x, t) - \Delta x \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \frac{\Delta x^3}{3!} \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x^3} \\
 &+ \dots - \frac{\Delta x^n}{n!} \frac{\partial^n u(x, t)}{\partial x^n} + \frac{\Delta x^{(n+1)}}{(n+1)!} \frac{\partial^{(n+1)} u(\xi_2, t)}{\partial x^{(n+1)}}, \quad (4.2)
 \end{aligned}$$

com $\xi_2 \in [x - \Delta x, x]$.

De forma análoga temos para a variável t

$$\begin{aligned}
 u(x, t + \Delta t) &= u(x, t) + \Delta t \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2!} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + \frac{\Delta t^3}{3!} \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial t^3} \\
 &+ \dots + \frac{\Delta t^n}{n!} \frac{\partial^n u(x, t)}{\partial t^n} + \frac{\Delta t^{(n+1)}}{(n+1)!} \frac{\partial^{(n+1)} u(x, \eta_1)}{\partial t^{(n+1)}}, \quad (4.3)
 \end{aligned}$$

com $\eta_1 \in [t, t + \Delta t]$ e

$$\begin{aligned} u(x, t - \Delta t) &= u(x, t) - \Delta t \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2!} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - \frac{\Delta t^3}{3!} \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial t^3} \\ &+ \dots - \frac{\Delta t^n}{n!} \frac{\partial^n u(x, t)}{\partial t^n} + \frac{\Delta t^{(n+1)}}{(n+1)!} \frac{\partial^{(n+1)} u(x, \eta_2)}{\partial t^{(n+1)}}, \end{aligned} \quad (4.4)$$

com $\eta_2 \in [t - \Delta t, t]$.

Manipulando adequadamente as Séries de Taylor (4.1)–(4.4), com os devidos truncamentos, temos motivação para a construção dos operadores de diferenças progressivas, regressivas e centradas.

Operador de Diferenças Progressivas

Para encontrarmos o operador de diferenças progressivas para a derivada de primeira ordem no tempo, consideramos o desenvolvimento da Série de Taylor até a terceira parcela, isto é, fazemos um truncamento escolhendo $n = 1$ na equação (4.3) para obtermos

$$u(x, t + \Delta t) = u(x, t) + \Delta t \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \mathcal{O}(\Delta t^2) \quad (4.5)$$

e conseqüentemente

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{u(x, t + \Delta t) - u(x, t)}{\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t), \quad (4.6)$$

onde $\mathcal{O}(\Delta t) := -\frac{\mathcal{O}(\Delta t^2)}{\Delta t}$. Isto nos motiva a usarmos a seguinte notação

$$\partial_t u_j^n := \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t}, \quad (4.7)$$

com resíduo da ordem de $\mathcal{O}(\Delta t)$ no tempo.

Operador de Diferenças Regressivas

Para encontrarmos o operador de diferenças regressivas para a derivada de primeira ordem no tempo, consideramos o desenvolvimento da Série de Taylor até a terceira

parcela, isto é, fazemos um truncamento escolhendo $n = 1$ na equação (4.4) para obtermos

$$u(x, t - \Delta t) = u(x, t) - \Delta t \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \mathcal{O}(\Delta t^2) \quad (4.8)$$

e conseqüentemente

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{u(x, t) - u(x, t - \Delta t)}{\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t), \quad (4.9)$$

onde $\mathcal{O}(\Delta t) := \frac{\mathcal{O}(\Delta t^2)}{\Delta t}$. Isto no motiva a usarmos a seguinte notação

$$\bar{\partial}_t u_j^n := \frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\Delta t}, \quad (4.10)$$

com resíduo da ordem de $\mathcal{O}(\Delta t)$ no tempo.

Operador de Diferenças Centradas

Para encontrarmos o operador de diferenças centradas para a derivada de segunda ordem no espaço, consideramos o desenvolvimento da Série de Taylor até a quarta parcela, isto é, fazemos um truncamento escolhendo $n = 3$ nas equações (4.1) e (4.2) para obtermos

$$\begin{aligned} u(x + \Delta x, t) &= u(x, t) + \Delta t \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + \frac{\Delta x^3}{3!} \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x^3} + \mathcal{O}_1(\Delta x^4) \\ u(x - \Delta x, t) &= u(x, t) - \Delta t \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \frac{\Delta x^3}{3!} \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x^3} + \mathcal{O}_2(\Delta x^4) \end{aligned}$$

Somando as equações acima obtemos

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{u(x + \Delta x, t) - 2u(x, t) + u(x - \Delta x, t)}{\Delta x^2} + \mathcal{O}(\Delta t), \quad (4.11)$$

onde $\mathcal{O}(\Delta x^2) := \frac{\mathcal{O}_1(\Delta x^4) + \mathcal{O}_2(\Delta x^4)}{\Delta x^2}$. Isto no motiva a usarmos a seguinte notação

$$\partial_x \bar{\partial}_x u_j^n := \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2}, \quad (4.12)$$

com resíduo da ordem de $o(\Delta x^2)$ no espaço. Para mais informações consulte Cuminato et al. (1996).

4.2 Consistência, Estabilidade e Convergência

Alguns conceitos são muito importantes para um melhor entendimento da dinâmica do Método de Diferenças Finitas. São os conceitos de consistência, estabilidade e convergência. O conceito de estabilidade é usado em diversos contextos e possui diferentes definições, embora todos estejam relacionados entre si. Por exemplo, em equações diferenciais ele quer dizer que pequenas alterações nos dados iniciais (e na própria equação) levam também a pequenas alterações na solução. Em métodos numéricos, que a solução numérica aproximada fique limitada, a medida que avançamos no tempo. Ambas seguem a mesma ideia, mas uma envolve a variação no tamanho do passo e a outra no tempo. Por outro lado, dizemos que um esquema numérico em diferenças finitas é consistente se o uso dos operadores de diferenças finitas nos fornece a aproximação do problema que de fato estamos discretizando, isto é, o método não introduz nenhum termo além dos já presentes na equação diferencial ou ainda, no limite com $\{\Delta t, \Delta x\} \rightarrow 0$, recuperamos o modelo contínuo. Nesse contexto temos as seguintes definições:

Definição 4.2.1. *O erro global no ponto t_n é definido por:*

$$e_j^n = u(x_j, t_n) - u_j^n,$$

onde $u(x_j, t_n)$ é a solução exata calculada em cada ponto da discretização e u_j^n é a solução numérica aproximada.

Definição 4.2.2. *Um esquema numérico de diferenças finitas é convergente se o erro global e_j^n converge para zero quando j e n tendem para infinito de maneira que o ponto (x_j, t_n) permaneça fixo.*

Definição 4.2.3. *Um esquema numérico de diferenças finitas é estável se existe uma constante $M > 0$ tal que,*

$$||e_j^n|| < M,$$

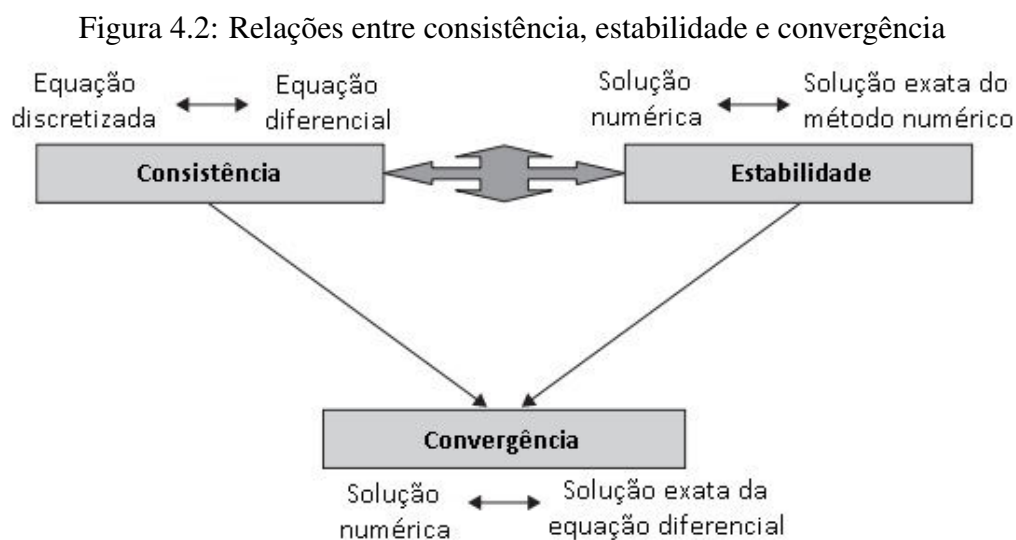
para todo $n \in N$.

Quando formulamos um método numérico, o que se deseja é que haja a convergência da solução numérica (solução do método) para a solução da equação diferencial, mas isto é normalmente difícil de estabelecer porque o método numérico é definido por uma relação de recorrência, enquanto que a equação diferencial envolve uma função diferenciável. Contudo, consistência e estabilidade, são bem mais fáceis de serem provados do que a convergência, por isso, a convergência geralmente é mostrada através do Teorema de Equivalência de Lax.

Teorema 4.1 (Equivalência de Lax). *Um esquema numérico de diferenças finitas é convergente se, e somente se, é consistente e estável.*

Demonstração. Ver Stkiwerda [11]. Cap. 10. □

O fluxograma abaixo, apresenta uma ideia bem prática deste teorema.



Este teorema é bastante útil, pois basta verificar a consistência e a estabilidade para obtermos a convergência. Também é interessante ver que este teorema é de equivalência, ou seja, se queremos que um método seja convergente ele necessariamente deve ser consistente e estável.

De posse desses resultados conseguimos garantir que um esquema numérico em diferenças finitas converge para a solução exata.

Capítulo 5

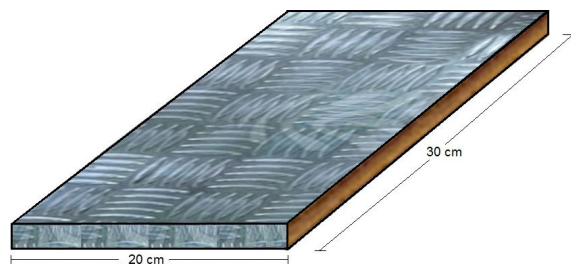
MODELAGEM COMPUTACIONAL

“Os modelos de simulação fornecem a resposta de um sistema a um conjunto de informações de entrada, que incluem regras de decisão, permitindo ao tomador de decisão examinar as consequências de diversos cenários de um sistema existente ou de um sistema em projeto.” (SOARES, 1992).

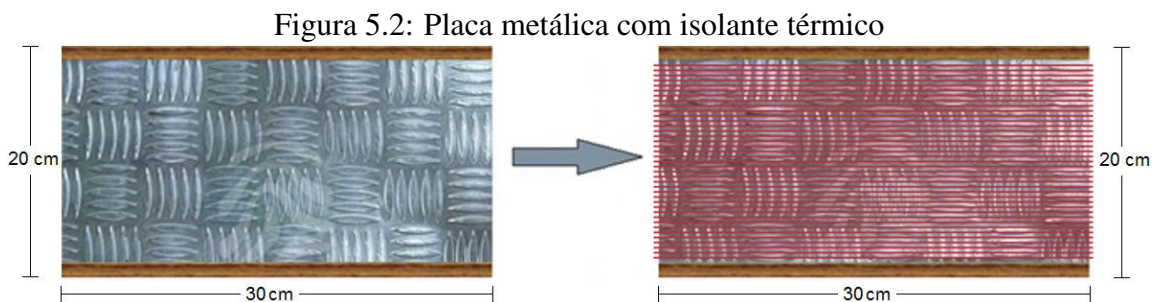
5.1 Discretização do Domínio $[0, L] \times [0, T]$

Consideramos uma barra metálica medindo 30 *cm* de comprimento por 20 *cm* de largura, cujas faces frontais se encontram isoladas termicamente a uma temperatura de 0°C.

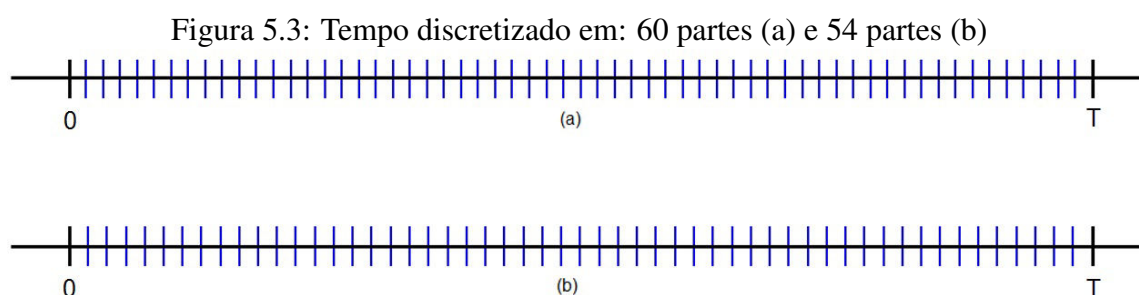
Figura 5.1: Barra isolada termicamente



Em seguida, fizemos uma secção longitudinal e obtemos um retângulo área $A = 600 \text{ cm}^2$, o qual foi dividido horizontalmente em 30 partes, representando a discretização do espaço $[0, L]$ de acordo como mostra a figura abaixo.



Na figura a seguir, consideramos duas diferentes discretizações para o domínio temporal $[0, T]$.



O produto cartesiano das duas discretizações (Fig. 5.2 e Fig. 5.3) nos fornece o domínio $[0, L] \times [0, T]$ discretizado. Com isso, obtemos uma malha de pontos coordenados representados por

$$(x_j, t_n) = (j\Delta x, n\Delta t), \quad j = 0, 1, \dots, J, J + 1 \text{ e } n = 0, 1, \dots, N, N + 1,$$

onde $\Delta x = L/(J + 1)$ e $\Delta t = T/(N + 1)$.

5.2 Discretização da Equação do Calor

Encontrar a solução analítica do problema contínuo não é tão difícil como se imagina, ela pode ser encontrada usando o Método de Fourier, mas por outro lado, em se tratando de soluções numéricas podemos obter uma solução ainda mais simples usando os operadores de diferenças finitas, estudados no capítulo anterior. Vejamos o procedimento abaixo. Consideremos então a equação do calor

$$u_t(x, t) - Ku_{xx}(x, t) = 0. \quad (5.1)$$

De agora em diante, por questões de simplicidade adotamos $K = 1$, sem perda de generalidade. Então, usando os operadores de diferenças finitas progressiva e centrada para a aproximação das derivadas de 1ª e 2ª ordem no tempo e espaço respectivamente, temos

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} = 0. \quad (5.2)$$

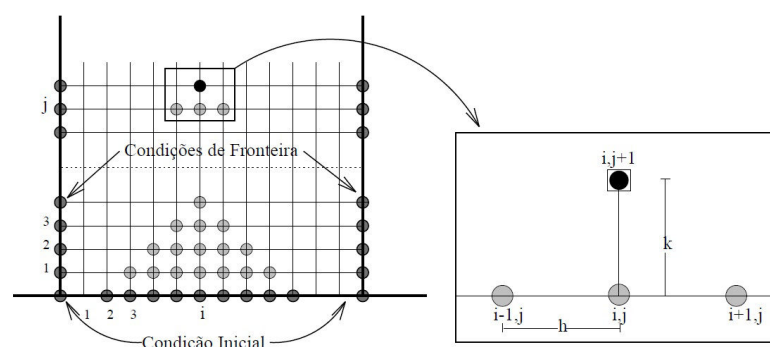
Segue daí que

$$u_j^{n+1} = (1 - 2\sigma)u_j^n + \sigma(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (5.3)$$

onde $\sigma = \Delta t / \Delta x^2$.

Percebemos que o uso desses operadores, nos fornece um esquema numérico explícito, isto é, a solução no instante de tempo seguinte, depende apenas das soluções em passos de tempos anteriores. Isto fica mais evidente na figura abaixo.

Figura 5.4: Discretização e a molécula computacional do método explícito



Mais adiante veremos que o método explícito requer um critério de estabilidade. A consistência do método é facilmente verificada, pois estamos usando apenas os operadores clássicos, citados no Capítulo 3. Já a questão da estabilidade é verificada como segue, usando a Definição 4.2.1

Teorema 5.1. *O erro global e_n associado ao esquema numérico (5.3) é limitado.*

Demonstração. De fato, sabemos que

$$e_j^{n+1} = u(x_j, t_{n+1}) - u_j^{n+1},$$

onde

$$u(x_j, t_{n+1}) = (1 - 2\sigma)u(x_j, t_n) + \sigma(u(x_{j+1}, t_n) + u(x_{j-1}, t_n))$$

é a solução exata, aplicada em cada ponto (x_j, t_n) da malha e

$$u_j^{n+1} = (1 - 2\sigma)u_j^n + \sigma(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) + \Delta t \tau_j^n$$

é a solução numérica aproximada em diferenças finitas com erro de truncamento τ_j^n . Subtraindo as duas equações acima temos

$$e_j^{n+1} = (1 - 2\sigma)e_j^n + \sigma(e_{j+1}^n + e_{j-1}^n) - \Delta t \tau_j^n.$$

Agora usamos a norma $\|\cdot\|$ definida por,

$$\|e^n\| := \max_{0 < j < J} |e_j^n|.$$

Segue daí, que

$$\|e^{n+1}\| \leq |1 - 2\sigma| \|e^n\| + 2\sigma \|e^n\| + \Delta t \|\tau^n\|.$$

Para $1 - 2\sigma \geq 0$, o que implica em

$$\sigma := \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2}, \tag{5.4}$$

conhecido como critério de estabilidade, segue que,

$$\|e^{n+1}\| \leq \|e^n\| + \Delta t \|\tau^n\|.$$

Usando a recursividade sobre n na desigualdade acima obtemos

$$\|e^n\| \leq \|e^0\| + \Delta t \sum_{j=0}^{n-1} \|\tau^j\|, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Desde que tomemos $\tau := \max_{0 \leq j \leq n-1} \|\tau_j\|$, escrevemos

$$\|e^n\| \leq \|e^0\| + \Delta t n \tau = \|e^0\| + t_n \tau \leq \|e_0\| + T \tau.$$

Por construção, escolhemos $\|e_0\| = 0$ e tomamos $M = T \tau < \infty$ para obtermos então o resultado esperado, ou seja,

$$\|e^n\| \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

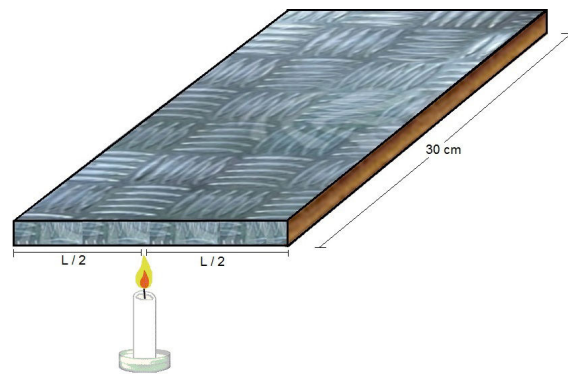
□

Unindo estes dois resultados (consistência e estabilidade) ao Teorema 4.1 temos por garantida a convergência do esquema numérico (5.3).

5.3 Implementação Computacional

Para as simulações numéricas realizadas em MATLAB, usamos a solução numérica aproximada por diferenças finitas, considerando condições de fronteira Dirichlet homogêneas. Como condição inicial, adotamos uma fonte de calor de aproximadamente $\theta = 1250^\circ C$ inserida no ponto médio do intervalo $[0, L]$ com temperatura constante. Essa fonte pode ser uma vela, pois a chama de uma vela é uma fonte contínua de energia térmica enquanto estiver acesa. Então, se colocarmos um objeto próximo à chama ou na chama da vela, este objeto está recebendo energia térmica continuamente.

Figura 5.5: Barra recebendo calor

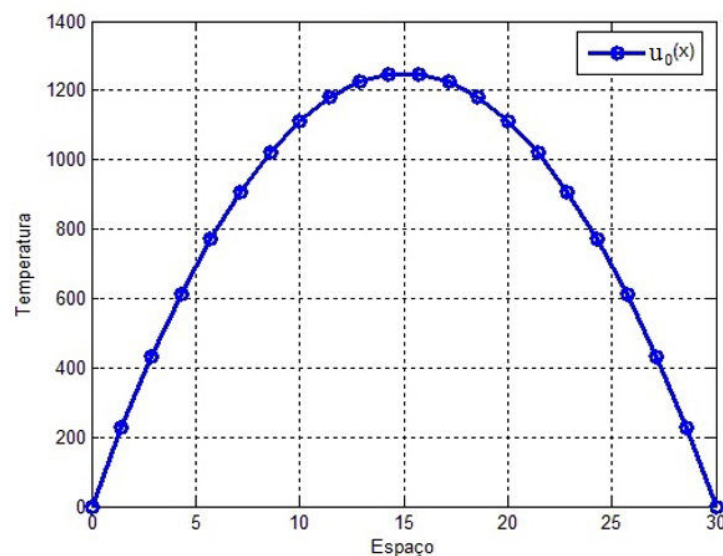


É interessante ressaltar que a função (condição inicial) representativa da fonte calor (a vela) deve satisfazer as condições de fronteira e mais, deve atingir o valor máximo θ no ponto de abscissa $x = L/2$, pois a fonte foi inserida no ponto médio, isso nos motiva a adotarmos a seguinte função quadrática

$$u_0(x) = -\frac{4\theta}{L^2}x(x - L), \quad x \in [0, L]. \quad (5.5)$$

Observe que a função escolhida atende ao fato de ser estritamente decrescente ao se distanciar do ponto crítico, tanto pela direita quanto pela esquerda, o que é fisicamente necessário, pois a temperatura tende a diminuir a medida que x se distancia do ponto médio. O gráfico de $u_0 : [0, L] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pode ser visto na figura a seguir.

Figura 5.6: Condição inicial



5.4 Código em Matlab

A seguir, fazemos uma descrição didática do código em Matlab referente a implementação computacional do esquema numérico em diferenças finitas.

1º Passo: Primeiramente limpamos a memória e o console.

```
1 clear
2 clc
```

2º Passo: Entramos com a variável espacial L e informamos o número de partes em que queremos dividir o intervalo $[0, L]$.

```
1 L = input('Digite um valor inteiro para o tempo L =')
2 J = input('Digite um valor inteiro para J =')
3 deltax = L/J;
4 x = 0:deltax:L;
```

3º Passo: Entramos com a variável temporal T e informamos o número de partes em que queremos dividir o intervalo $[0, T]$.

```
1 T = input('Digite um valor inteiro para o tempo T =')
2 N = round(2*T*(J^2)/L^2);
3 N = input('Digite um valor inteiro maior ou igual a N =')
4 deltat = T/N;
5 t = 0:deltat:T;
```

4º Passo: Reservamos este espaço para alocação de memória da matriz.

```
1 u = zeros(J+1, N+1);
```

5º Passo: Definimos algumas constantes que serão usadas no algoritmo.

```
1 theta = 1250;
2 sigma = deltat/deltax^2;
```

6º Passo: Aqui iniciamos o processo de preenchimento da condição inicial..

```

1 u(1,1) = 0;
2 u(J+1,1) = 0;
3 u(:,1) = -(4*theta/L^2)*x.*(x-L)';

```

7º Passo: Aqui iniciamos o processo de preenchimento da matriz.

```

1 for n = 1:N
2 for j = 2:J
3 u(j,n+1) = (1-2*sigma)*u(j,n) + sigma*(u(j+1,n)+ u(j-1,n));
4 end
5 end

```

8º Passo: Por último plotamos o gráfico da solução numérica aproximada e solução no último passo de tempo.

```

1 figure
2 surf(t,x,u)
3 colorbar('YTickLabel',...
4 {'Congelando','Muito Frio','Frio','Neutro',...
5 'Quente','Muito Quente','Queimando','Nuclear'})
6 xlabel('\bf Tempo')
7 ylabel('\bf Espaço')
8 zlabel('\bf Temperatura')
9 title('(a)')
10 figure
11 plot(x,u(:,N+1), 'LineWidth',2.0)
12 grid on
13 xlabel('\bf Tempo')
14 ylabel('\bf Temperatura')
15 title('(b)')

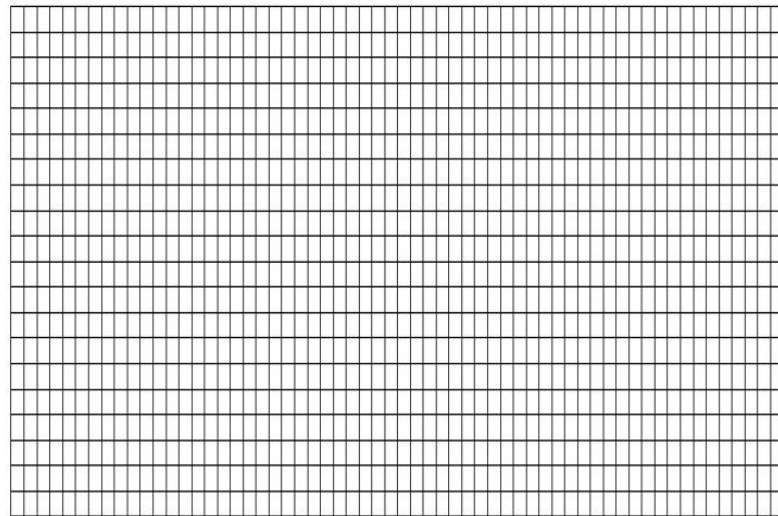
```

5.5 Resultados de Simulações Numéricas

Nesta seção mostramos alguns resultados de simulações numéricas usando o código descrito acima.

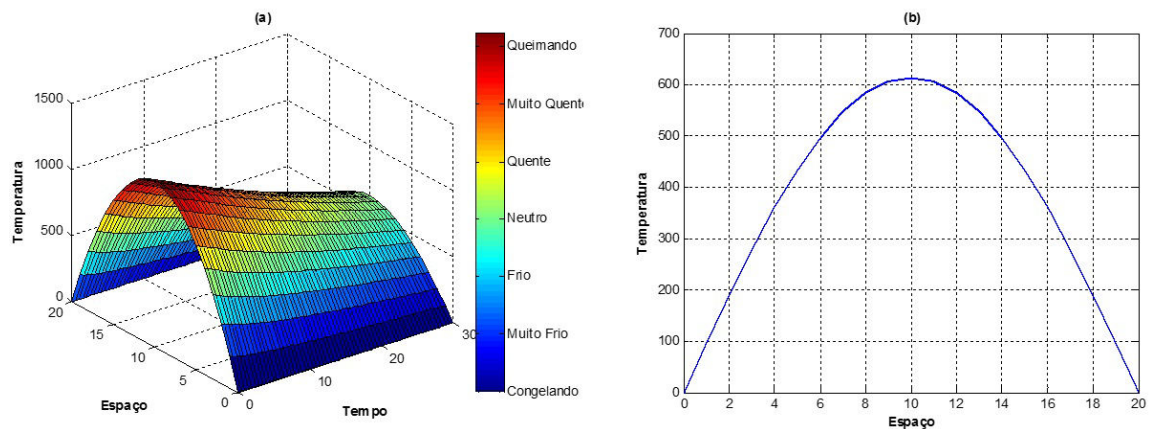
Experimento I. Neste experimento consideramos os seguintes dados numéricos : $L = 20$, $T = 30$, $J + 1 = 20$ e $N + 1 = 60$, com isso obtemos um retângulo com um total de $J \cdot N = 1121$ pontos interiores, conforme pode ser visto na figura abaixo.

Figura 5.7: Domínio $[0, L] \times [0, T]$ discretizado: 20×60



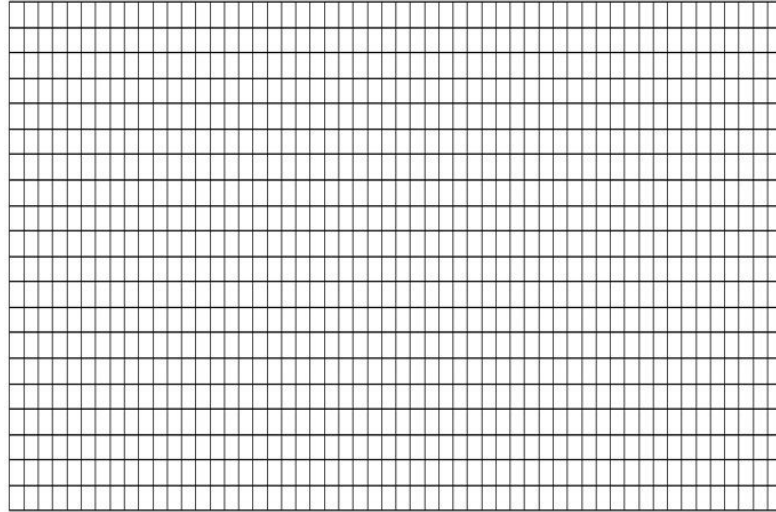
De acordo com o critério de estabilidade, visto na Seção 5.2 temos que $\sigma = 0,5$ e portanto obtemos uma solução numérica convergente, conforme mostra a figura abaixo.

Figura 5.8: Solução Numérica (a) e Solução Numérica no último passo de tempo (b)



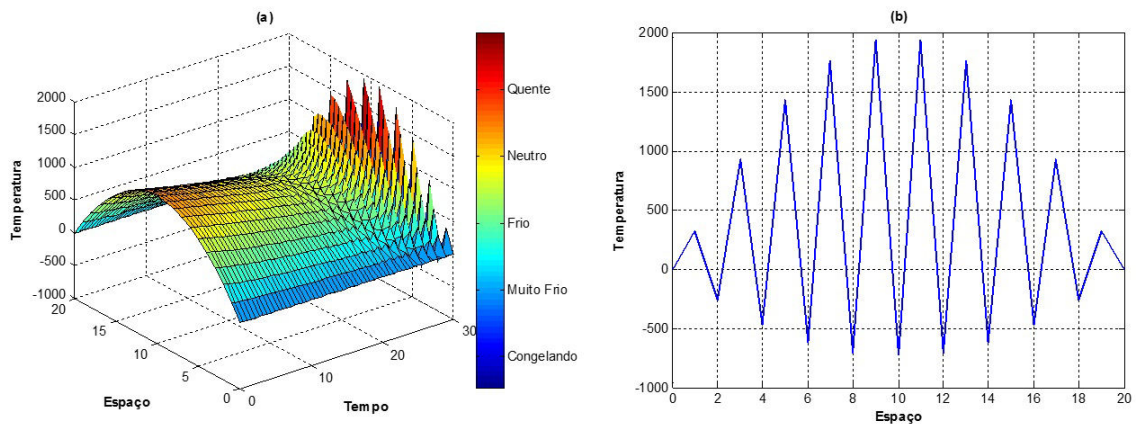
Experimento II. Neste experimento consideramos os seguintes dados numéricos: $L = 20$, $T = 30$, $J + 1 = 20$ e $N + 1 = 54$, com isso obtemos um retângulo com um total de $J \cdot N = 1007$ pontos interiores, conforme pode ser visto na figura abaixo.

Figura 5.9: Domínio $[0, L] \times [0, T]$ discretizado: 20×54



De acordo com o critério de estabilidade, visto na Seção 4.2 temos que $\sigma = 0,5556$ e portanto obtemos uma solução numérica não convergente, conforme mostra a figura a seguir.

Figura 5.10: Solução Numérica (a) e Solução Numérica no último passo de tempo (b)



CONSIDERAÇÕES FINAIS

Diante do que foi exposto, podemos entender que a utilização do ambiente de modelagem computacional no processo de ensino-aprendizagem pode ser promissora na medida em que as atividades de modelagem com esse ambiente computacional sejam devidamente estruturadas, no sentido de levar o aluno ao seu domínio para, então, levá-lo ao desenvolvimento da atividade de conteúdo específico em uma determinada área de conhecimento. Neste trabalho apresentamos a modelagem matemática do problema de condução de calor de forma bem didática e ilustrativa proporcionando um bom entendimento do problema e para simulação computacional usamos o Método de Diferenças Finitas. Os resultados numéricos obtidos nos permite entender um pouco melhor o processo de discretização e compreender como se comporta a dinâmica numérica em diferenças finitas. Os resultados deste experimento confirmam a viabilidade e a eficiência do método dadas as suas condições inicial e posterior observação do critério de estabilidade, pois podem influenciar no modelo numérico a ser considerado. Dessa forma, procuramos estimular novos estudos, para que alunos possam se interessar por matemática aplicada, mais precisamente pelos métodos numéricos de discretização e modelagem computacional de problemas interdisciplinares.

Referências Bibliográficas

- [1] BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e tecnológica. **Parâmetros curriculares nacionais: ensino médio: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias**/Ministério da educação. Brasília: Ministério da Educação/-Secretaria de educação Média e Tecnológica, 1999.
- [2] Cuminato, J.A. e Menenguette Jr., M. **Discretização de Equações Diferenciais Parciais: Técnicas de Diferenças Finitas**, SBMAC, 1996.
- [3] Cunha, C. **Métodos numéricos para as engenharias e ciências aplicadas**. Editora da UNICAMP, Campinas, 1993.
- [4] Figueiredo, D. G. **Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais**, 4. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2005.
- [5] Guinness, I. G. and Ravetz, J. R. **Joseph Fourier, 1768-1830: A Survey of His Life and Work**, MIT, Cambridge, 1972.
- [6] Herivel, J. **Joseph Fourier, The Man and the Physicist**, Clarendon Oxford, London, 1975.
- [7] Kern, D. Q. **Processos de Transmissão de Calor**. Rio de Janeiro: Ed. Guanabara, 1987.
- [8] Kreith, F. e Bohn, M. S. **Princípios de Transferência de Calor**. São Paulo: Thomson, 2003.
- [9] Lima, E. L. **Análise Real Volume 1: Funções de uma Variável**, 8. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2006.

- [10] Soares, L. F. G. **Modelagem e Simulação Discreta de Sistemas**, Ed. Campus, São Paulo, 1992.
- [11] Stkiwerda, J. C. **Finite Difference Schemes and Partial Differential Equation**. Second Edition. Jiam, 1989.
- [12] Bassanezi, R. C. **Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática**. São Paulo: Contexto, 2002.
- [13] Fourier, J. B. J. **Théorie Analytique de la Chaleur**. Firmin Didot, Paris, 1822. Disponível em: <<http://www.e-rara.ch/doi/10.3931/e-rara-19706>>. Acesso em: 02 fev. 2016.
- [14] Stegemann, C. et al. **A Matemática está Errada**. Globo Ciência. p. 47 – 52, 1994.