



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA  
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

MÁRCIO RODRIGO DA ROCHA PINHEIRO

# A UTILIZAÇÃO DE CONCEITOS VETORIAIS NO ENSINO DA GEOMETRIA ELEMENTAR

Belém

2016



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA  
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

MÁRCIO RODRIGO DA ROCHA PINHEIRO

# A UTILIZAÇÃO DE CONCEITOS VETORIAIS NO ENSINO DA GEOMETRIA ELEMENTAR

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requisito parcial para obtenção do grau de mestre em Matemática do programa de mestrado profissional (PROFMAT) da Universidade Federal do Pará.

Orientador: Prof. Dr. Valcir João da Cunha Farias

## FOLHA DE AVALIAÇÃO

MÁRCIO RODRIGO DA ROCHA PINHEIRO

### A UTILIZAÇÃO DE CONCEITOS VETORIAIS NO ENSINO DA GEOMETRIA ELEMENTAR

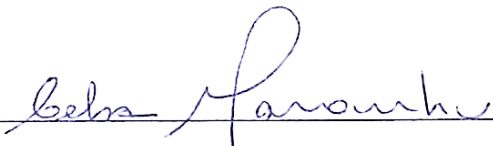
Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requisito parcial para obtenção do grau de mestre em Matemática do programa de mestrado profissional (PROFMAT) da Universidade Federal do Pará, avaliado pela seguinte banca examinadora:

Orientador: 

Prof. Dr. Valcir João da Cunha Farias – PROFMAT-PPGME/UFPA

Membro: 

Prof. Dr. Anderson David de Souza Campelo – PROFMAT-PPGME/UFPA

Membro: 

Prof.ª Dr.ª Celsa Herminia de Mélo Maranhão – FACMAT/UFPA

DATA DA AVALIAÇÃO: 13/04/2016

RESULTADO: APROVADO

Dedico este trabalho à minha família e aos  
novos amigos adquiridos durante o mestrado.

## AGRADECIMENTOS

Aos meus amados esposa e filhos, por todo amor, carinho e compreensão.

Aos meus pais, pelo dom da vida e por terem sido essenciais na minha trajetória.

Ao meu irmão, pelo auxílio neste trabalho e pelo zelo e amor com o nosso pai.

Aos diletos professores dedicados a transmitir o conhecimento.

A todos aqueles que tiveram interesse em compartilhar comigo o prazer pela descoberta.

“Em verdade, o que proporciona o máximo de prazer não é o conhecimento e sim a aprendizagem, não é a posse, mas a aquisição, não é a presença, mas o ato de chegar lá.”

Carl Friedrich Gauss.

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)  
Sistema de Bibliotecas da UFPA

---

Pinheiro, Márcio Rodrigo da Rocha, 1977-

A utilização de conceitos vetoriais no ensino da geometria elementar / Márcio Rodrigo da Rocha Pinheiro.  
- 2016.

Orientador: Valcir João da Cunha Farias.  
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Programa de Pós-Graduação em Matemática (Mestrado Profissional), Belém, 2016.

1. Geometria-Estudo e ensino. 2. Geometria vetorial. 3. Matemática-Estudo e ensino. 4. Geometria-Estratégia de aprendizagem. 5. Vetores (Matemática). I. Título.

CDD 22. ed. 516.18207

---

# Sumário

RESUMO	1
INTRODUÇÃO	2
1 ASPECTOS HISTÓRICOS	9
2 VETORES: ABORDAGEM GEOMÉTRICA	11
2.1 SEGMENTOS DE RETA	11
2.2 SEGMENTOS ORIENTADOS	13
2.3 SEGMENTOS EQUIPOLENTES	14
2.4 VETORES	17
2.5 A ADIÇÃO E A MULTIPLICAÇÃO POR ESCALAR	20
2.5.1 ADIÇÃO VETORIAL	20
2.5.2 MULTIPLICAÇÃO POR ESCALAR	23
2.5.3 PROPRIEDADES BÁSICAS	24
2.6 ATIVIDADES INICIAIS PROPOSTAS	29
3 UM PONTO DE VISTA MAIS ALGÉBRICO	44
3.1 VETORES E PONTOS	44
3.2 UMA NOTAÇÃO FUNDAMENTAL	45
3.3 ADIÇÃO E MULTIPLICAÇÃO POR ESCALAR COM COORDENADAS	48
3.4 O PRODUTO INTERNO	51
3.5 O PRODUTO VETORIAL	57
3.6 O PRODUTO MISTO	67
4 MAIS ATIVIDADES PROPOSTAS	71
5 ALGUMAS CONSIDERAÇÕES	90
REFERÊNCIAS	92



## Resumo

O presente trabalho objetiva mostrar conceitos e propriedades referentes à noção elementar de vetor, a fim de que sirvam como ferramentas e técnicas adicionais às estratégias de solução de problemas de Geometria. Deseja-se evidenciar que as ideias relativas aos vetores integram o âmbito da Matemática, muito embora encontrem vasta aplicação noutras áreas do conhecimento, notadamente na Física. Após uma exposição minuciosa da teoria básica necessária, com o devido rigor, definindo-se os elementos característicos de um vetor, módulo, direção e sentido, assim como as operações de adição entre vetores, produto por escalar, produto interno, produto vetorial e produto misto, com ênfase nas propriedades geométricas das mesmas e nas respectivas caracterizações por meio do uso de coordenadas cartesianas ortogonais, enfoca-se a aplicação do referido tema especificamente na procura por soluções de questões de geometria, buscando-se como resultado primordial que os alunos fiquem cientes do alcance e da utilidade dos métodos vetoriais elementares dentro da própria Matemática.

Palavras-chave: Ensino de Matemática, Vetores, Geometria, Estratégias de Solução de Problemas.

## Abstract

This paper discusses concepts and properties related to the elementary notion of vector, in order to serve as additional tools and techniques to geometry problem solving strategies. It is hoped to show that the ideas concerning the vectors within the scope of Mathematics, although find wide application in other fields of knowledge, especially in Physics. After a detailed presentation of the necessary basic theory, with due rigor, defining the elements of a vector, module and direction, as well as the operations of addition of vectors, product by scalar, dot product, cross product and mixed product, with emphasis on geometric properties of the same and its characterizations through the use of orthogonal cartesian coordinates, focuses on whether the application of that issue specifically in the search for geometry problems solutions, seeking as a primary outcome that students gain aware of the reach and utility of basic vector methods within the Mathematics.

Key-words: Teaching of Mathematics, Vectors, Geometry, Problem Solving Estrategies.

## INTRODUÇÃO – A ECLOSÃO DA PROPOSTA

Em minha prática docente, iniciada no ano de 1997, sempre admiro quando os alunos apresentam soluções distintas das minhas a questões dos mais diversos níveis de dificuldade. Em certos casos, até mesmo mais elegantes. Desde o início da carreira de professor, atrai-me a máxima atribuída a Aristóteles (384 a.C. – 322 a.C.): “o verdadeiro discípulo é aquele que consegue superar o mestre”. Nos idos do ano 2002, uma situação peculiar me chamou bastante atenção e foi um verdadeiro marco na minha vida profissional.

Propus a uma turma do 3º ano do Ensino Médio a seguinte questão, a qual chamarei de Problema Motivador, extraída do Concurso Público de Admissão ao Colégio Naval, instituição militar de Ensino Médio, concurso esse destinado a selecionar candidatos em nível nacional, entre 15 e 18 anos, possuindo o ensino fundamental completo:

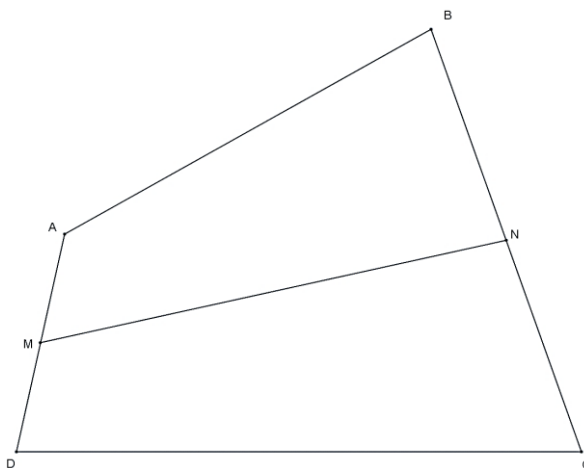
Seja ABCD um quadrilátero qualquer onde os lados opostos NÃO são paralelos. Se as medidas dos lados opostos AB e DC são, respectivamente, iguais a 12 e 16, um valor possível para o segmento de extremo M (ponto médio do lado AD) e N (ponto médio do lado BC) é

- a) 12,5      b) 14      c) 14,5      d) 16      e) 17

(PROCESSO SELETIVO DE ADMISSÃO AO COLÉGIO NAVAL, 2000).

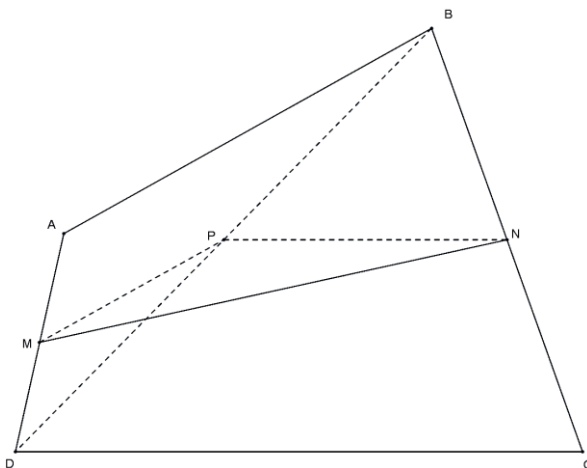
Ressaltando que a questão não trazia figura para auxiliar na resolução, foi proposta aos alunos a Figura 1 a seguir, com vistas a auxiliar na visualização do problema e obter uma solução empregando argumentos de geometria plana euclidiana. Destaque-se também que todas as figuras no presente estudo foram criadas pelo autor, com o auxílio do *software* de matemática dinâmica de livre distribuição Geogebra, uma ferramenta com muitos recursos úteis à apresentação do tema em estudo aos alunos da Educação Básica.

**Figura 1:** Esboço da situação descrita no Problema Motivador.



Inicialmente, seja ABCD o quadrilátero considerado, em que, por exemplo,  $AB = 12$  e  $CD = 16$ . Por simplicidade, suponha-se ABCD convexo. Trace-se uma das diagonais, como  $\overline{BC}$ , dividindo o quadrilátero em dois triângulos, ABD e BCD. Denominando P o ponto médio da diagonal construída, note-se que o segmento  $\overline{MP}$  é uma base média do triângulo ABD. Portanto, além de paralelo ao lado  $\overline{AB}$ , MP é a metade desse lado, ou seja,  $MP = 6$ . De modo inteiramente análogo, NP é a metade de CD, isto é,  $NP = 8$ , como se indica na Figura 2.

**Figura 2:** Esboço do Problema Motivador, com traçados adicionais.



Uma vez que ABCD não é um trapézio, por hipótese, M, P e N não são colineares. De fato, como  $\overline{MP}$  e  $\overline{NP}$  são paralelos a  $\overline{AB}$  e a  $\overline{CD}$ , respectivamente, caso ocorresse o alinhamento de M, P e N,  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$  seriam paralelos, o que é um absurdo. Assim, existe o triângulo MNP, no qual, pela desigualdade triangular, segue que:

$$|\overline{MP} - \overline{NP}| < \overline{MN} < \overline{MP} + \overline{NP} \Leftrightarrow |6 - 8| < \overline{MN} < 6 + 8 \Leftrightarrow 2 < \overline{MN} < 14.$$

Desse modo, a única alternativa no diapasão do resultado encontrado é a alternativa A, em que se tem o valor 12,5.

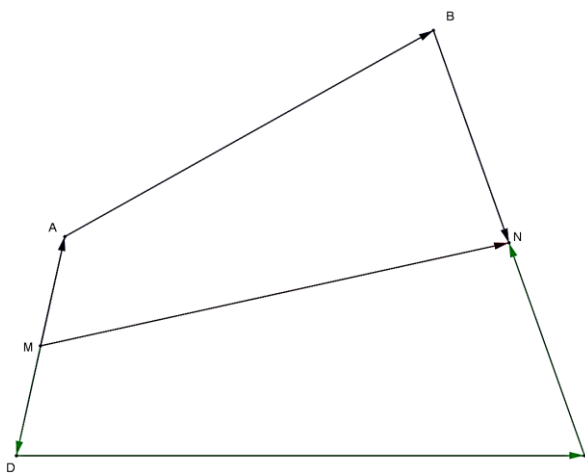
Observe-se que a medida MN é variável com o ângulo entre os lados  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$ . Além disso, convém destacar o considerável nível de dificuldade de obtenção da solução apresentada, principalmente do ponto de vista heurístico, uma vez que foram exigidas construções de elementos novos, originalmente não expressos no enunciado, a saber: uma diagonal do quadrilátero, o correspondente ponto médio e as bases médias mencionadas.

Um dos alunos, após assistir à resolução exposta, afirmou ter encontrado outro caminho para alcançar o mesmo resultado. E ditou os seguintes procedimentos, de sua própria autoria, como declarou.

Note-se que os vetores  $\overrightarrow{MA}$  e  $\overrightarrow{MD}$  são opostos, bem como  $\overrightarrow{BN}$  e  $\overrightarrow{CN}$ . Portanto, em cada par mencionado, um vetor anula o outro, quando somados. Lembrando da definição de soma vetorial, visualizada pela regra do polígono e ilustrada na Figura 3, tem-se que:

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{MN} \text{ e } \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{MN}.$$

**Figura 3:** Sistematização vetorial do problema motivador.



Somando essas igualdades e considerando os vetores opostos citados, conclui-se que:

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}).$$

Pela desigualdade triangular, sabe-se que:

$$\left| |\overrightarrow{AB}| - |\overrightarrow{DC}| \right| \leq |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}| \leq |\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{DC}|.$$

Ocorre alguma das duas igualdades se, e somente se, os vetores  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{DC}$  possuem mesma direção, isto é, são paralelos, o que não é o caso. Desse modo, conclui-se que:

$$2 < |\overrightarrow{MN}| < 14.$$

Comparando-se as duas soluções, vê-se que, apesar de ambas terem fundamento na desigualdade singular, a que emprega conceitos vetoriais é nitidamente mais natural, decorrendo da mera observação de conceitos simples, como a soma vetorial e vetores opostos.

A primeira, sintética, também lança mão de resultados básicos, porém exige uma boa dose de criatividade para as construções das “linhas mágicas”, isto é, de traçados que não existiam na figura descrita no enunciado. A segunda também exige criatividade, sem dúvida, mas é, sob certo aspecto, mais natural.

Inspirado no sucesso dessa linha de raciocínio, a utilização de conceitos vetoriais no ensino da Geometria passou a ser uma presença cada vez mais constante nas minhas aulas. A força dos métodos vetoriais impõe-se claramente pelo emprego de ferramentas algébricas numa área em que os alunos e mesmo os professores normalmente não estão habituados a usá-las adequadamente, a Geometria.

Numa extensa pesquisa realizada, tanto bibliográfica quanto em sítios eletrônicos na internet, constatou-se a escassez de material versando especificamente sobre as aplicações dos métodos vetoriais à geometria sintética, não obstante a farta quantidade de trabalhos dedicados às aplicações vetoriais na geometria analítica, especialmente a três dimensões, equacionando-se retas, planos e outros entes geométricos, o que não configura o foco deste trabalho. A quase totalidade dos problemas utilizados na presente apresentação foi baseada nas obras de Sharygin (1984), Engel (1998) e Givental (2008).

O objetivo geral deste trabalho é apresentar técnicas vetoriais elementares na resolução de problemas geométricos, de modo que alunos a partir dos anos finais do Ensino Fundamental e, notadamente, do Ensino Médio, já com mais experiência algébrica, ampliem a gama de conhecimentos necessários à obtenção de uma solução efetiva de tais exercícios. Por conseguinte, pretende-se estimular esse tipo de enfoque entre os professores desse nível de ensino, sem nenhuma pretensão de esgotar o tema, contudo.

Com a praticamente totalidade dos alunos da Educação Básica, há contato com o conceito fundamental de vetores somente por intermédio da Física e, eventualmente, da Química, quando nessa última se estuda, por exemplo, a noção de momento dipolo elétrico molecular. Por conta disso, não é rara a percepção do estudante de que os conceitos vetoriais pertencem ao domínio da Física, quando, em verdade, trata-se de objetos matemáticos, cuja importância é tamanha que as aplicações da ideia irradiam-se por outras áreas do conhecimento.

Ainda sobre o assunto, merecem destaque alguns comentários realizados após uma análise minuciosa, organizada pela Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), de uma dentre doze coleções de livros didáticos das mais usadas no Brasil: “Por alguma obscura razão, ou por

nenhuma em especial, o importante conceito matemático de vetor [...] é personagem ausente deste e dos demais compêndios brasileiros, sendo usado apenas pelos professores de Física” (LIMA, 2001, p.62).

No exame de outra coleção de livros didáticos, é realizada a seguinte observação pertinente: “um dos defeitos deste livro e de todos os livros de Matemática para o ensino médio existentes no mercado é a completa omissão de vetores. Estranhamente, vetores são ensinados nos livros de Física, não nos de Matemática” (LIMA, 2001, p.130).

Os objetivos específicos do presente estudo consistem em apresentar as operações elementares com vetores e respectivas propriedades, exhibir estratégias vetoriais na resolução de problemas geométricos e mostrar que o tema é efetivamente matemático, a despeito das mais variadas e essenciais aplicações noutras áreas de conhecimento.

A ideia de vetor surge quando se classificam as grandezas, isto é, propriedades mensuráveis de um corpo, em escalares e vetoriais. Segundo Lipschutz e Lipson (2011), uma grandeza é dita escalar quando necessita tão somente de um único número real para descrevê-la por completo, mensurá-la, uma vez fixada a unidade de medida. Exemplos são a massa, a temperatura, a densidade, a concentração, dentre vários outros. Basta dizer que um corpo possui 17 kg que a informação sobre a massa do mesmo já é suficiente. Analogamente, é suficiente informar que o mesmo está a  $-5^{\circ}\text{C}$  ou possui  $2\text{ g/cm}^3$  a fim de conhecer o que é preciso sobre a temperatura e a densidade do corpo.

Por outro lado, uma grandeza é dita vetorial quando se torna imprescindível descrevê-la por meio de uma direção e um sentido, além de um número real. A velocidade e a aceleração de um corpo, bem como as forças aplicadas sobre ele são exemplos clássicos, mas há vários outros, normalmente com aplicações em Física, além da Química, como o já mencionado momento dipolo elétrico de uma molécula. Quando se informa, por exemplo, que sobre um corpo atua uma força de intensidade igual a 29 N, é crucial, ainda que o corpo seja puntiforme, saber em que direção essa força está agindo, além de conhecer se está a puxar ou a empurrar o corpo, caracterizando a ideia de sentido (Lipschutz e Lipson, 2011).

No presente trabalho, supor-se-á que todos os pontos em questão estão inseridos no dito espaço tridimensional euclidiano usual, cujo estudo é comumente concluído nos anos finais do Ensino Médio, por meio da denominada geometria espacial euclidiana. Previamente, como se sabe, o estudante é apresentado desde as séries iniciais do Ensino Fundamental, às noções

básicas da clássica geometria plana euclidiana, momento em que o estudo das propriedades fundamentais das figuras pode ser resumido a uma análise bidimensional, isto é, quando se está restrito a pontos contidos num mesmo plano, fixado, do espaço tridimensional euclidiano. Com a devida adequação, boa parte desta apresentação pode ser limitada a um plano, tornando possível a introdução de parte do tema desde os últimos anos do Ensino Fundamental.

O Capítulo 1 mostra uma sucinta história das ideias envolvendo vetores, para melhor compreensão das origens das técnicas exibidas neste trabalho, servindo também de motivação inicial do assunto, por meio do emprego da história da Matemática, reconhecidamente útil ao processo de ensino-aprendizagem. Com efeito, frequentemente o desenvolvimento histórico de um tópico particular é a melhor maneira de apresentá-lo, para que os professores possam ajudar os estudantes a construir o próprio conhecimento matemático (SWETZ et al., 1995).

No Capítulo 2, apresentam-se os conceitos iniciais de vetores, dando ênfase a uma abordagem mais geométrica, sem abrir mão do rigor, o qual, todavia, é naturalmente limitado pelo nível de cognição do estudante que, em última análise, integra o público-alvo dos resultados a serem alcançados por estas linhas. Introduz-se a noção de equipolência, bem como as operações de adição e multiplicação por escalar, devidamente acompanhadas das propriedades mais importantes. No epílogo, exibem-se alguns problemas iniciais, respectivamente acompanhados de propostas de soluções, a fim de mostrar como já é possível relacionar os conceitos expostos, ainda sem o uso explícito de coordenadas, a questões geométricas básicas. Até esse ponto, entende-se como material ao alcance do aluno cursando o último ano do Ensino Fundamental.

Já o Capítulo 3 encerra uma abordagem mais algébrica, analítica, em que se associa o conceito de vetor a pontos localizados relativamente a um sistema de coordenadas cartesianas. Destaca-se a notação de Grassman, notável pela simplicidade, mas com alcance extenso. São retomadas as operações mais básicas já vistas, explorando-se também três novas de relevância ímpar: os produtos interno, vetorial e misto. É recomendado a estudantes que já detenham mais experiência com a álgebra elementar e rudimentos de trigonometria, preferencialmente a partir da metade final do Ensino Médio, em face de ser conveniente o hábito de lidar com objetos tridimensionais. Contudo, até o ponto em que se estuda o produto interno, é possível fazer adequações para concluintes do Ensino Fundamental, ampliando-se-lhes as condições de utilizar vetores, especialmente quanto à condição de ortogonalidade.

O Capítulo 4 finaliza o desenvolvimento da apresentação com mais aplicações das noções vetoriais ao ensino da geometria, novamente na forma de problemas a serem acrescentados aos já mostrados no Capítulo 2, seguidos de propostas de solução, em que se põem em prática as estratégias apresentadas ao longo do estudo.

Convém informar que, a partir principalmente do Capítulo 3, conhecimentos prévios de geometria analítica, determinantes e sistemas lineares podem ser úteis ao entendimento das operações e respectivas propriedades, embora não indispensáveis, sendo, porém, a determinação das coordenadas cartesianas de um ponto, ainda que a três dimensões, algo que se suporá devidamente conhecido.

É oportuno ressaltar que a SBM aborda o tema “vetores no plano” no documento “contribuição da SBM para a discussão sobre currículo de matemática” (disponível em: [www.sbm.org.br](http://www.sbm.org.br)), o qual tem como objetivo embasar o debate da construção da Base Nacional Comum pelo Governo Federal, promovido no âmbito da sociedade em geral. Apesar de o enfoque no expediente citado ser a utilização no Ensino Médio, de forma suplementar, das noções vetoriais associadas e integradas à geometria analítica, “fornecendo soluções mais rápidas e elegantes”, tal qual expresso no documento sobredito, o escopo aqui é mais amplo, buscando agregar as ideias relacionadas a vetores com argumentos sintéticos também.

Enfim, convém trazer à baila um pensamento que sintetiza a importância do tema e lastreia o presente estudo.

Constatada a utilidade dos métodos algébricos empregados na Geometria Analítica, veremos agora como a eficiência desses métodos cresce ainda mais com a introdução dos vetores. Com eles a Álgebra, além de intérprete dos fatos geométricos, penetra na Geometria e passa a fazer parte dela. (LIMA, 2002, p.85).



## CAPÍTULO 1

### ASPECTOS HISTÓRICOS

As origens das ideias básicas dos conceitos vetoriais perdem-se no tempo, mas, sem dúvida, manifestaram-se primeiramente em estudos físicos do movimento. Há registros da utilização, embora sem referência direta ao conceito de vetor, da regra do paralelogramo já no trabalho intitulado *Mechanica*, atribuído, embora provavelmente de forma incorreta, mas contemporâneo, ao filósofo grego Aristóteles (384 a.C – 322 a.C). Já no tratado *Mecânica*, do também grego Hierão de Alexandria (século I d.C), é apresentada uma prova dessa ideia (SWETZ et al., 1995).

A mesma regra foi usada também pelo inglês Isaac Newton (1642 – 1727), na sua obra-prima *Princípios Matemáticos da Filosofia Natural*, de 1687, na qual se nota que, após a apresentação das suas famosas três leis do movimento, o corolário I mostra como as forças devem ser compostas, baseando-se no postulada da independência do efeito das mesmas: “Um corpo com as forças conjuntas descreve a diagonal de um paralelogramo no mesmo tempo em que com as forças separadas descreve os lados”. Novamente, tal qual desde a antiguidade clássica, faz-se uso do caráter vetorial de entidades como força e velocidade, sem formalizar o próprio conceito de vetor e as suas propriedades e operações (CROWE, 2002).

Cumprе salientar que o próprio Newton foi influenciado pelos métodos algébricos introduzidos para o exame das propriedades geométricas pelos franceses Pierre de Fermat (1601 – 1665) e René Descartes (1596 – 1650), dois dos grandes precursores desse tipo de enfoque, unificando de forma deveras eficiente esses dois ramos da Matemática, a Álgebra e a Geometria, antes praticamente dissociados um do outro (BOYER, 1991).

O estudo dos vetores de modo sistemático e com a devida exploração das propriedades dos mesmos, desvinculadamente da Física, emergiu nos anos finais do século XVIII e começo do século XIX, primeiramente como ferramenta geométrica para representar números complexos quando os vetores ainda eram utilizados apenas na forma bidimensional e correspondiam, assim, a pares ordenados de números reais, ou seja, a pontos de um plano cartesiano. São reconhecidos como estudos independentes o legado do norueguês-dinamarquês Caspar Wessel (1745 – 1818), cujos trabalhos registrados no biênio 1797-1798 não alcançaram a comunidade matemática de sua época, bem como de Jean Robert Argand (1768 – 1822),

francês nascido na Suíça, e do “príncipe da Matemática”, o alemão Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855) (SWETZ et al., 1995).

Depois treze anos de tentativas de expandir essa ideia para três dimensões, coube ao irlandês William Rowan Hamilton (1805 – 1865) criar os quatérnions, em 1843, abandonando a busca por triplas ordenadas de números reais para representar vetores tridimensionais e lançando mão de um sistema de quádruplas desses números, ampliando, por meio de operações convenientemente definidas de adição e multiplicação, as propriedades da álgebra vetorial de somente duas para quatro dimensões. Para tanto, porém, houve necessidade de um passo considerado bastante ousado na época: deixar de lado a até então intocável comutatividade da multiplicação, especificamente aplicada aos quatérnions, o que, sucessivas vezes depois, mostrou-se uma abordagem essencial no desenvolvimento de diversos outros campos da Matemática. Hamilton também foi o primeiro a empregar os termos “escalar” e “vetor”, embora não exatamente com o significado atual (CROWE, 2002).

Paralelamente, com um enfoque diferente e inovador, o matemático italiano Giusto Bellavitis (1803 –1880) publicou em 1832 uma obra versando sobre Geometria na qual explicitou conceitos diretamente relacionados à noção de vetores. Nesse trabalho, introduziu a ideia de equipolência entre segmentos de reta orientados, o que ocorre quando os mesmos são paralelos, possuem igual comprimento e idêntico sentido, consistindo na essência das propriedades das grandezas vetoriais (DELGADO; FRENSEL; CRISSAFF, 2013).

Já o alemão Hermann Günther Grassmann (1809 – 1877) foi o responsável pela primazia na formalização matematicamente adequada da definição de vetor, em qualquer quantidade de dimensões, no seu grande trabalho intitulado *Die Lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik*, de 1844. Durante muito tempo, esse feito não foi bem aceito pelos matemáticos, em face tanto do considerado elevado nível de abstração quanto do fato de Grassmann não possuir reputação acadêmica, comparada à de Hamilton, por exemplo, por ser professor secundário.

Apesar disso, o foco de Grassmann foi se impondo a partir do final do século XIX e início do século XX, apesar de passar por diversas melhorias, ultrapassando em importância e alcance os quatérnions de Hamilton, e provocando o desenvolvimento da álgebra e da análise vetoriais, bem como da Física-Matemática. Em razão disso, os métodos vetoriais, atualmente, compõem a linguagem básica de diversos trabalhos na área da Física e da Matemática. (CROWE, 2002).

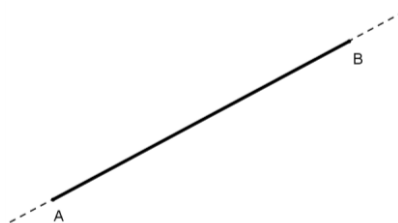
## CAPÍTULO 2

### VETORES: ABORDAGEM GEOMÉTRICA

#### 2.1 SEGMENTOS DE RETA

Como é usual na geometria euclidiana, o conceito de segmento de reta é um dos mais básicos e muitas vezes apresentado de forma intuitiva como uma porção limitada de uma reta, a qual, por sua vez, pressupõe a ideia de ser ilimitada e infinita. De um modo um pouco mais preciso, dados dois pontos A e B localizados numa reta  $r$ , denomina-se segmento de reta com extremos ou extremidades em A e B a união do conjunto formado por esses dois pontos com o conjunto de todos os outros situados entre eles, denominados pontos internos ao segmento. A noção de “estar entre” é normalmente considerada primitiva, isto é, dispensando definição rigorosa nas construções geométricas axiomáticas mais comuns. A reta que contém os pontos do segmento é dita reta suporte do mesmo. A Figura 4 mostra um segmento de reta qualquer.

**Figura 4:** Um segmento de reta,  $\overline{AB}$ , de extremidades nos pontos A e B.



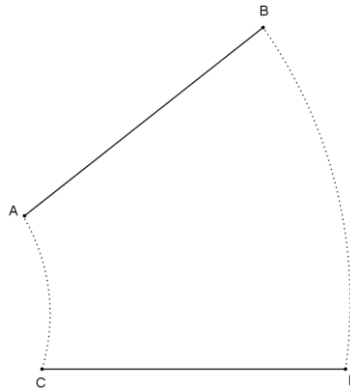
Admite-se o caso especial em que  $A = B$ , situação em que o segmento reduz-se a um único ponto e é denominado segmento nulo.

Da forma como está apresentada essa definição, não há que falar-se em nenhum tipo de ordenação preferencial envolvendo os pontos de um segmento de reta, considerando o fato de a ordem dos elementos ser irrelevante na distinção entre conjuntos. Assim, os segmentos  $\overline{AB}$  e  $\overline{BA}$  são o mesmo conjunto de pontos e, portanto, segmentos de reta iguais.

Outra noção fundamental em geometria euclidiana é a ideia de congruência, particularmente a de congruência de segmentos de reta, comumente adotada como uma noção primitiva, isto é, que não possui definição. Intuitivamente, corresponde à noção de segmentos de reta que têm tamanhos iguais. Em termos não técnicos, dois segmentos de reta são denominados congruentes quando são “iguais”, a despeito de serem conjuntos distintos de pontos, no sentido de poderem sobrepor-se perfeitamente por intermédio de movimentos

rígidos de translação, rotação ou reflexão, tal qual exibido na Figura 5. Utiliza-se a notação “ $\equiv$ ” para indicar a congruência.

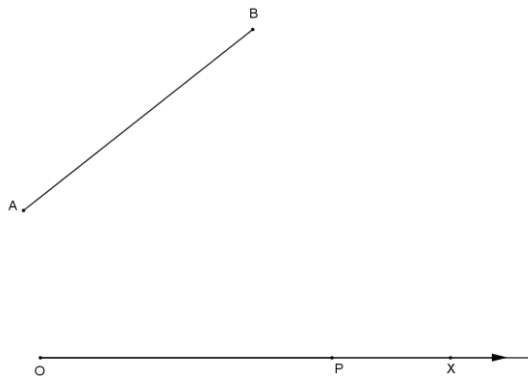
**Figura 5:** Noção intuitiva de congruência de segmentos.



Sob um ponto de vista axiomático, pode-se entender a congruência de segmentos como uma noção primitiva, regrada pelo seguinte postulado, representado na Figura 6 adiante.

Postulado de Transporte de Segmentos: dados um segmento de reta  $\overline{AB}$  e uma semirreta  $\overrightarrow{OX}$ , há um único ponto P em  $\overrightarrow{OX}$  tal que  $\overline{AB} \equiv \overline{OP}$ .

**Figura 6:** Representação do Postulado de Transporte de Segmentos.



A **medida** de um segmento de reta é um número real não negativo univocamente associado a ele, de modo que segmentos de reta congruentes, e somente esses, tenham determinado número real não negativo por medida. Dessa maneira, a cada número real não negativo corresponde um conjunto de segmentos de reta, todos congruentes entre si, que possuem em comum tal valor como medida. Particularmente, a menor medida possível, zero, é atingida se, e somente se, o segmento é nulo. Indica-se a medida de um segmento  $\overline{AB}$  por  $m(\overline{AB})$  ou, mais simplesmente,  $AB$ .

Além disso, uma propriedade fundamental, registrada na Figura 7, acerca do conceito de medida de um segmento de reta é que, por definição, se um ponto B está entre outros dois, A e C, então vale que:

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}, \text{ bem como } AB + BC = AC.$$

**Figura 7:** A soma de segmentos.



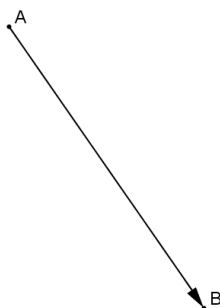
A medida de um segmento de reta também pode ser chamada de comprimento e pressupõe na prática a fixação de uma unidade de medida, como o metro ou algum dos múltiplos ou submúltiplos do mesmo. Também é usual denominar a medida de um segmento  $\overline{AB}$  como a distância (métrica) entre os pontos A e B (RUFINO e PINHEIRO, 2005).

## 2.2 SEGMENTOS ORIENTADOS

Como exposto, a noção de segmento de reta não comporta ordem entre os extremos, isto é,  $\overline{AB} = \overline{BA}$ . Entretanto, em diversas situações específicas convém atribuir a um segmento um sentido preferencial de percurso. Quando se toma um dos pontos A e B para servir de origem, o “ponto de partida”, e o outro para funcionar com a extremidade propriamente dita, o “ponto de chegada”, passa-se a estar diante de um segmento de reta orientado, ou, simplesmente, segmento orientado. A notação a ser empregada para representar o segmento orientado de A para B será  $\overrightarrow{AB}$ . Novamente, reforce-se que a intenção de conceituar segmento orientado é distinguir  $\overrightarrow{AB}$  de  $\overrightarrow{BA}$  (GIVENTAL, 2008).

É usual representar geometricamente um segmento orientado por meio de uma flecha, ou seja, um segmento com uma seta numa das pontas, que se inicia na origem e encerra na extremidade, conforme a Figura 8.

**Figura 8:** Representação geométrica de um segmento orientado  $\overrightarrow{AB}$ .

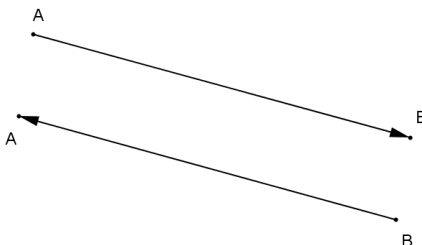


A cada segmento orientado não nulo atribuem-se três características fundamentais: módulo, direção e sentido. O módulo (ou norma) consiste na medida do segmento de reta correspondente. Indica-se tal fato por  $|\overrightarrow{AB}| = AB$ . A direção é dada pela reta suporte do segmento orientado, em geral indicada por uma inclinação, um ângulo medido relativamente a outra reta, tomada como referência. Por fim, o sentido é exatamente o que sugeriu a definição, isto é, a adoção de uma orientação preferencial no percurso, partindo-se sempre da origem até a extremidade.

Quando o segmento orientado é nulo, isto é, a extremidade coincide com a origem, não se definem direção nem sentido ao mesmo, mas tão somente o módulo, que é zero. Aliás, é a única espécie de segmento orientado que possui norma nula. Pode-se representar um segmento orientado nulo por meio de qualquer ponto  $P$  do espaço, pela notação  $\overrightarrow{PP}$ .

Os segmentos de reta orientados  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{BA}$  são ditos opostos, consoante a Figura 9. Note-se que dois segmentos orientados opostos não nulos têm mesmo módulo, mesma direção, porém sentidos opostos. Aceita-se também, por definição, que o oposto de um segmento orientado nulo é o próprio segmentos nulo (LIMA, 2002).

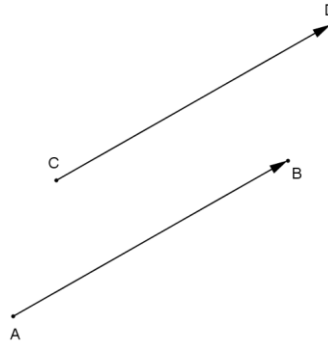
**Figura 9:** Segmentos orientados opostos.



### 2.3 SEGMENTOS EQUIPOLENTES

Dois segmentos orientados não nulos  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{CD}$  são ditos equipolentes, representando-se tal fato por  $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$ , quando possuem mesmo módulo, idênticas direções e iguais sentidos, como mostra a Figura 10. Note-se que a condição de dois segmentos orientados terem mesma direção equivale a que as respectivas retas suportes sejam paralelas, distintas ou coincidentes. Além disso, dois segmentos orientados nulos são, por definição, equipolentes.

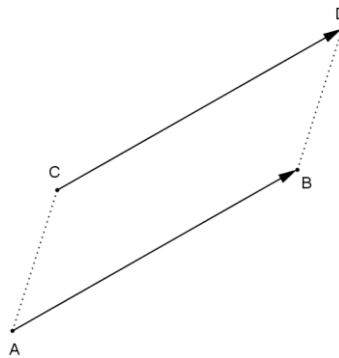
**Figura 10:** Dois segmentos equipolentes.



Se dois segmentos orientados num mesmo sentido comungam a reta suporte, a equipolência deles é equivalente à igualdade entre os módulos.

Igualmente, é fundamental perceber que, sendo os segmentos  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{CD}$  não colineares, a equipolência de ambos equivale ao fato de o quadrilátero ABDC ser um paralelogramo. Observa-se também que a equipolência dos segmentos orientados  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{CD}$  equivale à dos segmentos orientados  $\overrightarrow{AC}$  e  $\overrightarrow{BD}$ , sob mesma fundamentação, fato esclarecido pela Figura 11.

**Figura 11:**  $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$ , não colineares  $\Leftrightarrow$  ABDC é um paralelogramo.

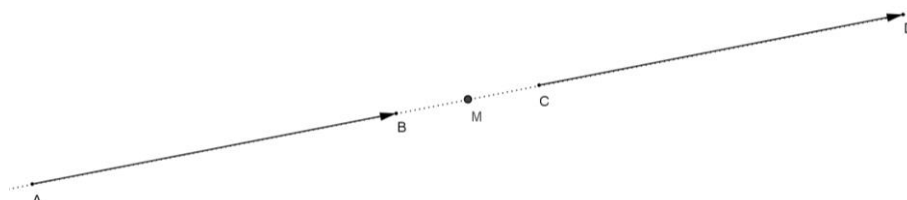


Em qualquer das duas hipóteses, com os segmentos orientados colineares ou não, nota-se facilmente que  $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$  se, e somente se, os segmentos  $\overrightarrow{AD}$  e  $\overrightarrow{BC}$  têm o mesmo ponto médio.

De fato, suponha-se a princípio que  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{CD}$  possuam uma mesma reta suporte. Se forem coincidentes, o resultado é imediato. Caso contrário, denote-se por M o ponto médio de  $\overrightarrow{AD}$ . Então, considerando adicionalmente que A, B, C, D estão dispostos nessa ordem, para fixar ideias, mas sem perda de generalidade, tem-se que  $AM = MD \Leftrightarrow AB + BM = MC + CD$ . Daí, decorre que  $AB = CD$  se, e somente se,  $BM = MC$ , isto é, M é ponto médio de  $\overrightarrow{BC}$ , como

se desejava demonstrar. Essa situação está devidamente apontada na Figura 12. Todas as demais cinco possibilidades de disposição dos pontos A, B, C, D, lembrando que  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$  devem ter o mesmo sentido, são provadas de modo inteiramente análogo.

**Figura 12:**  $\overline{AB} \sim \overline{CD} \Leftrightarrow \overline{AD}$  e  $\overline{BC}$  têm o mesmo ponto médio, quando colineares.

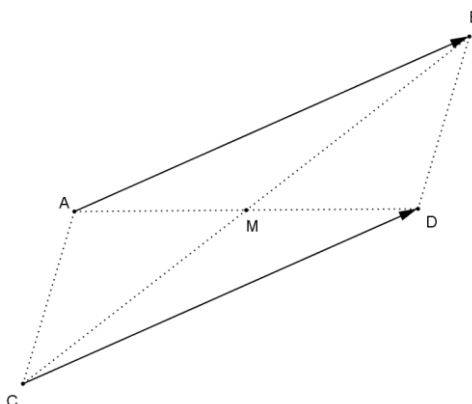


Na hipótese de os pontos A, B, C e D não serem colineares, também é verdade que  $\overline{AB} \sim \overline{CD}$  se, e somente se,  $\overline{AD}$  e  $\overline{BC}$  compartilham o ponto médio. Com efeito, supondo que  $\overline{AB} \sim \overline{CD}$ , considere-se o plano determinado pelas respectivas retas suportes desses segmentos, as quais são paralelas e distintas. Como já destacado, ABDC é um paralelogramo (Figura 11), e, portanto, as diagonais  $\overline{AC}$  e  $\overline{BD}$  encontram-se no ponto médio comum. Reciprocamente, sendo M o ponto de interseção dos segmentos  $\overline{AC}$  e  $\overline{BD}$ , sabe-se da geometria euclidiana que o quadrilátero ABDC é um paralelogramo.

Assim,  $\overline{AB} \sim \overline{CD}$ , o que conclui a demonstração do seguinte resultado, cuja situação mais genérica, de não colinearidade, está esboçada na Figura 13.

**Teorema 1:**  $\overline{AB} \sim \overline{CD}$  se, e somente se,  $\overline{AD}$  e  $\overline{BC}$  têm o mesmo ponto médio.

**Figura 13:** Uma representação do Teorema 1.



A equipolência de segmentos é uma relação de equivalência, ou seja, possui as seguintes propriedades, de verificação imediata (DELGADO; FRENSEL; CRISSAFF, 2013):



a) Reflexividade:  $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{AB}$ .

b) Simetria:  $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD} \Rightarrow \overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{AB}$ .

c) Transitiva:  $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$  e  $\overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{EF} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{EF}$ .

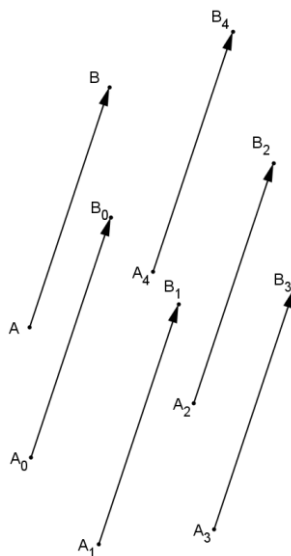
## 2.4 VETORES

Intuitivamente, segmentos equipolentes são “iguais”, por terem mesma direção, bem como módulo e sentido. Do ponto de vista do rigor matemático, todavia, um objeto só é igual a si mesmo. No entanto, é muito útil explorar adequadamente essa noção informal. Para isso, surge o conceito rigoroso de vetor.

Denomina-se vetor o conjunto formado por todos os segmentos equipolentes a um segmento orientado dado e, por conta da transitividade, entre si. Esse tipo de conjunto é matematicamente denominado classe de equipolência. Cada segmento equipolente ao segmento orientado fornecido é denominado um representante do vetor em questão (DELGADO; FRENSEL; CRISAFF, 2013).

É comum representar um vetor por uma letra minúscula do nosso alfabeto, usualmente com uma seta sobre a letra e às vezes em negrito. Assim, dado um segmento orientado  $\overrightarrow{AB}$ , o mesmo define o vetor  $\vec{v}$ . A Figura 14 mostra alguns dos infinitos segmentos orientados que constituem um vetor (GIVENTAL, 2008).

**Figura 14:**  $\vec{v} = \{ \overrightarrow{XY}; \overrightarrow{XY} \sim \overrightarrow{AB} \}$ .



Estende-se o conceito de vetor ao conjunto de todos os segmentos nulos, isto é, de todos os pontos, definindo-se assim o vetor nulo, representado por  $\vec{0}$  ou, se não houver no contexto motivo para confusão com o número zero, simplesmente por 0. Assim,  $\vec{0} = \overline{PP}$ , qualquer que seja o ponto P.

Por mera questão de simplicidade, é frequente escrever  $\vec{v} = \overline{AB} = \overline{A_0B_0} = \overline{A_1B_1} = \dots$ , para indicar que todos os segmentos equipolentes mencionados representam, em verdade, o mesmo vetor. Não obstante se configure num abuso de notação, uma vez que os segmentos orientados acima não são, de fato, iguais, trata-se de simbologia consagrada pelo uso. Dessa forma, a equipolência entre dois segmentos orientados equivale à igualdade dos correspondentes vetores, isto é, sendo  $\vec{v} = \{\overline{XY}; \overline{XY} : \overline{AB}\}$  e  $\vec{w} = \{\overline{PQ}; \overline{PQ} \sim \overline{CD}\}$ , tem-se por evidente que:

$$\overline{AB} \sim \overline{CD} \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{w}$$

Diz-se ainda que a direção, o módulo e o sentido de um vetor são, respectivamente, a direção, o módulo e o sentido de qualquer dos segmentos orientados que o definem.

Quando dois segmentos orientados são opostos um ao outro, representam, igualmente, vetores ditos opostos. Assim, dois vetores são denominados opostos quando possuem mesmo módulo, idêntica direção e sentidos contrários. Sendo  $\vec{v}$  um vetor qualquer, indica-se por  $-\vec{v}$  o vetor oposto. Ademais, o vetor oposto ao vetor nulo é o próprio vetor nulo.

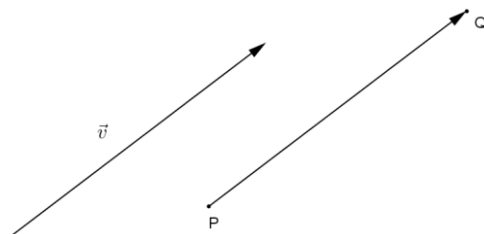
Em decorrência do Postulado V de Euclides, ainda que aplicado ao espaço tridimensional, por um ponto P qualquer, há uma única reta paralela à reta suporte de um vetor dado. Também por conta da construção axiomática euclidiana, fornecido um vetor  $\vec{v}$ , pode-se traçar por P um único vetor  $\vec{v} = \overline{PQ}$ , ou, mais pedantemente, um único segmento orientado  $\overline{PQ}$  pertencente ao vetor  $\vec{v}$ . Isso justifica o resultado seguinte e está indicado na Figura 15.

**Teorema 2:** Por um ponto P qualquer, há um único segmento orientado  $\overline{PQ}$  representando um vetor dado  $\vec{v}$

Com efeito, pelo Postulado das Paralelas, há uma única reta r, paralela à reta suporte do vetor  $\vec{v}$  passando por P. Considerando-se a circunferência C de centro em P e de raio igual a  $|\vec{v}|$ , vê-se que C intersecta r em dois pontos distintos, Q e Q', dos quais um único produz um

segmento orientado  $\overrightarrow{PQ}$  da classe de equipolência de  $\vec{v}$ . Note-se que o resultado subsiste ainda que o vetor  $\vec{v}$  seja nulo, mas com Q coincidindo com Q' (DELGADO; FRENSEL; CRISSAFF, 2013).

**Figura 15:** Ilustração do Teorema 2.



Convém ressaltar que a palavra vetor vem do substantivo latino “vector”, significando “aquele que carrega”, “aquele que transporta”, derivado do verbo “vehere”, “carregar”, “conduzir”, “transportar” (LIMA, 2002). Esse último termo originou também a palavra veículo. Interessante notar que essa significação é amplamente usada em Ciências Biológicas quando se diz, por exemplo, que o inseto da espécie *Aedes aegypti* é o principal vetor dos vírus da dengue, da febre amarela urbana, da chikungunya e da zyka

Em termos matemáticos, o vetor é a essência de um dos conceitos geométricos mais importantes que há: a translação. Trata-se de uma transformação geométrica, mais precisamente uma isometria, que pode ser interpretada como responsável por conduzir pontos de uma figura, preservando as características vetoriais da mesma, ou seja, comprimento (distância), direção e sentido. Essa é uma das maiores aplicações do conceito de vetor, realizar translações.

Novamente utilizando como referência a Figura 15, é conveniente definir que o vetor  $\vec{v}$  realiza a translação (a condução, o transporte) do ponto P ao ponto Q. No capítulo seguinte, será atribuído um significado exato a essa ideia, mas já se pode adiantar que o raciocínio será estabelecer que  $Q = P + \vec{v}$ , do que decorrerá o fato fundamental  $\vec{v} = \overrightarrow{PQ} = Q - P$ .

Por fim, é importante registrar que, a despeito de a totalidade dos conceitos expostos nesses quatro primeiros itens constituir-se possivelmente em um material excessivo a alunos do 9º ano do Ensino Fundamental, reputa-se possível ao professor selecionar excertos, omitindo, por exemplo, algumas demonstrações, ou deixando-as como exercício, para introduzir a ideia de vetor aos estudantes desse nível, de modo que os mesmos possam beneficiar-se ao máximo das operações e propriedades a serem apresentadas a seguir.

A mero título de sugestão, já concretizada em experiências bem-sucedidas em sala de aula, podem ser suprimidas as apresentações axiomáticas de transporte de segmentos, medidas e congruências, assim como a demonstração detalhada do Teorema 1 e a ênfase na definição formal de vetores como classes de equipolência. Basta destacar, em linhas gerais, as características essenciais de um vetor, tanto quanto o fato de que o mesmo pode deslocar-se livremente pelo espaço, mantendo-se o mesmo ente matemático original.

Naturalmente, para alunos no ano final do Ensino Médio, esses tópicos têm, de um modo geral, maior possibilidade de cognição, embora, ainda assim, não mereçam ser a essência nessa introdução elementar a uma primeira aproximação das noções de vetores.

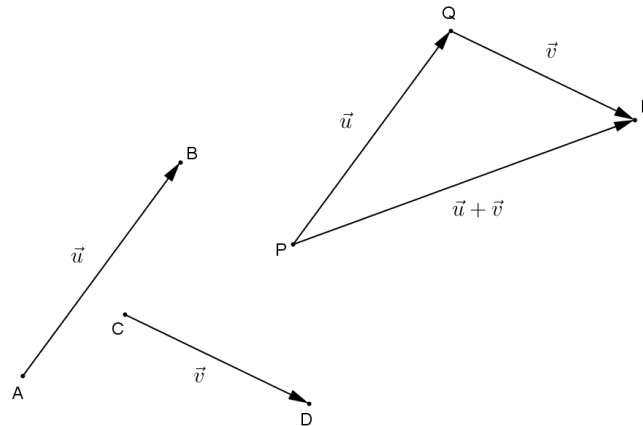
## **2.5 A ADIÇÃO E A MULTIPLICAÇÃO POR ESCALAR**

Dentre as principais operações com vetores, destacam-se inicialmente essas duas pela simplicidade, abrangência e similaridade com as operações correlatas envolvendo números reais.

### **2.5.1 ADIÇÃO VETORIAL**

Considerem-se os vetores não nulos  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  e  $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$ . Seja também P um ponto qualquer do espaço. Traçando-se os segmentos  $\overrightarrow{PQ}$  e  $\overrightarrow{QR}$  respectivamente equipolentes a  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{CD}$ , tem-se por definição que  $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{PR}$ . Na prática, conforme ilustra a Figura 16, para somar dois vetores quaisquer, transladam-se os mesmos de modo que a extremidade de um deles coincida com a origem do outro. Nessas condições, o vetor soma consiste no vetor que possui origem coincidente com a do “primeiro” vetor transladado e extremidade igual à do “último”. As aspas serão justificadas posteriormente, mas já é possível adiantar que se devem à propriedade comutativa dessa operação. É usual denominar esse procedimento para encontrar a soma de dois vetores de regra ou método do polígono, não obstante poder também ser aplicada a dois ou mais vetores de mesma direção, o que, a rigor, não necessariamente formaria um polígono.

**Figura 16:** A soma vetorial, pelo método do polígono.

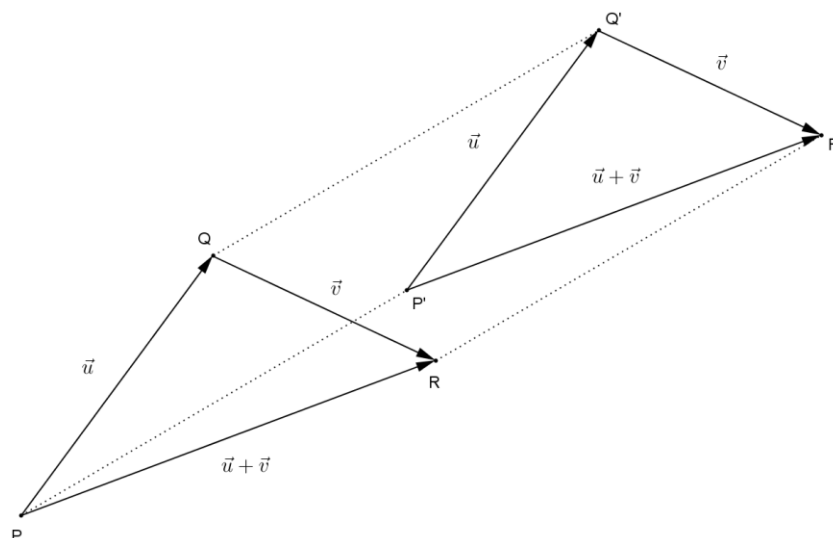


Além disso, por definição, a soma de um vetor qualquer  $\vec{v}$  com o vetor nulo é igual ao vetor original, isto é, define-se o vetor nulo como elemento neutro da adição vetorial:

$$\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}, \forall \vec{v}.$$

Verifica-se que a adição está bem definida, isto é, independe da escolha do ponto P descrito na metodologia precedente. Com efeito, tomando-se um ponto P' distinto de P e traçando  $\overline{P'Q'}$  e  $\overline{Q'R'}$  de modo análogo à construção retro, conclui-se imediatamente que os quadriláteros  $PP'Q'Q$  e  $QQ'R'R'$  são paralelogramos, por terem lados opostos paralelos e congruentes. Por conseguinte, o quadrilátero  $PP'R'R'$  também tem de ser um paralelogramo, em face do que os segmentos  $\overline{PR}$  e  $\overline{P'R'}$  definem um mesmo vetor, diante do Teorema 1, como apontado na Figura 17 (GIVENTAL, 2008).

**Figura 17:** A boa definição da soma vetorial

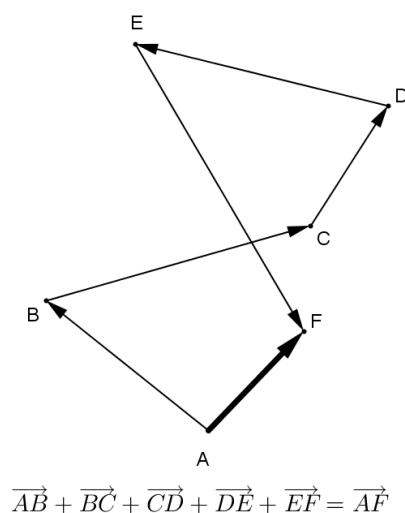


Também cumpre ressaltar que a soma de um vetor qualquer com o seu oposto resulta no vetor nulo, de acordo com a definição dada. Isso conceitua o inverso aditivo de um vetor  $\vec{v}$  como sendo o vetor oposto ao mesmo, de tal sorte que:

$$\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}.$$

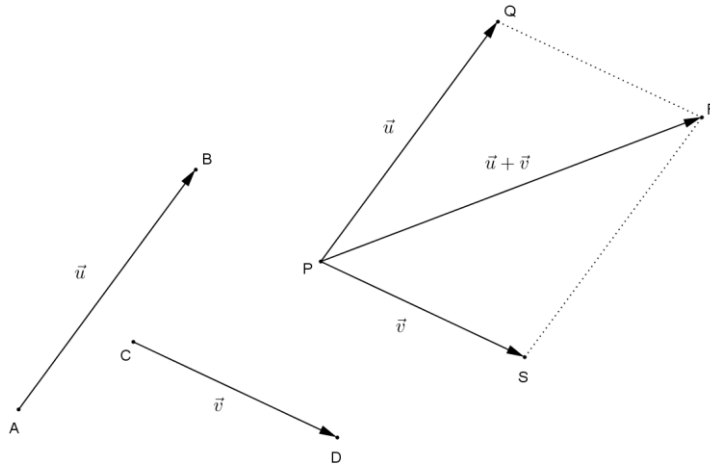
Além disso, a regra do polígono permite obter de modo prático a soma de mais de dois vetores, dispondo os vetores que constituem os termos da soma de forma que a origem do termo seguinte acrescido coincida com a extremidade do anterior. O vetor soma corresponde àquele em que a origem coincide com a do primeiro termo e a extremidade com a do último, tal qual denota a Figura 18, com o auxílio da qual fica mais compreensível o porquê da denominação método do polígono.

**Figura 18:** A regra do polígono aplicado a diversos vetores.



Uma forma alternativa de obter a soma de dois vetores não paralelos e não nulos consiste na regra do paralelogramo. Dados os vetores  $\vec{u} = \vec{AB}$  e  $\vec{v} = \vec{CD}$ , por um ponto arbitrário P do espaço constroem-se os segmentos orientados  $\vec{PQ}$  e  $\vec{PS}$  equipolentes a  $\vec{AB}$  e  $\vec{CD}$ , nessa ordem. Em seguida, traça-se o paralelogramo PQRS, tal qual feito na Figura 19. Dessa forma, a diagonal  $\vec{PR}$  representa a soma  $\vec{u} + \vec{v}$ . Obviamente, os métodos apresentados são equivalentes, isto é, produzem o mesmo resultado para a soma, uma vez que os segmentos orientados  $\vec{PS}$  e  $\vec{QR}$ , tal qual na Figura 19, constituem o mesmo vetor (LIMA, 2002).

**Figura 19:** O método do paralelogramo.



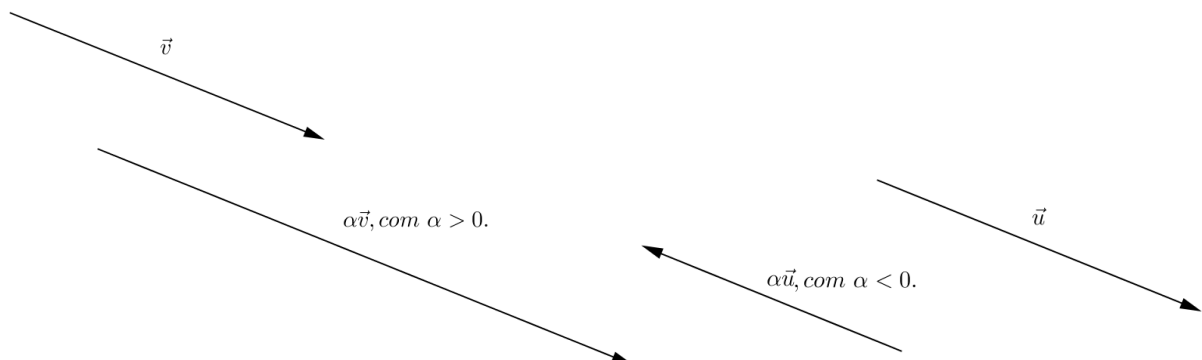
### 2.5.2 MULTIPLICAÇÃO POR ESCALAR

Sejam  $\alpha$  um número real (escalar) qualquer e  $\vec{v}$  um vetor arbitrário. Define-se o produto  $\alpha \cdot \vec{v}$  ou, mais simplesmente,  $\alpha\vec{v}$  o vetor obtido da seguinte forma (LIMA, 2002):

a) Se  $\alpha = 0$  ou  $\vec{v} = \vec{0}$ ,  $\alpha\vec{v}$  é também o vetor nulo.

b) Se  $\alpha \neq 0$  e  $\vec{v} \neq \vec{0}$ , então  $\alpha\vec{v}$  é o vetor que possui módulo igual a  $|\alpha| \cdot |\vec{v}|$ , mesma direção de  $\vec{v}$ . Quanto ao sentido, depende do sinal de  $\alpha$ . Se  $\alpha > 0$ , então os sentidos de  $\alpha\vec{v}$  e  $\vec{v}$  coincidem. Caso  $\alpha < 0$ , os sentidos de  $\alpha\vec{v}$  e  $\vec{v}$  são opostos. Esses fatos estão ilustrados na Figura 20.

**Figura 20:** A multiplicação por escalar.



Quando existe um número real  $\alpha$  tal que  $\vec{u} = \alpha\vec{v}$ , diz-se que o vetor  $\vec{u}$  é múltiplo de  $\vec{v}$ . Claramente, o vetor nulo é múltiplo de qualquer vetor, bastando fazer  $\alpha = 0$ . Além disso, se o vetor  $\vec{u}$  não é nulo, então  $\vec{u}$  ser múltiplo de  $\vec{v}$  equivale a afirmar que  $\vec{v}$  é múltiplo de  $\vec{u}$ :

$$\vec{u} = \alpha \vec{v}, \alpha \neq 0 \Leftrightarrow \vec{v} = \left(\frac{1}{\alpha}\right) \vec{u}.$$

Geometricamente, dois vetores não nulos são múltiplos um do outro se, e somente se, possuem mesma direção, isto é, são paralelos.

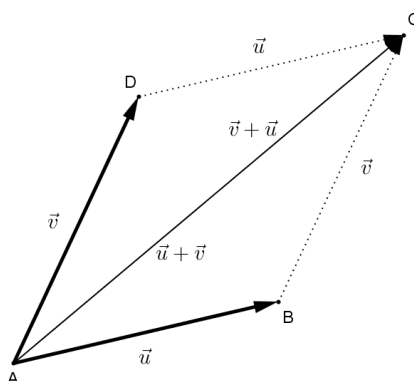
Cumpramos enfatizar que, conforme o módulo do escalar, diferente de zero, relativamente ao módulo do vetor original, suposto não nulo, pode ocorrer uma compressão, uma dilatação ou uma congruência, nos casos em que  $0 < |\alpha| < 1$ ,  $|\alpha| > 1$  ou  $|\alpha| = 1$ , respectivamente. De fato, basta notar que  $|\alpha| \cdot |\vec{v}| < |\vec{v}|$  se, e somente se,  $0 < |\alpha| < 1$ . As demais situações são justificadas analogamente (LIMA, 2002).

### 2.5.3 PROPRIEDADES BÁSICAS

Segue uma lista de propriedades fundamentais (PF) da soma de vetores e da multiplicação por escalar, válidas para quaisquer vetores  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  do espaço, bem como todos números reais  $\alpha$  e  $\beta$ . De um modo geral, as justificativas geométricas foram baseadas na exposição de Givental (2008).

**PF1. Comutatividade:**  $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ . Isso fica evidente com o auxílio da regra do paralelogramo, representada novamente na Figura 21. De fato, pela regra do polígono, nota-se no triângulo ABC que o segmento orientado  $\overrightarrow{AC} = \vec{u} + \vec{v}$ , bem como que, no triângulo ADC,  $\overrightarrow{AC} = \vec{v} + \vec{u}$ .

**Figura 21:** A comutatividade da soma de vetores.

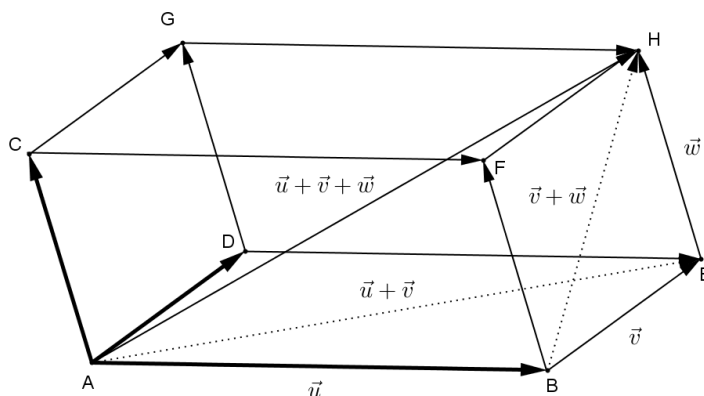


**PF2. Associatividades:**  $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ . Com efeito, no caso geral, em que os três vetores não são necessariamente coplanares, considerem-se os mesmos representados por segmentos orientados de mesma origem, tal qual indicado na Figura 22, em que se construiu o



paralelepípedo ABEDCFHG, de modo que  $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ ,  $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$  e  $\overrightarrow{AD} = \vec{w}$ . Percebe-se assim que a diagonal  $\overrightarrow{AH}$  representa a soma tanto dos vetores representados por  $\overrightarrow{AE} = \vec{u} + \vec{v}$  e  $\overrightarrow{EH} = \vec{w}$ , quanto de  $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$  e  $\overrightarrow{BH} = \vec{v} + \vec{w}$ .

**Figura 22:** A associatividade da adição vetorial.



Também é válida a associatividade na multiplicação por escalar, de modo que:

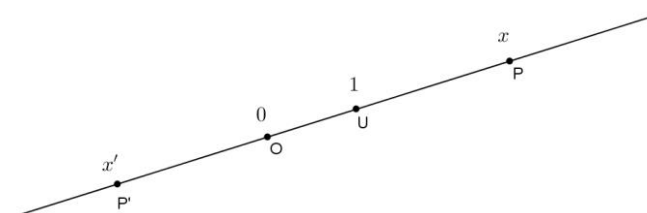
$$\alpha(\beta\vec{u}) = (\alpha\beta)\vec{u}.$$

De fato, como se sabe do estudo dos números reais, existe uma correspondência biunívoca entre o conjunto dos números reais,  $\mathbb{R}$ , e os pontos de um eixo, isto é, de uma reta na qual se escolheu um ponto especial  $O$  para ser denominado origem, bem como um sentido preferencial de percurso, dito positivo. Num eixo, costuma-se fixar também a unidade de medida, por meio de um ponto  $U$ , distinto da origem, tal que  $\overrightarrow{OU}$  tem sentido positivo.

Dessa forma, aceita-se que a cada ponto  $P$  de um eixo corresponde um único número real,  $x$ , e reciprocamente, de tal sorte que, consoante assinalado na Figura 23:

- se  $x = 0$ ,  $P$  coincide com  $U$ ;
- se  $x > 0$ ,  $\overrightarrow{OP}$  tem sentido positivo e módulo igual a  $x$ ;
- se  $x < 0$ ,  $\overrightarrow{OP}$  tem sentido negativo e módulo igual a  $-x$ .

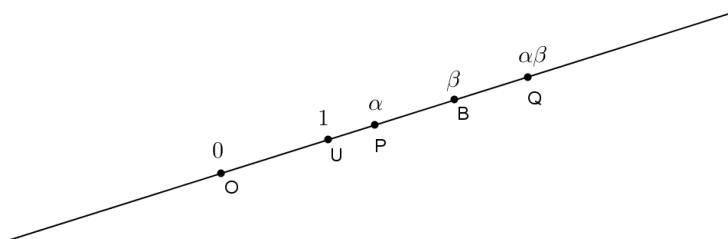
**Figura 23:** O eixo real.



De posse desses fatos, é imediato verificar as propriedades da multiplicação por escalar, dentre elas a associatividade, uma vez que qualquer vetor  $\vec{v}$  admite apenas um segmento orientado de origem em O que o representa. Dessa forma, as propriedades da multiplicação por escalar passam a corresponder a propriedades correlatas dos números reais.

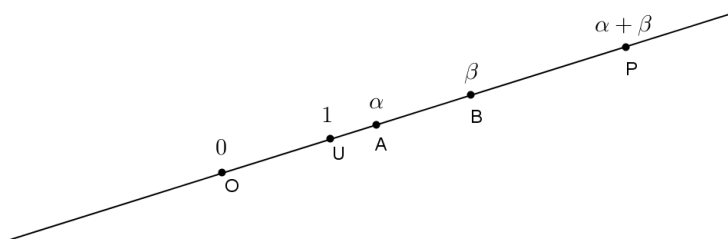
Sejam  $\beta$  um número real qualquer e B o único ponto do eixo que o representa, ou seja,  $\overrightarrow{OB} = \beta\overrightarrow{OU}$ . Qualquer que seja o número real  $\alpha$ , tem-se que  $\alpha\overrightarrow{OB} = \alpha(\beta\overrightarrow{OU})$  representa o vetor correspondente ao número  $\alpha\beta$ , isto é, o vetor  $(\alpha\beta)\overrightarrow{OU}$ , como ilustra a Figura 23. Claramente, isso é válido não apenas para o vetor  $\overrightarrow{OU}$ , mas para qualquer vetor, bastando tomá-lo como unidade.

**Figura 24:** A associatividade do produto por escalar.



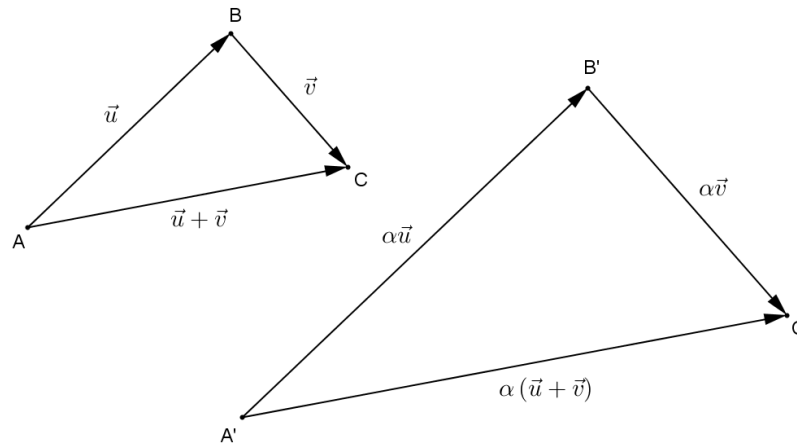
**PF3. Distributividades:**  $(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$ . Com efeito, considerem-se A e B os pontos representativos dos números reais  $\alpha$  e  $\beta$ , respectivamente, como estampado na Figura 25. Então, sendo O o ponto correspondente à origem e U, à unidade, de modo que  $\overrightarrow{OU} = \vec{u}$ , tem-se que  $\overrightarrow{OA} = \alpha\vec{u}$ , bem como  $\overrightarrow{OB} = \beta\vec{u}$ . Dessa maneira, o vetor soma  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$  corresponde ao número real  $\alpha + \beta$ , pela regra do polígono, ou seja, ao vetor  $\overrightarrow{OP} = (\alpha + \beta)\vec{u}$ . Assim,  $(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$ , também conhecida como distributividade com respeito à adição de escalares.

**Figura 25:** A distributividade relativamente à adição de escalares.



Igualmente, tem-se a distributividade da multiplicação por escalar em relação à adição vetorial:  $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$ . Realmente, os casos em que  $\alpha = 0$ ,  $\vec{u} = \vec{0}$  ou  $\vec{v} = \vec{0}$  são imediatos. Suponha-se agora que nenhum dos vetores é nulo, o mesmo ocorrendo com  $\alpha \neq 0$ . Sejam  $\overline{AB} = \vec{u}$  e  $\overline{BC} = \vec{v}$ , conforme a Figura 26. Então,  $\overline{AC} = \vec{u} + \vec{v}$ . Considerem-se  $\overline{A'B'} = \alpha\vec{u}$  e  $\overline{B'C'} = \alpha\vec{v}$ . Nessas condições, devido ao paralelismo de  $\overline{A'B'}$  e  $\overline{AB}$ , bem como de  $\overline{B'C'}$  e  $\overline{BC}$ , devido à definição de multiplicação por escalar, e considerando que o ângulo entre  $\overline{A'B'}$  e  $\overline{B'C'}$  é congruente ao ângulo entre  $\overline{AB}$  e  $\overline{BC}$ , inclusive com a mesma orientação, conclui-se que os triângulos ABC e A'B'C são semelhantes. Portanto,  $\overline{A'C'} = \alpha\overline{AC}$ , ou seja,  $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$ .

**Figura 26:** A distributividade da multiplicação por escalar em relação à adição vetorial



**PF4. Existência de elemento neutro:**  $\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$  e  $1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$ . A primeira identidade foi apresentada como uma definição, no item 2.5.1, ao passo que a segunda decorre diretamente da conceituação de multiplicação por escalar, fornecida em 2.5.2.

**PF5. Existência do elemento inverso aditivo:**  $\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$ , conforme mostrado em 2.5.1 também.

**PF6. Anulamento do produto:**  $0 \cdot \vec{v} = \vec{0}$ . Não obstante tenha sido definido desse modo no item 2.5.2, também seria possível demonstrar esse fato, ao invés de apresentá-lo como definição, através das propriedades retro, caso se note inicialmente que  $(-1) \cdot \vec{v} = -\vec{v}$  (LIPSCHUTZ E LIPSON, 2011). Efetivamente:

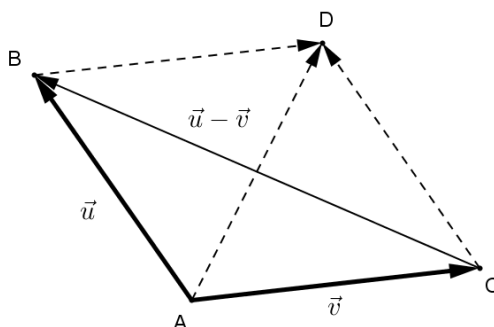
$$0 \cdot \vec{v} = (1 + (-1)) \cdot \vec{v} \stackrel{PF3}{=} 1 \cdot \vec{v} + (-1) \cdot \vec{v} \stackrel{PF4}{=} \vec{v} + (-\vec{v}) \stackrel{PF5}{=} \vec{0}.$$

Com o auxílio da propriedade PF5, pode-se definir mais uma operação básica com vetores, a subtração (ou diferença) vetorial, da seguinte forma:

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v}).$$

Por conseguinte, subtrair dois vetores consiste em somar o minuendo com o oposto do subtraendo. Geometricamente, consoante a Figura 27, a diferença  $\vec{u} - \vec{v}$  entre dois vetores não nulos pode ser obtida como a diagonal que não tem origem comum com os vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ , na aplicação da regra do paralelogramo para a soma vetorial, no sentido da extremidade do vetor precedido do sinal “-” para a extremidade do vetor “positivo” (GIVENTAL, 2008).

**Figura 27:** A subtração vetorial.



Efetivamente, basta notar que, da aplicação do método do polígono,  $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$ , isto é,  $\vec{v} + \overrightarrow{CB} = \vec{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{CB} = \vec{u} - \vec{v}$ , pois, usando apenas as propriedades já conhecidas:

$$\vec{v} + \overrightarrow{CB} = \vec{v} + (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{v} + (\vec{u} + (-\vec{v})) = (\vec{v} + \vec{u}) + (-\vec{v}) = (\vec{u} + \vec{v}) + (-\vec{v}) = \vec{u} + (\vec{v} + (-\vec{v})) = \vec{u} + \vec{0} = \vec{u}.$$

Dada uma quantidade finita de vetores,  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$ , diz-se que um vetor  $\vec{v}$  é combinação linear daqueles quando existirem números reais  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ , tais que:

$$\vec{v} = \alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2 + \dots + \alpha_n \vec{u}_n.$$

Tem-se como consequência imediata da definição que o vetor nulo é sempre combinação linear de quaisquer n vetores dados, bastando fazer os escalares  $\alpha_i, i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , todos iguais a zero.

Para o caso particular de dois vetores, claramente um é combinação linear do outro se, e somente se, um é múltiplo do outro.

## 2.6 ATIVIDADES INICIAIS PROPOSTAS

A seguir, listam-se alguns exemplos de atividades, em forma de problemas com respectivas propostas de soluções, que podem ser resolvidos com a apresentação dos pontos vistos até aqui. Destaque-se que muitos desses problemas já têm condições de serem apresentados, de forma satisfatória, ao aluno que esteja nos anos finais da Educação Básica, com a devida ressalva de que os Problemas 6 e 7, em que se faz necessário um conhecimento trigonométrico um pouco mais refinado.

É interessante procurar conhecer soluções aos problemas eminentemente geométricos apresentados adiante que não utilizem métodos vetoriais, as ditas soluções sintéticas, para fins de comparação com as soluções propostas. A própria busca por tais soluções já consiste em algo que merece ser praticado.

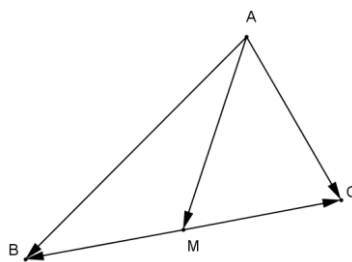
### PROBLEMA 1

Sendo ABC um triângulo qualquer e M o ponto médio do lado  $\overline{BC}$ , expressar o vetor  $\overrightarrow{AM}$ , representativo da mediana relativa ao vértice A, em função dos vetores suportes dos lados.

#### Uma solução:

A situação descrita está esquematizada na Figura 28, em que já se destacaram vetores relevantes.

**Figura 28:** Vetores e a mediana de um triângulo.



Percebem-se as seguintes identidades:

$$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{MB}$$

$$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{MC}$$

Somando membro os vetores indicados, obtém-se que:

$$2\overline{AM} = \overline{AB} + \overline{AC} - \overline{MB} - \overline{MC} = \overline{AB} + \overline{AC} - (\overline{MB} + \overline{MC}).$$

Já que M é o ponto médio do lado  $\overline{BC}$ , os vetores  $\overline{MB}$  e  $\overline{MC}$  são opostos. Portanto,  $\overline{MB} + \overline{MC} = \vec{0}$ , concluindo-se que  $2\overline{AM} = \overline{AB} + \overline{AC}$ . Assim, multiplicando ambos os membros por  $\frac{1}{2}$ :

$$\overline{AM} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{AC}).$$

## PROBLEMA 2

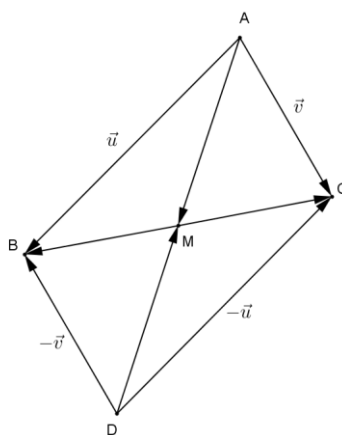
No Teorema 1, apresentado no item 2.3, utilizou-se o fato, considerado conhecido, de que as diagonais de um paralelogramo cortam-se ao meio para demonstrar uma condição necessária e suficiente para a equipolência de dois segmentos equipolentes não colineares.

Supondo-se que não fosse conhecido tal teorema, isto é, as diagonais de um paralelogramo possuírem o mesmo ponto médio, utilizar o resultado do Problema 1 para demonstrar essa propriedade geométrica, partindo-se do fato, considerado conhecido, de que os lados opostos, além de paralelos, são congruentes.

### Uma solução:

Suponha-se que ABDC seja um paralelogramo. Como se sabe que os lados  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$  são paralelos e congruentes, os segmentos orientados  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$  são equipolentes, isto é, representam um mesmo vetor  $\vec{u}$ . Desse modo,  $\overline{DC} = -\vec{u}$ . Analogamente,  $\overline{AC}$  e  $\overline{BD}$  constituem um só vetor,  $\vec{v}$ , em virtude do que  $\overline{DB} = -\vec{v}$ . Isso tudo está assinalado na Figura 29.

**Figura 29:** Diagonais de um paralelogramo cortam-se ao meio.



Seja M o ponto médio da diagonal  $\overline{BC}$ . Deseja-se provar que M também é ponto médio da diagonal  $\overline{AD}$ . De posse da conclusão do Problema 1, pode-se escrever sucessivamente que:

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v});$$

$$\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}) \Leftrightarrow \overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}((- \vec{u}) + (- \vec{v})) = -\frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v}).$$

Diante do exposto, nota-se que  $\overrightarrow{DM} = -\overrightarrow{AM}$ , isto é, os vetores  $\overrightarrow{DM}$  e  $\overrightarrow{AM}$  são opostos. Por conta disso, são paralelos. Como têm um ponto comum, devem ser colineares. Além disso, possuem mesmo módulo, do que se conclui que M é o ponto médio da diagonal  $\overline{AD}$ , como se queria demonstrar.

### PROBLEMA 3

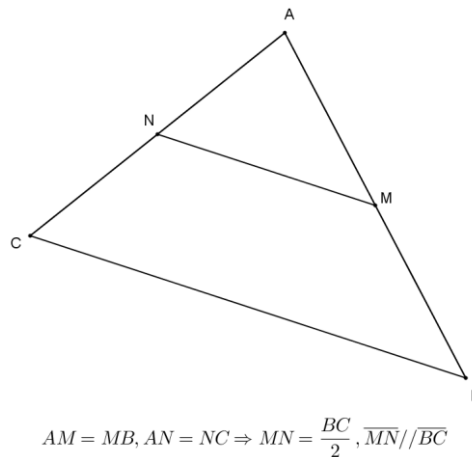
Provar que o segmento que une os pontos médios de dois lados quaisquer de um triângulo arbitrário tem medida igual à metade do terceiro lado e é paralelo a esse.

Tal resultado configura-se num importante teorema da geometria euclidiana. Um segmento que liga os pontos de dois lados de um triângulo é usualmente denominado uma base média do referido triângulo. Por isso, costuma-se chamar o teorema em questão de Teorema da base média.

#### Uma solução:

A Figura 30 esboça a situação. Seja ABC um triângulo qualquer, no qual os pontos M e N são médios, por exemplo e sem perda de generalidade, dos lados  $\overline{AB}$  e  $\overline{AC}$ .

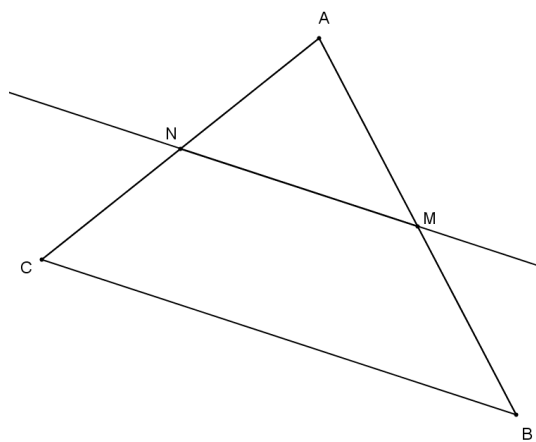
**Figura 30:** O Teorema da base média de um triângulo.



Um modo bastante eficiente de obter esse resultado fundamental consiste em utilizar vetores, destacando-se que  $\overline{AB} = 2\overline{AM}$  (1) e  $\overline{AC} = 2\overline{AN}$  (2). Além disso, tem-se, por exemplo, que  $\overline{MN} = \overline{AN} - \overline{AM}$  (3) e  $\overline{BC} = \overline{AC} - \overline{AB}$  (4). Substituindo-se as identidades contidas em (1) e (2) na igualdade em (4), vê-se que  $\overline{BC} = 2\overline{AN} - 2\overline{AM} = 2(\overline{AN} - \overline{AM})$ . Assim, a partir de (3), obtém-se  $\overline{BC} = 2\overline{MN}$ . Percebe-se, portanto, que  $MN = \frac{BC}{2}$ , bem como  $\overline{MN} // \overline{BC}$ , do modo que se desejava provar.

Observação: Como a reta paralela a  $\overline{BC}$  por M é única, é possível concluir a validade de um resultado similar à recíproca do Teorema da base média: se uma reta passa pelo ponto médio de um dos lados de um triângulo qualquer e é paralela à reta suporte de outro lado, então passa pelo ponto médio do terceiro lado, tal qual representado na Figura 31. As aspas no título indicam não tratar-se efetivamente da recíproca do Teorema da base média, sob o ponto de vista estrito da Lógica Matemática, mas de um resultado que faz lembrar a volta de tal resultado.

**Figura 31:** A “recíproca” do Teorema da base média.



$$AM = MB, N \in \overline{AC}, \overline{MN} // \overline{BC} \Rightarrow AN = NC$$

#### **PROBLEMA 4:**

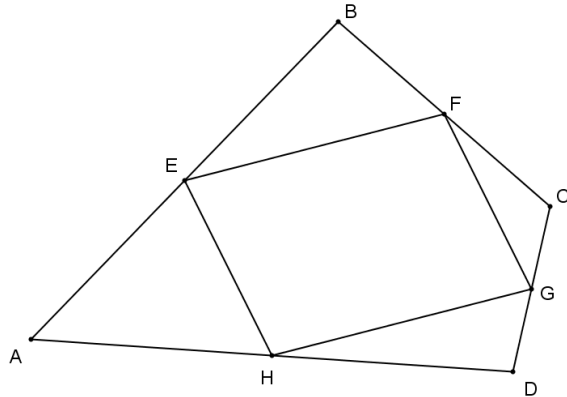
Mostrar que os pontos médios dos lados de um quadrilátero qualquer são os vértices de um paralelogramo.

#### **Uma solução:**

Trata-se igualmente de um resultado clássico, por vezes conhecido como Teorema de Varignon, em homenagem ao matemático francês Pierre Varignon (1654 – 1722) e está representado na Figura 32.



**Figura 32:** O Teorema de Varignon.



$$AE = EB, BF = FC, CG = GD, DH = HA \Rightarrow EFGH \text{ é um paralelogramo.}$$

Embora ilustrado acima para o caso em que o quadrilátero dado é convexo, o resultado também subsiste para quadriláteros côncavos ou até mesmo entrelaçados, isto é, com auto interseção dos lados.

Esta propriedade pode ser facilmente vista como consequência do Teorema da base média. Considerem-se E, F, G e H os respectivos pontos médios dos lados  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CD}$  e  $\overline{DA}$ . Basta notar que  $\overline{EF}$  e  $\overline{GH}$  são bases médias nos triângulos ABC e ACD, respectivamente. Por esse motivo, esses segmentos são paralelos e congruentes entre si, o que já é suficiente para caracterizar EFGH como um paralelogramo. Complementando o raciocínio, nota-se que  $\overline{EH}$  e  $\overline{GF}$  também são bases médias dos triângulos ABC e ACD, na ordem dada.

Alternativamente, este fato poderia ser justificado de forma independente do Problema 3. Com efeito, percebe-se inicialmente que, em face de E, F, G e H serem pontos médios dos lados do quadrilátero ABCD, deve-se impor que  $\overline{EB} = \frac{1}{2}\overline{AB}$ ,  $\overline{BF} = \frac{1}{2}\overline{BC}$ ,  $\overline{GD} = \frac{1}{2}\overline{CD}$  e  $\overline{DH} = \frac{1}{2}\overline{DA}$ .

Além disso:

$$\overline{EF} = \overline{EB} + \overline{BF} = \frac{1}{2}\overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{BC} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{BC}), \text{ bem como}$$

$$\overline{GH} = \overline{GD} + \overline{DH} = \frac{1}{2}\overline{CD} + \frac{1}{2}\overline{DA} = \frac{1}{2}(\overline{CD} + \overline{DA}).$$

Somando, obtém-se que  $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{GH} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA})$ . Porém, a soma entre parêntesis resulta em  $\overrightarrow{AA}$ , ou seja, no vetor nulo. Dessa maneira,  $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{GH} = \vec{0}$ , isto é,  $\overrightarrow{EF} = -\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{HG}$ , o que já é suficiente para caracterizar EFGH como um paralelogramo, concluindo uma demonstração vetorial do Teorema de Varignon.

### PROBLEMA 5

Supondo conhecido o fato geométrico clássico de que o menor dentre todos os infinitos caminhos que conectam dois pontos é o segmento de reta com extremidades nesses dois pontos, demonstrar que, sendo  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  vetores quaisquer, é válida a seguinte relação:

$$\left| |\vec{u}| - |\vec{v}| \right| \leq |\vec{u} + \vec{v}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}|,$$

Ocorrendo alguma das igualdades se, e somente se, um vetor é múltiplo do outro. Tais resultados são conhecidos como desigualdade triangular.

#### Uma solução:

Inicialmente, note-se que, se  $\vec{u}$  ou  $\vec{v}$  é nulo, a propriedade é trivialmente verdadeira. Em verdade, supondo-se, por exemplo,  $\vec{u} = \vec{0}$ , nota-se que:  $\left| |\vec{u}| - |\vec{v}| \right| = |0 - |\vec{v}|| = ||\vec{v}|| = |\vec{v}|$ , bem como  $|\vec{u} + \vec{v}| = |\vec{0} + \vec{v}| = |\vec{v}|$  e  $|\vec{u}| + |\vec{v}| = |\vec{0}| + |\vec{v}| = 0 + |\vec{v}| = |\vec{v}|$ , significando que ocorrem ambas as igualdades e, ademais, o vetor nulo é múltiplo de qualquer vetor.

Considere-se, agora, que nenhum dos vetores seja nulo. Podem ocorrer os seguintes casos:

a)  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  têm mesma direção e mesmo sentido. Assim, existe um número real positivo  $\alpha$ , tal que  $\vec{v} = \alpha\vec{u}$ . Daí, segue sucessivamente que:

$$\text{a.1) } \left| |\vec{u}| - |\vec{v}| \right| = \left| |\vec{u}| - |\alpha\vec{u}| \right| = \left| |\vec{u}| - \alpha|\vec{u}| \right| = \left| |\vec{u}| - \alpha|\vec{u}| \right| = |(1 - \alpha)|\vec{u}| = |1 - \alpha||\vec{u}| = |1 - \alpha||\vec{u}|$$

$$\text{a.2) } |\vec{u} + \vec{v}| = |\vec{u} + \alpha\vec{u}| = |(1 + \alpha)\vec{u}| = |1 + \alpha||\vec{u}| = (1 + \alpha)|\vec{u}|, \text{ visto que } 1 + \alpha > 0;$$

$$\text{a.3) } |\vec{u}| + |\vec{v}| = |\vec{u}| + |\alpha\vec{u}| = |\vec{u}| + \alpha|\vec{u}| = (1 + \alpha)|\vec{u}|.$$

Logo, vê-se que  $|\vec{u} + \vec{v}| = |\vec{u}| + |\vec{v}|$ . Além disso, se  $0 < \alpha < 1$ , tem-se que  $|1 - \alpha||\vec{u}| = (1 - \alpha)|\vec{u}|$ . Nesse caso, como  $1 + \alpha > 1 - \alpha$ , pois  $\alpha > 0$ , vê-se que  $\left| |\vec{u}| - |\vec{v}| \right| < |\vec{u} + \vec{v}|$ . Caso  $\alpha > 1$ , tem-se que  $|1 - \alpha||\vec{u}| = (\alpha - 1)|\vec{u}|$ . Aqui, novamente,  $1 + \alpha > \alpha - 1$ , do que segue também  $\left| |\vec{u}| - |\vec{v}| \right| < |\vec{u} + \vec{v}|$ . Portanto, na hipótese de  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  terem mesma direção e mesmo sentido, conclui-se que  $\left| |\vec{u}| - |\vec{v}| \right| < |\vec{u} + \vec{v}| = |\vec{u}| + |\vec{v}|$ .

b)  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  possuem mesma direção, mas sentidos contrários. Agora,  $\vec{v} = \alpha\vec{u}$ , para algum real negativo  $\alpha$ . Dessa maneira:

$$\text{b.1) } \left| |\vec{u}| - |\vec{v}| \right| = \left| |\vec{u}| - |\alpha\vec{u}| \right| = \left| |\vec{u}| - |\alpha||\vec{u}| \right| = \left| |\vec{u}| + \alpha|\vec{u}| \right| = \left| (1 + \alpha)|\vec{u}| \right| = |1 + \alpha||\vec{u}| = |1 + \alpha||\vec{u}|$$

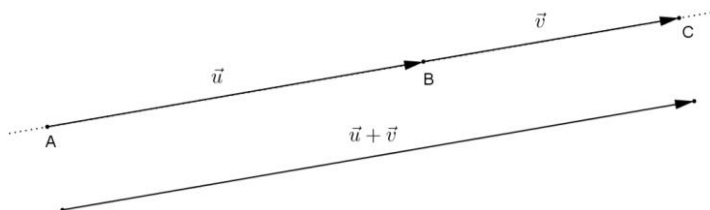
$$\text{b.2) } |\vec{u} + \vec{v}| = |\vec{u} + \alpha\vec{u}| = |(1 + \alpha)\vec{u}| = |1 + \alpha||\vec{u}|;$$

$$\text{b.3) } |\vec{u}| + |\vec{v}| = |\vec{u}| + |\alpha\vec{u}| = |\vec{u}| - \alpha|\vec{u}| = (1 - \alpha)|\vec{u}|.$$

Portanto, observa-se que  $\left| |\vec{u}| - |\vec{v}| \right| = |\vec{u} + \vec{v}|$  na presente situação. Então, sendo  $-1 < \alpha < 0$ , tem-se que  $|1 + \alpha||\vec{u}| = (1 + \alpha)|\vec{u}|$ . Logo, como  $1 + \alpha < 1 - \alpha$ , para  $\alpha < 0$ , tem-se que  $|\vec{u} + \vec{v}| < |\vec{u}| + |\vec{v}|$ . E, sendo  $\alpha < -1$ , tem-se que  $|1 + \alpha||\vec{u}| = -(1 + \alpha)|\vec{u}|$ , do que é evidente o fato de  $1 - \alpha > -1 - \alpha$ , em consequência do que se obtém  $|\vec{u} + \vec{v}| < |\vec{u}| + |\vec{v}|$ . Dessa forma, conclui-se que  $\left| |\vec{u}| - |\vec{v}| \right| = |\vec{u} + \vec{v}| < |\vec{u}| + |\vec{v}|$ .

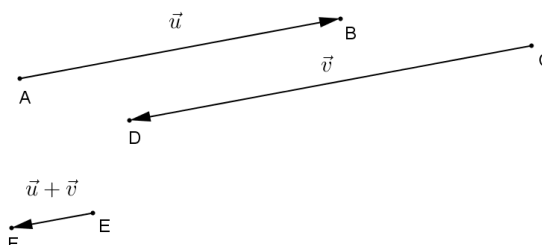
Neste momento, convém frisar as interpretações geométricas dessas duas situações. Na situação em que  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  têm em comum direção e mesmo sentido, o vetor soma de ambos está na mesma reta que os contém, possuindo módulo exatamente igual à soma de  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ , consoante estampado na Figura 33. Outrossim, o valor absoluto da diferença entre os módulos jamais alcançará a soma dos vetores, uma vez que a mesma terá norma superior às das parcelas.

**Figura 33:** Coincidência entre o módulo da soma e a soma dos módulos.



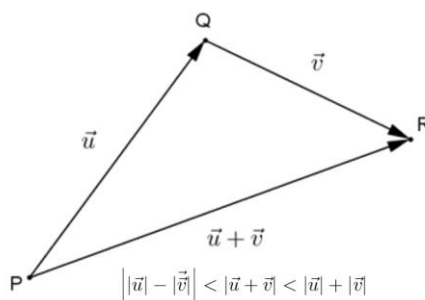
Já quando os vetores têm sentidos opostos, a soma dos mesmos possui módulo igual ao valor absoluto da diferença entre as respectivas normas, consoante a Figura 34.

**Figura 34:** A norma da soma igual à diferença das normas.



c)  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  não são múltiplos um do outro. Nesta circunstância, a soma dos vetores pode ser encontrada pela regra do polígono ou do paralelogramo, de tal sorte que  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{u} + \vec{v}$  formam, necessariamente, um triângulo, assim como se indica na Figura 35.

**Figura 35:** A desigualdade triangular, para vetores não paralelos.



Inicialmente, perceba-se que o menor trajeto que liga P a R consiste no correspondente ao vetor  $\overrightarrow{PR}$ , percurso esse cujo comprimento é  $|\vec{u} + \vec{v}|$ . Outro trajeto, dentre os infinitos possíveis, é ir primeiramente de P a Q, pelo vetor  $\overrightarrow{PQ}$  para em seguida seguir de Q a R, mediante o vetor  $\overrightarrow{QR}$ . Dessa feita, a distância total percorrida seria  $|\vec{u}| + |\vec{v}|$ . Em vista disso, conclui-se que  $|\vec{u} + \vec{v}| < |\vec{u}| + |\vec{v}|$ .

Igualmente, nota-se que, sendo o menor percurso de P a Q, tem-se:

$$|\vec{u}| < |\vec{u} + \vec{v}| + |\vec{v}| \Leftrightarrow |\vec{u}| - |\vec{v}| < |\vec{u} + \vec{v}| \quad (*)$$

Analogamente, comparando-se os percursos de Q a R, em linha reta, com o de Q a P seguido de P a R, depreende-se que:

$$|\vec{v}| < |\vec{u}| + |\vec{u} + \vec{v}| \Leftrightarrow |\vec{v}| - |\vec{u}| < |\vec{u} + \vec{v}| \quad (**)$$

A partir de (\*) e (\*\*), conclui-se diretamente que  $|\vec{u} + \vec{v}| > \left| |\vec{u}| - |\vec{v}| \right|$ , em razão do que, definitivamente:

$$\left| |\vec{u}| - |\vec{v}| \right| < |\vec{u} + \vec{v}| < |\vec{u}| + |\vec{v}|.$$

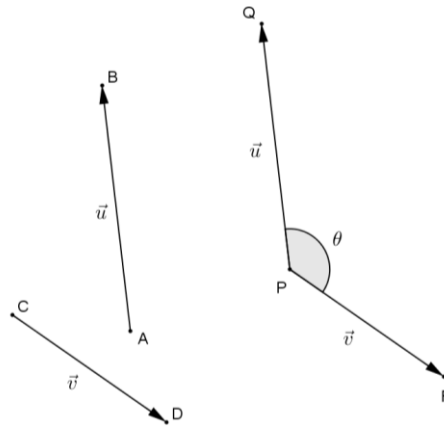
Isso conclui a prova da desigualdade triangular.

Observação: De acordo com este resultado, pode-se obter um resultado bastante conhecido em Física, segundo o qual, quando duas forças,  $\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_2$ , de módulos supostos constantes, são aplicadas a um mesmo corpo, a resultante tem intensidade máxima exclusivamente no caso em que elas têm iguais direção e sentido. E possui norma mínima se, e somente se,  $\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_2$  têm sentidos opostos. Além disso, supondo variável apenas o ângulo entre as forças, demonstra-se que a resultante entre elas assume todos os valores reais entre os números  $\left| |\vec{F}_1| - |\vec{F}_2| \right|$  e  $|\vec{F}_1| + |\vec{F}_2|$ . Isso ficará ainda mais claro como consequência do problema seguinte.

### PROBLEMA 6

Define-se o ângulo entre dois vetores não nulos  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  como o ângulo formado por segmentos orientados de mesma origem,  $\overrightarrow{PQ}$  e  $\overrightarrow{PR}$ , que os representem, respectivamente, como indica a Figura 36, sendo a medida de tal ângulo variável de no mínimo 0, no caso em que os vetores têm mesma direção e sentido, até no máximo  $\pi$  radianos ( $180^\circ$ ), quando os vetores possuem sentidos opostos. Claramente, por argumento de congruência de triângulos, a medida do ângulo assim definido não depende da escolha do particular ponto P. Não se define ângulo entre vetores na hipótese em que um deles é nulo.

**Figura 36:** O ângulo entre dois vetores.



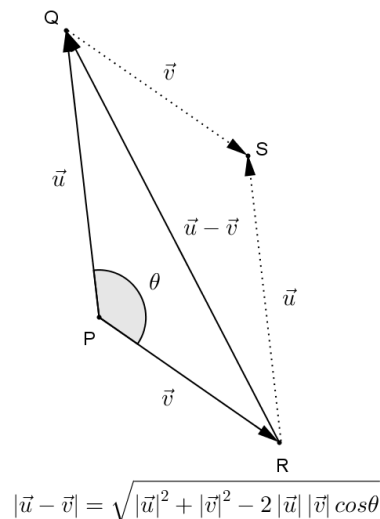
Mostrar que:

$$|\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{|\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + 2|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta} \text{ e } |\vec{u} - \vec{v}| = \sqrt{|\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta}.$$

**Uma solução:**

Utilizando o método do paralelogramo, esses dois resultados tornam-se evidentes, quando os vetores não são múltiplos um do outro, da forma representada na Figura 37. De fato, primeiramente, basta perceber que no triângulo PQR, de lados medindo  $|\vec{u}|$ ,  $|\vec{v}|$  e  $|\vec{u} - \vec{v}|$ , o ângulo oposto a esse último é exatamente o ângulo entre os vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ ,  $\theta$ . Assim, o fato de  $|\vec{u} - \vec{v}| = \sqrt{|\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta}$  decorre diretamente da Lei dos Cossenos aplicada ao triângulo PQR.

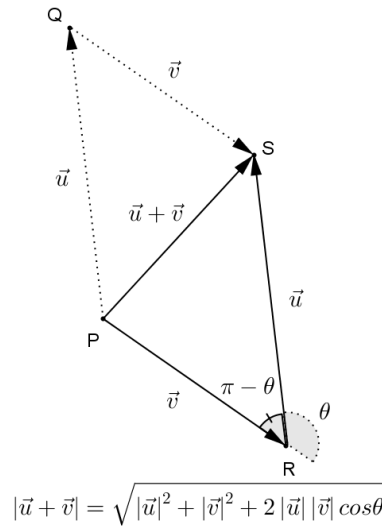
**Figura 37:** O módulo da diferença vetorial.



Igualmente, no triângulo PRS da configuração precedente, destacado na Figura 38, os lados têm medidas iguais a  $|\vec{u}|$ ,  $|\vec{v}|$  e  $|\vec{u} + \vec{v}|$ , sendo o ângulo oposto a esse último lado igual ao suplemento do ângulo entre os vetores, isto é,  $\pi - \theta$ . Dessa maneira, novamente com o auxílio da Lei dos Cossenos e lembrando que  $\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$ , segue diretamente que

$$|\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{|\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + 2|\vec{u}||\vec{v}|\cos \theta}.$$

**Figura 38:** A norma da soma de vetores.



Finalmente, observe-se que nas situações de colinearidade, ou  $\theta$  é nulo ou igual a  $\pi$  e, a rigor, as demonstrações anteriores não se aplicam. Em ambas as situações, contudo, os resultados obtidos continuam válidos. Com efeito, suponha-se  $\theta = 0$ . Dessa forma, os vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  têm iguais direção e sentido, do que, consoante exposto no Problema 5, segue que  $|\vec{u} + \vec{v}| = |\vec{u}| + |\vec{v}|$ . Por outro lado, aplicando a fórmula obtida para a norma da soma:

$$|\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{|\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + 2|\vec{u}||\vec{v}|\cos 0} = \sqrt{|\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + 2|\vec{u}||\vec{v}|} = \sqrt{(|\vec{u}| + |\vec{v}|)^2} = \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\| = |\vec{u}| + |\vec{v}|.$$

Outrossim, utilizando o resultado encontrado para o módulo da diferença:

$$|\vec{u} - \vec{v}| = \sqrt{|\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + 2|\vec{u}||\vec{v}|\cos \pi} = \sqrt{|\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2|\vec{u}||\vec{v}|} = \sqrt{(|\vec{u}| - |\vec{v}|)^2} = \|\vec{u}\| - \|\vec{v}\| = |\vec{u}| - |\vec{v}|.$$

Por conseguinte, a fórmula obtida também guarda conformidade com o fato encontrado no Problema 5. Analogamente, persiste a consistência dos resultados obtidos quando os vetores possuem sentidos opostos, tal qual é evidente. Desse modo, em qualquer hipótese, tem-se que:

$$|\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{|\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + 2|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta} \quad \text{e} \quad |\vec{u} - \vec{v}| = \sqrt{|\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta}.$$

É oportuno ressaltar que é possível considerar a desigualdade triangular, exibida no problema anterior, como consequência imediata das fórmulas retro. De fato, variando o ângulo entre dois vetores de normas constantes no intervalo  $[0, \pi]$ , tem-se que  $\cos\theta$  assume todos os valores no intervalo  $[-1, 1]$ . Consequentemente,  $|\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{|\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + 2|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta}$  assume todos os valores do intervalo  $(\left||\vec{u}| - |\vec{v}|\right|, |\vec{u}| + |\vec{v}|)$ , nas situações já especificadas previamente.

### PROBLEMA 7

Mostrar que dois vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  não nulos são ortogonais (também conhecidos como perpendiculares), isto é, formam ângulo reto entre si, se, e somente se,  $|\vec{u} + \vec{v}| = |\vec{u} - \vec{v}|$ .

#### Uma solução:

Um caminho, trigonométrico, consiste em empregar os resultados obtidos no Problema 6. Em verdade, basta perceber que:

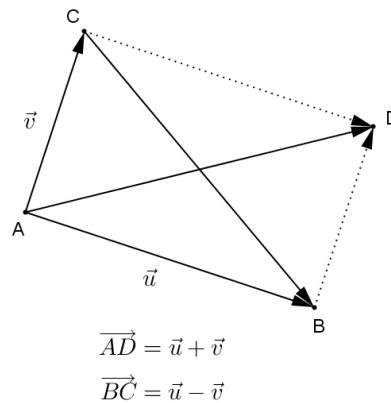
$$|\vec{u} + \vec{v}| = |\vec{u} - \vec{v}| \Leftrightarrow \sqrt{|\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + 2|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta} = \sqrt{|\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta} \Leftrightarrow |\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta = -|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta.$$

Uma vez que os vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  não são nulos, a igualdade final ocorre se, e somente se,  $\cos\theta = -\cos\theta$ , ou seja,  $\cos\theta = 0$ , o que, para  $\theta$  em  $(0, \pi)$ , ocorre exclusivamente com  $\theta = \frac{\pi}{2}$ . Portanto, quando os vetores são ortogonais.

Alternativamente, pode-se também empregar um raciocínio sintético, como o que se sucede. Preliminarmente, vê-se que dois vetores múltiplos um do outro não podem ser ortogonais, por formarem ângulo nulo ou raso entre si. Assim, pode-se obter tanto a soma quanto a diferença por meio do método do paralelogramo, como na Figura 39.



**Figura 39:** Uma condição de ortogonalidade de vetores.



Isso posto, vê-se claramente que os vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são ortogonais se, e somente se, o paralelogramo ABDC é um retângulo, o que acontece se, e somente se, as diagonais do paralelogramo são congruentes. Noutros termos,  $|\vec{u} + \vec{v}| = |\vec{u} - \vec{v}|$ .

**PROBLEMA 8**

Demonstrar que dois vetores não múltiplos um do outro têm mesmo módulo se, e somente se,  $|\vec{u} + \vec{v}|$  e  $|\vec{u} - \vec{v}|$  são ortogonais.

**Uma solução:**

Mais uma vez, observe-se que convém somar e subtrair os vetores pela regra do paralelogramo, no que se pode, novamente, ter como referência a Figura 39. É só observar que o paralelogramo ABDC é um losango (e, assim,  $|\vec{u}| = |\vec{v}|$ ) se, e somente se, as diagonais são perpendiculares, isto é,  $|\vec{u} + \vec{v}|$  e  $|\vec{u} - \vec{v}|$  são ortogonais, como se desejava mostrar.

**PROBLEMA 9**

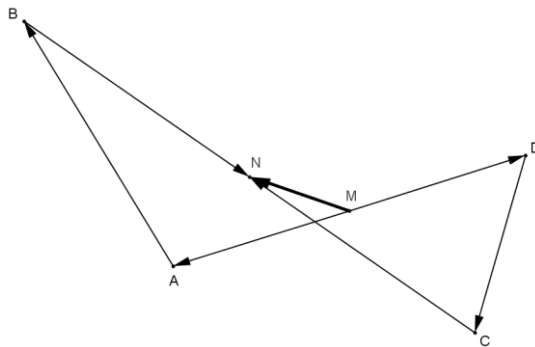
Seja ABCD um quadrilátero qualquer, de lados opostos  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$ , mostrar que, sendo M e N os respectivos pontos médios dos lados  $\overline{AD}$  e  $\overline{BC}$  :

$$\overline{MN} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{DC}).$$

### Uma solução:

Em primeiro lugar, observe-se que esse foi um dos fatos cruciais na solução vetorial do problema motivador. Destaque-se também que, já tendo sido usada na introdução uma justificativa na qual o quadrilátero ABCD era convexo, agora será utilizada na Figura 40 a possibilidade de ABCD ser não apenas côncavo, como entrelaçado, a fim de ratificar que o resultado é consistente em qualquer situação. Outrossim, ressalte-se que é denominada mediana num quadrilátero o segmento que conecta os pontos médios de dois lados opostos.

**Figura 40:** A mediana de um quadrilátero qualquer.



Desse modo, tal como no problema motivador e com o auxílio do método do polígono, deve-se impor que:

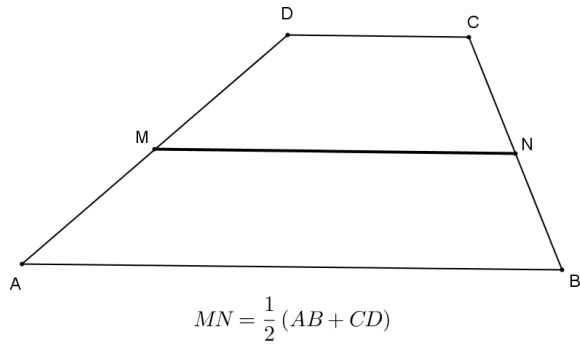
$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{MN} \text{ e } \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{MN}.$$

Logo, considerando que os vetores  $\overrightarrow{MA}$  e  $\overrightarrow{MD}$  são opostos, da mesma forma que  $\overrightarrow{BN}$  e  $\overrightarrow{CN}$ , somando as igualdades acima, conclui-se que:

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}).$$

Observação: É conveniente ressaltar que a condição necessária e suficiente para que  $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$  é que os vetores  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{DC}$  tenham iguais direção e sentido, o que ocorre se, e somente se, ABCD é um trapézio de bases  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$ . Nessas condições, o segmento de reta  $\overline{MN}$  é chamado base média do trapézio, correspondendo à média aritmética das bases, como indica a Figura 41.

**Figura 41:** A base média de um trapézio.



## CAPÍTULO 3

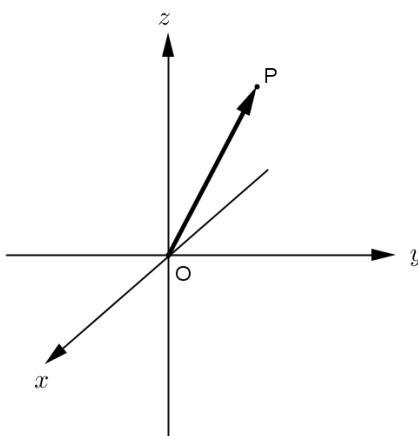
### UM PONTO DE VISTA MAIS ALGÉBRICO

#### 3.1 VETORES E PONTOS

Nas aplicações dos resultados da álgebra vetorial à geometria, é bastante conveniente fixar um ponto  $O$  arbitrariamente escolhido como origem comum de todos os vetores, de modo a criar a seguinte correspondência biunívoca: a cada ponto  $P$  do espaço corresponde um único vetor de origem em  $O$ ,  $\overrightarrow{OP}$ , e a cada vetor  $\vec{v}$  associa-se um único ponto  $P$  do espaço, tal que  $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$ , como se verifica com o auxílio do Teorema 2. Principalmente nas aplicações à Física, é usual denominar os vetores com origem em  $O$ , o qual, por sua vez, costuma ser a origem de um sistema de coordenadas, de raios vetores ou vetores posição (GIVENTAL, 2008).

Desse modo, diante da correspondência descrita, existe uma função bijetiva entre o conjunto de todos pontos (do espaço  $E$  ou de um plano fixado,  $\alpha$ ) e o conjunto de todos os vetores (em  $E$  ou em  $\alpha$ ), em virtude do que um vetor pode ser representado por um único ponto, o qual é a extremidade do raio vetor correspondente, isto é, daquele que possui origem em  $O$ . A partir de agora, supor-se-á que  $O$  é a origem de um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, o qual, dependendo da conveniência, pode ser bi ou tridimensional, esse último caso ocorrendo na Figura 42, para exemplificar.

**Figura 42:** A correspondência biunívoca entre pontos e vetores.



Assim, fixado um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, cada vetor  $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$ , pode ser representado apenas pelo  $P$ , através de suas coordenadas, a duas ou três dimensões, conforme a necessidade ou a conveniência. É como se estivesse subentendido o fato de que a origem do vetor está em  $O$ , quando o mesmo estiver sendo representado apenas pela

correspondente extremidade. Nessas condições, será empregada a simbologia  $\vec{v} = \overrightarrow{OP} = P$ . Diz-se que as coordenadas do vetor  $\overrightarrow{OP}$  são as coordenadas do ponto P (ENGEL, 1998).

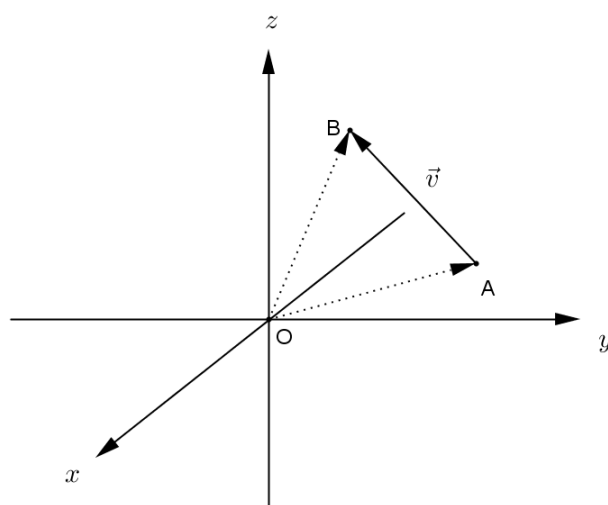
Do ponto de vista rigoroso, essa notação tem fulcro na identificação entre o conjunto E dos pontos do espaço com o conjunto V de todos os vetores. Convém lembrar, ainda, que ambos os conjuntos também se identificam com o conjunto  $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z); x, y, z \in \mathbb{R}\}$ , das triplas ordenadas de números reais, as quais são exatamente as coordenadas cartesianas dos pontos. Além disso, caso se esteja lidando com pontos coplanares, convém realizar a correspondência biunívoca entre os vetores contidos no plano em questão com os vetores do mesmo, bem como com o conjunto  $\mathbb{R}^2 = \{(x, y); x, y \in \mathbb{R}\}$ .

### 3.2 UMA NOTAÇÃO FUNDAMENTAL

Considerando o acima exposto, seja  $\overrightarrow{AB}$  um segmento orientado qualquer, representante de um vetor  $\vec{v}$ , tendo sido fixado um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais usual OXYZ, de origem em O. Tem-se que  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ , como mostrado na Figura 43. Aplicando a notação sugerida no item precedente, segundo a qual  $\overrightarrow{OA} = A$  e  $\overrightarrow{OB} = B$ , conclui-se diretamente que:

$$\overrightarrow{AB} = B - A.$$

**Figura 43:** Um vetor expresso como extremidade menos origem.



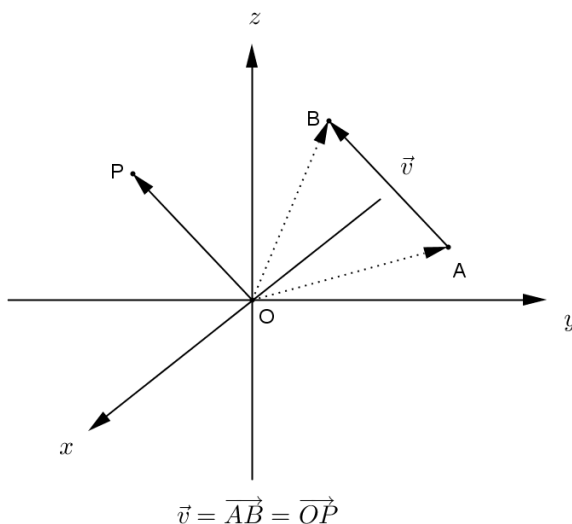
$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = B - A = (x_b - x_a, y_b - y_a, z_b - z_a)$$

Trata-se daquela que será aqui denominada, de agora em diante, notação de Grassmann, em decorrência da qual também é possível escrever, de forma equivalente, que o vetor  $\vec{v} = B - A$  ou, ainda, como será esclarecido adiante,  $B = A + \vec{v}$ , justificando a ideia de translação exposta no item 2.4 (LIMA, 2002).

De um modo geral, convém lembrar que, fixado um sistema de coordenadas e, conseqüentemente, a origem  $O$ , todo vetor  $\vec{v}$  pode ser entendido como a diferença entre a extremidade e a origem de  $\vec{v}$ . Mas como se efetua a diferença entre dois pontos?

O raciocínio consiste em realizar a diferença ordenada entre as respectivas coordenadas. Ou seja, considerando  $B = (x_B, y_B, z_B)$  e  $A = (x_A, y_A, z_A)$ , define-se a diferença entre esses pontos como sendo  $B - A = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$ . Geometricamente, a partir dos pontos quaisquer  $B$  e  $A$ , obtém-se um novo ponto,  $P = B - A = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$ , tal que  $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$ , sendo  $O$  a origem do sistema de coordenadas. Isso se vê na Figura 44, em que se nota a equipolência dos segmentos orientados  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{OP}$ , em razão do que representam o mesmo vetor.

**Figura 44:** Interpretação geométrica da diferença de dois pontos.

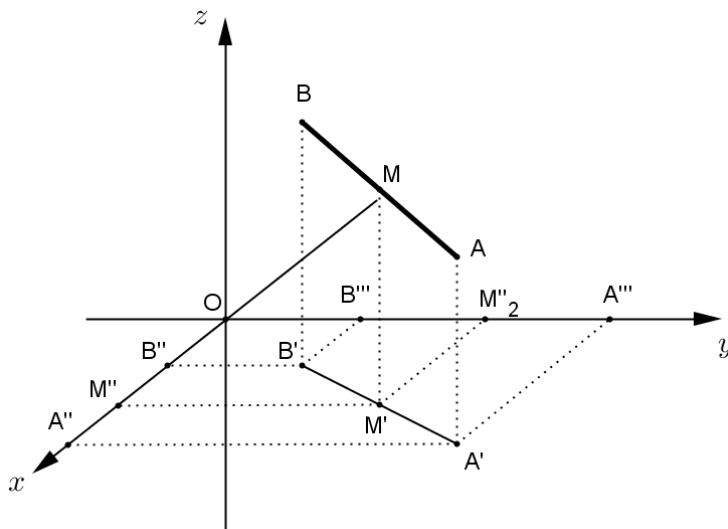


Para uma justificativa rigorosa desse fato, é necessário conhecer um resultado básico da geometria analítica. Trata-se do resultado a seguir, cuja demonstração é esboçada na sequência (DELGADO; FRENSEL; CRISSAFF, 2013).

**Teorema 3:** As coordenadas do ponto médio de um segmento são obtidas pela média aritmética das coordenadas das extremidades do segmento.

Efetivamente, sendo  $\overline{AB}$  um segmento qualquer situado no espaço euclidiano tridimensional, considerem-se as coordenadas dos vértices  $A = (x_A, y_A, z_A)$  e  $B = (x_B, y_B, z_B)$ , referenciadas a um sistema cartesiano ortogonal OXYZ. Apenas para fixar ideias, suponha-se que A e B estejam no primeiro octante, isto é, tenham todas as coordenadas positivas. Sejam A' e B' as respectivas projeções ortogonais no plano OXY, tal qual indicado na Figura 45, bem como M e M' os pontos médios de  $\overline{AB}$  e de  $\overline{A'B'}$ , na ordem dada. Assim, ABB'A' é um trapézio, em que o segmento  $\overline{MM'}$  é a base média, e, em virtude do resultado mostrado na observação do Problema 9,  $z_M = \frac{z_A + z_B}{2}$ , visto que as bases do trapézio medem  $AA' = z_A$  e  $BB' = z_B$ .

**Figura 45:** As coordenadas do ponto médio de um segmento.



O mesmo raciocínio pode ser empregado aos trapézios A'B'B''A'', em que A'' e B'' são as respectivas projeções de A' e B' nos eixos x e y, para concluir que M'M'', com M'' médio de  $\overline{A''B''}$ , mede exatamente  $y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$ , notando-se que  $A'A'' = y_A$  e  $B'B'' = y_B$ .

De maneira inteiramente análoga, vê-se  $x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$ .

Com A e B em posições genéricas, o resultado  $M = \left( \frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2} \right)$

continua válido, ensejando, tão somente, análise de casos. A justificativa torna-se mais simples quando parte de uma para três dimensões, ou seja, demonstrando-se primeiramente que, por exemplo,  $x_M = \frac{x_{A''} + x_{B''}}{2}$ , independentemente de as abscissas de A'' e B'' possuírem sinais positivos, como na Figura 45, ou não. Isso também se caracteriza como um bom exercício.

De posse desse fato, verifica-se diretamente que os segmentos orientados  $\overline{AB}$  e  $\overline{OP}$ , indicados na Figura 44, são realmente equipolentes, pois  $\overline{OB}$  e  $\overline{AP}$  possuem o mesmo ponto médio. Com efeito, sendo M e N os meios de  $\overline{OB}$  e  $\overline{AP}$ , na ordem dada:

$$M = \left( \frac{x_O + x_B}{2}, \frac{y_O + y_B}{2}, \frac{z_O + z_B}{2} \right) = \left( \frac{0 + x_B}{2}, \frac{0 + y_B}{2}, \frac{0 + z_B}{2} \right) = \left( \frac{x_B}{2}, \frac{y_B}{2}, \frac{z_B}{2} \right) \text{ e}$$

$$N = \left( \frac{x_A + x_P}{2}, \frac{y_A + y_P}{2}, \frac{z_A + z_P}{2} \right) = \left( \frac{x_A + x_B - x_A}{2}, \frac{y_A + y_B - y_A}{2}, \frac{z_A + z_B - z_A}{2} \right) = \left( \frac{x_B}{2}, \frac{y_B}{2}, \frac{z_B}{2} \right).$$

### 3.3 ADIÇÃO E MULTIPLICAÇÃO POR ESCALAR COM COORDENADAS

Essas operações básicas são definidas com coordenadas de modo que permaneçam válidas todas as propriedades apresentadas no Capítulo 2. Sejam  $P = (x_1, y_1, z_1)$  e  $Q = (x_2, y_2, z_2)$  dois pontos arbitrários do espaço, dados por suas coordenadas, associados como descrito acima aos vetores  $\vec{u} = \overline{OP}$  e  $\vec{v} = \overline{OQ}$ , respectivamente. Considere-se também um número real qualquer  $\alpha$ . As operações de adição e multiplicação por escalar são definidas efetuando-se as mesmas de forma intuitiva, coordenada a coordenada, das seguintes formas:

$$\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \text{ e}$$

$$\alpha \vec{u} = (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1).$$

Apesar de constituir-se num trabalho longo, não há dificuldades em demonstrar que essas definições envolvendo coordenadas guardam plena concordância com as fornecidas geometricamente no capítulo precedente, bem como com cada uma das correspondentes propriedades já vistas. Isso não será feito em toda a extensão neste trabalho, contudo essas justificativas configuram-se em bons exercícios e podem ser encontradas em Delgado, Frensel

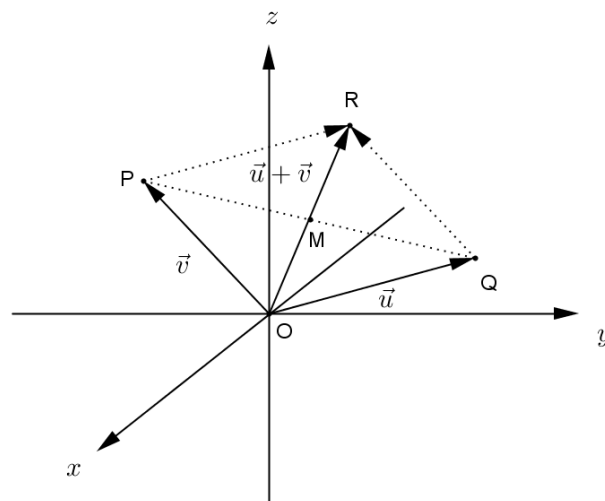


e Crissaf (2013). A título de meros exemplos, apresentar-se-ão somente algumas dessas definições e propriedades preservadas, quando se empregam coordenadas. No que segue, a sigla PC indica propriedade com coordenada.

**PC1.** Interpretação geométrica da adição vetorial.

A adição vetorial por coordenadas mantém a definição geométrica fornecida inicialmente. Com efeito, suponha-se que  $\vec{u} = \overrightarrow{OP} = (x_1, y_1, z_1)$  e  $\vec{v} = \overrightarrow{OQ} = (x_2, y_2, z_2)$ . Dessa maneira,  $\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) = \overrightarrow{OR}$ , sendo P, Q e R são os pontos que representam os vetores  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{u} + \vec{v}$ , respectivamente, utilizando os segmentos orientados correspondentes com origem em O. Vê-se diretamente que os segmentos  $\overline{OR}$  e  $\overline{PQ}$  têm o mesmo ponto médio,  $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$ , através da mesma justificativa mostrada no item anterior. Por isso, a soma com coordenadas é coerente com a regra do paralelogramo, conforme exibido na Figura 46.

**Figura 46:** A manutenção da regra do paralelogramo.



*$\overline{OR}$  e  $\overline{PQ}$  têm o mesmo ponto médio.*

**PC2.** O vetor nulo continua sendo elemento neutro da adição de vetores.

De fato, sendo  $\vec{u} = (x, y, z)$  um vetor arbitrário e percebendo que o vetor nulo corresponde à origem, ou seja,  $\vec{0} = (0, 0, 0)$ , conclui-se facilmente que:

$$\vec{u} + \vec{0} = (x, y, z) + (0, 0, 0) = (x + 0, y + 0, z + 0) = (x, y, z) = \vec{u}.$$

**PC3.** A existência do elemento inverso aditivo.

Dado um vetor genérico,  $\vec{u} = (x, y, z)$ , nota-se claramente que o vetor oposto é igual a  $-\vec{u} = (-x, -y, -z)$ , tendo em vista que:

$$\vec{u} + (-\vec{u}) = (x, y, z) + (-x, -y, -z) = (x + (-x), y + (-y), z + (-z)) = (0, 0, 0).$$

A propósito do elemento inverso aditivo, define-se a diferença vetorial igualmente ao que já foi mostrado, a saber:  $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$ . Tal conceituação também se encontra em definitiva sintonia com a notação de Grassmann, em decorrência da qual, novamente com o auxílio da Figura 46, sendo  $\overrightarrow{OP} = \vec{u} = (x_B, y_B, z_B)$  e  $\overrightarrow{OQ} = \vec{v} = (x_A, y_A, z_A)$ , pode-se ver que:

$$\vec{u} - \vec{v} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ} = P - Q = \overrightarrow{PQ} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A).$$

**PC4.** A distributividade com respeito à adição de escalares.

Realmente, sejam os reais quaisquer  $\alpha$  e  $\beta$ , bem como o vetor dado pelas coordenadas  $\vec{u} = (x, y, z)$ , continua sendo válido que  $(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$ . Com efeito, partindo-se da definição de multiplicação por escalar:

$$(\alpha + \beta)\vec{u} = ((\alpha + \beta)x_1, (\alpha + \beta)y_1, (\alpha + \beta)z_1) = (\alpha x_1 + \beta x_1, \alpha y_1 + \beta y_1, \alpha z_1 + \beta z_1),$$

sendo a última passagem devida à distributividade da multiplicação em relação à adição de números reais. Na sequência, considerando a conceituação dada para a adição de vetores, conclui-se que:

$$(\alpha x_1 + \beta x_1, \alpha y_1 + \beta y_1, \alpha z_1 + \beta z_1) = (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1) + (\beta x_1, \beta y_1, \beta z_1).$$

Novamente empregando a definição de multiplicação por número real:

$$(\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1) + (\beta x_1, \beta y_1, \beta z_1) = \alpha(x_1, y_1, z_1) + \beta(x_1, y_1, z_1) = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u},$$

como se queria demonstrar.

### 3.4 O PRODUTO INTERNO

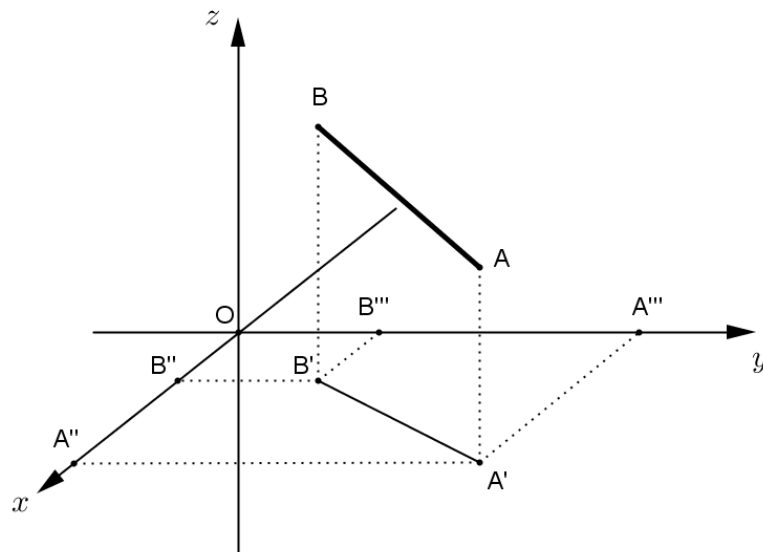
Em coordenadas retangulares, a norma de um vetor  $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$  pode ser obtida a partir das coordenadas da origem e da extremidade de qualquer segmento orientado que o representa. Dessa forma, sendo  $A = (x_A, y_A, z_A)$  e  $B = (x_B, y_B, z_B)$ , tem-se o seguinte resultado básico (DELGADO; FRENSEL; CRISSAFF, 2013).

**Teorema 4:** A distância entre os pontos A e B, ou seja, a norma de  $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ , é igual a

$$d(A, B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2}.$$

Considere-se, com as mesmas notações do Teorema 3, a Figura 47 adiante.

**Figura 47:** A distância entre dois pontos.



Preliminarmente, será provada a validade do resultado em uma única dimensão. A demonstração de que a distância entre os pontos A'' e B'', com coordenadas  $x_A$  e  $x_B$  na ordem dadas, medida sobre o eixo x, é igual a  $d(A'', B'') = \sqrt{(x_A - x_B)^2} = |x_A - x_B|$ , novamente, depende da análise de casos. Considerando-se a princípio que A'' e B'' com coordenadas não negativas, isto é,  $x_A \geq 0$  e  $x_B \geq 0$ , pode ser que ocorra  $x_A \geq x_B$ , implicando que  $d(A'', B'') = x_A - x_B = |x_A - x_B|$ . Caso seja  $x_B > x_A$ ,  $d(A'', B'') = x_B - x_A = -(x_A - x_B) = |x_A - x_B|$ .

Se  $x_A \leq 0$  e  $x_B \geq 0$ ,  $d(A, B) = |x_A| + |x_B| = -x_A + x_B = x_B - x_A = -(x_A - x_B) = |x_A - x_B|$ .

As situações em que  $x_A \geq 0$  e  $x_B \leq 0$ , bem como  $x_A \leq x_B \leq 0$  e  $x_B \leq x_A \leq 0$  são justificadas similarmente.

Portanto, o resultado é verídico para uma única dimensão. No caso bidimensional, note-se que  $\overrightarrow{B'A'} = \overrightarrow{B''A''} + \overrightarrow{B'''A'''}$ . Assim, em virtude do Problema 6 e percebendo que os vetores parcelas são perpendiculares entre si, a norma de  $\overrightarrow{B'A'}$ , que corresponde à distância entre os pontos A' e B', é igual a:

$$|\overrightarrow{B'A'}| = \sqrt{|\overrightarrow{B''A''}|^2 + |\overrightarrow{B'''A'''}|^2 - 2|\overrightarrow{B''A''}||\overrightarrow{B'''A'''}|\cos\frac{\pi}{2}}.$$

Já que os vetores  $\overrightarrow{B''A''}$  e  $\overrightarrow{B'''A'''}$  são paralelos aos eixos x e y respectivamente, pode-se empregar o já provado resultado a uma dimensão para garantir que  $|\overrightarrow{B''A''}| = |x_{A''} - x_{B''}| = |x_A - x_B|$  e  $|\overrightarrow{B'''A'''}| = |y_{A'''} - y_{B'''}| = |y_A - y_B|$ . Desse modo:

$$|\overrightarrow{B'A'}| = \sqrt{|x_A - x_B|^2 + |y_A - y_B|^2} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}.$$

Assim, o resultado é subsistente em duas dimensões. Para a demonstração definitiva, basta observar que, no trapézio retângulo  $ABB'A'$ , projetando uma base sobre a outra e empregando o Teorema de Pitágoras:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{|\overrightarrow{B'A'}|^2 + |z_A - z_B|^2} \Leftrightarrow d(A, B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2}.$$

Particularmente, sendo um vetor arbitrário dado por coordenadas,  $\vec{u} = (\alpha, \beta, \gamma)$ , conforme já explanado, pode-se entendê-lo como com o origem em  $O = (0, 0, 0)$  e extremidade em  $P = (\alpha, \beta, \gamma)$ , ou seja,  $\vec{u} = \overrightarrow{OP}$ . Por conseguinte:

$$|\vec{u}| = |\overrightarrow{OP}| = d(O, P) = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}.$$

Evidentemente, um vetor tem norma zero se, e somente se, é nulo, visto que  $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$  anula-se exclusivamente na hipótese de  $\alpha = \beta = \gamma = 0$ .

Quando o módulo de um vetor vale 1, o vetor é dito unitário. Convém observar que, sendo  $\vec{v}$  um vetor não nulo qualquer, o vetor  $\frac{1}{|\vec{v}|} \cdot \vec{v}$ , muito comumente representado por  $\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ , é sempre unitário. Tal vetor costuma também ser denominado versor de  $\vec{v}$ , um espécie de vetor unitário “padrão”, com mesma direção e sentido de  $\vec{v}$ . Igualmente, um vetor de módulo unitário recebe a denominação de vetor normalizado, e o processo descrito para tornar o módulo de um vetor não nulo igual a 1, preservando-lhe direção e sentido, é conhecido como normalização do vetor.

Dados dois vetores quaisquer,  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ , a operação que será definida a seguir, pode ser conceituada sob dois enfoques distintos, algébrico e geométrico, que se equivalem. A vantagem em iniciar pela definição algébrica consiste na facilidade em demonstrar as propriedades essenciais, em comparação à geométrica (LIMA, 2002).

Sendo os vetores dados pelas coordenadas relativas a um sistema de coordenadas cartesianas fixado OXYZ,  $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$  e  $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ , o produto interno (ou escalar) de  $\vec{u}$  por  $\vec{v}$  é o número real obtido pela soma dos produtos entre as respectivas coordenadas dos vetores, isto é:

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Também se representa o produto interno de  $\vec{u}$  por  $\vec{v}$  utilizando o símbolo  $\vec{u} \cdot \vec{v}$ . Cumpre destacar as principais propriedades do produto escalar (PE), para quaisquer vetores  $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ ,  $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$  e  $\vec{w} = (x_3, y_3, z_3)$  e número real arbitrário  $\alpha$ :

**PE1. Comutatividade:**  $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$ .

De fato:  $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = x_2x_1 + y_2y_1 + z_2z_1 = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$ .

**PE2. Homogeneidade de grau 1:**  $\alpha \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \alpha \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \alpha \vec{v} \rangle$ .

Realmente:  $\alpha \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \alpha(x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2) = (\alpha x_1)x_2 + (\alpha y_1)y_2 + (\alpha z_1)z_2 = \langle \alpha \vec{u}, \vec{v} \rangle$ . A

última igualdade é provada similarmente.

**PE3. Distributividade com respeito à adição vetorial:**  $\langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$ . Ou ainda, na notação alternativa,  $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$ , remetendo às propriedades correlatas da multiplicação envolvendo números reais, em especial, a evidenciação do fator comum, quando se lê da direita para a esquerda.

Com efeito:

$$\begin{aligned} \langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{w} \rangle &= (x_1 + x_2)x_3 + (y_1 + y_2)y_3 + (z_1 + z_2)z_3 = \\ x_1x_3 + x_2x_3 + y_1y_3 + y_2y_3 + z_1z_3 + z_2z_3 &= x_1x_3 + y_1y_3 + z_1z_3 + x_2x_3 + y_2y_3 + z_2z_3 = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle. \end{aligned}$$

**PE4. Relação entre produto interno e norma:**  $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = |\vec{u}|^2$ .

Esta propriedade muito útil em diversas aplicações posteriores possui demonstração imediata. Basta notar que:

$$\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = x_1x_1 + y_1y_1 + z_1z_1 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = \left( \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \right)^2 = |\vec{u}|^2.$$

Um corolário desse fato é que  $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$ .

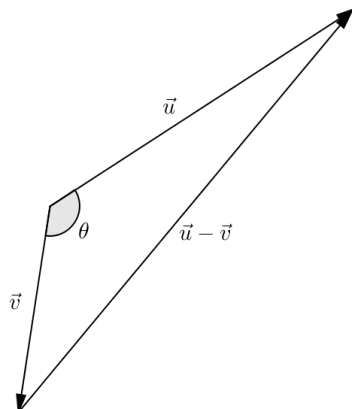
Também é bastante útil usar uma das notações  $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = \vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}^2$

**PE5.**  $\langle \vec{0}, \vec{u} \rangle = 0$ .

Efetivamente,  $\langle \vec{0}, \vec{u} \rangle = 0x_1 + 0y_1 + 0z_1 = 0 + 0 + 0 = 0$ .

Agora, à essencial interpretação geométrica. A princípio, suponha-se que dois vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  sejam não nulos e não múltiplos um do outro. Considere-se  $\theta$  o ângulo formado entre eles, conforme mais uma vez se ressalta na Figura 48, adiante.

**Figura 48:** O significado geométrico do produto interno.



Nestas condições, o vetor  $\vec{u} - \vec{v}$  pode ter a norma calculada com o auxílio tanto do Problema 6 quanto das propriedades recém apresentadas. De fato:

$$\langle \vec{u} - \vec{v}, \vec{u} - \vec{v} \rangle \stackrel{PE4}{=} |\vec{u} - \vec{v}|^2 \stackrel{\text{Problema 6}}{=} |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta.$$

De conformidade com as propriedades as vistas, percebe-se que:

$$\begin{aligned} \langle \vec{u} - \vec{v}, \vec{u} - \vec{v} \rangle &= \langle \vec{u} + (-\vec{v}), \vec{u} + (-\vec{v}) \rangle \stackrel{PE3}{=} \langle \vec{u}, \vec{u} + (-\vec{v}) \rangle + \langle -\vec{v}, \vec{u} + (-\vec{v}) \rangle \stackrel{PE3}{=} \\ &= \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle + \langle \vec{u}, -\vec{v} \rangle + \langle -\vec{v}, \vec{u} \rangle + \langle -\vec{v}, -\vec{v} \rangle \stackrel{PE4}{=} |\vec{u}|^2 - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle - \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle + |\vec{v}|^2 \stackrel{PE1}{=} \\ &= |\vec{u}|^2 - 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + |\vec{v}|^2. \end{aligned}$$

Comparando as expressões finais encontradas,

$$|\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta = |\vec{u}|^2 - 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + |\vec{v}|^2.$$

Por fim, obtém-se uma crucial interpretação ao produto interno de dois vetores:

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = |\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta.$$

Outrossim, é oportuno esclarecer que, não obstante tal formulação tenha sido obtida com a hipótese de os vetores não serem múltiplos um do outro, mesmo nesses casos essa ideia continua válida. Em verdade, supondo-se ainda que os vetores não são nulos, basta observar que os mesmos são colineares se, e somente se,  $\theta = 0$  ou  $\cos\theta = \pi$ , pois  $\theta \in [0, \pi]$ . Dessa forma,  $|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta = \pm|\vec{u}||\vec{v}|$ .

Ademais, os vetores não nulos  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são múltiplos um do outro se, e somente se, existe um número real  $\alpha$ , diferente de 0, tal que  $\vec{u} = \alpha\vec{v}$ . Daí,  $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \alpha\vec{v}, \vec{v} \rangle = \alpha \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = \alpha |\vec{v}|^2$ . Seja  $\vec{v} = (x_1, y_1, z_1)$ , do que  $\vec{u} = (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1)$ . Lembrando que  $\sqrt{\alpha^2} = |\alpha| = \pm\alpha \Leftrightarrow \alpha = \pm\sqrt{\alpha^2}$ :

$$\begin{aligned} \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle &= \alpha |\vec{v}|^2 = \alpha |\vec{v}| |\vec{v}| = \alpha \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} |\vec{v}| = \pm \sqrt{\alpha^2 (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)} |\vec{v}| = \\ &= \pm \sqrt{(\alpha x_1)^2 + (\alpha y_1)^2 + (\alpha z_1)^2} |\vec{v}| = \pm |\vec{u}| |\vec{v}|. \end{aligned}$$

Isso mostra que, supondo nenhum vetor nulo,  $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos \theta$ , em qualquer caso. Também é conveniente ressaltar que todas as propriedades do produto escalar permanecem coerentes sob a abordagem geométrica. Adicionalmente, passa-se também a poder fazer uso do resultado adiante, bastante útil nas aplicações geométricas.

**PE6. Condição de ortogonalidade:** Sendo  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  não nulos e  $\theta$  o ângulo entre eles,

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0 \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}.$$

Realmente, supondo  $|\vec{u}| |\vec{v}| \neq 0$ ,  $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0 \Leftrightarrow |\vec{u}| |\vec{v}| \cos \theta = 0 \Leftrightarrow \cos \theta = 0 \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$ .

Reserva-se a escrita  $\vec{u} \perp \vec{v}$  para indicar que dois vetores são ortogonais, muitas vezes chamados perpendiculares, com mesmo significado. Quando, além de ortogonais, os vetores são unitários, recebem o nome de ortonormais.

Alguns autores, com vistas à generalização, admitem que o vetor nulo é ortogonal a qualquer vetor. Sob tal aspecto, dois vetores quaisquer são ortogonais se, e somente se, o produto escalar dos mesmos é igual a zero (DELGADO; FRENSEL; CRISSAFF, 2013) (LIMA, 2002).

Encerrando o presente tópico, é importante observar que, à primeira vista, o valor do produto interno, a partir das coordenadas dos vetores, poderia depender do sistema de referência utilizado. Contudo, como se demonstrou a equivalência entre os pontos de vista algébrico e geométrico do produto escalar, conclui-se que, fixados dois vetores,  $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos \theta$  está bem definido, uma vez que o módulo de cada vetor é constante, assim como o ângulo entre eles.



Por isso, sendo  $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$  e  $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ , o valor  $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$  é invariável por mudança de sistema de coordenadas (LIMA, 2002).

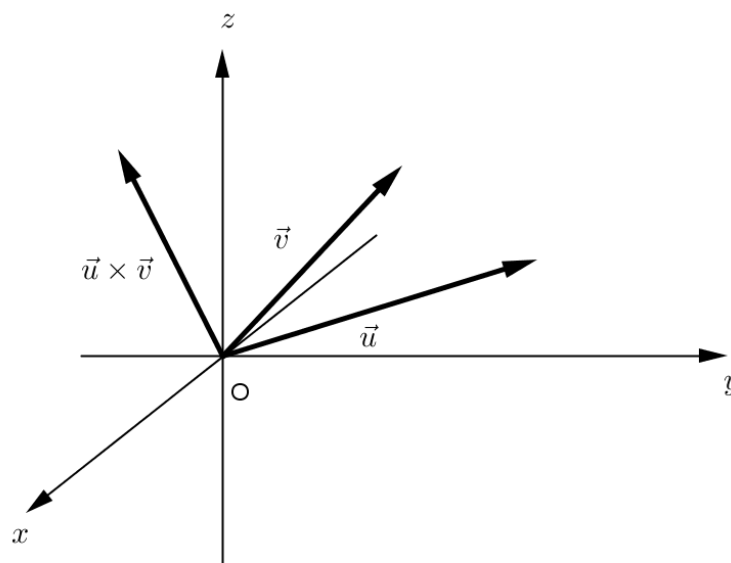
### 3.5 O PRODUTO VETORIAL

De modo análogo ao produto interno, a próxima operação pode ser definida tanto algébrica quanto geometricamente, de formas que se equivalem. Neste item, será feita uma apresentação combinada dessas duas frentes.

É relevante enfatizar que, diferentemente do que ocorre com todas as operações precedentes, o produto vetorial só pode ser efetuado para vetores efetivamente dados a três dimensões, enquanto as operações anteriores não padecem de significado ainda que utilizadas apenas duas coordenadas para caracterizar os vetores. Outra distinção consiste no tocante ao resultado da operação: enquanto o produto escalar resulta num número real, o produto vetorial entre dois vetores é um vetor, propriamente dito (DELGADO; FRENSEL; CRISSAFF, 2013).

Tendo sido dados dois vetores não nulos,  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ , no espaço tridimensional euclidiano, em que se fixou um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, o real objetivo do produto vetorial de  $\vec{u}$  por  $\vec{v}$ , denotado por  $\vec{u} \times \vec{v}$ , consiste em encontrar outro vetor, igualmente não nulo,  $\vec{w}$ , que seja simultaneamente ortogonal aos vetores fornecidos, tal qual ilustra a Figura 49. Encontrar rapidamente um vetor ortogonal a dois vetores dados é um problema recorrente tanto em Matemática, quanto em Física, daí a importância de saber resolvê-lo.

**Figura 49:** Um vetor ortogonal a dois vetores dados.



Para tanto, por simplicidade, mas sem perda de generalidade, suponham-se os três vetores,  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$  como extremo inicial na origem O do sistema de coordenadas. Dessa feita, sendo  $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$  e  $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$  vetores de coordenadas conhecidas, faça-se  $\vec{w} = (\alpha, \beta, \rho)$ . Observe-se que, se  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são múltiplos um do outro, por estarem contidos numa reta pela origem, o problema teria infinitas soluções, nas mais variadas direções, bastando utilizar qualquer vetor contido no plano perpendicular à reta suporte de  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  pela origem.

Suponha-se, então, que  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  tenham direções distintas. Nessas condições, existiria um único plano,  $\pi$ , contendo os vetores, em razão do que a direção de um vetor simultaneamente ortogonal a ambos estaria determinado, lembrando que, por um ponto fixado (O) passa uma única reta perpendicular a um plano dado,  $\pi$ , resultado conhecido da geometria espacial.

A fim de que haja ortogonalidade dos vetores  $\vec{w}$  e  $\vec{u}$ , tanto quanto de  $\vec{w}$  e  $\vec{v}$ , devem ser impostas as seguintes condições:

$$\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle = 0 \Leftrightarrow x_1\alpha + y_1\beta + z_1\rho = 0$$

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0 \Leftrightarrow x_2\alpha + y_2\beta + z_2\rho = 0$$

Observando que há mais incógnitas, três, do que equações, duas, considere-se  $\rho$  como a incógnita livre. Daí, o sistema  $2 \times 3$  passa a ser visto como o seguinte sistema com duas equações a duas incógnitas:

$$\begin{cases} x_1\alpha + y_1\beta = -z_1\rho \\ x_2\alpha + y_2\beta = -z_2\rho \end{cases}$$

Assim, diante da suposição de que os vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  não são múltiplos um do outro, pode-se considerar que o determinante principal do sistema,  $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$ , é diferente de zero. Note-

se que, se eventualmente  $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0$ , então  $\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \neq 0$  ou  $\begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} \neq 0$ , sob pena de os

vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  serem múltiplos um do outro, como é possível provar. Daí, bastava alterar convenientemente a incógnita livre.

Com efeito, caso, por exemplo,  $\vec{v} = \alpha \vec{u}$ , necessariamente  $x_2 = \alpha x_1$ ,  $y_2 = \alpha y_1$  e  $z_2 = \alpha z_1$ . Multiplicando-se a primeira dessas três igualdades por  $y_1$  e a segunda por  $x_1$ , vê-se que

$$x_2 y_1 = x_1 y_2 \Leftrightarrow x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0. \text{ Manipulações similares conduzem aos fatos de}$$

que  $\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} = 0$  e  $\begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} = 0$ . Desse modo, está demonstrado que:

$$\vec{v} = \alpha \vec{u} \Rightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} = 0.$$

A recíproca, isto é, que  $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \vec{v} = \alpha \vec{u}$ , será demonstrada na

apresentação da Propriedade II do produto vetorial.

Voltando ao sistema acima, com a suposição de que  $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \neq 0$ , nota-se a determinação do mesmo, isto é, que existe uma única solução, a qual pode ser obtida, dentre outras maneiras, por escalonamento ou ainda pela Regra de Cramer, como será feito aqui. Daí, conclui-se que:

$$\alpha = \frac{\begin{vmatrix} -z_1 \rho & y_1 \\ -z_2 \rho & y_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} -z_1 & y_1 \\ -z_2 & y_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}} \rho = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}} \rho \text{ e}$$

$$\beta = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & -z_1 \rho \\ x_2 & -z_2 \rho \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & -z_1 \\ x_2 & -z_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}} \rho = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}} (-\rho).$$

Percebendo-se que  $\rho$  pode assumir qualquer valor real não nulo, pois se deseja que  $\vec{w}$  não seja nulo, conclui-se por uma infinidade de vetores  $\vec{w}$  possíveis. Contudo, fazendo-se em particular  $\rho = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \neq 0$ , obtém-se uma simplificação conveniente dos denominadores exibidos.

Todo o exposto, sugere a seguinte definição, a qual também pode ser estendida a vetores nulos ou múltiplos um do outro, ocasiões em que, como será visto, a discussão acima não se aplica, mas se reduzem a uma única consequência. Ademais, cumpre registrar que os argumentos empregados limitam-se a vetores em  $\mathbb{R}^3$ , uma vez que para qualquer outra dimensão, sequer a direção do vetor  $\vec{w}$  fica determinada.

Dados dois vetores,  $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$  e  $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ , denomina-se produto vetorial de  $\vec{u}$  por  $\vec{v}$  um novo vetor, designado por  $\vec{u} \times \vec{v}$ , o vetor cujas coordenadas são:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \left( \begin{array}{c} \left| \begin{array}{cc} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{array} \right|, - \left| \begin{array}{cc} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{array} \right|, \left| \begin{array}{cc} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{array} \right| \end{array} \right).$$

A maneira mais tradicional empregada para memorizar tal resultado fundamental e demonstrar as principais propriedades consiste em utilizar do conceito de determinante e os resultados correspondentes. Utiliza-se o “determinante formal” indicado abaixo, o qual, a rigor, não é exatamente um determinante, mas possui comportamento similar, principalmente no concernente às propriedades (DELGADO; FRENSEL; CRISSAFF, 2013).

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \hat{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} k,$$

em que  $\hat{i} = (1, 0, 0)$ ,  $j = (0, 1, 0)$  e  $k = (0, 0, 1)$  são os ditos versores canônicos dos eixos x, y e z, respectivamente, por possuírem sentidos positivos.

Não se trata exatamente de um determinante porque os elementos da matriz

$\begin{pmatrix} \hat{i} & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{pmatrix}$  não têm a mesma natureza, misturando-se números reais e vetores. Contudo, tal

qual mencionado, lançando-se mão da multiplicação de um vetor por um escalar, pode-se desenvolver um vetor associado aos elementos dessa matriz, por exemplo, expandindo-a da maneira que se calcularia seu determinante, por exemplo, multiplicando cada elemento da primeira linha pelo respectivo cofator para, após, somar os produtos

Torna-se conveniente destacar algumas das mais relevantes propriedades dessa operação singular. Quaisquer que sejam os vetores de  $\mathbb{R}^3$ ,  $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ ,  $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$  e  $\vec{w} = (x_3, y_3, z_3)$ , e o número real  $\alpha$ . Muitas das propriedades do produto vetorial (PV) possuem relação com propriedades correspondentes de determinantes, embora, como visto, a rigor, o produto vetorial não ser um determinante. No entanto, por haver restrições a matrizes  $3 \times 3$ , é sempre possível também utilizar demonstrações independentes de determinantes (DELGADO; FRENSEL; CRISSAFF, 2013), a despeito de, eventualmente, o trabalho em geral ser maior, como se verá a seguir.

**PV1.**  $\langle \vec{u}, \vec{u} \times \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v} \rangle = 0$ , isto é,  $\vec{u} \times \vec{v} \perp \vec{u}$ , tanto quanto  $\vec{u} \times \vec{v} \perp \vec{v}$ .

Isso decorre diretamente do modo como o produto vetorial foi definido, ou seja, a intenção sempre foi a de construir um vetor simultaneamente ortogonal a dois vetores fornecidos, no caso,  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ . Para verificar que continua válido para vetores quaisquer, ainda que múltiplos um do outro, basta usar a definição de cada uma das operações envolvidas.

$$\langle \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v} \rangle = x_2 \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} + y_2 \left( - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \right) + z_3 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

Daqui por diante, podem ser adotadas duas posturas distintas. A primeira, desenvolver cada um dos três determinantes, efetuar os produtos e concluir que a soma é nula. Sob outro enfoque, mais abrangente, também é possível perceber que o segundo membro acima é

exatamente o determinante, desenvolvido pela primeira linha, da matriz  $\begin{pmatrix} x_2 & y_2 & z_3 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{pmatrix}$ ,

multiplicando-se cada elemento pelo respectivo cofator e somando-se os produtos encontrados. Mas esse determinante é evidentemente nulo, visto que a primeira e a última linhas são iguais.

De modo inteiramente análogo, conclui-se que  $\langle \vec{u}, \vec{u} \times \vec{v} \rangle = 0$ .

**PV2.**  $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$  se, e somente se, um dos vetores é múltiplo do outro.

Assim, é condição necessária e suficiente para que o produto vetorial de  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  se anule um ser múltiplo do outro. Observe-se que os casos particulares nos quais um dos vetores é nulo ou em que os vetores são iguais já estão incluídos nessa condição, ou seja:

$$\vec{u} \times \vec{0} = \vec{0} \times \vec{u} = \vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}.$$

Uma demonstração empregando propriedades de determinantes pode ser empregada, desde que se lembre que um determinante é nulo se, e somente se, uma fila é combinação linear de filas paralelas. Considerando que a primeira linha do “determinante formal” cujas operações resultam no produto vetorial é formada por vetores, conclui-se que o mesmo será anulado se, e só se, a segunda e a terceira linhas forem proporcionais. Noutros termos, os vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  terão de ser múltiplos um do outro.

Alternativamente, é possível empregar um raciocínio independente da propriedade de determinantes sobredita (DELGADO; FRENSEL; CRISSAFF, 2013). De fato:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \left( \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$y_1 z_2 - y_2 z_1 = x_1 z_2 - x_2 z_1 = x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0.$$

Caso o vetor  $\vec{u}$ , por exemplo, seja nulo, então é claramente múltiplo de  $\vec{v}$ . Em caso contrário, ao menos uma das coordenadas de  $\vec{u}$  deve diferir de zero. Suponha-se que  $y_1 \neq 0$ , sem perda de generalidade. Assim, já que  $y_1 z_2 - y_2 z_1 = 0$ , pode-se impor que  $z_2 = \frac{y_2}{y_1} z_1$ .

Outrossim, como  $x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0$ , vê-se que  $x_2 = \frac{y_2}{y_1} x_1$ .

Em face disso, fazendo  $\alpha = \frac{y_2}{y_1}$ , verifica-se que:

$$\alpha \vec{u} = \alpha (x_1, y_1, z_1) = (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1) = \left( \frac{y_2}{y_1} x_1, \frac{y_2}{y_1} y_1, \frac{y_2}{y_1} z_1 \right) = (x_2, y_2, z_2) = \vec{v}.$$

Igualmente, convém observar que, como um corolário do resultado apresentado, dois vetores não são múltiplos um do outro se, e somente se,  $\vec{u} \times \vec{v} \neq \vec{0}$ . Quando dois vetores não são múltiplos um do outro, são ditos linearmente independentes (LI). Noutros termos, dois (e apenas dois) vetores são LI se, e somente se, nenhum é nulo ou possui mesma direção que o outro. Já quando (exatamente) dois vetores são tais que um é múltiplo do outro, diz-se que são linearmente dependentes (LD). Cabe frisar que essas definições, simplificadas, são válidas apenas para dois vetores. Logo, em suma:

$\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{u}$  e  $\vec{v}$  são LD;

$\vec{u} \times \vec{v} \neq \vec{0} \Leftrightarrow \vec{u}$  e  $\vec{v}$  são LI.

**PV3. A Identidade de Lagrange:**  $|\vec{u} \times \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2 - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle^2$ .

Partindo-se do segundo membro:

$$\begin{aligned} |\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2 - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle^2 &= (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) - (x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2)^2 = \\ &= x_1^2x_2^2 + x_1^2y_2^2 + x_1^2z_2^2 + y_1^2x_2^2 + y_1^2y_2^2 + y_1^2z_2^2 + z_1^2x_2^2 + z_1^2y_2^2 + z_1^2z_2^2 - \\ &\quad (x_1^2x_2^2 + y_1^2y_2^2 + z_1^2z_2^2 + 2x_1x_2y_1y_2 + 2x_1x_2z_1z_2 + 2y_1y_2z_1z_2) = \\ &= x_1^2y_2^2 + x_1^2z_2^2 + y_1^2x_2^2 + y_1^2z_2^2 + z_1^2x_2^2 + z_1^2y_2^2 - 2x_1x_2y_1y_2 - 2x_1x_2z_1z_2 - 2y_1y_2z_1z_2 = \\ &= (y_1^2z_2^2 - 2y_1y_2z_1z_2 + z_1^2y_2^2) + (x_1^2z_2^2 - 2x_1x_2z_1z_2 + z_1^2x_2^2) + (x_1^2y_2^2 - 2x_1x_2y_1y_2 + y_1^2x_2^2) = \\ &= (y_1z_2 - y_2z_1)^2 + (x_1z_2 - x_2z_1)^2 + (x_1y_2 - x_2y_1)^2 = \\ &= \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}^2 = \\ &= |\vec{u} \times \vec{v}|^2 \text{ (q.e.d.)} \end{aligned}$$

**PV4. A norma do produto vetorial:**  $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| |\vec{v}| \text{sen} \theta$ , em que  $\theta$  é o ângulo entre os vetores.

Pode-se compreender o presente fato como corolário da Identidade de Lagrange. Em verdade:

$$|\vec{u} \times \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2 - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle^2 = (|\vec{u}| |\vec{v}|)^2 - (|\vec{u}| |\vec{v}| \cos \theta)^2 = (|\vec{u}| |\vec{v}|)^2 (1 - \cos^2 \theta) = (|\vec{u}| |\vec{v}|)^2 \text{sen}^2 \theta.$$

Mas, por definição,  $\theta \in [0, \pi]$ , diante do que  $\text{sen} \theta \geq 0$ . Dessa maneira, porquanto  $|\vec{u} \times \vec{v}|, |\vec{u}|, |\vec{v}|$  também sejam não negativos, segue que:

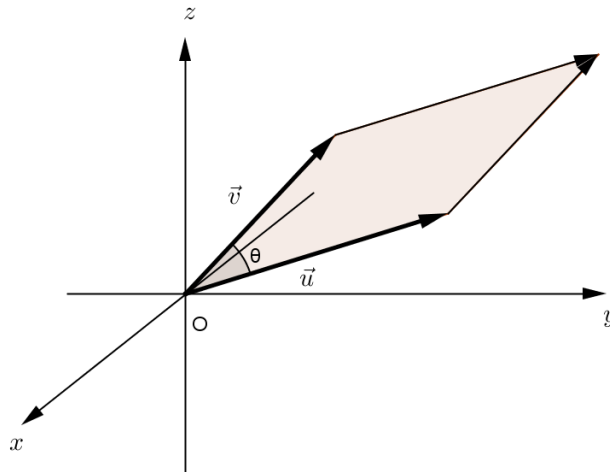
$$|\vec{u} \times \vec{v}|^2 = (|\vec{u}| |\vec{v}|)^2 \text{sen}^2 \theta \Leftrightarrow \sqrt{|\vec{u} \times \vec{v}|^2} = \sqrt{(|\vec{u}| |\vec{v}|)^2 \text{sen}^2 \theta} \Leftrightarrow |\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| |\vec{v}| \text{sen} \theta.$$

**PV5. A interpretação geométrica do módulo do produto vetorial.**

De posse do fato exposto no item anterior, obtém-se um resultado fundamental à conexão que está sendo realizada aqui. Sejam  $\vec{u} = \overrightarrow{OP}$  e  $\vec{v} = \overrightarrow{OQ}$ , em que O é a origem do

sistema de referência. Então,  $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}|\text{sen}\theta = |\overline{OP}||\overline{OQ}|\text{sen}\theta$ . Dessa forma, como se sabe da geometria, vê-se que  $|\vec{u} \times \vec{v}|$  representa a área do paralelogramo de lados consecutivos  $\overline{OP}$  e  $\overline{OQ}$ , tal qual mostra a Figura 50.

**Figura 50:** O módulo do produto vetorial.



Lembrando que a área do triângulo OQP da Figura 50 é a metade da área do paralelogramo OPRQ, tem-se também que a área desse triângulo,  $S_{OPQ}$ , pode ser obtida por meio de:

$$S_{OPQ} = \frac{1}{2} |\vec{u} \times \vec{v}|.$$

Idêntica observação é válida para a área do triângulo OPR, ou de QPR ou ainda de OQR.

Note-se que os vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são colineares se, e somente se, o paralelogramo descrito acima degenera, o que equivale a afirmar  $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$ , em consonância com a Propriedade PV2 (DELGADO; FRENSEL; CRISSAFF, 2013).

**PV6. Não é válida a comutatividade, como regra geral:  $\vec{u} \times \vec{v} \neq \vec{v} \times \vec{u}$ .**

A rigor, aqui, esta não é exatamente uma propriedade, mas uma característica que se mostrou verídica nas operações anteriores e, relativamente ao produto vetorial, não pode ser tomada como regra geral. No entanto, é verdadeiro um resultado comumente conhecido como anticomutatividade do produto vetorial:  $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$ , quaisquer que sejam os vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ .



Para verificar que o produto vetorial é anticomutativo, basta aplicar a propriedade do determinante segundo a qual, permutando-se duas filas paralelas, o determinante troca de sinal. Ante tal fato:

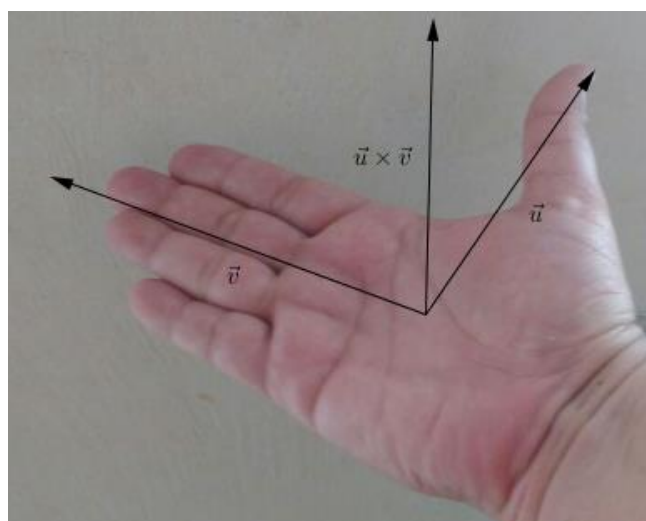
$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \hat{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \hat{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \hat{k};$$

$$\vec{v} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix} \hat{i} - \begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_1 & z_1 \end{vmatrix} \hat{j} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \hat{k}.$$

Tanto quanto pela aplicação da propriedade de determinantes citada, quanto fazendo as contas indicadas, a prova segue diretamente.

Existe uma sistematização, conhecida como a “regra da mão direita”, representada na Figura 51, com o auxílio da qual é possível determinar o sentido do produto vetorial. Inicialmente, alinha-se o dedo indicador da referida mão respeitando-se a direção e, principalmente, o sentido do 1º fator, já que a ordem é relevante. Usando os dedos indicador, médio, anular e mínimo da mão direita, mantêm-se as pontas dos mesmos com o vetor que representa o 2º fator. Finalmente, o produto vetorial terá sempre a direção dada pela perpendicular ao plano da palma da mão direita, no sentido do dorso (parte de trás) até a palma dela. A demonstração rigorosa desse fato, entretanto, não será apresentada na presente exposição (DELGADO; FRENSEL; CRISSAFF, 2013).

**Figura 51:** A regra da mão direita para o produto vetorial.



**PV7. Não é válida a associatividade do produto vetorial, via de regra:**

Analogamente à situação anterior, de modo geral:

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} \neq \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}).$$

Apenas um contraexemplo é suficiente para sustentar essa afirmação, no sentido de que a proposição  $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}), \forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  é logicamente falsa, ainda que se mantenha a ordem relativa entre os vetores.

Com efeito, por exemplo, note-se que, sendo  $\vec{u} = (-1, 2, 1)$ ,  $\vec{v} = (0, -3, 1)$  e  $\vec{w} = (3, 1, -2)$ , tem-se que:

$$\begin{aligned} \vec{u} \times \vec{v} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & j & k \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 5\hat{i} + j + 3k = (5, 1, 3) \Rightarrow \\ (\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & j & k \\ 5 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -5\hat{i} + 19j + 2k = (-5, 19, 2). \end{aligned}$$

Contudo:

$$\begin{aligned} \vec{v} \times \vec{w} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & j & k \\ 0 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 5\hat{i} + 3j + 9k = (5, 3, 9) \Rightarrow \\ \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) &= \begin{vmatrix} \hat{i} & j & k \\ -1 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 15\hat{i} + 14j - 13k = (15, 14, -13). \end{aligned}$$

Assim, conclui-se que  $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} \neq \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$ .

**PV8. A associatividade com respeito à multiplicação por escalar:**

$$\alpha(\vec{u} \times \vec{v}) = (\alpha\vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (\alpha\vec{v}).$$

De fato, basta lembrar da propriedade dos determinantes, segundo a qual um fator comum a todos os elementos de uma mesma fila pode ser evidenciado, passando a multiplicar

todo o determinante, retornando, conforme a conveniência, como fator dos elementos de uma mesma fila qualquer. Isso posto:

$$\alpha \underbrace{\begin{vmatrix} \hat{i} & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}}_{a(\vec{u} \times \vec{v})} = \underbrace{\begin{vmatrix} \hat{i} & j & k \\ \alpha x_1 & \alpha y_1 & \alpha z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}}_{(\alpha \vec{u}) \times \vec{v}} = \underbrace{\begin{vmatrix} \hat{i} & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ \alpha x_2 & \alpha y_2 & \alpha z_2 \end{vmatrix}}_{\vec{u} \times (\alpha \vec{v})}.$$

### PV9. As distributividades laterais com relação à adição:

$$\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w};$$

$$(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{u} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{w}.$$

Novamente, é possível entender esses resultados como diretamente decorrentes da propriedade da soma de determinantes. Com efeito:

$$\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 + x_3 & y_2 + y_3 & z_2 + z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{i} & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{i} & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}.$$

A outra justificativa é inteiramente análoga, decompondo-se apenas a segunda linha, em vez da terceira.

## 3.6 O PRODUTO MISTO

A última operação elementar com vetores a ser apresentada no presente trabalho consiste no designado produto misto, produto triplo ou ainda produto triplo escalar. Como o nome indica, trata-se de uma operação com três vetores,  $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ ,  $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$  e  $\vec{w} = (x_3, y_3, z_3)$ , a ser indicada por  $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ , definida como sendo o número real:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{w} \rangle.$$

Por conseguinte, o produto misto de três vetores,  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$ , é igual ao produto interno entre dois vetores,  $\vec{u} \times \vec{v}$  e  $\vec{w}$ , já deixando indícios de que, sob algum aspecto, depende da ordem em que os vetores são tomados. Esse efeito será esclarecido dentre as propriedades básicas a seguir, indicadas pela sigla PM.

$$\mathbf{PM1.} \quad [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Esse resultado consiste numa maneira prática de obter o produto misto, ou seja, calculá-lo por meio do determinante formado pelas coordenadas dos vetores ordenadamente dispostas nas linhas. Com efeito:

$$\begin{aligned} [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] &= \langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{w} \rangle = \left\langle \left( \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right), (x_3, y_3, z_3) \right\rangle = \\ &= x_3 \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - y_3 \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + z_3 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Observando o determinante  $\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$ , percebe-se que a última expressão obtida

acima é exatamente o desenvolvimento de  $\Delta$  pela última linha, isto é, a soma dos produtos de cada elemento da terceira linha pelo respectivo cofator. Isso conclui a prova.

$$\mathbf{PM2.} \quad [\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] = -[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]; \quad [\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}] = -[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]; \quad [\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}] = -[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}].$$

Isto é, permutando-se quaisquer dois fatores do produto misto, ocorre mudança de sinal do mesmo. Pode-se entender tal propriedade como consequência imediata da propriedade de troca de filas paralelas de um determinante. Assim:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \Delta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \Leftrightarrow [\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = -\Delta;$$

$$[\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}] = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = -\Delta; \quad [\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}] = \begin{vmatrix} x_3 & y_3 & z_3 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix} = -\Delta.$$

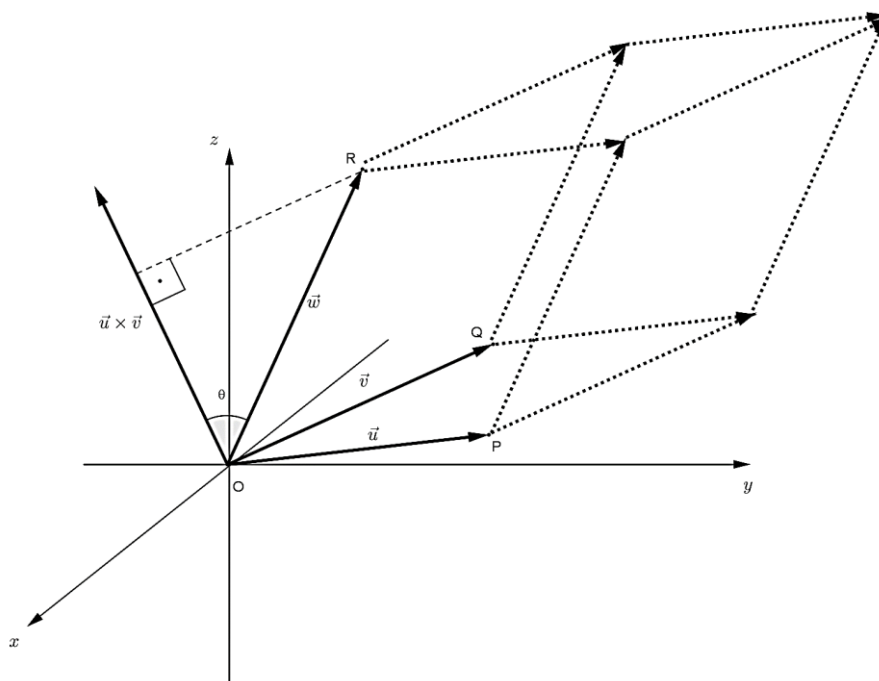
$$\mathbf{PM3.} \quad [\alpha \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{u}, \alpha \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{u}, \vec{v}, \alpha \vec{w}] = \alpha [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}].$$

Mais uma vez, essa propriedade é consequência da possibilidade de evidenciar fator comum nos elementos de uma mesma fila de um determinante, tal qual na Propriedade PV8 do produto vetorial.

**PM4. Interpretação geométrica:**

A norma do produto misto de três vetores,  $\vec{u} = \overline{OP}$ ,  $\vec{v} = \overline{OQ}$  e  $\vec{w} = \overline{OR}$ , é igual ao volume do paralelepípedo em que  $\overline{OP}$ ,  $\overline{OQ}$  e  $\overline{OR}$  são arestas consecutivas, conforme mostra a Figura 52.

**Figura 52:** A interpretação geométrica do produto misto.



Com efeito, já se sabe que o módulo do produto vetorial  $\vec{u} \times \vec{v}$  é igual à área do paralelogramo de lados consecutivos  $\overline{OP}$  e  $\overline{OQ}$ , denominada S. Considerando esse polígono como a base do paralelepípedo sob análise, o volume do mesmo é igual ao produto dessa área pela altura h, que é a distância entre as bases. Por outro lado, o valor h pode ser obtido pela projeção de  $\overline{OR}$  sobre uma reta perpendicular ao plano da base. Lembrando que o vetor  $\vec{u} \times \vec{v}$  possui exatamente a direção ortogonal ao plano dos vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ , h fica igual a  $|\vec{w}| \cos \theta$ , em que  $\theta$  é o ângulo formado por  $\vec{w} = \overline{OR}$  e  $\vec{u} \times \vec{v}$ .

Por isso, o volume do paralelepípedo é dado por:

$$S \cdot h = |\vec{u} \times \vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cos \theta = \left| \langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{w} \rangle \right| = \left| [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] \right|.$$

**PM5. Condição de coplanaridade:** Três vetores de mesma origem,  $\vec{u} = \overline{AB}$ ,  $\vec{v} = \overline{AC}$  e  $\vec{w} = \overline{AD}$  são coplanares, isto é, estão contidos num mesmo plano, se, e só se:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0.$$

De fato, isso equivale a dizer que o paralelepípedo de arestas consecutivas  $\overline{AB}$ ,  $\overline{AC}$  e  $\overline{AD}$  tem volume igual a zero, ou seja, degenera, o que significa serem os pontos A, B, C e D coplanares. Sob tal condição, os vetores  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  são denominados linearmente dependentes (LD).

Em termos do determinante que representa o produto misto, é um resultado conhecido da Álgebra Linear que um determinante é nulo se, e somente se, uma fila é combinação linear

das demais. Geometricamente, portanto,  $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0$  se, e somente se, um dos

vetores,  $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ ,  $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$  ou  $\vec{w} = (x_3, y_3, z_3)$ , pode ser escrito como combinação linear dos outros. Por exemplo, se  $\vec{v}$  for combinação linear dos demais, devem existir reais  $\alpha$  e  $\beta$  tais que  $\vec{v} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{w}$ .

Um enunciado equivalente à Propriedade PM5 consiste em: não existe plano contendo simultaneamente os vetores  $\vec{u} = \overline{AB}$ ,  $\vec{v} = \overline{AC}$  e  $\vec{w} = \overline{AD}$  se, e somente se,  $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] \neq 0$ . Nesta hipótese, diz-se que os vetores  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  são linearmente independentes (LI).

## CAPÍTULO 4

### MAIS ATIVIDADES PROPOSTAS

A partir deste ponto, são propostas mais algumas aplicações das noções fornecidas na busca por soluções a problemas de geometria elementar, as quais servem como sequência dos primeiros nove problemas apresentados no final do Capítulo 2. Recomenda-se que os estudantes a quem esses problemas finais se destinam detenham maior experiência com manipulações algébricas, apesar de a maioria poder também ser satisfatoriamente empregada já no final do Ensino Fundamental ou nos anos iniciais do Ensino Médio, sendo útil, em alguns, o conhecimento de determinadas propriedades geométricas no espaço.

#### PROBLEMA 10

Mostrar que as coordenadas do ponto médio  $M$  de um segmento de reta  $\overline{AB}$  podem ser expressas como média aritmética das correspondentes coordenadas das extremidades  $A$  e  $B$ .

Costuma-se representar esse fato por meio da notação  $M = \frac{A+B}{2}$ , a qual significa, como visto,

que  $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$ , em que  $O$  é a origem de um sistema de coordenadas cartesianas, suposto fixado.

#### Uma solução:

Uma argumentação direta pode utilizar o resultado obtido no Problema 1, substituindo  $A$ ,  $B$  e  $C$  por  $O$ ,  $A$  e  $B$ , nessa ordem. Assim, partindo da resposta lá obtida:

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \Rightarrow \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \Rightarrow M = \frac{A+B}{2}.$$

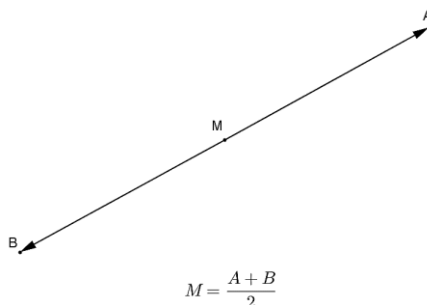
Alternativamente, pode-se notar também, com auxílio da Figura 53, os vetores  $\overrightarrow{MA}$  e  $\overrightarrow{MB}$  são opostos, isto é,  $\overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{MB}$ . Utilizando a notação de Grassmann:

$$\overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow A - M = -(B - M) \Leftrightarrow A - M = M - B \Leftrightarrow 2M = A + B \Leftrightarrow M = \frac{A+B}{2}.$$

Convém notar que, sob uma análise estritamente rigorosa, foram empregadas as mesmas propriedades de adição de vetores e multiplicação por escalar utilizadas na resolução do Problema 1, de modo que a notação de Grassmann auxilia na compreensão de uma álgebra com pontos/vetores que se comportam tais quais números reais, relativamente a tais operações. A

grande diferença é a omissão da origem do sistema de referências, suposta implícita. Como se verá em alguns problemas seguintes, isso é uma abordagem bastante eficiente.

**Figura 53:** As coordenadas do ponto médio de um segmento.



### PROBLEMA 11

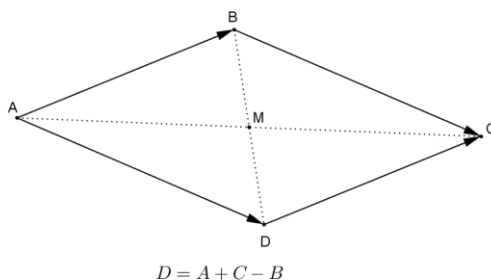
Conhecendo-se as coordenadas de três vértices consecutivos de um paralelogramo ABCD, tais quais A, B, C, por exemplo, obter as coordenadas do quarto vértice.

#### Uma solução:

Lembrando que as diagonais de um paralelogramo encontram-se no ponto médio comum e aplicando o resultado imediatamente anterior, conclui-se com ajuda da Figura 53, que:

$$M = \frac{A+C}{2} = \frac{B+D}{2} \Leftrightarrow A+C = B+D \Leftrightarrow D = A+C-B.$$

**Figura 53:** As coordenadas do quarto vértice de um paralelogramo.



Outra ideia igualmente interessante consiste em perceber que os lados opostos de um paralelogramo, além de paralelos, têm mesma medida. Portanto:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow B - A = C - D \Leftrightarrow D = A + C - B.$$



Observação: Com esse novo foco, é possível dar soluções distintas para resultados já obtidos. Por exemplo, o Teorema de Varignon, apresentado no Problema 4, pode ser justificado de um novo modo. Sendo ABCD os vértices consecutivos de um quadrilátero qualquer do espaço, convexo ou côncavo, plano ou não (reverso), considerem-se E, F, G e H os respectivos pontos médios dos lados  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CD}$  e  $\overline{DA}$ .

Assim, tem-se que  $E = \frac{A+B}{2}$ ,  $F = \frac{B+C}{2}$ ,  $G = \frac{C+D}{2}$  e  $H = \frac{D+A}{2}$ . Daí,  $E+G = F+H = \frac{A+B+C+D}{2}$ , ou seja, os segmentos  $\overline{EG}$  e  $\overline{FH}$  têm o mesmo ponto médio. Por isso, EFGH é um paralelogramo.

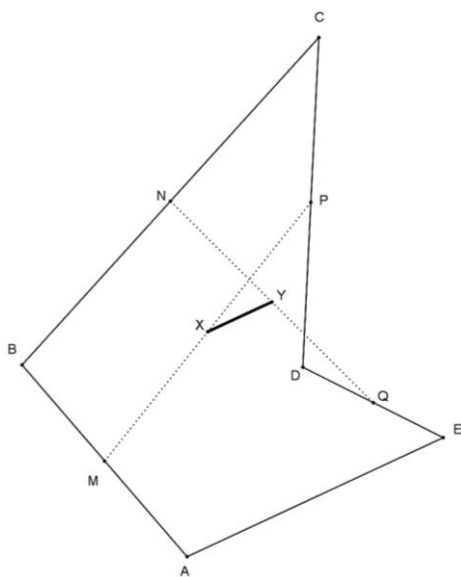
### PROBLEMA 12

Os pontos médios dos segmentos  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$ , assim como de  $\overline{BC}$  e  $\overline{DE}$ , são conectados por dois segmentos de reta, cujos pontos médios também são ligados. Mostrar que esse último segmento é paralelo a  $\overline{AE}$  e igual a  $\frac{1}{4}$  de  $\overline{AE}$ .

#### Uma solução:

A Figura 54 mostra uma possibilidade da configuração descrita, sendo conveniente, entretanto, frisar que os segmentos sequer precisam ser coplanares. Sejam M, N, P, Q, X e Y os respectivos pontos médios de  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CD}$ ,  $\overline{DE}$ ,  $\overline{MP}$  e  $\overline{NQ}$ .

**Figura 54:** Uma representação do Problema 12.



Então, basta notar sucessivamente que:

$$M = \frac{A+B}{2}, N = \frac{B+C}{2}, P = \frac{C+D}{2}, Q = \frac{D+E}{2}.$$

Ademais:

$$X = \frac{M+P}{2} = \frac{A+B+C+D}{4} \text{ e } Y = \frac{N+Q}{2} = \frac{B+C+D+E}{4}.$$

Portanto:

$$\overrightarrow{YX} = X - Y = \frac{A+B+C+D}{4} - \frac{B+C+D+E}{4} = \frac{1}{4}(A-E) = \frac{1}{4}\overrightarrow{EA}.$$

Como  $\overrightarrow{YX} = \frac{1}{4}\overrightarrow{EA}$ , conclui-se que os segmentos  $\overline{XY}$  e  $\overline{AE}$  têm mesma direção, isto é, são paralelos, bem como  $\overline{XY}$  tem medida igual a um quarto de  $\overline{AE}$ .

### PROBLEMA 13

Conhecendo-se as coordenadas dos vértices A, B e C de um triângulo,

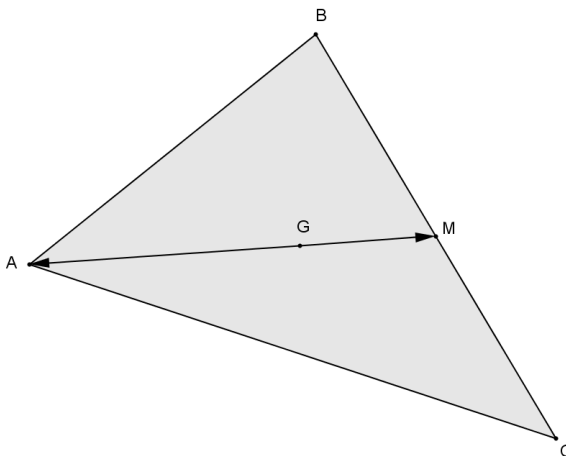
a) obter as coordenadas do ponto G que divide internamente a mediana  $\overline{AM}$  na razão  $\frac{GM}{GA} = \frac{1}{2}$ ;

b) mostrar que todas as três medianas encontram-se nesse mesmo ponto, G, denominado baricentro do triângulo ABC.

**Uma solução:**

a) Na Figura 55, M é o ponto médio do lado  $\overline{BC}$ . Se G divide internamente  $\overline{AM}$  segundo a razão  $\frac{GM}{GA} = \frac{1}{2}$ , deve-se impor que  $\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{GM}$ , em que convém atenção ao fato de os vetores  $\overrightarrow{GA}$  e  $\overrightarrow{GM}$  terem mesma direção, por estarem ambos numa mesma reta, porém sentidos opostos e módulos distintos, o que justifica o fator “- 2” a igualdade vetorial dada.

**Figura 55:** As coordenadas do baricentro.



Dessa maneira:

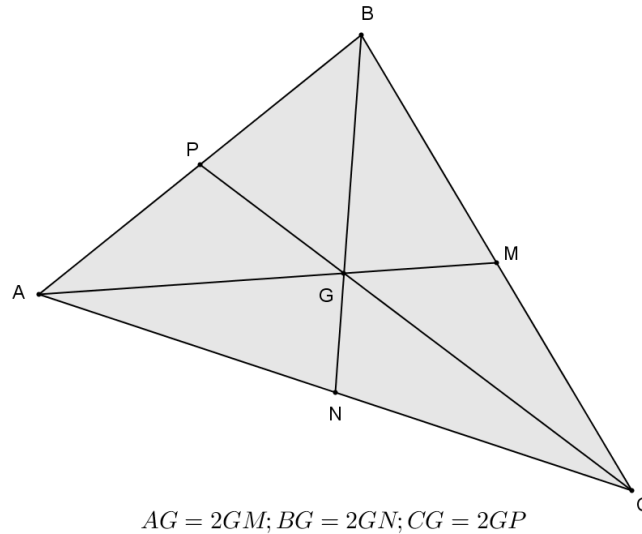
$$\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{GM} \Rightarrow A - G = -2(M - G) \Rightarrow A - G = -2M + 2G \Rightarrow 3G = A + 2M.$$

Uma vez que M é médio de  $\overline{BC}$ , sabe-se que  $M = \frac{B+C}{2} \Leftrightarrow 2M = B + C$ . Dessa forma:

$$3G = A + 2M = A + B + C \Leftrightarrow G = \frac{A + B + C}{3}.$$

b) Observando a expressão obtida para G, nota-se que a mesma é simétrica relativamente aos vértices A, B e C, isto é, invariante por permutação desses pontos. Assim, ao resolver o problema análogo ao do item anterior, mas encontrando as coordenadas do ponto G' que divide a mediana  $\overline{BN}$  na razão  $\frac{G'N}{G'B} = \frac{1}{2}$ , obtém-se idêntico resultado:  $G' = \frac{A+B+C}{3}$ , o mesmo ocorrendo para a terceira mediana. Por conseguinte, em qualquer triângulo as três medianas concorrem num mesmo ponto, designado o baricentro do triângulo, ponto esse que divide cada mediana na razão 1:2, de modo que o segmento que contém o ponto médio é a metade daquele que contém o vértice. Esse teorema fundamental está representado na Figura 56 adiante. É útil observar que, na legenda indicada, não se estão orientando os segmentos, mas se considerando apenas os valores absolutos dos mesmos, por isso a ausência do sinal negativo.

**Figura 56:** O teorema do baricentro de um triângulo.



#### PROBLEMA 14

Provar que as diagonais de um quadrilátero qualquer são ortogonais se, e somente se, as somas dos quadrados dos lados opostos são iguais.

#### Uma solução:

Esse resultado é válido para qualquer tipo de quadrilátero, plano ou não, o que resulta na análise de casos distintos, caso se deseje uma demonstração sintética. Evidencia-se, assim, mais uma vantagem da abordagem vetorial, que, em casos como este, tem abrangência definitiva. De posse dessa característica, o quadrilátero é denominado ortodiagonal.

Sejam, como de praxe, A, B, C, D os vértices consecutivos do quadrilátero. Por definição, os segmentos  $\overline{AC}$  e  $\overline{BD}$  são, em qualquer situação, as diagonais do mesmo. Então, a condição de que as mesmas são ortogonais equivale a  $\langle \overline{AC}, \overline{BD} \rangle = 0$ . Nas aplicações, pela similaridade entre as propriedades do produto interno e as da multiplicação entre números reais, a notação alternativa para produto escalar merece prevalência. Assim, em vez da escrita acima, será empregada  $\overline{AC} \cdot \overline{BD} = 0$

Lembrando que o quadrado da norma de um vetor  $\vec{v}$  pode ser calculada pela identidade  $|\vec{v}|^2 = \vec{v} \cdot \vec{v} = \vec{v}^2$ , pode-se expressar a igualdade entre as somas dos quadrados dos lados opostos,  $AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2$ , como sendo:

$$\begin{aligned} \overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 &= \overline{BC}^2 + \overline{DA}^2 \Leftrightarrow \\ (B-A)^2 + (C-D)^2 &= (C-B)^2 + (D-A)^2. \end{aligned}$$

Associando pontos aos vetores correspondentes, com extremidade inicial na origem O, a aplicação sucessiva de propriedades do produto interno, observa-se que  $(X-Y)^2$  é igual a  $(X-Y) \cdot (X-Y) = X^2 - X \cdot Y - Y \cdot X + Y^2 = X^2 - 2X \cdot Y + Y^2$ , para todos os pontos X e Y. Assim, a última igualdade escrita equivale a:

$$B^2 - 2A \cdot B + A^2 + C^2 - 2C \cdot D + D^2 = C^2 - 2B \cdot C + B^2 + D^2 - 2A \cdot D + A^2.$$

Eliminando os termos repetidos e reagrupando os remanescentes, a igualdade acima é equivalente a:

$$C \cdot D - C \cdot B - A \cdot D + A \cdot B = 0 \Leftrightarrow C \cdot (D-B) - A \cdot (D-B) = 0 \Leftrightarrow (C-A) \cdot (D-B) = 0.$$

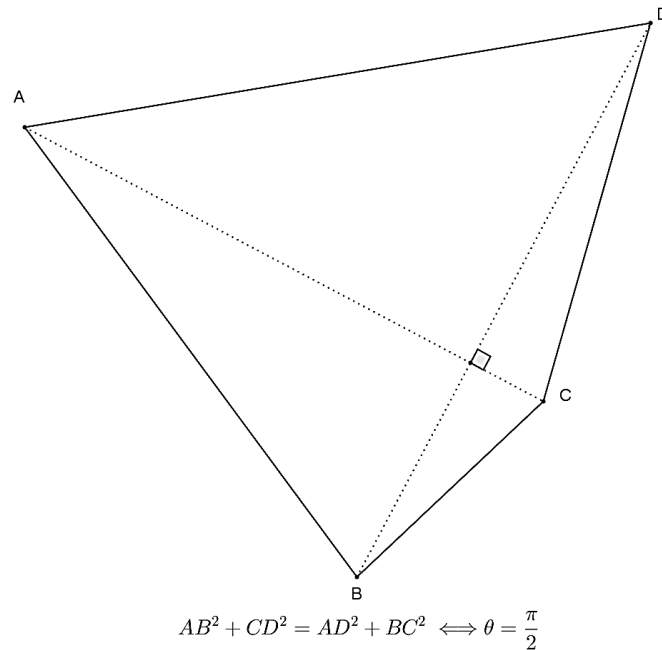
Desse modo, todas as igualdades escritas equivalem a  $\overline{AC} \cdot \overline{BD} = 0$ , o que conclui a demonstração.

Cabe destacar que, em virtude da validade das propriedades expostas do produto interno, expressões contendo operações de adição vetorial, produto por escalar e produto interno gozam de propriedades similares aos correspondentes produtos notáveis. Dessa maneira, além da já vista identidade  $(X-Y)^2 = X^2 - 2X \cdot Y + Y^2$ , também é verdade, por exemplo, que:

$$(X+Y)^2 = X^2 + 2X \cdot Y + Y^2 \text{ e } (X+Y)(X-Y) = X^2 - Y^2.$$

A Figura 57 ilustra um dos casos mais simples, porém mais conhecidos, do teorema demonstrado: quando ABCD é um quadrilátero convexo. Nela,  $\theta$  é o ângulo entre as retas suportes das diagonais, que não precisam, sequer, ser coplanares. Convém ressaltar, também, que isso mostra uma explicação para as diagonais de um losango serem perpendiculares.

**Figura 57:** Um quadrilátero ortodiagonal convexo.



Observação: Esse resultado pode ser estendido, conforme destacado, para o espaço. Supondo-se que os pontos A, B, C e D não sejam coplanares, formam um tetraedro. Um tetraedro no qual as arestas opostas são ortogonais, é conhecido como tetraedro ortocêntrico. Um corolário do Problema 14 é que um tetraedro ABCD é ortocêntrico se, e somente se, as somas dos quadrados das arestas opostas assumem um mesmo valor. Outra consequência interessante é que todo quadrilátero que possui os lados respectivamente congruentes a um quadrilátero ortodiagonal também tem de ser ortodiagonal, por mais que se variem os ângulos internos do mesmo.

### PROBLEMA 15

Sejam A, B, C e D quatro pontos quaisquer do espaço. Mostrar que:

a)  $AB^2 + CD^2 - BC^2 - AD^2 = 2 \overline{AC} \cdot \overline{DB}$  ;

b) num trapézio qualquer, a soma dos quadrados das diagonais é igual à soma dos quadrados dos lados oblíquos mais o dobro do produto das bases;

c) num paralelogramo arbitrário, a soma dos quadrados das diagonais é igual à soma dos quadrados de todos os lados.

### Uma solução:

a) Empregando as já esclarecidas propriedades do produto escalar, enfatizados os produtos notáveis, obtém-se sucessivamente que:

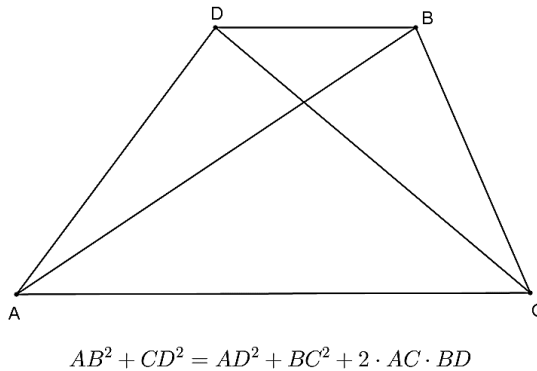
$$\begin{aligned}
AB^2 + CD^2 - BC^2 - AD^2 &= |\overline{AB}|^2 + |\overline{CD}|^2 - |\overline{BC}|^2 - |\overline{AD}|^2 = \\
(B-A)^2 + (D-C)^2 - (B-C)^2 - (A-D)^2 &= (B-A)^2 - (B-C)^2 + (D-C)^2 - (A-D)^2 = \\
(B-A+B-C) \cdot (B-A-B+C) + (D-C+A-D) \cdot (D-C-A+D) &= \\
(2B-(A+C)) \cdot (C-A) + (A-C) \cdot (2D-(A+C)) &= \\
(C-A) \cdot (2B-(A+C) - (2D-(A+C))) &= \\
(C-A) \cdot (2B-2D) = 2(C-A) \cdot (B-D) &= 2\overline{AC} \cdot \overline{DB}.
\end{aligned}$$

b) Considerando um trapézio ACBD, de bases  $\overline{AC}$  e  $\overline{BD}$ , lados não paralelos  $\overline{AD}$  e  $\overline{BC}$  diagonais  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$ , tem-se como consequência direta do teorema precedente e observando que os vetores  $\overline{AC}$  e  $\overline{DB}$  têm mesma direção e sentido:

$$\begin{aligned}
AB^2 + CD^2 - BC^2 - AD^2 = 2\overline{AC} \cdot \overline{DB} &\Leftrightarrow AB^2 + CD^2 - BC^2 - AD^2 = 2|\overline{AC}| \cdot |\overline{DB}| \cdot \cos 0 \Leftrightarrow \\
AB^2 + CD^2 &= BC^2 + AD^2 + 2 \cdot AC \cdot DB.
\end{aligned}$$

A Figura 58 indica a configuração descrita na presente solução.

**Figura 58:** Uma propriedade válida em qualquer trapézio.

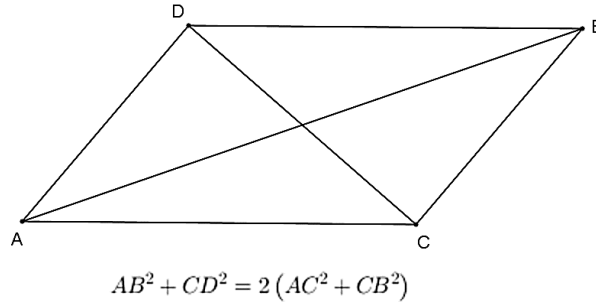


c) Um paralelogramo ACBD pode ser entendido como um trapézio em que qualquer par de lados opostos, por serem paralelos, podem ser considerados como bases. Noutros termos, os lados oblíquos também são paralelos. Lembrando também que os lados opostos são congruentes e partindo da relação retro, segue que:

$$AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2 + 2 \cdot AC \cdot DB = BC^2 + BC^2 + 2 \cdot AC \cdot AC = 2(BC^2 + AC^2).$$

A Figura 59 ilustra a situação descrita neste item.

**Figura 59:** Propriedade envolvendo lados e diagonais num paralelogramo.



### PROBLEMA 16

A mediana de Euler é definida como o segmento que liga os pontos médios das diagonais de um quadrilátero qualquer. Demonstrar que a soma dos quadrados dos lados de um quadrilátero qualquer é igual à soma dos quadrados das diagonais mais o quádruplo do quadrado da mediana de Euler.

#### Uma solução:

Seja, como de costume, ABCD um quadrilátero com as mesmas condições do Problema 13. De novo, destaque-se que o quadrilátero pode ser de qualquer tipo, plano, reverso, simples ou entrelaçado. O resultado a ser demonstrado é válido em qualquer configuração. Denominem-se P e Q os meios das diagonais  $\overline{AC}$  e  $\overline{DB}$ , nessa ordem, como na Figura 60, em que as medidas dessas diagonais são, respectivamente, m e n. Dessa maneira,  $P = \frac{A+C}{2}$  e  $Q = \frac{B+D}{2}$ , em face do que:

$$\begin{aligned} PQ = |\overline{PQ}|^2 &= (Q - P)^2 = \left( \frac{B+D}{2} - \frac{A+C}{2} \right)^2 \Leftrightarrow 4PQ^2 = ((B-A) + (D-C))^2 \Leftrightarrow \\ 4PQ^2 &= (B-A)^2 + (D-C)^2 + 2(B-A) \cdot (D-C) \Leftrightarrow \\ 4PQ^2 &= AB^2 + CD^2 + 2(B-A) \cdot (D-C) \Leftrightarrow \\ 4PQ^2 + BD^2 + AC^2 &= AB^2 + CD^2 + 2(B-A) \cdot (D-C) + BD^2 + AC^2 \Leftrightarrow \\ 4PQ^2 + BD^2 + AC^2 &= AB^2 + CD^2 + 2(B \cdot D - B \cdot C - A \cdot D + A \cdot C) + BD^2 + AC^2. \end{aligned}$$

Note-se agora que:

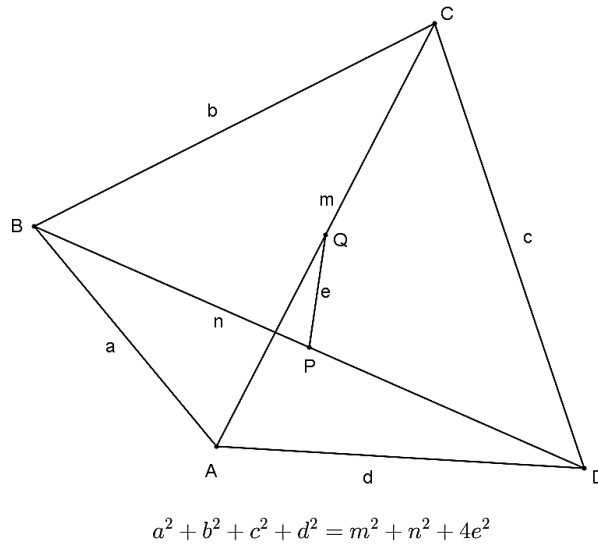


$$\begin{aligned}
& 2(B \cdot D - B \cdot C - A \cdot D + A \cdot C) + BD^2 + AC^2 = \\
& 2(B \cdot D - B \cdot C - A \cdot D + A \cdot C) + (D - B)^2 + (C - A)^2 = \\
& 2(B \cdot D - B \cdot C - A \cdot D + A \cdot C) + D^2 - 2D \cdot B + B^2 + C^2 - 2C \cdot A + A^2 = \\
& D^2 - 2A \cdot D + A^2 + C^2 - 2B \cdot C + B^2 = \\
& (D - A)^2 + (C - B)^2 = AD^2 + BC^2.
\end{aligned}$$

Substituindo:

$$\begin{aligned}
4PQ^2 + BD^2 + AC^2 &= AB^2 + CD^2 + 2(B \cdot D - B \cdot C - A \cdot D + A \cdot C) + BD^2 + AC^2 \Leftrightarrow \\
4PQ^2 + BD^2 + AC^2 &= AB^2 + CD^2 + AD^2 + BC^2.
\end{aligned}$$

**Figura 60:** A mediana de Euler.



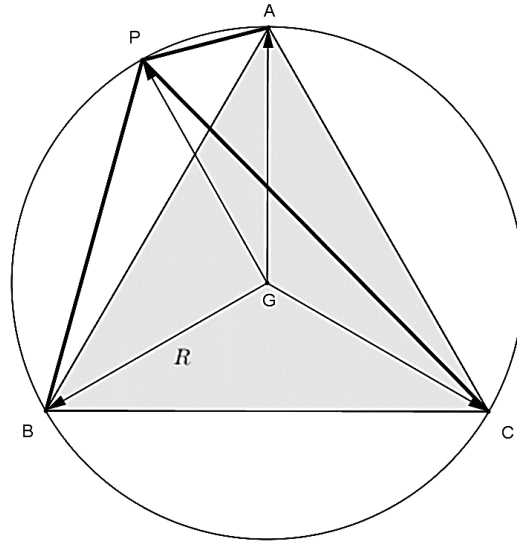
### PROBLEMA 17

Sendo P um ponto qualquer da circunferência circunscrita ao triângulo equilátero ABC. Mostrar que  $PA^2 + PB^2 + PC^2 = 6R^2$ , em que R é o circunraio.

#### Uma solução:

Visando meramente à simplificação dos cálculos, por vezes é bastante útil fixar um ponto conveniente como origem do sistema de coordenadas. Considere-se, aqui, a origem sobre o baricentro G do triângulo, consoante a Figura 61.

**Figura 61:** Uma propriedade do triângulo equilátero.



$$PA^2 + PB^2 + PC^2 = 6R^2$$

Dessa forma:

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 = (A - P)^2 + (B - P)^2 + (C - P)^2 = A^2 + B^2 + C^2 + 3P^2 - 2P \cdot (A + B + C).$$

Em virtude do resultado do Problema 13,  $A + B + C = 3G = 3 \cdot \vec{0} = \vec{0}$ , pois G é a origem. Assim, o último termo escrito acima é anulado. Além disso, como P pertence ao circuncírculo do triângulo ABC, o raio vetor do mesmo é igual a R, ou seja,  $3P^2 = 3R^2$ . Resta obter a expressão  $A^2 + B^2 + C^2$ .

Note-se que:

$$A^2 + B^2 + C^2 = (A + B + C)^2 - 2(A \cdot B + A \cdot C + B \cdot C) = \vec{0}^2 - 2(A \cdot B + A \cdot C + B \cdot C) = -2(A \cdot B + A \cdot C + B \cdot C).$$

Já que os raios vetores de todos os vértices têm módulos iguais a R e formam sempre um ângulo de  $\frac{2\pi}{3}$  entre si, vê-se que  $A \cdot B = A \cdot C = B \cdot C = R^2 \cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{R^2}{2}$ . Daí:

$$A^2 + B^2 + C^2 = -2(A \cdot B + A \cdot C + B \cdot C) = -2\left(\frac{-3R^2}{2}\right) = 3R^2.$$

Dessa forma, finalmente se conclui que:

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 = 6R^2.$$

### PROBLEMA 18

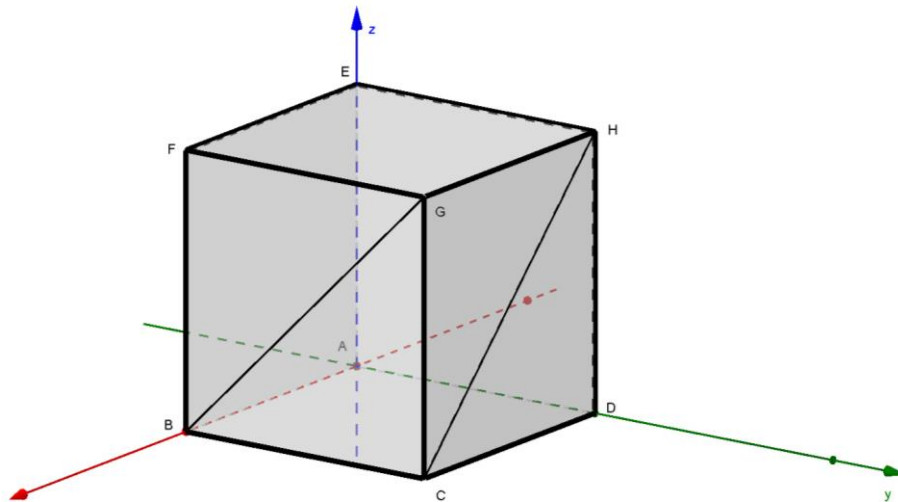
Qual o ângulo formado pelas arestas reversas de duas faces adjacentes de um cubo?

#### Uma solução:

Conforme indicado na Figura 62, fixe-se um sistema de coordenadas cartesianas OXYZ, de modo que a unidade nos eixos seja a aresta do cubo, denominado ABCDEFGH, tal que os vértices sejam:

$$A = (0,0,0), B = (1,0,0), C = (1,1,0), D = (0,1,0), E = (0,0,1), F = (1,0,1), G = (1,1,1), H = (0,1,1).$$

**Figura 62:** O ângulo entre diagonais reversas de faces adjacentes num cubo.



O ângulo procurado pode ser obtido, por exemplo, a partir das diagonais  $\overline{BG}$  e  $\overline{CH}$ . Para tanto, considerem-se os vetores correspondentes:

$$\overrightarrow{BG} = G - B = (1,1,1) - (1,0,0) = (0,1,1) \text{ e } \overrightarrow{CH} = H - C = (0,1,1) - (1,1,0) = (-1,0,1).$$

Desse modo, o ângulo entre esses vetores pode ser obtido por meio do produto interno dos mesmos. Sendo  $\theta$  o ângulo pedido, sabe-se que:

$$\overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{CH} = |\overrightarrow{BG}| |\overrightarrow{CH}| \cos \theta = \sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2} \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 1^2} \cos \theta = 2 \cos \theta.$$

Por outro lado, também é possível calcular o produto escalar por meio das coordenadas dos vetores, de tal sorte que:

$$\overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{CH} = (0,1,1) \cdot (-1,0,1) = 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 1.$$

Portanto, igualando os valores do produto interno,  $2 \cos \theta = 1 \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$ , visto que  $\theta$  deve estar no intervalo  $[0, \pi]$ .

### PROBLEMA 19

Sejam  $r$ ,  $s$  e  $t$  três retas paralelas não coplanares. São marcados sobre  $r$  dois pontos  $A$  e  $A'$ , sobre  $s$  os pontos  $B$  e  $B'$  e sobre  $t$  os pontos  $C$  e  $C'$  de modo que os segmentos  $\overline{AA'} = a$ ,  $\overline{BB'} = b$  e  $\overline{CC'} = c$  tenham o mesmo sentido.

a) Mostre que se  $G$  e  $G'$  são os baricentros dos triângulos  $ABC$  e  $A'B'C'$ , respectivamente, então  $\overline{GG'}$  é paralelo às três retas.

b) Determine  $\overline{GG'}$  em função de  $a$ ,  $b$  e  $c$ .

#### Uma solução:

Inicialmente, cumpre citar que este problema foi a 10ª questão proposta no concurso de admissão ao Instituto Militar de Engenharia – IME, no ano 2000, para ingresso em 2001. É interessante observar que, a despeito de o assunto vetores não integrar o conteúdo programático cobrado nesse processo seletivo, não há impeditivo em utilizar assuntos além dos que constam no edital, já tendo havido várias situações de candidatos que empregaram com sucesso nas soluções apresentadas, por exemplo, vetores e cálculo diferencial e integral, mesmo após esse último tema ter sido retirado dos assuntos presentes no edital, a partir de 1997.

a) Fixando-se qualquer sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, supor-se-ão conhecidas as coordenadas dos pontos  $A$ ,  $A'$ ,  $B$ ,  $B'$ ,  $C$  e  $C'$ . Por hipótese, os vetores  $\overline{AA'}$ ,  $\overline{BB'}$  e  $\overline{CC'}$  têm mesma direção, idêntico sentido e normas respectivamente iguais aos valores  $a$ ,  $b$  e  $c$ .

Dessa forma, como já se sabe desde o Problema 13,  $G = \frac{A+B+C}{3}$  e  $G' = \frac{A'+B'+C'}{3}$ .

Portanto:

$$\begin{aligned} \overline{GG'} &= G' - G = \frac{A'+B'+C'}{3} - \frac{A+B+C}{3} = \frac{1}{3}((A'-A) + (B'-B) + (C'-C)) = \\ &= \frac{1}{3}(\overline{AA'} + \overline{BB'} + \overline{CC'}). \end{aligned}$$

Ora, somando-se vetores de mesma direção e igual sentido, ambas as características são mantidas. Por conseguinte, o vetor  $\overrightarrow{GG'}$  e, conseqüentemente, o segmento de reta  $\overline{GG'}$  é paralelo às retas suportes dos vetores  $\overrightarrow{AA'}$ ,  $\overrightarrow{BB'}$  e  $\overrightarrow{CC'}$ , isto é, às três retas dadas, como se queria demonstrar.

b) Agora, basta notar que, perante o resultado exposto no item anterior,  $\overrightarrow{GG'} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'})$ , a soma vetorial no segundo membro corresponde a um vetor  $\overrightarrow{DD'}$  com direção e sentido coincidentes em relação aos vetores  $\overrightarrow{AA'}$ ,  $\overrightarrow{BB'}$  e  $\overrightarrow{CC'}$ , cujo módulo é, portanto, igual à soma das magnitudes dos vetores componentes, isto é,  $a + b + c$ . Dessa forma, é imediato que o comprimento do segmento  $\overline{GG'}$  é dado por  $\frac{a + b + c}{3}$ .

### PROBLEMA 20

Demonstrar a desigualdade de Cauchy-Schwarz, segundo a qual, quaisquer que sejam os vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ ,  $|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| \leq |\vec{u}| |\vec{v}|$ , ocorrendo a igualdade se, e somente se, um dos vetores é múltiplo do outro. Reescrever esse resultado usando coordenadas tridimensionais.

#### Uma solução:

Esse fato fundamental é muito usado em diversos ramos da Matemática, merecendo ser destacado no presente estudo.

Basta notar que  $|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| |\cos \theta| = |\vec{u}| |\vec{v}| |\cos \theta|$ , bem como  $0 \leq |\cos \theta| \leq 1$ . Assim,  $0 \leq |\cos \theta| \leq 1 \Rightarrow |\vec{u}| |\vec{v}| |\cos \theta| \leq |\vec{u}| |\vec{v}| \Rightarrow |\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| \leq |\vec{u}| |\vec{v}|$ . Note-se que a igualdade ocorre exclusivamente quando  $|\cos \theta| = 1$ , ou seja,  $\theta \in \{0, \pi\}$ . Noutros termos, quando um vetor é múltiplo do outro.

Observe-se também que, a rigor, a justificativa fornecida acima exclui a possibilidade de algum dos vetores ser nulo, pois não se define  $\theta$  em tais casos. Contudo  $|\langle 0, \vec{v} \rangle| = 0$ , da mesma maneira que  $|0| |\vec{v}| = 0$ , subsistindo o resultado, o qual se transforma numa igualdade. Vale lembrar que o vetor nulo é múltiplo de qualquer vetor.

Algebricamente, sendo  $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$  e  $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ , tem-se que:

$$|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| \leq |\vec{u}| |\vec{v}| \Leftrightarrow |x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2| \leq \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}.$$

Ou, equivalentemente:

$$(x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2)^2 \leq (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2).$$

Ocorre igualdade se, e só se, existe um número real  $\alpha$ , tal que:

$$x_1 = \alpha x_2, y_1 = \alpha y_2, z_1 = \alpha z_2.$$

Complementando o raciocínio, note-se que:

$$|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| \leq |\vec{u}| |\vec{v}| \Leftrightarrow -|\vec{u}| |\vec{v}| \leq \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \leq |\vec{u}| |\vec{v}|.$$

Como se supõe que  $|\vec{u}| |\vec{v}| > 0$ , por nenhum vetor ser nulo, tem-se que:  $-1 \leq \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{|\vec{u}| |\vec{v}|} \leq 1$ .

Dessa maneira, o número real  $\frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{|\vec{u}| |\vec{v}|}$  deve estar situado no intervalo  $[-1, 1]$ , podendo,

assim, ser entendido como o cosseno do ângulo  $\theta$  formado entre dois vetores, já que, por definição,  $\theta$  varia em  $[0, \pi]$ . Em contextos mais avançados, essa é a maneira pela qual se define o ângulo entre vetores, em qualquer número finito de dimensões, num espaço vetorial dito euclidiano.

### PROBLEMA 21

Sendo  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  vetores quaisquer, mostrar que  $|\llbracket \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rrbracket| \leq |\vec{u}| |\vec{v}| |\vec{w}|$ , interpretando geometricamente o resultado.

#### Uma solução:

Como se sabe,  $\llbracket \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rrbracket$  representa o volume do paralelepípedo cujas arestas são equipolentes, em algum sentido, a um dos vetores  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  ou  $\vec{w}$ . Dentre todos os paralelepípedos

de arestas com comprimentos constantes, o de volume máximo é o paralelepípedo reto retângulo, ou seja, aquele em que  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  são ortogonais dois a dois.

Com efeito, tal qual na justificativa da interpretação geométrica do produto misto (ver propriedade PM4 e Figura 52), considerando como base do paralelepípedo o paralelogramo construído, por exemplo, sobre  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ , vê-se que tal área é igual a  $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}|\sin\varphi$ , em que  $\varphi$  é o ângulo entre  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ . Sendo  $\theta$  o ângulo entre as direções de  $\vec{u} \times \vec{v}$  e de  $\vec{w}$ , conclui-se que a altura em relação à base considerada é  $h = |\vec{w}|\cos\theta$ .

Dessa maneira, o volume  $V$  do paralelepípedo é dado pelo produto de  $|\vec{u} \times \vec{v}|$  por  $h$ , isto é,  $V = |\vec{u}||\vec{v}||\vec{w}|\sin\varphi\cos\theta$ . Supondo-se os módulos constantes, vê-se que  $V$  varia conforme os ângulos, independentes,  $\varphi$  e  $\theta$ , de modo que  $V$  é máximo quando  $\sin\varphi$  e  $\cos\theta$  são máximos. Ora, isso ocorre se, e somente se,  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  e, conseqüentemente,  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são ortogonais, assim como  $\theta = 0$ , ou seja,  $\vec{w}$  tem a mesma direção de  $\vec{u} \times \vec{v}$ , que é ortogonal a cada um dos vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ , como se queria demonstrar.

## PROBLEMA 22

Sendo conhecidas as medidas  $m$  e  $n$  das diagonais de um paralelogramo, bem como do ângulo  $\theta$  entre elas, calcular a área desse quadrilátero.

### Uma solução:

Seja ABCD o paralelogramo dado. Sabe-se que, sendo  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  e  $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ , a área  $S$  do paralelogramo é dada por  $S = |\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}|\sin\alpha$ , em que  $\alpha$  é o ângulo entre  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ . Tem-se também que as diagonais podem ser representadas por  $\vec{u} + \vec{v}$  e  $\vec{u} - \vec{v}$ .

Calculando o produto vetorial de  $\vec{u} + \vec{v}$  por  $\vec{u} - \vec{v}$ , utilizando as propriedades vistas:

$$(\vec{u} + \vec{v}) \times (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u} \times \vec{u} - \vec{u} \times \vec{v} + \vec{v} \times \vec{u} - \vec{v} \times \vec{v} = \vec{0} - \vec{u} \times \vec{v} - \vec{u} \times \vec{v} - \vec{0} = -2(\vec{u} \times \vec{v}).$$

$$\text{Ou seja: } \vec{u} \times \vec{v} = -\frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v}) \times (\vec{u} - \vec{v}).$$

Por conta disso:  $S = |\vec{u} \times \vec{v}| = \left| -\frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v}) \times (\vec{u} - \vec{v}) \right| = \frac{1}{2} |(\vec{u} + \vec{v})| |(\vec{u} - \vec{v})| \text{sen}\theta$ .

A área pedida, portanto, pode ser calculada por meio da expressão:

$$S = \frac{1}{2} m \cdot n \cdot \text{sen}\theta.$$

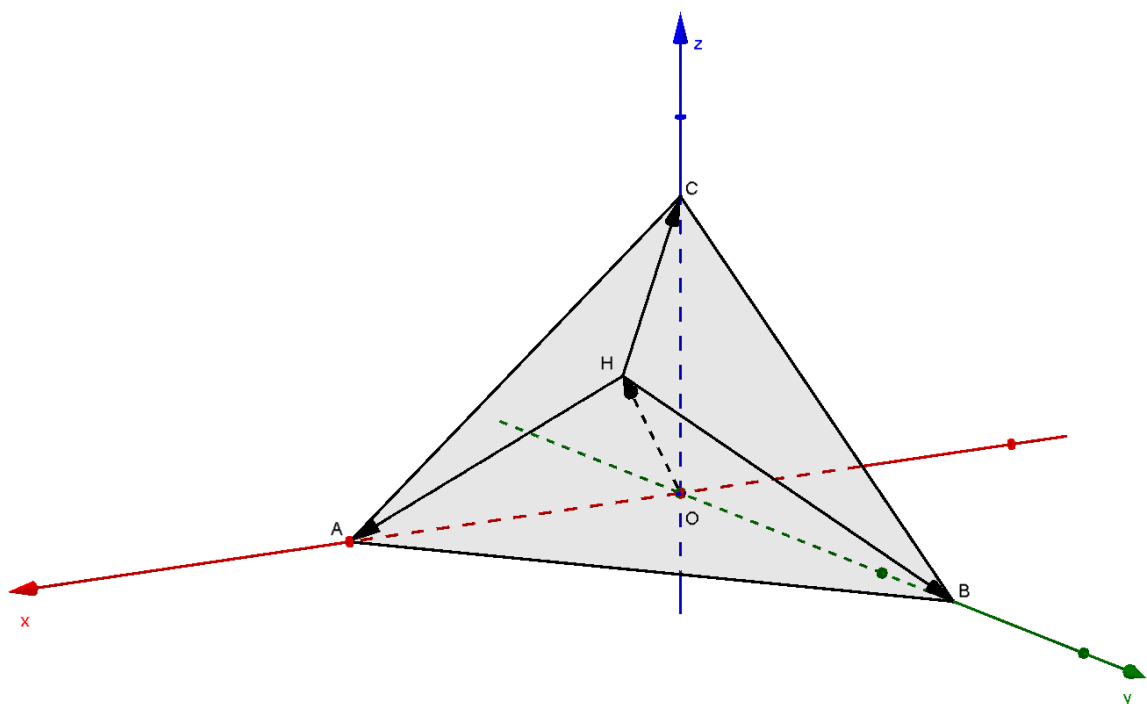
### PROBLEMA 23

Considere-se OABC um triedro trirretângulo, com vértice em O e tendo as retas  $\overline{OA}$ ,  $\overline{OB}$  e  $\overline{OC}$  como arestas. O triângulo ABC é uma seção desse triedro, com A, B e C distintos de O. Mostrar que a projeção ortogonal do vértice O do triedro sobre a seção ABC coincide sempre com o ortocentro da mesma.

#### Uma solução:

A Figura 63 representa o triedro OABC, destacando-se a seção ABC. Já que o triedro é trirretângulo em O, pode-se imaginar, sem perda de generalidade, um sistema de coordenadas cartesianas OXYZ, no qual O é a origem, o eixo x é  $\overline{OA}$ , assim como os eixos y e z são  $\overline{OB}$  e  $\overline{OC}$ , respectivamente. Seja H a projeção ortogonal de O sobre o plano de seção. Deseja-se demonstrar que H é o ortocentro do triângulo ABC.

**Figura 63:** Uma propriedade notável dos triedros trirretângulos.





Suponha-se que  $A = (a, 0, 0)$ ,  $B = (0, b, 0)$ ,  $C = (0, 0, c)$  e  $H = (\alpha, \beta, \gamma)$ , com  $a, b, c$  reais não nulos. Como  $H$  é a projeção ortogonal de  $O$  sobre o plano da seção, tem-se que a reta que passa por  $O$  e  $H$  é perpendicular a esse plano, ou seja, ortogonal a todas as retas contidas nele. Dessa forma, tem-se que:

$$\begin{aligned}\overline{OH} \perp \overline{AH} &\Leftrightarrow \overline{OH} \cdot \overline{AH} = 0 \Leftrightarrow (\alpha, \beta, \gamma) \cdot (H - A) = (\alpha, \beta, \gamma) \cdot (\alpha - a, \beta, \gamma) = 0 \Leftrightarrow \\ &\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - a\alpha = 0.\end{aligned}$$

Analogamente:

$$\begin{aligned}\overline{OH} \perp \overline{BH} &\Leftrightarrow \overline{OH} \cdot \overline{BH} = 0 \Leftrightarrow (\alpha, \beta, \gamma) \cdot (H - B) = (\alpha, \beta, \gamma) \cdot (\alpha, \beta - b, \gamma) = 0 \Leftrightarrow \\ &\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - b\beta = 0.\end{aligned}$$

Além disso:

$$\begin{aligned}\overline{OH} \perp \overline{CH} &\Leftrightarrow \overline{OH} \cdot \overline{CH} = 0 \Leftrightarrow (\alpha, \beta, \gamma) \cdot (H - C) = (\alpha, \beta, \gamma) \cdot (\alpha, \beta, \gamma - c) = 0 \Leftrightarrow \\ &\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - c\gamma = 0.\end{aligned}$$

Dessa forma, vê-se que  $H$  é um ponto tal que  $a\alpha = b\beta = c\gamma$ . Denominando todos esses valores como sendo uma constante  $k$  e notando que  $abc \neq 0$ , conclui-se que:

$$a\alpha = b\beta = c\gamma = k \Rightarrow \alpha = \frac{k}{a}, \beta = \frac{k}{b}, \gamma = \frac{k}{c} \Rightarrow H = \left( \frac{k}{a}, \frac{k}{b}, \frac{k}{c} \right).$$

Resta verificar que o ponto  $H$ , projeção de  $O$  sobre a seção, é, de fato, o ortocentro de  $ABC$ . Para tanto, pode-se mostrar que as retas passando em cada vértice e por  $H$  são perpendiculares aos suportes dos lados opostos. Prove-se, por exemplo, que  $\overline{BH} \perp \overline{AC}$ . Com efeito:

$$\overline{BH} \cdot \overline{AC} = (H - B) \cdot (C - A) = \left( \frac{k}{a}, \frac{k}{b} - b, \frac{k}{c} \right) \cdot (-a, 0, c) = \frac{k}{a} \cdot (-a) + \left( \frac{k}{b} - b \right) \cdot 0 + \frac{k}{c} \cdot c = 0.$$

De forma inteiramente análoga, verifica-se que  $\overline{AH} \cdot \overline{BC} = 0$  e  $\overline{CH} \cdot \overline{AB} = 0$ , o que mostra, em definitivo, o fato de  $H$  ser o ortocentro do triângulo  $ABC$ . (q.e.d.)

## CAPÍTULO 5

### ALGUMAS CONSIDERAÇÕES

Diante de todo o exposto, almeja-se que tenha sido esclarecido como alguns conceitos vetoriais elementares, aliados a propriedades que guardam consideráveis semelhanças com as correspondentes características envolvendo somente operações com números reais, mostraram-se técnicas versáteis na busca pela solução de problemas eminentemente geométricos, principalmente para generalizações envolvendo posicionamento de pontos, tanto no plano, quanto no espaço.

Espera-se que tenha sido demonstrado ser a prática do uso da álgebra como auxiliar na obtenção de resultados geométricos uma ferramenta ao alcance dos estudantes da Educação Básica, especialmente quando já tiverem adquirido maturidade para realizar as manipulações algébricas iniciais, tais quais fatoração e produtos notáveis, assim como resolução de equações de primeiro grau, bem como conhecimento das propriedades geométricas fundamentais, o que deve ocorrer, via de regra, a partir do fim do Ensino Fundamental.

Dessa forma, pretendeu-se ampliar o horizonte, tanto dos alunos, quanto dos professores, no sentido de conhecer novos usos para algumas das principais metodologias algébricas apresentadas na Educação Básica no Brasil, com a finalidade de obter justificativas adequadas para fatos geométricos relevantes. Além disso, espera-se também que tenha ficado suficientemente esclarecido que o tema vetores efetivamente está inserido no âmbito da Matemática, sendo injustificáveis tanto a ausência do assunto na maioria dos livros didáticos brasileiros quanto, em especial, que o assunto ainda seja negligenciado, de uma forma geral, na Educação Básica, no que diz respeito à Matemática.

Mister ressaltar, mais uma vez, que a apresentação aqui exposta não dispõe do condão de encerrar o assunto, nem teve isso como meta. Diversamente, deseja-se, a partir dos vários conceitos, propriedades e resultados fornecidos, fomentar a discussão no meio educacional, de modo que, principalmente quando conclusa a Educação Básica, o estudante tenha plena consciência da importância do tema, não apenas para embasar muito do que é objeto da Física, como para convencer-se da plena aplicabilidade das conceituações vetoriais à própria Matemática, em especial, à geometria.

A despeito de a aplicabilidade dos conteúdos exibidos no presente trabalho ser abrangente a todos os alunos que cumprem os requisitos cognitivos citados ao longo do estudo,

convém registrar que o conteúdo é tão mais adequado à proporção que o nível de preparação dos alunos necessite de mais conhecimentos técnicos, conforme, por exemplo, o formato e o conteúdo programático dos processos seletivos a que os mesmos se propõem ou, ainda, a participação em olimpíadas de conhecimento.

Ademais, há que se notar a conveniência do estudo sistemático dos métodos vetoriais, de modo que ocorra uma primeira aproximação do aluno, bastante adequada a esse nível escolar, da Álgebra Linear, com o qual o estudante tem um contato subaproveitado, vez que, tão somente, por meio de matrizes, determinantes, sistemas lineares e geometria analítica, além da própria Análise Vetorial. Embora tais disciplinas sejam apresentadas de modo geral apenas no Ensino Superior, constituem-se em importantes ramos da Matemática, sendo essenciais principalmente aos estudos daqueles que desejarem trilhar por um futuro caminho do conhecimento científico aplicado, essencial ao desenvolvimento tecnológico.

## REFERÊNCIAS

- [1] BOYER, Carl. **A History of Mathematics**. 2 ed. New York: John Wiley & Sons, 1991.
- [2] CROWE, Michael. **A History of Vector Analysis**. 2002. Disponível em: [https://www.math.ucdavis.edu/~temple/MAT21D/SUPPLEMENTARY-ARTICLES/Crowe\\_History-of-Vectors.pdf](https://www.math.ucdavis.edu/~temple/MAT21D/SUPPLEMENTARY-ARTICLES/Crowe_History-of-Vectors.pdf). Acesso em 28 de março de 2016.
- [3] DELGADO, Jorge; FRENSEL, Katia; CRISSAFF, Lhaylla. **Geometria Analítica**. Coleção PROFMAT. 1 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.
- [4] ENGEL, Arthur. **Problem-Solving Strategies**. 1 ed. New York: Springer, 1998.
- [5] GIVENTAL, Alexander; KISELEV, Andrei. **Kiselev's Geometry Book II. Stereometry**. 1 ed. El Cerrito: Sumizdat, 2008.
- [6] LIMA, Elon. **Coordenadas no Plano**. Coleção do Professor de Matemática. 4 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2002.
- [7] \_\_\_\_\_. **Exame de Textos: Análise de Livros de Matemática para o Ensino Médio**. 1 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2001.
- [8] LIPSCHUTZ, Seymour; LIPSON, Marc. **Álgebra Linear**. Coleção Schaum. 4 ed. Porto Alegre: Bookman, 2011.
- [9] **Provas anteriores do Concurso de Admissão para o CFG**. 2000. Disponível em: [http://ime.eb.br/arquivos/Admissao/Vestibular\\_CFG/Provas\\_Anteriores/provas00\\_01/mat0001.pdf](http://ime.eb.br/arquivos/Admissao/Vestibular_CFG/Provas_Anteriores/provas00_01/mat0001.pdf). Acesso em 30 de março de 2016.
- [10] RUFINO, Marcelo; PINHEIRO, Márcio. **Coleção Elementos da Matemática, Volume 2**. 2 ed. Belém: GTR, 2009.
- [11] Sociedade Brasileira de Matemática. **Contribuição da SBM para a discussão sobre currículo de matemática**. 2015. Disponível em: [http://www.sbm.org.br/wp-content/uploads/2015/01/Contribui%C3%A7%C3%A3o\\_da\\_SBM\\_Ensino\\_Meio\\_FINAL.pdf](http://www.sbm.org.br/wp-content/uploads/2015/01/Contribui%C3%A7%C3%A3o_da_SBM_Ensino_Meio_FINAL.pdf). Acesso em 30 de março de 2016.
- [12] SHARYGIN, Igor. **Problems on Solid Geometry**. 1 ed. Moscow: MIR, 1986.
- [13] SWETZ, Frank, et al. **Learn from the Masters**. 1 ed. Washington, D.C.: MAA, 1995.