Universidade Federal do Piauí
Centro de Ciências da Natureza
Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT

Uma Reflexão sobre o Ensino de Geometria e a Arte das Dobraduras como Ferramenta de Ensino.

Denis de Sousa Melo

Parnaíba - 2016

Denis de Sousa Melo

Dissertação de Mestrado:

Uma Reflexão sobre o Ensino de Geometria e a Arte das Dobraduras como Ferramenta de Ensino.

Dissertação submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:
Prof. Me. Marcelo de Oliviera Rêgo

Parnaíba - 2016

PROFMAT

SBM

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
CENTRO DE EDUCAÇÃO ABERTA E À DISTÂNCIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

Dissertação de Mestrado submetida à coordenação Acadêmica Institucional, na Universidade Federal do Piauí, do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional para obtenção do grau de **mestre em matemática** intitulada: Uma reflexão sobre o ensino de geometria e a arte das dobraduras como ferramenta de ensino.,

defendida por Denis de Sousa Melo

em 11 / 03 / 2016 e aprovada pela banca constituída pelos professores:

Marcelo de Oliveira Rêgo

Prof. Msc. Marcelo de Oliveira Rêgo
Presidente da Banca Examinadora

Cleyton Natanael Lopes de Carvalho Cunha

Prof. Msc. Cleyton Natanael Lopes de Carvalho Cunha

\- Examinador

Weslay Vieira de Araujo

Prof. Msc. Weslay Vieira de Araújo – Examinador Externo

FICHA CATALOGRÁFICA
Universidade Federal do Piauí
Biblioteca Setorial Prof. Cândido Athayde – Campus Parnaíba
Serviço de Processamento Técnico

M528r Melo, Denis de Sousa.
Uma reflexão sobre o ensino de geometria e a arte das dobraduras como ferramenta de ensino [manuscrito] / Denis de Sousa Melo. – 2016.
56 f. : il. color.

Impresso por computador (printout).
Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal do Piauí, 2016.
Orientação: Prof. Me. Marcelo de Oliveira Rêgo.

1. Geometria (Ensino). 2. Origami. 3. Construção Geométrica. 4. Teoria de Van Hiele (Pensamento Geométrico). I. Titulo.

CDD: 516

Dedico este trabalho aos meus pais e a minha esposa os maiores incentivadores do meu crescimento pessoal e profissional.

Agradecimentos

Agradeço aos meus pais por tudo que fizeram por mim e ainda fazem.

A minha esposa Ednila por me apoiar e me compreender nos momentos difíceis do curso.

Aos meus companheiros de turma tirando dúvidas e compartilhando os conhecimentos.

Aos professores que muito contribuiram nesta etapa da minha vida profissional.

Ao professor Marcelo Rego por sua orientação neste trabalho.

Agradeço a CAPES, pelo apoio financeiro e a SBM pela oportunidade.

“ A Geometria faz com que possamos adquirir o hábito de raciocinar, e esse hábito pode ser empregado na pesquisa da verdade e ajudar-nos na vida.”.

Jacques Bernoulli.

Resumo

Este trabalho tem como objetivo principal analisar a influência do uso do Origami como ferramenta de ensino na construção e aplicação de algumas definições geométricas. Primeiro foi feito um levantamento bibliográfico sobre o ensino de Geometria, focado na Teoria de Van Hiele do Pensamento Geométrico, abordando os níveis de aprendizado da Geometria sob a visão deste autor. Traz ainda uma reflexão sobre o uso de material concreto no ensino de geometria, destacando a importância desse tipo de metodologia e o papel do professor no desenvolvimento dessas atividades, como forma de mediar à aprendizagem. Levando-se em consideração o uso de material manipulável para o ensino de geometria apresentou-se o uso de dobraduras e como sua utilização pode auxiliar na compreensão e solução de problemas de geometria. Destacou-se a visão dos PCN's em relação a essa prática metodológica e abordamos a aplicação do Origami nas construções geométricas fazendo relação entre as dobras executadas e a formação dos conceitos com relevância nas construções voltadas para o Ensino Fundamental Terceiro e Quarto Ciclo, tais como, Ponto Médio de um Segmento, Mediatriz, Bissetriz de um Ângulo, entre outras.

Palavras-chave: Ensino de Geometria. Material Concreto. Origami. Construção Geométrica.

Abstract

This work has as the main objective to analyze the influence of using of the Origami as a teaching tool in the construction and application of some geometric settings. First it was did a bibliografic research about the Geometry teaching focused on Van Hiele Theory of Geometric Thought approaching the learning levels of geometry in the view of this author. It has made a reflection about the use of concrete materials in the teaching of geometry, highlighting the importance of this type of methodology and the teacher's role in the development of these activities, in order to mediate learning. Taking into account the use of manipulate materials for the teaching of geometry it was emphasized the use of folding and how its use can assist in understanding and solving geometry problems. It was highlighted the vision of the PCN's in relation to this methodological practice and it was addressed the application of Origami in geometric constructions making relation between the executed folds and the formation of the concepts with relevance in construction aimed for the Elementary School Third and Fourth Cycle, such as Midpoint on the Segment, Bisector, Bisector of an Angle, among others.
Keywords: Geometry Teaching. Concrete material. Origami. Geometric construction.

Conteúdo

Lista de Figuras

Introdução

A Matemática deixou de ser aquela disciplina envolvida somente em algoritmos, cálculos e começou a fazer parte de contextualização de ideias. Não se pode mais ensinar matemática sem apresentar situações de raciocínio, do fazer pensar. O currículo de matemática ao longo dos tempos vem se modificando, modelando-se às realidades educacionais das escolas. Isso pode ser facilmente comprovado nos atuais programas didáticos, em que os problemas estão inseridos em paralelo com as atividades algoritmas.

Porém, algumas avaliações mostram que ao tratar de compreender situações que envolvem elementos da geometria, a maior parte dos alunos apresentam dificuldades para a conclusão desta atividade. Para [12]Lorenzato (1995) isto se deve ao fato de que muitos professores não possuem conhecimentos suficientes sobre a geometria para poder introduzí-la em suas salas de aulas, além disso, o ensino de geometria é apresentado apenas como um conjunto de definições, propriedades, nomes e fórmulas, desligado de quaisquer aplicações ou explicações de natureza histórica ou lógica.

De acordo com Van Hiele (Apud [23]Villiers 2010) os problemas com o ensino de geometria estão relacionados à forma como o currículo é apresentado.

> As deficiências em geometria são devidas ao fato de que o currículo geralmente é apresentado em um nível mais alto do que o dos alunos, eles não compreendem o professor e o professor, por sua vez, não compreende o porquê deles não compreenderem.

Assim, o ensino de Geometria se resume à busca por um processo algébrico para resolver a situação problema, um ensino mecanizado, caracterizado pela repetição do que o professor apresentou em sala de aula.

O ensino da Geometria possibilita levar o aluno a perceber e valorizar sua presença em elementos da natureza e em criações humanas, portanto, encontrar metodologias que modifiquem e valorizem a aprendizagem de geometria, seja talvez, um importante passo para a solução da problemática do ensino de geometria.

Em vista do que foi exposto acima objetiva-se com este trabalho analisar a influência do uso de Origami como forma de auxílio ao ensino de geometria.

Esta pesquisa traz ainda alguns objetivos específicos:

- Abordar a importância do ensino de Geometria na Matemática, destacando a Teoria de Van Hiele do pensamento geométrico.
- Refletir sobre as metodologias de ensino da matemática quando aplicadas aos conhecimentos geométricos.
- Apresentar algumas construções geométricas utilizando dobraduras de papel, como forma alternativa de ensino e aprendizagem de alguns conceitos básicos de geometria.

O primeiro capítulo deste trabalho trata sobre o ensino e aprendizagem de geometria apoiado nas pesquisas de Hoffer, Lorenzato entre outros, apresentando a teoria de Van Hiele que descreve um modelo de aprendizagem fundamentado numa visão que valoriza a aprendizagem da Geometria como um processo gradual, global e construtivo.

No segundo capítulo destaca - se a importância do uso de materiais concretos no ensino de matemática como ação dinamizadora nas aulas de geometria.

O terceiro capítulo apresenta algumas definições básicas de geometria plana. O quarto capítulo aborda a contribuição do Origami no ensino de geometria, iniciando com um breve histórico sobre o Origami, seguido de considerações sobre a relação desta prática com a geometria; por fim, apresenta - se uma proposta para utilizaçao desta ferramenta como ação possibilitadora da compreensão, aplicação e formulação dos conceitos de geometria plana.

Capítulo 1

O Ensino e a Aprendizagem da Geometria

Por muito tempo o ensino de matemática foi focado na memorização de fórmulas e aplicação de cálculos para garantir que o aprendizado da disciplina fosse garantido. A Geometria sendo um ramo da Matemática que estuda o espaço e a forma não ficou de fora desse método mecânico de aprender.

Com a interferência das novas tendências de ensino foi-se modificando esse cenário sobre o ensino de Geometria. A contextualização e a interdisciplinaridade estão transformando o modo de ensinar. Não se pode ensinar geometria isoladamente ou simplesmente com o intuito de que os alunos aprendam fórmulas a serem aplicadas, ela objetiva o pensar do aluno, a busca por uma estratégia para resolver problemas do seu cotidiano. Assim, para [11]Lorenzato (2006), na Matemática, é necessário que desenvolvamos o pensamento geométrico, pois este proporciona um modo específico de raciocínio que só com o estudo da Geometria conseguimos desenvolver.

Utilizando-se da mesma linha de compreensão que Lorenzato, [5]Fainguelert (1999) aborda que o ensino da Geometria não pode ser reduzido a aplicações de fórmulas e resultados propostos por alguns teoremas, ele deve preocupar-se com a descoberta de caminhos para sua demonstração e dedução de fórmulas, sem comprometer nem se apoiar no processo exaustivo da formalização.

Dentro desta proposta [9]Hoffer (1981) destaca que o ensino de Geometria no Ensino Fundamental e Médio também deve proporcionar oportunidades para que todas as habilidades sejam desenvolvidas. O autor descreve as seguintes habilidades geométricas:
Habilidade visual - a capacidade de ver objectos e representações e de deduzir transformações. Esta habilidade proporcionará ao aluno o reconhecimento de diferentes figuras em um desenho fazendo com que ele estabeleça propriedades e informações a respeito das figuras.
Habilidade verbal - refere-se ao uso das palavras para designar os conceitos e as relações entre eles e podem ser desenvolvidas através da análise entre as propriedades das figuras.
Habilidade gráfica - esta habilidade mostra que muitas vezes um desenho é muito mais importante do que uma demonstração. Para desenhar um retângulo ou um losango, o aluno deve saber medidas de segmentos, ângulo reto, mediatriz, perpendicularismo, e deve saber utilizar os instrumentos de desenho.
Habilidade lógica - é o ato de classificar figuras de acordo com as semelhanças e diferenças, estabeler propriedades, incluir classes, deduzir consequências a partir de informações dadas e entender as limitações de hipóteses e teoremas.
Habilidade de aplicação - o estudo da geometria não deve ser reduzido a aplicações práticas, mas deve auxiliar no ensino desta disciplina para fazer o ensino significativo.

Assim, com o surgimento, no início da década de 90, dos atuais programas de Matemática do Ensino Básico, a Geometria ganhou um relevo que até então não tinha. Ao contrário de outras partes da Matemática Escolar, o currículo de Geometria não recolhe um consenso internacional, havendo acentuadas divergências relativamente ao que se deve trabalhar e como trabalhar. A este nível, discutem-se finalidades, os objetivos, os temas, e as metodologias. Apesar de todo este questionamento, é inquestionável, que a Geometria tem um papel fundamental e insubstituível na formação matemática dos alunos, visando a competência matemática.
No segundo ciclo, Abrantes, Oliveira e Serrazina (1999) defendem que a Geometria deve permitir e contribuir para:

- Identificar propriedades de figuras geométricas, nomeadamente, em triângulos, em quadriláteros e em sólidos geométricos, bem como para justificar e comunicar os seus raciocínios;

- Realizar construções geométricas, nomeadamente, ângulos e triângulos, bem como para descrever figuras geométricas;
- Resolver e formular problemas que envolvam os conceitos de perímetro e de área e as relações entre eles, em diversos contextos;
- Calcular áreas de retângulos, triângulos e círculos, assim como volumes de paralelepípedos, recorrendo ou não a fórmulas, em contexto de resolução de problemas.

Na aprendizagem da geometria, a capacidade espacial (ou sentido espacial) é essencial, especialmente em tarefas como visualizar objetos, comparar figuras com diferentes orientações, seguir direções, fazer diagramas, ler tabelas, ler mapas.

Em que consiste e o que envolve essa capacidade? A capacidade espacial, que é mais um conjunto de capacidades, respeita à forma como os alunos, ou as pessoas em geral, percepcionam o mundo que os rodeia e a sua capacidade de interpretar, modificar e antecipar transformações dos objetos [14]Matos e Serrazina (1996). Este sentido espacial envolve diversas sub-capacidades, que [19]Ponte e Serrazina (2000) sistematizam e definem desta forma:
Coodenação visual motora - capacidade de coordenar a visão com os movimentos do corpo;
Memória visual - capacidade de recordar objetos que já não estão à vista;
Percepção figura-fundo - capacidade de identificar uma componente específica numa determinada situação e que envolve a mudança de percepção de figuras contra fundos complexos;
Constância perceptual - capacidade de reconhecer figuras geométricas em diversas posições, tamanhos, contextos e texturas;
Percepção da posição no espaço - capacidade para distinguir figuras iguais mas colocadas com orientações diferentes;
Percepção de relações espaciais - capacidade de ver e imaginar dois ou mais objectos em relação consigo próprios ou em relação conosco;
Discriminação visual - capacidade para identificar semelhanças ou diferenças entre objectos.

Diversos autores tem se preocupado com aprendizagem da Geometria, aqui destaca-se a Teoria de Van Hiele, desenvolvida nos anos 50 do século XX por Dina e Pierre Hiele.

1.1 A Teoria de Van Hiele

Desenvolvida por Dina e Pierre Van Hiele a teoria propõe uma progressão de aprendizagem deste tópico através de cinco níveis de complexidade crescente. Esta progressão é determinada pelo ensino, onde o professor tem um papel primordial na definição de tarefas adequadas para os alunos poderem progredir para níveis superiores de pensamento geométrico.

Segundo [15]Nasser e Sant'anna (2010), a Teoria de Van Hiele auxilia na identificação de competências e no direcionamento durante a aprendizagem para o desenvolvimento do pensamento geométrico a níveis mais elevados de compreensão.

O modelo de Van Hiele oportuniza avaliar através das habilidades demonstradas o nível de desenvolvimento do pensamento geométrico e da aprendizagem de um aluno em determinado conteúdo. De acordo com Lorenzato (2009), o modelo indica que respeitar a ordenação significa não saltar etapas no ensino.

A teoria se encaixa dentro da didática da matemática e de forma mais específica, na didática da geometria. A ideia básica do modelo, expressa de forma simplificada é:

A aprendizagem da geometria se faz passando por níveis graduais de pensamento. Estes níveis não estão associados a idade, e têm as seguintes características:

- Não se pode alcançar o nível n sem haver passado pelo nível anterior $n-1$, ou seja, o progresso dos alunos através dos níveis é invariante.
- Em cada nível de pensamento, o que era implícito, no nível seguinte volta explícito.
- Cada nível tem sua linguagem própria utilizada (símbolos linguísticos) e respectiva significância dos conteúdos (conexão destes símbolos com algum significado).
- Dois estudantes com níveis distintos não podem se entender.

1.2 Níveis de Aprendizagem da Geometria(Segundo Van Hiele)

A Teoria engloba cinco níveis de compreensão que descrevem características do processo de pensamento.

NÍVEL 1: VISUALIZAÇÃO - Os alunos compreendem as figuras globalmente, isto é, as figuras são entendidas pela sua aparência.

NÍVEL 2: ANÁLISE - Os alunos entendem as figuras como o conjunto das suas propriedades.

NÍVEL 3: ORDENAÇÃO - Os alunos ordenam logicamente as propriedades das figuras.

NÍVEL 4: DEDUÇÃO - Os alunos entendem a geometria como um sistema dedutivo.

NÍVEL 5: RIGOR - Os alunos estudam diversos sistemas axiomáticos para a geometria.

A Teoria de Van Hiele sugere que o pensamento geométrico evolui de modo lento desde as formas iniciais de pensamento até às formas dedutivas finais onde a intuição e a dedução se vão articulando. As crianças começam por reconhecer as figuras e diferenciá-las pelo seu aspecto físico e só posteriormente o fazem pela análise das suas propriedades. Assim, é importante que ao nível dos primeiros anos se privilegie a abordagem intuitiva e experimental do conhecimento do espaço e do desenvolvimento das formas mais elementares de raciocínio geométrico em ligação com as propriedades fundamentais das figuras e das relações básicas entre elas.

Capítulo 2

O Uso de Material Concreto no Ensino de Geometria

Evidenciou-se neste trabalho que pesquisas como as de Lorenzato (1995) mostraram que o ensino de Geometria na educação básica por um certo período foi negligenciado durante as aulas de Matemática. Por isso, implementar estratégias didáticas diversificadas podem conferir ao ensino subsídios que atraem a atenção e a motivação dos alunos.

As dificuldades relacionadas ao ensino e aprendizagem de Geometria ocorre em todos os níveis de ensino. De a acordo com [2]Braguim (2006), essas dificuldades podem ser amenizadas quando os professores em sala de aula inovam suas práticas com novas metodologias que permitem a participação dos alunos de forma ativa no processo de aprendizagem.

É importante considerar que os materiais didáticos aplicados ao ensino sejam selecionados, adaptados e criados de acordo com cada contexto em que está inserido, e conforme objetivos previamente estabelecidos.

Segundo [7]Fiorentini e Miorim (1990) o conhecimento sobre os materiais como recursos de ensino e possibilitadores de ensino-aprendizagem podem promover um aprender significativo no qual o aluno pode ser estimulado a raciocinar, incorporar soluções alternativas acerca dos conceitos envolvidos nas situações e, consequentemente, aprender.

A Matemática a partir da utilização de material concreto torna as aulas mais interativas, assim como incentiva a busca, o interesse, a curiosidade e o espírito de investigação; instigando-os na elaboração de perguntas, desvelamento de relações, criação de hipóteses e a descoberta das próprias soluções.

O uso de materiais concretos no ensino de geometria permite que através da manipulação de objetos o aluno vá construindo o seu conceito. Essa construção está diretamente ligada ao que [17]Oliveira (1997) chama de processo de internalização, ou seja, é a construção de um conhecimento de fora pra dentro, e que quando internalizado torna-se "apreendido"pelo aluno de forma a utilizar esse conhecimento como se fosse produzido por ele e não apreendido através da mediação do professor e dos símbolos utilizados como ferramentas.

Na Geometria evidencia-se o trabalho com a manipulação de diversos materiais, como por exemplo, caixas, sólidos, réguas entre outros. Estes materiais podem ajudar no processo de ensino-aprendizagem e podem proporcionar a melhor compreensão do pensamento geométrico para o aluno. Segundo [11]Lorenzato (2006) "Palavras não alcançam o mesmo efeito que conseguem os objetos ou imagens, estáticos ou em movimentos. Palavras auxiliam, mas não são suficientes para ensinar".

O uso de materiais concretos proporcionam várias possibilidades de descobertas que os alunos podem obter como recurso na aprendizagem da Geometria, na prática da investigação matemática e na valorização de suas experiências dentro do processo de ensino e aprendizagem.

Os PCN's destacam a utilização de materiais concretos pelos professores como um recurso alternativo que pode tornar bastante significativo o processo de ensino-aprendizagem da Matemática.

No entanto, [13]Magina e Spinillo (2004) destacam que, o material concreto não é o único e nem o mais importante recurso na compreensão matemática, como usualmente se supõe. Não se deseja dizer com isso que tal recurso deva ser abolido da sala de aula, mas que seu uso seja analisado de forma crítica, avaliando-se sua efetiva contribuição para a compreensão matemática.

Assim, novos rescursos metodológicos didáticos estão sendo desenvolvidos por educadores, com a justificativa de que esses recursos podem tornar mais interessantes e significativos à aprendizagem de conceitos geométricos.

Porém, quando tratar-se de manipulação de material concreto associado ao ensino de Geometria, essa estratégia pedagógica só contribuirá para construção dos conceitos matemáticos, desde que, sua vivência não caia em um empirismo desprovido de significado, ou seja, conciliar a utilização do suporte de materialidade no ensino de Geometria sem perder de vista seus valores educativos[18](Pais, 1999).

A utilização de materiais concretos em sala de aula pode ser um recurso significativo aos alunos e contribuir no processo ensino e aprendizagem da Geometria. Para isso, o papel do professor é fundamental. Compete a ele coordenar as situações de aprendizagem e provocar reflexões sobre o aprender, mantendo uma postura crítica/investigativa dos conhecimentos.

Para [11]Lorenzato (2006), o professor tem um papel muito importante no sucesso ou fracasso escolar do aluno. Para ele, não basta o professor dispor de um bom material didático para que se tenha a garantia de uma aprendizagem significativa. Mais importante do que isso é saber utilizar corretamente estes materiais em sala de aula.

Assim [21]Rêgo e Rêgo (2006) defendem que durante a utilização do material didático cabe ao professor alguns cuidados básicos, dentre os quais podemos destacar:

- Dar tempo para que os alunos conheçam o material (inicialmente é importante que os alunos o explorem livremente);
- Incentivar a comunicação e troca de ideias, além de discutir com a turma os diferentes processos, resultados e estratégias envolvidos;
- Mediar, sempre que necessário, o desenvolvimento das atividades, por meio de perguntas ou da indicação de materiais de apoio, solicitando o registro individual ou coletivo das ações realizadas, conclusões e dúvidas;
- Realizar uma escolha responsável e criteriosa do material;

- Planejar com antecedência as atividades, procurando conhecer bem os recursos a serem utilizados, para que possam ser explorados de forma eficiente, usando o bom senso para adequá-los às necessidades da turma, estando aberto a sugestões e modificações ao longo do processo, e

- Sempre que possível, estimular a participação do aluno e de outros professores na confecção do material.

Contudo, os docentes de Matemática devem sempre ser cautelosos quanto à escolha do material pedagógico que se utilizará no ensino de geometria, para que assim, este recurso não se torne mera exposição em sala de aula, distorcendo então, seu verdadeiro objetivo: fazer com que os alunos aprendam os conceitos geométricos e suas aplicações na resolução de situações-problemas escolares e do seu dia-a-dia.

Capítulo 3

Conceitos Básicos de Geometria Plana

Estas definições serão úteis à compreensão da aplicação do Origami em algumas construções geométricas apresentadas no próximo capítulo deste trabalho.

Definição 1: Ponto, Reta e Plano

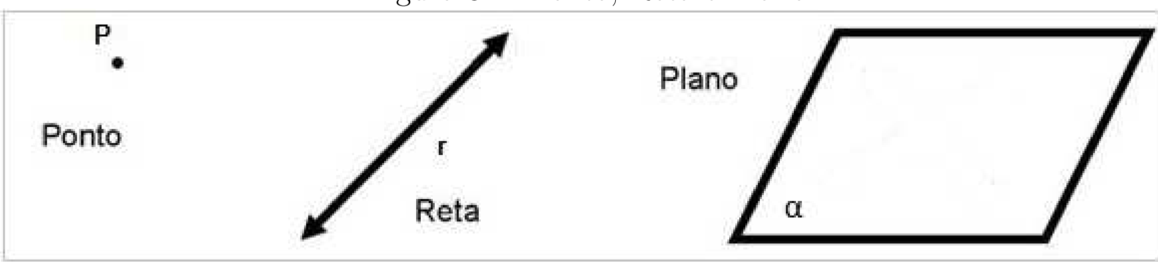
Os conceitos fundamentais da geometria, **ponto**, **reta** e **plano**, não podem ser propriamente definidos. Toda a conceituação que se faz deles é circular ou apela para outros conceitos igualmente indefinidos. Diz-se que estes são conceitos primitivos.

Pontos serão representados por letras latinas maiúsculas. Ex: A, B, C,...

Retas serão representados por letras latinas minúsculas. Ex: a, b, c,...

Planos serão representados por letras gregas minúsculas. Ex:α, β, γ,...

Figura 3.1: Ponto, Reta e Plano



Fonte: Elaborada pelo Autor.

Definição 2: Postulado ou Axioma

Um postulado ou axioma é uma afirmação que é utilizada em uma teoria como ponto de partida, não necessitando, portanto, de demonstração para estabelecer sua validade.

Definição 3: Segmento de Reta

Dados dois pontos A e B sobre uma reta, dizemos que o segmento $\overline{AB}$ é o conjunto de pontos formado por A, B e por todos os pontos entre A e B.

Figura 3.2: Segmento de Reta

Fonte: Elaborada pelo Autor

Definição 4: Semirreta

Dados dois pontos A e B sobre uma reta, a semirreta $\overrightarrow{AB}$ é o subconjunto de pontos formado pelo segmento $\overline{AB}$ e por todos os pontos C sobre a reta $\overleftrightarrow{AB}$ tais que B esteja entre A e C.

Figura 3.3: Semirreta

Fonte: Elaborada pelo Autor

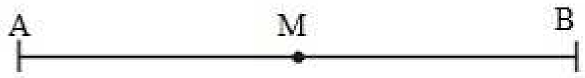
Definição 5: Segmentos Congruentes

Dois segmentos de reta são *congruentes* se eles têm a mesma medida.

Definição 6: Ponto Médio de um Segmento

Chama-se ponto médio de um segmento $\overline{AB}$ o ponto M pertencente ao segmento $\overline{AB}$ situado a uma igual distância dos extremos A e B. Consequentemente, o ponto médio de um segmento o divide em dois segmentos congruentes.

Figura 3.4: Ponto Médio



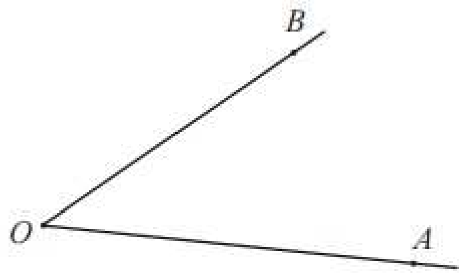
Fonte: Elaborada pelo Autor

Definição 7: Ângulos

Chama-se ângulo à região do plano formada por duas semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ de mesma origem O.

As semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ são chamadas de lados e O o vértice do ângulo $A\hat{O}B$.

Figura 3.5: Ângulo AÔB



Fonte: Elaborada pelo Autor

Dois ângulos são *congruentes* quando apresentarem a mesma medida.

Um ângulo AÔB chama-se *raso* se seus lados são semirretas opostas.

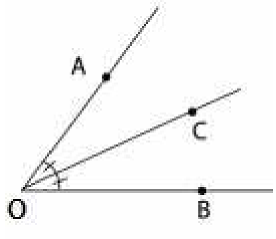
Figura 3.6: Ângulo raso

Fonte: Elaborada pelo Autor.

Definição 8 : Bissetriz de um Ângulo

Chama-se bissetriz de um ângulo AÔB a semirreta $\overrightarrow{OC}$, situada entre $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ que divide o ângulo AÔB em dois ângulos congruentes.

Figura 3.7: Bissetriz de $A\hat{O}B$

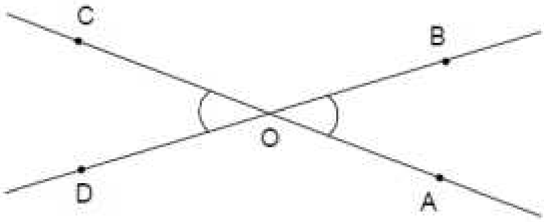


Fonte: Elaborada pelo Autor

Definição 9: Ângulos Opostos pelo Vértice

Dois ângulos não rasos são ditos *opostos pelo vértice (o.p.v.)* se os lados de um são as semirretas opostas aos lados do outro.

Figura 3.8: Ângulos O.P.V

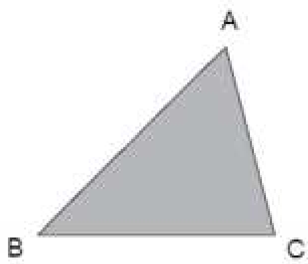


Fonte: Elaborada pelo Autor

Definição 10: Triângulo

Chamaremos de triângulo ou de trilátero a região do plano limitada por 3 segmentos de reta $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CA}$, em que os pontos A, B e C não são colineares.

Figura 3.9: Triângulo



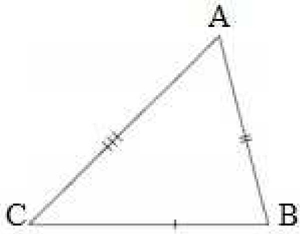
Fonte: FILHO, 2010, p.23

Chama-se lado de um triângulo ABC qualquer um dos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ ou $\overline{CA}$; *ângulo interno* ou simplesmente ângulo do triângulo ABC qualquer um dos ângulos $\hat{A}$, $\hat{B}$ ou $\hat{C}$ e *vértice* qualquer um dos pontos A, B ou C.

Definição 11: Triângulo Escaleno

Um triângulo chama-se **escaleno** se as medidas de seus lados são desiguais.

Figura 3.10: Triângulo Escaleno

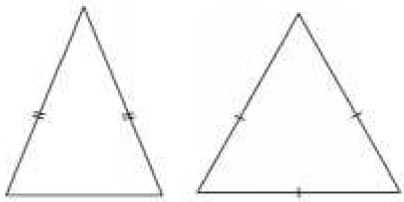


Fonte: FILHO, 2010, p.23

Definição 12: Triângulo Isósceles

Um triângulo será **Isósceles** se tiver pelo menos dois lados congruentes.

Figura 3.11: Triângulo Isósceles



Fonte: FILHO, 2010, p.23

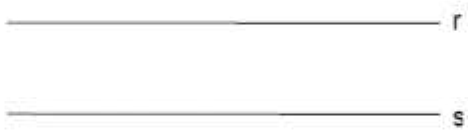
Definição 13: Triângulo Equilátero

Um triângulo será **equilátero** quando tiver os três lados com a mesma medida.

Definiçao 14: Retas Paralelas

Considere duas retas r e s do plano. Se elas não se interceptam, ou seja, $r \cap s = \varnothing$ dizemos que elas são *paralelas (e distintas)*.

Figura 3.12: Retas Paralelas



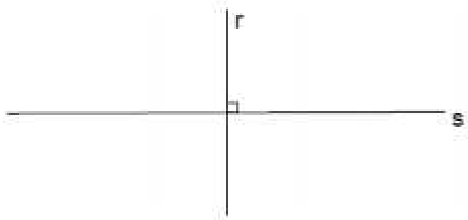
Fonte: FILHO, 2010, p.37

Definição 15: Retas Concorrentes e Perpendiculares

Quando a interseção entres duas retas r e s se constituir em apenas um ponto, diz-se que as retas r e s são *concorrentes.*

Definimos o ângulo entre duas retas concorrentes r e s como sendo o menor ângulo que elas formam e diremos que elas são **perpendiculares** se este ângulo for **reto**.

Figura 3.13: Retas Perpendiculares

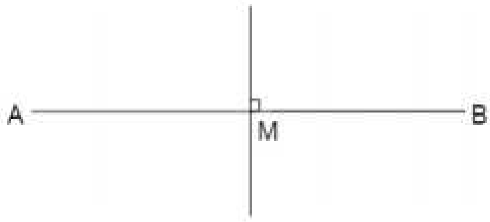


Fonte: FILHO, 2010, p.37

Definição 16: Mediatriz de um Segmento

Chama-se mediatriz de um segmento de reta $\overline{AB}$ a reta perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$ que passa no ponto médio de $\overline{AB}$.

Figura 3.14: Mediatriz



Fonte: FILHO, 2010, p.38

Outra definição para mediatriz está relacionada a ideia de Lugar Geométrico. Neste caso, mediatriz é o lugar geométrico dos pontos do plano que equidistam dos pontos A e B deste mesmo plano.

Capítulo 4

A Contribuição do Origami no Ensino de Geometria

4.1 Um Pouco da História do Origami

No ano 105 a.C. T'Sai Lun, administrador no palácio do imperador chinês, começou a misturar cascas de árvores, panos e redes de pesca para substituir a sofisticada seda que se utilizava para escrever. O império chinês manteve segredo sobre as técnicas de fabricação do papel durante séculos. No século VI, por intermédio de monges budistas chineses, a técnica de fabricar papel chegou ao Japão e um século mais tarde, os árabes obtiveram o segredo desse processo. Na Europa a técnica de fabricação de papel chegou por volta do século XII, e dois séculos mais tarde já se espalhava por todos os reinos cristãos.

A palavra japonesa Origami é composta por dois caracteres. O primeiro, **ori**, deriva do desenho de uma mão e significa dobrar. O segundo, **kami**, deriva do desenho de seda e significa papel, mas também significa espírito e Deus.

Figura 4.1: Radicais da palavra Origami

Fonte: yasald.no.sapo.pt

A história do Origami pode ser dividida em três grandes períodos.

4.1.1 Período Heian

Período compreendido aproximadamente entre 794 a 1185.

Neste período o Origami era um divertimento das classes altas, as únicas que podiam comprar papel, que era um artigo de luxo. Alguns modelos em Origami foram introduzidos nas cerimônias religiosas (Shinto). Os casamentos eram celebrados com copos de saquê (vinho tinto) dobrados em papel com borboletas, representando a noiva e o noivo. As borboletas fêmea e macho, simbolizavam a união.

Os mestres das cerimônias de chá recebiam diplomas dobrados de forma especial. Depois de os diplomas abertos estes não podiam voltar à sua forma inicial sem que se realizarem outras dobras no papel.

Hoje em dia ainda se utiliza a expressão “Origami Tsuki”que significa “certificado”ou “garantia”, que funcionam como um selo de qualidade, conferindo autenticidade aos documentos de valor.

4.1.2 Período Muromachi

Período compreendido aproximadamente entre 1338 a 1576.

Foi nesse momento histórico que o papel tornou-se um produto mais acessível e o Origami começou a ser utilizado para distinguir as diversas classes sociais, conforme os adornos que as pessoas usavam.

4.1.3 Período Tokugawa

Período compreendido aproximadamente entre 1603 a 1867.

A “democratização”do Origami surge durante o **Período Tokugawa**. É neste período que surgem os primeiros livros de Origami. O primeiro livro com instruções surgiu em 1797 - **Sembazuru Oricata** (como dobrar mil tsurus).

Não se dobrou apenas no Japão, os muçulmanos também praticaram esta arte e levaram-na para Espanha. Os muçulmanos proibiam a criação de figuras, pois é contra os princípios do Islã, permitindo apenas o uso das dobras de papel para estudos matemáticos e astronômicos.

Os árabes optaram por investigar as diversas formas e propriedades de dobrar um quadrado e explorar diversas formas de cobrir as paredes de Alhambra com “tessellacions”, tendo aplicado também os seus avançados em conhecimentos de trigonometria para mapearem as estrelas. Após os árabes terem sido expulsos da Península Ibérica, pela inquisição, os espanhóis desenvolveram esta arte, chamando-a de Papiroflexia.

O pai do Origami moderno é o japonês Akira Yoshizawa. É a Yoshizawa que se deve a simbologia atual de instruções de como dobrar os modelos (Sistema Yoshizawa - Randlett, 1956). Este sistema é a contribuição mais importante para o Origami desde a invenção do papel, já que permite a difusão internacional das várias criações.

4.2 A Matemática e o Origami

Uma ferramenta que pode trazer benefícios para o ensino e aprendizagem de geometria é a arte de dobrar papéis, onde se trabalhando de maneira coerente e dentro dos objetivos da disciplina é possível desenvolver nos alunos, o raciocínio, a lógica, a visão espacial e artística, a paciência e a criatividade.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais evidenciam que as atividades geométricas feitas por meio do trabalho com dobraduras podem contribuir para o desenvolvimento de procedimentos de estimativa visual, seja de comprimentos, ângulos ou outras propriedades métricas das figuras.

Para [21]Rêgo e Rêgo (2006), o origami pode representar para o processo de ensino-aprendizagem de geometria um importante recurso metodológico, pois com ele os estudantes podem intensificar os conhecimentos geométricos adquiridos informalmente pela observação do meio em que vivem. Com o auxílio desse recurso, formas que antes ficavam apenas na imaginação do aluno passam a ser reais, e com isso ele pode manuseá-las e visualizá-las, facilitando assim a aprendizagem de alguns conceitos geométricos.

Friedrich Froebel (1782-1852), educador alemão, foi quem primeiro usou esta ferramenta como forma de ensinar e aprender conceitos geométricos. Fundador do "kindergarten"(jardim de infância) em sua abordagem dividia a dobradura em três estágios:

- **Dobras de verdade**: que trabalhavam com a geometria elementar com a intenção de que as crianças descobrissem por si só os princípios da geometria Euclidiana.

- **Dobras da vida**: onde noções básicas de dobradura tem como finalidade chegar às dobras tradicionais de pássaros e animais. Esse estágio não foi muito levado a sério pelos seguidores de Frobel, por considerarem como apenas uma rígida seqüência de memorização de dobraduras, sem nenhuma exploração da criatividade infantil.

- **Dobras da beleza**: a grande contribuição de Frobel, e cuja intenção é levar à criatividade e à arte. As crianças eram encorajadas a guardarem suas coleções de dobras em álbuns ou em caixas. Visava estimular o senso estético, através da contemplação das dobraduras por meio de uma exposição.

A vantagem desse recurso é que este é acessível e de baixo custo para a comunidade escolar, levando-se em conta que, nem todas as escolas apresentam recursos pedagógicos suficientes para o professor dinamizar suas aulas.

O trabalho com dobraduras parece ser enriquecedor, a exploração geométrica que é possível ser feita com o Origami utiliza conceitos básicos relacionados a ângulos, planos, vértices, paralelismo, semelhança de figuras, entre outros, as noções de proporcionalidade, frações, aritmética, álgebra e funções, são fortemente evidenciadas nesta prática.

Para [21]Rancan (2011), o trabalho com Geometria possibilita o desenvolvimento de competências como as de experimentar, representar e argumentar, além de instigar a imaginação e a criatividade. Ao repensar a prática pedagógica de Geometria, o Origami surge, nessa perspectiva, como um instrumento instigante para a revitalização dessa prática.

O modelo de Van Hiele sugere que enquanto os alunos aprendem geometria, eles progridem segundo uma sequência de níveis de compreensão de conceitos, onde cada nível é caracterizado por relações entre objetos de estudo e linguagem. Utilizando o origami para fazer deduções e demonstrar relações geométricas, podemos facilitar o processo de desenvolvimento dos quatro primeiros níveis iniciais na teoria de Van Hiele do desenvolvimento do pensamento geométrico, dando destaque à visualização.

Enfim, o Origami pode ser usado como forma de subsidiar o ensino de geometria, afinal, ela possibilita ao aluno desenvolver um tipo de pensamento particular para compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive. .

4.3 Aplicações do Origami no Ensino de Geometria

Esta seção aborda como o Origami pode contribuir para aprendizagem e construção de alguns conceitos geométricos. Estas atividades favorecem o entendimento dos conteúdos básicos de geometria plana, pois os alunos manipulando o papel, vão tentando formar seu próprio conceito sobre o que está sendo ensinado na sala de aula.

As construções aqui apresentadas não se aplicam diretamente sobre resolução de situações problemas de geometria, elas surgem como suporte à aprendizagem, além de, estimular a organização e auxiliar os alunos na construção dos conceitos para, por fim, utilizar as definições na resolução de problemas. Por isso, é aconselhável ao docente, depois de trabalhar as construções propor atividades que fixem o aprendizado dos conteúdos que foram abordados nas construções geométricas.

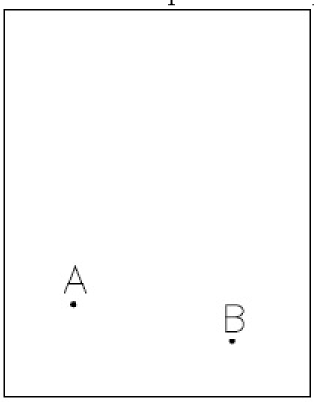
Essas atividades são mais relevantes para o Ensino Fundamental Séries Finais, pois trata-se de conceitos básicos da Geometria Euclidiana.

4.3.1 Dados dois pontos distintos, existe uma única reta que contém estes pontos

Com o auxilio das dobraduras de papel permite-se mostrar aos alunos concretamente o Postulado 1 de Euclides: é possível traçar uma reta entre quaiquer dois pontos. Assim segue essa demonstração.

1. Marque dois pontos **A** e **B** distintos, quaisquer.

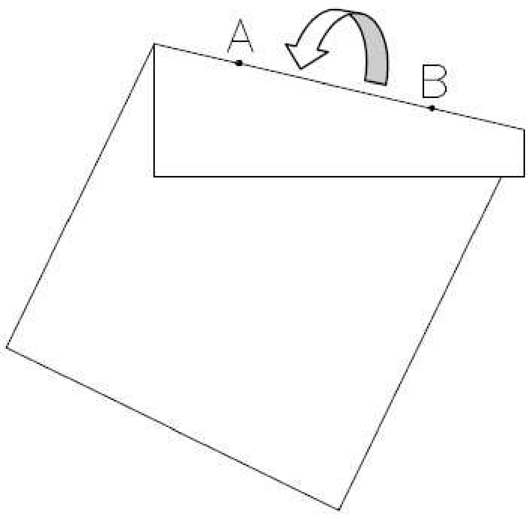
Figura 4.2: Dois pontos no plano



Fonte: LEROY, 2010, p.17

2. Faça uma dobradura no papel que passe por **A** e **B** ao mesmo tempo.

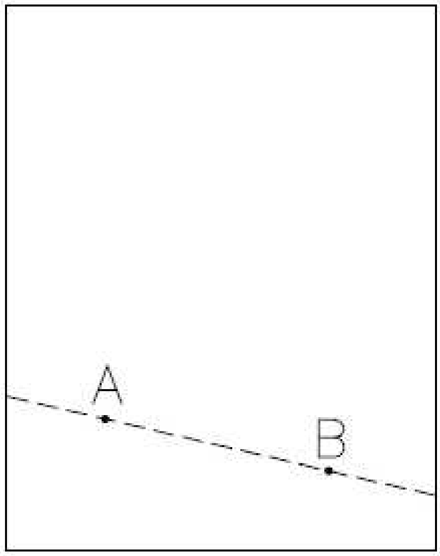
Figura 4.3: Reta que passa por dois pontos.



Fonte: LEROY, 2010, p.17

3. Desdobre.

Figura 4.4: Reta passando por A e B



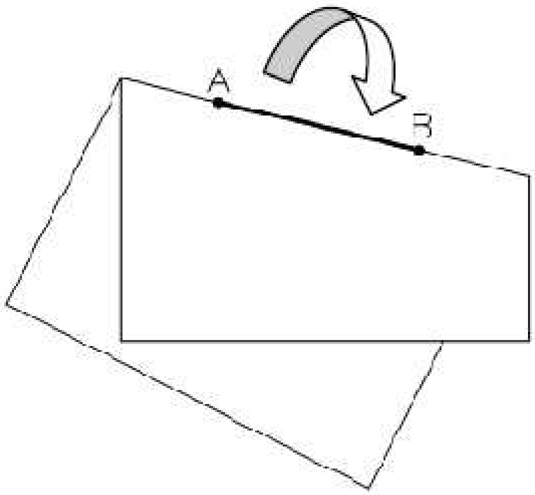
Fonte: LEROY, 2010, p.18

4. Vejamos que a dobra passa exatamente por A e B, mostrando assim, que existe uma única reta que os contém.

4.3.2 Ponto médio de um Segmento

1. Faça uma reta qualquer. Marque os pontos A e B sobre a reta.

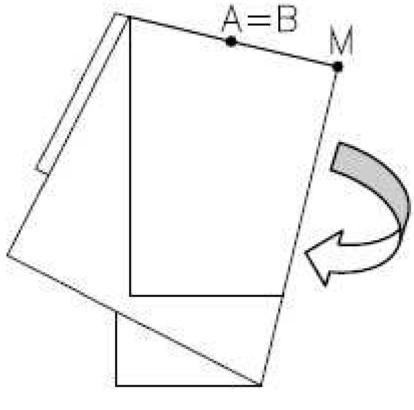
Figura 4.5: Reta passando por A e B



Fonte: LEROY, 2010, p.18

2. Faça uma dobradura coincidindo os pontos A e B.

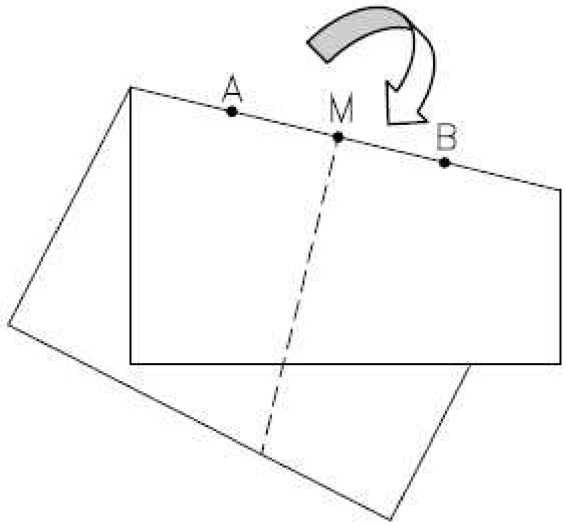
Figura 4.6: Ponto A coincidindo com o ponto B



Fonte: LEROY, 2010, p.18

3. Desdobre e marque o ponto M na interseção das retas.

Figura 4.7: Ponto médio



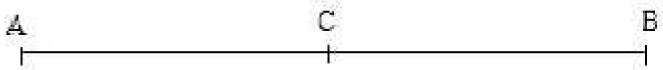
Fonte: LEROY, 2010, p.19

4. Observamos que no 2º passo, os segmentos $\overline{AM}$ e $\overline{MB}$ se sobrepõem, o que implica dizer que estes segmentos são congruentes.
Essa construção favorece a compreensão de ponto médio, pois a sobreposição dos segmentos permite a comparação dos mesmos, e uma possível conclusão de segmentos de mesmo comprimento.

ATIVIDADE 1
Usando dobraduras construa um segmento $\overline{AB}$ qualquer, e o divida em 4 partes iguais.

ATIVIDADE 2
Na figura a seguir o ponto C é o ponto médio do segmento $\overline{AB}$. Sabendo que a medida de $\overline{AC}$ é 4.5 cm, qual a medida do segmento $\overline{AB}$?

Figura 4.8: Segmento AB



Fonte: Elaborada pelo Autor

4.3.3 Construção de Retas Perpendiculares por um Ponto P

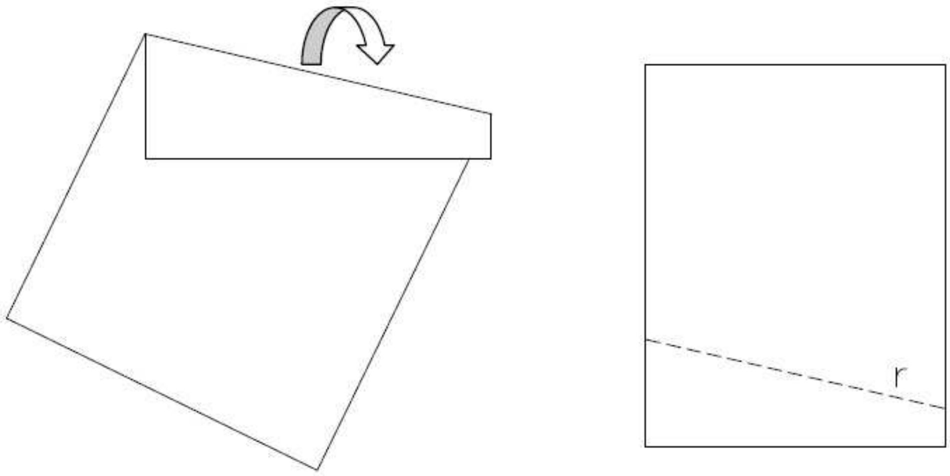
Dado uma reta r e um ponto P, existe uma única reta que passa por P e é perpendicular à reta r.

Vamos considerar 2 casos:

1º caso: O ponto P pertence à reta r.

1. Faça uma reta r.

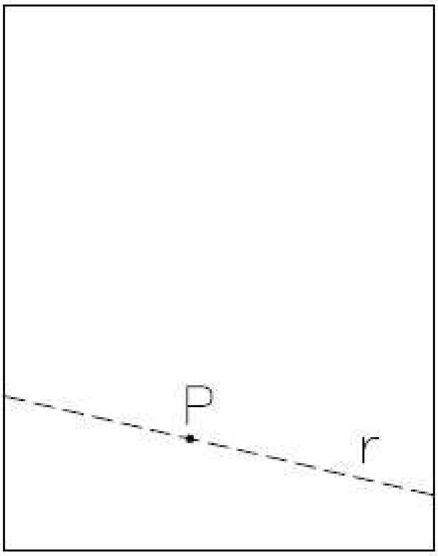
Figura 4.9: Reta r.



Fonte: LEROY, 2010, p.19

2. Marque um ponto P qualquer sobre r.

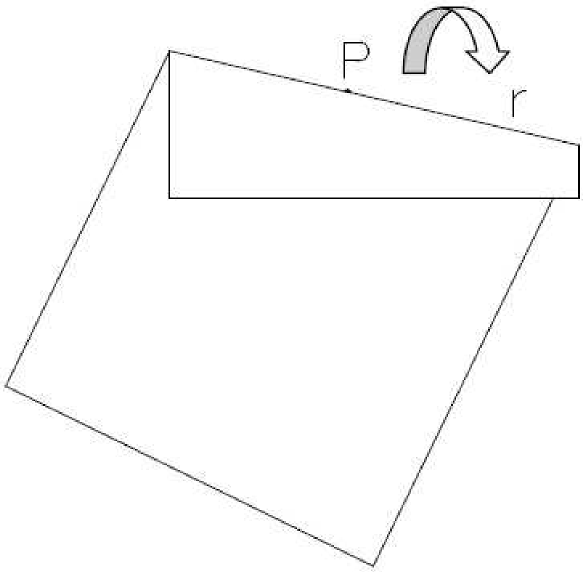
Figura 4.10: Ponto P sobre r.



Fonte: LEROY, 2010, p.19

3. Dobre a folha sobre r.

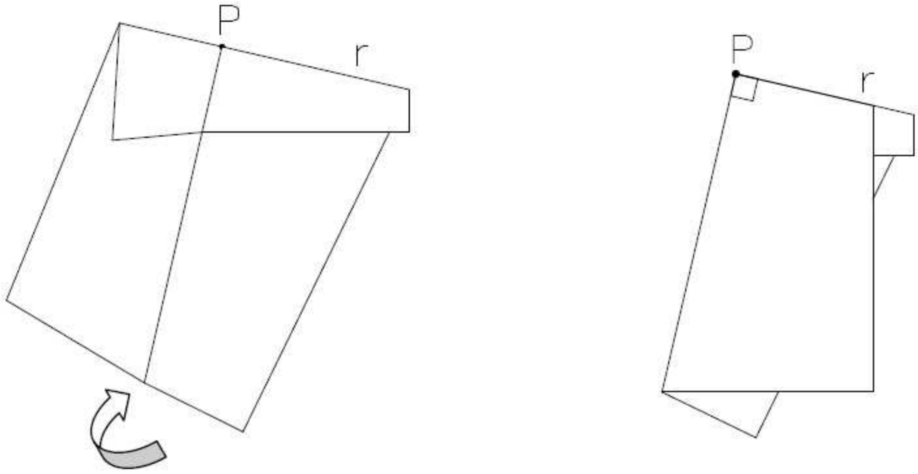
Figura 4.11: Dobra sobre a reta r.



Fonte: LEROY, 2010, p.20

4.Faça uma dobradura passando por P de modo que as duas semirretas sobre r com origem em P coincidam.

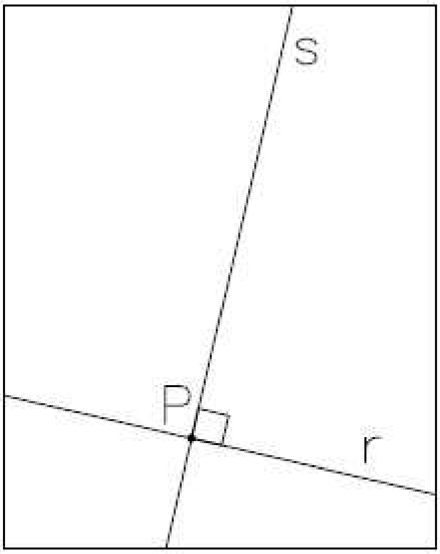
Figura 4.12: Dobra passando por P



Fonte: LEROY, 2010, p.20

5.Desdobre. Verifique que há duas retas formadas r e s.

Figura 4.13: Reta perpendendicular por P



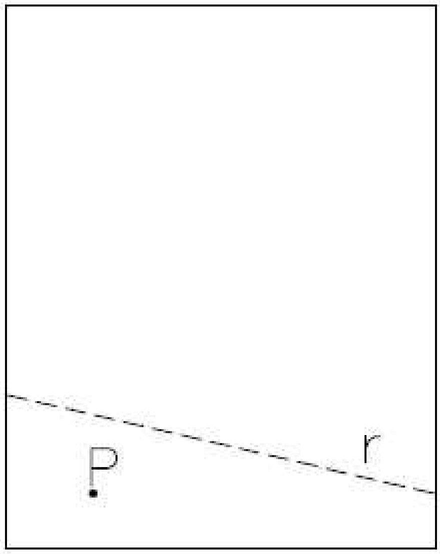
Fonte: LEROY, 2010, p.21

6.Observamos que pela construção, os ângulos formados por r e s são congruentes (eles se sobrepõem), portanto, as retas r e s formam ângulos retos. Logo, as retas **r** e **s** são perpendiculares.

2º caso: O ponto P não pertence à reta r.

1. Faça uma reta r e marque um ponto P fora da reta.

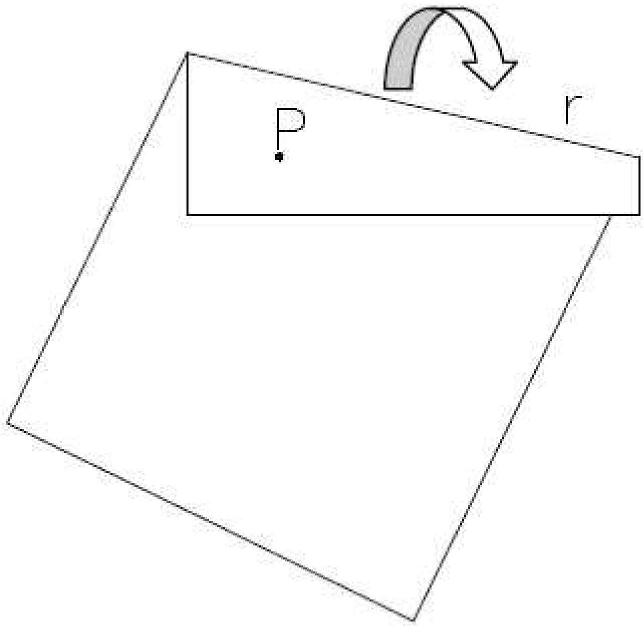
Figura 4.14: Ponto P fora de r.



Fonte: LEROY, 2010, p.21

2. Faça novamente a dobradura sobre r, de modo que P fique à mostra.

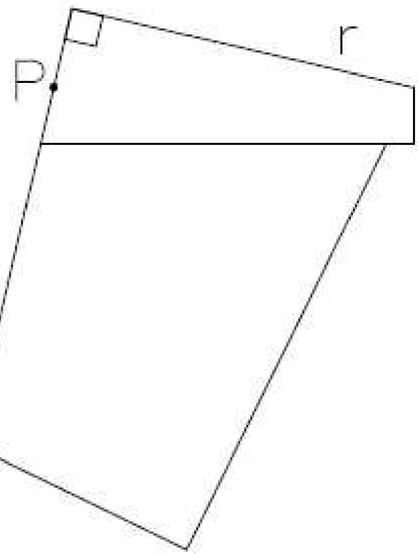
Figura 4.15: Ponto P fora de r.



Fonte: LEROY, 2010, p.22

3.Faça uma dobradura passando por P e faça coincidir as duas semirretas originadas por essa dobradura.

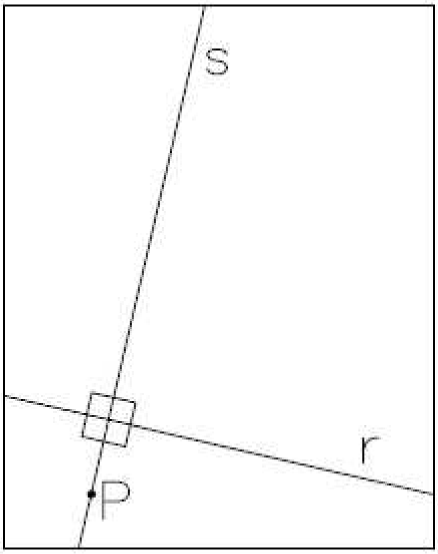
Figura 4.16: Coincidência das semirretas.



Fonte: LEROY, 2010, p.22

4.Desdobre e verifique que há duas retas formadas r e s.

Figura 4.17: Reta s perpendicular a r por P



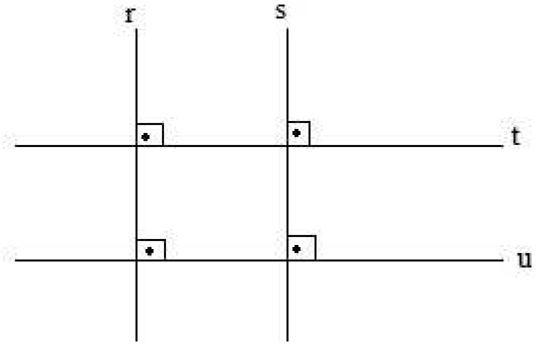
Fonte: LEROY, 2010, p.22

5.Observamos que os ângulos formados por r e s são congruentes (eles se sobrepõem), logo as retas r e s formaram ângulos retos, portanto, r e s são perpendiculares.

ATIVIDADE

De acordo com a figura, qual das alternativas a seguir é falsa?

Figura 4.18: Retas r, s, t, u.



Fonte: SOUZA e PATARO, 2012, P.177

a) A reta r é perpendicular à reta t.

b) A reta s é paralela à reta u.

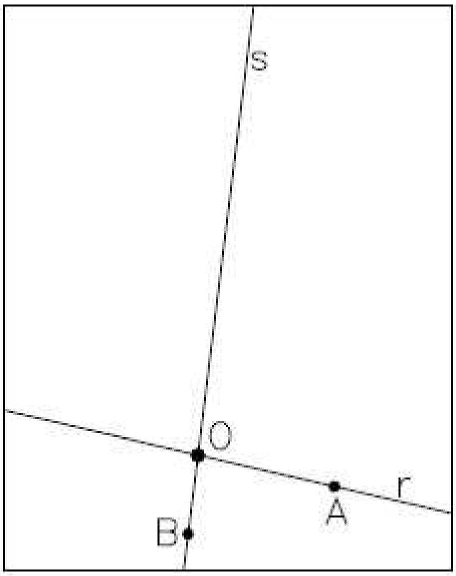
c) A reta r é paralela à reta s.

d) A reta t é perpendicular à reta s.

4.3.4 Construção da Bissetriz

Já vimos anteriormente que **bissetriz de um ângulo** é a reta que o divide em dois ângulos congruentes.

Figura 4.19: Ângulo AÔB

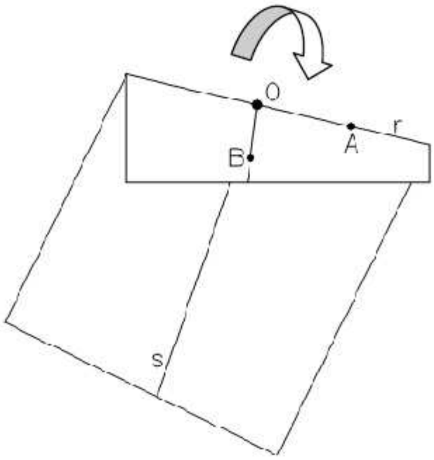


Fonte: Elaborada pelo Autor

Determinaremos a bissetriz do ângulo AÔB com a seguinte construção:

1. Faça uma dobradura sobre a reta r.

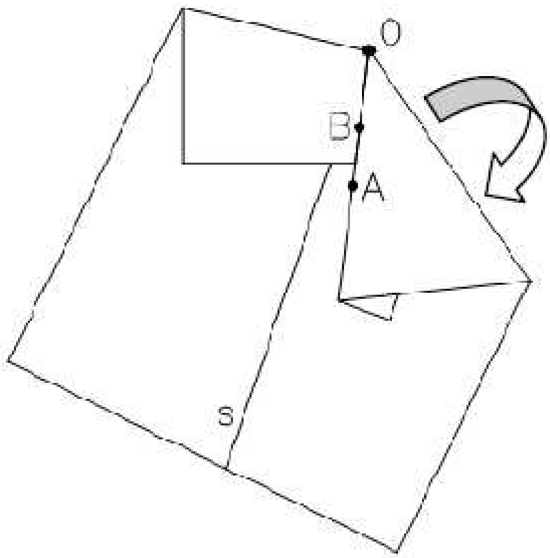
Figura 4.20: Dobra sobre a reta r.



Fonte: LEROY, 2010, p.23

2. Faça uma dobradura sobrepondo os segmentos $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$

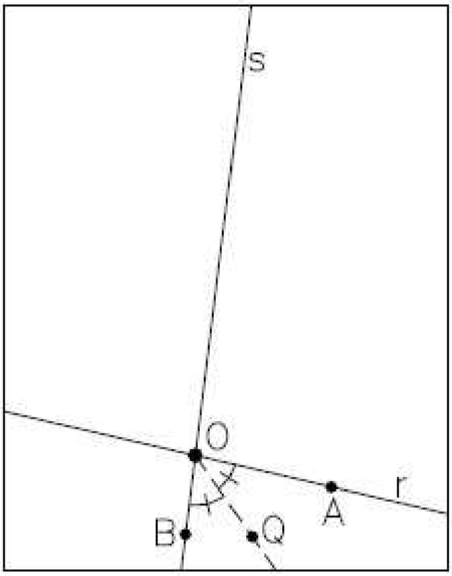
Figura 4.21: Sobreposição dos segmentos



Fonte: LEROY, 2010, p.24

3. Desdobre. Marque o ponto **Q** sobre a dobradura.

Figura 4.22: Bissetriz do ângulo



Fonte: LEROY, 2010, p.24

4. Após o segundo passo, observamos que o ângulo AÔQ se sobrepõe ao ângulo BÔQ, logo são congruentes. Portanto, a semirreta $\overrightarrow{OQ}$ divide o ângulo AÔB em dois ângulos congruentes, então $\overrightarrow{OQ}$ é a bissetriz de AÔB.

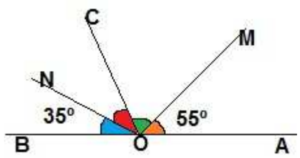
ATIVIDADE 1.

Usando dobraduras, construa um ângulo reto, divida-o em 4 ângulos congruentes. Quanto mede cada ângulo resultante?

ATIVIDADE 2.

Na figura abaixo, a semirreta $\overrightarrow{OM}$ é bissetriz do ângulo AÔC e a semirreta $\overrightarrow{ON}$ é bissetriz do ângulo BÔC. Nessas condições, qual a medida do ângulo NÔM?

Figura 4.23: Ângulo AÔB

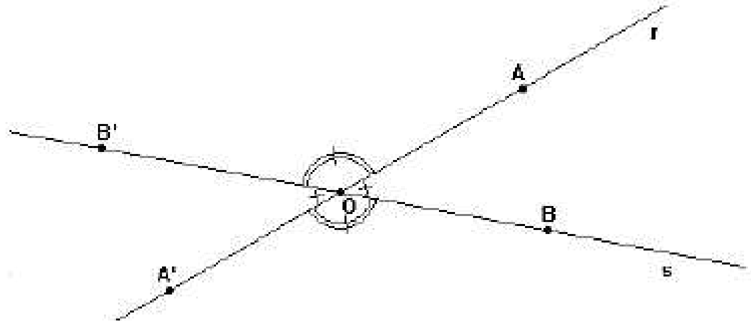


Fonte: Elaborada pelo Autor

4.3.5 Os Ângulos Opostos Pelo Vértice são Congruentes

Quando os lados de um ângulo forem obtidos pelo prolongamento dos lados de outro ângulo, dizemos que eles são **Opostos Pelo Vértice**. Na imagem, há dois pares de ângulos opostos pelo vértice: AÔB e A'ÔB'.

Figura 4.24: Ângulos Opostos Pelo Vértice



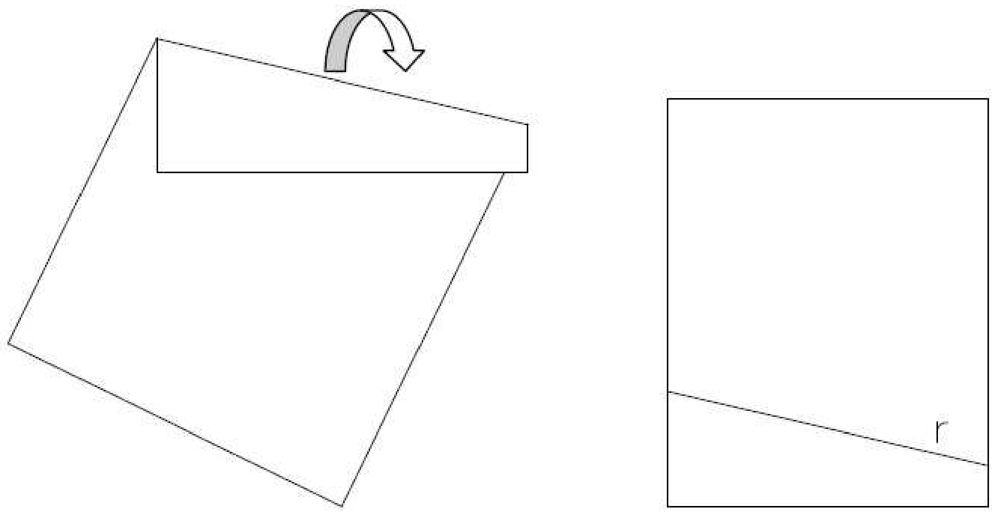
Fonte: Elaborado pelo Autor

Dois ângulos opostos pelo vértice têm medidas iguais, isto é, são congruentes.

Vamos mostrar que ângulos opostos pelo vértice são congruentes.

1. Faça uma reta r.

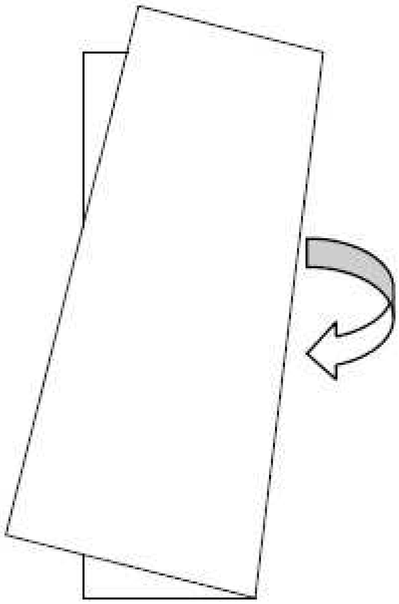
Figura 4.25: Reta r

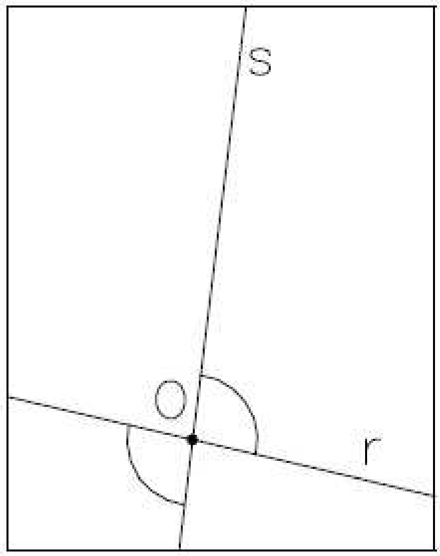


Fonte: LEROY, 2010, p.25

2. Faça uma reta s qualquer concorrente a r. Marque o ponto O na interseção das retas r e s.

Figura 4.26: Retas concorrentes

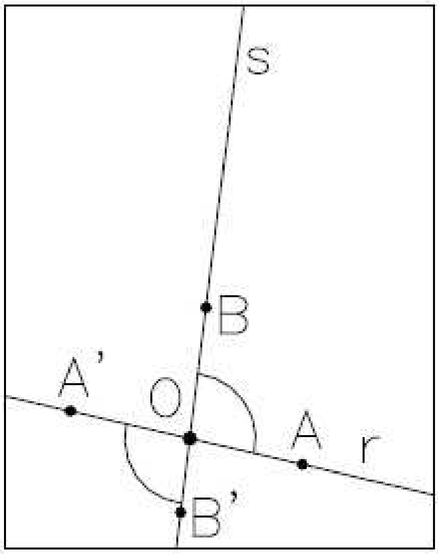




Fonte: LEROY, 2010, p.26

3. Marque os pontos A e A' na reta r de modo que o ponto O fique entre os mesmos; marque os ponto B e B' na reta s de modo que o ponto O fique entre os mesmos.

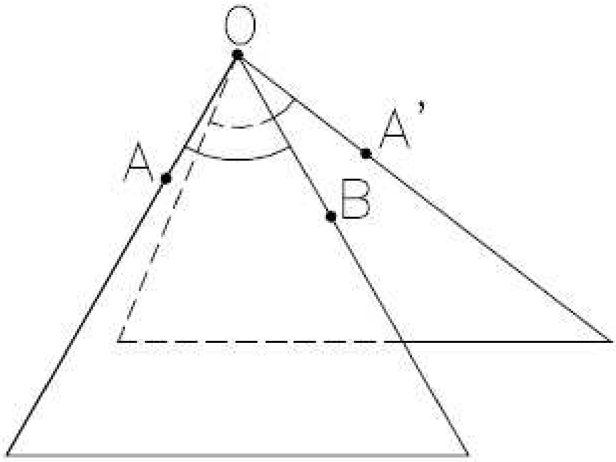
Figura 4.27: Ângulos opostos pelo vértice



Fonte: LEROY, 2010, p.25

4. Dobre a folha sobre r. Faça uma dobradura coincidindo as semirretas $\overrightarrow{OA'}$ e $\overrightarrow{OB}$ e outra dobradura coincidindo as semirretas $\overline{OA}$ e $\overline{OB'}$.Desdobre.

Figura 4.28: Ângulos Opostos Pelo Vértice



Fonte: LEROY, 2010, p.25

5. Observe que através das últimas dobraduras (passo anterior), os ângulos AÔB e A'ÔB' ficaram sobrepostos. Logo, são congruentes.

ATIVIDADES

a)Tome uma folha de papel. Dobre-a, de modo que as bordas da folha não coincidam. Vinque bem. Que figura geométrica a linha de dobra sugere?

b)Abra a folha de dobre-a novamente de forma que não coincida com a dobra anterior, mas a intercepte.

c)Quantas regiões as linhas de dobras determinam no papel?

d)Há regiões iguais? Quais?

e)Que figura geométrica cada região sugere?

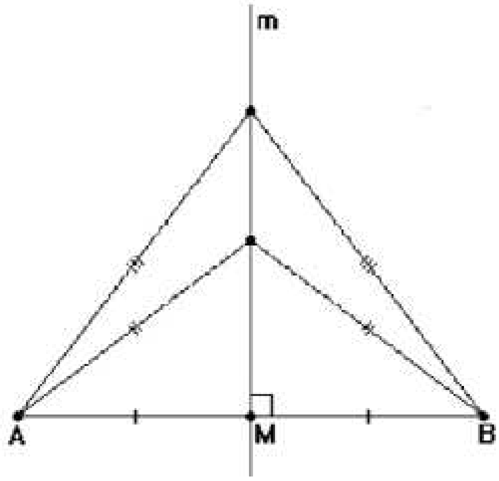
g)Dobre o papel pelo ponto de interseção das linhas de dobras e de tal maneira que uma linha fique sobre a outra.

h)O que você conclui? Justifique.

4.3.6 Construção da Mediatriz de um Segmento

. **Mediatriz de um Segmento** é conjunto de pontos do plano que equidistam das extremidades desse segmento.

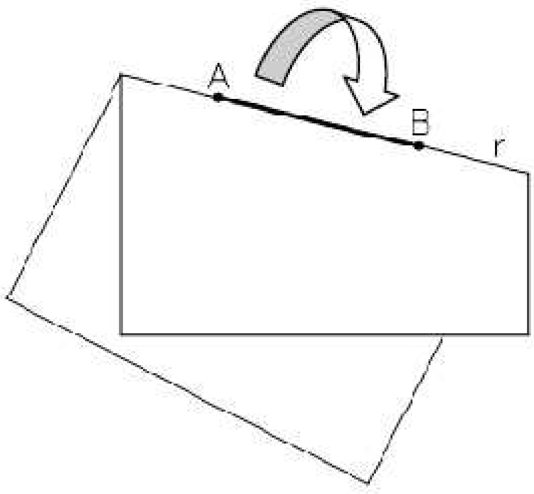
Figura 4.29: Mediatriz



Fonte: Elaborada pelo Autor

1. Marque os pontos **A** e **B** na folha e faça uma dobradura que passa por ambos, determinando a reta **r**.

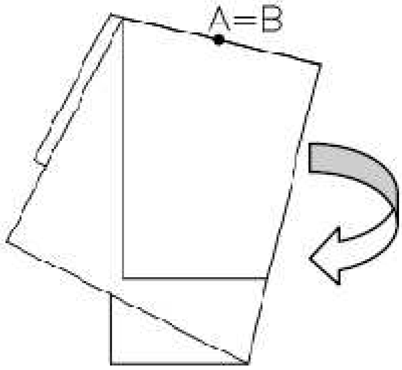
Figura 4.30: Reta r.



Fonte: LEROY, 2010, p.27

2. Dobre o papel, coincidindo o ponto A com o ponto B.

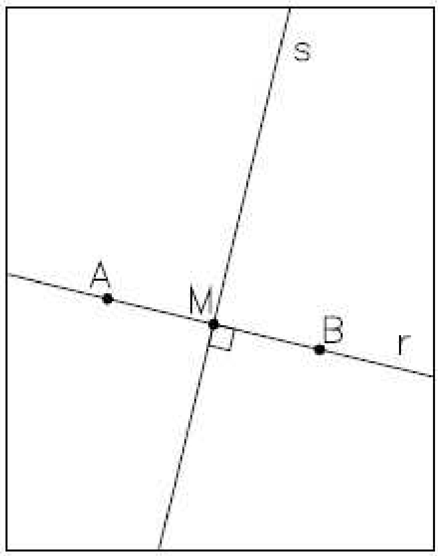
Figura 4.31: Ponto A coincidindo com ponto B



Fonte: LEROY, 2010, p.27

3. Desdobre. A dobradura determina a reta **s**. Marque o ponto **M** na interseção das retas.

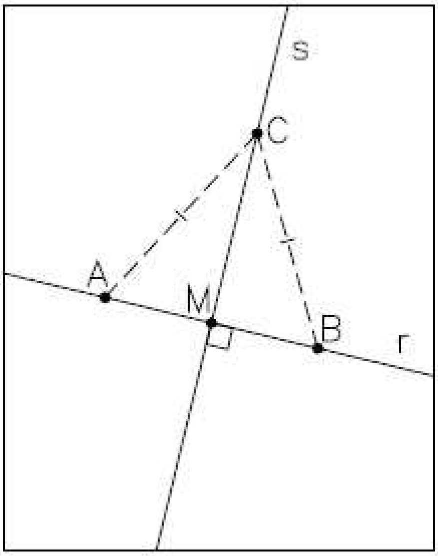
Figura 4.32: Ponto M.



Fonte: LEROY, 2010, p.27

4. Marque o ponto **C** sobre a reta **s**. Faça uma dobradura que passa pelos pontos **A** e **C** ao mesmo tempo e outra que passa por **B** e **C** ao mesmo tempo.

Figura 4.33: Mediatriz de AB



Fonte: LEROY, 2010, p.27

5. Observamos que $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ são congruentes, portanto a reta **s** é mediatriz do segmento $\overline{AB}$; ou seja, **s** é perpendicular ao segmento $\overline{AB}$, interceptando-o em seu ponto médio.

ATIVIDADE

Com uma folha de papel faça uma dobradura e marque um segmento de medida 5 cm. Construa a mediatriz deste segmento e indique o valor da medida de cada segmento determinado pela mediatriz.

4.4 Triângulos Especiais

Nos livros didáticos as construções se apesentam geralmente através da manipulação de régua, lápis e compasso, para obter os triângulos especiais (equilátero e isósceles). Como forma de contribuir para assimilar as definições de triângulos através de suas características e suas construções, tão como, encontar a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer , utilizaremos técnicas de Origami para obter o mesmo resultado mostrado nos livros didáticos.

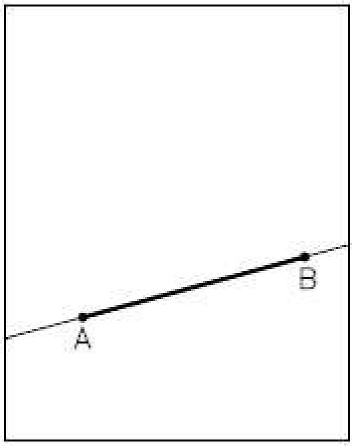
4.4.1 Triângulo Equilátero

Um triângulo é equilátero, quando possui os três lados congruentes.

Assim é possível construir um triângulo equilátero de lado AB, usando Origami.

1. Faça uma reta qualquer e marque sobre ela os pontos **A** e **B**.

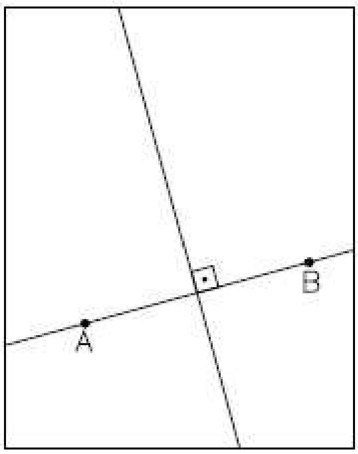
Figura 4.34: Pontos sobre a reta.



Fonte: LEROY, 2010, p.40

2. Faça a mediatriz do segmento $\overline{AB}$.

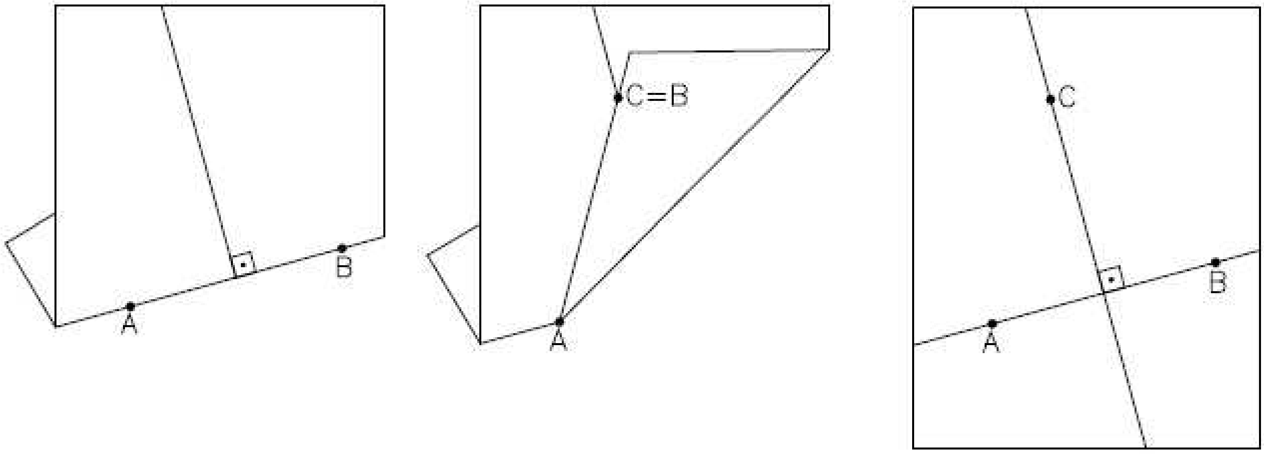
Figura 4.35: mediatriz de AB.



Fonte: LEROY, 2010, p.41

3. Faça uma dobradura levando o ponto **B** sobre a mediatriz, de tal forma que a dobradura passe por **A**. Marque o ponto **C** na interseção de **B** com a mediatriz.

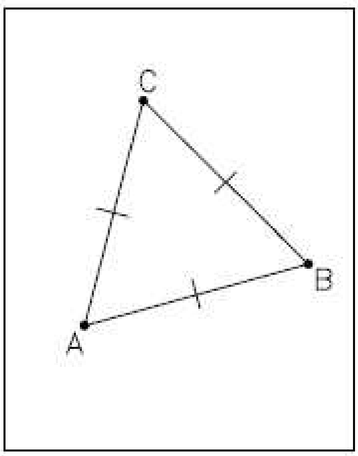
Figura 4.36: Construindo um triângulo equilátero.



Fonte: LEROY, 2010, p.41

4. Nota-se que pela dobradura anterior, $\overline{AC}$ é congruente a $\overline{AB}$. Como **C** está na mediatriz de $\overline{AB}$, então este ponto equidista de **A** e **B**, logo $\overline{AC}$ é congruente a $\overline{BC}$.

Figura 4.37: Triângulo Equilátero.



Fonte: LEROY, 2010, p.41

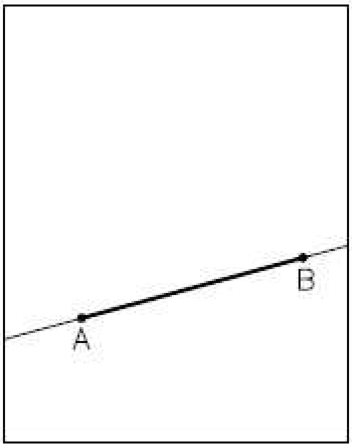
5. Como $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC}$, o triângulo ABC construído é um triângulo equilátero.

4.4.2 Triângulo Isósceles

Um triângulo ABC é isósceles, se e somente se, tiver dois lados congruentes. Segue a construçao um triângulo isósceles.

1. Faça uma reta **r** e marque sobre ela os pontos **A** e **B**.

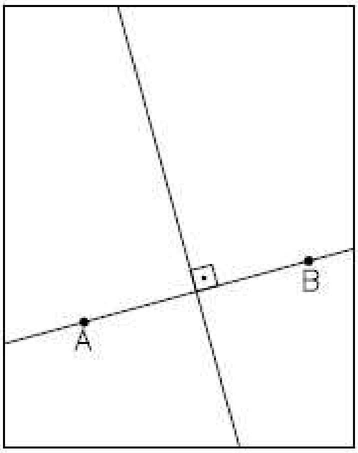
Figura 4.38: Construindo um triângulo isósceles.



Fonte: LEROY, 2010, p.42

2. Faça a mediatriz do segmento $\overline{AB}$.

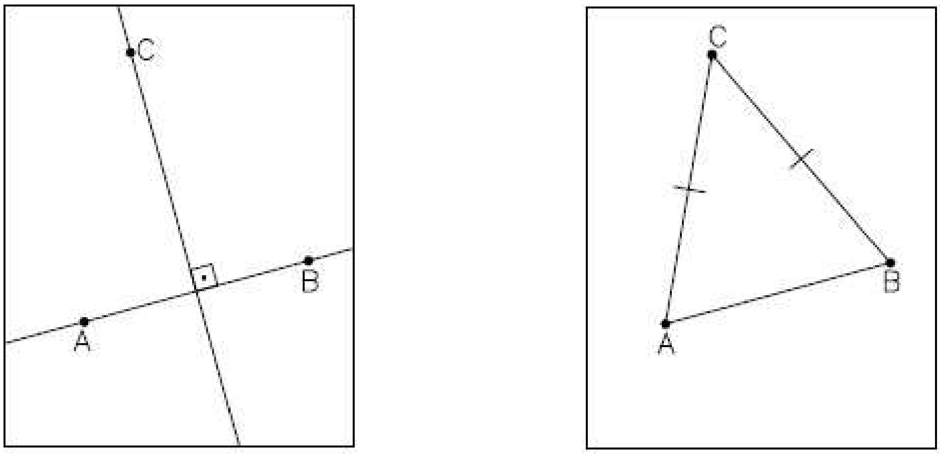
Figura 4.39: Mediatriz de AB.



Fonte: LEROY, 2010, p.42

3.Marque um ponto **C** na mediatriz. Faça uma dobradura passando por **B** e **C** ao mesmo tempo e outra passando por **A** e **C** ao mesmo tempo. Desdobre.

Figura 4.40: Triângulo Isósceles



Fonte: LEROY, 2010, p.42

4. Como C está na mediatriz de $\overline{AB}$, então os segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ tem a mesma medida. o que implica que o triângulo ABC é isósceles.

ATIVIDADE 1.

Com uma folha de papael A4, construa um triângulo equilátero cujo lado seja a menor dimensão da folha de papel.

ATIVIDADE 2.

Verifique se cada afirmativa é verdadeira ou falsa.

a) Um triângulo equilátero também é isósceles.

b) Um triângulo escaleno tem pelo menos dois ângulos com medidas iguais.

c) Um triângulo equilátero é também equiângulo.

d) Um triângulo isósceles tem dois ângulos com medidas iguais.

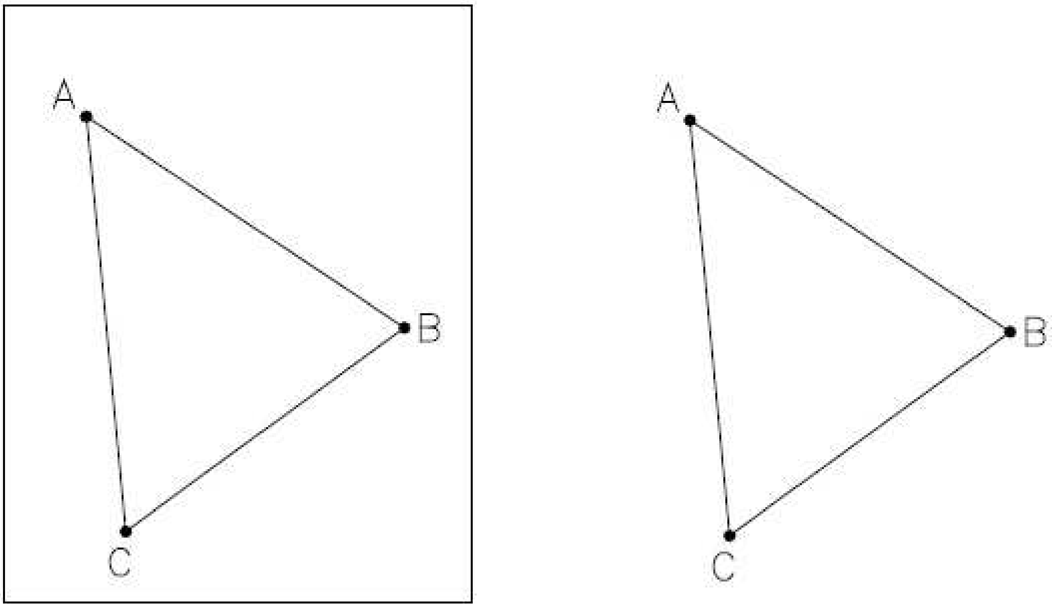
4.4.3 Soma dos Ângulos Internos de um Triângulo Qualquer

Com os conhecimentos adquiridos sobre a classificação de ângulos, é possível mostrar usando dobraduras, que a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é igual a uma ângulo raso, ou seja, 180º.

Vejamos a seguir:

1. Construa um triângulo qualquer usando dobraduras. Nomeie seus vértices. Recorte.

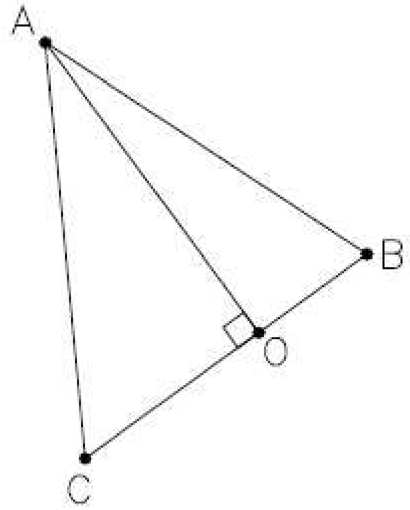
Figura 4.41: Triângulo Qualquer



Fonte: LEROY, 2010, p.37

2. Construa a altura em relação ao vértice A.

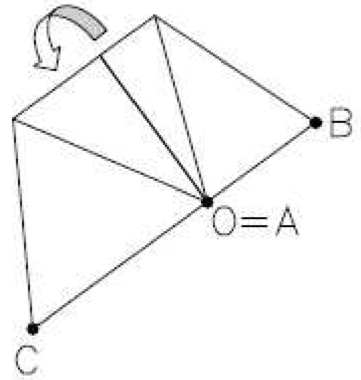
Figura 4.42: Altura em relação ao vértice A.



Fonte: LEROY, 2010, p.37

3. Faça uma dobradura coincidindo o ponto A com o ponto O.

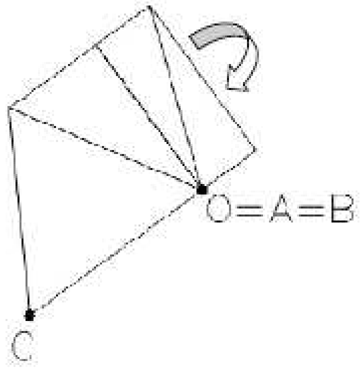
Figura 4.43: Coincidência do ponto A com O.



Fonte: LEROY, 2010, p.37

4. Faça uma dobradura coincidindo o ponto B com o ponto O.

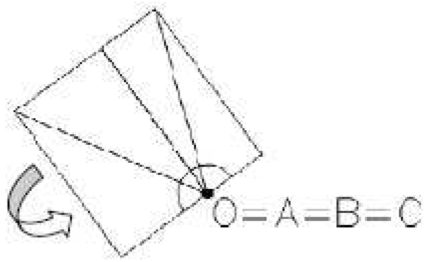
Figura 4.44: Coincidência do ponto B com O.



Fonte: LEROY, 2010, p.37

5. Faça uma dobradura coincidindo o ponto C com o ponto O.

Figura 4.45: Coincidência do ponto C com O.



Fonte: LEROY, 2010, p.37

6. Observe que a união dos ângulos A, B e C formou um ângulo raso, logo a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é igual a um ângulo raso, ou seja, 180^o.

ATIVIDADE 1.

Num triângulo retângulo, um dos ângulos agudo vale o dobro do outro. Nessa condição, qual a medida do menor dos ângulos agudo?

ATIVIDADE 2.

É possivel construir um triângulo com as medidas dos ângulos internos sendo 45^o, 90^o e 60^o? Por quê?

Observa-se que as construções utilizando Origami possibilitam uma reflexão acerca dos conceitos geométricos dos quais o professor pretende ensinar. Aprendendo os conceitos, os alunos provavelmente possam vir a desenvolver estratégias e aplicá-las na resolução de situações problemas de geometria.

Utilizando o origami para fazer deduções e demonstrar relações geométricas, pode-se facilitar o processo de desenvolvimento dos níveis da teoria de Van Hiele. Enquanto as dobras vão formando as figuras há o reconhecimento, comparação e nomenclatura das figuras geométricas por sua aparência global, como é o caso de ângulos, retas paralelas e concorrentes, e triângulos(1º nível).

Em seguida é possivel fazer análises das figuras em termos de seus componentes e reconhecimento de suas propriedades: o ângulo raso e reto, o triângulo equilátero e suas propriedades: 3 lados iguais, 3 ângulos iguais(2º nível).

O próximo nível da teoria utlizando esta metodologia é apreciada quando, por exemplo, na construção dos triângulos especiais, o aluno pode perceber uma ordenação de classes de figuras geométricas, sendo possível reconhecer que um triângulo equilatéro é também isósceles (3º nível). Ao fim das demonstrações geométricas executadas pelo aluno com as dobras de papel é possível que ele seja capaz de compreender estas demonstrações e compará-las com alguma outra forma apresentada pelo professor(4º e 5º níveis), pois em cada etapa das construções ele vai fazendo suas próprias considerações, descobrindo as formas que vão aparecendo com a ação de dobrar e desdobrar o papel. Assim, esta prática contempla de maneira sucinta a teoria estabelecida por Hiele.

Considerações Finais

O ensino de geometria é fator importante no aprendizado de Matemática, pois possibilita aos alunos a capacidade de refletir, pensar perante situações não só matemáticas, mas também do seu dia-a-dia.

É importante que os docentes de Matemática façam uma reflexão sobre como estão ensinando e para que ensinam geometria, principalmente os do Ensino Fundamental, pois é nele que se pauta a base do ensino. A noção básica de geometria quando bem explorada, consegue modelar o pensamento e a criatividade geométrica dos alunos facilitando o aprendizado dos níveis mais elevados do ensino de Geometria. Assim, ao chegarem no Ensino Médio, os alunos possivelmente conseguirão desenvolver as habilidades necessárias para compreensão da disciplina e sua relação com o cotidiano.

Para isso, as metodologias aplicadas devem ser objetivas, com fundamentos lógicos e hábeis para constituir o ensino. O uso de dobraduras possibilita a compreensão de alguns conceitos geométricos. Por exemplo, se o professor desenhar dois pontos no quadro e simplesmente afirmar que só existe uma reta que passa por eles seja talvez insuficiente para os alunos compreenderem que realmente existe uma única reta que os contém. Porém, quando o professor pede para que os alunos façam o máximo de dobras possíveis que passam por dois pontos quaisquer, provavelmente perceberão que só existe uma com essa característica. Com isso, essa metodologia auxilia os alunos a compreender e construir a relação entre reta e pontos.

Além disso, nas construções feitas com Origami, enquanto as dobras estão sendo executadas, o professor pode explorar nas definições os termos específicos de matemática, tais como congruências, segmentos, perpendicularismo, equidistâncias, mediatrizes, entre outros. Desta forma, o professor consegue aproximar a linguagem matemática da linguagem coloquial utilizada pelos alunos.

Por fim, destaca-se que é preciso apresentar aos alunos várias metodologias e estratégias para o ensino de geometria, onde se possa desenvolver neles a capacidade de criar artifícios para resolução de situações-problemas de geometria, e para tanto os educadores devem principalmente estimular os alunos a conhecerem sua própria língua, a fim de facilitar o processo de interpretação de situações problemas.

Bibliografia

[1] ABRANTES, P.; SERRAZINA, L. & OLIVEIRA, I. A Matemática na Educação Básica. Lisboa: ME(1999).

[2] BRAGUIM,R.A. Abordagens Metodológicas no Ensino de Matemática Perímetros e Áreas. Dissertação de Mestrado, Universidade Cruzeiro de Sul, São Paulo, 2009.

[3] BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental.Parâmetros Curriculares Nacionais : Matemática. Brasília: MEC /SEF, 1997. Disponível em <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf> Acesso em 16 dez.2015.

[4] CAVACAMI, Eduardo;FURUYA, Yolanda Kioko Saito. Explorando Geometria com Origami. Departamento de Matemática - Universidade Federal de São Carlos, 2009.

[5] FAINGULERT, Estela Kawfman. Educaçao Matemática: representação e construção em geometria. Porto Alegre: Artes Médicas Sul.1999.

[6] FILHO, Manoel F. A. Geometria Euclidiana Plana. UFSJ. 2ª edição, 2010.

[7] FIORENTINI, Dario;MIORIM, Maria Ângela. Uma Reflexão sobre o uso de Materiais Concretos e Jogos no Ensino de Matemática. Boletim SBEM-SP, 4(7):5-10,1999.

[8] HISTÓRIA do Origami. Disponível em :< http : //yasald.no.sapo.pt. > Acesso em 02 de janeiro de 2016.

[9] HOFFER, A. Geometry Is More Than. Mathematics Teacher. V.74.(janeiro,1981).

[10] LEROY, L. Aprendendo Geometria com Origami. Disponivel em: < www.mat.ufmg.br/ espec/monografiasPdf/Monografia_Leroy.pdf. > Acesso em 20 dez. de 2015.

[11] LORENZATO, Sérgio. Laboratório de Ensino de Matemática na Formação de Professores. Campinas: Autores Associados,2006.p.113-134.

[12] LORENZATO, Sérgio. Porque não ensinar geometria? Temas e debates, SBEM, educaçãomatemáticaem revista, 1995, 1ºsem., nº- 4, 3-13.

[13] MAGINA, Sandra; SPINILO, Aline Galvão. Alguns 'mitos' sobre a educação matemática e suas consequências para o ensino fundamental. In: Regina Maria Pavanello. (Org.). Matemática nas Séries Iniciais do Ensino Fundamental: A pesquisa e a sala de aula. 1 ed. São Paulo: Ed. SBEM, v. 2, p. 7-36, 2004.

[14] MATOS, J. & SERRAZINA,L. Didáctica da Matemática. Lisboa. Universidade Aberta(1996).

[15] NASSER, L.; SANT'ANNA, N. F. P. Geometria segundo a teoria de Van Hiele. 2. ed.Rio de Janeiro: IM/UFRJ, 2010.

[16] OLIVEIRA, Fátima Ferreira de. Origami: Matemática e Sentimento. São Paulo, 2004.

[17] OLIVEIRA, Martha Knol de. Vygotsky aprendizado e desenvolvimento: um processo sóciohistórico. São Paulo: Scipione, 1997. - (Pensamento e ação no magistério).

[18] PAIS, L. Transposição Didática, In: MACHADO, S. Educação Matématica uma Introdução. São Paulo, Educ, 1999.

[19] PONTE, J. & Serrazina, L. Didáctica da Matemática do 1.º Ciclo. Lisboa: Universidade Aberta(2000).

[20] RANCAN, G. Origami e Tecnologia: investigando possibilidades para ensinar Geometria no ensino fundamental. 2011. Dissertação de Mestrado - Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2011.

[21] RÊGO, R. M.; RÊGO, R. G. Desenvolvimento e uso de materiais didáticos no ensino de matemática. In: LORENZATO, Sérgio. Laboratório de Ensino de Matemática na formação de professores. Campinas: Autores Associados, 2006. p. 39-56.

[22] SOUSA, Joamir; PATARO, Patrícia M. Vontade de Saber Matemática.2ª edição. São Paulo, 2012.

[23] VILLIERS, de M. Algumas reflexões sobre a teoria de van Hiele. Revista Educação Matemática e Pesquisa, São Paulo, v. 12, n. 3, p. 400-431, 2010.