Universidade Federal do Piauí
Centro de Ciências da Natureza
Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT

Uma proposta de abordagem dos conteúdos de sequências e séries no Ensino Médio

Kécia Silva Araujo

Parnaíba - 2016

Kécia Silva Araujo

Dissertação de Mestrado:

Uma proposta de abordagem dos conteúdos de sequências e séries no Ensino Médio

Dissertação submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:
Prof. Me. Cleyton Natanael Lopes de Carvalho Cunha

Parnaíba - 2016

PROFMAT

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
CENTRO DE EDUCAÇÃO ABERTA E À DISTÂNCIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

Dissertação de Mestrado submetida à coordenação Acadêmica Institucional, na Universidade Federal do Piauí, do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional para obtenção do grau de **mestre em matemática** intitulada: Uma proposta de abordagem dos conteúdos de sequências e séries no Ensino Médio, defendida por Kécia Silva Araújo em 10 / 03 / 2016 e aprovada pela banca constituída pelos professores:

Cleyton Natanael Lopes de Carvalho Cunha

Prof. Msc. Cleyton Natanael Lopes de Carvalho Cunha

Presidente da Banca Examinadora

Prof. Dr. Carlos Humberto Soares Júnior - Examinador

Prof. Msc. Renilson Rodrigues Araújo – Examinador Externo

FICHA CATALOGRÁFICA
Universidade Federal do Piauí
Biblioteca Setorial Prof. Cândido Athayde – Campus Parnaíba
Serviço de Processamento Técnico

A663u Araujo, Kécia Silva.
Uma proposta de abordagem dos conteúdos de sequências e séries no Ensino Médio [manuscrito] / Kécia Silva Araujo. – 2016.
43 f. : il. color.

Impresso por computador (printout).
Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal do Piauí, 2016.
Orientação: Prof. Me. Cleyton Natanael Lopes de Carvalho Cunha.

1. Matemática (Números Reais). 2. Números Reais (Série). 3. Números Reais (Sequência). I. Titulo.

CDD: 510

Dedico este trabalho aos meus pais Sônia e Hernando, aos meus irmãos Laura Lívia e Lucas e ao meu esposo Weslay.

Agradecimentos

Agradeço a Deus por ter me dado sabedoria e força para que podesse chegar até aqui. Sem Ele, não teria conseguido nada do que conquistei.

À minha família por ter me apoiado em toda a minha vida e por me encorajar a concluir o mestrado. Aos meus pais Sônia e Hernando, meus irmãos, Laura Lívia e Lucas, e ao meu esposo e companheiro Weslay que sempre se preocupou comigo e me ajudou em todos os momentos. Amo muito vocês.

Agradeço ao professor Cleyton Natanael por sua paciência e dedicação em minha orientação, a qual culmina neste trabalho, e a todos os meus professores pela parceria e ensinamentos.

Aos componentes da banca por terem aceito o convite para participar da mesma e pelas contribuições para o aprimoramento deste trabalho.

Agradeço aos meus amigos do mestrado pelo apoio nas horas mais difíceis e pelas risadas nos momentos de descontração. Com estes aprendi muito, tanto no estudo da matemática, quanto como pessoa através da simplicidade e espírito de cooperação.

Agradeço à SBM e à Universidade Federal do Piauí - Campus Ministro Reis Velloso pelo PROFMAT que possibilitou meus estudos no mestrado.

“*Muitos são os planos no coração do homem, mas o que prevalece é o propósito do Senhor.*"

Provérbios 19:21.

Resumo

Este trabalho apresenta uma proposta de ensino dos conteúdos de sequências e séries de números reais para os professores de Matemática que lecionam no 1º ano do Ensino Médio. Abordamos a teoria por meio de conceitos e alguns resultados, descrevemos a abordagem de alguns livros didáticos e sugerimos um roteiro de ensino desses conteúdos com resoluções de questões diversas.

Palavras-chave: Sequências; Séries; Ensino Médio.

Abstract

This paper presents an educational proposal of contents of sequences and series of real numbers for math teachers who teach in the 1st year of high school. We approach the theory by means of concepts and some results, we describe an approach of some textbooks and we suggest a teaching script of such contents with resolutions of various issues.

Keywords: Sequences. Series. High school.

Lista de Figuras

1 Interpretação geométrica de limite. . . . . p. 4

2 Interpretação geométrica de limites infinitos. . . . . p. 4

3 Torre de Hanoi para 1 disco. . . . . p. 11

4 Torre de Hanoi para 2 discos. . . . . p. 11

5 Torre de Hanoi para 3 discos. . . . . p. 11

6 Torre de Hanoi para 4 discos. . . . . p. 12

7 Árvore do professor Fernando. . . . . p. 29

8 Árvore após a sexta semana. . . . . p. 29

9 Escadas. . . . . p. 30

10 Custos por período de tempo. . . . . p. 35

11 Parábola $y = x^2$. . . . . p. 35

12 Aproximação por retângulos. . . . . p. 36

13 Cúbica $y = x^3$. . . . . p. 37

14 Aproximação por retângulos. . . . . p. 37

15 A curva de Koch. . . . . p. 38

Lista de Tabelas

1 Número mínimo de movimentos . . . . p. 12

Sumário

Introdução p. 1

1 Sequências e Séries de Números Reais p. 3

1.1 Sequências de Números Reais . . . . p. 3

1.1.1 Operações com Limites Finitos . . . . p. 6

1.1.2 Operações com Limites Infinitos . . . . p. 8

1.2 Recorrência . . . . p. 9

1.3 Séries de Números Reais . . . . p. 14

2 Abordagem de alguns livros didáticos utilizados no Ensino Médio p. 19

3 Proposta de abordagem para o Ensino Médio p. 22

4 Considerações Finais p. 41

Referências p. 42

Introdução

O estudo de sequências e séries de números reais no ensino médio é de grande importância, pois esses elementos estão presentes na vida cotidiana das mais diversas formas, como nos elementos naturais através da sequência de Fibonacci e do número de ouro, na matemática financeira, por meio de juros simples e compostos, entre outros. Porém, atualmente, no ensino médio, esse estudo se restringe a progressões aritméticas e progressões geométricas, isso ocorre de forma mecanizada e os conceitos e ideias intuitivas desses conteúdos ficam em segundo plano.

A BNCC (Base Nacional Comum Curricular) propõe uma renovação e o aprimoramento da educação básica. O Ministério da Educação apresentou à sociedade uma versão inicial da proposta do que poderá ser a Base Nacional Comum. Nessa versão inicial, há o objetivo de trabalhar no eixo da álgebra com a capacidade de identificar atributos e regras de formação de sequências, caracterizadas, segundo tal documento, como "uma das primeiras evidências de organização do pensamento". Analisando as propostas iniciais vemos que embora seja dada relevância ao conceito de sequências e associem-se progressões aritméticas com função afim e progressões geométricas com função exponencial, o conteúdo resume-se a progressões aritméticas (P.A.) e progressões geométricas (P.G.) e o assunto de séries de números reais não é mencionado.

Os livros didáticos mais utilizados no ensino médio abordam parte da teoria desses conteúdos, mas acabam abandonando a ideia intuitiva e concentrando-se apenas em fórmulas, como podemos perceber em Matemática: Contexto & Aplicações Volume 1 de Luiz Roberto Dante, Matemática: Ciência e Aplicações Volume 1 de Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, David Degenszajn, Roberto Périgo e Nilze de Almeida, Matemática: Volume 1 de Manoel Paiva e em Novo Olhar: Matemática Volume 1 de Joamir Roberto de Souza. Isso faz com que os alunos absorvam a ideia de que sequências e séries de números reais são apenas progressões aritméticas e progressões geométricas.

Neste trabalho apresentamos, no capítulo 1, algumas definições e resultados dos conteúdos de sequências e séries de números reais, no capítulo 2 fizemos uma descrição da abordagem desses conteúdos em alguns livros didáticos utilizados no ensino médio, no capítulo 3 sugerimos uma proposta de ensino dos conteúdos de sequências e séries de números reais resolvendo alguns exercícios e no capítulo 4 deixamos algumas considerações finais.

1 Sequências e Séries de Números Reais

Nesse capítulo damos um embasamento teórico do estudo de sequências e séries de números reais para os professores de matemática do 1º ano do Ensino médio, explorando conceitos, exemplos e propriedades.

1.1 Sequências de Números Reais

Definição 1.1. *Uma sequência de números reais é uma função $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ que a cada número natural n associa um número real $x_n = x(n)$, chamado o n-ésimo termo da sequência.*

Podemos denotar por $(x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...)$ ou por $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ou simplesmente por (x_n), a sequência $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Entretanto, existe diferença entre as notações (x_n), que indica a sequência numérica, e $\{x_n\}$, que indica o conjunto dos elementos que compõem a sequência.

Exemplo 1. $\left(\dfrac{1}{n}\right) = \left(1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, ..., \dfrac{1}{n}, ...\right)$

Exemplo 2. $\left(\dfrac{1}{2^n}\right) = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2^2}, \dfrac{1}{2^3}, ..., \dfrac{1}{2^n}, ...\right)$

Exemplo 3. $(2^n) = (2, 4, 8, 16, ...)$

Exemplo 4. $\left(sen^2\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)\right) = (1, 0, 1, 0, ...)$

Definição 1.2. *Consideremos uma sequência de termo geral x_n e seja l um número real. Definimos*

(i) $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = l$ *quando para todo $\varepsilon > 0$, existe um natural n_0 tal que para $n > n_0$ tem - se $|x_n - l| < \varepsilon$;*

(ii) $\lim_{n \to +\infty} x_n = +\infty$ *quando para todo* $\varepsilon > 0$, *existe um natural* n_0 *tal que para* $n > n_0$ *tem - se* $x_n > \varepsilon$;

(iii) $\lim_{n \to +\infty} x_n = -\infty$ *quando para todo* $\varepsilon > 0$, *existe um natural* n_0 *tal que para* $n > n_0$ *tem - se* $x_n < -\varepsilon$.

Sugere-se que, no momento da exposição desse tópico para os alunos, use-se a ideia intuitiva de limite, pois acredita-se que os discentes compreenderão com mais facilidade e terão mais familiaridade com esse conceito. Conforme a seguir:

Um número real l é limite de uma sequência x_n quando, a medida que aumentamos infinitamente o valor de n, o valor de x_n se aproxima de l. Ou ainda: Um número real l é limite de uma sequência x_n quando, dado qualquer intervalo centrado em l, por menor que seja, sempre existe um termo da sequência x_{n_0} onde, a partir dele, todos os outros termos estarão neste intervalo. Veja esquema abaixo:

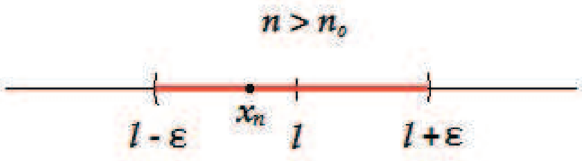

Figura 1: Interpretação geométrica de limite.
Fonte: Elaborada pela autora.

De modo análogo, o limite de uma sequência x_n é $+\infty$ $(-\infty)$ quando, a medida que aumentamos infinitamente o valor de n, o valor de x_n aumenta (diminui) infinitamente. Ou ainda: o limite de uma sequência x_n é $+\infty$ $(-\infty)$ quando, dado qualquer número real ε, por maior (menor) que seja, sempre existe um termo da sequência x_{n_0} onde, a partir dele, todos os outros termos serão maiores (menores) que ε. Veja esquema abaixo à esquerda (direita):

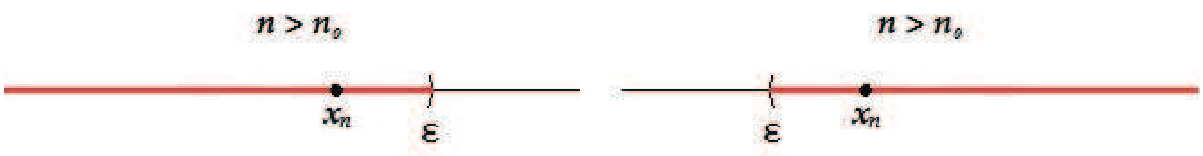

Figura 2: Interpretação geométrica de limites infinitos.
Fonte: Elaborada pela autora.

Teorema 1.1 (Unicidade do Limite)**.** *O limite de uma sequência, quando existe, é único.*

Demonstração: Seja $\lim x_n = a$. Dado qualquer número real $b \neq a$, mostraremos que não se tem $\lim x_n = b$. Para isso, tomemos $\varepsilon = \dfrac{|b-a|}{2}$. Vemos que $\varepsilon > 0$ e notamos ainda que os intervalos $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ e $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$ são disjuntos. Ora, como $\lim x_n = a$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow x_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ e, portanto, $x_n \notin (b-\varepsilon, b+\varepsilon)$ para todo $n > n_0$. Logo não é $\lim x_n = b$. ∎

Se $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n$ for finito, diremos que a sequência x_n é **convergente**; caso contrário, diremos que a sequência é **divergente**.

Definição 1.3. *Uma sequência x_n é dita* ***limitada****, se existe $c > 0$ tal que $|x_n| < c$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Quando uma sequência x_n não é limitada, dizemos que ela é* ***ilimitada****.*

Exemplo 5. *Note que a sequência $\left(\dfrac{1}{n}\right)$ é limitada, pois $\left|\dfrac{1}{n}\right| \leq 1$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.*

Teorema 1.2. *Toda sequência convergente é limitada.*

Demonstração: Seja $a = \lim x_n$. Então tomando $\varepsilon = 1$, vemos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow x_n \in (a-1, a+1)$. Consideremos o conjunto finito $F = \{x_1, x_2, ..., x_{n_0}, a-1, a+1\}$. Seja c o menor e d o maior elemento de F. Note que $x_n \in [c, d]$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo a sequência é limitada. ∎

Definição 1.4. *Uma sequência x_n é dita* ***decrescente*** *se $x_{n+1} < x_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Diremos que a sequência é* ***não crescente****, se $x_{n+1} \leq x_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.*

Definição 1.5. *Uma sequência x_n é dita* ***crescente*** *se $x_{n+1} > x_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Diremos que a sequência é* ***não decrescente****, se $x_{n+1} \geq x_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.*

As sequências crescentes, não decrescentes, decrescentes ou não crescentes são chamadas sequências **monótonas**.

Teorema 1.3. *Toda sequência monótona limitada é convergente.*

Demonstração: Provaremos o caso em que é não-decrescente ($x_1 \leq x_2 \leq ... \leq x_n \leq ...$). Tomemos $a = \sup\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$. Afirmamos que $a = \lim x_n$. De fato, dado $\varepsilon > 0$, como $a - \varepsilon < a$, o número $a - \varepsilon$ não é cota superior do conjunto dos x_n. Logo existe algum $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a - \varepsilon < x_{n_0}$. Como a sequência é monótona, $n > n_0 \Rightarrow x_{n_0} \leq x_n$ e, portanto, $a - \varepsilon < x_n$. Como $x_n \leq a$ para todo n, vemos que $n > n_0 \Rightarrow a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$. Assim, temos $\lim x_n = a$. ∎

Definição 1.6. *Dada uma sequência x_n de números reais, uma subsequência de x_n é a restrição da função x que define x_n a um subconjunto infinito*

$$\mathbb{N}_1 = n_1 < n_2 < n_3 < ... < n_k < ...$$

Denotaremos a subsequência por x_{n_k}.

Exemplo 6. *Considere o subconjunto* $\mathbb{N}_1 = \{3n; n \in \mathbb{N}\}$ *do conjunto* $\mathbb{N}$. *Se olharmos a restrição da sequência* $x(n) = \dfrac{1}{2^n}$ *ao subconjunto* $\mathbb{N}_1$ *obtemos a subsequência* $\left(\dfrac{1}{2^3}, \dfrac{1}{2^6}, \dfrac{1}{2^9}, \ldots, \dfrac{1}{2^{3n}}, \ldots\right)$.

Teorema 1.4. *Seja* x_n *uma sequência tal que* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = l$ *e seja* x_{n_k} *uma subsequência qualquer, então* $\lim\limits_{k\to+\infty} x_{n_k} = l$.

Demonstração: Seja $\varepsilon > 0$ um número real, logo esiste n_0 tal que $x_n \in (l-\varepsilon, l+\varepsilon)$ para todo $n > n_0$. Por outro lado existe k_0 tal que se $k > k_0$ então $n_k > n_0$. Portanto, se $k > k_0$, temos $x_{n_k} \in (l-\varepsilon, l+\varepsilon)$, que mostra que $\lim\limits_{k\to+\infty} x_{n_k} = l$. ■

1.1.1 Operações com Limites Finitos

Teorema 1.5. *(i) Se* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = l$ *e* $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = k$, *então* $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n + y_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n + \lim\limits_{n\to+\infty} y_n = l + k$;

(ii) Se $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = l$ *e* $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = k$, *então* $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n y_n) = \left(\lim\limits_{n\to+\infty} x_n\right)\left(\lim\limits_{n\to+\infty} y_n\right) = lk$;

(iii) Seja $p(x) = a_m x^m + \ldots + a_1 x + a_0$ *um polinômio. Tem-se que* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = l \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} p(x_n) = p(\lim\limits_{n\to+\infty} x_n) = p(l)$;

(iv) Se y_n *é uma sequência de números reais não nulos convergindo para um número real* k *não nulo, então a sequência* $\dfrac{1}{y_n}$ *converge para* $\dfrac{1}{k}$.

Demonstração:

(i) Pela desigualdade triangular, para todo n, temos

$$|(x_n + y_n) - (l + k)| = |(x_n - l) + (y_n - k)| \leq |x_n - l| + |y_n - k|.$$

A validade deste resultado decorre do fato de que podemos tornar a soma $|x_n - l| + |y_n - k|$ tão ptóxima de zero quanto queiramos desde que tomemos n suficientemente grande (pois isto vale tando $|x_n - l|$ para quanto para $|y_n - k|$).

(ii) Notemos que

$$x_n y_n - lk = x_n y_n - x_n k + x_n k - lk = x_n(y_n - k) + k(x_n - l).$$

Por outro lado, sabemos que existe $M > 0$ tal que $|x_n| \leq M$ para todo n, pois toda sequência convergente é limitada. Portanto, para todo n,

$$|x_n y_n - lk| = |x_n(y_n - k) + k(x_n - l)| \leq |x_n(y_n - k)| + |k(x_n - l)| =$$

$$= |x_n||y_n - k| + |k||x_n - l| \leq M|y_n - k| + |k||x_n - l|.$$

Daí resulta que $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n y_n) = lk$, já que podemos tornar $M|y_n - k| + |k||x_n - l|$ tão próximo de zero quanto queiramos desde que tomemos n suficientemente grande (pois isto vale tando $|x_n - l|$ para quanto para $|y_n - k|$).

(iii) De fato, pelos itens (i) e (ii), segue que

$$\lim_{n\to+\infty} p(x_n) = \lim_{n\to+\infty}(a_m x_n^m + ... + a_1 x_n + a_0) = \lim_{n\to+\infty} a_m x_n^m + ... + \lim_{n\to+\infty} a_1 x_n + \lim_{n\to+\infty} a_0 =$$

$$= a_m \lim_{n\to+\infty} x_n^m + ... + a_1 \lim_{n\to+\infty} x_n + a_0 = a_m l^m + ... + a_1 l + a_0 = p(l).$$

(iv) Seja ε um número real no intervalo $(0, k^2)$. Assim, $\varepsilon^2 > 0$ e $k^2 - \varepsilon > 0$. Como y_n converge para k, sabemos que ky_n converge para k^2. Logo, existem naturais n_1 e n_2 tais que para $n > n_1$ temos $|y_n - k| < \varepsilon^2$ e para $n > n_2$ temos $|ky_n - k^2| < k^2 - \varepsilon$. Expandindo a última desigualdade, obtemos $ky_n > \varepsilon > 0$, donde $0 < \dfrac{1}{ky_n} < \dfrac{1}{\varepsilon}$. Tomando-se $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, segue que para todo $n > n_0$

$$\left|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{k}\right| = \left|\frac{k - y_n}{ky_n}\right| < \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon} = \varepsilon.$$

■

Teorema 1.6. *Se x_n é uma sequência convergente satisfazendo $x_n < b$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ (respectivamente, $x_n > b$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$), então $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n \leq b$ (respectivamente, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n \geq b$).*

Demonstração: Provaremos o primeiro caso, pois o segundo é análogo. Seja $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = l$ e suponha por absurdo que $l > b$. Tomemos $\varepsilon > 0$, suficientemente pequeno, tal que $l - \varepsilon > b$. Pela definição de limite existe n_0 tal que para todo $n > n_0$, tem-se que $x_n \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$. Mas isso significa que para todo $n > n_0$ tem-se $x_n > b$, obtendo-se uma contradição. ■

Teorema 1.7. *Se x_n e y_n são sequências tais que x_n é limitada e $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = 0$, então $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n y_n = 0$.*

Demonstração: De fato, seja $c > 0$ tal que $|x_n| \leq c$ para todo n. Agora, dado $\varepsilon > 0$, existe n_0 tal que para todo $n > n_0$ tem-se $|y_n| < \dfrac{\varepsilon}{c}$. Obtemos, portanto, que para todo $n > n_0$, $|x_n y_n| = |x_n||y_n| < c\dfrac{\varepsilon}{c} = \varepsilon$. ■

Exemplo 7. *Considere* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\cos \pi n$. *A sequência dada por* $y_n = \cos \pi n$ *não é convergente, pois para n par, temos* $\cos \pi n = 1$ *e para n ímpar, temos* $\cos \pi n = -1$. *Por outro lado, esta sequência é limitada, logo pelo teorema anterior, temos que* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\cos \pi n = 0$.

Teorema 1.8 (Teorema do Confronto)**.** *Sejam* x_n, y_n *e* z_n *três sequências satisfazendo* $x_n \leq y_n \leq z_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, *e suponha que* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = l = \lim\limits_{n\to+\infty} z_n$. *Então,* $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = l$.

Demonstração: De fato, como x_n e z_n converge para l, temos que dado $\varepsilon > 0$, existem naturais n_1 e n_2, tais que para todo $n > n_1$ tem-se $x_n \in (l-\varepsilon, l+\varepsilon)$ e para todo $n > n_2$ tem-se $z_n \in (l-\varepsilon, l+\varepsilon)$. Assim, se $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, para todo $n > n_0$ tem-se $x_n, z_n \in (l-\varepsilon, l+\varepsilon)$. Agora, como $x_n \leq y_n \leq z_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, obtemos que $y_n \in (l-\varepsilon, l+\varepsilon)$ para todo $n > n_0$. ■

1.1.2 Operações com Limites Infinitos

Teorema 1.9. *(i) Se* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = l$ *e* $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = +\infty$, *então* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n y_n = +\infty$ *para* $l > 0$ *e* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n y_n = -\infty$ *para* $l < 0$;

(ii) Se $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = l$ *e* $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = -\infty$, *então* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n y_n = -\infty$ *para* $l > 0$ *e* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n y_n = +\infty$ *para* $l < 0$.

Demonstração:

(i) Sendo x_n convergente e seu limite positivo existe n_1 tal que para todo $n > n_1$ tem-se $x_n \in [c, d]$ com $c, d > 0$. Além disso, dado $\varepsilon > 0$, existe n_2 tal que para todo $n > n_2$ tem-se $y_n > \dfrac{\varepsilon}{c}$. Logo, tomando $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ tem-se para todo $n > n_0$, $x_n y_n > c\dfrac{\varepsilon}{c} = \varepsilon$. Para o segundo caso basta considerar $x_n = -z_n$ e usar o primeiro caso.

(ii) Basta considerar $y_n = -z_n$ e usar o item (i).

■

Para $l = 0$, nada se pode concluir. Por exemplo, se $x_n = \dfrac{1}{n^2}$ e $y_n = n + n^2$, temos que $x_n y_n = \dfrac{1}{n} + 1$ converge para 1. Se tomarmos $z_n = n^3 + 1$ temos que $x_n z_n = n + \dfrac{1}{n^2}$ tende para $+\infty$ e se tomarmos $w_n = 1 - n^3$ temos que $x_n z_n = \dfrac{1}{n^2} - n$ tende para $-\infty$.

1.2 Recorrência

Existem sequências que são definias recursivamente, isto é, por recorrência, ou seja, por meio de uma regra que permite calcular qualquer termo em função do(s) antecessor(es) imediato(s).

Exemplo 8. *A sequência x_n dos números naturais ímpares 1, 3, 5, 7, ... pode ser definida por $x_{n+1} = x_n + 2$, $n \geq 1$, $x_1 = 1$.*

Exemplo 9. *Qualquer progressão aritmética x_n de razão r e primeiro termo a pode ser definida por $x_{n+1} = x_n + r$, $n \geq 1$, $x_1 = a$.*

Exemplo 10. *Qualquer progressão geomética x_n de razão q e primeiro termo a pode ser definida por $x_{n+1} = q \cdot x_n$, $n \geq 1$, $x_1 = a$.*

Exemplo 11. *Leonardo de Pisa (1180-1250), mais conhecido como Fibonacci (o que significa "filho de Bonaccio"), é considerado o matemático mais capaz e original do Ocidente no período medieval. Sua obra mais famosa é o Liber abaci, de 1202. Neste livro Fibonacci incluiu alguns problemas curiosos e estimulantes, dentre os quais um veio a se tornar especialmente importante: "Um homem põe um casal de coelhos dentro de um cercado. Quantos pares de coelhos serão produzidos em um ano, se a natureza desses coelhos é tal que a cada mês um casal gera um novo casal, que se torna produtivo a partir do segundo mês?"*
Ao final de um mês haverá dois casais (o casal adulto com o qual se começou e um casal jovem), ao final do segundo mês haverá três casais (dois adultos e um jovem), ao final do terceiro mês haverá cinco casais (três adultos e dois jovens), e assim por diante. Em geral, se ao fim de um certo mês há r casais adultos e s jovens, ao final do mês seguinte haverá $r + s$ casais adultos e r jovens e ao final do próximo haverá $2r + s$ casais adultos e $r + s$ jovens. Ou seja, o número de casais jovens, ao fim de um certo mês, a partir do terceiro, é igual a soma de casais jovens ao final dos dois meses anteriores.
Assim se F_n indicar o número de casais jovens ao final do n-ésimo mês, então

$$F_1 = 1, F_2 = 1, F_3 = 1 + 1 = 2, F_4 = 1 + 2 = 3, F_5 = 2 + 3 = 5, F_6 = 3 + 5 = 8, ...$$

Tal sequência $F_n = (1, 1, 2, 3, 5, 8, ...)$ recebeu o nome de sequência de Fibonacci. É claro que F_n pode ser definida recursivamente por

$$F_1 = F_2 = 1 \quad e \quad F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, n \geq 2.$$

As considerações que fizemos nos permitem concluir também que se $G_n = F_{n+1}, n \geq 1$, *então* G_n *indica o número de adultos ao final do n-ésimo mês.*

Vê-se que a sequência de Fibonacci é claramente divergente, mas a sequência dada por $r_n = \dfrac{F_{n+1}}{F_n}$ *é convergente. De fato, mostraremos inicialmente que* $1 \leq r_n \leq 2$, $\forall n \in \mathbb{N}$. *Para* $n = 1$, $r_1 = 1$ *e* $1 \leq r_1 \leq 2$. *Suponha agora que* $1 \leq r_k \leq 2$. *Então*

$$r_{k+1} = \frac{F_{k+2}}{F_{k+1}} = \frac{F_{k+1} + F_k}{F_{k+1}} = 1 + \frac{F_k}{F_{k+1}} = 1 + \frac{1}{r_k}.$$

Consequentemente $1 < 1 + \dfrac{1}{2} \leq 1 + \dfrac{1}{r_k} = r_{k+1} = 1 + \dfrac{1}{r_k} \leq 1 + 1 = 2$. *Portanto* $1 \leq r_n \leq 2$, $\forall n \in \mathbb{N}$. *Agora, se* $n \geq 3$, *temos*

$$r_n = 1 + \frac{1}{r_{n-1}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{r_{n-2}}} = 1 + \frac{r_{n-2}}{1 + r_{n-2}}.$$

Assim,

$$r_{n+2} - r_n = \left(1 + \frac{r_n}{1 + r_n}\right) - \left(1 + \frac{r_{n-2}}{1 + r_{n-2}}\right) = \frac{r_n - r_{n-2}}{(1 + r_n)(1 + r_{n-2})}.$$

Portanto $r_{n+2} - r_n$ *tem o mesmo sinal de* $r_n - r_{n-2}$. *Como* $r_3 - r_1 = \frac{3}{2} - 1 > 0$ *segue que* $r_{2k+1} - r_{2k-1} > 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$. *Então* r_{2k-1} *é crescente. Analogamente, como* $r_4 - r_2 = \frac{5}{3} - 2 < 0$ *segue que* $r_{2k+2} - r_{2k} < 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$. *Então* r_{2k} *é decrescente. Temos que* r_{2k-1} *e* r_{2k} *são monótonas e limitadas, portanto convergentes. Seja* $L_1 = \lim\limits_{k \to +\infty} r_{2k-1}$ *e* $L_2 = \lim\limits_{k \to +\infty} r_{2k}$. *Daí,*

$$L_1 = \lim_{k \to +\infty} r_{2k-1} = \lim_{k \to +\infty} 1 + \frac{r_{2k-3}}{1 + r_{2k-3}} = 1 + \frac{L_1}{1 + L_1}$$

e

$$L_2 = \lim_{k \to +\infty} r_{2k} = \lim_{k \to +\infty} 1 + \frac{r_{2k-2}}{1 + r_{2k-2}} = 1 + \frac{L_2}{1 + L_2}.$$

Vemos então que tanto L_1 *quanto* L_2 *satisfazem a equação* $L^2 - L - 1 = 0$, *cujas soluções são* $L = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. *Mas como* $1 \leq r_n \leq 2$, $\forall n \in \mathbb{N}$, *temos* $L_1 = L_2 = L = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$. *Logo,* r_n *converge e*

$$\lim_{n \to +\infty} r_n = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Esse número é conhecido como número de ouro.

Exemplo 12. *(Uma lenda) Após a criação do mundo, em um mosteiro escondido na Índia, o Grande Criador colocou uma placa de bronze e nela fixou três bastões cobertos de diamantes. Em um dos bastões, em ordem decrescente de tamanho colocou 64 discos de ouro. E assim disse aos monges: “transfiram esta pilha de discos para outro bastão*

movendo, ininterruptamente, um disco de cada vez e nunca permitindo que um disco maior fique acima de um menor. Quando terminarem esta tarefa e os 64 discos estiverem noutro bastão, este templo se reduzirá a pó e com um estrondo de trovões o mundo acabará.”
Dizem os sábios que o mundo foi criado a 4 bilhões de anos aproximadamente, e os monges, desde a criação, estão movendo os discos na razão de um disco por segundo.
Será que veremos o mundo acabar?
É muito difícil imaginar os movimentos feitos com uma pilha de 64 discos.
Imaginemos uma pilha com 1 disco:

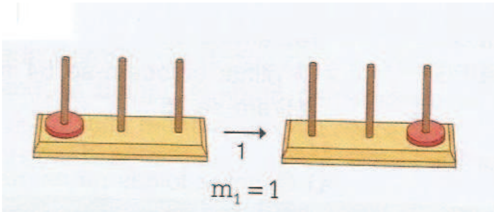

Figura 3: Torre de Hanoi para 1 disco.
Fonte: Souza (2013).

Para 1 disco, a transferência se dá com 1 movimento.
Dois discos:

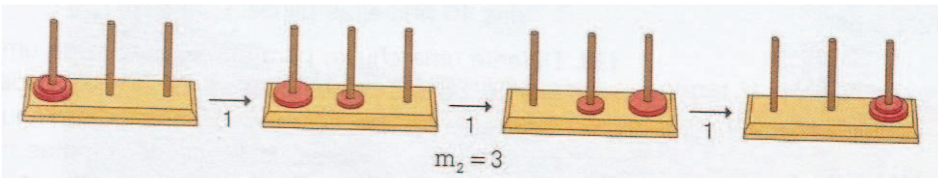

Figura 4: Torre de Hanoi para 2 discos.
Fonte: Souza (2013).

Para 2 discos a transferência se dá com 3 movimentos.
Três discos:

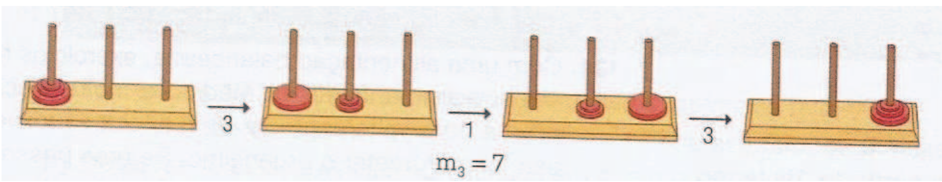

Figura 5: Torre de Hanoi para 3 discos.
Fonte: Souza (2013).

Quatro discos:

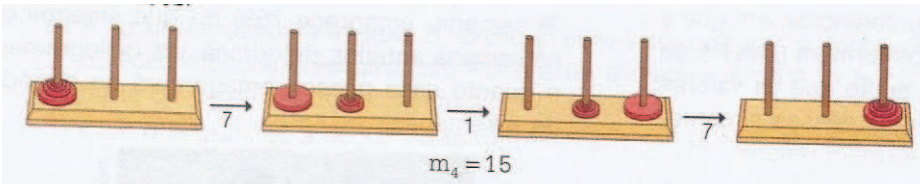

Figura 6: Torre de Hanoi para 4 discos.
Fonte: Souza (2013).

Já se pode ver como deslocar n discos com o menor número de movimentos possível: inicialmente, movem-se $n-1$ *discos para o bastão de trás, com* m_{n-1} *movimentos; em seguida, move-se o n-ésimo disco para o outro bastão da frente, com* 1 *movimento; finalmente, movem-se os* $n-1$ *discos do bastão de trás para o da frente, com* m_{n-1} *movimentos. Tem-se:*

$$m_n = m_{n-1} + 1 + m_{n-1} = 2m_{n-1} + 1.$$

Façamos uma tabela com o número de discos e o número de movimentos mínimo para mudá-los de um bastão para o outro:

Tabela 1: Número mínimo de movimentos

n	1	2	3	4	5	6	...
m_n	1	3	7	15	31	63	...

Fonte: Souza (2013).

Precisamos descobrir o valor de m_{64}*, porque* m_{64} *segundos após a criação do mundo ele acabará, e já se passaram* 4 *bilhões de anos!*
Observando a segunda linha da tabela, vemos que os números são a menos de 1*:* 2, 4, 8, 16, 32, 64, *ou seja,* 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, *o que nos leva a fazer a seguinte conjectura:*

$$m_n = 2^n - 1.$$

Essa sentença é verdadeira para $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, *mas será verdadeira sempre?*
Tentemos demonstrá-la por indução.
Seja S *o conjunto dos números naturais* n, *tais que* n *discos são movidos com* $2^n - 1$ *movimentos.*

1. $1 \in S$*, pois para* 1 *disco necessitamos de* $1 = 2^1 - 1$ *movimentos.*

2. Vamos supor que $k \in S$*, isto é,* k *discos são movidos com* $2^k - 1$ *movimentos.*
Provaremos que $k + 1 \in S$*, isto é, que* $m_{k+1} = 2^{k+1} - 1$*.*
Para remover $k + 1$ *discos passamos, inicialmente,* k *discos para o bastão de trás com* m_k *movimentos; em seguida, com* 1 *movimento, o* $(k + 1)$*-ésimo disco vai para o outro bastão da frente; com mais* m_k *movimentos os* k *discos de trás passam para o bastão da frente. Isto é,* $m_{k+1} = m_k + 1 + m_k$*.*

$$m_{k+1} = 2^k - 1 + 1 + 2^k - 1 = 2 \cdot 2^k - 1 = 2^{k+1} - 1.$$

Isso mostra que $k + 1 \in S$*.*
O princípio da indução nos garante que n *discos podem ser removidos com* $2^n - 1$ *movimentos e em particular,* $m_{64} = 2^{64} - 1$*.*
E assim, ficamos sabendo que $2^{64} - 1$ *segundos após a criação do mundo, ele terminará.*
Com um pouco mais de matemática, ficaremos sabendo se isto ocorrerá logo.
Façamos alguns cálculos.
Quantos segundos tem um ano?
Resposta: $60 \cdot 60 \cdot 24 \cdot 365\frac{1}{4} = 31557600 < 2^{25} = 1024 \cdot 1024 \cdot 32 = 33554432.$
Exagerando vamos supor que os monges façam 2^{25} *movimentos por ano. Com isso, o mundo acabará em* $\dfrac{2^{64}}{2^{25}} = 2^{39}$ *anos.*

$$2^{39} = 2^{10} \cdot 2^{10} \cdot 2^{10} \cdot 2^9 = 1024 \cdot 1024 \cdot 1024 \cdot 512 > 512 \cdot 10^9$$

Passaram-se até hoje 4 *bilhões de anos, ou seja,* $4 \cdot 10^9$ *anos.*
Podemos ficar tranquilos pois faltam mais do que 508 *bilhões de anos para os monges terminarem sua tarefa, isto supondo que eles não errem no caminho.*

Uma recorrência, por si só, não define a sequência. Por exemplo, a recorrência $x_{n+1} = x_n + 2$ é satisfeita não apenas pela sequência dos números ímpares mas por todas as progressões aritméticas de razão 2. Para que a sequência fique perfeitamente determinada é necessário também conhecer o(s) primeiro(s) termo(s).
Uma recorrência é dita de primeira ordem quando cada termo é expresso em função do antecessor imediato e uma recorrência é de segunda ordem quando cada termo é expresso em função dos dois antecessores imediatos.

1.3 Séries de Números Reais

Definição 1.7. *Seja x_n uma sequência de números reais. A partir dela formamos uma nova sequência s_n cujos elementos são as somas*

$$\begin{aligned} s_1 &= x_1 \\ s_2 &= x_1 + x_2 \\ s_3 &= x_1 + x_2 + x_3 \\ &. \\ &. \\ &. \\ s_n &= x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n \end{aligned}$$

que chamaremos de somas parciais da série $\sum x_n$. A parcela x_n é chamada de n-ésimo termo ou termo geral da série.
Se existir o limite

$$s = \lim_{n \to +\infty} s_n = \lim_{n \to +\infty} (x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n),$$

diremos que a série $\sum x_n$ é convergente e o limite s será chamado de soma da série. Escreveremos então

$$s = \sum x_n = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n = x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n + ...$$

Se a sequência das somas parciais não convergir, diremos que a série $\sum x_n$ é divergente.

Exemplo 13 (P - séries)**.** $\sum \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + ... + \frac{1}{n^p} + ...$, *com $p \in \mathbb{R}$.*
Temos que

(i) $p > 1 \Rightarrow \sum \frac{1}{n^p}$ *é covergente;*

(ii) $p \leq 1 \Rightarrow \sum \frac{1}{n^p}$ *é divergente.*

Em particular, para p = 1, temos a série harmônica, $\sum \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} + ...$ O estudo e entendimento da série harmônica teve origem no século VI a.c com as experiências feitas pelo filósofo e matemático grego Pitágoras. Pitágoras afirmou que qualquer som para ser musical teria que ter altura definida, emitido por um instrumento ou por fonte natural, resultando em uma vibração ondulatória regular. Essa vibração é composta pelo som gerador (1ª nota) e outros sons definidos de intensidade menor e frequência mais aguda, chamados de sons harmônicos ou série harmônica. Assim, se tomarmos como exemplo uma corda de um violão (6ª Corda - Nota Mi Grave), notaremos que além de vibrar em toda a sua extensão, também vibra em sua metade, em sua terça parte, em sua quarta parte e quinta parte, etc., produzindo sons cada vez mais agudos. A vibração da corda pode ser definida como ciclos ou Hertz (1º ciclo = é igual a ida e volta da vibração da corda). Então ao tocarmos a 6ª Corda do Violão (nota Mi Grave) temos: 1º ciclo = nota Mi (fundamental); 2º ciclo = nota Mi, uma oitava mais aguda; 3º ciclo = nota sol uma oitava + uma quinta aguda; etc. A série harmônica é basicamente infinita, e suas primeiras 16 notas surgem, ao subdividir uma corda vibrante (experiência de Pitágoras) em 2 - 3 - 4 - 5 - 6 - 7 - 8 - 9 - 10, etc. partes iguais.

Exemplo 14 (Série Geométrica)**.** $\sum a^n = a + a^2 + a^3 + ... + a^n + ...$, *com* $a \in \mathbb{R}$.
Temos que para $0 < |a| < 1$ *a série* $\sum a^n$ *converge e seu limite é* $\dfrac{a}{1-a}$.

Exemplo 15. *Vejamos como os números podem ser representados por expressões decimais. Vamos nos restringir ao intervalo* $[0,1)$*, pois os demais são reduzidos a esses através de uma translação por um inteiro. Um número decimal é uma sequência, cujos elementos são os algarismos* $0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8$ *e* 9*. Representaremos por* $0, a_1a_2a_3...$ *um decimal onde os* a_i*'s são um dos 10 algarismos acima. Consideremos* $\mathbb{D}$ *o conjunto de todos os números decimais.*
Definimos a função $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(0, a_1a_2a_3...) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + ...$$

Note que tal série é convergente, pois é majorada pela série geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{9}{10^n}$ *cuja soma é* 1*. A função* f *restrita ao subconjunto* $\mathbb{D}^*$*, formado por decimais que não têm todos os elementos iguais a* 9*, a partir de uma certa ordem, é uma bijeção sobre* $[0,1)$.

$$\mathbb{D}^* \leftrightarrow [0,1)$$

$$0, a_1a_2a_3... \leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$$

Para detalhes da demonstração ver [11].

Exemplo 16 (Série Telescópica)**.** $\sum x_n$, *com* $x_n = y_n - y_{n+1}$.
Temos que

$$s_n = x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n = (y_1 - y_2) + (y_2 - y_3) + ... + (y_n - y_{n+1}) = y_1 - y_{n+1}.$$

Se $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = L$, *com* $L \in \mathbb{R}$ *então*

$$\sum x_n = \lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} y_1 - y_{n+1} = y_1 - L.$$

Exemplo 17. $\sum(-1)^{n+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + ...$
Para discutirmos a convergência da série, veremos o teorema a seguir.

Teorema 1.10. *Se* $\sum x_n$ *é uma série convergente então* $\lim x_n = 0$.

Demonstração: Seja $s_n = x_1 + ... + x_n$. Então existe $s = \lim s_n$. Evidentemente tem-se $s = \lim s_{n-1}$. Logo,

$$\lim x_n = \lim(s_n - s_{n-1}) = \lim s_n - \lim s_{n-1} = s - s = 0.$$

$\blacksquare$

A recíproca do teorema acima é falsa. Note que na série $\sum \frac{1}{n}$ o termo geral $\frac{1}{n}$ tende para zero, mas a série diverge. De fato, temos

$$s_{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + ... + \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + ... + \frac{1}{2^n}\right) >$$
$$1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{4}{8} + ... + \frac{2^{n-1}}{2^n} = 1 + n \cdot \frac{1}{2}.$$

Daí, $\lim\limits_{n\to+\infty} s_{2^n} = +\infty$ e, consequentemente $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = +\infty$.

Note que no Exemplo 17 a série é divergente, pois suas somas parciais de ordem ímpar são iguais a 1 e as de ordem par são iguais a zero. Logo, seu termo geral não tende para zero.

Das propriedades aritméticas do limite de sequências resulta que:

(i) Se $\sum x_n$ e $\sum y_n$ são séries convergentes então a série $\sum(x_n + y_n)$ é convergente, com $\sum(x_n + y_n) = \sum x_n + \sum y_n$.

(ii) Se $\sum x_n$ converge então, para todo r real, tem-se $\sum(rx_n)$ convergente, com $\sum(rx_n) = r\left(\sum x_n\right)$.

(iii) Se $\sum x_n = s$ e $\sum y_n = t$ convergem, fazendo $s_n = x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n$ e $t_n = y_1 + y_2 + y_3 + ... + y_n$ então $s \cdot t = \lim\limits_{n\to+\infty} s_n t_n = \lim\limits_{n\to+\infty} (x_1y_1 + x_1y_2 + ... + x_1y_n +$

$x_2y_1 + x_2y_2 + ... + x_2y_n + ... + x_ny_1 + x_ny_2 + ... + x_ny_n)$. Logo, a série $\sum z_n$, com $z_n = \sum_{i=1}^{n} x_iy_n + \sum_{j=1}^{n-1} x_ny_j$, converge e vale a igualdade $\sum z_n = \left(\sum x_n\right)\left(\sum y_n\right)$.

Uma abordagem mais aprofundada para o estudo da convergência de séries de números reais, bem como vários critérios de convergência encontram-se disponíveis em [12] e [14].
Como sugestão, apresentamos um roteiro que poderá ajudar na investigação da convergência de uma série:

1. Se $\lim x_n \neq 0$ ou a sequência é divergente o critério do termo geral deve ser usado para concluir que a série $\sum x_n$ diverge;

2. Se a série é da forma $\sum(x_n - x_{n+1})$ ela é uma série telescópica, que converge para $x_1 - \lim x_n$ se $\{x_n\}$ convergir e diverge se $\{x_n\}$ divergir;

3. Se a série é da forma $\sum \alpha x^{n-1}$ ela é uma série geométrica, que converge para $\dfrac{\alpha}{(1-x)}$ se $|x| < 1$ e diverge se $|x| \geq 1$;

4. Se a série é da forma $\sum \dfrac{1}{n^p}$ ela é uma p-série geométrica, que converge apenas para $p > 1$;

5. (Critério da Razão) Se a série $\sum x_k$, com $x_k \neq 0$, é tal que

$$L = \lim \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|.$$

   Então se

   a) $L < 1$, a série converge;

   b) $L > 1$ ou $L = \infty$, a série diverge;

   c) $L = 1$, o critério nada revela.

Vale salientar que, após a introdução do conceito de função, suas classificações (injetora, sobrejetora, bijetora, crescente, decrescente, ...) e o estudo de algumas funções particulares (função afim, quadrática, exponencial, ...), os conteúdos de sequências e séries de números reais da maneira como foram apresentados neste capítulo são perfeitamente aplicáveis ao 1º ano do ensino médio pois, a abordagem proposta utiliza apenas noções básicas e intuitivas associadas a funções e a maior parte dos exemplos apresentados até o momento, bem como os problemas que serão trabalhados no Capítulo 3 deste trabalho, estão relacionados ao cotidiano do aluno, tanto com o social (teoria musical e matemática financeira) quanto com o acadêmico (representação decimal e cálculo de áreas).

2 Abordagem de alguns livros didáticos utilizados no Ensino Médio

Neste capítulo será feita uma descrição de como os conteúdos de sequências e séries de números reais vêm sendo abordados por alguns livros didáticos utilizados no ensino médio.

No livro **Matemática: Contexto & Aplicações Volume 1** de Luiz Roberto Dante inicialmente tem-se um texto introdutório que descreve alguns exemplos de sequência presentes na natureza, em seguida o livro passa a tratar sequências presentes em situações cotidianas. Segundo Dante, "Uma **sequência** ou sucessão de números reais **é uma função** definida em $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, ..., n, ...\}$ e tomando valores no conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais. $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$" (2013, p. 207). O livro trata ainda de recorrência e logo começa a falar de progressões aritméticas e geométricas, bem como suas propriedades e fórmulas de termo geral e soma de termos. Vale salientar que relaciona progressão aritmética com função afim e progressão geométrica com função exponencial. Os exercícios iniciais abordam a ideia geral de sequência e os seguintes tratam de P.A. e P.G. Além disso, o livro traz algumas notas, entre elas uma sobre a sequência de Fibonacci.

O livro **Matemática: Ciência e Aplicações Volume 1** de Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, David Degenszajn, Roberto Périgo e Nilze de Almeida apresenta uma tabela que relaciona duas grandezas. Os autores definem

> De modo geral, uma função cujo domínio é $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, ...\}$ é chamada **sequência numérica infinita**. Quando o domínio de f é $\{1, 2, 3, ..., n\}$ em que $n \in \mathbb{N}^*$, temos uma **sequência numérica finita** (2013, p. 200).

Em seguida o livro trata de termo geral da sequência, fala brevemente sobre recorrência e então começa a explanar progressões aritméticas e geométricas, suas propriedades e fórmulas de termo geral e soma de termos. Também relaciona P.A. com função afim e P.G. com função exponencial, os exercícios iniciais abordam a ideia geral de sequência e os subsequentes tratam de P.A. e P.G. Vale salientar que o livro traz uma nota sobre sequência de Fibonacci.

O livro **Matemática: Volume 1** de Manoel Paiva também inicia o capítulo com um exemplo. Segundo Paiva "**Sequência finita** é toda função de domínio $A = \{1, 2, 3, ..., n\}$, com $A \subset \mathbb{N}^*$, e contradomínio B, sendo B um conjunto qualquer não vazio" (2013, p. 254).

Ainda segundo Paiva, "**Sequência infinita** é toda função de domínio $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, ...\}$ e contradomínio B, sendo B um conjunto qualquer não vazio" (2013, p. 255). Logo após, o livro menciona lei de formação da sequência, em seguida começa a tratar de progressões aritméticas e geométricas bem como suas propriedades e fórmulas de termo geral e soma de termos, relacionando P.A. com função afim e P.G. com função exponencial. Nos exercícios iniciais abordam a ideia geral de sequência, e os demais tratam de P.A. e P.G.

O livro **Novo Olhar: Matemática Volume 1** de Joamir Roberto de Souza mostra alguns exemplos de sequências numéricas e não - numéricas. Souza define sequência finita

> Chamamos de **sequência finita** de n termos toda função cujo domínio é um subconjunto dos n primeiros elementos de $\mathbb{N}^*$, ou seja, $\{1, 2, 3, 4, 5, ..., n\}$, e cujo contradomínio seja um conjunto qualquer não vazio. Geralmente, o conjunto imagem dessa função é indicado por: $\{a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_n\}$ (2013, p. 218).

e sequência infinita

> Chamamos de **sequência infinita** toda função de domínio $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, 5, ..., n, ...\}$, e cujo contradomínio seja um conjunto qualquer não vazio. Geralmente, o conjunto imagem dessa função é indicado por: $\{a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_n, ...\}$ (2013, p. 219).

Em seguida o livro trata de lei de formação da sequência. A partir de então, começa a falar de progressões aritméticas e geométricas bem como suas propriedades e fórmulas de termo geral e soma de termos, faz a relação entre P.A. e função afim e entre P.G. e função exponencial. Como nos demais livros, os exercícios iniciais abordam a ideia geral de sequência, e os seguintes tratam de P.A. e P.G., o livro tem notas sobre algumas sequências, entre elas uma sobre torre de Hanói.

Nota-se que, em geral, as abordagens dos livros didáticos são similares. Os livros trazem alguns exemplos que não são sobre progressões aritméticas e geométricas, entretanto, o foco da maioria dos exercícios é nesses tipos de sequências. Sobre o conteúdo de séries, os livros mencionam apenas a soma dos termos da P.G. infinita com razão entre -1 e 1. Com base nisso, a seguir, sugere-se outro tipo de abordagem dos conteúdos de sequências e séries, bem como algumas questões que exploram os conceitos e estimulam o raciocínio lógico dos alunos.

3 Proposta de abordagem para o Ensino Médio

Com base no capítulo anterior, percebe-se que os livros de matemática voltados para o 1º ano do ensino médio explanam o conteúdo de sequências e séries da seguinte forma:

1. Introduzem o conteúdo com sequências diversas por meio de situações práticas;
2. Especificam progressões aritméticas e geométricas e suas propriedades;
3. Apresentam fórmulas de termos gerais e somas de termos de P.A. e P.G.;
4. Usam as fórmulas para resolver questões.

Isso restringe sequências e séries a progressões aritméticas e geométricas e os alunos tem dificuldade de resolver exercícios que tratam de outros tipos de sequências e séries de números reais. Por isso, a seguir sugere-se um roteiro com o intuito de trabalhar as ideias intuitivas desses assuntos e resolver questões diversas:

1. Explanar a teoria por meio das definições e propriedades de sequências e séries de números reais (a explanação apresentada no capítulo 1 pode servir de fonte para o docente mas, sugere-se que o mesmo adapte a forma de explanação conforme a realidade de cada turma), motivando com exemplos que envolvam situações cotidianas, bem como usar a história da matemática como recurso didático, pois os PCN's mencionam que:

   > Em muitas situações, o recurso à História da Matemática pode esclarecer ideias matemáticas que estão sendo construídas pelo aluno, especialmente para dar respostas a alguns "porquês"e, desse modo, contribuir para a constituição de um olhar mais crítico sobre os objetos de conhecimento.
   > (...)

> Entretanto, essa abordagem não deve ser entendida simplesmente que o professor deva situar no tempo e no espaço cada item do programa de Matemática ou contar sempre em suas aulas trechos da história da Matemática, mas que a encare como um recurso didático com muitas possibilidades para desenvolver diversos conceitos, sem reduzi-la a fatos, datas e nomes a serem memorizados (1998, p. 42).

Deste modo os alunos tem acesso aos conteúdos como um todo e podem perceber a relevância e utilidade dos mesmos em sua vida;

2. Apresentar exemplos mostrando sequências e séries diversas e em tais exemplos trabalhar esses conceitos de forma contextualizada. Assim os discentes tem uma noção mais ampla desses assuntos bem como sua aplicabilidade;

3. Resolver questões usando a ideia intuitiva, conceitos, definições, propriedades e resultados de forma geral, sem classificar ou limitar as possibilidades.

Assim, sugere-se que o professor faça uso da Sequência Fedathi que é uma metodologia de ensino que direciona-se para a melhoria da prática pedagógica visando à postura adequada do professor em sala de aula e tem como essência contribuir para que o aluno supere os obstáculos epistemológicos e didáticos que ocorrem na abordagem dos conceitos matemáticos em sala de aula.

A Sequência Fedathi foi desenvolvida por professores, pesquisadores e alunos de pós-graduação da Faculdade de Educação da Universidade Federal do Ceará, este constituem o Grupo Fedathi, formado no início dos anos 1990 para tratar de questões relativas à didática da matemática.

Entre 1997 e 1998, BORGES NETO, coordenador do Grupo Fedathi, desenvolveu uma seqüência didática com base em sua experiência como matemático, de modo que fosse possível aos professores criar condições e possibilidades para que os estudantes de matemática pudessem ter uma experiência significativa de aprendizagem matemática em sua vida escolar.

Consiste, basicamente, em colocar o estudante na posição de um matemático, por meio do processo de investigação e resolução de problemas. Entre 1999 e 2002, várias experiências com a Sequência Fedathi foram realizadas em pesquisas sobre didática da matemática assistida por computador. Atualmente, muitos questionamentos estão sendo propostos sobre essa sequência e existe o desenvolvimento de articulações desta com conceitos desenvolvidos pela escola francesa de didática da matemática.

A Sequência Fedathi visa que o professor proporcione ao estudante a reprodução das etapas do trabalho de um matemático quando este está diante de uma situação problema. É constituída por quatro fases:

- ✓ Tomada de posição - consiste na apresentação de uma situação desafiadora que pode ser na forma escrita, verbal, por meio de jogos, ou de outro modo, podendo ser realizado em grupo ou individualmente;

- ✓ Maturação - representa o momento em que o estudante busca identificar e compreender as variáveis envolvidas na situação problema. Nessa ocasião, o professor pode intervir pedagogicamente levantando algumas questões que ajudarão o aprendiz no levantamento das hipóteses e entendimento do problema: o que é pedido na questão? Quais as dados fornecidos? O que o problema solicita?;

- ✓ Solução - sinaliza a fase em que o aprendiz representa e organiza esquemas para encontrar a solução. Diante das soluções apresentadas, o professor deve apresentar contra-exemplos promovendo desequilíbrios cognitivos no estudante com o intuito de promover conhecimentos e esclarecimentos das hipóteses;

- ✓ Prova - delineia a etapa em que o estudante faz a verificação da solução encontrada confrontando o resultado com os dados apresentados. Na ocasião, o professor deve fazer uma analogia com os modelos científicos preexistentes, formaliza o conhecimento construído e formaliza matematicamente o modelo apresentado.

Dessa maneira, acredita-se que o discente absorve ideias, desenvolve métodos e não apenas decora fórmulas prontas.

A seguir, seguem algumas questões com soluções que usam a ideia intuitiva de sequências e séries de números reais:

Problema 1. (OBM) Considere a sequência oscilante:

$$1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1, 2, 3, 4, ...$$

Determine o 2003º termo dessa sequência.

Solução: Note que uma parte da sequência se repete: 1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2. Como procura-se 2003º termo e estes se repetem de 8 em 8, dividimos 2003 por 8, obtendo resto 3. Daí, o 2003º termo corresponde ao terceiro elemento da parte da sequência que se repete, ou seja, 3.

Problema 2. (EUA) Se $F(n+1) = \dfrac{2F(n)+1}{2}$ para $n = 1, 2, ...$, e $F(1) = 2$, então determine o valor de $F(101)$.

Solução: Também pode-se escrever a equação que define os termos dessa sequência da seguinte maneira:

$$F(n+1) - F(n) = \frac{1}{2}.$$

Escrevendo essas equações variando n de 100 a 1, temos:

$$F(101) - F(100) = \frac{1}{2}$$

$$F(100) - F(99) = \frac{1}{2}$$

$$\vdots$$

$$F(3) - F(2) = \frac{1}{2}$$

$$F(2) - F(1) = \frac{1}{2}$$

Somando todas essas equações, obtemos $F(101) - F(1) = 50$, ou seja, $F(101) = 52$ pois $F(1) = 2$.

Problema 3. O pagamento de um certo pintor aumenta de acordo com os dias em que ele trabalha. No primeiro dia ele recebeu 1 real. No segundo dia ele recebeu o que tinha ganho no primeiro dia mais 2 reais. No terceiro dia ele recebeu o que tinha recebido no segundo dia mais 3 reais e assim sucessivamente. Desse modo, quanto o marceneiro irá receber no centésimo dia?

Solução: Seja V_n o valor recebido no n-ésimo dia. Do problema concluimos que $V_{n+1} = V_n + (n+1)$. Escrevendo as equações do n-ésimo ao primeiro dia, temos:

$$V_{n+1} = V_n + (n+1)$$

$$V_n = V_{n-1} + n$$

$$.$$

$$.$$

$$.$$

$$V_3 = V_2 + 3$$

$$V_2 = V_1 + 2$$

Somando membro a membro, obtemos um cancelamento de vários termos e resulta que:

$$V_{n+1} = (n+1) + n + ... + 3 + 2 + V_1 = (n+1) + n + ... + 3 + 2 + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Portanto, o valor que o marceneiro irá receber no centésimo dia será

$$V_{100} = V_{99+1} = \frac{(99+1)(99+2)}{2} = \frac{10100}{2} = 5050.$$

Problema 4. Considere uma sequência u_n definida por $u_1 = 5$ e a relação

$$u_{n+1} - u_n = 3 + 4(n-1), n = 1, 2, 3, ...$$

Determine a soma algébrica dos seus coeficientes.

Solução: Podemos escrever

$$u_n - u_{n-1} = 3 + 4(n-2)$$

$$u_{n-1} - u_{n-2} = 3 + 4(n-3)$$

$$.$$

$$.$$

$$.$$

$$u_3 - u_2 = 3 + 4 \cdot 1$$

$$u_2 - u_1 = 3 + 4 \cdot 0.$$

Somando todas essas equações, obtemos

$$u_n - u_1 = 3(n-1) + 4 \cdot [0+1+...+(n-3)+(n-2)] = 3(n-1) + 4 \cdot \left[\frac{(n-2)(n-1)}{2}\right] = 2n^2 - 3n + 1$$

Logo,

$$u_n = 2n^2 - 3n + 6.$$

E a soma dos seus coeficientes é 5.

Problema 5. Considere a sequência definida por $a_1 = 1$ e $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{1 + na_n}$. Calcule a_{2011}.

Solução: Observe que, na fórmula de a_{n+1}, a fração do membro à direita pode ser melhor desenvolvida se for invertida, porque poderemos desmembrar o resultado. De fato, temos

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1 + na_n}{a_n} = \frac{1}{a_n} + n$$
$$\Rightarrow \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = n.$$

Assim, obtemos uma equação de diferença. Variando o valor de n de forma decrescente de 2010 a 1, chegaremos a

$$\frac{1}{a_{2011}} - \frac{1}{a_{2010}} = 2010$$
$$\frac{1}{a_{2010}} - \frac{1}{a_{2009}} = 2009$$
$$\vdots$$
$$\frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_2} = 2$$
$$\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1} = 1.$$

Somando essas 2010 equações membro a membro, obtemos

$$\frac{1}{a_{2011}} - \frac{1}{a_1} = 1 + 2 + ... + 2009 + 2010 = \frac{2010 \cdot 2011}{2} = 2021055.$$

Logo,

$$a_{2011} = \frac{1}{2021056}$$

Problema 6. Considere a sequência recorrente definida por $a_1 = 14$ e $a_{n+1} = a_n^2 - 2$. Prove que o número $\sqrt{3(a_n^2 - 4)}$ é divisível por 4, $\forall n \geq 1$.

Solução: Primeiro, veja que $\sqrt{3(a_1^2 - 4)} = 24$. Observe que

$$a_{n+1} - 2 = a_n^2 - 4 = (a_n + 2)(a_n - 2).$$

Reduzindo os índices, obtemos também

$$a_n - 2 = (a_{n-1} + 2)(a_{n-1} - 2)$$

$$.$$

$$.$$

$$.$$

$$a_3 - 2 = (a_2 + 2)(a_2 - 2)$$

$$a_2 - 2 = (a_1 + 2)(a_1 - 2).$$

Multiplicando todas essas equações telescopicamente, obtemos

$$a_{n+1} - 2 = (a_n + 2)(a_{n-1} + 2)...(a_2 + 2)(a_1 + 2)(a_1 - 2)$$

$$\Rightarrow a_n^2 - 4 = a_{n-1}^2 \cdot a_{n-2}^2 \cdot ... \cdot a_1^2 \cdot 16 \cdot 12$$

$$\Rightarrow 3(a_n^2 - 4) = a_{n-1}^2 \cdot a_{n-2}^2 \cdot ... \cdot a_1^2 \cdot 16 \cdot 36$$

$$\Rightarrow \sqrt{3(a_n^2 - 4)} = a_{n-1} \cdot a_{n-2} \cdot ... \cdot a_1 \cdot 4 \cdot 6,$$

que é múltiplo de 4.

Problema 7. A árvore do professor Fernando cresce com a seguinte regra:

- ▶ na primeira semana a árvore começa a crescer a partir de um galho;
- ▶ após crescer por duas semanas, esse galho dá origem a um novo galho por semana;
- ▶ cada novo galho gerado continua a crescer, e após crescer por duas semanas dá origem a um novo galho por semana.

A figura abaixo ilustra a árvore do professor Fernando após cinco semanas passadas do início do seu crescimento.

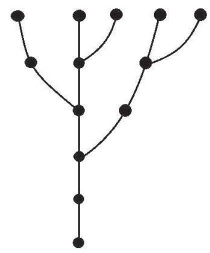

Figura 7: Árvore do professor Fernando.
Fonte: www.obmep.org.br/banco_questoes.do (2015).

Note que após três semanas havia dois galhos; após quatro semanas havia três galhos e após cinco semanas havia cinco galhos.

a) Quantos galhos haverá após seis semanas?

b) Quantos galhos haverá após sete semanas?

c) Quantos galhos haverá após treze semanas?

Solução:

a) Seguindo as regras de crescimento da árvore do professor Fernando podemos continuar o desenho mostrado no enunciado do problema para obter uma ilustração dessa árvore após a sexta semana de crescimento:

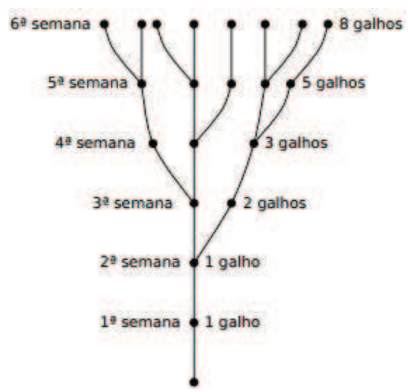

Figura 8: Árvore após a sexta semana.
Fonte: www.obmep.org.br/banco_questoes.do (2015).

Essa figura mostra que após a sexta semana de crescimento temos um total de oito galhos.

b) Note que a sequência que determina o número de galhos por semana de crescimento é a seguinte:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, ...$$

Essa sequência satisfaz a seguinte regra: a partir de seu terceiro termo, cada termo é a soma dos dois termos anteriores. A quantidade de galhos presentes após a sétima semana de crescimento será dada pelo sétimo termo da sequência. Logo, o sétimo termo será a soma do sexto termo (8) com o quino termo (5), resultando em 13.

c) Podemos gerar os demais termos da sequência da seguinte forma:
sexto termo: 8
sétimo termo: 13
oitavo termo: $8 + 13 = 21$
nono termo: $13 + 21 = 34$
décimo termo: $21 + 34 = 55$
décimo primeiro termo: $34 + 55 = 89$
décimo segundo termo: $55 + 89 = 144$
décimo terceiro termo: $89 + 144 = 233$
Assim, a quantidade de galhos após 13 semanas é 233.

Problema 8. Utilizando-se quadradinhos de 1 cm de lado são construídas escadas conforme a figura abaixo:

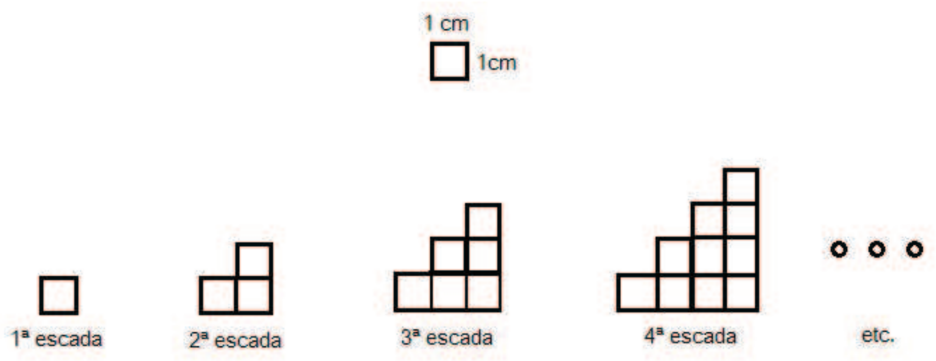

Figura 9: Escadas.

Fonte: www.obmep.org.br/banco_questoes.do (2015).

a) Calcule a área total e o perímetro da quinta escada construída.

b) Precisamos de uma escada de 78 cm^2 de área. Qual escada devemos escolher?

c) Precisamos de uma escada de 100 cm de perímetro. Qual escada devemos escolher?

Solução:

a) Primeiro observamos que na n-ésima escada temos, n quadradinhos na sua base, $n-1$ quadradinhos no segundo nível, $n-2$ quadradinhos no terceiro nível, e assim sucessivamente, até termos 1 quadradinho no topo. Então a n-ésima escada é constituida por $1+2+...+n$ quadradinhos.
Para calcularmos esta soma escrevemos os números como a seguir, repetindo os números da soma ao contrário:

$$1+2+...+(n-1)+n$$

$$n+(n-1)+...+2+1$$

Observe que a soma de dois números numa coluna qualquer sempre dá $n+1$. Logo, se somarmos todos os números acima, como temos n linhas, teremos como resposta $n(n+1)$. Como cada número aparece duas vezes na soma acima, o resultado $n(n+1)$ corresponde a duas vezes a soma que queremos . Ou seja,

$$1+2+...+(n-1)+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

Assim, a escada estará constituída por $\frac{n(n+1)}{2}$ quadradinhos.
Concluimos que a área da n-ésima é $\frac{n(n+1)}{2}$ cm^2.
Por outro lado, na n-ésima escada podemos contar $n+n$ linhas verticais e $n+n$ linhas horizontais.
Concluimos que o perímetro da n-ésima escada é $4n$ cm.
Logo, para $n=5$, obtemos uma área de $\frac{5\cdot 6}{2}=15$ cm^2 e um perímetro de $4\cdot 5=20$ cm

b) Para conseguir uma escada de 78 cm^2 de área precisamos que $n(n+1)=2\cdot 78=12\cdot 13$. Portanto tal escada corresponde a de número 12.

c) Para conseguir uma escada de 100 cm de perímetro precisamos que $4n=100$. Portanto tal escada corresponde a de número 25.

Problema 9. A sequência de números t_1, t_2, t_3, ... está definida por

$$\begin{cases} t_1 = 2 \\ t_{n+1} = \dfrac{t_n - 1}{t_n + 1} \end{cases}$$

para cada inteiro positivo n. Encontrar t_{2011}.

Solução: Calculemos os primeiros termos da sequência:

$$t_2 = \frac{t_1 - 1}{t_1 + 1} = \frac{2-1}{2+1} = \frac{1}{3}$$

$$t_3 = \frac{t_2 - 1}{t_2 + 1} = \frac{\frac{1}{3} - 1}{\frac{1}{3} + 1} = -\frac{1}{2}$$

$$t_4 = \frac{t_3 - 1}{t_3 + 1} = \frac{-\frac{1}{2} - 1}{-\frac{1}{2} + 1} = -3$$

$$t_5 = \frac{t_4 - 1}{t_4 + 1} = \frac{-3-1}{-3+1} = 2.$$

Assim, observamos que os primeiros cinco termos da sequência são 2, $\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{2}$, -3 e 2. Observamos que a sequência se repete a cada 4 termos, isto é,

$$2 = t_1 = t_5 = t_9 = ... = t_{2009}.$$

Logo, $t_{2010} = \dfrac{1}{3}$ e $t_{2011} = -\dfrac{1}{2}$.

Problema 10. Uma pedra, deixada cair de um edifício de 80 m, leva 4 s para atingir o solo. Considere que para intervalos de tempos iguais e consecutivos, um corpo em queda livre percorre distâncias cada vez maiores, na proporção dos números ímpares consecutivos, ou seja, no primeiro segundo, o móvel cai uma distância d; no segundo seguinte, percorre $3d$; no terceiro segundo, $5d$, e assim por diante. Determine a altura percorrida pela pedra no primeiro segundo de queda.

Solução: Como a pedra foi deixada cair, ocorre uma queda livre, logo, a pedra percorreu $d + 3d + 5d + 7d = 80m \Rightarrow 16d = 80m \Rightarrow d = 5m$. Daí, a altura percorrida pela pedra no primeiro segundo de queda é 5 m.

Problema 11. Sheila e Helena disputam uma série de partidas. Cada partida é iniciada por quem venceu a partida anterior. Em cada partida, quem a iniciou tem probabilidade 0,6 de ganhar e probabilidade 0,4 de perder. Se Helena iniciou a primeira partida, qual é a probabilidade de Sheila ganhar a terceira partida?.

Solução: Seja x_n a probabilidade de Sheila ganhar a n-ésima partida. Temos duas opções: Sheila ganha a n-ésima partida e ganha a anterior ou ganha a n-ésima partida e perde a anterior. Deste modo, obtemos $x_{n+1} = 0,6x_n + 0,4(1 - x_n)$, como Helena iniciou a primeira partida temos que $x_1 = 0,4$. Daí,

$$x_2 = 0,6x_1 + 0,4(1 - x_1) = 0,6 \cdot 0,4 + 0,4 \cdot 0,6 = 0,48.$$

E portanto,

$$x_3 = 0,6x_2 + 0,4(1 - x_2) = 0,6 \cdot 0,48 + 0,4 \cdot 0,52 = 0,496.$$

Logo, a probabilidade de Sheila ganhar a terceira partida é 0,496.

Problema 12. Cinco times de igual força disputarão todo ano um torneio. Uma taça será ganha pelo primeiro time que vencer três vezes consecutivas. Qual a probabilidade da taça não ser ganha nos quatro primeiros torneios?

Solução: Seja x_n a probabilidade de um time não ganhar a taça no n-ésimo torneio. A probabilidade de um time vencer um torneio é $\frac{1}{5}$ e de perder é $\frac{4}{5}$. Nenhum time ganhará a taça nem no primeiro nem no segundo torneio. Logo, $x_1 = x_2 = 1$.
Qualquer time pode ganhar o primeiro torneio. Se o segundo torneio for ganho por um time diferente do que ganhou o primeiro, basta que a partir daí nenhum time ganhe três vezes consecutivas. Se o segundo torneio for ganho pelo mesmo time que ganhou o primeiro, o terceiro torneio terá que ser ganho por um time diferente e partir daí nenhum time poderá ganhar três vezes consecutivas. Assim,

$$x_{n+2} = \frac{4}{5}x_{n+1} + \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5}x_n, \quad x_1 = x_2 = 1.$$

Segue que,

$$x_3 = \frac{4}{5}x_2 + \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5}x_1 = \frac{4}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{24}{25}.$$

E,

$$x_4 = \frac{4}{5}x_3 + \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5}x_2 = \frac{4}{5} \cdot \frac{24}{25} + \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{116}{125}.$$

Logo, a probabilidade da taça não ser ganha nos quatro primeiros torneios é $\frac{116}{125} = 0,928$.

Problema 13. Henrique vai emprestar dinheiro a Mário por quatro meses e pretende receber juros compostos de 12% ao mês. Como Mário só pretende pagar juros simples, qual a taxa mensal de juros simples que Henrique deve cobrar?

Solução: Seja C o valor emprestado. O regime de juros compostos se comporta como uma P.G. de razão $1+i$, onde i é a taxa de juros compostos por período de tempo. Já o regime de juros simples se comporta como uma P.A. de razão $\bar{i}C$, onde $\bar{i}$ é a taxa de juros simples por período de tempo. Os montantes são

$$\textit{Juros Compostos}: M_0 = C,\ M_1 = C(1+i),\ M_2 = C(1+i)^2,\ M_3 = C(1+i)^3,$$

$$M_4 = C(1+i)^4.$$

$$\textit{Juros Simples}: \overline{M}_0 = C,\ \overline{M}_1 = C + \bar{i}C,\ \overline{M}_2 = C + 2\bar{i}C,\ \overline{M}_3 = C + 3\bar{i}C,$$

$$\overline{M}_4 = C + 4\bar{i}C.$$

Desta forma, teremos

$$M_4 = \overline{M}_4$$

$$C(1+i)^4 = C + 4\bar{i}C$$

$$(1+0,12)^4 = 1 + 4\bar{i}$$

$$\bar{i} = \frac{1,12^4 - 1}{4}$$

$$\bar{i} = \frac{1,12^4 - 1}{4}$$

$$\bar{i} = 0,1433 = 14,33\%$$

Problema 14. Uma lanterna de Gol, original, custa $R\$$ 280,00 e tem vida útil de 5 anos. Uma lanterna alternativa custa $R\$$ 70,00 e tem vida útil de 1 ano. Gilmar precisa trocar a lanterna de seu Gol. Considerando que o dinheiro vale 12% ao ano, que lanterna ele deve preferir?

Solução: Gilmar tem duas opções:

(i) Pagar $R\$$ 280,00 por um período de 5 anos;

(ii) Pagar $R\$$ 70,00 a cada ano.

Veja o esquema abaixo:

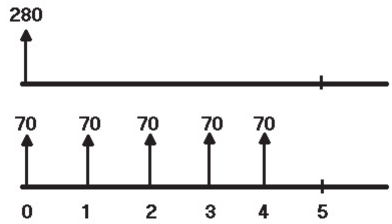

Figura 10: Custos por período de tempo.

Fonte: Elaborada pela autora.

Vamos encontrar um valor equivalente à soma das cinco "parcelas" na data 0, na opção (ii), em seguida comparamos com a opção (i). Sabendo que o dinheiro vale 12% ao ano temos o valor equivalente

$$70 + 70 \cdot \frac{1}{1+0,12} + 70 \cdot \frac{1}{(1+0,12)^2} + 70 \cdot \frac{1}{(1+0,12)^3} + 70 \cdot \frac{1}{(1+0,12)^4} = 282,61$$

Logo, é melhor comprar a lanterna original.

Problema 15. Calcular a área sob o gráfico da parábola $f(x) = x^2$ de $x = 0$ até $x = 1$.

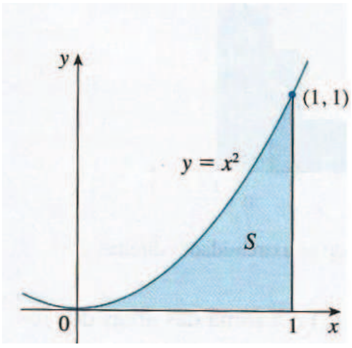

Figura 11: Parábola $y = x^2$.
Fonte: Stewart (2013).

Solução: Dividimos o intervalo $[0, 1]$ em n subintervalos todos com mesma largura $\frac{1}{n}$ e consideramos R_n a soma das áreas dos n retângulos, com base em cada subintervalo e altura no i-ésimo subintervalo $f(\frac{i}{n}) = (\frac{i}{n})^2$, $i = 1, 2, 3, ..., n$. Veja figura abaixo:

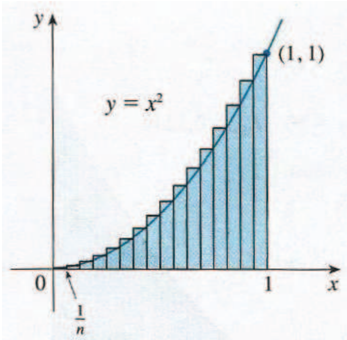

Figura 12: Aproximação por retângulos.
Fonte: Stewart (2013).

Assim,

$$\begin{aligned} R_n &= \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{3}{n}\right)^2 + ... + \frac{1}{n}\left(\frac{n}{n}\right)^2 \\ &= \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n^2}(1^2+2^2+3^2+...+n^2) \\ &= \frac{1}{n^3}(1^2+2^2+3^2+...+n^2) \\ &= \frac{1}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} \end{aligned}$$

Logo, a área que procuramos é o valor da série

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2 = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2 = \lim_{n\to\infty} R_n$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{2n+1}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{2}{n}\right) = \frac{1}{6}\cdot 1\cdot 2 = \frac{1}{3}$$

Problema 16. Calcular a área sob o gráfico da cúbica $f(x) = x^3$ de $x = 0$ até $x = 1$.

Solução:

O gráfico se comporta da seguinte forma:

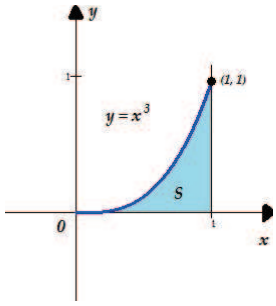

Figura 13: Cúbica $y = x^3$.
Fonte: Elaborada pela autora.

Dividimos o intervalo $[0, 1]$ em n subintervalos todos com mesma largura $\frac{1}{n}$ e consideramos R_n a soma das áreas dos n retângulos, com base em cada subintervalo e altura no i-ésimo subintervalo $f(\dfrac{i}{n}) = (\dfrac{i}{n})^3$, $i = 1, 2, 3, ..., n$. Veja figura abaixo:

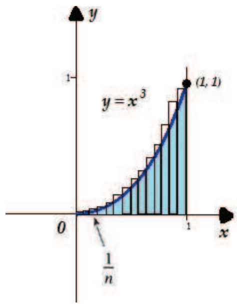

Figura 14: Aproximação por retângulos.
Fonte: Elaborada pela autora.

Assim,

$$\begin{aligned} R_n &= \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^3 + \frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^3 + \frac{1}{n}\left(\frac{3}{n}\right)^3 + ... + \frac{1}{n}\left(\frac{n}{n}\right)^3 \\ &= \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n^3}(1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3) \\ &= \frac{1}{n^4}(1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3) \\ &= \frac{1}{n^4}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 = \left[\frac{n(n+1)}{2n^2}\right]^2 \\ &= \frac{1}{4}\left[\frac{n+1}{n}\right]^2 = \frac{1}{4}\left[1 + \frac{1}{n}\right]^2 \end{aligned}$$

Logo, a área que procuramos é o valor da série

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{i}{n}\right)^3 = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\left(\frac{i}{n}\right)^3 = \lim_{n\to\infty} R_n$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4}\left[1+\frac{1}{n}\right]^2 = \frac{1}{4}$$

Problema 17. A curva de Koch é obtida em estágios pelo seguinte processo:

i) No estágio 0, ela é um triângulo equilátero de lado l;

i) O estágio $n+1$ é obtido a partir do estágio n, dividindo cada lado em três partes iguais, construindo externamente sobre a parte central um triângulo equilátero e suprimindo, então, a parte central (ver figura a seguir). Sendo P_n e A_n, respectivamente, o perímetro e a área do n-ésimo estágio da curva de Koch, determine:

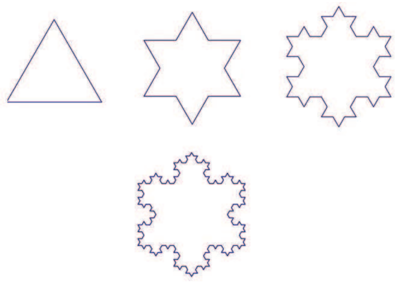

Figura 15: A curva de Koch.
Fonte: Lima (2006).

a) P_n

b) $\lim P_n$

c) A_n

d) $\lim A_n$

Solução: Para o item responder o item "a " note que o número de segmentos no estágio n, N_n, é dado pela seguinte sequência:

$$N_0 = 3,\ N_1 = 12,\ N_2 = 48,\ N_3 = 192, ...$$

o que é uma progressão geométrica de razão 4, pois cada lado de uma etapa origina 4 lados na etapa seguinte. Portanto,

$$N_n = 3 \cdot 4^n.$$

O comprimento de cada segmento no estágio n, L_n, é dado pela seguinte sequência:

$$L_0 = l,\ L_1 = \frac{l}{3},\ L_2 = \frac{l}{9},\ L_3 = \frac{l}{27}, ...$$

o que é uma progressão geométrica de razão $\dfrac{1}{3}$, pois cada lado de uma etapa tem $\dfrac{1}{3}$ do comprimento de cada lado na etapa anterior. Portanto,

$$L_n = \frac{l}{3^n}.$$

Então, obtemos o perímetro no estágio n:

$$P_n = N_n \cdot L_n = 3l\left(\frac{4}{3}\right)^n.$$

Para o item “b” temos,

$$\lim P_n = \lim 3l\left(\frac{4}{3}\right)^n = +\infty.$$

Para responder o item “c” considere T_n^+, o número de triângulos acrescentados no estágio n em relação ao anterior, a partir do primeiro $(n \geqslant 1)$. Temos então

$$T_1^+ = 3,\ T_2^+ = 12,\ T_3^+ = 48, ...$$

uma progressão geométrica de razão 4, pois cada lado de uma etapa dá origem a um novo triângulo na etapa seguinte, mas sabemos que cada lado de uma etapa origina 4 lados na etapa seguinte, portanto a cada 4 lados temos um novo triângulo e daí,

$$\begin{array}{c} 4 \text{ lados} \longrightarrow 1 \text{ novo triângulo} \\ 3 \cdot 4^n \longrightarrow T_n^+ \text{ novos triângulos} \end{array}$$

Concluimos que

$$T_n^+ = 3 \cdot 4^{n-1}.$$

Quanto a área no estágio n temos

$$A_0 = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}.$$

Chamando a área acrescentada até o estágio n de A_n^+, teremos

$$A_n = A_0 + A_n^+.$$

A área acrescida no estágio n é dado pelo produto de T_n^+ pela área de cada triângulo. Cada triângulo tem lado $\dfrac{l}{3^n}$. Logo,

$$T_n^+ \cdot \frac{\left(\frac{l}{3^n}\right)^2 \sqrt{3}}{4} = T_n^+ \cdot \frac{l^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{9^n} =$$

$$= 3 \cdot 4^{n-1} \cdot \frac{l^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{9^n} =$$

$$= \frac{3l^2\sqrt{3}}{36} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}.$$

Então a área acrescida até o estágio n é dado pela soma das áreas acrescidas em cada estágio, até o estágio n, ou seja,

$$A_n^+ = \sum_{i=1}^{n} \frac{3l^2\sqrt{3}}{36} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{i-1}$$

$$A_n^+ = \frac{3l^2\sqrt{3}}{36} \cdot \frac{1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n}{1 - \frac{4}{9}}$$

$$A_n^+ = \frac{3l^2\sqrt{3}}{20} - \frac{3l^2\sqrt{3}}{20} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^n.$$

Portanto,

$$A_n = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} + \frac{3l^2\sqrt{3}}{20} - \frac{3l^2\sqrt{3}}{20} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^n$$

$$A_n = l^2\left[\frac{2\sqrt{3}}{5} - \frac{3\sqrt{3}}{20} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^n\right].$$

Note que o resultado encontrado é a soma parcial da série

$$\frac{l^2\sqrt{3}}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3l^2\sqrt{3}}{36} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}.$$

Por fim, o item "d" é dado por

$$\lim A_n = \lim l^2\left[\frac{2\sqrt{3}}{5} - \frac{3\sqrt{3}}{20} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^n\right]$$

$$\lim A_n = \frac{2\sqrt{3}}{5} l^2$$

4 Considerações Finais

Este trabalho apresentou uma proposta de abordagem dos conteúdos de sequências e séries de números reais para o 1º ano do ensino médio mostrando suas aplicações por meio de questões cujas resoluções foram feitas utilizando raciocínios embasados no comportamento das sequências e séries de números reais. As questões abordam sequências e séries diversas, e não apenas progressões aritméticas e geométricas, com o intuito de estimular os alunos a associar esses conteúdos com a vida cotidiana.

Essas aplicações possibilitam a explanação desses assuntos no ensino médio, mas a abordagem deve ser feita de acordo com a concepção do docente e com os objetivos estabelecidos para os alunos. Deseja-se que esta proposta possa servir como fonte de pesquisa para os professores que tenham interesse pelo tema.

Apresentou-se também uma análise da abordagem de alguns livros didáticos utilizados no ensino médio, bem como um roteiro de explanação dos conteúdos.Com esse tipo de abordagem, acredita-se que os discentes poderão resolver exercícios variados, poderão desenvolver a capacidade de pensamento e interpretação dos problemas e tirar suas conclusões além de se tornarem mais aptos a resolver outros tipos de questões.

Assim, almeja-se que ocorra o verdadeiro aprendizado, por meio do estudo das definições e propriedades gerais, sob a orientação do professor, para que o discente explore os conceitos, reflita o que foi estudado e tenha autonomia para resolver questões diversas sobre esses conteúdos, interiorizando as ideias sem que os alunos precisem classificar sequências e séries para aplicar fórmulas decoradas.

Referências

[1] ______________. **Aula 03 - Sequencias**. Disponível em: <http://poti.impa.br/upload/Aula%2003%20-%20Sequencias.pdf>. Acesso em: 16 dez 2015.

[2] ______________. **bancoquestoes_27questoes_20150826_095336**. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/banco_questoes.do>. Acesso em: 16 dez 2015.

[3] ______________. **Base Nacional Comum Curricular**. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/#/site/inicio>. Acesso em: 09 dez 2015.

[4] ______________. **Queda Livre Vertical**. Disponível em: <http://fisicaevestibular.com.br/novo/mecanica/cinematica/queda-livre-vertical/>. Acesso em: 16 dez 2015.

[5] ______________. **Serie**. Disponível em: <http://www.mat.ufpb.br/milton/disciplinas/seriesedo/Serie.pdf>. Acesso em: 20 jan 2016.

[6] ______________. **Harmonicos**. Disponível em: <http://www.dirsom.com.br/index_htm_files/Harmonicos.pdf>. Acesso em: 20 jan 2016.

[7] BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática**. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998.

[8] CUNHA, João Francisco Everton. **Sequências e Séries: abordagem e aplicações no ensino médio**. Disponível em: <http://www.profmat-sbm.org.br/dissertacoes?polo=UFMA&titulo=&aluno=>. Acesso em: 20 jan 2016.

[9] DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: Contexto & Aplicações Volume 1**. 2ª ed. São Paulo: Ática, 2013.

[10] DOMINGUES, Hygino H. **Fundamentos de aritmética**. 1ª ed. São Paulo: Atual, 1991.

[11] FIGUEIREDO, Djairo Guedes de. **Análise I**. 2ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 1996.

[12] GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um Curso de Cálculo Volume 4**. 5ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 2013.

[13] IEZZI, Gelson *et al.* **Matemática: Ciência e Aplicações Volume 1**. 7ª ed. São Paulo: Saraiva, 2013.

[14] LIMA, Elon Lages. **Curso de Análise Volume 1**. 7ª ed. Rio de Janeiro: IMPA, 1976.

[15] LIMA, Elon Lages *et al.* **A Matemática do Ensino Médio Volume 2**. 6ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[16] MORGADO, Augusto César; CARVALHO, Paulo César Pinto. **Matemática Discreta**. 1ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[17] NETO, Antonio Caminha Muniz. **Fundamentos de Cálculo**. 1ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2015.

[18] PAIVA, Manoel. **Matemática: Volume 1**. 2ª ed. São Paulo: Moderna, 2013.

[19] SANTANA, José Rogério. NETO, Herminio Borges. ROCHA, Elizabeth Matos. **A sequência fedathi: uma proposta de mediação pedagógica no ensino de matemática**. Disponível em: <http://www.sbembrasil.org.br/files/viii/pdf/07/MC15472834830.pdf>. Acesso em: 20 mar 2016.

[20] SANTOS, Maria Jose Costa dos. LIMA, Ivoneide Pinheiro de. NETO, Herminio Borges. **A sequência fedathi: concepções e princípios para uso no ensino de matemática**. Disponível em: <http://www.cibem7.semur.edu.uy/7/actas/pdfs/348.pdf>. Acesso em: 20 mar 2016.

[21] SOUZA, Joamir Roberto de. **Novo Olhar: Matemática Volume 1**. 2ª ed. São Paulo: FTD, 2013.

[22] STEWART, James. **Cálculo Volume 1**. São Paulo: Cengage learning, 2013.