André Luís Novaes

Geometria analítica e vetores: uma proposta para melhoria do ensino da geometria espacial.

CAMPINAS
2015

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística
e Computação Científica

ANDRÉ LUIS NOVAES

GEOMETRIA ANALÍTICA E VETORES: UMA PROPOSTA PARA MELHORIA DO ENSINO DA GEOMETRIA ESPACIAL.

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre.

Orientador: Roberto Andreani

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO DEFENDIDA PELO ALUNO ANDRÉ LUIS NOVAES, E ORIENTADA PELO PROF. DR. ROBERTO ANDREANI.

Assinatura do Orientador

CAMPINAS
2015

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

N856g
Novaes, André Luís, 1981-
Geometria analítica e vetores : uma proposta para melhoria do ensino da geometria espacial / André Luís Novaes. – Campinas, SP : [s.n.], 2015.

Orientador: Roberto Andreani.
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Vetores. 2. Geometria analítica. 3. Educação matemática. I. Andreani, Roberto,1961-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Analytical geometry and vectors : a proposal to improve the teaching of spatial geometry
Palavras-chave em inglês:
Vectors
Analytical geometry
Mathematics education
Área de concentração: Matemática em Rede Nacional
Titulação: Mestre
Banca examinadora:
Roberto Andreani [Orientador]
Pedro José Catuogno
Valeriano Antunes de Oliveira
Data de defesa: 08-05-2015
Programa de Pós-Graduação: Matemática em Rede Nacional

Dissertação de Mestrado Profissional defendida em 08 de maio de 2015 e aprovada Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof.(a). Dr(a). ROBERTO ANDREANI

Prof.(a). Dr(a). PEDRO JOSÉ CATUOGNO

Prof.(a). Dr(a). VALERIANO ANTUNES DE OLIVEIRA

Abstract

The objective of this thesis is to introduce the definitions and basic concepts about vectors on R^2 and R^3 in basic education with properties, operations though this knowledge explain with many examples and applications how this thesis simplifies the understanding the proposed activities in this part of mathematics teaching. Besides studying jointly algebra and geometric starting from a geometric point, finding your equation and then finding your geometric place. This two aspects are reciprocal from the fundamental principle of analytic geometry studied on a large scale by Descartes and Fermat, two of the biggest mathematicians who have made a great and important contribution to mathematics.

With the introduction of vectors in mathematics education can assist and enrich the studies for these final years, and moreover, we have a contribution on passing the plan for the space, qualifying the teaching of spatial geometry and working jointly with the themes that are already currently covered.

Keywords: Vectors, Analytical Geometry, Mathematics Education

Resumo

Esta dissertação tem por objetivo introduzir as definições e os conceitos básicos sobre vetores no $\mathbb{R}^2$ e no $\mathbb{R}^3$ no ensino básico, junto com as propriedades e operações e através deste conhecimento mostrar, com vários exemplos e aplicações, como isto simplifica e facilita o entendimento das atividades propostas nesta parte da educação matemática. Além disso estudar de forma conjunta a álgebra e a geometria, partindo de um lugar geométrico e então encontrando sua equação ou partindo de uma equação e então encontrando o lugar geométrico, esses que são os dois aspectos recíprocos do princípio fundamental da geometria analítica estudada em grande escala por Descartes e Fermat, dois dos grandes matemáticos que deram uma grande e significativa contribuição à matemática.

Com a introdução de vetores para este ensino na educação matemática, pode-se auxiliar e enriquecer os estudos para estes anos finais, além disso, temos uma contribuição na passagem do plano para o espaço qualificando o ensino da geometria espacial, trabalhando de forma conjunta com os temas que já são abordados atualmente.

Palavras-chave: Vetores, Geometria Analítica, Educação Matemática.

Sumário

Aos meus familiares, pelo carinho e apoio a mim dedicados.

Agradecimentos

Aos professores do Imecc pelos valiosos ensinamentos. Em especial ao meu orientador - Prof.Dr. Roberto Andreani, pela orientação competente e estímulo.

Aos amigos da turma, pelos ricos momentos vividos na Unicamp.

Ao aluno do Imecc, Charles Henrique Martins Sobrinho, por todo apoio na formatação do texto.

A CAPES pelo incentivo financeiro e pela efetiva ação para melhoria do ensino.

Lista de Ilustrações

Capítulo 1

Introdução

Conforme SECRETARIA [3], no primeiro ano do ensino médio estão propostos os seguintes temas relacionados com a geometria: Razões trigonométricas nos triângulos retângulos; Polígonos regulares: inscrição, circunscrição e pavimentação de superfícies; Resolução de triângulos não retângulos: Lei dos Senos e Lei dos Cossenos. Já no segundo ano temos: Elementos de geometria de posição; Poliedros, prismas e pirâmides; Cilindros, cones e esferas. Neste segundo ano os alunos iniciam os primeiros conceitos e propriedades sobre a geometria plana e espacial. No último ano estão propostos: Pontos: distância, ponto médio e alinhamento de três pontos; Reta: equação e estudo dos coeficientes; problemas lineares; Ponto e reta: distância; Circunferência: equação; Reta e circunferência: posições relativas; Cônicas: noções, equações, aplicações. Estes que são temas da geometria analítica.

Iniciamos este texto contando a história dos pioneiros da Geometria Analítica: Pierre de Fermat e René Descartes. Para contextualizar o trabalho desses personagens, outras obras e autores foram destacados. Em seguida, no terceiro capítulo, apresentamos os conceitos sobre o plano, o sistema ortogonal de coordenadas, distância entre dois pontos; de acordo com o currículo do Estado de São Paulo. Assim, após a introdução dos conceitos de vetores no plano, suas operações básicas, produto de um vetor por escalar e das propriedades - comutativa, elemento neutro ,adição/multiplicação, distributiva - mostramos algumas aplicações na Física e na Matemática.

No quarto capítulo, são apresentadas equações de retas nas suas distintas formas: paramétrica, cartesiana e reduzida. Utilizando os conceitos e operações com vetores, encontramos também o ângulo entre retas, a distância de um ponto a uma reta e entre duas retas paralelas no plano.

Já no quinto capítulo, introduzimos a definição de lugar geométrico. Essa definição vai nos ajudar na caracterização do círculo e das cônicas, objeto de estudo do sexto capítulo. Assim, são apresentadas as equações do círculo na forma reduzida e normal, como reconhecer um círculo, posições relativas entre ponto e círculo, entre reta e círculo e entre dois círculos.

Como dissemos, no sexto capítulo, as cônicas – elipse, parábola e hipérbole – são definidas como um lugar geométrico, com seus principais elementos e suas formas canônicas nas várias possibilidades, coincidentes ou transladados ou rotacionados em relação aos eixos ortogonais, vale notar que em todos os casos são dados como reconhecer a elipse, a hipébole e a parábola.

Por fim, alcançamos o sétimo capítulo; momento em que introduzimos um novo eixo ortogonal. Tudo o que foi estudado anteriormente será ampliado, ou seja, agora estaremos operando no espaço tridimensional. Assim, definimos a distância entre dois pontos e vetores no espaço. São definidas também, as equações cartesianas e paramétricas do plano, equações paramétricas da reta, ângulos entre retas e planos e distâncias de um ponto a um plano, um ponto a uma reta, entre dois planos e entre duas retas.

No último capítulo, reafirmamos nossa crença na melhoria do ensino de matemática.

Capítulo 2

História

Os homens do século XVII, educados na cultura renascentista, deixaram como legado sistemas de pensamento relativos a todos os aspectos da vida humana. Segundo WHITEHEAD[9], "esse foi o século que, consistentemente e em todas as esferas da atividade humana, proporcionou o gênio intelectual adequado à grandeza de suas circunstâncias."

Foi nessa ambiência, *culturalmente rica*, que René Descartes e Pierre de Fermat, trabalhando de forma independente, publicaram suas obras mais relevantes. Isto é, *A Geometria* e *Introdução aos Lugares Planos e Sólidos* , respectivamente de Descartes e Fermat. Nessas obras foram estabelecidas as bases da moderna Geometria Analítica.

Fermat e Descartes realizaram estudos simultâneos que constituem-se em fenômenos comuns na história da matemática. Neste mesmo século tivemos a descoberta de Desargues-Pascal da geometria projetiva e a descoberta de Pascal-Fermat da teoria da probabilidade. Outro exemplo de trabalhos conjuntos ocorreram no século XIX, também trabalhando de forma simultânea, tivemos a descoberta de Wessel, Argand e Gauss de uma interpretação das grandezas complexas; destacamos também as concepções de uma geometria não-euclidiana por Lobat-chevski e Gauss.

Os estudos de Descartes e Fermat buscavam significado para as operações da álgebra, bem confusas e complicadas para quem não é adepto ou interessado em tal assunto, através de interpretações geométricas. Buscaram a solução na álgebra, ou seja, fazendo com que problemas geométricos pudessem ser tratados através de manipulações algébricas.

Mas isso não é tão simples como parece, nem Descartes e nem Fermat perceberam o significado de suas descobertas pois, ambos estavam interessados na criação de uma geometria unificada. Descartes, do ponto de vista do filósofo e Fermat, do ponto de vista do matemático puro. Sendo assim eles não perceberam que estavam criando uma nova matemática, suas ideias era sistematizar a geometria dos antigos, foi um dos papéis que o século XVII desempenhou na história da matemática e dentro deste contexto histórico não podemos deixar de citar grandes obras e personagens importantes desta época, de acordo com EVES[4], tais como: John Napier com a invenção dos logartímos; Galileu Galilei que foi contra Aristóteles e a Igreja; Johan Kepler que estudou os movimentos dos planetas em torno do sol e formulou três leis do movimento planetário; Blaise Pascal com o famoso e mais conhecido triângulo de Pascal.

Por isso a importância da geometria analítica, ela tornou-se base para prova nos dois seguintes séculos nas áreas de cálculo, teoria das funções, mecânica e a física. E tamanho era seu poder que a geometria analítica não encontrou contradições e fez surgir muitos problemas novos e encontrar resultados impressionantes onde era aplicado de tal forma que se tornou uma ferramenta indispensável de investigação.

Capítulo 3

O plano

3.1 Sistema de coordenadas

Consideremos o plano xOy definido, conforme REIS [7], pelo par de retas orientadas x e y, perpendiculares entre si, como mostra a figura (3.1), x é o eixo horizontal e y é o eixo vertical. O ponto O de interseção entre as retas é a origem do sistema, tomemos OA igual a OB como sendo uma unidade de medida qualquer e seja P um ponto qualquer deste plano, a este ponto associamos o par coordenado (x, y) simplesmente traçando uma reta x' paralela a x e a reta y' paralela a y no qual observamos que estas retas se interceptam os eixos x e y, respectivamente, em P_x e P_y. A interseção destas retas determinam o ponto P. Os números x e y são chamados de abscissa e ordenada, respectivamente, de P e denotamos por $P = (x, y)$.

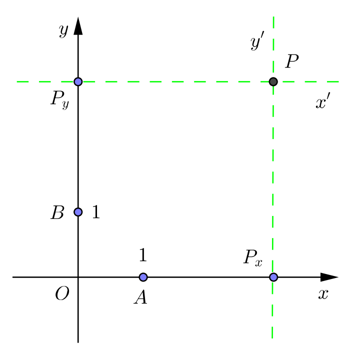

Figura 3.1: Eixos coordenadas

3.2 Distância entre dois pontos

Conforme BARBOSA [1], antes de encontrarmos tal distância, precisamos das seguintes definição e proposição:

Definição 3.1. Na reta da figura (3.2) a origem O faz-se corresponder o número 0 (zero);
A cada ponto $X \neq O$, sobre o eixo z corresponde o número real positivo $x = d(O, X)$;
O número real x que corresponde ao ponto X é denominado a coordenada do ponto X;

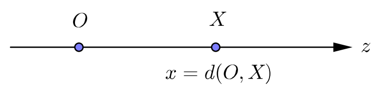

Figura 3.2: Coordenada do ponto X

Proposição 3.2. Se x e y são as coordenadas dos pontos X e Y sobre o eixo z, respectivamente, então:

$$d(X, Y) = |y - x|$$

Demonstração Podemos verificar facilmente para os casos $X = Y$ ou $X = O$ ou $Y = O$.

Suponha que X, Y e O são três pontos distintos e que $x < y$, assim temos três casos a considerar:

- Caso 1: $0 < x < y$.
- Caso 2: $x < y < 0$.
- Caso 3: $x < 0 < y$.

Vamos mostrar só o caso 1, os demais casos seguem de maneira análoga.
Neste caso temos que X está entre O e Y como na figura (3.3), assim:

$$d(O, Y) = d(O, X) + d(X, Y) \iff$$

$$y = x + d(X, Y) \iff$$

$$d(X, Y) = y - x = |y - x|$$

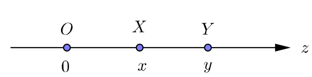

Figura 3.3: Caso 1: $0 < x < y$

Agora estamos em condições de encontrarmos a distância de dois pontos quaisquer no plano.

Sejam $P = (x_1, y_1)$ e $Q = (x_2, y_2)$ dois pontos no plano. Como mostra a figura (3.4), a partir de P e Q, podemos contruir um triângulo retângulo PSQ. Em termos de coordenadas de P e Q, as medidas dos catetos deste triângulo são $|x_1 - x_2|$ e $|y_1 - y_2|$. Logo a medida de sua hipotenusa é:

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Este número é chamado distância de P a Q e denotamos por $d(P, Q)$, ou seja:

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

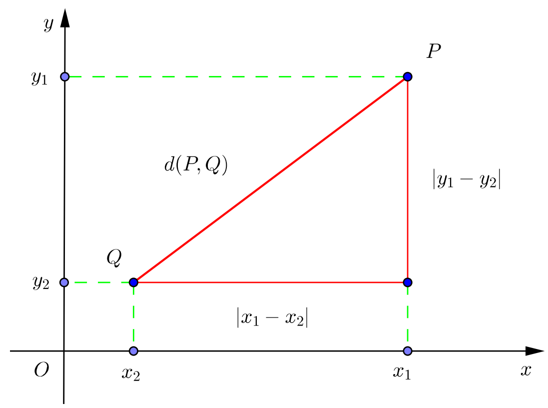

Figura 3.4: Distância entre P e Q

Exemplo 3.3. Calcule a distância do ponto $A = (1, -2)$ ao ponto $B = (-2, 3)$.

Solução: Temos,

$$d(A, B) = \sqrt{(1 - (-2))^2 + (-2 - 3)^2} = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34}$$

3.3 Vetores no plano

Vimos anteriormente, que a cada par coordenado (x, y), corresponde a um ponto, se (x', y') é diferente de (0, 0) podemos também fazer correspondência ao par (x', y') uma seta, como na figura (3.5), com dois extremos chamados ponto inicial ou origem e ponto final ou extremidade.

Geometricamente, vetores são representados por segmentos de retas orientados no plano ou espaço. Com isto podemos associar ao par (x, y) direção, sentido e módulo. A direção e sentido do segmento identifica a direção e o sentido do vetor e o módulo é o número,

$$\sqrt{x^2 + y^2}$$

que é o comprimento do segmento também chamado norma do vetor, se $\vec{v} = (x, y)$ denotamos por $||\vec{v}|| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

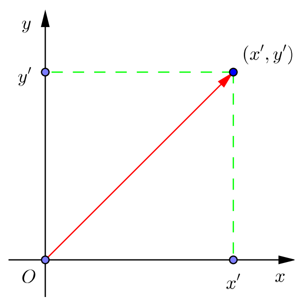

Figura 3.5: Vetor representado por uma seta

Exemplo 3.4. Pelo exposto, o par $(4, 3)$, é um vetor, isto é, $\vec{v} = (4, 3)$. A direção deste vetor é a direção da seta da figura (3.6), ou seja, é a direção da reta definida pelos pontos $O = (0, 0)$ e $P = (3, 4)$. O sentido de $\vec{v}$ é o de O para P. O módulo de $\vec{v}$ é o comprimento de OP que é 5.

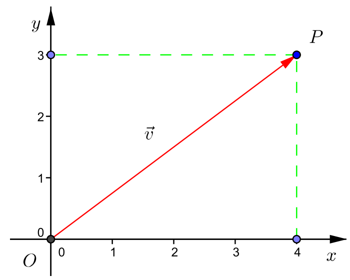

Figura 3.6: Vetor $\vec{v} = (4, 3)$

Inversamente, uma seta, como a da figura (3.7), pode se caracterizar por um par ordenado, através da trigonometria básica.

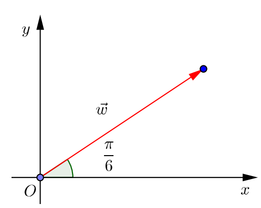

Figura 3.7: Vetor $\vec{w}$

Ao par $(0, 0)$ não associamos os conceitos de direção e sentido, contudo $(0, 0)$ é definido vetor nulo.

Existe o vetor representado por dois pontos $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$ como na figura (3.8), neste caso subtraímos as coordenadas correspondentes de B pelas coordenadas correspondentes de A. Logo:

$$\overrightarrow{AB} = (x_2, y_2) - (x_1, y_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

Se deslocarmos o vetor $\overrightarrow{AB}$ até a origem temos outro vetor com a mesma direção, sentido e módulo de $\overrightarrow{AB}$. Neste caso dizemos que os vetores são iguais.

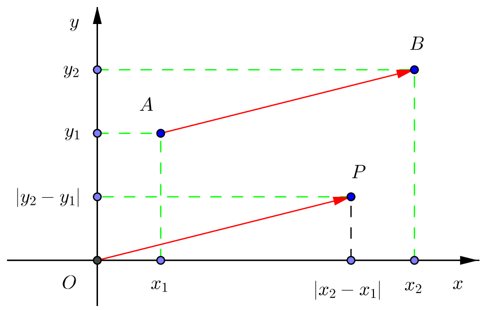

Figura 3.8: Vetores iguais

Exemplo 3.5. Dados $A = (2, 1)$, $B = (3, 4)$ e $O = (0, 0)$, determine o ponto P tal que $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{AB}$.

Solução: Seja $P = (x, y)$ e de acordo com o que foi dito acima temos,

$\overrightarrow{OP} = (x - 0, y - 0) = (x, y)$ e $\overrightarrow{AB} = (3 - 2, 4 - 1) = (1, 3)$, assim,

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{AB} \Longleftrightarrow (x, y) = (1, 3)$. Logo, $P = (1, 3)$.

3.4 Operações com vetores

3.4.1 Soma

Definição 3.6. Sejam $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$. Definimos:

$$\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

chamada adição de vetores.

A adição satisfaz as seguintes propriedades:

Sejam $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ vetores quaisquer, então:

(A1) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

(A2) $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$

(A3) $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$ onde $\vec{0} = (0, 0)$ é o vetor nulo.

As demonstrações destas propriedades seguem imediatamente das definições dadas.

Geometricamente a soma $\vec{u} + \vec{v}$ está na diagonal do paralelogramo, indicada na figura (3.9), determinado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$ na mesma origem.

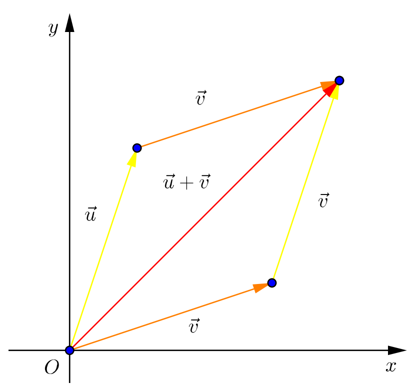

Figura 3.9: Vetor soma $\vec{u} + \vec{v}$

3.4.2 Produto de um vetor por um escalar

Definição 3.7. Sejam $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $k \in \mathbb{R}$. Definimos:

$$k \cdot \vec{u} = (k \cdot x_1, k \cdot y_1)$$

chamada multiplicação de um vetor por um número.

A multiplicação por escalar satisfaz as seguintes propriedades:

Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores quaisquer não nulos e $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$, então:

(M1) $k_1 \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = k_1 \cdot \vec{u} + k_1 \cdot \vec{v}$

(M2) $(k_1 + k_2) \cdot \vec{u} = k_1 \cdot \vec{u} + k_2 \cdot \vec{u}$

(M3) $k_1 \cdot (k_2 \cdot \vec{u}) = (k_1 \cdot k_2) \cdot \vec{u}$

(M4) $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$ e $0 \cdot \vec{u} = 0$

As demonstrações destas propriedades seguem imediatamente das definições dadas.

Geometricamente a multiplicação por escalar $k \cdot \vec{u}$, indicada na figura (3.10), é um vetor que tem a mesma direção e sentido de $\vec{u}$ se $k > 0$ e $\vec{u}$ diferente $(0, 0)$; mesma direção e sentido contrário de $\vec{u}$ se $k < 0$ e $\vec{u}$ diferente $(0, 0)$ e o vetor nulo caso contrário.

Dizemos que dois vetores não nulos são paralelos ou colineares se eles tem a mesma direção.

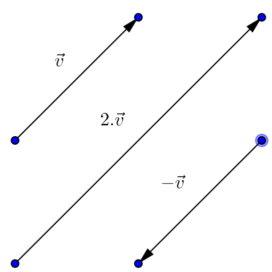

Figura 3.10: Multiplicação por escalar

Exemplo 3.8. Sejam $\vec{u} = (4, 1)$ e $\vec{v} = (-3, 2)$, determine:

(a) $\vec{w} = -\vec{u} - \vec{v}$;

(b) $\vec{w} = -2 \cdot \vec{u} + \vec{v}$;

(c) $\vec{w} = \dfrac{1}{2} \cdot \vec{u} + 2 \cdot \vec{v}$.

Solução: Temos,

(a) $\vec{w} = -\vec{u} - \vec{v} = -(4, 1) - (-3, 2) = (-4, -1) + (3, -2) = (-1, -3)$;

(b) $\vec{w} = -2 \cdot \vec{u} + \vec{v} = -2 \cdot (4, 1) + (-3, 2) = (-8, -2) + (-3, 2) = (-11, 0)$;

(c) $\vec{w} = \dfrac{1}{2} \cdot \vec{u} + 2 \cdot \vec{v} = \dfrac{1}{2} \cdot (4, 1) + 2 \cdot (-3, 2) = \left(2, \dfrac{1}{2}\right) + (-6, 4) = \left(-4, \dfrac{9}{2}\right)$.

3.5 Aplicações

3.5.1 Vetor deslocamento

Sejam P_1 e P_2 as posições do móvel nos instantes t_1 e t_2 respectivamente.
Define-se como vetor deslocamento, entre os instantes t_1 e t_2, o vetor:

$$\Delta \overrightarrow{r} = P_1 - P_2$$

e Δs o caminho feito de P_1 à P_2. Observe a figura (3.11) que $\Delta s \geq ||\Delta \overrightarrow{r}||$

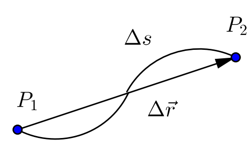

Figura 3.11: Vetor deslocamento

Exemplo 3.9. Um ciclista percorre 80 metros para o norte, em seguida orienta-se para o leste e percorre mais 60 metros. Sabendo disso calcule o módulo do deslocamento resultante do ciclista.

Solução: Veja a figura (3.12),

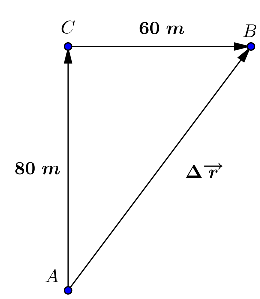

Figura 3.12: Deslocamento do ciclista

Aplicando o teorema de Pitágoras, temos:

$||\Delta\vec{r}||^2 = 80^2 + 60^2$

$||\Delta\vec{r}||^2 = 6400 + 3600$

$||\Delta\vec{r}|| = 100m$

Outra solução: Vamos resolver utilizando o conceito adquirido sobre vetores, de acordo com a figura (3.12), vamos escolher de forma conveniente um sistema de eixos ortogonais xOy com o ponto A na origem do sistema, desta forma sejam os vetores $\vec{v} = \overrightarrow{AC} = (0, 80)$, $\vec{u} = \overrightarrow{CB} = (60, 0)$ e $\vec{w} = \Delta\vec{r} = \vec{u} + \vec{v}$, assim temos:

$\vec{w} = \Delta\vec{r}$
$\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$
$\vec{w} = (60, 0) + (0, 80)$
$\vec{w} = (60, 80)$

Portanto,

$||\vec{w}|| = \sqrt{60^2 + 80^2}$
$||\vec{w}|| = \sqrt{3600 + 6400}$
$||\vec{w}|| = \sqrt{10000}$
$||\vec{w}|| = 100m$

3.5.2 Resultante

Seja uma partícula na qual estão aplicadas várias forças. Esse sistema de forças pode ser substituído por uma única força, a força resultante, que é capaz de produzir na partícula o mesmo efeito que todas as forças aplicadas.

$$\overrightarrow{F_R} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3} + ... + \overrightarrow{F_N}$$

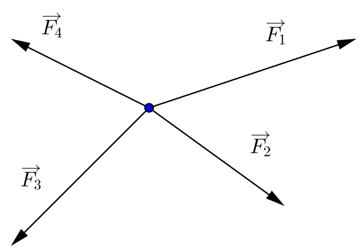

Figura 3.13: Sistema de forças

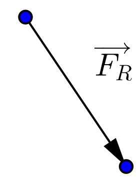

Figura 3.14: Força resultante

Exemplo 3.10. Duas forças, $\overrightarrow{F_1}$ e $\overrightarrow{F_2}$, de intensidade 4N e 3N respectivamente, atuam num mesmo ponto material, formando um ângulo de 60° entre si. Determine a intensidade da força resultante.

Solução: Para facilitar a notação vamos considerar que $F_R = ||\overrightarrow{F_R}||$. Veja a figura (3.15), aplicando a lei dos cossenos no triângulo ABC, a intensidade da força resultante será:

$$\overrightarrow{F_R} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}$$
$$F_R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \cos 120°}$$
$$F_R = \sqrt{4^2 + 3^2 - 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)}$$
$$F_R = \sqrt{16 + 9 + 12}$$
$$F_R \cong 6N$$

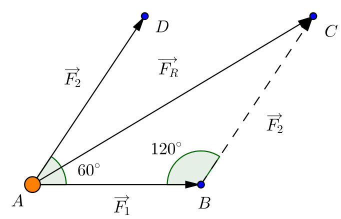

Figura 3.15: Exemplo 3.10

Outra solução: Vamos resolver utilizando o conceito adquirido sobre vetores, de acordo com a figura (3.15), vamos escolher de forma conveniente um sistema de eixos ortogonais xOy com o ponto A na origem do sistema e $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{F_1}$ sobre o eixo x, desta forma sejam os vetores $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (4, 0)$, $\vec{u} = \overrightarrow{AD} = \left(\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ e $\vec{w} = \overrightarrow{F_R} = \vec{u} + \vec{v}$, assim temos:

$$\vec{w} = \overrightarrow{F_R}$$
$$\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$$
$$\vec{w} = \left(\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) + (4, 0)$$
$$\vec{w} = \left(\frac{11}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$$

Portanto,

$$||\vec{w}|| = \sqrt{\left(\frac{11}{2}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$
$$||\vec{w}|| = \sqrt{\left(\frac{121}{4}\right) + \left(\frac{27}{4}\right)}$$
$$||\vec{w}|| = \sqrt{\left(\frac{148}{4}\right)}$$
$$||\vec{w}|| = \sqrt{37} \cong 6N$$

3.5.3 Base média do triângulo

Exemplo 3.11. Dado um triângulo ABC e sejam M e N os pontos médios de AC e BC, respectivamente. Vamos provar que MN é paralelo a AB e tem comprimento igual a metade do comprimento de AB.

Vamos provar que:

$$MN = \frac{1}{2} \cdot AB$$

.

Solução: Para facilitar a notação vamos considerar que $\overrightarrow{MN} = N - M$ ou seja, é a coordenada do ponto final menos a coordenada do ponto inicial. Para isso observe a figura (3.16).

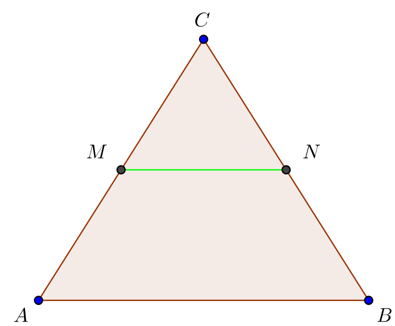

Figura 3.16: $MN = \frac{1}{2} \cdot AB$

A partir da figura (3.16) acima temos que:

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CN}$$

Como M é ponto médio de AC e N é ponto médio de BC, então:

$$\overrightarrow{MC} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AC}$$

e

$$\overrightarrow{CN} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{CB}$$

Logo,

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{CB} = \frac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}\right) = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB}$$

3.5.4 Vetor unitário

Se $\vec{v} = (v_1, v_2)$ e α é um escalar, então da definição da multiplicação de vetor por escalar e da norma de um vetor segue-se que

$$||\alpha \cdot \vec{v}|| = ||(\alpha \cdot v_1, \alpha \cdot v_2)|| = \sqrt{(\alpha \cdot v_1)^2 + (\alpha \cdot v_2)^2} = \sqrt{\alpha^2(v_1^2 + v_2^2)},$$

ou seja,

$$||\alpha \cdot \vec{v}|| = |\alpha| \cdot ||\vec{v}|| \tag{3.1}$$

Dado um vetor $\vec{v}$ não nulo, o vetor:

$$\vec{u} = \left(\frac{1}{||\vec{v}||}\right)\vec{v}$$

é um vetor unitário na direção de $\vec{v}$, pois por (3.1), temos que:

$$||\vec{u}|| = \left|\frac{1}{||\vec{v}||}\right| ||\vec{v}|| = 1$$

Exemplo 3.12. Um vetor unitário na direção do vetor $\vec{v} = (1, -2)$ é o vetor:

Solução:

$$\vec{u} = \left(\frac{1}{||\vec{v}||}\right)\vec{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)(1, -2) = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}}\right).$$

3.6 Produto escalar

Definição 3.13. O produto escalar de dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é definido por:

$$< \vec{u}, \vec{v} >= \begin{cases} 0 & \text{se } \ \vec{u} = (0,0) \ \text{ e } \ \vec{v} = (0,0), \\ ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}|| cos\theta & \text{se } \ \vec{u} \neq (0,0) \ \text{ e } \ \vec{v} \neq (0,0). \end{cases}$$

em que θ é o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Para facilitar a notação vamos considerar que $< \vec{u}, \vec{v} >= \vec{u} \cdot \vec{v}$

Proposição 3.14. Dois vetores são perpendiculares se e somente se, o seu produto escalar é zero:

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

Demonstração. Se $\vec{u} = (0,0)$ ou $\vec{v} = (0,0)$, então $\vec{u} \perp \vec{u}$ e, também,
$\vec{u} \cdot \vec{u} = 0$.
Sejam $\vec{u} \neq (0,0)$, $\vec{v} \neq (0,0)$ e θ o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$, então:
$\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}|| cos\theta = 0 \Leftrightarrow cos\theta = 0 \Leftrightarrow \theta = 90°$

Definição 3.15. Vamos definir o produto escalar de dois vetores $\vec{u} = (u_1, u_2)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2)$ em termos de suas coordenadas , para isso vamos utilizar a proposição (3.14), ou seja:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$$

Para isso observe a figura (3.17).

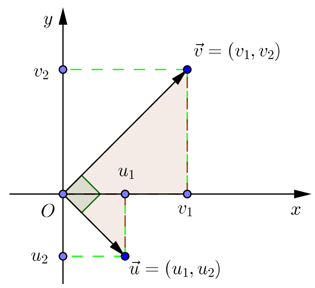

Figura 3.17: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$

A partir da figura (3.17) temos que os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, construidos de maneira conveniente perpendiculares entre si, formando dois triângulos retângulos que são semelhantes, daí tiramos a seguinte relação:

$\dfrac{v_1}{v_2} = -\dfrac{(-u_2)}{u_1} \Rightarrow v_1 \cdot u_1 + u_2 \cdot v_2 = 0$ portanto,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = v_1 \cdot u_1 + u_2 \cdot v_2$$

Note que a definição é válida para o vetor nulo.

Decorrem imediatamente da definição as seguintes propriedades do produto escalar:

Sejam $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ vetores e $k \in \mathbb{R}$ um escalar, temos:

1) $\vec{u} \cdot \vec{u} = ||\vec{u}||^2$;

2) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$;

3) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$;

4) $k \cdot (\vec{u} \cdot \vec{v}) = \vec{u} \cdot (k \cdot \vec{v}) = k \cdot (\vec{u} \cdot \vec{v})$

As demonstrações destas propriedades seguem imediatamente das definições dadas.

Exemplo 3.16. Determine $x \in \mathbb{R}$ para que o produto escalar dos vetores $\vec{u} = (8, -6)$ e $\vec{v} = (x, 1)$ seja igual a 10.

Solução: Temos:

$$10 = \vec{u} \cdot \vec{v} = 8 \cdot x - 6 \cdot 1 \Leftrightarrow 16 = 8x \Leftrightarrow x = 2.$$

3.7 Ângulo entre vetores

Definição 3.17. Se $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são vetores não nulos do plano e θ o ângulo entre eles, então:

$$cos(\theta) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{||\vec{v}|| \cdot ||\vec{w}||}$$

No qual temos três possibilidades:

a) θ é agudo ($\theta < 90°$) se, e somente se, $\vec{v} \cdot \vec{w} \quad > 0$, figura (3.18).

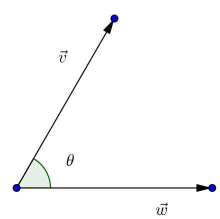

Figura 3.18: Ângulo agudo entre dois vetores.

b) θ é reto ($\theta = 90°$) se, e somente se, $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$, figura (3.19).

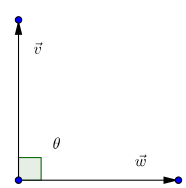

Figura 3.19: Ângulo reto entre dois vetores

c) θ é obtuso ($90° < \theta < 180°$) se, e somente se, $\vec{v} \cdot \vec{w} < 0$, figura (3.20).

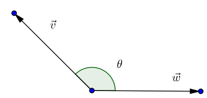

Figura 3.20: Ângulo obtuso entre dois vetores

Exemplo 3.18. De acorco com o caso (b) determine o valor de $x \in \mathbb{R}$ para que $\vec{u} = (x, 3)$ e $\vec{v} = (-5, 2)$ sejam perpendiculares.

Solução: Temos que:

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow x \cdot (-5) + 3 \cdot 2 = 0 \Leftrightarrow -5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{6}{5}$$

3.8 Projeção de vetores

Dados dois vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$ a projeção ortogonal de $\vec{v}$ sobre $\vec{w}$ denotada por

$$proj_{\vec{w}}\vec{v}$$

é o vetor que é paralelo a $\vec{w}$ tal que $\vec{v} - proj_{\vec{w}}\vec{v}$ seja ortogonal a $\vec{w}$, como na figura (3.21).

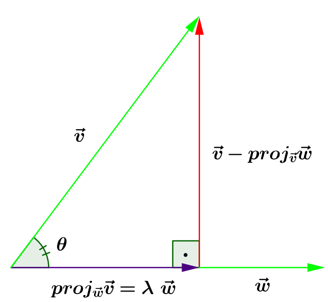

Figura 3.21: Projeção ortogonal de $\vec{v}$ em $\vec{w}$

Proposição 3.19. Seja $\vec{w}$ um vetor não nulo. Então, a projecção ortogonal de um vetor $\vec{v}$ em $\vec{w}$ é dada por:

$$proj_{\vec{w}}\vec{v} = \left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{||\vec{w}||^2}\right) w$$

Demonstração. Sejam $\vec{v_1} = proj_{\vec{w}}\vec{v}$ e $\vec{v_2} = \vec{v} - proj_{\vec{w}}\vec{v}$. Como $\vec{v_1}$ é paralelo a $\vec{w}$, então:

$$\vec{v_1} = \alpha \cdot \vec{w} \tag{3.2}$$

Assim,

$$\vec{v_2} = \vec{v} - \alpha \cdot \vec{w}$$

Multiplicando $\vec{v_2}$ por $\vec{w}$ e usando as propriedades do produto escalar, seção 2.6, obtemos:

$$\vec{w}\cdot\vec{v_2} = (\vec{v} - \alpha\cdot\vec{w})\vec{w} = \vec{v}\cdot\vec{w} - \alpha||\vec{w}||^2 \tag{3.3}$$

Mas, $\vec{v_2}$ é ortogonal a $\vec{w}$, então $\vec{v_2}\cdot\vec{w} = 0$. Portanto, de (3.3) obtemos:

$$\alpha = \frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{||\vec{w}||^2}$$

Substituindo este valor de a na equação (3.2) segue-se o resultado.

Exemplo 3.20. Determine a projeção do vetor $\vec{v} = (1,2)$ na direção do vetor $\vec{w} = (2,3)$.

Solução: Temos que:

$$proj_{\vec{w}}\vec{v} = \left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{||\vec{w}||^2}\right)\vec{w} = \left(\frac{1\cdot 2 + 2\cdot 3}{2^2+3^2}\right)(2,3) = \left(\frac{8}{13}\right)(2,3) = \left(\frac{16}{13}, \frac{24}{13}\right)$$

Capítulo 4

A reta

4.1 Equações paramétricas da reta

4.1.1 Reta r que passa pelos pontos A e B

Conforme ELON[6], seja r a reta que passa pelos pontos A e B e seja P um ponto do plano. Assim, um ponto $P = (x, y)$ pertence à reta r se, e somente se, existe $t \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\overrightarrow{AP} = t \cdot \overrightarrow{AB}$$

Onde t é chamado de parâmetro.

Podemos escrever a equação que determina o ponto P em função do parâmetro t, para isso basta utilizarmos o método algébrico, assim temos:

$$\overrightarrow{AP} = t \cdot \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow P - A = t \cdot \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow P = A + t \cdot \overrightarrow{AB}$$

Esta é a equação paramétrica da reta.

Colocando a equação em coordenadas, temos:

Se $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ e $P = (x, y)$ são coordenadas dos pontos no plano, então:

$P = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \Leftrightarrow (x, y) = (x_1, y_1) + t \cdot (x_2 - x_1, y_2 - y_1), t \in \mathbb{R}$

Essa equação é equivalente ao sistema de equações abaixo,

$$r : \begin{cases} x = x_1 + t \cdot (x_2 - x_1) \\ y = y_1 + t \cdot (y_2 - y_1) \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

Essas são as equações paramétricas da reta.

Exemplo 4.1. Considere os pontos $A = (1, 2)$ e $B = (2, 4)$

(a) Determine a equação paramétrica da reta r que passa pelos pontos A e B.

(b) Encontre o ponto $P \in r$ associado ao parâmetro 2.

(c) Os pontos $Q = (1, 3)$ e $R = (4, 8)$ pertencem à reta r?

Solução:

(a) Como $\overrightarrow{AB} = (1,2)$,

$P = (x,y) \in \mathbb{R}^2 \Leftrightarrow (x,y) = (1,2) + t(1,2) \Leftrightarrow (x,y) = (1+t, 2+2t), t \in \mathbb{R}$

Portanto, as equações paramétricas de r são:

$r : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$

(b) Para encontrarmos o ponto P associado ao parâmetro $t = 2$, basta substituir o valor de t nas equações paramétricas de r encontradas no item anterior: $x = 1 + 2 = 3$ e $y = 2 + 2 \cdot 2 = 6$. Logo, $P = (3,6)$.

(c) O ponto $Q = (1,3) \in r$ se, e somente se, existe $t \in \mathbb{R}$ tal que:

$r : \begin{cases} 1 = 1 + t \\ 3 = 2 + 2t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$

Da primeira equação obtemos $t = 0$. Substituindo o valor de t na segunda equação obtemos $3 = 2 + 2 \cdot 0 \Leftrightarrow 3 = 2$, que é impossível. Logo, não existe um parâmetro que determine o ponto Q, ou seja, $Q \notin r$.

Analogamente, o ponto $R = (4,8) \in r$ se, e somente se, existe $t \in \mathbb{R}$ tal que:

$r : \begin{cases} 4 = 1 + t \\ 8 = 2 + 2t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$

Da primeira equação obtemos $t = 3$, que satisfaz também a segunda equação. Portanto, $R \in r$.

4.1.2 Reta r que passa pelo ponto A e é paralela ao vetor

Antes temos a seguinte definição.

Definição 4.2. Dizemos que um vetor $\vec{v} \neq \vec{0}$ é paralelo a uma reta r quando, para quaisquer dois pontos $A, B \in r$, o vetor $\overrightarrow{AB}$ é múltiplo do vetor $\vec{v}$. Nesse caso, escrevemos $\vec{v} \parallel r$.

Um vetor $\vec{v}$ paralelo a uma reta r é chamado vetor direção de r.

Se r é a reta que passa pelo ponto A e tem direção $\vec{v} \neq \vec{0}$, temos:
$P \in r \Leftrightarrow \overrightarrow{AP}$ é múltiplo de $\vec{v} \Leftrightarrow \overrightarrow{AP} = t\vec{v}$, para algum $t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow P = A + t\vec{v}$, para algum $t \in \mathbb{R}$.
Portanto, a equação paramétrica de r é:

$$r : P = A + t\vec{v}; t \in \mathbb{R}$$

Escrevendo esta equação em coordenadas, temos que se $A = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (a,b)$, então as equações paramétricas de r, neste caso, são:

$r : \begin{cases} x = x_1 + a \cdot t \\ y = y_1 + b \cdot t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$

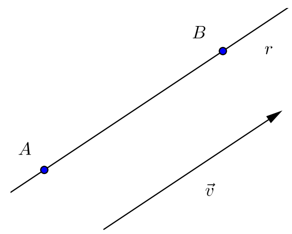

Figura 4.1: $\vec{v} \parallel r$

Exemplo 4.3. Determine a equação paramétrica da reta r que passa por $A = (1, -2)$ e é paralela ao vetor $\vec{v} = (-2, 2)$.

Solução: Temos que:

$P = (x, y) \in r \Leftrightarrow (x, y) = (1, -2) + t(-2, 2) = (1 - 2t, -2 + 2t), t \in \mathbb{R}$.

Portanto, $r : \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -2 + 2t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$

são as equações paramétricas da reta r.

4.2 Equação cartesiana da reta

Para apresentar a equação cartesiana da reta, vamos utilizar o produto escalar caracterizando algebricamente uma reta normal ou perpendicular a uma direção dada. Para isso temos a seguinte definição.

Definição 4.4. Um vetor $\vec{v} \neq \vec{0}$ é normal ou perpendicular a uma reta r se $\vec{v} \perp \overrightarrow{AB}$, quaisquer que sejam os pontos $A, B \in r$.

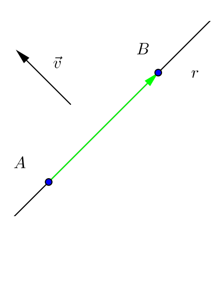

Figura 4.2: $\vec{v} \perp r$

Seja r a reta que passa pelo ponto $A = (x_1, y_1)$ e é perpendicular ao vetor $\vec{v} = (a, b) \neq \vec{0}$. Então,

$$P = (x, y) \in r \Leftrightarrow \overrightarrow{AP} \perp \vec{v} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AP} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x - x_1, y - y_1) \cdot (a, b) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a(x - x_1) + b(y - y_1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ax + by = ax_1 + by_1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ax + by = c$$

onde $c = ax_1 + by_1$.

A equação dada por:

$$r : ax + by = c$$

é chamada equação cartesiana da reta r.

Exemplo 4.5. Determine a equação cartesiana da reta r que passa pelo ponto $A = (-2, 4)$ e é normal ao vetor $\vec{v} = (3, 2)$.

Solução: Como $\vec{v} \perp r$, devemos ter $r : 3x + 2y = c$.

O valor de c é calculado sabendo que $A = (-2, 3) \in r$, isto é, $c = 3 \cdot (-2) + 2 \cdot 4 = 2$.

Portanto, a equação procurada é $r : 3x + 2y = 2$.

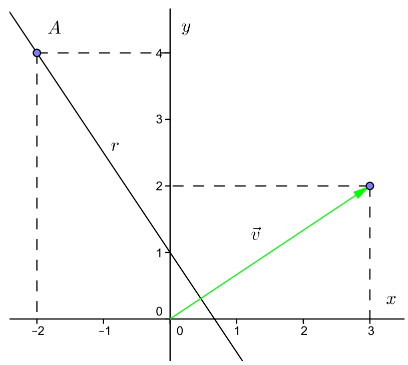

Figura 4.3: Exemplo 4.5

4.3 Equação reduzida da reta

Este tipo de equação é a que mais tem sido utilizada no ensino médio. Da equação cartesiana da reta r, temos:

$$r : ax + by = c$$

no qual $\vec{v} = (a, b) \neq (0, 0)$, podemos reescrever este tipo de equação das seguintes maneiras:

Primeira: Se $b = 0$, então um ponto $P = (x, y) \in r$ se, e somente se, $x = \dfrac{c}{a}, a \neq 0$, ou seja, uma reta do tipo $r : x = \dfrac{c}{a}, a \neq 0$ é dita vertical pois, r é paralelo ao eixo y ou coincidente com este.

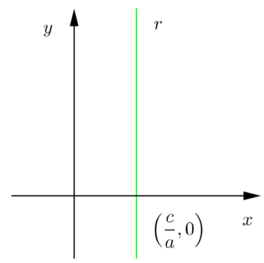

Figura 4.4: Reta vertical

Segunda: Se $b \neq 0$, então um ponto $P = (x, y) \in r$ se, e somente se, $y = -\dfrac{a}{b}x + \dfrac{c}{b}$, substituindo $m = -\dfrac{a}{b}$ e $n = \dfrac{c}{b}$ e reescrevendo na equação anterior temos uma reta do tipo,

$$y = mx + n$$

que é dita equação reduzida da reta r.

Observações: Para os valores de m e n vamos observar que:

- n é a ordenada do ponto onde r intersecta o eixo y. Se $n = 0$, então r passa pela origem.

- m chama-se inclinação ou coeficiente angular da reta $r : y = mx + n$.

  Além disso,

- Se $m > 0$, a função $y = mx + n$ é crescente, isto é, se $x_1 < x_2$, então $y_1 = mx_1 + n < y_2 = mx_2 + n$.

- Se $m < 0$, a função $y = mx + n$ é decrescente, isto é, se $x_1 < x_2$, então $y_1 = mx_1 + n > y_2 = mx_2 + n$.

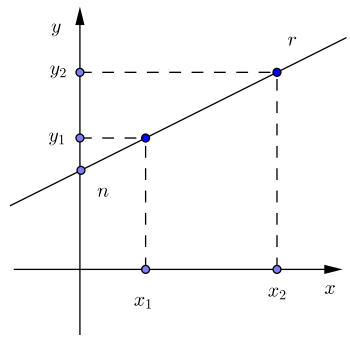

Figura 4.5: Se $m > 0$, a função $y = mx + n$ é crescente

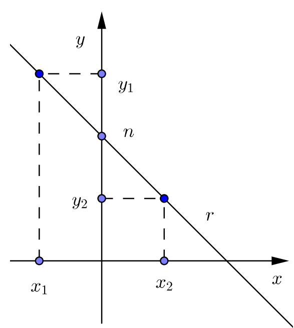

Figura 4.6: Se $m < 0$, a função $y = mx + n$ é decrescente

- Se $m = 0$, a função $y = mx + n$ é constante, pois $y = n$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Neste caso, dizemos que $r : y = n$ é uma reta horizontal.

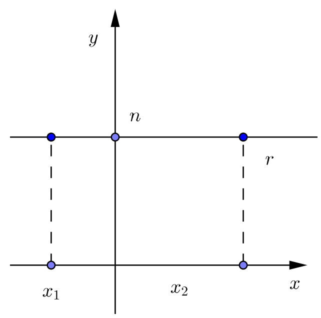

Figura 4.7: Se $m = 0$, a função $y = mx + n$ é constante

Exemplo 4.6. Determine as equações reduzidas das retas que contêm os lados do triângulo de vértices nos pontos $A = (1, 1)$, $B = (4, 1)$ e $C = (4, 3)$.

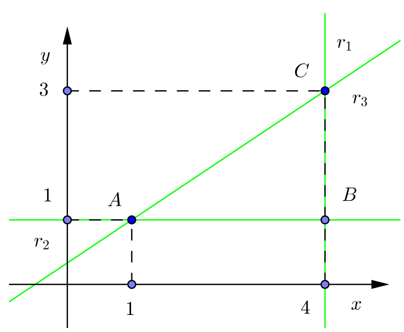

Figura 4.8: Exemplo 4.6

Solução: Sejam r_1, r_2 e r_3 as retas que contém os lados BC, AB e AC respectivamente, como na figura (4.8) temos,

- A reta r_1 que contém o lado BC é vertical, pois B e C têm a mesma abscissa 4. Assim,

$$r_1 : x = 4.$$

- A reta r_2 que contém o lado AB é horizontal, pois A e B têm a mesma ordenada 1. Portanto,

$$r_2 : y = 1.$$

- A reta r_3 que contém o lado AC tem inclinação $m = \dfrac{3-1}{4-1} = \dfrac{2}{3}$. Assim, a equação de r_3 é da forma: $r_3 : y = \dfrac{2}{3}x + n$. Como $A = (1,1) \in r_3$, obtemos, substituindo x por 1 e y por 1 na equação anterior, que: $1 = \dfrac{2}{3} \cdot 1 + n \Rightarrow n = 1 - \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3}$. Portanto,

$$r_3 : y = \frac{x}{3} + \frac{1}{3}$$

  é a equação reduzida da terceira reta.

4.4 Ângulos entre retas

Definição 4.7. O ângulo θ entre duas retas r_1 e r_2 que denotamos por $\theta = \angle(r_1, r_2)$ se define da seguinte maneira:

i) se r_1 e r_2 são coincidentes ou paralelas, $\theta = \angle(r_1, r_2) = 0$

ii) se as retas são concorrentes, isto é, $r_1 \cap r_2 = \{P\}$, $\theta = \angle(r_1, r_2)$ é o menor dos ângulos positivos, figura (4.9) determinados pelas retas.

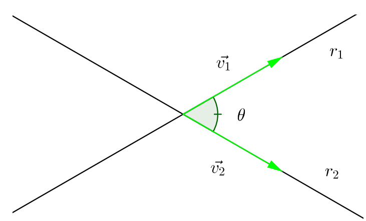

Figura 4.9: $\theta = \angle(r_1, r_2)$

Sejam $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$ vetores paralelos às retas concorrentes r_1 e r_2 , respectivamente. Como $\angle(r_1, r_2) = \angle(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})$ ou $\pi - \angle(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})$, então:

$$\cos\theta = \cos\angle(r_1, r_2) = |\cos\angle(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})| = \frac{|\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2}|}{||\overrightarrow{v_1}|| \cdot ||\overrightarrow{v_2}||}\ , \quad 0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

Exemplo 4.8. Encontre o ângulo $\theta = \angle(r_1, r_2)$ formada pelas retas r_1 e r_2 dada pelas equações:

$$r_1 : \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -2 + 2t \end{cases} ; t \in \mathbb{R};\ r_2 : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

Solução: De acordo com as definições das equações paramétricas da reta temos o vetor direção $\overrightarrow{v_1} = (-2, 2)$ de r_1 e o vetor direção $\overrightarrow{v_2} = (1, 2)$ de r_2, assim:

$\cos\theta = \cos\angle(r_1, r_2) = |\cos\angle(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})| = \dfrac{|(-2,2)\cdot(1,2)|}{||(-2,2)||\cdot||(1,2)||} = \dfrac{(-2\cdot 1 + 2\cdot 2)}{\sqrt{(-2)^2+2^2}\cdot\sqrt{1^2+2^2}} =$

$\dfrac{2}{\sqrt{8\cdot 5}} = \dfrac{2}{\sqrt{40}}$, $\quad 0 < \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$

Assim $\cos\theta = \dfrac{2}{\sqrt{40}} \Leftrightarrow \theta = \arccos\dfrac{2}{\sqrt{40}} \Leftrightarrow \theta \cong \dfrac{2\pi}{5}$

4.5 Distância entre um ponto e uma reta

Sejam $r : ax + by = c$ uma reta e $P = (x_1, y_1)$ um ponto no plano. Então a distância de P a r é dada por:

$$d(P, r) = \frac{|ax_1 + by_1 - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

De fato, seja s a reta perpendicular à reta $r : ax + by = c$ que passa pelo ponto $P = (x_1, y_1)$. Como $\overrightarrow{u} = (a, b) \perp r$, temos que $\overrightarrow{u} \parallel s$. Logo,

$s : \begin{cases} x = x_1 + at \\ y = y_1 + bt \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$

são as equações paramétricas de s.

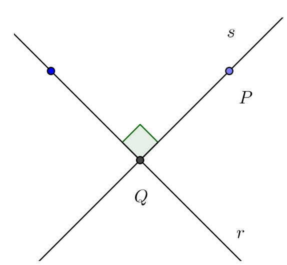

Figura 4.10: $d(P, r)$

Seja Q o pé da perpendicular a r que passa por P, ou seja, $\{Q\} = r \cap s$. Então, $Q = (x_1 + aq, y_1 + bq)$, para algum $q \in \mathbb{R}$, e

$a(x_1 + aq) + b(y_1 + bq) = c \Leftrightarrow (a^2 + b^2)q + ax_1 + by_1 = c \Leftrightarrow q = \dfrac{c - (ax_1 + by_1)}{a^2 + b^2}.$

Como $d(P, r) = d(P, Q) = ||\overrightarrow{PQ}||$ e $\overrightarrow{PQ} = (a, b)q$, temos:

$d(P, r) = |q|.||(a, b)|| = \dfrac{|ax_1 + by_1 - c|}{a^2 + b^2}\sqrt{a^2 + b^2}$

$$d(P,r) = \frac{|ax_1 + by_1 - c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Exemplo 4.9. Calcule a distância do ponto $P = (-1,3)$ à reta
$r : 2x + y = 1$.

Solução: Usando o resultado obtido para a distância entre um ponto e uma reta temos que $x_1 = 3$ e $y_1 = -1$ e $a = 2$, $b = 1$ e $c = 1$, assim:

$$d(P,r) = \frac{|ax_1 + by_1 - c|}{\sqrt{a^2+b^2}} \Rightarrow d(P,r) = \frac{|2.3 + 1.(-1) - 1|}{\sqrt{2^2+1^2}} \Rightarrow d(P,r) = \frac{4}{\sqrt{5}} \Rightarrow d(P,r) = \frac{4\sqrt{5}}{5}.$$

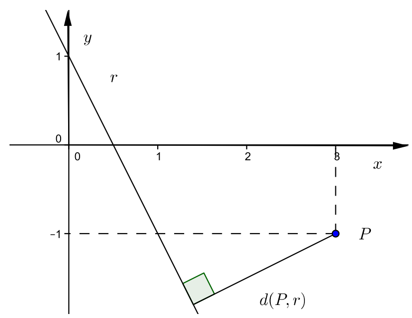

Figura 4.11: Exemplo 4.9, $d(P,r)$

4.6 Distância entre duas retas paralelas no plano

Definição 4.10. A distância entre r e r', no qual $r \parallel r'$, é definido como sendo a menor distância entre um ponto de r e um ponto de r'. Isto é, $d(r,r') = d(P,P')$ onde $P \in r$ e $P' \in r'$.

Assim para qualquer ponto $P \in r$ temos,

$$d(r,r') = d(P,r')$$

Sejam $r : ax + by = c$ e $r' : ax + by = c'$ retas paralelas ($c \neq c'$) ou coincidentes ($c = c'$). Então, $d(r,r') = \dfrac{|c - c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

De fato, seja $P = (x_1, y_1)$ um ponto da reta r. Então $d(r,r') = d(P,r') = \dfrac{|ax_1 + by_1 - c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Como $ax_1 + by_1 = c$, obtemos $d(r,r') = \dfrac{|c - c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Exemplo 4.11. Determine as equações das retas paralelas à reta $r : 4x + 3y = 3$ que distam 2 unidades de r.

Solução: Seja $s : 4x + 3y = c$ uma reta paralela à reta r. Temos,

$d(r, s) = 2 \Leftrightarrow \dfrac{|c-3|}{\sqrt{4^2+3^2}} = 2 \Leftrightarrow |c-3| = 10$. Logo $c = 3 + 10$ ou $c = 3 - 10$, ou seja, $s_1 : 4x + 3y = 13$ e $s_2 : 4x + 3y = -7$, são as retas paralelas a r que distam 2 unidades da mesma.

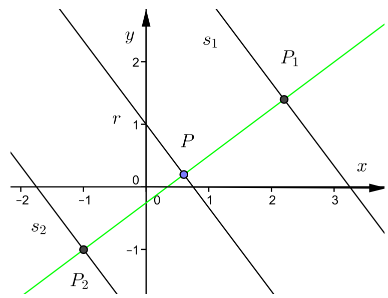

Figura 4.12: Exemplo 4.11, retas distantes 2 de r

Capítulo 5

O Círculo

5.1 Lugar geométrico

Primeiramente vamos definir lugar geométrico e em seguida definir o círculo.

Definição 5.1. Chama-se lugar geométrico a um conjunto de pontos tal que todos os seus pontos e somente os seus pontos têm em comum uma propriedade geométrica

5.2 A equação reduzida do círculo

Definição 5.2. Um círculo com centro $C = (x_c, y_c)$ e raio de medida $r > 0$ é o lugar geométrico dos pontos $P = (x, y)$ do plano que estão à distância r do ponto C.

Ou seja,
$d(P, C) = \sqrt{(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2} = r$
De fato,
$d(C, P) = ||\overrightarrow{CP}|| = r \Rightarrow \overrightarrow{CP} = P - C = (x, y) - (x_c, y_c) \Rightarrow \overrightarrow{CP} = P - C = (x - x_c, y - y_c) \Rightarrow d(C, P) = ||\overrightarrow{CP}|| = r \Rightarrow d(C, P) = \sqrt{(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2} = r$
Elevando ambos os membros da última igualdade ao quadrado, temos:
$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2$
Denominada *equação reduzida do círculo*.
Assim, a condição necessária e suficiente para um ponto (x, y) pertença ao círculo de centro (x_c, y_c) e raio r é que (x, y) satisfaça a equação:

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2$$

Exemplo 5.3. Encontre a equação reduzida do círculo de centro $C = (3, 4)$ e raio 5.

Solução: De acordo com a equação $(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2$ temos:

$$(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$$

Que é a equação reduzida de do círculo de centro $C = (3, 4)$ e raio 5.

Note que os pontos $P = (0, 0)$ e $Q = (3, -1)$ pertencem a esse círculo, pois:

$$(0 - 3)^2 + (0 - 4)^2 = 25$$

e

$$(3 - 3)^2 + (-1 - 4)^2 = 25$$

O ponto $R = (4, 3)$ não pertence, pois:

$$(4 - 3)^2 + (3 - 4)^2 \neq 25$$

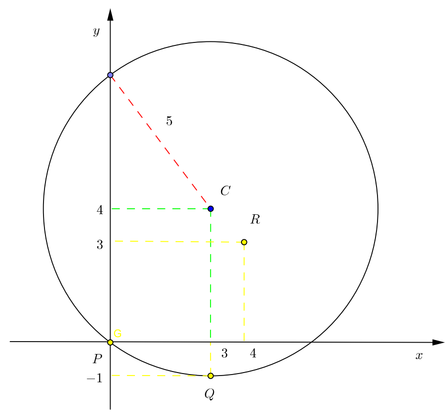

Figura 5.1: Exemplo 5.3

5.3 A equação normal do círculo

A partir da equação reduzida do círculo, desenvolvendo os quadrados e agrupando os termos de forma conveniente, obtemos:

$$x^2 + y^2 - 2x_c x - 2y_c + (x_c^2 + y_c^2 - r^2) = 0$$

Chamada *equação normal do círculo.*

Exemplo 5.4. Encontre a equação normal do círculo do exercício 5.3.

Solução: A partir da equação reduzida do círculo $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$ desenvolvemos os quadrados e agrupamos os termos de forma conveniente, obtemos:

$(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 25 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 - 25 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$

que é a equação normal do círculo.

5.4 Reconhecimento do círculo

Dada a equação na forma, $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$ com $A \neq 0$, com coeficientes reais, esta pode não ser um círculo. Vamos analisar os coeficientes para que a equação seja um círculo.

Dividindo a equação por A temos:

$x^2 + \frac{B}{A}y^2 + \frac{C}{A}xy + \frac{D}{A}x + \frac{E}{A}y + \frac{F}{A} = 0$

Comparando com a equação normal do círculo, $x^2 + y^2 - 2x_cx - 2y_cy + (x_c^2 + y_c^2 - r^2) = 0$, obtemos:

- $\frac{B}{A} = 1 \Rightarrow A = B \neq 0$;
- $\frac{C}{A} = 0 \Rightarrow C = 0$;
- $\frac{D}{A} = -2x_c \Rightarrow x_c = \frac{-D}{2A}$;
- $\frac{E}{A} = -2y_c \Rightarrow y_c = \frac{-E}{2A}$;
- $\frac{F}{A} = x_c^2 + y_c^2 - r^2 \Rightarrow r^2 = x_c^2 + y_c^2 - \frac{F}{A} \Rightarrow r^2 = \frac{D^2}{4A^2} + \frac{E^2}{4A^2} - \frac{4AF}{4A^2} \Rightarrow r = \sqrt{\frac{D^2 + E^2 - 4AF}{4A^2}}$ com $D^2 + E^2 - 4AF > 0$.

Essas são as condições para que uma equação seja a do círculo e além disso, no caso afirmativo, podemos determinar as coordenadas do centro e a medida do raio.

Exemplo 5.5. Verifique se a equação $x^2 + y^2 + 8x - 6y - 11 = 0$ representa um círculo, em caso afirmativo, qual é.

Solução: Para verificar se a equação $x^2 + y^2 + 8x - 6y - 11 = 0$ representa um círculo devemos observar se são válidas as condições de reconhecimento, assim:

- $A = B = 1 \neq 0$;
- $C = 0$;
- $x_c = \frac{-D}{2A} = \frac{-8}{2} = -4$;
- $y_c = \frac{-E}{2A} = \frac{6}{2} = 3$;
- $r = \sqrt{\frac{D^2 + E^2 - 4AF}{4A^2}} = \sqrt{\frac{8^2 + (-6)^2 - 4.1.(-11)}{4.1^2}}$
  $= \sqrt{\frac{144}{4}} = 6.$

  Então, $(x + 4)^2 + (y - 3)^2 = 36$ è a equação reduzida do círculo de centro (-4, 3) e raio 6.

5.5 Posições relativas entre ponto e círculo

Conforme DANTE [2], dados um círculo λ de centro $C = (x_c, y_c)$, raio r e um ponto P qualquer, diferente de C, calculando $d(P, C)$ e comparando com r temos três possibilidades.

Primeira: Se $d(P, C) = r$, então P pertence ao círculo.

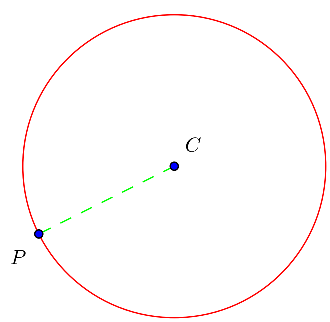

Figura 5.2: $d(P, C) = r \Rightarrow P \in \lambda$

Segunda: Se $d(P, C) > r$, então P é externo ao círculo.

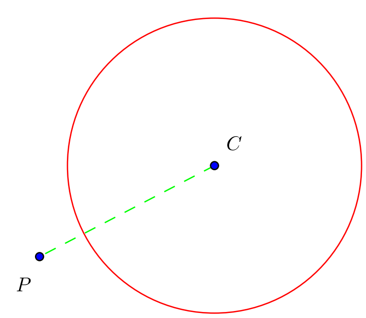

Figura 5.3: $d(P, C) > r \Rightarrow P$ é externo a λ

Terceira: Se $d(P, C) < r$, então P é interno ao círculo.

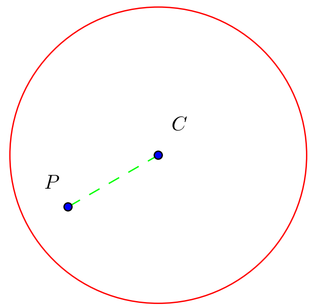

Figura 5.4: $d(P, C) < r \Rightarrow P$ é interno a λ

De fato, dados um ponto $P = (x_1, y_1)$ e um círculo λ de equação $(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2$, temos:

- $P \in \lambda \Leftrightarrow d(C, P)^2 = r^2 \Leftrightarrow (x_1 - x_c)^2 + (y_1 - y_c)^2 = r^2 \Leftrightarrow$ $(x_1 - x_c)^2 + (y_1 - y_c)^2 - r^2 = 0$;
- P é externo a $\lambda \Leftrightarrow d(C, P)^2 > r^2 \Leftrightarrow (x_1 - x_c)^2 + (y_1 - y_c)^2 > r^2 \Leftrightarrow (x_1 - x_c)^2 + (y_1 - y_c)^2 - r^2 > 0$;
- P é interno a $\lambda \Leftrightarrow d(C, P)^2 < r^2 \Leftrightarrow (x_1 - x_c)^2 + (y_1 - y_c)^2 < r^2 \Leftrightarrow (x_1 - x_c)^2 + (y_1 - y_c)^2 - r^2 < 0$;

Exemplo 5.6. Verifique as posições relativas entre os pontos $P = (2, 1)$, $Q = (5, 1)$ e $R = (6, 2)$ e o círculo cuja equação é dado por:

$$x^2 + y^2 - 6x - 2y + 6 = 0 \tag{5.1}$$

Solução: Temos:

- Para verificar a posição relativa entre o ponto $P = (2, 1)$ e o círculo da equação dada em (5.1), basta substituir as coordenadas de P na equação do círculo, assim:
  $2^2 + 1^2 - 6.2 - 2.1 + 6 = -3 < 0$
  Logo P é interno ao círculo.
- Para verificar a posição relativa entre o ponto $Q = (5, 1)$ e o círculo da equação dada em (5.1), basta substituir as coordenadas de Q na equação do círculo, assim:
  $5^2 + 1^2 - 6.5 - 2.1 + 6 = 0$
  Logo Q pertence ao círculo.

- Para verificar a posição relativa entre o ponto $R = (6, 2)$ e o círculo da equação dada em (5.1), basta substituir as coordenadas de R na equação do círculo, assim:
  $6^2 + 2^2 - 6.6 - 2.2 + 6 = 6 > 0$
  Logo R é externo ao círculo.

5.6 Posições relativas entre reta e círculo

A posição relativa de uma reta $r : ax + by = c$ e um círculo $\lambda : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ é determinada pesquisando o número de soluções do seguinte sistema:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 \end{cases}$$

Aplicando o método da substituição, a equação do círculo se reduz a uma equação do segundo grau.

O discriminante Δ dessa equação vai determinar o número de soluções do sistema, isto é, a posição da reta em relação ao círculo.

Assim temos três possibilidades:

- $\Delta > 0 \Rightarrow r_1 \cap \lambda = \{P_1, Q_1\}, r_1$ é secante ao círculo;
- $\Delta = 0 \Rightarrow r_2 \cap \lambda = \{P_2\}, r_2$ é tangente ao círculo;
- $\Delta < 0 \Rightarrow r_3 \cap \lambda = \emptyset, r_3$ é externa ao círculo;

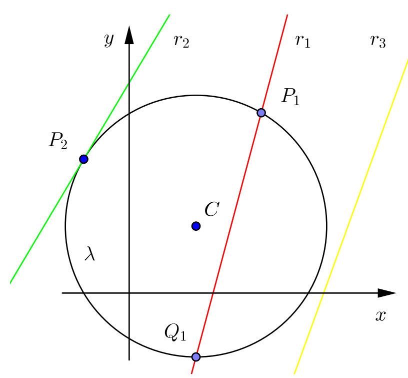

Figura 5.5: Posições relativas entre reta e círculo

Exemplo 5.7. Qual é a posição relativa de $r : x - y = -4$ e $\lambda : x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$?

Solução: Aplicando o método da substituição, podemos fazer $y = x + 4$ na equação da reta, a equação do círculo se reduz a uma equação do segundo grau.

$x^2 + (x+4)^2 - 2x - 4(x+4) - 4 = 0$

$x^2 + x^2 + +8x + 16 - 2x - 4x - 16 - 4 = 0$

$x^2 + x - 2 = 0$

O discriminante $\Delta = 1 + 8 = 9 > 0$ determina que a reta r é secante ao círculo λ.

A figura abaixo mostra a representação gráfica da solução algébrica do exemplo (5.7).

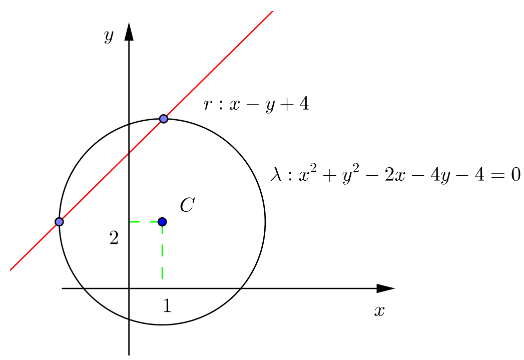

Figura 5.6: Exemplo 5.8

5.7 Posições relativas entre dois círculos

Sejam os círculos λ_1 e λ_2 com raios r_1 e r_2 e centros C_1 e C_2 respectivamente, vamos determinar suas posições relativas omparando a distância $C_1C_2 = ||\overrightarrow{C_1C_2}||$ entre seus centros com a soma $r_1 + r_2$ ou com o módulo da diferença $|r_1 - r_2|$ dos raios.

Assim temos os seguinte casos:

- λ_1 e λ_2 exteriores;

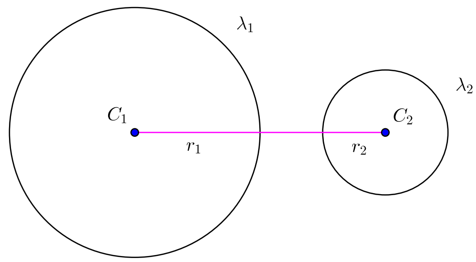

Figura 5.7: $C_1C_2 > r_1 + r_2$

- λ_1 e λ_2 tangentes exteriores;

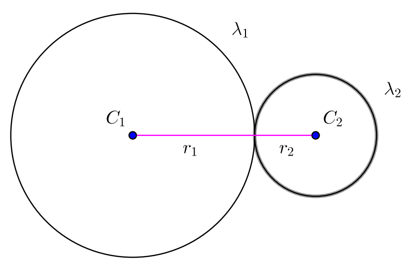

Figura 5.8: $C_1C_2 = r_1 + r_2$

- λ_1 e λ_2 tangentes interiores;

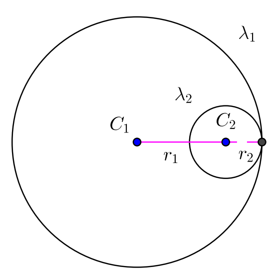

Figura 5.9: $C_1C_2 = |r_1 - r_2|$

- λ_1 e λ_2 secantes;

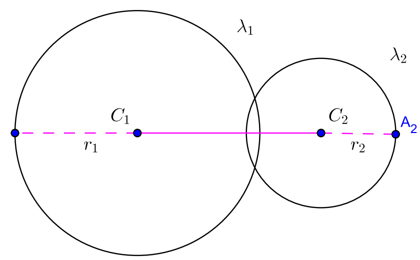

Figura 5.10: $|r_1 - r_2| < C_1C_2 < r_1 + r_2$

- λ_1 e λ_2 uma interna à outra.

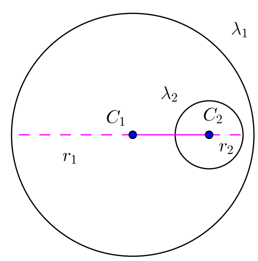

Figura 5.11: $0 \leq C_1C_2 < |r_1 - r_2|$

Exemplo 5.8. Qual é a posição relativa entre os círculos $\lambda_1 : x^2 + y^2 = 81$ e $\lambda_2 : x^2 + y^2 - 6x + 8y + 9 = 0$?

Solução: Temos que:

λ_1 tem centro $C_1 = (0, 0)$ e raio $r_1 = 9$, λ_2 tem centro $C_2 = (3, -4)$ e raio $r_2 = 4$.

Assim:

$C_1C_2 = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$ e $r_1 + r_2 = 13$

Como $C_1C_2 < r_1 + r_2$, elas não são exteriores nem se tangeciam exteriormente.

Como $|r_1 - r_2| = 5 = C_1C_2$, elas se tangeciam interiormente.

Capítulo 6

Seções Cônicas

6.1 Introdução

Conforme IEZZI [5], neste capítulo vamos estudar as elipses, as parábolas e as hipérboles que são obtidas como seções de um cone quando cortado por planos paralelos ou não paralelos à sua base. Estes estudos se iniciaram por volta de 200 anos antes da era Cristã com Apolônio de Perga em Alexandria, ele estudou e demonstrou suas teorias matemáticas sobre as curvas obtidas quando se secciona uma superfície cônica por um plano α. Para isso observe a figura (6.1) que mostra o cone com vértive V e o plano α, assim temos as seguintes situações:

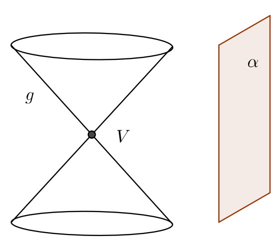

Figura 6.1: Seções cônicas

- Se o plano α é paralelo a base, a seção obtida é um círculo. Se o plano α passa por V, a seção obtida é um ponto.
- Se o plano α é oblíquo a base e corta apenas uma das folhas da superfície cônica, a seção obtida é uma elipse.
- Se o plano α é paralelo a geratriz g da superfície cônica, a seção obtida é uma parábola.
- Se o plano α é é oblíquo a base e corta as duas das folhas da superfície cônica, a seção obtida é uma hipérbole.

6.2 Elipse

Definição 6.1. Uma elipse $\mathcal{E}$ de focos F_1 e F_2 é o lugar geométrico dos pontos $P = (x, y)$ do plano cuja soma das distâncias a F_1 e F_2 é igual a uma constante $2a > 0$, maior do que a distância entre os focos $2c \geq 0$. Ou seja, sendo $0 \leq c < a$ e $d(F_1, F_2) = 2c$,

$$\mathcal{E} = \{P | d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a\}$$

.

Uma elipse pode ser desenhada com o auxílio de uma linha com as pontas amarradas em dois pregos fixados em F_1 e F_2 distantes $2c$. Mantendo a linha esticada, desloca-se a ponta do lápis. A curva descrita será uma elipse.

Os principais elementos da elipse são:

- Focos: Os pontos F_1 e F_2 distantes $2c$ são os focos da elipse;
- Centro: O ponto médio do segmento F_1F_2 é o seu centro;
- Reta focal r: A reta determinada pelos focos;
- Vértices sobre a reta focal: A interseção da elipse com a reta focal determina dois pontos A_1 e A_2 chamados vértices sobre a reta focal;
- Eixo focal: O segmento A_1A_2 de comprimento $2a$ é o eixo focal da elipse;
- A reta não focal: É a reta r' que é perpendicular a reta focal r que passa pelo centro;
- Vértices da elipse sobre a reta não focal: A elipse intersecta a reta não focal r' em dois pontos, B_1 e B_2, denominados vértices da elipse sobre a reta não focal;
- O eixo não focal: É o segmento B_1B_2 de comprimento $2b$, onde $b^2 = a^2 - c^2$;
- Excentricidade: O número $e = \dfrac{c}{a}$ é a excentricidade da elipse. Note que $0 \leq e < 1$.

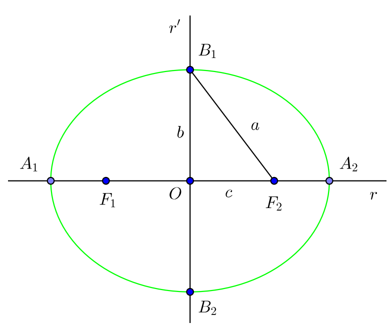

Figura 6.2: Principais elementos da elipse

6.3 Forma canônica da elipse

Consideremos agora um sistema de eixos ortogonais xOy. Vamos determinar a equação da elipse $\mathcal{E}$ com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo Ox, elipse com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo Oy e elipse com centro no ponto $O' = (x_0, y_0) \neq (0,0)$

6.3.1 Elipse $\mathcal{E}$ com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo Ox

Neste caso, os vértices e focos de $\mathcal{E}$ são: $F_1 = (-c, 0)$, $F_2 = (c, 0)$, $A_1 = (-a, 0)$, $A_2 = (a, 0)$, $B_1 = (0, b)$ e $B_2 = (0, -b)$, onde $0 < c < a$ e $b = \sqrt{a^2 - c^2}$. Logo, a partir da definição temos:

$P = (x, y) \in \mathcal{E} \Leftrightarrow d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \tag{6.1}$$

Para eliminarmos os radicais, elevamos ambos os membros dessa equação ao quadrado, donde resulta

$$\Leftrightarrow (x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2 \tag{6.2}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2xc + c^2 + y^2$$

$$\Leftrightarrow 4xc = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$\Leftrightarrow a^2 - cx = a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \tag{6.3}$$

$$\Leftrightarrow (a^2 - cx)^2 = a^2[(x-c)^2 + y^2] \tag{6.4}$$

$$\Leftrightarrow a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 = a^2(x^2 - 2xc + c^2 + y^2)$$

$$\Leftrightarrow (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

$$\Leftrightarrow b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Para mostrar a recíproca, basta verificar que (6.4) $\Rightarrow$ (6.3) e que (6.2) $\Rightarrow$ (6.1),assim, Se $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, então $a^2-cx\geq 0$ e $2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\geq 0$

De fato, sendo $0\leq c<a$ e $a^2=b^2+c^2$, temos:

$\dfrac{x^2}{a^2}\leq\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\Rightarrow x^2\leq a^2\Rightarrow |x|\leq a\Rightarrow -a\leq x\leq a$ disso temos,

$\begin{cases} 0\leq c<a\cdot(a) \\ -a\leq x\leq a\cdot(c)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} 0\leq ac<a^2 \\ -ac\leq cx\leq ac\end{cases}\Rightarrow cx\leq ac<a^2\Rightarrow$
$a^2-cx>0$

e

$\dfrac{y^2}{b^2}\leq\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\Rightarrow y^2\leq b^2\Rightarrow -b^2+y^2\leq 0\Rightarrow (x+c)^2+y^2=x^2+2cx+c^2+y^2<$
$a^2+2a^2+a^2-b^2+y^2<4a^2\Rightarrow\sqrt{(x-c)^2+y^2}<2a$

A equação $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ é forma canônica da elipse $\mathcal{E}$ com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo Ox, figura (6.3).

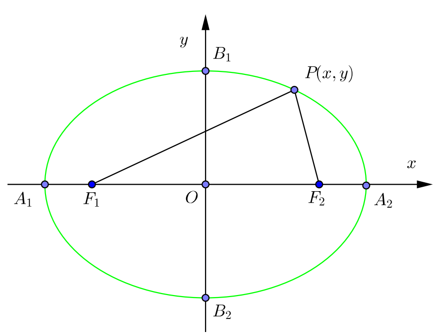

Figura 6.3: Elipse $\mathcal{E}$ com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo Ox

Exemplo 6.2. Os vértices de uma elipse são os pontos $(4,0)$ e $(-4,0)$ e seus focos são os pontos $(3,0)$ e $(-3,0)$. Determine a equação da elipse.

Solução: Como $F_1=(-3,0)$ e $F_2=(3,0)$, a reta focal é o eixo Ox e $A_1=(-4,0), A2=(4,0)$ são os vértices sobre a reta focal r. Então, $C=\dfrac{F_1+F_2}{2}=\dfrac{A_1+A_2}{2}=(0,0)$ é o centro da elipse;

$a=d(C,A_1)=d(C,A_2)=4, c=d(C,F_1)=d(C,F_2)=3$ e $b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{16-9}=\sqrt{7}$.

Logo, a equação da elipse é $\mathcal{E}:\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{7}=1$.

6.3.2 Elipse $\mathcal{E}$ com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo Oy

Neste caso, os vértices e focos de $\mathcal{E}$ são: $F_1 = (0, c)$, $F_2 = (0, -c)$, $A_1 = (0, a)$, $A_2 = (0, -a)$, $B_1 = (-b, 0)$ e $B_2 = (b, 0)$, onde $0 < c < a$ e $b = \sqrt{a^2 - c^2}$.

Analogamente ao caso em que a elipse $\mathcal{E}$ com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo Ox, desenvolvendo os calculos, verificamos que a equação da elipse $\mathcal{E}$ é:

$$\mathcal{E} : \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

Que é forma canônica da elipse $\mathcal{E}$ com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo Oy, figura (6.4).

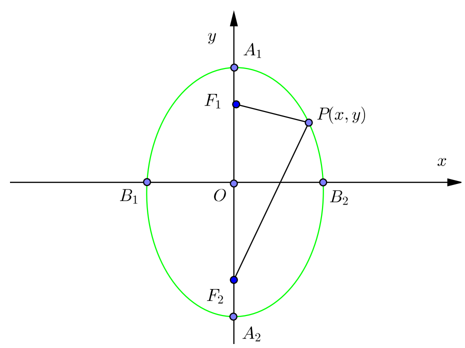

Figura 6.4: Elipse $\mathcal{E}$ com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo Oy

Exemplo 6.3. Os vértices de uma elipse são os pontos $(0, 6)$ e $(0, -6)$ e seus focos são os pontos $(0, 4)$ e $(0, -4)$. Determine a equação da elipse.

Solução: Como $F_1 = (0, 4)$ e $F_2 = (0, -4)$, a reta focal é o eixo Oy e $A_1 = (0, 6), A_2 = (0, -6)$ são os vértices sobre a reta focal r. Então, $C = \dfrac{F_1 + F_2}{2} = \dfrac{A_1 + A_2}{2} = (0, 0)$ é o centro da elipse;
$a = d(C, A_1) = d(C, A_2) = 6, c = d(C, F_1) = d(C, F_2) = 4$ e $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{6^2 - 4^2} = \sqrt{36 - 16} = \sqrt{20}$.
Logo, a equação da elipse é $\mathcal{E} : \dfrac{x^2}{20} + \dfrac{y^2}{36} = 1$.

6.3.3 Translação dos eixos

Considere dois sistemas de coordenadas, conforme figura (6.5): o sistema xOy, mais usual, e o sistema $x'O'y'$, tal que $x' \parallel x, y' \parallel y$ e x', y' tem o mesmo sentido de x, y, respectivamente, assim $x'O'y'$ foi obtido por uma translação de xOy em que a origem $O = (0,0)$ coincide com o ponto $O' = (x_0, y_0)$. Se $P = (x, y)$ é um ponto do plano, podemos tomar suas coordenadas em relação a cada um dos dois sistemas xOy e $x'O'y'$ da seguinte forma:

Em x
$\overrightarrow{OP_1} = \overrightarrow{OO'_1} + \overrightarrow{O'_1P_1} \Rightarrow x = x_0 + x'$
Em y
$\overrightarrow{OP_2} = \overrightarrow{OO'_2} + \overrightarrow{O'_2P_2} \Rightarrow y = y_0 + y'$

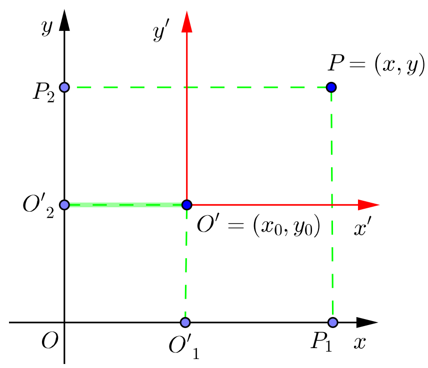

Figura 6.5: Translação de sistema

Exemplo 6.4. Considere a reta de equação $x + y - 8 = 0$. Qual é equação da reta no sistema $x'O'y'$, de modo que a nova origem seja $O' = (2, 1)$?

Solução: Se é dada uma translação no sistema xOy, de modo que a nova origem seja $O' = (2, 1)$, podemos tomar suas coordenadas em relação a cada um dos dois sistemas xOy e $x'O'y'$ da seguinte forma:

$$x = x' + 2$$

e

$$y = y' + 1$$

Substituindo estas relações na equação $x + y - 8 = 0$. obtemos,

$x + y - 8 = 0 \Rightarrow (x' + 2) + (y' + 1) - 8 = 0 \Rightarrow x' + y' - 5 = 0$ logo,

$x' + y' - 5 = 0$ é a equação da reta no sistema $x'O'y'$.

6.3.4 Elipse $\mathcal{E}$ com centro no ponto $O' = (x_0, y_0)$ e reta focal paralela ao eixo Ox

Considere a equação da elipse $\mathcal{E}$ na forma canônica $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo Ox, a partir daí seja $x'O'y'$ o sistema de eixos ortogonais obtido transladando os sistema xOy para a nova origem $O' = (x_0, y_0)$. De acordo com o foi visto na seção anterior, sobre tranlação dos eixos, se é dada uma translação no sistema xOy, de modo que a nova origem seja $O' = (x_0, y_0)$, podemos tomar suas coordenadas em relação a cada um dos dois sistemas xOy e $x'O'y'$ da seguinte forma:

$$x = x' + x_0 \Rightarrow x' = x - x_0$$

e

$$y = y' + y_0 \Rightarrow y' = y - y_0$$

Substituindo estas relações na equação $\dfrac{x'^2}{a^2} + \dfrac{y'^2}{b^2} = 1$ obtemos,

$\dfrac{x'^2}{a^2} + \dfrac{y'^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \dfrac{(x - x_0)^2}{a^2} + \dfrac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$

Portanto, a forma canônica da equação da elipse $\mathcal{E}$ com centro no ponto $O' = (x_0, y_0)$ e eixo focal paralelo ao eixo Ox é:

$$\mathcal{E} : \frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

O esboço da elipse é mostrado na figura (6.6)

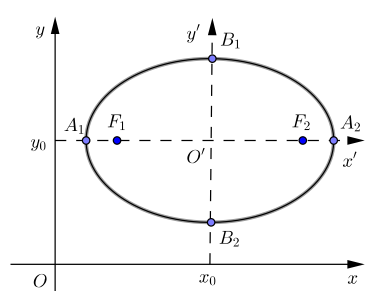

Figura 6.6: $\mathcal{E} : \dfrac{(x - x_0)^2}{a^2} + \dfrac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$

Exemplo 6.5. Os focos de uma elipse $\mathcal{E}$ são $F_1 = (2, 4)$ e $F_2 = (6, 4)$, e o comprimento de seu eixo não focal é 2. Determine a equação de $\mathcal{E}$, seus vértices e sua excentricidade.

Solução: Como $F_1 = (2,4)$ e $F_2 = (6,4)$ são os focos da elipse, sua reta focal é $r: y = 4$ (paralela ao eixo Ox) e seu centro é $C = \dfrac{F_1 + F_2}{2} = (4,4)$. Além disso, $2b = 2$, isto é, $b = 1$, $c = d(C, F_1) = d(C, F_2) = 2$ e $a = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$. Portanto, $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$; $A_1 = (4 - \sqrt{5}, 4)$ e $A_2 = (4 + \sqrt{5}, 4)$ são os vértices sobre a reta focal; $r' : x = 4$ é a reta não focal; $B_1 = (4,3)$ e $B_2 = (4,5)$ são os vértices sobre a reta não focal e sua equação é:

$$\mathcal{E} : \frac{(x-4)^2}{5} + \frac{(y-4)^2}{1} = 1$$

6.3.5 Elipse $\mathcal{E}$ com centro no ponto $O' = (x_0, y_0)$ e reta focal paralela ao eixo Oy

Analogamente ao caso anterior em que a elipse $\mathcal{E}$ com centro no ponto $O' = (x_0, y_0)$ e eixo focal paralelo ao eixo Ox, considerando a translação e as relações entre as coordenadas temos que a elipse $\mathcal{E}$ com centro no ponto $O' = (x_0, y_0)$ e reta focal paralela ao eixo Oy é dada por

$$\mathcal{E} : \frac{(x-x_0)^2}{b^2} + \frac{(y-y_0)^2}{a^2} = 1$$

O esboço da elipse é mostrado na figura (6.7)

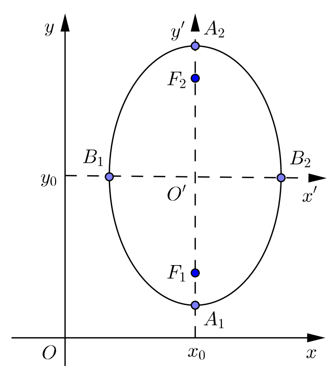

Figura 6.7: $\mathcal{E} : \dfrac{(x-x_0)^2}{b^2} + \dfrac{(y-y_0)^2}{a^2} = 1$

Exemplo 6.6. Os focos de uma elipse $\mathcal{E}$ são $F_1 = (3,8)$ e $F_2 = (3,2)$, e o comprimento de seu eixo não focal é 8. Determine a equação de $\mathcal{E}$, seus vértices e sua excentricidade.

Solução: Como $F_1 = (3,8)$ e $F_2 = (3,2)$ são os focos da elipse, sua reta focal é $r : x = 3$ (paralela ao eixo Oy) e seu centro é $C = \dfrac{F_1 + F_2}{2} = (3,5)$. Além disso, $2b = 8$, isto é,

$b = 4,\ c = d(C, F_1) = d(C, F_2) = 3$ e $a = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = 5$. Portanto, $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{3}{5}$; $A_1 = (3, 0)$ e $A_2 = (3, 10)$ são os vértices sobre a reta focal; $r' : y = 5$ é a reta não focal; $B_1 = (-1, 5)$ e $B_2 = (7, 5)$ são os vértices sobre a reta não focal e sua equação é:

$$\mathcal{E} : \frac{(x-3)^2}{16} + \frac{(y-5)^2}{25} = 1$$

6.3.6 Reconhecimento da elipse $\mathcal{E}$

Recordemos que a equação na forma, $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ com $A \neq 0$ e com coeficientes reais, pode ser um círculo. Vamos analisar os coeficientes para que a equação seja uma elipse.

Vamos considerar a forma canônica da elipse $\mathcal{E}$ com centro no ponto $O' = (x_0, y_0)$ reta focal paralela ao o eixo Ox, no qual temos:

$$\mathcal{E} : \frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

Desenvolvendo esta equação obtemos:

$$b^2x^2 + a^2y^2 - 2b^2x_0x - 2a^2y_0y + b^2x_0^2 + a^2y_0^2 - a^2b^2 = 0$$

Comparando com a equação,

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

E igualando os coeficientes encontramos,

$A = b^2, B = 0, C = a^2, D = -2b^2x_0, E = -2a^2y_0$ e $F = b^2x_0^2 + a^2y_0^2 - a^2b^2$.

Portanto, quando $B = 0$ e $AC > 0$ a equação representa uma elipse.

Analogamente, vale para a equação da elipse com centro no ponto $O' = (x_0, y_0)$ e reta focal paralela ao eixo Oy.

Exemplo 6.7. Verifique se a equação $4x^2 + 9y^2 - 40x + 36y + 100 = 0$. representa uma elipse. Caso seja uma elipse, determine seus principais elementos.

Solução: Como $B = 0$ e $AC > 0$ a equação representa uma elipse.

Completando os quadrados, obtemos:
$4(x^2 - 10x) + 9(y^2 + 4y) = -100 \Leftrightarrow 4(x^2 - 10x + 25) + 9(y^2 + 4y + 4) = -100 + 4 \cdot 25 + 9 \cdot 4 \Leftrightarrow$ $4(x-5)^2 + 9(y+2)^2 = 36 \Leftrightarrow \dfrac{(x-5)^2}{9} + \dfrac{(y+2)^2}{4} = 1.$

Logo, a equação representa uma elipse com:

- $a = 3, b = 2$ e $c = \sqrt{9-4} = \sqrt{5}$;

- centro: $C = (5, -2)$;
- reta focal: $r : y = -2$, paralela ao eixo Ox;
- reta não focal: $r' : x = 5$, paralela ao eixo Oy;
- vértices sobre a reta focal: $A_1 = (2, -2)$ e $A_2 = (8, -2)$;
- vértices sobre a reta não focal: $B_1 = (5, -4)$ e $B_2 = (5, 0)$;
- focos: $F_1 = (5 - \sqrt{5}, -2)$ e $F_2 = (5 + \sqrt{5}, -2)$.

6.4 Hipérbole

Definição 6.8. Uma hipérbole $\mathcal{H}$ de focos F_1 e F_2 é o lugar geométrico dos pontos $P = (x, y)$ do plano cujo módulo da diferença de suas distâncias a F_1 e F_2 é igual a uma constante $2a > 0$, menor do que a distância entre os focos $2c \geq 0$. Ou seja, sendo $0 < a < c$ e $d(F_1, F_2) = 2c$,

$$\mathcal{H} = \{P| \ \ |d(P, F_1) - d(P, F_2)|= 2a\}$$

.

Os principais elementos da hipérbole são:

- Focos: Os pontos F_1 e F_2 distantes $2c$ são os focos da hipérbole;
- Centro: O ponto médio do segmento F_1F_2 é o seu centro;
- Reta focal r: A reta determinada pelos focos;
- Vértices sobre a reta focal: A interseção da hipérbole com a reta focal determina dois pontos A_1 e A_2 chamados vértices sobre a reta focal;
- Eixo focal: O segmento A_1A_2 de comprimento $2a$ é o eixo focal da hipérbole;
- A reta não focal: É a reta r' que é perpendicular a reta focal r que passa pelo centro;
- Vértices imaginários da hipérbole sobre a reta não focal: A hipérbole não tem pontos comuns sobre a reta não focal mas determinam dois pontos, B_1 e B_2, denominados vértices da imaginários da hipérbole; sobre a reta não focal;
- O eixo não focal: É o segmento B_1B_2 de comprimento $2b$, onde $b^2 = c^2 - a^2$;
- Excentricidade: O número $e = \dfrac{c}{a}$ é a excentricidade da hipérbole. Note que $0 \leq e < 1$.
- Assíntotas: Traçando por A_1 e A_2 retas perpendiculares e traçando por B_1 e B_2 retas paralelas, ambas em relação a r, obtemos o retângulo $ABCD$. As retas que contêm as diagonais AC e BD do retângulo são as assíntotas de $\mathcal{H}$, portanto são as retas que passam pelo centro da hipérbole e tem inclinação $\pm\dfrac{b}{a}$ em relação à reta focal.

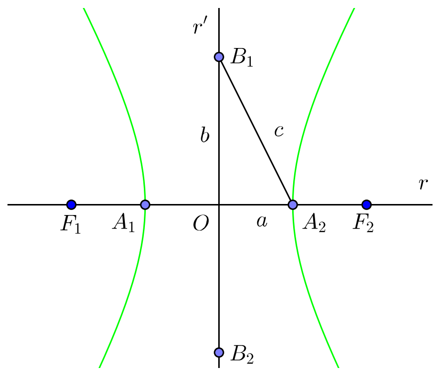

Figura 6.8: Elementos

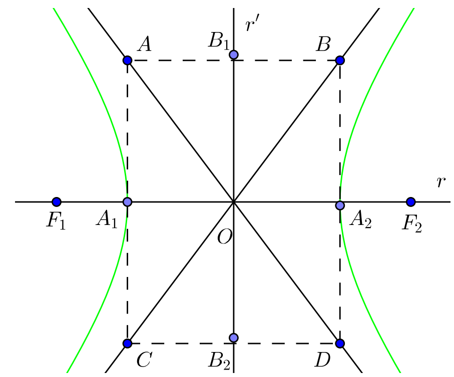

Figura 6.9: Assíntontas

6.5 Forma canônica da hipérbole

Consideremos agora um sistema de eixos ortogonais xOy. Vamos determinar a equação da hipérbole $\mathcal{H}$ com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo Ox, hipérbole com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo Oy e hipérbole com centro no ponto $O' = (x_0, y_0) \neq (0,0)$

6.5.1 Hipérbole $\mathcal{H}$ com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo Ox

Neste caso, os vértices e focos de $\mathcal{E}$ são: $F_1 = (-c, 0)$, $F_2 = (c, 0)$, $A_1 = (-a, 0)$, $A_2 = (a, 0)$, $B_1 = (0, b)$ e $B_2 = (0, -b)$, onde $0 < a < c$ e $b = \sqrt{c^2 - a^2}$. Logo, a partir da definição temos:

$$P = (x, y) \in \mathcal{H} \Leftrightarrow |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} d(P, F_1) - d(P, F_2) = 2a \quad (ramo\ \ direito) \\ ou \\ d(P, F_1) - d(P, F_2) = -2a \quad (ramo\ \ esquerdo) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \quad (ramo\ \ direito) \\ ou \\ \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = -2a \quad (ramo\ \ esquerdo) \end{cases}$$

De maneira análoga ao caso da elipse, desenvolvendo os calculos e lembrando que $b^2 = c^2 - a^2$, chegamos à conclusão que

$P = (x, y) \in \mathcal{H} \Leftrightarrow (c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2) \Leftrightarrow b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$

portanto

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

A equação $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ é forma canônica da hipérbole $\mathcal{H}$ com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo Ox, figura (6.10).

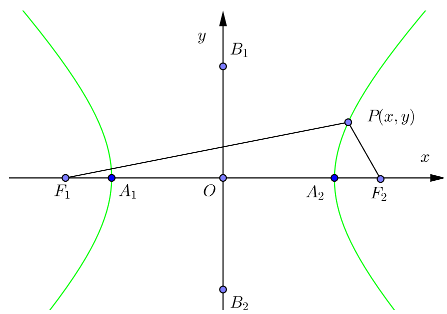

Figura 6.10: Hipérbole $\mathcal{H}$ com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo Ox

Exemplo 6.9. Os vértices de uma hipérbole $\mathcal{H}$ são $A_1 = (-4, 0)$ e $A_2 = (4, 0)$, e o comprimento de seu eixo focal é 10. Determine a equação de $\mathcal{H}$ e suas assíntotas.

Solução: Temos que $2c = 10$, isto é, $c = 5$. Além disso, $2a = 8$, isto é, $a = 4$ e $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = \sqrt{25 - 16} = 3$. Portanto, sua equação é:

$$\mathcal{H} : \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

e suas assíntotas tem equações:

$$y = \pm\frac{b}{a}.x \Rightarrow y = \pm\frac{3}{4}.x$$

6.5.2 Hipérbole $\mathcal{H}$ com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo Oy

Neste caso, os vértices e focos de $\mathcal{H}$ são: $F_1 = (0, c)$, $F_2 = (0, -c)$, $A_1 = (0, a)$, $A_2 = (0, -a)$, $B_1 = (-b, 0)$ e $B_2 = (b, 0)$, onde $b^2 = c^2 - a^2$.

Analogamente ao caso em que a hipérbole $\mathcal{H}$ com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo Ox, desenvolvendo os calculos, verificamos que a equação da hipérbole $\mathcal{H}$ é:

$$\mathcal{E} : \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Que é forma canônica da hipérbole $\mathcal{H}$ com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo Oy, figura (6.11).

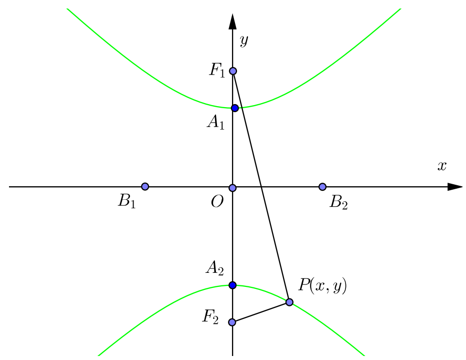

Figura 6.11: Hipérbole $\mathcal{H}$ com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo Oy

Exemplo 6.10. Os vértices de uma hipérbole $\mathcal{H}$ são $A_1 = (0, 4)$ e $A_2 = (0, -4)$, e o comprimento de seu eixo focal é 10. Determine a equação de $\mathcal{H}$ e suas assíntotas.

Solução: Temos que $2c = 10$, isto é, $c = 5$. Além disso, $2a = 8$, isto é, $a = 4$ e $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = \sqrt{25 - 16} = 3$. Portanto, sua equação é:

$$\mathcal{H} : \frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$$

e suas assíntotas tem equações:

$$y = \pm\frac{a}{b}.x \Rightarrow y = \pm\frac{4}{3}.x$$

6.5.3 Hipérbole $\mathcal{H}$ com centro no ponto $O' = (x_0, y_0)$ e reta focal paralela ao eixo Ox

Considere a equação da hipérbole $\mathcal{H}$ na forma canônica $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo Ox, a partir daí seja $x'O'y'$ o sistema de eixos ortogonais obtido transladando os sistema xOy para a nova origem $O' = (x_0, y_0)$. De acordo com o foi visto na seção (5.3.3), sobre tranlação dos eixos, se é dada uma translação no sistema xOy, de modo que a nova origem seja $O' = (x_0, y_0)$, podemos tomar suas coordenadas em relação a cada um dos dois sistemas xOy e $x'O'y'$ da seguinte forma:

$$x = x' + x_0 \Rightarrow x' = x - x_0$$

e

$$y = y' + y_0 \Rightarrow y' = y - y_0$$

Substituindo estas relações na equação $\dfrac{x'^2}{a^2} - \dfrac{y'^2}{b^2} = 1$ obtemos,

$\dfrac{x'^2}{a^2} - \dfrac{y'^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \dfrac{(x-x_0)^2}{a^2} - \dfrac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$

Portanto, a forma canônica da equação da hipérbole $\mathcal{E}$ com centro no ponto $O' = (x_0, y_0)$ e eixo focal paralelo ao eixo Ox é:

$$\mathcal{E} : \frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

O esboço da hipérbole é mostrado na figura (6.12)

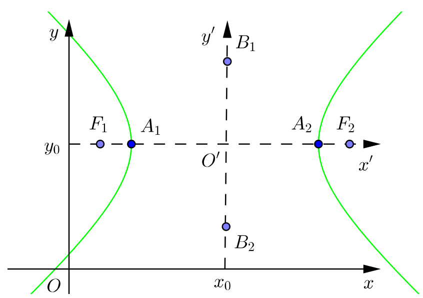

Figura 6.12: $\mathcal{H} : \dfrac{(x-x_0)^2}{a^2} - \dfrac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$

Exemplo 6.11. Os focos de uma hipérbole $\mathcal{H}$ são $F_1 = (2, 4)$ e $F_2 = (6, 4)$, e o comprimento de seu eixo não focal é 2. Determine a equação de $\mathcal{H}$, seus vértices e sua excentricidade.

Solução: Como $F_1 = (2, 4)$ e $F_2 = (6, 4)$ são os focos da elipse, sua reta focal é $r : y = 4$ (paralela ao eixo Ox) e seu centro é $C = \dfrac{F_1 + F_2}{2} = (4, 4)$. Além disso, $2b = 2$, isto é, $b = 1$, $c = d(C, F_1) = d(C, F_2) = 2$ e $a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$. Portanto, $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$; $A_1 = (4-\sqrt{3}, 4)$ e $A_2 = (4+\sqrt{3}, 4)$ são os vértices sobre a reta focal; $r' : x = 4$ é a reta não focal; $B_1 = (4, 3)$ e $B_2 = (4, 5)$ são os vértices sobre a reta não focal e sua equação é:

$$\mathcal{E} : \frac{(x-4)^2}{3} - \frac{(y-4)^2}{1} = 1$$

6.5.4 Hipérbole $\mathcal{H}$ com centro no ponto $O' = (x_0, y_0)$ e reta focal paralela ao eixo Oy

Analogamente ao caso anterior em que a hipérbole $\mathcal{H}$ com centro no ponto $O' = (x_0, y_0)$ e eixo focal paralelo ao eixo Ox, considerando a translação e as relações entre as coordenadas temos que a hipérbole $\mathcal{H}$ com centro no ponto $O' = (x_0, y_0)$ e reta focal paralela ao eixo Oy é dada por

$$\mathcal{H} : \frac{(y - y_0)^2}{a^2} - \frac{(x - x_0)^2}{b^2} = 1$$

O esboço da hipérbole é mostrado na figura (6.13)

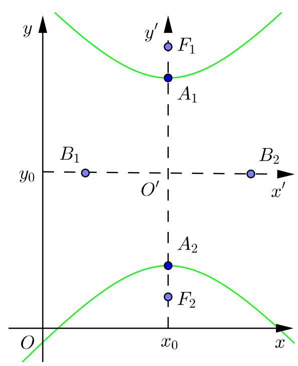

Figura 6.13: $\mathcal{H} : \dfrac{(y - y_0)^2}{a^2} - \dfrac{(x - x_0)^2}{b^2} = 1$

Exemplo 6.12. Os focos de uma Hipérbole $\mathcal{H}$ são $F_1 = (3, 8)$ e $F_2 = (3, 2)$, e o comprimento de seu eixo não focal é 4. Determine a equação de $\mathcal{H}$, seus vértices e sua excentricidade.

Solução: Como $F_1 = (3, 8)$ e $F_2 = (3, 2)$ são os focos da elipse, sua reta focal é $r : x = 3$ (paralela ao eixo Oy) e seu centro é $C = \dfrac{F_1 + F_2}{2} = (3, 5)$. Além disso, $2b = 4$, isto é, $b = 2$, $c = d(C, F_1) = d(C, F_2) = 3$ e $a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{9 - 4} = \sqrt{5}$. Portanto, $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{3}{\sqrt{5}}$; $A_1 = (3, 5 + \sqrt{5})$ e $A_2 = (3, 5 - \sqrt{5})$ são os vértices sobre a reta focal; $r' : y = 5$ é a reta não focal; $B_1 = (1, 5)$ e $B_2 = (5, 5)$ são os vértices sobre a reta não focal e sua equação é:

$$\mathcal{H} : \frac{(y - 3)^2}{5} - \frac{(x - 3)^2}{4} = 1$$

6.5.5 Reconhecimento da hipérbole $\mathcal{H}$

Recordemos que a equação na forma, $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ com $A \neq 0$, com coeficientes reais, pode ser um círculo ou uma elipse. Vamos analisar os coeficientes para que a equação seja uma hipérbole.

Vamos considerar a forma canônica da hipérbole $\mathcal{H}$ com centro no ponto $O' = (x_0, y_0)$ reta focal paralela ao o eixo Ox, no qual temos:

$$\mathcal{E} : \frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

Desenvolvendo esta equação obtemos:

$$b^2x^2 - a^2y^2 - 2b^2x_0x + 2a^2y_0y + b^2x_0^2 - a^2y_0^2 - a^2b^2 = 0$$

Comparando com a equação,

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

E igualando os coeficientes encontramos,

$A = b^2, B = 0, C = -a^2, D = -2b^2x_0, E = 2a^2y_0$ e $F = b^2x_0^2 - a^2y_0^2 - a^2b^2$.

Portanto, quando $B = 0$ e $AC < 0$ a equação representa uma hipérbole.

Analogamente, vale para a equação da hipérbole com centro no ponto $O'(x_0, y_0)$ e reta focal paralela ao eixo Oy.

Exemplo 6.13. Verifique se a equação $3x^2 - y^2 + 18x + 8y + 38 = 0$ representa uma hipérbole. Caso seja uma hipérbole, determine seus principais elementos.

Solução: Como $B = 0$ e $AC < 0$ a equação representa uma hipérbole.

Completando os quadrados, obtemos:
$3(x^2 + 6x) - (y^2 - 8y) = -38 \Leftrightarrow 3(x^2 + 6x + 9) - (y^2 - 8y + 16) = -38 + 3 \cdot 9 - 16 \Leftrightarrow$
$3(x + 3)^2 - (y - 4)^2 = -27 \Leftrightarrow (y - 4)^2 - 3(x + 3)^2 = 27 \Leftrightarrow \dfrac{(y - 4)^2}{27} - \dfrac{(x + 3)^2}{9} = 1.$
Logo, a equação representa uma hipérbole com:

- $a = 3\sqrt{3}, b = 3$ e $c = \sqrt{27 + 9} = 6$;
- centro: $C = (-3, 4)$;
- reta focal: $r : x = -3$, paralela ao eixo Oy;
- reta não focal: $r' : y = 4$, paralela ao eixo Ox;
- vértices sobre a reta focal: $A_1 = (-3, 4 + 3\sqrt{3})$ e $A_2 = (-3, 4 - 3\sqrt{3})$;
- vértices sobre a reta não focal: $B_1 = (-6, 4)$ e $B_2 = (0, 4)$;
- focos: $F_1 = (-3, 10)$ e $F_2 = (-3, -2)$.

6.6 Parábola

Definição 6.14. Sejam $\mathcal{L}$ uma reta e F um ponto do plano não pertencente a $\mathcal{L}$. A parábola $\mathcal{P}$ de foco F e diretriz $\mathcal{L}$ é o lugar geométrico dos pontos $P = (x, y)$ do plano cuja distância a F é igual à sua distância a $\mathcal{L}$.

$$\mathcal{P} = \{P|d(P, F) = d(P, \mathcal{L})\}.$$

Os principais elementos da parábola são:

- Foco: Como dito na definição (6.14), F é o foco da parábola $\mathcal{P}$;
- Reta diretriz $\mathcal{L}$: Como dito na definição (6.14), $\mathcal{L}$ é reta diretriz da parábola $\mathcal{P}$;
- Reta focal l: É a reta que contém o foco e é perpendicular à reta diretriz;
- Vértice sobre a reta focal: O ponto V da parábola $\mathcal{P}$ que pertence à reta focal é o vértice de $\mathcal{P}$;
- Parâmetro da parábola $\mathcal{P}$: O número $2p = d(F, \mathcal{L})$ é o parâmetro da parábola $\mathcal{P}$. Note que $d(V, F) = d(V, \mathcal{L}) = p$.

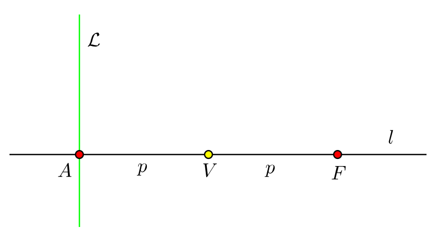

Figura 6.14: Principais elementos da parábola

6.7 Formas canônicas da parábola

Consideremos agora um sistema de eixos ortogonais xOy. Vamos determinar a equação da parábola $\mathcal{P}$ com vértice na origem e reta focal coincidente com o eixo Ox, parábola com vértice na origem e reta focal coincidente com o eixo Oy e parábola com vértice no ponto $O' = (x_0, y_0) \neq (0, 0)$.

6.7.1 Parábola com vértice na origem e reta focal coincidente com o eixo Ox

Temos dois casos a considerar, eles são: O foco F está à direita da diretriz $\mathcal{L}$ e o foco F está à esquerda da diretriz $\mathcal{L}$.

O foco F está à direita da diretriz $\mathcal{L}$

Neste caso, o vértice, foco e a reta diretriz de $\mathcal{P}$ são: $V = (0,0)$, $F = (p,0)$, $\mathcal{L} : x = -p$ onde $2p = d(F, \mathcal{L})$. Logo, a partir da definição temos:

$P = (x,y) \in P \Leftrightarrow d(P,F) = d(P,\mathcal{L}) \Leftrightarrow \sqrt{(x-p)^2 + y^2} = |x+p| \Leftrightarrow (x-p)^2 + y^2 = (x+p)^2 \Leftrightarrow x^2 - 2px + p^2 + y^2 = x^2 + 2px + p^2 \Leftrightarrow -2px + y^2 = 2px \Leftrightarrow y^2 = 4px$.

A equação $y^2 = 4px$ é forma canônica da parábola $\mathcal{P}$ com vértice na origem, reta focal coincidente com o eixo Ox e o foco F está à direita da diretriz $\mathcal{L}$, figura (6.15).

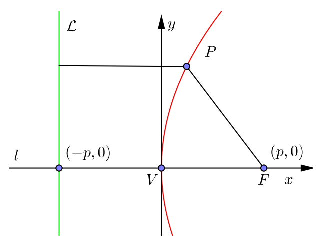

Figura 6.15: Parábola $\mathcal{P}$ com vértice na origem, reta focal coincidente com o eixo Ox e o foco F está à direita da diretriz $\mathcal{L}$

Exemplo 6.15. Determine a equação da parábola $\mathcal{P}$ com vértice V na origem, cujo foco é o ponto $F = (3,0)$.

Solução: Temos $p = d(V,F) = 3$ e a reta focal é eixo Ox. Como o foco F está à direita do vértice, temos que a diretriz é a reta $\mathcal{L} : x = -3$ e a equação da parábola é $\mathcal{P} : y^2 = 12x$.

6.7.2 O foco F está à esquerda da diretriz $\mathcal{L}$

Neste caso, o vértice, foco e a reta diretriz de $\mathcal{P}$ são: $V = (0,0)$, $F = (-p,0)$, $\mathcal{L} : x = p$ onde $2p = d(F, \mathcal{L})$. Logo, a partir da definição temos:

$P = (x,y) \in P \Leftrightarrow d(P,F) = d(P,\mathcal{L}) \Leftrightarrow \sqrt{(x+p)^2 + y^2} = |x-p| \Leftrightarrow (x+p)^2 + y^2 = (x-p)^2 \Leftrightarrow x^2 + 2px + p^2 + y^2 = x^2 - 2px + p^2 \Leftrightarrow 2px + y^2 = -2px \Leftrightarrow y^2 = -4px$.

A equação $y^2 = -4px$ é forma canônica da parábola $\mathcal{P}$ com vértice na origem, reta focal coincidente com o eixo Ox e o foco F está à esquerda da diretriz $\mathcal{L}$, figura (6.16).

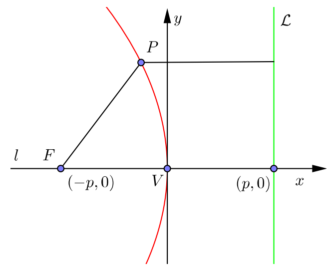

Figura 6.16: Parábola $\mathcal{P}$ com vértice na origem, reta focal coincidente com o eixo Ox e o foco F está à direita da diretriz $\mathcal{L}$

Exemplo 6.16. Determine a equação da parábola $\mathcal{P}$ com vértice V na origem, cujo foco é o ponto $F = (-3, 0)$.

Solução: Temos $p = d(V, F) = 3$ e a reta focal é eixo Ox. Como o foco F está à esquerda do vértice, temos que a diretriz é a reta $\mathcal{L} : x = 3$ e a equação da parábola é $\mathcal{P} : y^2 = -12x$.

6.7.3 Parábola com vértice na origem e reta focal coincidente com o eixo Oy

Temos dois casos a considerar, eles são: O foco F está acima da diretriz $\mathcal{L}$ e o foco F está abaixo da diretriz $\mathcal{L}$.

6.7.4 O foco F está acima da diretriz $\mathcal{L}$

Neste caso, o vértice, foco e a reta diretriz de $\mathcal{P}$ são: $V = (0, 0)$, $F = (0, p)$, $\mathcal{L} : y = -p$ onde $2p = d(F, \mathcal{L})$. Logo, a partir da definição temos:

$$P = (x, y) \in P \Leftrightarrow d(P, F) = d(P, \mathcal{L}) \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (y - p)^2} = |x + p| \Leftrightarrow x^2 = 4py.$$

A equação $x^2 = 4py$ é forma canônica da parábola $\mathcal{P}$ com vértice na origem, reta focal coincidente com o eixo Oy e o foco F está acima da diretriz $\mathcal{L}$, figura (6.17).

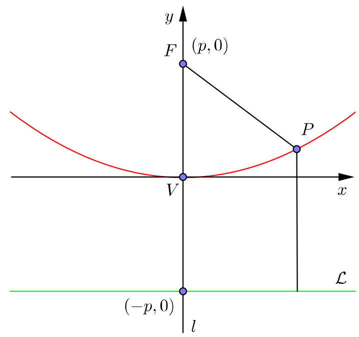

Figura 6.17: Parábola $\mathcal{P}$ com vértice na origem, reta focal coincidente com o eixo Oy e o foco F está acima da diretriz $\mathcal{L}$

Exemplo 6.17. Determine a equação da parábola $\mathcal{P}$ com vértice V na origem, cujo foco é o ponto $F = (0, 3)$.

Solução: Temos $p = d(V, F) = 3$ e a reta focal é eixo Oy. Como o foco F está à acima do vértice, temos que a diretriz é a reta $\mathcal{L} : y = -3$ e a equação da parábola é $\mathcal{P} : x^2 = 12y$.

6.7.5 O foco F está abaixo da diretriz $\mathcal{L}$

Neste caso, o vértice, foco e a reta diretriz de $\mathcal{P}$ são: $V = (0, 0)$, $F = (0, -p)$, $\mathcal{L} : y = p$ onde $2p = d(F, \mathcal{L})$. Logo, a partir da definição temos:

$$P = (x, y) \in P \Leftrightarrow d(P, F) = d(P, \mathcal{L}) \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (y+p)^2} = |x - p| \Leftrightarrow x^2 = -4py.$$

A equação $x^2 = -4py$ é forma canônica da parábola $\mathcal{P}$ com vértice na origem, reta focal coincidente com o eixo Oy e o foco F está abixo da diretriz $\mathcal{L}$, figura (6.18).

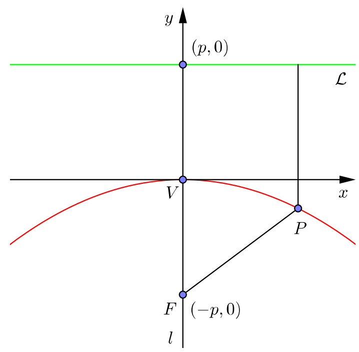

Figura 6.18: Parábola $\mathcal{P}$ com vértice na origem, reta focal coincidente com o eixo Oy e o foco F está abaixo da diretriz $\mathcal{L}$

Exemplo 6.18. Determine a equação da parábola $\mathcal{P}$ com vértice V na origem, cujo foco é o ponto $F = (0, -3)$.

Solução: Temos $p = d(V, F) = 3$ e a reta focal é eixo Oy. Como o foco F está à abaixo do vértice, temos que a diretriz é a reta $\mathcal{L} : y = -3$ e a equação da parábola é $\mathcal{P} : x^2 = -12y$.

6.7.6 Parábola com vértice $V' = (x_0, y_0)$ e reta focal paralela com o eixo Ox

De maneira análoga ao que foi feito para a elipse e a hipérbole nos capítulos anteriores, para obtermos a forma canônica da parábola $\mathcal{P}$ de vértice no ponto $V' = (x_0, y_0) \neq (0, 0)$ e reta focal paralela ao eixo Ox, vamos considerar o sistema de eixos ortogonais $x'O'y'$, com origem $O' = V' = (x_0, y_0)$ e eixos Ox' e Oy' que têm a mesma direção e mesmo sentido dos eixos Ox e Oy, respectivamente.

6.7.7 O foco F está à direita da diretriz $\mathcal{L}$

Considere a equação da parábola $\mathcal{P}$ na forma canônica $y^2 = 4px$ com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo Ox, a partir daí seja $x'O'y'$ o sistema de eixos ortogonais obtido transladando os sistema xOy para a nova origem $O' = (x_0, y_0)$. De acordo com o foi visto na seção (5.3.3), sobre tranlação dos eixos, se é dada uma translação no sistema xOy, de modo que a nova origem seja $O' = (x_0, y_0)$, podemos tomar suas coordenadas em relação a cada um dos dois sistemas xOy e $x'O'y'$ da seguinte forma:

$$x = x' + x_0 \Rightarrow x' = x - x_0$$

e

$$y = y' + y_0 \Rightarrow y' = y - y_0$$

Substituindo estas relações na equações ${y'}^2 = 4px'$ obtemos,
${y'}^2 = 4px' \Rightarrow (y - y_0)^2 = 4p(x - x_0)$

Portanto, a forma canônica da equação da parábola $\mathcal{P}$ com vértice no ponto $V' = (x_0, y_0)$ e eixo focal paralelo ao eixo Ox é:

$$\mathcal{P} : (y - y_0)^2 = 4p(x - x_0)$$

O esboço da parábola é mostrado na figura (6.19)

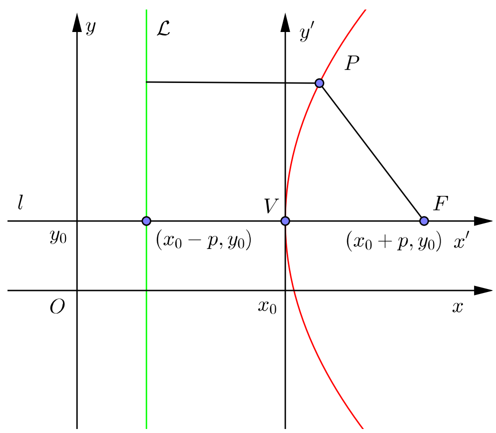

Figura 6.19: $\mathcal{P} : (y - y_0)^2 = 4p(x - x_0)$

Exemplo 6.19. Determine a equação da parábola $\mathcal{P}$ de vértice $V = (3, 3)$ e foco $F = (4, 3)$. Encontre também a equação de sua diretriz.

Solução: Como $V = (3, 3)$ e $F = (4, 3)$, a reta focal é $l : y = 3$ e F está à direita de V, ou seja, à direita da diretriz $\mathcal{L}$. Logo, a equação da parábola é da forma: $\mathcal{P} : (y - 3)^2 = 4p(x - 3)$. Sendo $p = d(V, F) = 1$, temos que $\mathcal{L} : x = 2$ é a diretriz e $\mathcal{P} : (y - 3)^2 = 4(x - 3)$ é a equação da parábola.

6.7.8 O foco F está à esquerda da diretriz $\mathcal{L}$

Considere a equação da parábola $\mathcal{P}$ na forma canônica $x^2 = -4py$ com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo Ox, a partir daí seja $x'O'y'$ o sistema de eixos ortogonais obtido transladando os sistema xOy para a nova origem $O' = (x_0, y_0)$. De acordo com o foi visto na seção (5.3.3), sobre tranlação dos eixos, se é dada uma translação no sistema xOy, de modo que a nova origem seja $O' = (x_0, y_0)$, podemos tomar suas coordenadas em relação a cada um dos dois sistemas xOy e $x'O'y'$ da seguinte forma:

$$x = x' + x_0 \Rightarrow x' = x - x_0$$

e

$$y = y' + y_0 \Rightarrow y' = y - y_0$$

Substituindo estas relações na equações ${x'}^2 = -4py'$ obtemos,
${x'}^2 = -4py' \Rightarrow (y - y_0(x - x_0)^2 = -4p(y - y_0)$

Portanto, a forma canônica da equação da parábola $\mathcal{P}$ com centro no ponto $V' = (x_0, y_0)$ e eixo focal paralelo ao eixo Ox é:

$$\mathcal{P} : (y - y_0)^2 = -4p(x - x_0)$$

O esboço da parábola é mostrado na figura (6.20)

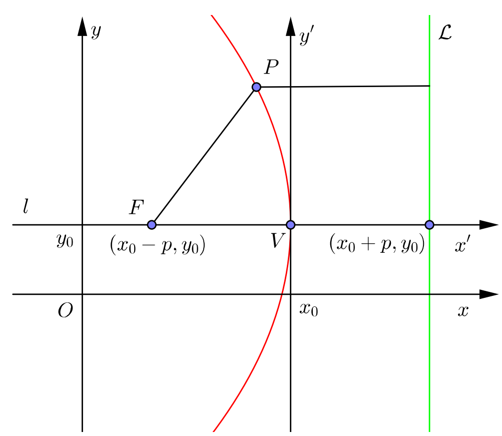

Figura 6.20: $\mathcal{P} : (y - y_0)^2 = -4p(x - x_0)$

Exemplo 6.20. Determine a equação da parábola $\mathcal{P}$ de vértice $V = (3, 3)$ e foco $F = (2, 3)$. Encontre também a equação de sua diretriz.

Solução: Como $V = (3, 3)$ e $F = (2, 3)$, a reta focal é $l : y = 3$ e F está à esquerda de V, ou seja, à esquerda da diretriz $\mathcal{L}$. Logo, a equação da parábola é da forma: $\mathcal{P} : (y - 3)^2 = -4p(x - 3)$. Sendo $p = d(V, F) = 1$, temos que $\mathcal{L} : x = 4$ é a diretriz e $\mathcal{P} : (y - 3)^2 = -4(x - 3)$ é a equação da parábola.

6.7.9 Parábola com vértice $V' = (x_0, y_0)$ e reta focal paralela com o eixo Oy

De maneira análoga ao que foi feito para a elipse e a hipérbole nos capítulos anteriores, para obtermos a forma canônica da parábola $\mathcal{P}$ de vértice no ponto $V' = (x_0, y_0)$ e reta focal paralela ao eixo Oy, vamos considerar o sistema de eixos ortogonais $x'O'y'$, com origem $O' = V' = (x_0, y_0)$ e eixos Ox' e Oy' que têm a mesma direção e mesmo sentido dos eixos Ox e Oy, respectivamente.

6.7.10 O foco F está acima da diretriz $\mathcal{L}$

Considere a equação da parábola $\mathcal{P}$ na forma canônica $x^2 = 4py$ com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo Oy, a partir daí seja $x'O'y'$ o sistema de eixos ortogonais obtido transladando os sistema xOy para a nova origem $O' = (x_0, y_0)$. De acordo com o foi visto na seção (5.3.3), sobre tranlação dos eixos, se é dada uma translação no sistema xOy, de modo que a nova origem seja $O' = (x_0, y_0)$, podemos tomar suas coordenadas em relação a cada um dos dois sistemas xOy e $x'O'y'$ da seguinte forma:

$$x = x' + x_0 \Rightarrow x' = x - x_0$$

e

$$y = y' + y_0 \Rightarrow y' = y - y_0$$

Substituindo estas relações na equações $x'^2 = 4py'$ obtemos,

$x'^2 = 4py' \Rightarrow (x - x_0)^2 = 4p(y - y_0)$

Portanto, a forma canônica da equação da parábola $\mathcal{P}$ com vértice no ponto $V' = (x_0, y_0)$ e eixo focal paralelo ao eixo Oy é:

$$\mathcal{P} : (x - x_0)^2 = 4p(y - y_0)$$

O esboço da parábola é mostrado na figura (6.21)

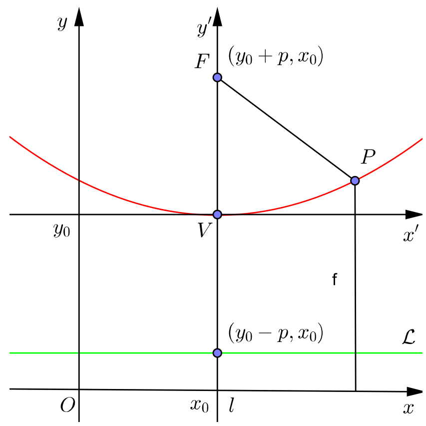

Figura 6.21: $\mathcal{P} : (x - x_0)^2 = 4p(y - y_0)$

Exemplo 6.21. Determine a equação da parábola $\mathcal{P}$ de vértice $V = (3, 2)$ e foco $F = (3, 4)$. Encontre também a equação de sua diretriz.

Solução: Como $V = (3, 2)$ e $F = (3, 4)$, a reta focal é $l : x = 3$ e F está acima de V, ou seja, acima da diretriz $\mathcal{L}$. Logo, a equação da parábola é da forma: $\mathcal{P} : (x - 3)^2 = 4p(y - 2)$. Sendo $p = d(V, F) = 2$, temos que $\mathcal{L} : y = 0$ é a diretriz e $\mathcal{P} : (x - 3)^2 = 8(y - 2)$ é a equação da parábola.

6.7.11 O foco F está abaixo da diretriz $\mathcal{L}$

Considere a equação da parábola $\mathcal{P}$ na forma canônica $x^2 = -4py$ com vértice na origem e reta focal coincidente com o eixo Oy, a partir daí seja $x'O'y'$ o sistema de eixos ortogonais obtido transladando os sistema xOy para a nova origem $O' = (x_0, y_0)$. De acordo com o foi visto na seção (5.3.3), sobre tranlação dos eixos, se é dada uma translação no sistema xOy, de modo que a nova origem seja $O' = (x_0, y_0)$, podemos tomar suas coordenadas em relação a cada um dos dois sistemas xOy e $x'O'y'$ da seguinte forma:

$$x = x' + x_0 \Rightarrow x' = x - x_0$$

e

$$y = y' + y_0 \Rightarrow y' = y - y_0$$

Substituindo estas relações na equações ${x'}^2 = -4py'$ obtemos,
${x'}^2 = -4py' \Rightarrow (x - x_0)^2 = -4p(y - y_0)$

Portanto, a forma canônica da equação da parábola $\mathcal{P}$ com vértice no ponto $V' = (x_0, y_0)$ e eixo focal paralelo ao eixo Oy é:

$$\mathcal{P} : (x - x_0)^2 = -4p(y - y_0)$$

O esboço da parábola é mostrado na figura (6.22)

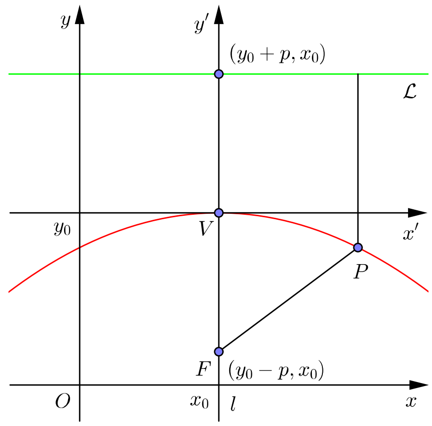

Figura 6.22: $\mathcal{P} : (x - x_0)^2 = -4p(y - y_0)$

Exemplo 6.22. Determine a equação da parábola $\mathcal{P}$ de vértice $V = (3, 4)$ e foco $F = (3, 2)$. Encontre também a equação de sua diretriz.

Solução: Como $V = (3, 4)$ e $F = (3, 2)$, a reta focal é $l : x = 3$ e F está abaixo de V, ou seja, abaixo da diretriz $\mathcal{L}$. Logo, a equação da parábola é da forma: $\mathcal{P} : (x - 3)^2 = -4p(y - 4)$. Sendo $p = d(V, F) = 2$, temos que $\mathcal{L} : y = 6$ é a diretriz e $\mathcal{P} : (x - 3)^2 = -8(y - 4)$ é a equação da parábola.

6.7.12 Reconhecimento da Parábola $\mathcal{P}$

Recordemos que a equação na forma, $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ com $A \neq 0$, com coeficientes reais, pode ser um círculo ou uma elipse ou uma hipérbole. Vamos analisar os coeficientes para que a equação seja uma parábola.

Vamos considerar a forma canônica da parábola $\mathcal{P}$ com vértice no ponto $V = (x_0, y_0)$ reta focal paralela ao o eixo Ox, no qual temos:

$$\mathcal{P} : (y - y_0)^2 = \pm 4p(x - x_0)$$

Desenvolvendo e agrupando esta equação obtemos:

$$y^2 \mp 4px - 2y_0 y + y_0^2 \pm 4px_0 = 0$$

Comparando com a equação,

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

E igualando os coeficientes encontramos,

$A = 0, B = 0, C = 1, D = \mp 4p, E = -2y_0$ e $F = y_0^2 \pm 4px_0$.
Portanto, quando $B = 0$ e $AC = 0$ a equação representa uma parábola.
Analogamente, vale para a equação da parábola com vértice no ponto $V = (x_0, y_0)$ e reta focal paralela ao eixo Oy.

Exemplo 6.23. Verifique se a equação $x^2 - 4x - 12y - 8 = 0$ representa uma parábola. Caso seja uma parábola, determine seus principais elementos.

Solução: Como $B = 0$ e $AC = 0$ a equação representa uma parábola.

Completando os quadrados e agrupando, obtemos:
$x^2 - 4x = 12y + 8 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 12y + 12 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 12(y+1) \Leftrightarrow (x-2)^2 = 4 \cdot 3(y+1)$
Logo, a equação representa uma parábola com:

- Foco $F = (2, 2)$;
- Reta diretriz $\mathcal{L} : y = -4$;
- Reta focal $l : x = 2$;
- Vértice sobre a reta focal o ponto $V = (2, -1)$;
- Parâmetro da parábola $p = 3$.

6.8 Rotação dos eixos

Consideremos o sistema de coordenadas xOy, e seja $x'O'y'$, o sistema de coordenadas obtido de xOy por uma rotação de um ângulo θ, no sentido antihorário, como mostra a figura (6.23). Sejam (x, y) e (x', y') as coordenadas de um ponto P do plano, em relação aos sistemas xOy e $x'O'y'$, respectivamente. Nosso objetivo é escrever x' e y', em função de x, y e do ângulo θ. Uma rotação de um ângulo θ transforma os vetores
$\overrightarrow{e_1} = (1, 0) \quad \text{e} \quad \overrightarrow{e_2} = (0, 1)$

nos vetores

$\overrightarrow{u_1} \quad \text{e} \quad \overrightarrow{u_2}$, onde

$\overrightarrow{u_1} = (cos\theta, sen\theta) = cos\theta\overrightarrow{e_1} + sen\theta\overrightarrow{e_2}$

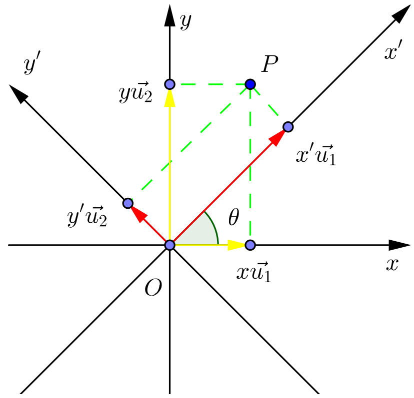

Figura 6.23: Rotação dos eixos por um ângulo θ

$\overrightarrow{u_2} = (-sen\theta, cos\theta) = -sen\theta\overrightarrow{e_1} + cos\theta\overrightarrow{e_2}.$

Para o vetor $\overrightarrow{OP}$ temos

$\overrightarrow{OP} = (x, y) = x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2},$

onde x e y são as coordenadas de P em relação ao sistema xOy. Por outro lado, como $\overrightarrow{u_1}$ e $\overrightarrow{u_2}$ são unitários e perpendiculares, temos também

$\overrightarrow{OP} = (x', y') = x'\overrightarrow{u_1} + y'\overrightarrow{u_2},$

onde x' e y' são as coordenadas de P em relação ao sistema $x'O'y'$.

Temos, então, a igualdade

$x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2} = x'\overrightarrow{u_1} + y'\overrightarrow{u_2}$

ou

$x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2} = x'(cos\theta\overrightarrow{e_1} + sen\theta\overrightarrow{e_2}) + y'(-sen\theta\overrightarrow{e_1} + cos\theta\overrightarrow{e_2})$

de onde obtemos

$x = x'cos\theta - y'sen\theta$

$y = x'sen\theta + y'cos\theta$

ou

$x' = xcos\theta + ysen\theta$

$y' = -xsen\theta + ycos\theta$

Existe uma outra forma, utilizando matrizes, de apresentar estas relações, veja como:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

ou ainda

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & sen\theta \\ -sen\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Exemplo 6.24. Seja o ponto $P = (6, 4)$. Efetuando-se uma rotação de um ângulo de $\frac{\pi}{3}$ radianos nos eixos, em relação ao novo sistema, suas coordenadas passam a ser:

Solução: De acordo com o que foi visto anteriormente, temos:

$$x' = 6 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3 + 2 \cdot \sqrt{3}$$

$$y' = -6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 4 \cdot \frac{1}{2} = -3 \cdot \sqrt{3} + 2$$

ou seja,

$P = (3 + 2 \cdot \sqrt{3}, -3 \cdot \sqrt{3} + 2)$

Capítulo 7

O espaço

7.1 Sistema de coordenadas

Conforme SANTOS [8], de maneira análoga vamos introduzir um sistema de coordenadas no espaço. Para isto inserimos o eixo z perpendicular a x e y simultaneamente e passando pela origem. No entanto o eixo z é vertical e os eixos x e y horizontais como na figura (7.1) e satisfaz a regra da mão direita. Os dedos apontam na direção do semieixo x positivo, o semieixo y positivo está na palma da mão e o polegar aponta para cima no sentido do semieixo z positivo. Desta forma temos três planos coordenados xy, yz e xz.

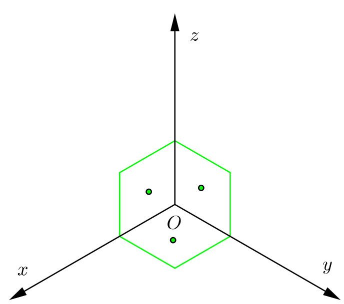

Figura 7.1: Eixos coordenadas

A cada ponto P no espaço associamos um terno de números (x, y, z), o número z é chamado de cota, simplesmente marcando os pontos $P' = (x, y)$ no plano xy, $Q' = (x, z)$ no plano xz e $R' = (y, z)$ no plano yz, além disso traçamos as retas x', y' e z' paralelas aos eixos x, y z e passando por R', Q' e P' respectivamente, a interseção dessas retas determina o ponto P assim como forma o paralelepípedo como mostra a figura (7.2).

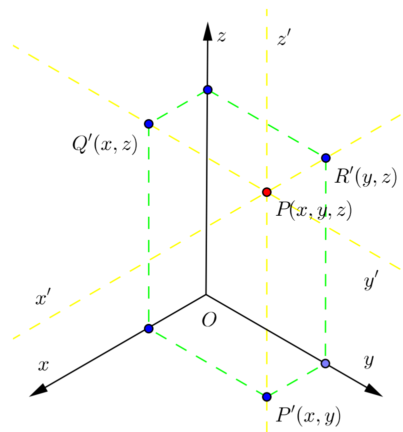

Figura 7.2: Ponto $P = (x, y, z)$ no espaço

7.2 Distância entre dois pontos

Sejam $\bar{P} = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ e $Q' = (x', y', z')$ dois pontos no espaço. Como mostra a figura (7.3), a partir de $\bar{P}$ e Q', podemos contruir um triângulo retângulo $\bar{P}Q'R$. Para o cálculo da distância de $\bar{P}$ a Q', vamos considerar os pontos auxiliares $R = (x', y', \bar{z})$, $R' = (x', y', 0)$ e $P' = (\bar{x}, \bar{y}, 0)$ e note que se forma o retângulo $R\bar{P}P'R'$ ou seja, $d(\bar{P}, R) = d(P', R')$. Assim Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo $\bar{P}Q'R$ temos:

$$d(\bar{P}, Q')^2 = d(Q', R)^2 + d(\bar{P}, R)^2$$

onde,

$d(Q', R) = |z' - \bar{z}|$ pois os pontos Q' e R estão na mesma reta paralela ao eixo z.

$d(\bar{P}, R) = d(P', R') = (x' - \bar{x})^2 + (y' - \bar{y})^2$ pois estão no plano xy.

logo,

$$d(\bar{P}, Q')^2 = |z' - \bar{z}|^2 + (x' - \bar{x})^2 + (y' - \bar{y})^2$$

Assim:

$$d(\bar{P}, Q') = \sqrt{(z' - \bar{z})^2 + (x' - \bar{x})^2 + (y' - \bar{y})^2}$$

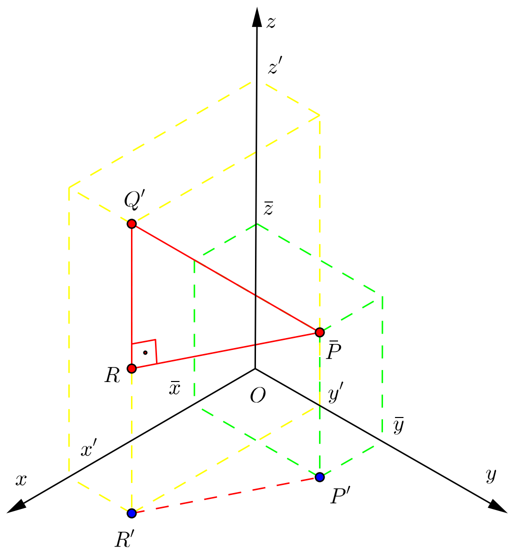

Figura 7.3: Distância entre $\bar{P}$ e Q'

Exemplo 7.1. Calcule a distância do ponto $A = (1, -2, 3)$ ao ponto $B = (-2, 3, 4)$.

Solução: Temos,

$$d(A, B) = \sqrt{((-2) - 1)^2 + (3 - (-2))^2 + (4 - 3)^2} = \sqrt{9 + 25 + 1} = \sqrt{35}$$

7.3 Esfera

Agora que sabemos calcular a distância entre dois pontos no espaço, estamos em condições de definir a esfera.

Definição 7.2. A esfera $\mathcal{S}$ de centro C e raio $r > 0$ é o conjunto formado por todos os pontos P no espaço, cuja distância ao centro C é igual a r:

$$\mathcal{S} = \{P | d(P, C) = r\}.$$

Sejam $C = (a, b, c)$ e $P = (x, y, z)$ as coordenadas do centro C e de um ponto qualquer $P = (x, y, z)$, respectivamente, de S em relação a um sistema de eixos ortogonais $Oxyz$. Então,

$$P \in S \Leftrightarrow d(P,C) = r \Leftrightarrow \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2} = r.$$

Elevando ambos os lados da igualdade ao quadrado temos a equação da esfera $\mathcal{S}$:

$$\mathcal{S} : (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 = r^2.$$

Exemplo 7.3. Mostre, completando os quadrados, que a equação de segundo grau,

$$x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z = 1$$

representa uma esfera $\mathcal{S}$ e em seguida determine o centro C e o raio r de $\mathcal{S}$.

Solução: Completando os quadrados na equação, temos:
$x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z = 1$
$\Leftrightarrow (x^2-2x)+(y^2+4y)+(z^2-6z) = 1$
$\Leftrightarrow (x^2-2x+1)+(y^2+4y+4)+(z^2-6z+9) = 1+1+4+9$
$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2 = 15.$

Logo,

$$\mathcal{S} : (x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2 = 15$$

é a equação da esfera $\mathcal{S}$, com centro $C = (1,-2,3)$ e raio $r = \sqrt{15}$.

7.4 Vetores no espaço

Vamos definir vetores no espaço de maneira análoga ao que foi definido em vetores no plano, em alguns casos, mesmo estando no espaço recairemos para o caso plano, devemos apenas tomar alguns cuidados nos casos em que for discutido sobre as retas paralelas, pois no espaço nem sempre retas que não se intersecionam são paralelas, elas podem não estar no mesmo plano, por exemplo.

Assim como no plano, que a cada par coordenado (x,y), corresponde a um ponto, temos que a cada terno $(x,,y,z)$ também corresponde um ponto, podemos também fazer correspondência ao terno (x',y',z') uma seta, como na figura (7.4), com dois extremos chamados ponto inicial ou origem e ponto final ou extremidade.

Geometricamente, vetores são representados por segmentos de retas orientados no plano ou espaço.

Com isto podemos associar ao terno (x',y',z') direção, sentido e módulo. A direção e sentido do segmento identifica a direção e o sentido do vetor e o módulo é o número

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

que é o comprimento segmento.

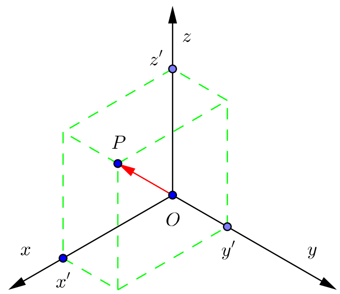

Figura 7.4: Vetor representado por uma seta

Exemplo 7.4. $\vec{v} = (4, 3, 1)$ é um vetor. A direção deste vetor é a direção da seta da figura (7.5), ou seja, é a direção da reta definida pelos pontos $O = (0, 0, 0)$ e $P = (3, 4, 1)$. O sentido de v é o de O para P. O módulo de $\vec{v}$ é o comprimento de $\overrightarrow{OP}$ que é $\sqrt{26}$.

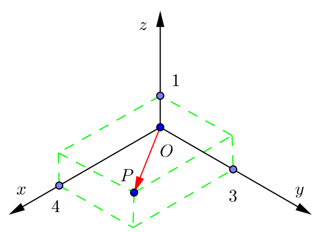

Figura 7.5: Vetor $v = (4, 3, 1)$

Inversamente, uma seta, como a da figura (7.6), pode se caracterizar por um par ordenado, através da trigonometria básica.

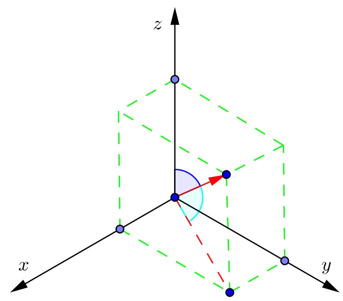

Figura 7.6: Vetor w

Ao terno $(0,0,0)$ não associamos os conceitos de direção e sentido, contudo $(0,0,0)$ é definido vetor nulo.

Existe o vetor representado por dois pontos $A = (x', y', z')$ e $B = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ como na figura (7.7), neste caso subtraímos as coordenadas correspondentes de B pelas coordenadas correspondentes de A. Logo:

$$\overrightarrow{AB} = (x', y', z') - (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (x' - \bar{x}, y' - \bar{y}, z' - \bar{z})$$

Se deslocarmos o vetor $\overrightarrow{AB}$ até a origem temos outro vetor $\overrightarrow{OP}$ com a mesma direção, sentido e módulo de $\overrightarrow{AB}$. Neste caso dizemos que os vetores são iguais.

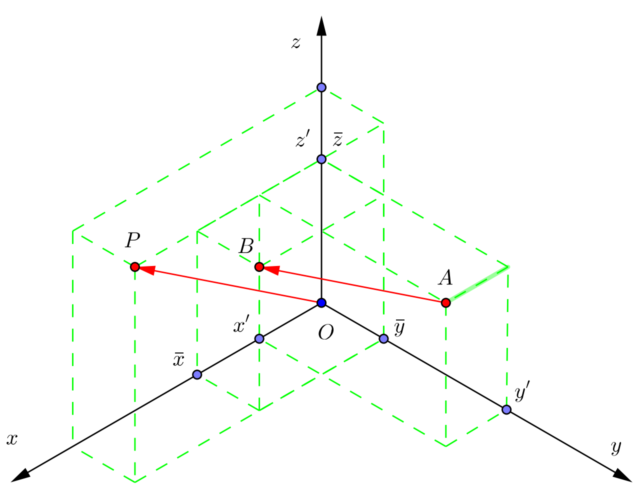

Figura 7.7: Vetores iguais

Exemplo 7.5. Dados $A = (2, 1, 3)$, $B = (3, 4, 1)$ e $O = (0, 0, 0)$, determine o ponto P tal que $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{AB}$.

Solução: Seja $P = (x, y, z)$ e de acordo com o que foi dito acima temos,

$\overrightarrow{OP} = (x - 0, y - 0, z - 0) = (x, y, z)$ e $\overrightarrow{AB} = (3 - 2, 4 - 1, 1 - 3) = (1, 3, -2)$, assim,

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{AB} \iff (x, y, z) = (1, 3, -2)$$

Logo $P = (1, 3, -2)$

7.5 Soma de vetores e multiplicação por escalar

Definição 7.6. Sejam $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Definimos:

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$$

chamada adição de vetores.

Definição 7.7. Sejam $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $k \in \mathbb{R}$. Definimos:

$$k\vec{u} = (ku_1, ku_2, ku_3)$$

chamada multiplicação de um vetor por um número.

Observação: A adição e multiplicação de um escalar por um vetor no espaço satisfazem as mesmas propriedades que a adição e multiplicação de um escalar por um vetor no plano.

Exemplo 7.8. Se $\vec{v} = (1, -2, 3)$, $\vec{v} = (2, 4, -1)$, calcule $\vec{v} + \vec{v}$ e $3\vec{v}$.

Solução:

$$\vec{v} + \vec{v} = (1 + 2, -2 + 4, 3 + (-1)) = (3, 2, 2)$$

e

$$3\vec{v} = (3.1, 3.(-2), 3.3) = (3, -6, 9).$$

7.6 Norma e produto interno

Definição 7.9. A norma ou comprimento do vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ no espaço é o número:

$$||\vec{v}|| = d(A, B)$$

Definição 7.10. O ângulo $\angle(\vec{u}, \vec{v})$ entre dois vetores $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ não nulos é o menor ângulo formado pelos segmentos AB e AC, medido no plano ABC que contém os pontos A, B e C.

Definição 7.11. O produto escalar ou interno de dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ no espaço é definido por:

$$< \vec{u}, \vec{v} >= \begin{cases} 0 & se \quad \vec{u} = (0,0) \quad ou \quad \vec{v} = (0,0), \\ ||\vec{u}||.||\vec{v}||cos\theta & se \quad \vec{u} \neq (0,0) \quad e \quad \vec{v} \neq (0,0). \end{cases}$$

em que θ é o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Observação 1: O produto interno de dois vetores $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ no espaço em termos de suas coordenadas é a mesma que no plano ou seja,

$$< \vec{u}, \vec{v} >= u_1.v_1 + u_2.v_2 + u_3.v_3$$

Observação 2: A noção de perpendicularidade entre dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ no espaço é a mesma que no plano ou seja,

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow < \vec{u}, \vec{v} >= 0$$

7.7 Produto vetorial

O produto vetorial só faz sentido para vetores no espaço e o resultado será um vetor.

Definição 7.12. Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vetores no espaço, o produto vetorial, $\vec{u} \times \vec{v}$ é o vetor com as seguintes características:

a) Tem comprimento dado por,

$$||\vec{u} \times \vec{v}||= ||\vec{u}||.||\vec{v}||. \sin\theta$$

ou seja, $||\vec{u} \times \vec{v}||$ é igual a área do paralelogramo determinado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$, como mostra a figura (7.8).

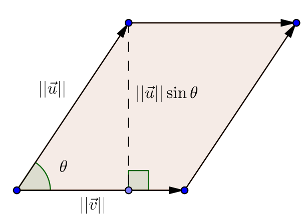

Figura 7.8: Produto vetorial como área do paralelogramo

b) Tem direção perpendicular a $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

c) Tem o sentido dado pela regra da mão direita: Se o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é θ, giramos o vetor $\vec{u}$ de um ângulo θ até que coincida com $\vec{v}$ e acompanhamos este movimento com os dedos da mão direita, então o polegar vai apontar no sentido de $\vec{u} \times \vec{v}$.

Agora, para obter uma fórmula que dê o produto vetorial de dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ em termos das suas coordenadas, vamos utilizar um dispositivo prático que consiste em calcular o determinante de uma matriz 3×3 onde os elementos da primeira linha são os vetores canônicos:

$$\vec{i} = (1,0,0)$$
$$\vec{j} = (0,1,0)$$
$$\vec{k} = (0,0,1)$$

cuja norma é igual a 1 e são perpendiculares entre si, os elementos da segunda linha são as coordenadas de $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e os elementos da terceira linhas são as coordenadas de $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, assim temos:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \det \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \det \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} .\vec{i} - \det \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} .\vec{j} + \det \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} .\vec{k}$$

logo,

$$\vec{u} \times \vec{v} = \left(\det \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} , \det - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} , \det \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right)$$

Exemplo 7.13. Se $\vec{v} = (1,-2,3)$ e $\vec{u} = (2,4,-1)$, calcule $||\vec{v} \times \vec{u}||$.

Solução: Temos:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \det \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \end{vmatrix} = \left(\det \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} , -\det \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} , \det \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \right) = (-10, 7, 3)$$

portanto,

$$||\vec{u} \times \vec{v}|| = \sqrt{(-10)^2 + (7)^2 + (3)^2} = \sqrt{158}$$

Exemplo 7.14. Calcule a área S do triângulo ABC no qual $A = (3, 2, 0)$, $B = (0, 4, 3)$ e $C = (1, 0, 2)$.

Solução: A área do triângulo ABC é a metade da área do paralelogramo com lados determinados por $\vec{u}$ e $\vec{v}$, em que,

$$\vec{u} = \overrightarrow{CA} = (3-1, 2-0, 0-2) = (2, 2, -2)$$
$$\vec{v} = \overrightarrow{CB} = (0-1, 4-0, 3-2) = (-1, 4, 1)$$

Temos:

$$\vec{u}\times\vec{v} = \det\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & -2 \\ -1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \left(\det\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \ , -\det\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \ , \det\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} \right) = (12, 0, 6)$$

portanto,

$$||\vec{u} \times \vec{v}|| = \sqrt{(12)^2 + (0)^2 + (6)^2} = \sqrt{180} = 6\sqrt{5}$$

Assim

$$S = \frac{1}{2}.||\vec{u} \times \vec{v}|| = 3\sqrt{5}$$

7.8 Produto misto

O produto $< \vec{u} \times \vec{v}, \vec{w} >$ é chamado de produto misto de $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$. Segue o resultado para o calculo do produto misto usando as coordenadas dos vetores.

Teorema 7.15. Sejam $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ e $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$. Então, $< \vec{u} \times \vec{v}, \vec{w} >= \det\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}$

Demonstração. Segue dos resultados anteriores sobre produto interno, produto vetorial e das definições sobre determinante de matrizes que

$$< \vec{u} \times \vec{v}, \vec{w} >= (w_1, w_2, w_3).\left(\det\begin{bmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{bmatrix} \ , -\det\begin{bmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{bmatrix} \ , \det\begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{bmatrix} \right)$$

$$= w_1.\det\begin{bmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{bmatrix} \quad -w_2.\det\begin{bmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{bmatrix} \quad +w_3.\det\begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{bmatrix}$$

$$= \det\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}$$

Exemplo 7.16. Calcule o produto misto entre os vetores $\vec{u} = (2, -1, 3)$, $\vec{v} = (-1, 4, 1)$ e $\vec{w} = (5, 1, -2)$.

Solução: Temos

$$< \vec{u} \times \vec{v}, \vec{w} >= \det\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \\ 5 & 1 & -2 \end{bmatrix} = -84$$

7.8.1 Interpretação geométrica do produto misto

O módulo do produto misto entre $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ é igual ao volume V do paralelepípedo determinado por $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$. De acordo com o próximo teorema.

Teorema 7.17. Sejam $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ então

$$|< \vec{u} \times \vec{v}, \vec{w} > |$$

é igual ao volume do paralelepípedo determinado por $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$

Demonstração. O volume do paralelepípedo é dado pelo produto da área da base pela altura, no caso do paralelepípedo determinado por $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ temos que a área da base é o produto vetorial $\vec{u} \times \vec{v}$ e a altura $h = ||\vec{w}|||\cos\theta|$ onde θ é o ângulo formado pelos vetores $< \vec{u} \times \vec{v} >$ e $\vec{w}$ como mostra a figura (7.9).Assim

$$V = ||\vec{u} \times \vec{v}||.h = ||\vec{u} \times \vec{v}||.||\vec{w}|||\cos\theta|= |< \vec{u} \times \vec{v}, \vec{w} > |$$

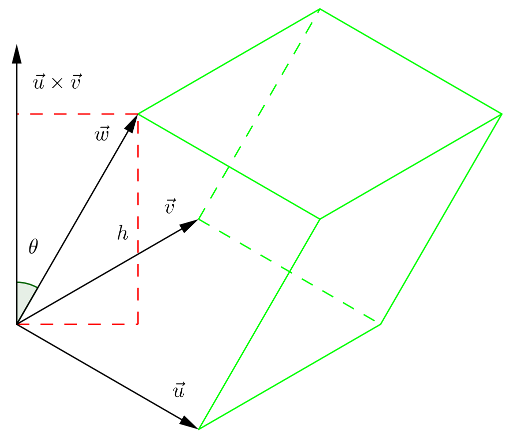

Figura 7.9: Volume do paralelepípedo determinado por $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$

Exemplo 7.18. Calcule o volume V do paralelepípedo com um vértice na origem e aresta adjacentes determinadas por $\vec{u} = (4, 3, 2)$, $\vec{v} = (-1, 0, 2)$ e $\vec{w} = (5, 2, -1)$.

Solução: $V = |< \vec{u} \times \vec{v}, \vec{w} > | = |\det \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 5 & 2 & -1 \end{bmatrix} | = |7| = 7$

7.8.2 Critério de clopanaridade

Podemos traduzir as propriedades do produto misto em propriedades do determinante de uma matriz 3×3, uma delas é a que segue:

Corolário 7.19. Sejam $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$, estes são coplanares ou seja, são paralelos a um mesmo plano se, e somente se,

$$< \vec{u} \times \vec{v}, \vec{w} > = \det \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix} = 0$$

Exemplo 7.20. Verifique que os pontos $A = (0, 1, 1)$, $B = (1, 0, 2)$, $C = (1, -2, 0)$ e $D = (-2, 2, -2)$ são coplanares, isto é, pertencem a um mesmo plano.

Solução: Com estes pontos podemos construir os vetores

$$\overrightarrow{AB} = (1 - 0, 0 - 1, 2 - 1) = (1, -1, 1)$$

$$\overrightarrow{AC} = (1 - 0, -2 - 1, 0 - 1) = (1, -3, -1)$$

$$\overrightarrow{AD} = (-2 - 0, 2 - 1, -2 - 1) = (-2, 1, -3)$$

Os pontos A, B, C e D pertencem a um mesmo plano se, e somente se, os vetores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AD}$ são coplanares. E isto acontece se, e somente se, o produto misto deles é igual zero.

$$< \vec{u} \times \vec{v}, \vec{w} >= \det \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \\ -2 & 1 & -3 \end{bmatrix} = 0$$

Portanto, A, B, C e D são coplanares.

7.9 Equação do plano

Vamos utilizar os conceitos de produto interno visto nos capítulos anterios para encontrarmos as equações cartesiana e paramétrica do plano.

7.9.1 Equação cartesiana do plano

Sejam π o plano que passa pelo ponto A(x',y',z') e é normal ao vetor $\vec{u} = (a, b, c)$ e $P(x, y, z)$. Então:

$$P \in \pi \Leftrightarrow \overrightarrow{AP} \perp \vec{u} \Leftrightarrow < \overrightarrow{AP}, \vec{u} >= 0$$

Logo

$$\begin{aligned} P \in \pi &\Leftrightarrow < \overrightarrow{AP}, \vec{u} >= 0 \\ &\Leftrightarrow < (x - x', y - y', z - z'), (a, b, c) >= 0 \\ &\Leftrightarrow < a(x - x') + b(y - y') + c(z - z') = 0 \\ &\Leftrightarrow a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z = a \cdot x' + b \cdot y' + c \cdot z'. \end{aligned}$$

Assim

$P \in \pi$ se, somente se, suas coordenadas satisfazem a equação $a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z = d$, onde $d = a \cdot x' + b \cdot y' + c \cdot z'$.

A equação $a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z = d$ é chamada equação cartesiana do plano.

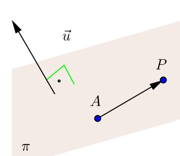

Figura 7.10: Plano determinado por vetores ortogonais

Exemplo 7.21. Determine a equação cartesiana do plano π que passa pelo ponto $A = (1, 1, 2)$ e é normal ao vetor $\vec{u} = (1, 2, -3)$.

Solução: Como $\vec{u} = (1, 2, -3) \perp \pi$, temos

$$\pi : 1 \cdot x + 2 \cdot y + (-3) \cdot z = d$$

onde

$$d = 1 \cdot (1) + 2 \cdot (1) + (-3) \cdot (2) = -3.$$

Portanto,

$$\pi : x + 2y - 3z = -3$$

é a equação cartesiana do plano π.

7.9.2 Equações paramétricas do plano

Sejam A, B e C pontos não colineares e π um plano, de acordo com os resultados anterios temos:

$$P \in \pi \Leftrightarrow s, t \in \mathbb{R} \Rightarrow \overrightarrow{AP} = s \cdot \overrightarrow{AB} + t \cdot \overrightarrow{AC}$$

Reescrevendo

$$P = A + s \cdot \overrightarrow{AB} + t \cdot \overrightarrow{AC}, s, t \in \mathbb{R}$$

Esta equação é chamada equação paramétrica do plano.

Em relação as coordenadas dos pontos $A = (a, b, c)$, $B = (a', b', c')$ e $C = (a'', b'', c'')$ e $P = (x, y, z)$ podemos escrever a equação paramétrica do plano da seguinte forma,

$\overrightarrow{AB} = (a' - a, b' - b, c' - c)$ e $\overrightarrow{AC} = (a'' - a, b'' - b, c'' - c)$ assim,

$$P = A + s \cdot \overrightarrow{AB} + t \cdot \overrightarrow{AC}, s, t \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow (x, y, z) = (a, b, c) + s \cdot (a' - a, b' - b, c' - c) + t \cdot (a'' - a, b'' - b, c'' - c), s, t \in \mathbb{R}$$

ou seja

$$\pi : \begin{cases} x = a + s \cdot (a' - a) + t \cdot (a'' - a) \\ y = b + s \cdot (b' - b) + t \cdot (b'' - b) \\ z = c + s \cdot (c' - c) + t \cdot (c'' - c) \end{cases} ; \quad s, t \in \mathbb{R} \text{ são as equações paramétricas do plano } \pi.$$

Exemplo 7.22. Determine as equações paramétricas do plano π que contém os pontos $A = (1,0,0)$, $B = (1,1,0)$ e $C = (0,0,1)$.

Solução: Temos $\overrightarrow{AB} = (0,1,0)$ e $\overrightarrow{AC} = (-1,0,1)$. Logo,

$$\pi : \begin{cases} x = 1 + 0 \cdot s + (-1) \cdot t \\ y = 0 + 1 \cdot s + 0 \cdot t \\ z = 0 + 0 \cdot s + 1 \cdot t \end{cases} ; \quad s, t \in \mathbb{R} \text{ ou seja}$$

$$\pi : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = s \\ z = t \end{cases} ; \quad s, t \in \mathbb{R}$$

são as equações paramétricas do plano π.

7.10 Equações paramétricas da reta

Suponha que a reta r é paralela a um vetor $\vec{v} = (a,b,c) \neq (0,0,0)$ e que passa por um ponto $P' = (x', y', z')$. Um ponto $P = (x, y, z)$ pertence a reta r se, e somente se, o vetor $\overrightarrow{P'P}$ é paralelo ao vetor $\vec{v}$, isto é, se o vetor $\overrightarrow{P'P}$ é um múltiplo escalar de $\vec{v}$, ou seja,

$$\overrightarrow{P'P} = t \cdot \vec{v}$$

Em termos de suas coodenadas, a equação acima pode ser escrita como

$$(x - x', y - y', z - z') = (t \cdot a, t \cdot b, t \cdot c).$$

Assim, a reta r pode ser descrita como sendo o conjunto dos pontos $P = (x, y, z)$ tais que

$$r : \begin{cases} x = x' + t \cdot a \\ y = y' + t \cdot b \\ z = z' + t \cdot c \end{cases} ; \quad t \in \mathbb{R}$$

As equações acima são chamadas equações paramétricas da reta r.

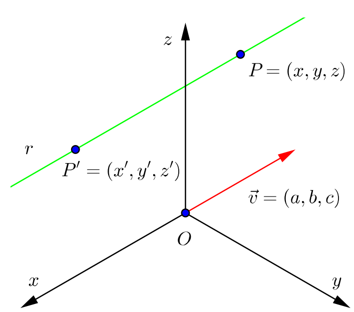

Figura 7.11: Reta r paralela ao vetor $\vec{v} = (a, b, c)$

Exemplo 7.23. As equações da reta r que passa por $P' = (1, 3, 2)$ e é paralela ao vetor $\vec{v} = (2, -1, 3)$ são:

Solução: $r : \begin{cases} x = 1 + 2 \cdot t \\ y = 3 - t \\ z = 2 + 3 \cdot t \end{cases} \quad ; \quad t \in \mathbb{R}$

7.11 Ângulos

Neste capítulo vamos determinar os ângulos formados por duas retas e por dois planos no espaço. Com duas retas no espaço pode ocorrer um dos seguintes casos:
a) As retas se interceptam em um ponto, ou seja, são concorrentes;
b) As retas são paralelas (ou coincidentes);
c) As retas são reversas, isto é, não são paralelas mas também não se interceptam.
Já com dois planos no espaço pode ocorrer um dos seguintes casos:
a) Dois planos π_1 e π_2 são paralelos;
b) Dois planos π_1 e π_2 se cortam segundo um reta.

7.11.1 Ângulo entre retas

Se as retas r_1 e r_2 se interceptam, então elas determinam quatro ângulos, dois a dois opostos pelo vértice. O ângulo entre elas é definido como sendo o menor destes ângulos, figura (7.12).

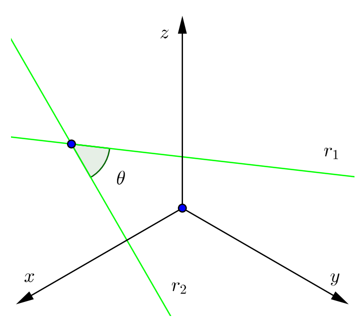

Figura 7.12: Ângulo entre duas retas concorrentes r_1 e r_2

Se as retas são paralelas o ângulo entre elas é igual a zero, figura (7.13).

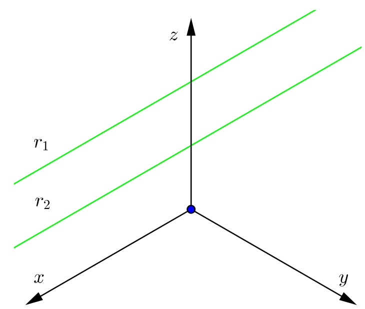

Figura 7.13: Ângulo entre duas retas paralelas r_1 e r_2

Se as retas r_1 e r_2 são reversas, então por um ponto P de r_1 passa um reta r_2' que é paralela a r_2. O ângulo entre r_1 e r_2 é definido como sendo o ângulo entre r_1 e r_2', figura (7.14).

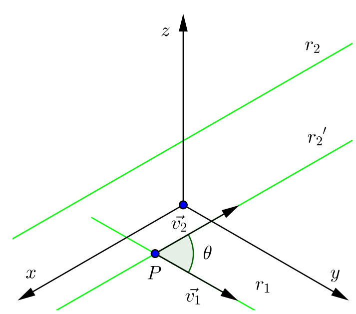

Figura 7.14: Ângulo entre duas retas reversas r_1 e r_2

Em qualquer dos casos, se $\vec{v_1}$ e $\vec{v_2}$ são vetores paralelos a r_1 e r_2 respectivamente, então o cosseno do ângulo entre elas é $cos(r_1, r_2) = |cos\theta|$, em que θ é o ângulo entre $\vec{v_1}$ e $\vec{v_2}$.

Lembrando que da definição (7.11) de produto escalar, podemos encontrar o cosseno do ângulo entre dois vetores, ou seja, $cos\theta = \dfrac{\vec{v_1} \cdot \vec{v_2}}{||\vec{v_1}|| \cdot ||\vec{v_2}||}$.

Isto é suficiente para provar o seguinte resultado.

Proposição 7.24. Sejam duas retas

$$r_1 : \begin{cases} x = x' + t \cdot a_1 \\ y = y' + t \cdot b_1 \\ z = z' + t \cdot c_1 \end{cases} \quad r_2 : \begin{cases} x = x'' + s \cdot a_2 \\ y = y'' + s \cdot b_2 \\ z = z'' + s \cdot c_2 \end{cases} \quad ; \quad t, s \in \mathbb{R}$$

Então o cosseno do ângulo entre r_1 e r_2 é

$$cos(r_1, r_2) = |cos\theta| = \frac{|\vec{v_1} \cdot \vec{v_2}|}{||\vec{v_1}|| \cdot ||\vec{v_2}||}.$$

no qual $\vec{v_1} = (a_1, b_1, c_1)$ e $\vec{v_2} = (a_2, b_2, c_2)$

Exemplo 7.25. Calcule o ângulo entre as retas r_1 e r_2 onde:

$$r_1 : \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 1 - t \\ z = 1 \end{cases} \quad \text{e } r_2 : \begin{cases} x = s \\ y = -4 - 2s \\ z = 1 - 3s \end{cases} \; ; \quad t, s \in \mathbb{R}$$

Solução: De acordo com o que foi visto anteriormente temos que:

$$cos(r_1, r_2) = |cos\theta| = \frac{|\vec{v_1} \cdot \vec{v_2}|}{||\vec{v_1}|| \cdot ||\vec{v_2}||}.$$

no qual $\vec{v_1} = (-2, -1, 0)$ e $\vec{v_2} = (1, -2, -3)$ e,

$|\vec{v_1} \cdot \vec{v_2}| = |(-2, -1, 0) \cdot (1, -2, -3)| = |(-2) \cdot 1 + (-1) \cdot (-2) + 0 \cdot (-3)| = 0.$

Logo:

$|cos\theta| = \dfrac{|\vec{v_1} \cdot \vec{v_2}|}{||\vec{v_1}|| \cdot ||\vec{v_2}||} = \dfrac{0}{||\vec{v_1}|| \cdot ||\vec{v_2}||} = 0.$

Portanto $\theta = \dfrac{\pi}{2}$.

7.11.2 Ângulo entre planos

Se dois planos π_1 e π_2 são paralelos os vetores normais deles são paralelos, ou seja, um vetor é um múltiplo escalar do outro. Assim, π_1 e π_2 são paralelos se, e somente se, o ângulo entre eles é igual a zero, figura (7.15).

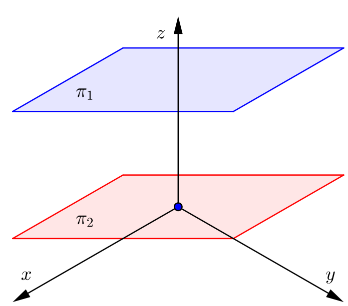

Figura 7.15: Ângulo entre dois planos paralelos π_1 e π_2

Se dois planos π_1 e π_2 não são paralelos, sabemos que possuim vetores normais $\vec{v_1} = (a_1, b_1, c_1)$ e $\vec{v_2} = (a_2, b_2, c_2)$, respectivamente. O ângulo entre π_1 e π_2 é definido como o ângulo entre duas retas perpendiculares a eles, então o cosseno do ângulo entre eles é dado por:

$$cos(\pi_1, \pi_2) = |cos\theta|$$

em que θ é o ângulo entre os vetores normais $\vec{v_1}$ e $\vec{v_2}$ de π_1 e π_2, respectivamente, figura (7.16). Portanto, o cosseno do ângulo entre π_1 e π_2 é:

$$cos(\pi_1, \pi_2) = \frac{|\vec{v_1} \cdot \vec{v_2}|}{||\vec{v_1}|| \cdot ||\vec{v_2}||}$$

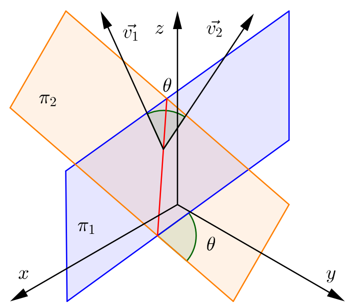

Figura 7.16: Ângulo entre dois planos não paralelos π_1 e π_2

Isto é suficiente para provar o seguinte resultado.

Proposição 7.26. Sejam dois planos,
$\pi_1 : a_1 \cdot x + b_1 \cdot y + c_1 \cdot z + d_1 = 0$
$\pi_2 : a_2 \cdot x + b_2 \cdot y + c_2 \cdot z + d_2 = 0$

Então o cosseno do ângulo entre π_1 e π_2 é,

$$cos(\pi_1, \pi_2) = cos(\vec{v_1}, \vec{v_2}) = \frac{|\vec{v_1} \cdot \vec{v_2}|}{||\vec{v_1}|| \cdot ||\vec{v_2}||}$$

no qual $\vec{v_1} = (a_1, b_1, c_1)$ e $\vec{v_2} = (a_2, b_2, c_2)$ são vetores normais de π_1 e π_2 respectivamente.

Exemplo 7.27. Determine o ângulo entre os planos cujas equações são:
$\pi_1 : -y + 1 = 0$
$\pi_2 : y + z + 2 = 0$

Solução: De acordo com o que foi visto anteriormente temos que:

$\vec{v_1} = (0, -1, 0)$ e $\vec{v_2} = (0, 1, 1)$ são vetores normais de π_1 e π_2 respectivamente.

Logo:

$$cos(\pi_1, \pi_2) = cos(\vec{v_1}, \vec{v_2}) = \frac{|\vec{v_1} \cdot \vec{v_2}|}{||\vec{v_1}|| \cdot ||\vec{v_2}||}$$

$$cos(\pi_1, \pi_2) = \frac{|(0, -1, 0) \cdot (0, 1, 1)|}{\sqrt{(-1)^2} \cdot \sqrt{(1)^2 + (1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Portanto $cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \theta = \dfrac{\pi}{4}$.

7.12 Distâncias

Neste capítulo vamos determinar as distâncias de um ponto a uma plano, de um ponto a uma reta, entre dois plano e entre duas retas. Para isso vamos utilizar o conceito de projeção ortogonal no espaço visto para vetores no plano.

7.12.1 Distância de um ponto a um plano

Dados $P' = (x', y', z')$ um ponto qualquer no espaço e $\pi : ax + by + cz + d = 0$ um plano. A distância de P' a π é definida como sendo a distância de P' até o ponto de π mais próximo de P'. Dado um ponto $\bar{P} = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \in \pi$, podemos decompor o vetor $\overrightarrow{\bar{P}P'}$ em duas parcelas, uma na direção do vetor normal de π, $\vec{v} = (a, b, c)$ e outra perpendicular a ele. A componente na direção do vetor $\vec{v}$ é a projeção ortogonal de $\overrightarrow{\bar{P}P'}$ em $\vec{v}$. Como vemos na figura (7.17), a distância de P' a π é igual à norma da projeção, ou seja,

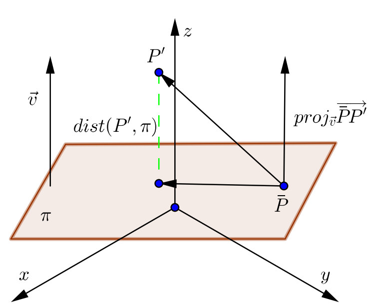

Figura 7.17: Distância de um ponto P' a um plano π

$$dist(P',\pi) = ||proj_{\vec{v}}\overrightarrow{\bar{P}P'}||$$

Mas, pela proposição (3.19), temos que:

$$proj_{\vec{v}}\overrightarrow{\bar{P}P'} = \left(\frac{\vec{v}\cdot\overrightarrow{\bar{P}P'}}{||\overrightarrow{\bar{P}P'}||^2}\right)\overrightarrow{\bar{P}P'} = \frac{|\overrightarrow{\bar{P}P'\cdot\vec{v}}|}{||\vec{v}||}$$

Isto é suficiente para provar o seguinte resultado.

Proposição 7.28. Sejam $P' = (x', y', z')$ um ponto qualquer no espaço e $\pi : ax + by + cz + d = 0$ um plano. A distância de P' a π é dada por:

$$dist(P',\pi) = ||proj_{\vec{v}}\overrightarrow{\bar{P}P'}|| = \frac{|\overrightarrow{\bar{P}P'\cdot\vec{v}}|}{||\vec{v}||}$$

em que $\vec{v} = (a, b, c)$ e $\bar{P} = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \in \pi$.

Exemplo 7.29. Calcule a distância entre o ponto $P' = (1, 2, 3)$ ao plano $\pi : x-2y+z-1 = 0$.

Solução: Fazendo $z = 0$ e $y = 0$ na equação de π, obtemos $x = 1$. Assim, o ponto $\bar{P} = (1, 0, 0) \in \pi$ e $\overrightarrow{\bar{P}P'} = (1-1, 2-0, 3-0) = (0, 2, 3)$ e $\vec{v} = (1, -2, 1)$. Assim,

$$dist(P',\pi) = ||proj_{\vec{v}}\overrightarrow{\bar{P}P'}|| = \frac{|\overrightarrow{\bar{P}P'\cdot\vec{v}}|}{||\vec{v}||} = \frac{|0\cdot 1 + 2\cdot(-2) + 3\cdot 1|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{|-1|}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

7.12.2 Distância de um ponto a uma reta

Dados $P' = (x', y', z')$ um ponto qualquer no espaço e r uma reta. A distância de P' a r é definida como sendo a distância de P' até o ponto de r mais próximo de P'. Dado um ponto $\bar{P} = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \in r$, podemos decompor o vetor $\overrightarrow{\bar{P}P'}$ em duas parcelas, uma na direção do vetor diretor $\vec{v}$ de r e outra perpendicular a ele. A componente na direção do vetor $\vec{v}$ é a projeção ortogonal de $\overrightarrow{\bar{P}P'}$ em $\vec{v}$. Como vemos na figura (7.18),

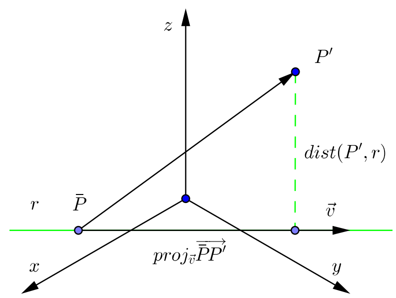

Figura 7.18: Distância de um ponto P' a uma reta r

$$(dist(P',r))^2 + ||proj_{\vec{v}}\overrightarrow{\bar{P}P'}||^2 = ||\overrightarrow{\bar{P}P'}||^2$$

ou seja,

$$(dist(P',r))^2 = ||\overrightarrow{\bar{P}P'}||^2 - ||proj_{\vec{v}}\overrightarrow{\bar{P}P'}||^2 \tag{7.1}$$

Mas, pela proposição (3.19), temos que:

$$||proj_{\vec{v}}\overrightarrow{\bar{P}P'}||^2 = \left|\left|\left(\frac{\vec{v}\cdot\overrightarrow{\bar{P}P'}}{||\overrightarrow{\bar{P}P'}||^2}\right)\vec{v}\right|\right|^2 = \frac{(\overrightarrow{\bar{P}P'}\cdot\vec{v})^2}{||\vec{v}||^2}$$

Substituindo esta expressão em (7.1) e usando a definição do produto escalar e da norma do produto vetorial obtemos ,

$$(dist(P',r))^2 = ||\overrightarrow{\bar{P}P'}||^2 - \frac{(\overrightarrow{\bar{P}P'}\cdot\vec{v})^2}{||\vec{v}||^2} =$$

$$\frac{||\overrightarrow{\bar{P}P'}||^2\cdot||\vec{v}||^2 - (\overrightarrow{\bar{P}P'}\cdot\vec{v})^2}{||\vec{v}||^2} =$$

$$\frac{||\overrightarrow{\bar{P}P'}||^2\cdot||\vec{v}||^2 - ||\overrightarrow{\bar{P}P'}||^2\cdot||\vec{v}||^2\cdot cos^2\theta}{||\vec{v}||^2} =$$

$$\frac{||\overrightarrow{\bar{P}P'}||^2\cdot||\vec{v}||^2 sin^2\theta}{||\vec{v}||^2} =$$

$$\frac{||\overrightarrow{\bar{P}P'}\times\vec{v}||^2}{||\vec{v}||^2}$$

Isto é suficiente para provar o seguinte resultado.

Proposição 7.30. Sejam $P' = (x', y', z')$ um ponto qualquer no espaço e a reta,

$$r : \begin{cases} x = \bar{x} + t \cdot a \\ y = \bar{y} + t \cdot b \\ z = \bar{z} + t \cdot c \end{cases} \; ; \quad t \in \mathbb{R}$$

A distância P' a r é dada por:

$$dist(P', r) = \frac{||\overrightarrow{\bar{P}P'} \times \vec{v}||}{||\vec{v}||}$$

em que $\vec{v} = (a, b, c)$ e $\bar{P} = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \in r$.

Exemplo 7.31. Calcule a distância entre o ponto $P' = (1, 2, 3)$ a reta,

$$r : \begin{cases} x = 1 + 2 \cdot t \\ y = -t \\ z = 2 - 3 \cdot t \end{cases} \; ; \quad t \in \mathbb{R}$$

Solução: Um vetor diretor de r é $\vec{v} = (2, -1, -3)$ e um ponto de r é $\bar{P} = (1, 0, 2)$. Assim,

$$\overrightarrow{\bar{P}P'} = (1 - 1, 2 - 0, 3 - 2) = (0, 2, 1),$$

$$\overrightarrow{\bar{P}P'} \times \vec{v} = (-5, 2, -4),$$

$$||\overrightarrow{\bar{P}P'} \times \vec{v}|| = \sqrt{45}$$

e

$$||\vec{v}|| = \sqrt{14}.$$

Portanto:

$$dist(P', r) = \frac{||\overrightarrow{\bar{P}P'} \times \vec{v}||}{||\vec{v}||} = \sqrt{\frac{45}{14}}$$

7.12.3 Distância entre dois planos

Dados dois planos π_1 e π_2 quaisquer. A distância entre eles é definida como a menor distância entre dois pontos $P' \in \pi_1$ e $\bar{P} \in \pi_2$. Se os seus vetores normais não são paralelos, então os planos são concorrentes e neste caso a distância entre eles é igual a zero. Se os seus vetores normais são paralelos, então os planos são paralelos (ou coincidentes) e a distância entre π_1 e π_2 é igual à distância entre um ponto de um deles, vamos supor o ponto $P' \in \pi_1$ e o ponto de π_2, mais próximo de P', ver figura (7.19). Porém, esta distância é igual à distância de P' a π_2, no qual recaímos no caso anterior em que foi estudado distância de um ponto a um plano.

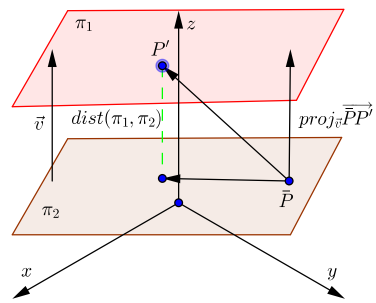

Figura 7.19: Distância entre dois planos π_1 e π_2

Exemplo 7.32. Calcule a distância entre os planos $\pi_1 : x+2y-2z-3 = 0$ e $\pi_2 : 2x+4y-4z-7 = 0$

Solução: Primeiro vamos verificar se os os planos são paralelos, ou seja, se os vetores normais $\vec{v_1}$ e $\vec{v_2}$ de π_1 e π_2 são paralelos, de fato, temos que:

$\vec{v_1} = (1, 2, -2)$ e $\vec{v_2} = (2, 4, -4)$ são paralelos pois $\vec{v_2} = 2 \cdot \vec{v_1}$

Fazendo $z = 0$ e $y = 0$ em ambas as equações obtemos $x' = 3$ e $\bar{x} = \dfrac{7}{2}$. Assim, $P' = (3, 0, 0) \in \pi_1$ e $\bar{P} = (\dfrac{7}{2}, 0, 0) \in \pi_2$. Portanto, pela Proposição (7.28) temos que:

$$dist(P', \pi) = ||proj_{\vec{v}}\overrightarrow{\bar{P}P'}|| = \frac{|\overrightarrow{\bar{P}P' \cdot \vec{v}}|}{||\vec{v}||}$$

$$\frac{\left|\left(3 - \frac{7}{2}, 0-0, 0-0\right) \cdot (1, 2, -2)\right|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} =$$

$$\frac{\left|-\frac{1}{2} \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot (-2)\right|}{\sqrt{9}} = \frac{1}{6}$$

7.12.4 Distância entre duas retas

Dados duas retas r_1 e r_2 quaisquer. A distância entre elas é definida como a menor distância entre dois pontos $P' \in r_1$ e $\bar{P} \in r_2$. Para isso temos que considerar dois casos:
a) As retas r_1 e r_2 são paralelas (ou coincidentes). Neste caso, a distância entre elas é igual à distância entre um ponto $\bar{P} \in r_2$ e a reta r_1 ou entre um ponto $P' \in r_1$ e a reta r_2, ver figura (7.20). Assim, pela Proposição (7.30) temos que:

$$dist(r_1, r_2) = dist(P', r_2) = \frac{||\overrightarrow{\bar{P}P'} \times \vec{v_2}||}{||\vec{v_2}||}$$

em que $\vec{v_2}$ é o vetor diretor de r_2 e $P' \in r_1$ e $\bar{P} \in r_2$.

Porém, esta distância é igual à distância de P' a r_2, no qual recaímos no caso anterior em que foi estudado distância de um ponto a uma reta.

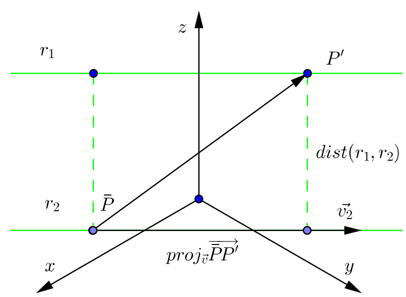

Figura 7.20: Distância entre duas retas paralelas r_1 e r_2

Exemplo 7.33. Determine a distância entre as retas,

$$r_1 : \begin{cases} x = 1 + 4 \cdot t \\ y = -1 - 2 \cdot t \\ z = 2 - 6 \cdot t \end{cases} ; \quad t \in \mathbb{R}$$

$$r_2 : \begin{cases} x = 1 + 2 \cdot s \\ y = -s \\ z = 2 - 3 \cdot s \end{cases} ; \quad s \in \mathbb{R}$$

Solução: As retas r_1 e r_2 são paralelas aos vetores diretores $\vec{v_1} = (4, -2, -6)$ e $\vec{v_2} = (2, -1, -3)$ e passam pelos pontos $P' = (1, -1, 2)$ e $\bar{P} = (1, 0, 2)$, respectivamente. As retas são paralelas, pois seus vetores diretores são paralelos, ou seja, $\vec{v_1} = 2 \cdot \vec{v_2}$. Assim, pela Proposição (7.30) temos que:

$$dist(r_1,r_2) = dist(P',r_2) = \frac{||\overrightarrow{\bar{P}P'} \times \vec{v_2}||}{||\vec{v_2}||}$$
$$dist(r_1,r_2) = \frac{||(0,-1,0) \times (2,-1,-3)||}{||(2,-1,-3)||}$$
$$dist(r_1,r_2) = \frac{||(3,0,-2)||}{\sqrt{2^2+(-1)^2+(-3)^2}}$$
$$dist(r_1,r_2) = \frac{\sqrt{3^2+0^2+(-2)^2}}{\sqrt{14}}$$
$$dist(r_1,r_2) = \sqrt{\frac{13}{14}}$$

b) As retas r_1 e r_2 não são paralelas, são reversas ou concorrentes. Neste caso, elas definem dois planos π_1 e π_2 paralelos ou paralelos coincidentes e a distância entre elas é igual à distância entre estes planos, ver figura (7.21). O vetor $\vec{w} = \vec{v_1} \times \vec{v_2}$, é normal a ambos os planos, em que $\vec{v_1}$ e $\vec{v_2}$ são os vetores diretores de r_1 e r_2 respectivamente. Assim, pela Proposição (7.28) temos que:

$$dist(r_1,r_2) = dist(\pi_1,\pi_2) = dist(\pi_1,\bar{P}) = \frac{|\overrightarrow{\bar{P}P'} \cdot \vec{w}|}{||\vec{w}||}$$
$$dist(r_1,r_2) = \frac{|\overrightarrow{\bar{P}P'} \cdot (\vec{v_1} \times \vec{v_2})|}{||(\vec{v_1} \times \vec{v_2})||}$$

Porém, esta distância é igual à distância de $\bar{P}$ a π_1, no qual recaímos no caso anterior em que foi estudado distância de um ponto a um plano.

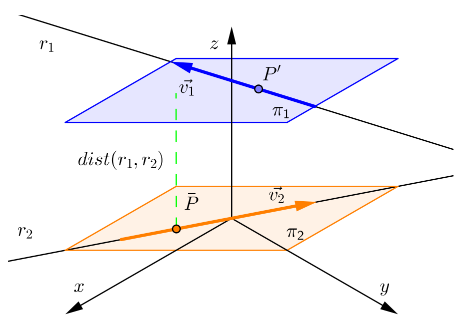

Figura 7.21: Distância entre duas retas reversas r_1 e r_2

Exemplo 7.34. Determine a distância entre as retas,

$$r_1 : \begin{cases} x = -1 + 3 \cdot t \\ y = -1 + 2 \cdot t \\ z = t \end{cases} \; ; \quad t \in \mathbb{R}$$

$$r_2 : \begin{cases} x = s \\ y = 2 \cdot s \\ z = 1 - s \end{cases} \; ; \quad s \in \mathbb{R}$$

Solução: As retas r_1 e r_2 são paralelas aos vetores diretores $\vec{v_1} = (3, 2, 1)$ e $\vec{v_2} = (1, 2, -1)$ e passam pelos pontos $P' = (-1, -1, 0)$ e $\bar{P} = (0, 0, 1)$, respectivamente. As retas não são paralelas, pois seus vetores diretores não são paralelos e,

$$\overrightarrow{P'\bar{P}} = (0 - (-1), 0 - (-1), 1 - 0) = (1, 1, 1)$$

O vetor,

$$\vec{w} = \vec{v_1} \times \vec{v_2} = (-4, 4, 4)$$

é normal a ambos os planos. Assim, pela Proposição (7.28) temos que:

$$dist(r_1, r_2) = dist(\pi_1, \pi_2) = dist(\pi_1, \bar{P}) = \frac{|\overrightarrow{\bar{P}P'} \cdot \vec{w}|}{||\vec{w}||}$$

$$dist(r_1, r_2) = \frac{|1 \cdot (-4) + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 4|}{\sqrt{(-4)^2 + 4^2 + 4^2}}$$

$$dist(r_1, r_2) = \frac{|4|}{4\sqrt{3}}$$

$$dist(r_1, r_2) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$dist(r_1, r_2) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Capítulo 8

Conclusão

De acordo com o exposto, acreditamos que o tratamento vetorial da geometria analítica vai ajudar no processo de ensino e aprendizagem. Assim, com a introdução de vetores no currículo do Ensino Médio do Estado de São Paulo, muitos conceitos na geometria analítica serão vistos de forma mais simples. Os cálculos feitos, para distâncias e equações das retas e planos, ficam mais fáceis de entender e visualizar com as representações geométricas, auxiliando a compreensão do aluno no entendimento da passagem do plano para o espaço.

Vale a pena destacar, além da melhoria que se beneficiará os alunos e professores, que a qualidade e os resultados apresentados estão escritos numa linguagem propícia para o estudo e aplicação em sala de aula.

Por fim uma crença: com um ensino de melhor qualidade o jovem estará mais preparado para suas escolhas futuras.

Referências

[1] João Lucas Marques BARBOSA. *Geometria euclidiana plana*. 11ª ed. SBM, Rio de Janeiro, 2012.

[2] Luiz Roberto DANTE. *Matemática Contexto e Aplicações*. 1ª ed. Editora Ática, São Paulo, 2010.

[3] Secretaria da Educação do Estado de São Paulo. *Currículo do Estado de São Paulo: Matemática e suas tecnologias*. SEE, São Paulo, 2010.

[4] Howard EVES. *Introdução à história da matemática*. 1ª ed. Editora da Unicamp, Campinas, SP, 2008.

[5] Gelson IEZZI et al. *Matemática: ciência e aplicações*. 7ª ed. Editora Saraiva, São Paulo, 2013.

[6] Elon Lages LIMA et al. *A Matemática do Ensino Médio*. 6ª ed. SBM, Rio de Janeiro, 2006.

[7] Genésio Lima dos REIS e Valdir Vilmar da SILVA. *Geometria Analítica*. 2ª ed. LTC, Rio de Janeiro, 2013.

[8] Reginaldo J. SANTOS. *Matrizes Vetores e Geometria Analítica*. 1ª ed. Imprensa universitária, UFMG, Belo Horizonte, MG, 2006.

[9] Alfred North WHITEHEAD. *A ciência e o mundo moderno*. 1ª ed. Editora Paulus, São Paulo, 2006.